3775 Aufgaben der I. bis IV. Stufe der Klassenstufen 5 bis 12 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`http://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019-2023

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben - Klassenstufe 5

1.1 Vorolympiade 1960/61

1.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 5

Aufgabe 1 - V00501
Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet.
Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

Aufgabe 2 - V00502
Nimm eine dreistellige Zahl; allerdings mit der Einschränkung, dass die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen; setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

Aufgabe 3 - V00503 = V00607
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Aufgabe 4 - V00504
Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14076 und 1009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

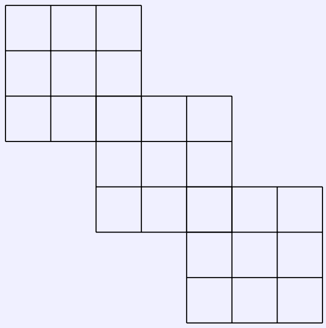
Aufgabe 5 - V00505
Wieviel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kanten1änge unterbringen?

Aufgabe 6 - V00506
1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf.
Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

Aufgabe 7 - V00507
Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: $\star\star\star\star - \star\star\star = 1$.

Aufgabe 8 - V00508
Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen.
Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM.
Wo ist die restliche Mark?

Aufgabe 9 - V00509

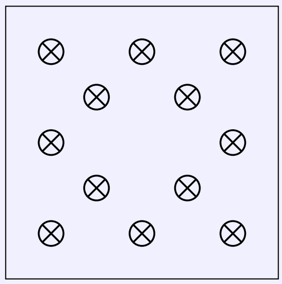


Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, dass die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!

Aufgabe 10 - V00510

Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm!
Schraffiere davon $\frac{4}{9}$ (vier Neuntel)!

Aufgabe 11 - V00511



In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt.
Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, dass auf jedem Stück drei Bäume stehen.

1.2 I. Olympiade 1961

1.2.1 I. Runde 1961, Klasse 5

Aufgabe 1 - 010511
Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, dass an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1757000 t, im Jahre 1960 aber 4158000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
Wieviel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

Aufgabe 2 - 010512
Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang.
Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.

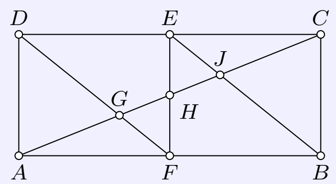
a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

Aufgabe 3 - 010513
Ersetze die fehlenden Ziffern!

```
  * * * · * 2
-------------
  * 0 8
* 6 *
-------------
* 1 2 *
```

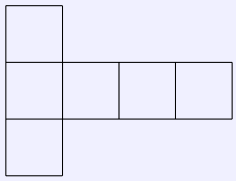
Wie hast du die fehlenden Ziffern gefunden?

Aufgabe 4 - 010514



Wieviel Dreiecke sind in der Figur enthalten? Schreibe alle Dreiecke auf (z.B. ABC)!

Aufgabe 5 - 010515



Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels. Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen.
Versuche, 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge $a = 2$ cm)!

1.2.2 II. Runde 1961, Klasse 5

Aufgabe 1 - 010521
Im Jahre 1961 wurden in der DDR 70000 t Schlachtvieh und Geflügel, 115000 t Milch und 300000000 Eier mehr auf den Markt gebracht als im Jahre 1960. Die Einwohnerzahl unserer Republik beträgt rund 17000000.
Wieviel Schlachtvieh und Geflügel, wieviel Milch und wieviel Eier konnte jeder Bürger unserer Republik im Jahre 1961 zusätzlich verbrauchen? Runde auf volle Kilogramm bzw. volle Stückzahlen!

Aufgabe 2 - 010522
Bei einem Probeflug von Moskau zur sowjetischen Südpolar-Beobachtungsstation Mirny über insgesamt 25300 km legte ein Flugzeug vom Typ "IL 18" die letzten 6700 km in zwei Etappen zurück. Dabei war die erste Etappe um rund 1 700 km länger als die zweite.
Wieviel Kilometer betrugen die beiden Etappen?

Aufgabe 3 - 010523
Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, dass jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.
Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 4 - 010524
Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60$ cm und der Breite $b = 15$ cm sollen 12 kleine Brettchen von der Größe 5 cm mal 15 cm ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen.
Wieviel Schnitte muss er mindestens durchführen? (Das Sägen "im Paket" soll dabei nicht gestattet sein.) Wieviel Zentimeter beträgt der Sägeweg?

Aufgabe 5 - 010525
Zeichne ein beliebiges Dreieck und nenne seine Winkel α, β und γ!
Konstruiere mit Zirkel und Lineal außerhalb des Dreiecks den Winkel $\alpha + \beta + \gamma$! Wie groß ist der konstruierte Winkel vermutlich?

1.3 II. Olympiade 1962

1.3.1 I. Runde 1962, Klasse 5

Aufgabe 1 - 020511
Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mussten etwa 7100 m^3 Boden abtransportiert werden:

a) Wieviel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4 m^3 Boden transportieren kann?
b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug“ gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3 m hat?

Aufgabe 2 - 020512
„Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen“, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

Aufgabe 3 - 020513
Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück.
Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.
Wann muss sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

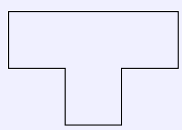
Aufgabe 4 - 020514
Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich. Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

```
4 * * · * 2 *
-------------
  * 3 * *
      * 1 2
      * * 4 *
-------------
  * * * * * 8
```

Aufgabe 5 - 020515
An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian.
Weiter wissen wir nur, dass unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muss er so heißen?

Aufgabe 6 - 020516
Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, dass die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?



1.3.2 II. Runde 1962, Klasse 5

Aufgabe 1 - 020521
Während der Herbstferien waren viele Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.

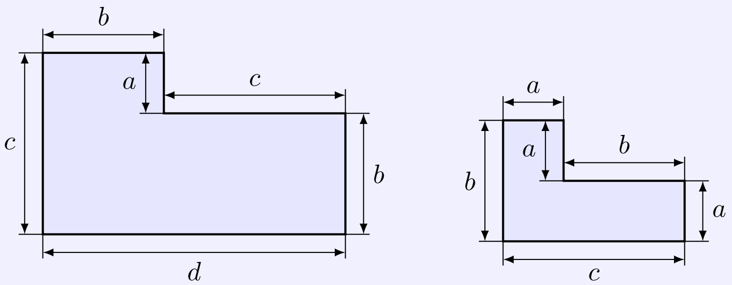
a) Wieviel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes insgesamt gesammelt? (Angabe in dt)
b) Wieviel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg beträgt?

Aufgabe 2 - 020522
Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft“ wird etwa 4000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.

a) Wieviel Tonnen sind das in einer Minute?
b) Wieviel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

Aufgabe 3 - 020523
Petra spielt mit Werner eine Partie Schach.
Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“
Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, dass die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“
(Die Bahn fährt alle 20 Minuten.)
Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

Aufgabe 4 - 020524
Die Abbildung zeigt zwei verschieden große Flächen. ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $d = 10$ cm)



a) Wie oft ist die kleine Fläche in der großen enthalten?
b) Weise die Richtigkeit dieser Behauptung durch eine Zeichnung nach!

Aufgabe 5 - 020525
Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm und $CD = 4$ cm ab!
Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe deine Antwort durch Rechnung!

1.4 III. Olympiade 1963

1.4.1 I. Runde 1963, Klasse 5

Aufgabe 1 - 030511
Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich.
Wieviel Kleinstroller wurden im Jahre 1963 mehr produziert als im Jahre 1958? Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

Aufgabe 2 - 030512
Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er:
„Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“

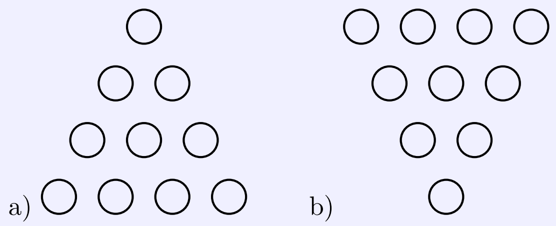
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

Aufgabe 3 - 030513
Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht: Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

$$13 * \cdot \quad 7* = 1 * * * *$$

alle * so durch Ziffern ersetzt werden, dass alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und dass beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle.
Was hast du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

Aufgabe 4 - 030514



Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, die die Abbildung a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, dass die auf der Abbildung b) dargestellte Anordnung entsteht.

a) Wie viel Pfennige muss man mindestens umlegen?

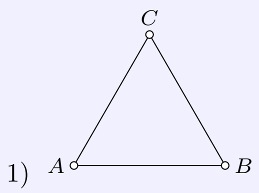
b) Welche Pfennige sind das? Kreuze sie an!

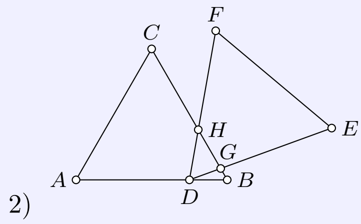
Aufgabe 5 - 030515
Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:
Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel, Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!
b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

Aufgabe 6 - 030516

Gegeben seien die beiden unter 1) abgebildeten Dreiecke. Sie haben dabei keinen Punkt gemeinsam. Wenn sie dagegen so liegen wie auf der Abbildung 2), haben sie genau drei Punkte, nämlich D, G und H, gemeinsam.





Wie können die Dreiecke liegen, wenn sie genau

a) einen Punkt, b) zwei Punkte, c) vier Punkte, d) fünf Punkte, e) sechs Punkte

gemeinsam haben sollen?

Zeichne die Dreiecke in diesen verschiedenen Lagen!

1.4.2 II. Runde 1963, Klasse 5

Aufgabe 1 - 030521
Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff "Wostok 6" rund 48mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.
Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

Aufgabe 2 - 030522
In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wieviel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich - 26 Arbeitstage - angefertigt?
b) Wieviel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

Aufgabe 3 - 030523
Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wieviel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz:
„Jeder von uns hat eine ungerade Zahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück.“
Was meinst du zu dieser Behauptung?

Aufgabe 4 - 030524
Klaus, Ingrid, Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

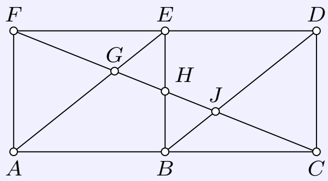
a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe deine Antwort!
b) Wieviel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

Aufgabe 5 - 030525
Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen $a = 3$ cm (Länge), $b = 2$ cm (Breite) und $c = 1$ cm (Höhe)!

1.5 IV. Olympiade 1964

1.5.1 I. Runde 1964, Klasse 5

Aufgabe 1 - 040511



Wieviel Dreiecke erkennst du in der obigen Figur?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf, z.B. $\triangle ABE$; $\triangle ACF$.

Aufgabe 2 - 040512
Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von:

1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg.

zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden.

Wieviel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

Aufgabe 3 - 040513
Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m^2 bzw. 200 m^2 besitzen.
Wieviel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

Aufgabe 4 - 040514
In Mücheln (Geiseltal, Bez. Halle) wurde die längste Eisenbahnbrücke der DDR fertiggestellt. Sie besteht aus 7 gleichen Brückenbögen.
Für einen Brückenbogen wurden 147 m^3 Beton verwendet. 1 m^3 Beton hat eine Masse von 24 dt.
Wieviel Tonnen Beton wurden für den Brückenbau benötigt? (Runde auf ganze Tonnen!)

Aufgabe 5 - 040515
Gegeben seien ein Rechteck von 120 mm Länge und 60 mm Breite und ein zweites von 150 mm Länge und 60 mm Breite.

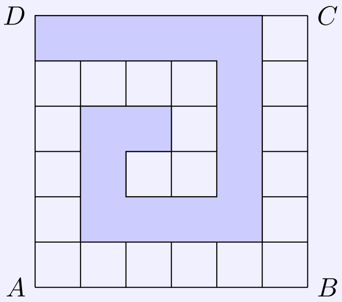
a) Zerlege die beiden Rechtecke so, dass beim Zusammenfügen aller Teile zwei gleichgroße Quadrate entstehen!
b) Ist es möglich, jedes Rechteck nur in zwei Teile zu zerlegen und dennoch zwei gleichgroße Quadrate zusammenfügen zu können?
Fertige zu a) und b) je eine Zeichnung an!

Aufgabe 6 - 040516
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

1.5.2 II. Runde 1964, Klasse 5

Aufgabe 1 - 040521
Zwei Dreher übernahmen am 11. Januar 1965 (früh) den Auftrag, 1100 Werkstücke herzustellen. Der erste Dreher stellt 19 Werkstücke je Tag her, der zweite täglich 3 Stück mehr als der erste.
An welchem Tage werden sie bei gleichbleibender Leistung je Tag mit dieser Arbeit fertig, wenn an den Sonntagen nicht, an den Sonnabenden ausnahmsweise voll gearbeitet wird?

Aufgabe 2 - 040522



Teile die Seiten eines Quadrats in sechs gleiche Teile und ziehe von dem Mittelpunkt M aus den aus der Abbildung ersichtlichen blauen Streifenzug. Eine Seite des Quadrats hat eine Länge von 12 cm.

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Streifens!

Aufgabe 3 - 040523
a) Wieviel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?

b) Bei wievielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d.h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

Aufgabe 4 - 040524
Während einer Vorstellung im "Theater der Jungen Welt" in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze.
Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt.
Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wusste, dass es im Theater 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädel mehr als Jungen anwesend waren?

1.6 V. Olympiade 1965

1.6.1 I. Runde 1965, Klasse 5

Aufgabe 1 - 050511
In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen.
Wieviel Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Aufgabe 2 - 050512
Gegeben:

```
1 2 = 3
1 2 3 = 4
1 2 3 4 = 5
1 2 3 4 5 = 6
1 2 3 4 5 6 = 7
1 2 3 4 5 6 7 = 8
1 2 3 4 5 6 7 8 = 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10
```

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, dass wahre Ausagen in Form von Gleichungen entstehen.
(Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden. Zu jeder Aufgabe genügt eine Lösung.)

Aufgabe 3 - 050513
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck! Zeichne in das Sechseck alle möglichen Diagonalen ein!
Wieviel Diagonalen findest Du? Zähle sie auf, indem du sie benennst (z.B. AB, ...)!

Aufgabe 4 - 050514
Gerd, Fred, Heinz und Werner befinden sich auf dem Weg zur Schule. Fred ist noch dreimal so weit entfernt von der Schule wie Gerd. Heinz hat bis zur Schule noch den vierfachen Weg von Gerd zurückzulegen.
Werner muss noch 2, 4 km bis zur Schule laufen; das ist die doppelte Länge von Freds Weg.

a) Welche Strecken müssen die einzelnen Schüler noch zurücklegen, bis sie die Schule erreicht haben?
b) Wieviel Minuten vergehen, bis alle Schüler in der Schule angekommen sind, wenn jeder Schüler für je 100 m genau 90 sec braucht?

1.6.2 II. Runde 1965, Klasse 5

Aufgabe 1 - 050521
Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)
b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

Aufgabe 2 - 050522
Für die fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d, e gelten die folgenden Ungleichungen:
$a > e$; $b < c$; $c > e$; $d < e$; $a > b$; $b < d$; $c > a$; $a > d$;
Ordne diese Zahlen der Größe nach an!

Aufgabe 3 - 050523
Für jeden von 600000 Einwohnern Leipzigs werden 125 kg Kartoffeln eingekellert.

a) Berechne die bereitzustellende Menge in Tonnen!
b) Welches ist die größte Anzahl von Güterwagen mit je 15 t Ladefähigkeit, die mit dieser Menge voll beladen werden können?
c) Wieviel Tonnen werden durchschnittlich an jedem Tag ausgeliefert, wenn der erste Auslieferungstag der 17.9. und der letzte Auslieferungstag der 14.10. ist und auch an Sonn- und Feiertagen ausgeliefert wird?

Aufgabe 4 - 050524
Ermittle die fehlenden Ziffern!

```
6 x · x x x
-----------
x x
  x x
    x x
-----------
x x x 6
```

1.7 VI. Olympiade 1966

1.7.1 I. Runde 1966, Klasse 5

Aufgabe 1 - 060511
Laut Jahresplan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli wurden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.

a) Berechne die hinreichende kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember hergestellt werden müssen, damit das Werk seinen Plan erfüllt!
b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,- MDN kostet!

Aufgabe 2 - 060512
Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Aufgabe 3 - 060513
Ein Betrieb kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm drei verschiedene Gehäuse, vier verschiedene Zifferblätter und zwei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren an, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen!

Aufgabe 4 - 060514
Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

1.7.2 II. Runde 1966, Klasse 5

Aufgabe 1 - 060521
In jeder von fünf Kisten befindet sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren. Ermittle die Gesamtzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden !

Aufgabe 2 - 060522
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 3 - 060523
Die Zahl 97236 ist in sechs Summanden zu zerlegen.

Der erste Summand ist gleich dem neunten Teil dieser Zahl, der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, der dritte ist um 12792 kleiner als der zweite Summand, der vierte dreimal so groß wie der dritte und der fünfte ist ebenso groß wie der dritte Summand.
Wie lauten die sechs Summanden?

Aufgabe 4 - 060524
Hans nimmt am Training der Sektion Leichtathletik seiner Schulsportgemeinschaft teil. Eine der Übungen besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand.
Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Hans legt die Strecke auf folgende Weise zurück:
Zwei Schritte vor, nachfedern, dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor ... u.s.f., bis er die zweite Fahnenstange erreicht.

Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 5 dm beträgt?

1.8 VII. Olympiade 1967

1.8.1 I. Runde 1967, Klasse 5

Aufgabe 1 - 070511
Unter einer Diagonalen eines ebenen Vielecks mit 3 oder mehr Ecken versteht man die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken des ebenen Vielecks.
Gibt es ebene konvexe Vielecke (d.h. Vielecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist), bei denen

a) die Anzahl der Diagonalen halb so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
b) die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
Wenn es solche Vielecke gibt, dann zeichne jeweils ein Beispiel dafür!

Aufgabe 2 - 070512
Ein Bezirk plante, die Instandsetzung dreier Straßen durchzuführen. Die erste Straße hat eine Länge von 8 km, die zweite eine Länge von 7 km, die dritte eine Länge von 6 km. Für jeden Kilometer wurden 3000 MDN Kosten vorgesehen.
Eine der drei Straßen war nur wenig beschädigt, so dass man für diese mit der Hälfte der Kosten pro Kilometer auskam, während bei jeder der beiden anderen genau die eingeplante Summe verwendet wurde. Die Gesamtkosten für die Instandsetzung betrugen 51000 MDN.
Für welche der drei Straßen wurde nicht die eingeplante Summe verwendet?

Aufgabe 3 - 070513
Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die folgendes gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Tausenderziffer.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die fünfstellige Zahl ändert.

Aufgabe 4 - 070514
Im Ferienlager erhält eine Zeltbelegung von ihrem Pionierleiter den Auftrag, in der Küche beim Kartoffelschälen zu helfen. Von sechs Jungen sollen drei für diese Tätigkeit ausgewählt werden.
Welches ist die Anzahl aller Möglichkeiten, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

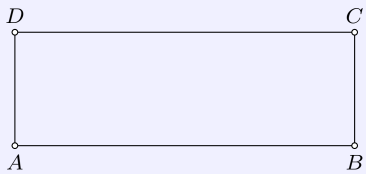
1.8.2 II. Runde 1967, Klasse 5

Aufgabe 1 - 070521
Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft. (In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.)

Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

Aufgabe 2 - 070522
Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, dass die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

Aufgabe 3 - 070523



Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Abbildung) mit folgenden Seitenlängen: $AB = 6$ cm und $BC = 2$ cm.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\angle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

Aufgabe 4 - 070524
Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus:

"Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten.
Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die An- zahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben.
Die Anzahl der richtigen (s. Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen."

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

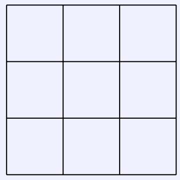
1.9 VIII. Olympiade 1968

1.9.1 I. Runde 1968, Klasse 5

Aufgabe 1 - 080511
Auf einer Großbaustelle sind drei Bagger eingesetzt. Bei gleichbleibender Leistung befördern sie in 20 min insgesamt 90 m^3 Erde. Für die Bedienung dieser drei Bagger ist ein Kollektiv von insgesamt sechs Arbeitern notwendig. Wir nehmen an, dass an Stelle dieser drei Bagger sechs Erdarbeiter diese Arbeit verrichten müssten.
Nach wie viel Arbeitstagen würden sie frühestens die 90 m^3 Erde ausgehoben haben, wenn jeder der Erdarbeiter an jedem Arbeitstag durchschnittlich 5 m^3 Erde bewegt?

Aufgabe 2 - 080512

Setze die Vielfachen der Zahl 3 von 3 bis 27 so in die einzelnen Felder des Quadrates ein, dass die Summen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht) und jeder Diagonale (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) gleich sind!



Aufgabe 3 - 080513
Annerose bringt aus dem Garten Äpfel und Pflaumen mit.
Als sie nach Hause kommt, wird sie von ihrem Bruder Gerd gefragt: "Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hast du mitgebracht?"
Verschmitzt antwortet Annerose: "Es sind zusammen weniger als 50 Stück, und zwar dreimal so viel Pflaumen wie Äpfel. Wenn Mutter von den mitgebrachten Äpfeln und Pflaumen jedem von uns vier Geschwistern je einen Apfel und je eine Pflaume gibt, bleiben noch viermal so viel Pflaumen wie Äpfel übrig."

Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hatte sie mitgebracht?

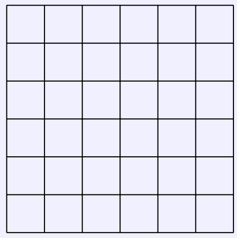
Aufgabe 4 - 080514
Fünf Flächen eines Würfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich. Danach wird dieser Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viel dieser kleinen Würfel haben 0; 1; 2; 3 bzw. 4 rot angestrichene Flächen?

Anleitung: Du kannst dir auch zur Veranschaulichung einen Würfel von 3 cm Kantenlänge basteln. Zerlege jede Fläche in Quadratzentimeter!

1.9.2 II. Runde 1968, Klasse 5

Aufgabe 1 - 080521

Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!



Aufgabe 2 - 080522
In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wie viel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wie viel in dem zweiten Lagerraum?

Aufgabe 3 - 080523
Heinz fragt Gerd: "Wie viel Jahre bist du alt?"
Gerd antwortet: "Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt."

Berechne, wie viel Jahre Gerd alt ist!
(Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

Aufgabe 4 - 080524
Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

1.10 IX. Olympiade 1969

1.10.1 I. Runde 1969, Klasse 5

Aufgabe 1 - 090511

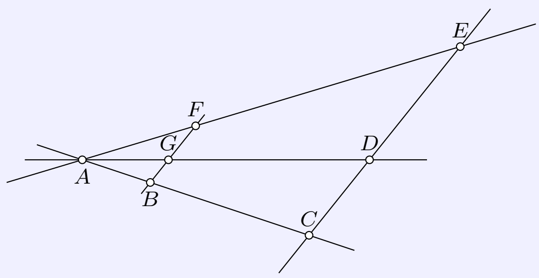
Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!
Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 090512
In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wie viel er dafür bezahlt habe.
"Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte", antwortete Wassja, "und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken."

(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)
Wie viel Kopeken kostete das eine und wie viel das andere Album?

Aufgabe 3 - 090513



Die Abbildung zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C, eine durch A, F, E, eine durch A, G, D, eine durch B, G, F und eine durch C, D, E geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$.

$$\text{Wir wollen sagen } \left\{ \begin{array}{l} \text{eine Strecke} \\ \text{ein Dreieck} \\ \text{ein Trapez} \end{array} \right\} \text{ gehört der Zeichnung an; wenn } \left\{ \begin{array}{l} \text{ihre Endpunkte zwei} \\ \text{seine Eckpunkte drei} \\ \text{seine Eckpunkte vier} \end{array} \right\} \text{ der}$$

$$\text{Punkte } A, B, C, D, E, F, G \text{ sind und wenn } \left\{ \begin{array}{l} \text{die Strecke} \\ \text{alle Seiten des Dreiecks} \\ \text{alle Seiten des Trapezes} \end{array} \right\} \text{ schon vollständig gezeich-}$$

$$\text{net in der Abbildung } \left\{ \begin{array}{l} \text{vorkommt.} \\ \text{vorkommen.} \\ \text{vorkommen.} \end{array} \right\}$$

Beispiele: Die Strecke AB, das Dreieck $\triangle ABF$ "gehören der Zeichnung an". Die Strecke BD "gehört der Zeichnung" nicht "an", auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\triangle ABD$.

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die "der Zeichnung angehören"!

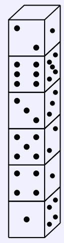
Aufgabe 4 - 090514
Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.
Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen.

Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

1.10.2 II. Runde 1969, Klasse 5

Aufgabe 1 - 090521

Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abbildung zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.



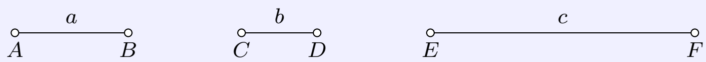
Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!

Beachte dabei, dass die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

Aufgabe 2 - 090522
In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.

Wie viel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

Aufgabe 3 - 090523



Gegeben seien drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (2a + 3b - c)$!
Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 090524
Ermittle alle natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

(a) z ist ungerade;
(b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
(c) $500 < z < 1000$.

1.11 X. Olympiade 1970

1.11.1 I. Runde 1970, Klasse 5

Aufgabe 1 - 100511

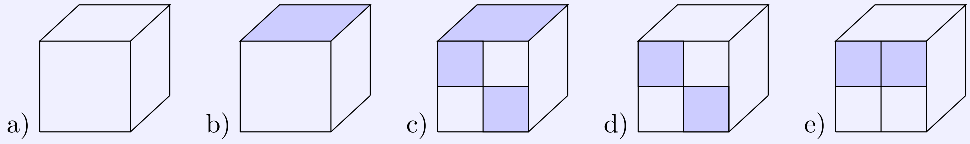


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt unter a) bis e) von fünf Würfeln je ein Schrägbild.

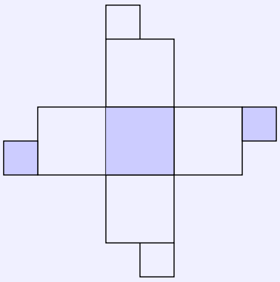


Abbildung 2

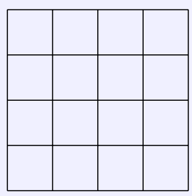
Die Abbildung 2 zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.
Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz (Abbildung 2) hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht!
(In den Fällen, in denen die Antwort "Ja" lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort "Nein" lautet, ist sie zu begründen.)

Aufgabe 2 - 100512
In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

Aufgabe 3 - 100513
Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes einzutragen, dass als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird!
(Keine Begründung erforderlich)



Aufgabe 4 - 100514
Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter:

"Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück.

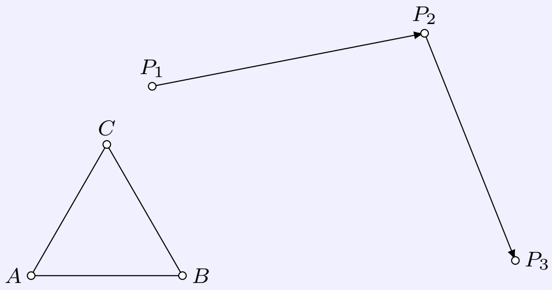
Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken."

Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, dass diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	...
Anzahl der sowjetischen Marken	...
Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...

1.11.2 II. Runde 1970, Klasse 5

Aufgabe 1 - 100521



Auf der Abbildung sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ abgebildet. Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 2 - 100522

```
#@ + 8 = 3§
 -   -    -
1% + § = 1§
-----------
1@ + 3 = #%
```

Gib sämtliche Lösungen des Kryptogramms (siehe Abbildung) an, d.h. ersetze die geometrischen Figuren so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, dass zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

Aufgabe 3 - 100523
Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft "Junge Botaniker" unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstbau.
Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet.
Berechne, wie viel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

Aufgabe 4 - 100524
Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig.
Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wie viel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zu viel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

1.12 XI. Olympiade 1971

1.12.1 I. Runde 1971, Klasse 5

Aufgabe 1 - 110511
Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1780 km zurück. Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen 8 Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken!

Aufgabe 2 - 110512
Rolf behauptet, dass sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1000 bilden lässt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt, und zwar insgesamt genau 8 mal.

Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist!
Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

Aufgabe 3 - 110513
Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 so, dass sie

a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte

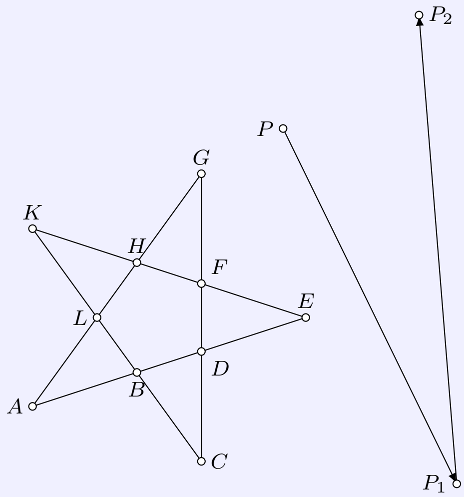
miteinander haben!

Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z.B. $g_1 \parallel g_2$).

Aufgabe 4 - 110514
Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden.
Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen.
Annerose sagt: "Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen."
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

1.12.2 II. Runde 1971, Klasse 5

Aufgabe 1 - 110521



Auf der Abbildung sind eine Sternfigur $ABCDEFGHKL$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet.
Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 110522
Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarkstücke und kein weiteres Geld bei sich.
In Monikas Kasse befinden sich genau 20 Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken.
Sie behauptet, dass es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten.
Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmark- oder welches Zweimarkstück gegeben wird.

Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.
Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

Aufgabe 3 - 110523
Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969.
Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968.
Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

Aufgabe 4 - 110524
Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(a) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
(c) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner ist als z.

1.13 XII. Olympiade 1972

1.13.1 I. Runde 1972, Klasse 5

Aufgabe 1 - 120511
Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende - schon im Altertum bekannte - Knobelaufgabe:

Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen. In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.

Nach wieviel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

Aufgabe 2 - 120512
Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:

(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.
(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.
(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennisspieler.
(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.
(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.
(6) Keiner der Tischtennisspieler spielt auch Handball.
(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.

Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt!
Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

Aufgabe 3 - 120513
Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.

Wieviel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

Aufgabe 4 - 120514
Erklärung: Mit der Schreibweise einer "fortlaufenden Ungleichung" $a < b < c < d$ drückt man aus, dass die drei Ungleichungen $a < b$, $b < c$ und $c < d$ gelten. Es gelten dann auch die Ungleichungen $a < c$, $a < d$ und $b < d$.

Aufgabe:
Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:

(1) $z > x$
(2) $z < w$
(3) $w > x$
(4) $x < y$
(5) $y > w$
(6) $z < y$

Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

1.13.2 II. Runde 1972, Klasse 5

Aufgabe 1 - 120521
In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei muss jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.

```
4 * * · 3 * *
-------------
  * * * 5
    3 * * *
        8 * *
-------------
  * * * * 3 *
```

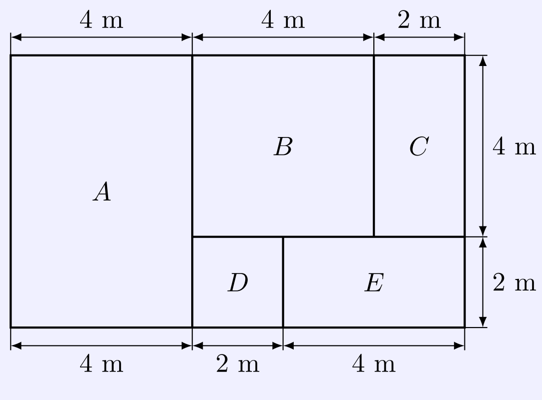
Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

Aufgabe 2 - 120522
Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wusste, dass die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch.
Weise nach, dass Günters Meinung richtig ist!

Aufgabe 3 - 120523
In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne.
Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, dass unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen.

Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

Aufgabe 4 - 120524



Die Abbildung stellt den Grundriss einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.

a) Zeichne den Grundriss dieser Wohnung im Maßstab 1:100!
b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden.

Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!

1.14 XIII. Olympiade 1973

1.14.1 I. Runde 1973, Klasse 5

Aufgabe 1 - 130511
a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen. b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r = 3$ cm und nummeriere die Schnittpunkte.

Aufgabe 2 - 130512
Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, dass am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.

a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wieviel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muss, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d.h. wenn das Schneiden "im Paket" nicht gestattet ist!

Aufgabe 3 - 130513
Das Dreifache der Summe der Zahlen 38947 und 12711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden.
Wie lautet der Quotient?

Aufgabe 4 - 130514
Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7.
Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, dass 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese 3 Zirkel gibt es in diesem Klub nicht.

Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, dass 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören.
Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an.

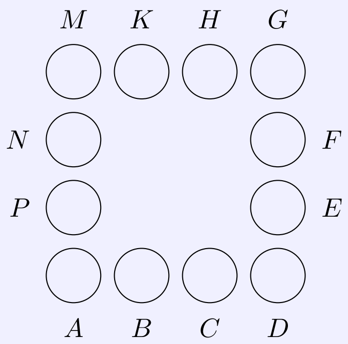
Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten! (Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

1.14.2 II. Runde 1973, Klasse 5

Aufgabe 1 - 130521
Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.
Stelle fest, wieviel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

Aufgabe 2 - 130522
Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T, der auf keiner der beiden Geraden liegt!
Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g_1' und g_2' der beiden Geraden!

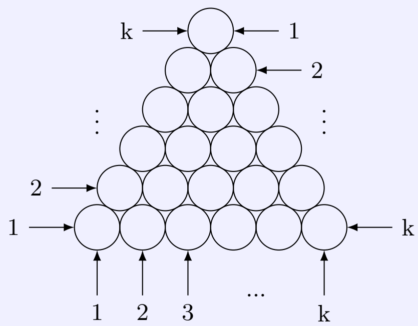
Aufgabe 3 - 130523



In die 12 Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P der Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, dass die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.

a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

Aufgabe 4 - 130524



Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer "Pyramide" aufgeschichtet worden.
In jeder Schicht sind die Büchsen so "im Dreieck" angeordnet, wie die Abbildung zeigt.

Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden "Seitenkante des Dreiecks" beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.
Ermittle die Anzahl aller in der "Pyramide" enthaltenen Büchsen!

1.15 XIV. Olympiade 1974

1.15.1 I. Runde 1974, Klasse 5

Aufgabe 1 - 140511
Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:

(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

Aufgabe 2 - 140512
Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von 12600 cm^2 und ein Volumen von 1323 dm^3.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

Aufgabe 3 - 140513
Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade Junger Mathematiker.
Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich, Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

Aufgabe 4 - 140514
Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau 2 Partien. Insgesamt wurden an 24 Tagen je 3 Partien ausgetragen.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

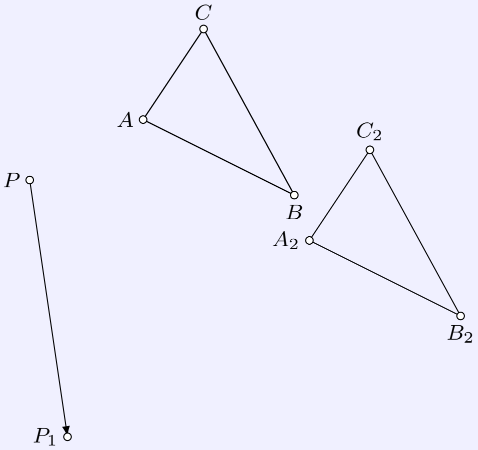
1.15.2 II. Runde 1974, Klasse 5

Aufgabe 1 - 140521

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, dass auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$, und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 140522
Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.

Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wieviel kosteten die 4 Flaschen Brause?

Aufgabe 3 - 140523
Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte.
Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief. Wieviel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

Aufgabe 4 - 140524
Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen.
Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen.
Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

1.16 XV. Olympiade 1975

1.16.1 I. Runde 1975, Klasse 5

Aufgabe 1 - 150511
Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 1080000 t.

Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müsste!
Dabei sei angenommen, dass dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und dass jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wieviel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

Aufgabe 2 - 150512
Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p + 3) < 22$
c) $23 > (3g - 3) \geq 3$,
und für die $(3g - 3)$ eine natürliche Zahl ist!

Gib die Lösungsmenge so an, dass die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind! Beginne stets mit der kleinsten!

Aufgabe 3 - 150513
Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie.
Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Ziel!

Aufgabe 4 - 150514
An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen.
Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

1.16.2 II. Runde 1975, Klasse 5

Aufgabe 1 - 150521
Die Werktätigen des Flachglaskombinates Torgau beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 135000 m^2 Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus.
Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

Aufgabe 2 - 150522
Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, dass wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x = y : 40$,
(2) $z = 4 \cdot u$,
(3) $u = 280 : 7$,
(4) $160 = v + 40$,
(5) $y = z + v$.

Aufgabe 3 - 150523
Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:

(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.

Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

Aufgabe 4 - 150524
Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A.
Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:

(1) Die Strecke AB ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke BC ist um 0,3 dm länger als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CE ist genauso lang wie die Summe der Strecken AB und BC.
(4) Die Strecke DE ist um 50 mm kürzer als die Strecke CE.

Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke AD (in cm)!

1.17 XVI. Olympiade 1976

1.17.1 I. Runde 1976, Klasse 5

Aufgabe 1 - 160511
In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:

Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:

(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.
(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.
(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H.

Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha".
Wie groß ist diese Leserzahl?"

Aufgabe 2 - 160512
Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Strecke AE hat die Länge $AE = 18$ cm.
(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.
(3) Die Strecke CD hat die Länge $CD = 5$ cm.
(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.

a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!
b) Ermittle die Längen der Strecken AD, AB, BC!

Als Lösung genügt:
a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und
b) die Ermittlung der Streckenlängen AD, AB, BC aus den Bedingungen (1) bis (4).

Aufgabe 3 - 160513
Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen. Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g.
Wieviel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

Aufgabe 4 - 160514
Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.

a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!
b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

1.17.2 II. Runde 1976, Klasse 5

Aufgabe 1 - 160521

A	·	A	=	B
+		·		-
C	·	D	=	E
F	-	G	=	H

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

Aufgabe 2 - 160522
Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.
Wieviel Zeit brauchten sie, um dieselbe Strecke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

Aufgabe 3 - 160523
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $AB = 4$ cm!
Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!
Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 160524
Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden. Wieviele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

1.18 XVII. Olympiade 1977

1.18.1 I. Runde 1977, Klasse 5

Aufgabe 1 - 170511
Die Oberschule "Wilhelm Pieck" hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation "Ernst Thälmann".
Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

Aufgabe 2 - 170512
Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:

(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.
(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.
(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.
(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.
(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.
(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.

Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

Aufgabe 3 - 170513
Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist.
Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind. Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.
Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

Aufgabe 4 - 170514
Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, dass folgendes gilt:

(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.
(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.
(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.

Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

1.18.2 II. Runde 1977, Klasse 5

Aufgabe 1 - 170521
Im Schulgarten steckten Schüler auf einem 8 m^2 großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wieviel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

Aufgabe 2 - 170522
Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel.
Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wieviel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

Aufgabe 3 - 170523
Eine Fläche von 1710 m^2 ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe 150 m^2 oder die Größe 210 m^2.
Wieviel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

Aufgabe 4 - 170524
Drei vorgegebene Strecken AB, CD, EF und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$AB = a + b =$ 5,6 cm; $CD = a - b =$ 1,8 cm; $EF = b + c =$ 6,2 cm.

Zeichne drei derartige Strecken AB, CD, EF, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!

1.19 XVIII. Olympiade 1978

1.19.1 I. Runde 1978, Klasse 5

Aufgabe 1 - 180511
Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wieviel Nüsse es sind.

Gerda meint: "Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück."
Renate meint: "Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen."
Peter sagt: "Eine von euch beiden hat bestimmt recht."

Nach dem Auszählen wurde festgestellt, dass Peter sich geirrt hatte.
Wieviel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

Aufgabe 2 - 180512
Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.

a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
b) Wie viele von den kleinen Würfeln hätten drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?

Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 3 - 180513

	31		
	26	20	
			8

In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, dass sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und dass für jede Zeile und jede Spalte gilt:

Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.
Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an! Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

Aufgabe 4 - 180514
Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen "Trabant", "Wartburg", "Skoda" und "Wolga". Die Anzahl der Wagen vom Typ "Trabant" ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt:
Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ "Wartburg" wie von den Typen "Skoda" und "Wolga" zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ "Skoda" als vom Typ "Wolga".
Wieviel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

1.19.2 II. Runde 1978, Klasse 5

Aufgabe 1 - 180521
Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene.
Wieviel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

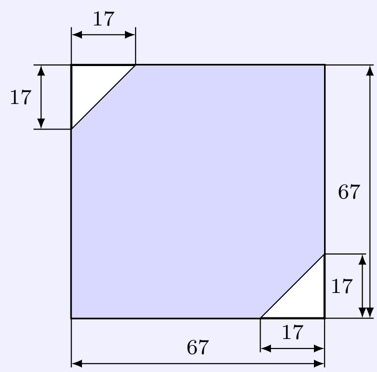
Aufgabe 2 - 180522
Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.

Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 3 - 180523
Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren.
Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Aufgabe 4 - 180524



Die abgebildete farbige Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der farbigen Fläche (in cm^2) zu berechnen.

1.20 XIX. Olympiade 1979

1.20.1 I. Runde 1979, Klasse 5

Aufgabe 1 - 190511
(Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v.d.Z.)
In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.
Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

Aufgabe 2 - 190512

In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, dass alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

4	+	☐	-	☐	=	2
+		-		+		+
☐	-	2	+	0	=	☐
-		+		-		-
☐	+	☐	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	☐	=	3

Aufgabe 3 - 190513
Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften “Mathematik”, “Biologie”, “Zeichnen”. Ferner ist bekannt:

(1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG “Mathematik”.
(2) Der Junge aus der AG “Mathematik” und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
(3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG “Biologie”.
Welcher der drei Jungen besucht die AG “Mathematik”, welcher die AG “Biologie” und welcher die AG “Zeichnen”?

Aufgabe 4 - 190514
Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?
Wir wollen dabei annehmen, dass jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist.
Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

1.20.2 II. Runde 1979, Klasse 5

Aufgabe 1 - 190521
In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A, B, C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt.
Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A. Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B. Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D.

a) Wieviel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?
b) Wieviel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

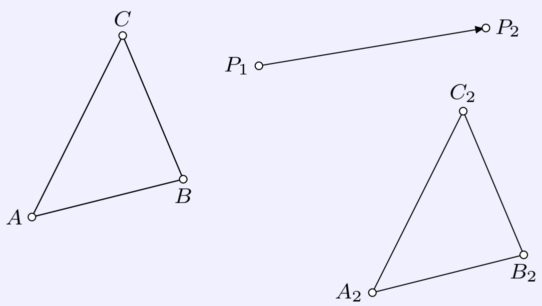
Aufgabe 2 - 190522
In einem Bericht eines Schülers über einen 60 m-Lauf war zu lesen:

"Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen."

Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 3 - 190523
Auf diesem Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit folgender Eigenschaft:

Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.



Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit dieser Eigenschaft!
Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimetereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!

Aufgabe 4 - 190524
Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, dass in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und daß dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

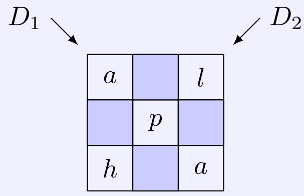
$$\begin{array}{ccccccc} x & y & z & \cdot & 8 & x & z \\ \hline & x & x & 8 & 8 & & \\ & & & \square & \square & x & \\ & & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

1.21 XX. Olympiade 1980

1.21.1 I. Runde 1980, Klasse 5

Aufgabe 1 - 200511



Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift alpha stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl p das Dreifache der Zahl a sein, und die Zahl h soll das Fünffache der Zahl l sein.

Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann!
Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 2 - 200512
Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wieviel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

Aufgabe 3 - 200513
Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen.
Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra.
Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluss verwirklichen wollen?

Aufgabe 4 - 200514
Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1.
Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die

a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1 hatten!

1.21.2 II. Runde 1980, Klasse 5

Aufgabe 1 - 200521
Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.
Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.
Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

Aufgabe 2 - 200522
Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark Schein oder ein 20-Mark-Schein.
Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

Aufgabe 3 - 200523
Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.
(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

Aufgabe 4 - 200524
Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)

Im Gespräch stellen sie fest, dass einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und dass einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:

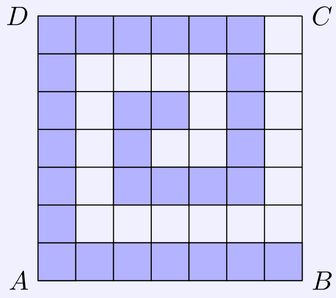
(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, dass er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.
(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: "Das weiß ich schon, Kurt."
(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, dass er Besuch aus Suhl gehabt habe.

In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

1.22 XXI. Olympiade 1981

1.22.1 I. Runde 1981, Klasse 5

Aufgabe 1 - 210511



Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abbildung zeigt. Der Streifenzug ist farbig hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!

Aufgabe 2 - 210512
Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte.
Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wieviel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

Aufgabe 3 - 210513

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & 0 & 0 & - & \square & \square & = & \square & \square & \square \\
 & : & & & & + & = & & - & \\
 & \square & \square & \cdot & \square & \square & = & 6 & 0 & 8 \\
\hline
 & 2 & 5 & + & \square & 3 & = & \square & \square & \square
\end{array}$$

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 210514
Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:

Ein "Oktoberkind" (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:

(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.

Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

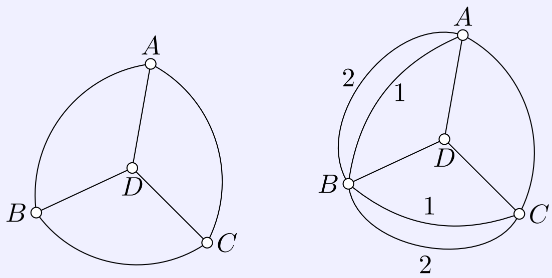
1.22.2 II. Runde 1981, Klasse 5

Aufgabe 1 - 210521
Ein Behälter, der mit Sonnenblumenöl gefüllt ist, wiegt 17 kg 500 g. Der leere Behälter würde 2 kg 700 g wiegen.

a) Wieviel Liter Öl befinden sich in dem Behälter, wenn 1 Liter Sonnenblumenöl 925 g wiegt ?
b) Für den Ladenverkauf wird das Öl in Flaschen zu 400 g abgefüllt. Wieviel Flaschen lassen sich mit dem im Behälter befindlichen Öl füllen?

Aufgabe 2 - 210522
Die vier Springbrunnen A, B, C, D eines Parkes sind so durch Wege verbunden, wie es das Bild zeigt. Ein Spaziergänger möchte so durch den Park gehen, dass er jeden dieser Wege genau einmal durchläuft. Ein solcher Spaziergang soll bei einem beliebigen Brunnen beginnen und bei einem beliebigen Brunnen (nicht unbedingt bei demselben) enden.

a) Untersuche, ob ein derartiger Spaziergang möglich ist!
b) Später wurde noch ein weiterer Weg zwischen B und A und ein weiterer Weg zwischen B und C angelegt, wie das Bild zeigt.
Untersuche, ob es danach möglich ist, einen Spaziergang der gewünschten Art zu machen!



Hinweis: Lautet bei a) oder b) die Antwort, dass ein derartiger Spaziergang nicht möglich ist, so beweise, warum nicht!
Lautet die Antwort aber, dass er möglich ist, so gib einen solchen Spaziergang an!

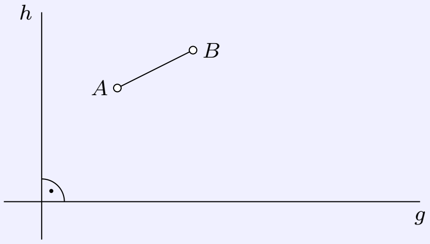
Aufgabe 3 - 210523
Vier Schüler mit den Familiennamen Erdborn, Freimuth, König und Meyer haben die Vornamen Alfred, Martin, Norbert und Torsten (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge).
Sie treffen sich auf der Geburtstagsfeier ihres Mitschülers Franz Neubert. Außer ihnen nahmen keine weiteren Personen an dieser Feier teil. Es ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Franz seinen Mitschüler Meyer begrüßen, als zweiten Norbert und danach Erdborn und später Martin.
(2) Jeder Gast brachte genau ein Geschenk mit: Meyer hatte ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Martin einen Strauß Rosen und König ein Buch mitgebracht.

Wie heißen die vier Schüler mit ihren Vor- und Familiennamen?

Aufgabe 4 - 210524
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g, h und eine Strecke AB gegeben. Konstruiere einen Verschiebungspfeil PQ parallel zu h und danach einen Verschiebungspfeil RS parallel zu g, und zwar so, dass folgendes gilt:

Wenn man die Strecke AB durch die Verschiebung PQ in die Strecke $A'B'$ überführt und diese danach durch die Verschiebung RS in die Strecke $A''B''$, so liegt A'' auf g und B'' auf h.



Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

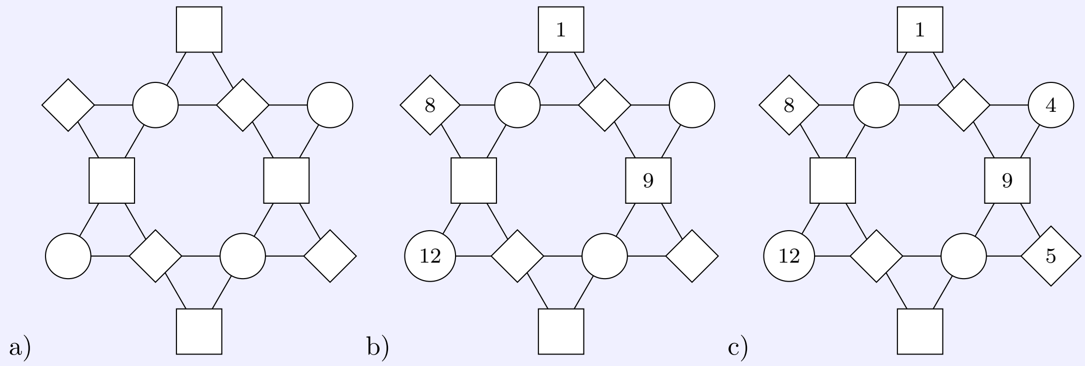
1.23 XXII. Olympiade 1982

1.23.1 I. Runde 1982, Klasse 5

Aufgabe 1 - 220511
In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, dass folgendes gilt:

Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;
die Summe der Zahlen in den vier auf einer Ecke stehenden Quadrate beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.

a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!
b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!
c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z.B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs "äußeren" Felder steht!



Aufgabe 2 - 220512
Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.
Wieviel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

Aufgabe 3 - 220513
Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135$$
$$M + A + T + H + E = 32$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben A, B, E, H, I, J, M, R, T so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: "Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht."
Welche drei Zahlen sind dies!
b) Bertolt sagt: "Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet." Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?
c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung. Welche könnte es z.B. sein?

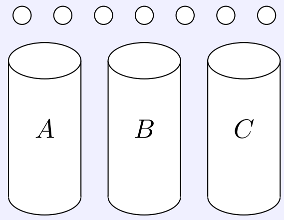
Aufgabe 4 - 220514
Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, dass sie die geforderten Eigenschaft hat!
Wieviel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?
b) Beweise, dass in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!
Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

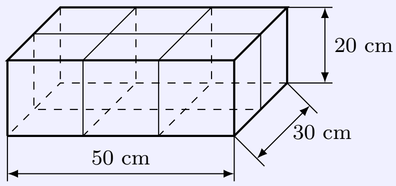
1.23.2 II. Runde 1982, Klasse 5

Aufgabe 1 - 220521

Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A, B und C zu verteilen, dass im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen.
Es dürfen auch Becher leer bleiben.
Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!



Aufgabe 2 - 220522



Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.
Wie viel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

Aufgabe 3 - 220523
Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor:

500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft.
100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wieviel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind.
Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

Aufgabe 4 - 220524
Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.
Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt so viel kostet wie ein Heft?

1.24 XXIII. Olympiade 1983

1.24.1 I. Runde 1983, Klasse 5

Aufgabe 1 - 230511
Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom. Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit den 2. Preis ist älter als Bernd.
(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom?
Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2 - 230512
Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen einen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang diesen Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang sind seine drei Seiten?

Aufgabe 3 - 230513
Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, dass richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a + b + c = 21$,
(2) $b \cdot c = 42$,
(3) $c + d = 70 : b$,
(4) $e : a = d$,
(5) $c = 54 : 9$,
(6) $a + b + c + d + e + f = 60$

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

Aufgabe 4 - 230514

3	$+$		$-$		$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
	$\cdot$		$:$		$= 3$
$-$		$-$		$+$	
	$+$		$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

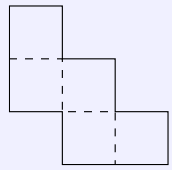
In die leeren Felder der Abbildung sind natürliche Zahlen so einzusetzen, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.
a) Gib eine solche Einsetzung an!
b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

1.24.2 II. Runde 1983, Klasse 5

Aufgabe 1 - 230521
Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5 mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.
Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!

Beispiele:
$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3 = (3 + 3 + 3) : 3 : 3$
$7 = (33 - 3) : 3 - 3 = 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3$

Aufgabe 2 - 230522
Mit 12 gleichlangen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden. Die Abbildung zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt.



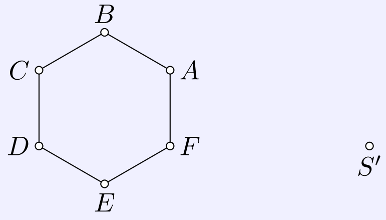
(Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.)
Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von

a) 6 Flächeneinheiten,
b) 7 Flächeneinheiten,
c) 8 Flächeneinheiten,
d) 9 Flächeneinheiten!

Aufgabe 3 - 230523
Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fuhren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.
Wieviel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfuhren?

Aufgabe 4 - 230524
In der nachstehenden Abbildung sind ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ und ein Punkt S' gegeben.
Der Schnittpunkt der Diagonalen AD, BE und CF des Sechsecks sei S.
Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der S den Bildpunkt S' hat.

Konstruiere den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{SS'}$ und das Bild $A'B'C'D'E'F'$ des Sechsecks $ABCDEF$ bei dieser Verschiebung!

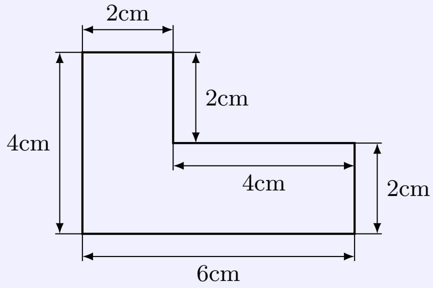


1.25 XXIV. Olympiade 1984

1.25.1 I. Runde 1984, Klasse 5

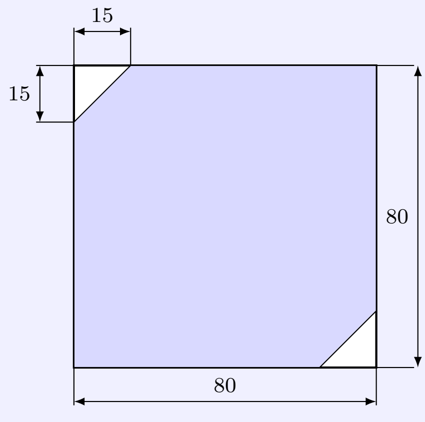
Aufgabe 1 - 240511

Aus Flächenstücken wie in der Abbildung kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt.
Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich?
Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!



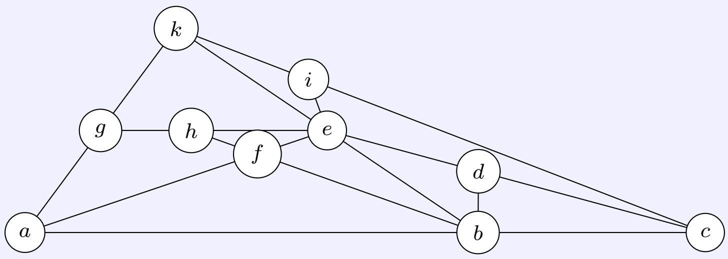
Aufgabe 2 - 240512
Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36.
Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

Aufgabe 3 - 240513



Die farbige Fläche in der Abbildung entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der farbigen Fläche in Quadratzentimeter!

Aufgabe 4 - 240514



In die Felder der Abbildung soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

$$15 = a+b+c = a+f+e = a+g+k = b+d = b+e+k = b+f+h = c+d+e = c+i+k = e+h+g = e+i$$

(a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, dass $e = 5$ und $k = 2$ ist!
(b) Gib eine weitere von (a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in (a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)
(c) Beweise, dass es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

1.25.2 II. Runde 1984, Klasse 5

Aufgabe 1 - 240521
Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten. Ihm ist bekannt:

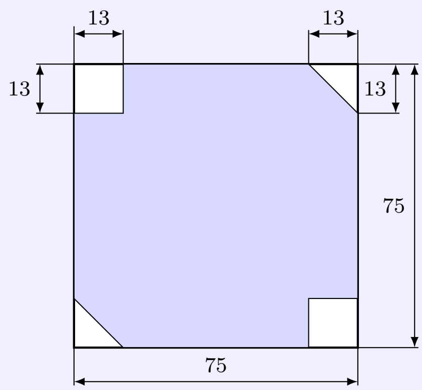
(1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
(2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspielerin aber nicht.
(3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
(4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennisspielerin.

Beweise, dass die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

Aufgabe 2 - 240522
In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt. Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:

Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.
Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

Aufgabe 3 - 240523



Die abgebildete farbige Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem man von ihm zwei gleichgroße Dreiecke und zwei gleichgroße Quadrate abschneidet.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der farbigen Fläche!

Aufgabe 4 - 240524
Peter berichtet: ”Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058.”

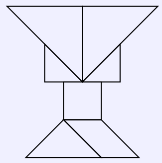
Beweise, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufge- schrieben hat!
Gib diese Zahl an!

1.26 XXV. Olympiade 1985

1.26.1 I. Runde 1985, Klasse 5

Aufgabe 1 - 250511

Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich
a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.
Gib je eine Möglichkeit dafür an!



Aufgabe 2 - 250512

Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt, hat verloren und muss einen Pfand geben.

Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll. Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, dass dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

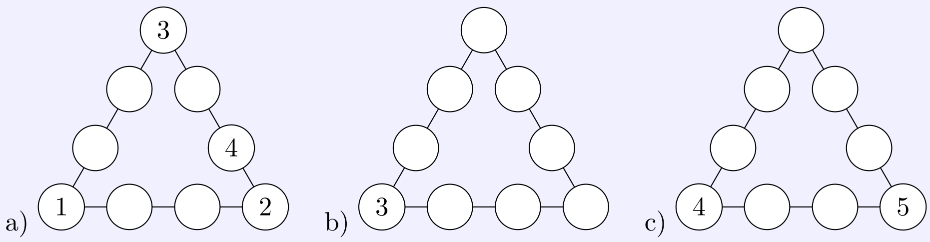
Aufgabe 3 - 250513

Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wieviel bezahlte der dritte Kunde?

Aufgabe 4 - 250514

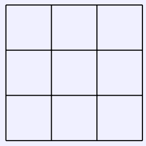
In jede der Abbildungen a), b), c) sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden.
Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten:

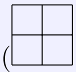
Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.
a) Finde eine Eintragung in Abbildung a), bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!
b) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung b), bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!
c) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung c), bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!



1.26.2 II. Runde 1985, Klasse 5

Aufgabe 1 - 250521



In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Abbildung) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht.

Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.
Beantworte folgende Fragen:
a) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (6×6)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 250522
Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein.
Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen.
Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.10 Uhr ab. Die Busfahrer begrüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.

Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

Aufgabe 3 - 250523
Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, daß die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.

a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, dass es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

Aufgabe 4 - 250524
Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $A'B' = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft!

Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, dass außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, dass weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!
Eine Begründung und Konstruktionsbeschreibungen werden nicht verlangt.

1.27 XXVI. Olympiade 1986

1.27.1 I. Runde 1986, Klasse 5

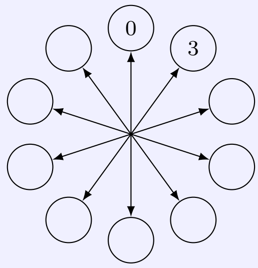
Aufgabe 1 - 260511
Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, dass keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat.
Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: "Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht. Grit!"
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

Aufgabe 2 - 260512

a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise der Abbildung eingetragen werden, dass jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.

Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.

Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!



b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 lässt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?

c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$, $n + 6$, $n + 7$, $n + 8$, $n + 9$!

d) Begründe deine Lösung von c)!

Aufgabe 3 - 260513
Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wieviel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach.

Dieser antwortet: "Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht."

Wieviel Kaninchen und wieviel Tauben besitzt Holger? Begründe deine Antworten!

Aufgabe 4 - 260514
Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen.
Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere. Nachdem dies geschehen ist, lässt Klaus Knobler

(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen.

Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?

Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

1.27.2 II. Runde 1986, Klasse 5

Aufgabe 1 - 260521
Auf der DDR-Olympiade Junger Mathematiker treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt?
Wer sind die beiden, die schon in Vorjahr an der DDR- Olympiade teilgenommen haben?

Aufgabe 2 - 260522
Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.
a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch. Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?
b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmerken so nebeneinander legen, daß sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

Aufgabe 3 - 260523
Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, dass $4 \cdot AC = AD$ und $CB = BD$ gilt.
Wie groß sind dafür AC und AD zu wählen?
Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen AC und AD kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

Aufgabe 4 - 260524
Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen lässt:

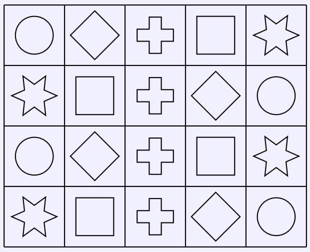
(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
(2) Hierzu ist 5 zu addieren.
(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.
(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.

Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.
a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
b) Weise nach, dass das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

1.28 XXVII. Olympiade 1987

1.28.1 I. Runde 1987, Klasse 5

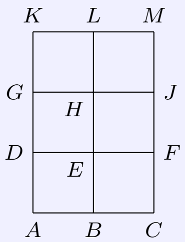
Aufgabe 1 - 270511



Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, dass sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).
Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 270512
Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47 mal so lang sein wie die kleinere.
Wie lang muss dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 3 - 270513



Die Abbildung zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.
Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 270514
a) Die Figur der Abbildung a soll so "in einem Zuge" gezeichnet werden, dass dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.
Ein solcher "Zug" kann z.B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen "Zug" und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!
b) Auch die Figur der Abbildung b lässt sich in einem Zuge so zeichnen, dass jede Linie genau einmal durchlaufen wird. Gib mindestens einen derartigen "Zug" an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

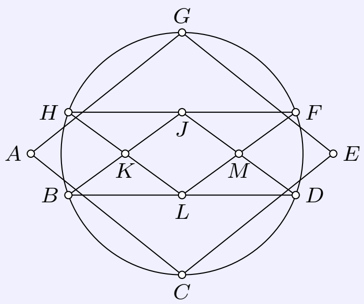


Abbildung a)

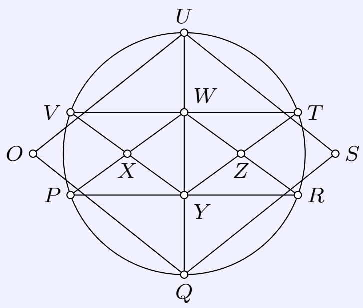


Abbildung b)

1.28.2 II. Runde 1987, Klasse 5

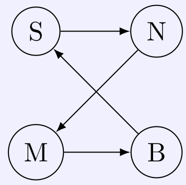
Aufgabe 1 - 270521
Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:

(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.

Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

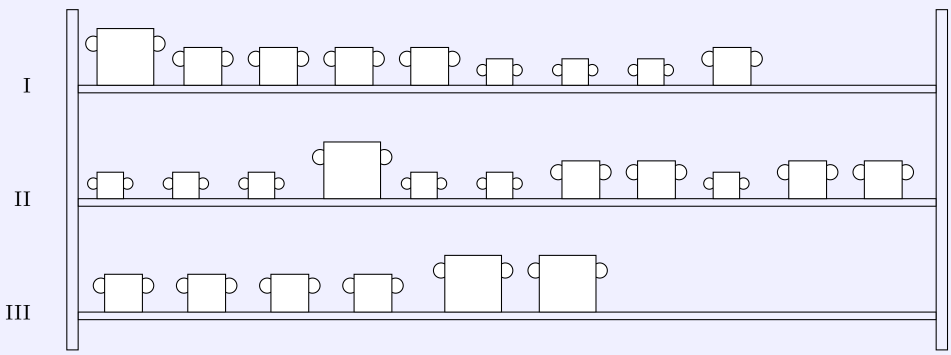
Aufgabe 2 - 270522

Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin (S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Abbildung).
Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann!
Wie viel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Aufgabe 3 - 270523
In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis. Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer.
Wieviel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse?
Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin?
Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

Aufgabe 4 - 270524



Die Abbildung zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?
Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, dass bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

1.29 XXVIII. Olympiade 1988

1.29.1 I. Runde 1988, Klasse 5

Aufgabe 1 - 280511

	9	

In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, dass die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.
Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 2 - 280512
Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen. Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!
b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.
Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

Aufgabe 3 - 280513
Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.
Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

Aufgabe 4 - 280514
a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1;9)$, $B(4;6)$ und $C(6;10)$!
Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, dass jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke!
Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.
Beschreibe eine solche Überlegung!
d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

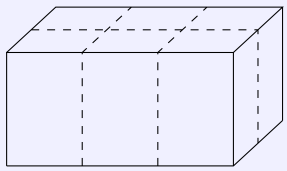
1.29.2 II. Runde 1988, Klasse 5

Aufgabe 1 - 280521
In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.

a) Wieviel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.
Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

Aufgabe 2 - 280522

Das in der Abbildung abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch.
Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.
Wie viel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht? Wie viel Meter sind das?



Aufgabe 3 - 280523
a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!

b) Von einer Verschiebung wird verlangt, dass bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und daß die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.
Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?
Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!

c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!

Aufgabe 4 - 280524
a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wieviel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, dass von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden.

Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, dass dafür schon 4 Kugeln reichen.
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren.
Gib an und begründe, wieviel Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um zu sichern, dass 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!
Zeige, dass die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

1.30 XXIX. Olympiade 1989

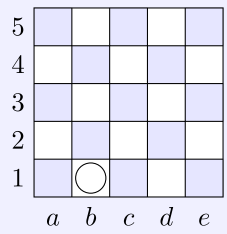
1.30.1 I. Runde 1989, Klasse 5

Aufgabe 1 - 290511
Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so dass sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

Aufgabe 2 - 290512
Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, dass die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1478 beträgt!
(Ein Nachweis, dass es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

Aufgabe 3 - 290513
Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d.h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.

Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist.
Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!



Aufgabe 4 - 290514
a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC'}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

1.30.2 II. Runde 1989, Klasse 5

Aufgabe 1 - 290521

Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, dass jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.
Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, dass es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

1			
		2	
	3		
			4

Aufgabe 2 - 290522

Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, dass die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel. Weiter bemerkt sie, dass das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, dass Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

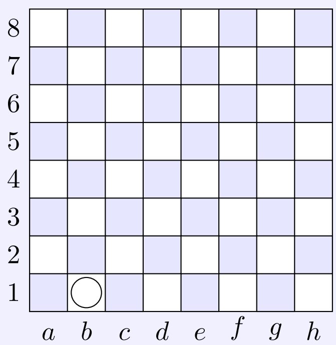
Aufgabe 3 - 290523

Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.

Zeige, dass es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an!
Überprüfe auch, dass die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 4 - 290524



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld g8 gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld e8 gelangen kann!

1.31 XXX. Olympiade 1990

1.31.1 I. Runde 1990, Klasse 5

Aufgabe 1 - 300511
Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d.h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!
b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!
c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!
d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

Aufgabe 2 - 300512
Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

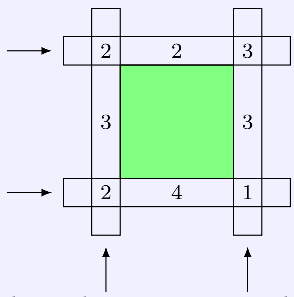
Aufgabe 3 - 300513
Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wieviel Muscheln sie im Beutel haben.

Fritz meint: "Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig."
Hans meint: "Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen."
Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: "Keiner von euch beiden hat recht."

Wieviel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

Aufgabe 4 - 300514

In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.



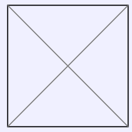
a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile, und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!
c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist! Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

1.31.2 II. Runde 1990, Klasse 5

Aufgabe 1 - 300521

a) Die Abbildung zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.
Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.



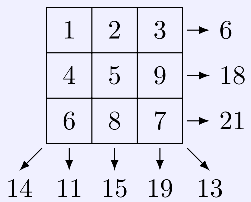
b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, dass sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

Aufgabe 2 - 300522
Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:

(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.

a) Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

Aufgabe 3 - 300523



a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3 x 3 Feldern eintragen, dass keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel hierfür.

Gib zwei weitere Beispiele an, die aus der Abbildung weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!

b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2 x 2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, dass keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 4 - 300524
An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, dass sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, dass bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

1.32 XXXI. Olympiade 1991

1.32.1 I. Runde 1991, Klasse 5

Aufgabe 1 - 310511
a) In die neun Felder eines 3×3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.

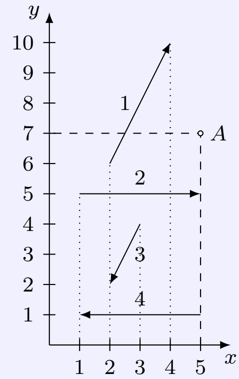
b) In die Felder eines 4×4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingungen wie bei a) erfüllt sein.
Gib je eine geforderte Eintragung an!
Stelle bei a) und b) jeweils fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, durch Vertauschen von Spalten miteinander oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 310512
Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

a) Zeige, dass für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!
b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler Vor- und Familiennamen eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

Aufgabe 3 - 310513

Die Abbildung zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4.
Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''.
Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen musst, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Aufgabe 4 - 310514
Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.
a) Sebastian vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: "Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden."
Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, dass es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen. Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!

Ein Begründung wird nicht verlangt.

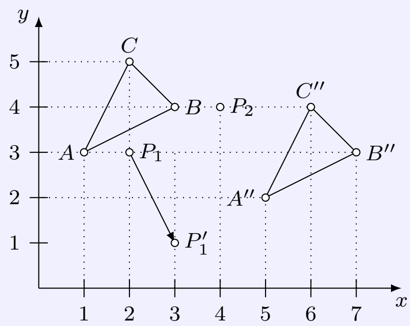
1.32.2 II. Runde 1991, Klasse 5

Aufgabe 1 - 310521
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch niemals die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln wiederholen.

a) Nenne ein Beispiel für eine Reihe, die diese Bedingungen erfüllt und nicht mehr durch Anlegen eines weiteren Würfels verlängert werden kann!
b) Es gibt insgesamt vier solche Reihen; sie sind nicht alle gleichlang. Nenne alle diejenigen, die möglichst große Länge haben!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 310522

In der Abbildung sind gegeben: Zwei Dreiecke ABC und $A''B''C''$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sowie ein Punkt P_2.
a) Konstruiere das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$!
b) Konstruiere den bei P_2 beginnenden Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_2P_2'}$ derjenigen Verschiebung, bei der $A'B'C'$ das Bild $A''B''C''$ hat!
Eine Beschreibung der Konstruktionen wird nicht verlangt.



Aufgabe 3 - 310523
Nach einem 100 m-Lauf, an dem 5 Sportler teilnahmen, fragt jemand, in welcher Reihenfolge sie ins Ziel kamen. Gert erinnert sich:

(1) Achim kam eher ins Ziel als Christian.
(2) Zeitgleich mit Emil kam kein anderer ins Ziel, und zwar war Emil der Dritte oder der Vierte.
(3) Frank kam nicht eher ins Ziel als Bernd.
(4) Frank kam jedoch eher ins Ziel als Achim.

Nenne alle hiernach bestehenden Möglichkeiten der Reihenfolge! Zeige, dass nur bei den von dir genannten Möglichkeiten Gerts Aussagen wahr sind!
Hinweis: Beachte, dass es für die gesuchten Möglichkeiten der Reihenfolge einen Unterschied bedeutet, ob zwei Sportler gleichzeitig ins Ziel kamen oder nicht!

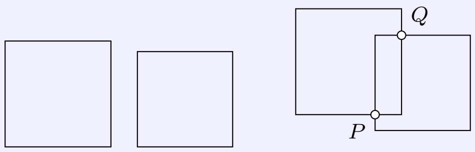
Aufgabe 4 - 310524
Klaus möchte an die Ecken eines Achtecks die Zahlen 1, 2, ... , 8 schreiben, an jede Ecke eine Zahl. Er will dann für jede Ecke die Summe aus den drei Zahlen bilden, die an dieser Ecke und an ihren beiden Nachbarecken stehen. Er möchte erreichen, dass jede der so gebildeten acht Summen
a) größer als 11 ist,
b) größer als 13 ist.
Gib für jedes der beiden Vorhaben a), b) an, ob es sich erfüllen lässt!
Ist es erfüllbar, so belege dies durch ein Beispiel mit der Angabe der acht Summen!
Ist das betreffende Vorhaben a) bzw. b) nicht erfüllbar, so begründe, warum nicht!

1.33 XXXII. Olympiade 1992

1.33.1 I. Runde 1992, Klasse 5

Aufgabe 1 - 320511
Gegeben seien zwei unterschiedlich große Quadrate, wie sie hier dargestellt sind:

Bei der linken Abbildung haben sie keinen gemeinsamen Punkt, bei der rechten genau zwei, nämlich P und Q. Wie können die Quadrate liegen, wenn sie genau
(a) einen Punkt
(b) drei Punkte
(c) vier Punkte
(d) fünf Punkte
(e) sechs Punkte
(f) sieben Punkte
gemeinsam haben sollen? Zeichne die Quadrate in diesen verschiedenen Lagen.



Aufgabe 2 - 320512
Gesucht ist die größte sechsstellige Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Zahl ist gerade.
b) Die Zehnerziffer stellt eine dreimal so große Zahl dar wie die Zehntausenderziffer.
c) Die Einer- und die Tausenderziffer kann man vertauschen, ohne daß sich die sechsstellige Zahl ändert.
d) Die Hunderterziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Hunderttausenderziffer.

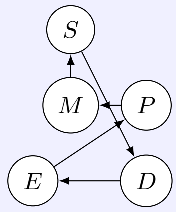
Aufgabe 3 - 320513
Vergleiche der Körpergrößen ergaben:
Jan ist größer als Steffi, Anna kleiner als Ingo, Franziska kleiner als Jan, Steffi kleiner als Moritz, Franziska kleiner als Moritz, Franziska größer als Steffi, Steffi kleiner als Anna, Anna kleiner als Moritz, Jan kleiner als Anna, Moritz größer als Ingo.

(a) Ordne diese Kinder nach ihrer Größe, beginnend mit dem kleinsten Kind.
(b) Welche der angegebenen zehn Vergleiche hätten ausgereicht, um die Aufgabe eindeutig zu lösen? Warum?

Aufgabe 4 - 320514
Ein 6 m 30 cm langer Kupferdraht ist in drei Teile zu unterteilen. Der erste Teil soll 30 cm länger als der zweite Teil sein und der dritte Teil 60 cm länger als der zweite.
Wie lang wird jeder der Teile?

1.33.2 II. Runde 1992, Klasse 5

Aufgabe 1 - 320521
Ein Handelsvertreter mit Wohnsitz in Dresden (D) möchte jede der Städte Erfurt (E), Magdeburg (M), Potsdam (P), Schwerin (S) genau einmal aufsuchen und danach zu seinem Wohnsitz zurückkehren.
Die erste auswärtige Stadt dieser Reise soll Erfurt sein, die Reihenfolge der anderen Städte ist noch nicht festgelegt. Die Abbildung zeigt eine mögliche Reiseroute.



Gib alle Reiserouten an, die unter den genannten Bedingungen gewählt werden können!
Wie viele Reiserouten sind das insgesamt? Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 320522
In einem Schrank befinden sich 11 karierte, 7 liniierte und 12 unliniierte Schreibblöcke und keine weiteren. Es ist zu dunkel, um die Blöcke unterscheiden zu können, und sie liegen ungeordnet.
Jemand will eine Anzahl Schreibblöcke herausnehmen und erst dann feststellen, wieviele Blöcke der einzelnen Sorten er herausgenommen hat.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, daSS sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 karierte befinden?
b) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, daß sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind?
Begründe deine Antworten, indem du jedesmal nachweist, dass die von dir angegebene Anzahl, aber keine kleinere Anzahl, das Gewünschte sichert!

Aufgabe 3 - 320523
Zeichne fünf Rechtecke! Zu jedem dieser Rechtecke sollen dann zwei Geraden gezeichnet werden, die den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das betreffende Rechteck in folgende Figuren zerlegen:

a) Zwei Dreiecke und ein Viereck.
b) Ein Dreieck und zwei Vierecke.
c) Ein Dreieck und drei Vierecke.
d) Ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck.
e) Zwei Dreiecke und ein Sechseck.
Führe diese Zeichnungen aus! Begründungen werden nicht verlangt

Aufgabe 4 - 320524
In einem Haus mit Erdgeschoss und drei weiteren Etagen wohnen 72 Personen. In der zweiten Etage sind es 7 Personen mehr als in der ersten, in der dritten 6 Personen mehr als in der ersten.
Da im Erdgeschoss außer Wohnungen auch ein Geschäft ist, wohnen dort 12 Personen weniger als in der ersten Etage.
Wieviele Personen wohnen im Erdgeschoss und in jeder der weiteren Etagen?
Begründe, wie sich diese Personenzahlen aus den obigen Angaben herleiten lassen und überprüfe, dass bei den von dir angegebenen Zahlen diese Angaben zutreffen!

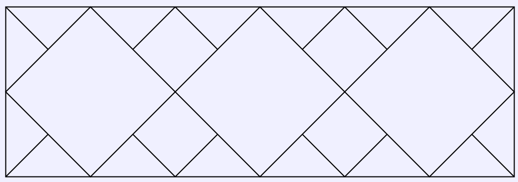
1.34 XXXIII. Olympiade 1993

1.34.1 I. Runde 1993, Klasse 5

Aufgabe 1 - 330511
Bernd fragt seinen Großvater: "Wieviele Jahre mag dieses Foto alt sein?"
Er bekommt zur Antwort: "Addiere die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Dann subtrahiere die kleinste vierstellige Zahl, und du erhältst die Altersangabe."

Aufgabe 2 - 330512
Bei einer Geburtstagsfeier wird ein Spiel mit blauen Spielmarken und ebenso vielen roten Spielmarken gespielt.
Nach einiger Zeit hatte jedes Kind 12 blaue und 15 rote Spielmarken bekommen, und es waren noch 48 blaue und 15 rote Spielmarken übrig.
Wieviele Kinder spielten dieses Spiel?

Aufgabe 3 - 330513



Kann man die Felder der Abbildung so mit den Farben Blau, Rot, Gelb färben, daß jede Farbe eine gleichgroße Gesamtfläche bedeckt wie jede andere Farbe und dass niemals zwei Farben längs einer Strecke zusammenstoßen?
Wenn das möglich ist, stelle eine solche Färbung her! Eine Begründung wird nicht verlangt.

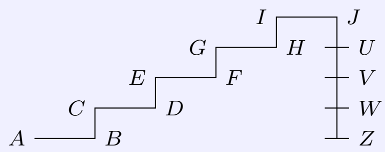
Aufgabe 4 - 330514
Die Zahlen 100 und 90 sollen beide durch eine gesuchte Zahl geteilt werden. Im ersten Fall soll der Rest 4 und im zweiten Fall der Rest 18 bleiben.
Zeige, dass es hierfür genau eine gesuchte Zahl gibt; finde sie und bestätige, dass sie das Verlangte leistet!

1.34.2 II. Runde 1993, Klasse 5

Aufgabe 1 - 330521
In einer kleinen Stadt stehen auf einer Straße am linken und am rechten Straßenrand insgesamt 47 Laternen. Auf jeder Straßenseite beträgt der Abstand zwischen je zwei benachbarten Laternen 35 m. Am linken Straßenrand steht je eine Laterne genau am Anfang und am Ende der Straße.
Wie lang ist diese Straße?

Aufgabe 2 - 330522
Rolf sucht vierstellige Zahlen, in denen keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer soll 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Tausenderziffer soll 4 betragen.
Beim Berechnen dieser Unterschiede soll es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden beiden Ziffern ankommen.
Wieviele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?
Begründe, warum es nicht mehr als von dir angegeben sein können!

Aufgabe 3 - 330523
Die Abbildung zeigt eine treppenartig aufsteigende Linie $ABCDEFGHIJ$ und eine abwärtsgehende Strecke JZ.
Alle Winkel bei B, C, D, E, F, G, H, I, J sind rechte Winkel.
Die Strecken BC, DE, FG, HI haben einander gleiche Länge, doppelt so lang sind AB, CD, EF, GH, IJ, und viermal so lang ist JZ.



Diese Strecke ist in vier gleichlange Strecken JU, UV, VW, WZ zerlegt.

a) Konstruiere eine derartige Figur $ABCDEFGHIJUVWZ$!
b) Finde dann durch Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte, die beim Schnitt der Treppenlinie $ABCDEFGHIJ$
(1) mit der Strecke AJ zwischen A und J,
(2) mit der Strecke AU zwischen A und U,
(3) mit der Strecke AV zwischen A und V,
(4) mit der Strecke AW zwischen A und W
vorkommen!

Aufgabe 4 - 330524
Rita berechnet die drei Zahlen

$$1 + 9 - 9 + 3 = a, \qquad 1 \cdot 9 + 9 - 3 = b, \qquad 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = c$$

Sie betrachtet weitere Möglichkeiten, in die Kästchen der Zeile

$$1 \square 9 \square 9 \square 3 =$$

Zeichen einzusetzen, die entweder + oder - oder · sind. Dabei sucht sie alle diejenigen Einsetzungen, bei denen die auszurechnende Zahl größer als 30, aber kleiner als 100 ist.
Finde alle diese Einsetzungen; weise nach, dass du alle gefunden hast!
Addiere die dabei entstandenen auszurechnenden Zahlen!
Zur so gefundenen Summe addiere weiterhin das Produkt der beiden kleinsten unter den zwischen 30 und 100 gefundenen Zahlen! Addiere schließlich die oben als a, b und c berechneten Zahlen!

1.35 XXXIV. Olympiade 1994

1.35.1 I. Runde 1994, Klasse 5

Aufgabe 1 - 340511
In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte. Jeder Stift hat eine der Farben blau, gelb, rot, violett.
Jede Farbe kommt mindestens einmal vor. Es gibt mehr blaue Stifte als gelbe, es gibt ebenso viele gelbe Stifte wie rote, es gibt weniger violette Stifte als rote.
Gib alle hiernach möglichen Verteilungen an!
(Eine Verteilung wird angegeben, indem man angibt, wie viele Stifte von jeder Farbe in der Schachtel liegen.)

Aufgabe 2 - 340512
Xaver und Yvette berichten: Jeder von uns hat sich eine natürliche Zahl gedacht. Wir haben diese Zahlen uns gegenseitig mitgeteilt.

Xaver sagt: Der Nachfolger meiner Zahl ist durch den Nachfolger von Yvettes Zahl teilbar.
Yvette sagt: Die Summe aus dem Nachfolger meiner Zahl und dem Nachfolger von Xavers Zahl ist eine ungerade Zahl.
Anette lässt sich das Produkt von Xavers Zahl und Yvettes Zahl sagen: Es beträgt 36.
Nenne zwei Zahlen, für die diese Aussagen zutreffen! Zeige, dass es keine weiteren derartigen Zahlen gibt!

Hinweis: Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist die um 1 größere Zahl. Beispielsweise hat 115 den Nachfolger 116.

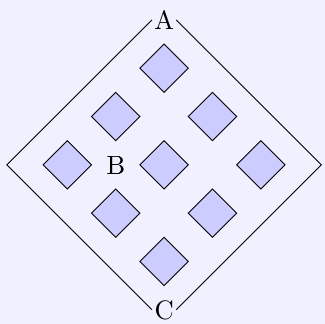
Aufgabe 3 - 340513

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & \square & 8 & \cdot & 4 & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \square & & \\
 & & 2 & 1 & \square & \square & \\
 & & & \square & \square & \square & 6 \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

In die leeren Felder der Abbildung sind derart Ziffern einzutragen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei soll die Regel beachtet werden, dass in jeder Zeile am Anfang eine von 0 verschiedene Ziffer steht.
Zeige, dass es genau eine Eintragung der gesuchten Art gibt!

Aufgabe 4 - 340514

In das Gefäß aus der Abbildung können Kugeln durch die Öffnung A hineinfallen. Auf ihrem Weg nach unten werden sie jedesmal, wenn sie an die obere Ecke eines Hindernisses kommen, entweder nach links oder nach rechts abgelenkt.



a) Wie viele derartige Wege von A nach B gibt es insgesamt?
b) Wie viele derartige Wege von B nach C gibt es insgesamt?
c) Wie viele derartige Wege von A über B nach C gibt es insgesamt?
d) Wie viele derartige Wege von A nach C gibt es insgesamt?

Erläutere für wenigstens eine der Teilaufgaben a), b), c), d), wie du die gesuchte Anzahl möglicher Wege gefunden hast!

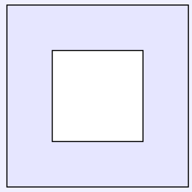
1.35.2 II. Runde 1994, Klasse 5

Aufgabe 1 - 340521
In einem Zirkus treten vier Artisten auf. Sie heißen Meier, Neumann , Opitz und Pfeifer. Ihre Vornamen sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter, Erich, Fritz und Gert. Außerdem ist bekannt:

(1) Die Reihenfolge ihrer Auftritte ist: Pfeifer, Fritz, Meier, Erich.
(2) Diese Auftritte sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter jongliert, Erich zaubert, Neumann tritt als Clown auf und Pfeifer arbeitet auf dem Drahtseil.

Zeige, dass durch diese Angaben für jeden der Artisten Meier, Neumann, Opitz und Pfeifer eindeutig bestimmt ist, welchen Vornamen er hat!
Nenne diese vier zusammengehörenden Vor- und Familiennamen!

Aufgabe 2 - 340522
Die Abbildung zeigt eine ringförmige Fläche. Sie wird von einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und einem Quadrat der Seitenlänge 2 cm eingeschlossen.
Beide Quadrate haben denselben Mittelpunkt, jede Seite des kleinen Quadrats ist zu einer Seite des großen Quadrates parallel.
Nun sollen mehrere Geraden gezeichnet werden, so dass sie, genügend verlängert, die ringförmige Fläche in Teilflächen zerlegen. Die Teilflächen einer Zerlegung sollen einander gleiche Größe und gleiche Form haben. Folgende Anzahlen sollen erreicht werden:



Aufgabe	Anzahl der Geraden	Anzahl der entstehenden Teilflächen
(a)	2	4
(b)	3	6
(c)	4	8
(d)	6	12

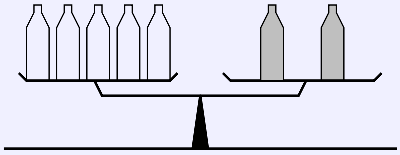
Fertige zu jeder der Aufgaben (a), (b), (c), (d) eine Zeichnung an!
Zu zwei der Aufgaben (a), (b), (c), (d) fertige noch je eine weitere Zeichnung an, in der die Teilflächen von anderer Gestalt sind als in den vorigen Zeichnungen!
Eine Begründung oder Beschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 3 - 340523
Man kann jede natürliche Zahl 1, 2, 3, ... als eine Summe darstellen, in der jeder Summand eine 1 oder eine 2 ist. Zum Beispiel gibt es für die Zahl 3 unter Beachtung der Reihenfolge genau die Darstellungen

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$$

(a) Gib auch für jede der Zahlen 4, 5 und 6 alle Darstellungen an!
(b) Wie groß ist für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils die Anzahl aller Darstellungen?
Finde eine Gesetzmäßigkeit, die für diese sechs Anzahlen gilt!
Wie viele Darstellungen muss es - wenn die von dir genannte Gesetzmäßigkeit sogar allgemein gilt - für die Zahl 10 geben?

Aufgabe 4 - 340524



Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht (siehe Abbildung).

(a) Britta füllt zwei leere Flaschen mit Mineralwasser und erreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt.
Wie viele leere Flaschen sind das?
(b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?
(c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flaschen auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen.
Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

1.35.3 III. Runde 1994, Klasse 5

Aufgabe 1 - 340531
Fritz hat geträumt, er bekäme ein Paket voller Gummibärchen, wenn er drei Aufgaben (a), (b), (c) löst.
Obwohl es nur ein Traum war und er nicht weiß, ob die Zahlen des Traumes genau stimmen, möchte er die Aufgaben doch lösen. In seinem Traum hieß es:

Ein Paket enthält 1000 Gummibärchen. Sie sind in 50 Tüten verteilt.
Der Inhalt einer Tüte kostet 1,60 DM. Ein Kilogramm Gummibärchen kostet 20 DM. In jeder Tüte ist dieselbe Anzahl Gummibärchen wie in jeder anderen Tüte. Jedes Gummibärchen wiegt ebenso viel und kostet ebenso viel wie jedes andere Gummibärchen.
Die Aufgaben lauten:

(a) Wieviel kosten zusammengenommen die Gummibärchen in einem Paket?
(b) Wieviel wiegt der Inhalt einer Tüte?
(c) Wieviel wiegt ein Gummibärchen?

Gib die Lösungen zu (a), (b), (c) an und begründe, wie du sie erhalten hast!

Aufgabe 2 - 340532
Aus genau 4 Stäbchen, von denen jedes etwas weniger als 1 cm Länge hat, lässt sich ein kleines Quadrat der Seitenlänge 1 cm legen:

```
 __
|__|
```

Für ein Quadrat, das aus vier der zuvor betrachteten kleinen Quadrate besteht, benötigt man genau 12 Stäbchen:

```
 __ __
|__|__|
|__|__|
```

(a) Wie viele Stäbchen genau benötigt man für ein Quadrat, das aus (1) neun, (2) sechzehn dieser kleinen Quadrate besteht?

```
 __ __ __ ...
|__|__|__ ...
|__|__|__ ...
|  |  |
:  :  :
```

Wie viele Stäbchen genau benötigt man, um mit diesen kleinen Quadraten ein Quadratgitter auszulegen, das 1 m lang und 1 m breit ist?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 3 - 340533
Annette, Bernd, Christiane, Dieter und Ruth spielen folgendes Spiel: die vier Kinder außer Ruth verabreden, dass eines von ihnen einen Brief bei sich versteckt und dass dann jedes dieser Kinder drei Aussagen macht, von denen mindestens zwei wahr sind.
Ruth, die nur diese Regeln und die Aussagen der vier erfährt, soll herausfinden, wer den Brief hat. Eines der vier Kinder Annette, Bernd, Christiane, Dieter hatte sich das Spiel ausgedacht, sie wissen auch, wer es war; nur Ruth weiß das nicht. Folgende Aussagen werden gemacht:

Annette: Ich habe den Brief nicht. Entweder hat Bernd den Brief, oder Bernd hat den Brief nicht. Christiane hat sich das Spiel ausgedacht.
Bernd: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Dieter. Ich habe den Brief nicht. Annette oder Christiane oder Dieter hat den Brief.

Christiane: Entweder Bernd oder Dieter hat den Brief. Bernd hat drei wahre Aussagen ge- macht. Annette hat den Brief nicht.
Dieter: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Christiane. Ich habe den Brief nicht. Alle drei Aussagen von Christiane sind wahr.

Untersuche, ob durch die Regeln und die Aussagen eindeutig bestimmt ist, wer den Brief hat!
Wenn das der Fall ist, gib diesen Spieler an! Stelle dann auch fest, ob alle Aussagen den Regeln entsprechen, wenn der Brief bei dem von dir angegebenen Spieler ist!

Aufgabe 4 - 340534
In einem Schachverein wurde ein Turnier für Anfänger und für Fortgeschrittene durchgeführt. Jeder Anfänger spielte gegen jeden anderen Anfänger genau zwei Partien; jeder Fortgeschrittene spielte gegen jeden anderen Fortgeschrittenen genau zwei Partien.
Diese Partien wurden so angesetzt, dass an jedem von genau 28 Spieltagen genau 3 Partien gespielt wurden. Es nahmen an dem Turnier mehr Anfänger als Fortgeschrittene teil.

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Anfänger und wieviele Fortgeschrittene an dem Turnier teilnahmen! Nenne diese beiden Anzahlen!

2 Aufgaben - Klassenstufe 6

2.1 Vorolympiade 1960/61

2.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 6

Aufgabe 1 - V00601
Vor dem Zusammenschluss landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG musste eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor.
Nach dem Zusammenschluss konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.

a) Wie viel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren, ziehe die Schlussfolgerung!

Aufgabe 2 - V00602
Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten.
Sie beschließen, dass die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten.
Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

Aufgabe 3 - V00603
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

Aufgabe 4 - V00604
Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

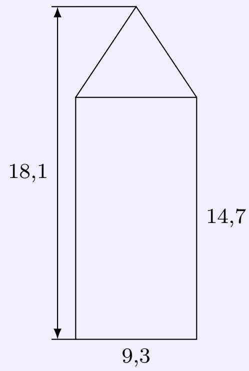
Aufgabe 5 - V00605
Wie viel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

Aufgabe 6 - V00606
Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

Aufgabe 7 - V00607 = V00503
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Aufgabe 8 - V00608
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

Aufgabe 9 - V00609



In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m^2 Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.

Aufgabe 10 - V00610
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

Aufgabe 11 - V00611
Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, dass 27 kleinere Würfel entstehen.
Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und Wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben.
Wie viel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

Aufgabe 12 - V00612
Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnung so flüchtig hingeschrieben, dass er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann.
Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen ? ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

```
? ? 5 ? ? : ? 9 = ? ? ?
1 ? ?
-----
  1 0 ?
    ? 7
  -----
    2 ? 3
    ? ? ?
    -----
```

2.2 I. Olympiade 1961

2.2.1 I. Runde 1961, Klasse 6

Aufgabe 1 - 010611
a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$

b) $3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49}$

Aufgabe 2 - 010612
Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war. Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

Aufgabe 3 - 010613
Ein "Trabant" fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.

a) Wie viel Kilometer hat der "Trabant" zurückgelegt?
b) Wie viel Liter Treibstoff muss der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

Aufgabe 4 - 010614
Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Aufgabe 5 - 010615
Wie viel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?
Wie hast du die Anzahl ermittelt?

Aufgabe 6 - 010616
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

2.2.2 II. Runde 1961, Klasse 6

Aufgabe 1 - 010621
Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau–Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ "AN-10" und "IL-18" Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean.
Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25300 km in 48 h und 7 min, die IL-18 in 44 h und 36 min zurück.
Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

Aufgabe 2 - 010622
Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.

a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

Aufgabe 3 - 010623
Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km.“
Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km.“
Robert sagt: „Einer von beiden hat recht.“

Nun wissen wir, dass Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

Aufgabe 4 - 010624
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

2.3 II. Olympiade 1962

2.3.1 I. Runde 1962, Klasse 6

Aufgabe 1 - 020611
Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.
Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15000 dt Kartoffeln geerntet. $\frac{1}{5}$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $\frac{1}{3}$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern.“
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln ernteten
a) die Schüler?
b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?
c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

Aufgabe 2 - 020612
Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.

a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?
b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden. Wie groß ist dabei die Einsparung?

Aufgabe 3 - 020613
Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden.“
Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

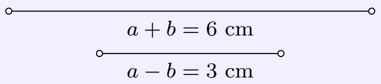
Aufgabe 4 - 020614
Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo.
Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Wie heißt der Ingenieur? Wie heißt der Elektriker? Wie heißt der Monteur? Die Lösung ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 020615
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

Aufgabe 6 - 020616



Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz. Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

2.3.2 II. Runde 1962, Klasse 6

Aufgabe 1 - 020621
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?
b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?
Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

Aufgabe 2 - 020622
Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, dass der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt.
Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

Aufgabe 3 - 020623
Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$ so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Aufgabe 4 - 020624
Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt:
„Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater.“

Wie alt ist Brigitte? Wie alt sind ihre Eltern? Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

Aufgabe 5 - 020625
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man P und B, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

2.4 III. Olympiade 1963

2.4.1 I. Runde 1963, Klasse 6

Aufgabe 1 - 030611
Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wie viel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?
b) Wie viel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

Aufgabe 2 - 030612
Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager.
Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mussten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wie viel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

Aufgabe 3 - 030613
Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, dass unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

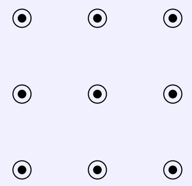
Aufgabe 4 - 030614
Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

Aufgabe 5 - 030615

a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, dass auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!



b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, dass man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen.
Fertige auch dazu eine Zeichnung an!

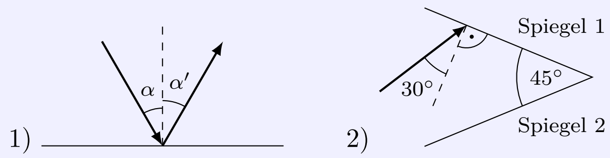
Aufgabe 6 - 030616
Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen
$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm, $b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm, $c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.
Füge diese Quadrate so zusammen, dass sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

2.4.2 II. Runde 1963, Klasse 6

Aufgabe 1 - 030621
Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?
Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2 - 030622



Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

Aufgabe 3 - 030623
Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 4 - 030624
Wie viel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden?
(Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch ein Streichholz getrennt werden.)

2.5 IV. Olympiade 1964

2.5.1 I. Runde 1964, Klasse 6

Aufgabe 1 - 040611
In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m^3 Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben.
Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wie viel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

Aufgabe 2 - 040612

J	U	N	G	E	W
U	N	G	E	W	E
N	G	E	W	E	L
G	E	W	E	L	T

Auf wie viel verschiedene Weisen kann man in der nebenstehenden Tabelle die Wörter "Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Aufgabe 3 - 040613
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d.h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

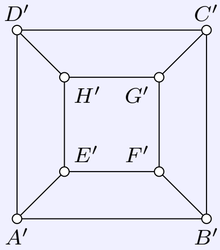
Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

Aufgabe 4 - 040614
Zerlege die Zahl 390 in drei Summanden, von denen der zweite dreimal so groß wie der erste und der dritte $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie der erste ist!

Aufgabe 5 - 040615
Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren

durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5 aufweist.

Aufgabe 6 - 040616



Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.

Die Bilder seiner Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H sind mit A', B', C', D', E', F', G', H' bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite AB ist 5 cm, die Seite EF 3 cm lang.

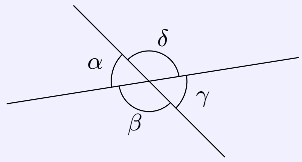
Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

2.5.2 II. Runde 1964, Klasse 6

Aufgabe 1 - 040621
Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, dass der eine Teil fünfmal so lang wie der andere ist.
Wie lang werden die Teile?

Aufgabe 2 - 040622

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?



Aufgabe 3 - 040623
Ein rechteckiger Schulgarten soll eingezäunt werden. Auf jeder der kürzeren Seiten, die jeweils je 40 m lang sind, stehen 21 Zementsäulen, auf den längeren jeweils 15 mehr. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Säulen ist gleich. Zwischen zwei dieser Säulen wird ein Tor eingebaut.

Wie hoch sind die Kosten, wenn 1 m Zaun 9,50 MDN, 1 Säule 11,00 MDN und das Tor 64,00 MDN kosten?
Die Dicke der Säulen wird dabei nicht berücksichtigt.

Aufgabe 4 - 040624
Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf:

"In unserer Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar.
Wie viel Schüler besuchen die Klasse?"

2.6 V. Olympiade 1965

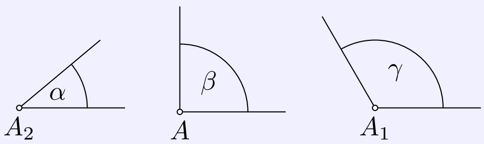
2.6.1 I. Runde 1965, Klasse 6

Aufgabe 1 - 050611
Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?
b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

Aufgabe 2 - 050612
Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:
Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 3 - 050613
Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



Aufgabe 4 - 050614
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

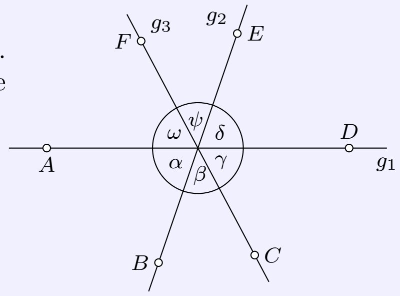
2.6.2 II. Runde 1965, Klasse 6

Aufgabe 1 - 050621
In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wie viel Tische wurden im Juni und wie viel im Dezember hergestellt?

Aufgabe 2 - 050622

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α, β, γ, δ, ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) α dreimal so groß wie β ist?



Aufgabe 3 - 050623
Gesucht ist eine natürliche Zahl b, die folgenden Bedingungen genügt:
(1) $40 < b < 600$,
(2) b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
(3) b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
(4) b lässt bei der Division durch 11 den Rest 6.
Wie viel solche Zahlen gibt es?

Aufgabe 4 - 050624
Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt.
Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

(1) Es ist wahr, dass Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.
(2) Es ist falsch, dass Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.
(3) Es ist nicht wahr, dass keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.
(4) Es ist wahr, dass Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.
(5) Es ist unwahr, dass Hans größer als Monika ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

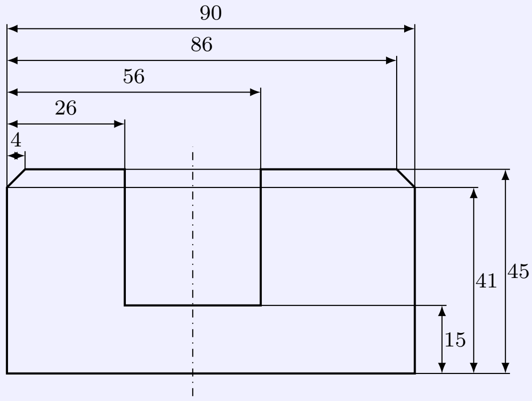
Es soll festgestellt werden:
a) Welche Schüler sind gleich groß?
b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)

2.7 VI. Olympiade 1966

2.7.1 I. Runde 1966, Klasse 6

Aufgabe 1 - 060611

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)



Aufgabe 2 - 060612

Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften, die eine kostet 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 MDN.
Wie viel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

Aufgabe 3 - 060613

Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (a + 3b - 2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 060614

In einem Haus wohnen genau die Mietsparteien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Ilgner, Keies, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Richter und Pätzold.
Im Erdgeschoss und in jeder Etage wohnen genau zwei Mietsparteien, außerdem ist folgendes bekannt:

Albrechts wohnen zwei Stockwerke tiefer als Beckers.
Beckers wohnen sechs Stockwerke höher als Conrads.
Familie Fritsche wohnt neben Familie Geißler.
Familie Männig wohnt vier Stockwerke höher als Familie Nolte und zwei Stockwerke tiefer als Familie Fritsche.
Ein Stockwerk über Familie Nolte wohnt Familie Oswald.
Familie Albrecht wohnt drei Etagen über Familie Richter,
und Familie Pätzold wohnt fünf Stockwerke unter Familie Geißler.

a) Wie viel Stockwerke hat das Haus?
b) In welchem Stockwerk wohnt Familie Albrecht?

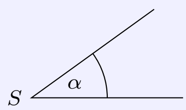
2.7.2 II. Runde 1966, Klasse 6

Aufgabe 1 - 060621
Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke. Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Aufgabe 2 - 060622
Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a lässt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

Aufgabe 3 - 060623
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!



Aufgabe 4 - 060624
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

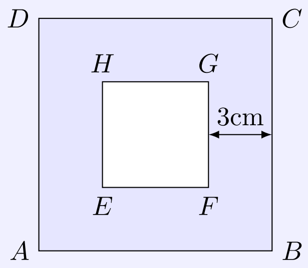
2.8 VII. Olympiade 1967

2.8.1 I. Runde 1967, Klasse 6

Aufgabe 1 - 070611
Zu einem Straßenbahnhof einer gewissen Großstadt gehören insgesamt 83 Straßenbahnwagen. Davon sind genau 46 Anhänger. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich insgesamt 8 Triebwagen mit je zwei Anhängern und 23 Triebwagen mit je einem Anhänger im Einsatz.
Welches ist die Anzahl aller Triebwagen und Anhänger, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht im Einsatz befinden?

Aufgabe 2 - 070612

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen AC, BD, EG und FH einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm^2.
Berechne die Längen der Strecken BC und GH!



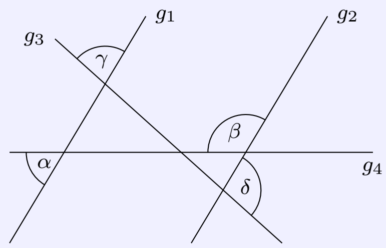
Aufgabe 3 - 070613
In einem Speicher wurden insgesamt 2170 kg Getreide gelagert. Es waren genau 11 Sack Weizen zu je 80 kg, 6 Sack Gerste und 12 Sack Mais. Jeder Sack Gerste enthielt 5 kg mehr als jeder Sack Mais.
Wie viel Kilogramm Mais wurden im Speicher gelagert?

Aufgabe 4 - 070614
Unter der Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (geschrieben $n!$) verstehen wir das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Es gilt zum Beispiel: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Ermittle, auf welche Ziffer die Summe $s = 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ endet!

2.8.2 II. Runde 1967, Klasse 6

Aufgabe 1 - 070621

Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle δ!



Aufgabe 2 - 070622
Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muss, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

Aufgabe 3 - 070623
Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

Aufgabe 4 - 070624
Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

2.9 VIII. Olympiade 1968

2.9.1 I. Runde 1968, Klasse 6

Aufgabe 1 - 080611
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m^2. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

Aufgabe 2 - 080612
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

Aufgabe 3 - 080613
In einem Ferienlager "Junger Mathematiker" kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für seine Freunde folgende Waren ein:
13 Flaschen Limonade zu je 0,21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.

Rainer soll insgesamt 10,43 M bezahlen. "Das kann nicht stimmen", sagt er. Dabei wusste er noch gar nicht, wie viel jedes Lachsbrötchen kostet.
Weshalb konnte er seiner Behauptung trotzdem sicher sein?

Aufgabe 4 - 080614
Von drei Pionieren einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

(1) Sie haben die Vornamen Alex, Bodo und Dietmar.
(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.
(3) Alex heißt nicht Neumann.
(4) Der Pionier mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Pionier mit dem Vornamen Bodo.
(5) Die Mutter des Pioniers Neumann ist eine geborene Mittag.
(6) Die Mutter Bodos trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Pioniere zugeordnet sind!

2.9.2 II. Runde 1968, Klasse 6

Aufgabe 1 - 080621
In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4.
Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$.
Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

Aufgabe 2 - 080622
Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im "Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge.
Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt 3 10 und die der kürzesten 3 14 von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.
Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

Aufgabe 3 - 080623
Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben.
Der Punkt E des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

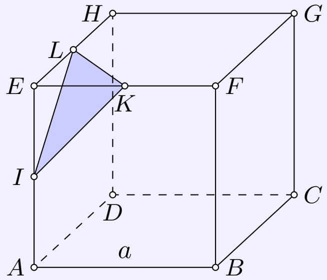
Aufgabe 4 - 080624
Drei Freunde bereiten sich auf die "Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

a) Nach wie viel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, dass Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wie viel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

2.10 IX. Olympiade 1969

2.10.1 I. Runde 1969, Klasse 6

Aufgabe 1 - 090611



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Aufgabe 2 - 090612

In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$$1\tfrac{1}{2} \text{ Hühner legen in } 1\tfrac{1}{2} \text{ Tagen } 1\tfrac{1}{2} \text{ Eier}$$

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

Aufgabe 3 - 090613

In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.
In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet.
Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.

Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

Aufgabe 4 - 090614

Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240 M.
Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240 M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben.
Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4 M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder.

Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

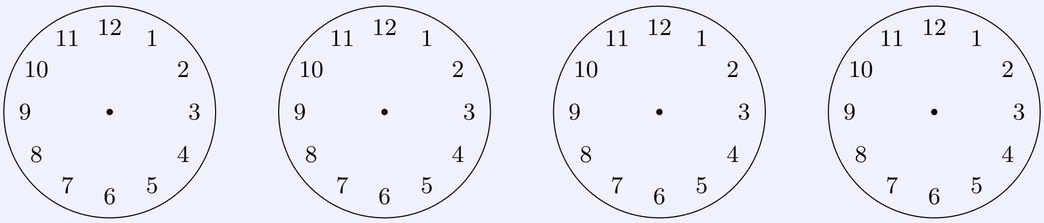
2.10.2 II. Runde 1969, Klasse 6

Aufgabe 1 - 090621
Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

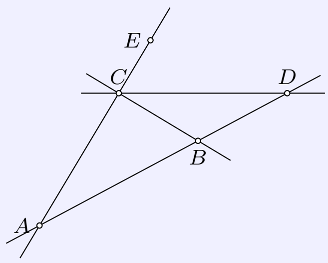
"Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wie viel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

Aufgabe 2 - 090622
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z.B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, dass die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



Aufgabe 3 - 090623



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, dass C zwischen A und E liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

Aufgabe 4 - 090624
Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

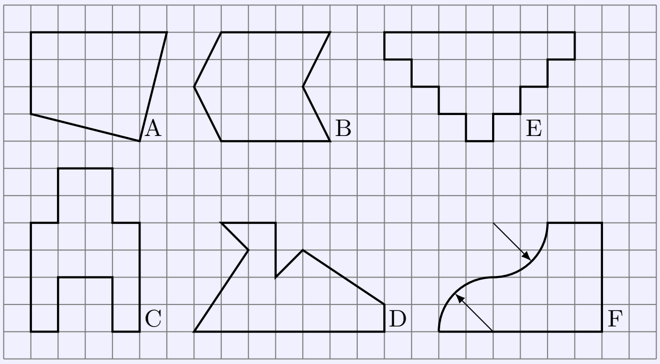
Nach wie viel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, dass jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

2.11 X. Olympiade 1970

2.11.1 I. Runde 1970, Klasse 6

Aufgabe 1 - 100611
Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt.
Welches von den beiden Feldern hat den größeren Flächeninhalt? Um wie viel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

Aufgabe 2 - 100612
Untersuche, welche der in der Abbildung dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen lässt, dass sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!



Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Aufgabe 3 - 100613
Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte:

$$a + b = 10, \qquad c + d + e = 16, \qquad f + g + h = 14$$

Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) wurde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet?
Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

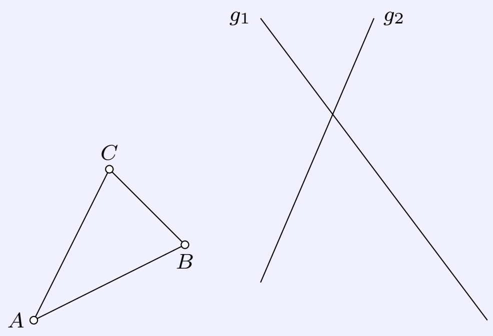
Aufgabe 4 - 100614
An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" wurden insgesamt 25 Antwortkarten "sehr gut gelöst" von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte.

Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, dass mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielt. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt.

Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

2.11.2 II. Runde 1970, Klasse 6

Aufgabe 1 - 100621
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden g_1 und g_2. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 2 - 100622
Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich

a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!

Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

Aufgabe 3 - 100623
In der fünfstelligen Zahl $52{*}2{*}$ sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, dass die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.

Gib alle Möglichkeiten hierfür an!
(Beachte: Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

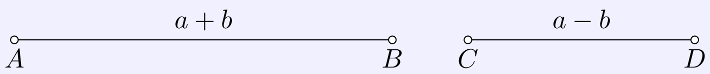
Aufgabe 4 - 100624
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

2.12 XI. Olympiade 1971

2.12.1 I. Runde 1971, Klasse 6

Aufgabe 1 - 110611
Von zwei Autos vom Typ "Wartburg" legte das eine eine Strecke von 1200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, dass jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wie viel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

Aufgabe 2 - 110612
Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!



Aufgabe 3 - 110613
Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

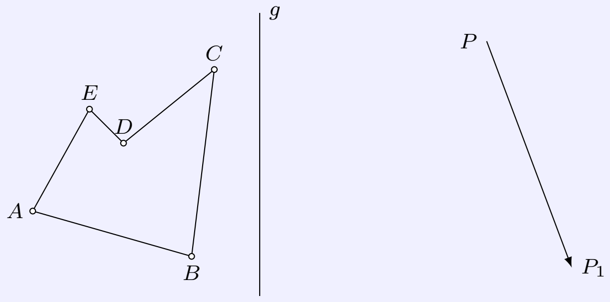
Aufgabe 4 - 110614
Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.
Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, dass auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z.B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

2.12.2 II. Runde 1971, Klasse 6

Aufgabe 1 - 110621
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 110622
Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:

(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.

Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

Aufgabe 3 - 110623
Von dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, dass der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

Aufgabe 4 - 110624
Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes.
Wie viel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

2.13 XII. Olympiade 1972

2.13.1 I. Runde 1972, Klasse 6

Aufgabe 1 - 120611
Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift "alpha" und 6 Schüler weder "Frösi" noch "alpha".

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

Aufgabe 2 - 120612
Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Ziffer blättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

Aufgabe 3 - 120613
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 ^{2}	Maschine D: 60 m^2
Maschine B: 5 m^2	Maschine E: 18 m^2
Maschine C: 18 m^2	Maschine F: 50 m^2

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A: 14 m^2	An der Maschine D: 21 m^2
An der Maschine B: 6 m^2	An der Maschine E: 13 m^2
An der Maschine C: 15 m^2	An der Maschine F: 17 m^2

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

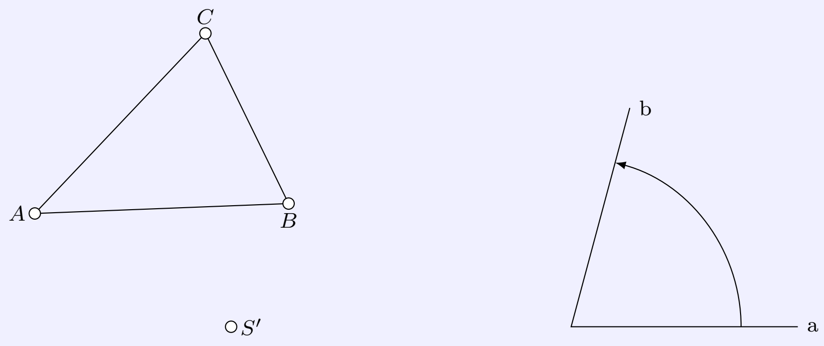
b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als "Gesamtlänge der Transportwege" bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

Aufgabe 4 - 120614
Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, dass eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

2.13.2 II. Runde 1972, Klasse 6

Aufgabe 1 - 120621
Das abgebildete Dreieck ABC ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\angle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 120622
An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam.
Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

Aufgabe 3 - 120623
Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:

(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.

Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

Aufgabe 4 - 120624
Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:

"Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien.
Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe."

Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

2.14 XIII. Olympiade 1973

2.14.1 I. Runde 1973, Klasse 6

Aufgabe 1 - 130611
Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, dass die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

Aufgabe 2 - 130612
Für die "Galerie der Freundschaft" ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

Aufgabe 3 - 130613
In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, dass die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und dass dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt:

Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert.

2				
	8			
	11	16		

Dabei heiße "Differenz": "rechte Zahl minus linke Zahl" bzw. "untere Zahl minus obere Zahl".
Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

Aufgabe 4 - 130614
Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist.
Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

2.14.2 II. Runde 1973, Klasse 6

Aufgabe 1 - 130621
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

Aufgabe 2 - 130622
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte u.s.w., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d.h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d.h. nicht verdeckt) sind!

Aufgabe 3 - 130623
Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note "5" bekam.
Ein Sechstel der Klasse schrieb eine "1", ein Drittel eine "2" und nur ein Neuntel eine "4". Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus nur, dass sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wie viel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine "3" geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist! Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

Aufgabe 4 - 130624
Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, dass eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.
Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

2.15 XIV. Olympiade 1974

2.15.1 I. Runde 1974, Klasse 6

Aufgabe 1 - 140611

In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, dass die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.
Beweise, dass es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

Aufgabe 2 - 140612

Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen.
Bernd meint, dass bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten.
Monika entgegnet nach einigem Überlegen, dass das nicht stimmen könne.
Wer von beiden hat recht?

Aufgabe 3 - 140613

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.

a) Um wie viel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

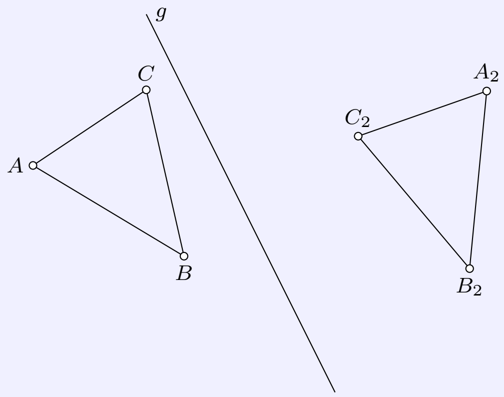
Aufgabe 4 - 140614

Jemand schreibt 3 * 6 * 5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, dass eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

2.15.2 II. Runde 1974, Klasse 6

Aufgabe 1 - 140621

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet.



Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.

Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 140622
Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 3 - 140623
Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

Aufgabe 4 - 140624
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.

Um wie viel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

2.16 XV. Olympiade 1975

2.16.1 I. Runde 1975, Klasse 6

Aufgabe 1 - 150611
Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132000 t Steinkohle und 24000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wie viel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

Aufgabe 2 - 150612

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & = & b \\ - & & & & - \\ c & \cdot & a & = & d \\ \hline e & \cdot & a & = & a \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, dass alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen "Zahlenrätseln" sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muss nachgewiesen werden, dass die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und dass sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

Aufgabe 3 - 150613
Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker Leonard Euler ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.

Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

Aufgabe 4 - 150614
Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, dass das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wie viel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

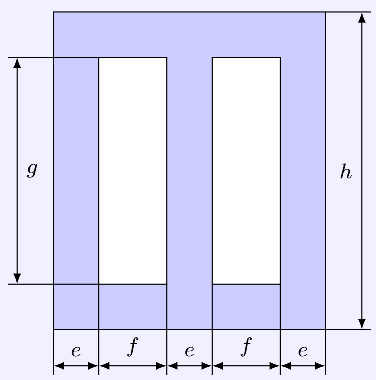
2.16.2 II. Runde 1975, Klasse 6

Aufgabe 1 - 150621
Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern.
Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet.
Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

Aufgabe 2 - 150622
Das Wohnschiff "Kuhle Wampe", das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, dass es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und dass diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibettkabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen.

Aufgabe 3 - 150623
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D!
Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h. Spiegele den Kreis k an g und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

Aufgabe 4 - 150624



Berechne den Inhalt A der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

2.17 XVI. Olympiade 1976

2.17.1 I. Runde 1976, Klasse 6

Aufgabe 1 - 160611

$$\begin{array}{ccccc} \text{AAA} & \cdot & \text{A} & = & \text{BBB} \\ + & & & & - \\ \text{CCC} & \cdot & \text{E} & = & \text{DDD} \\ \hline \text{FFF} & : & \text{F} & = & \text{GGG} \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle fünf angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

Aufgabe 2 - 160612
Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück.
Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.
Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

Aufgabe 3 - 160613
Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches 17 19 subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert 7 11 erhalten soll.
Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

Aufgabe 4 - 160614
Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark.
Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.
Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

2.17.2 II. Runde 1976, Klasse 6

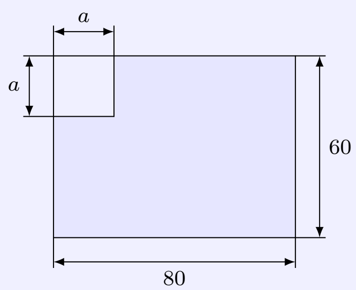
Aufgabe 1 - 160621
Ludwig sagt: "Ich kann die Leserzahl 58125 der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & A & L & P & H & A \\ + & & & H & E & I \\ + & & & T & E & R \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, dass $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben.
Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?"
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

Aufgabe 2 - 160622
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Aufgabe 3 - 160623



Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

Aufgabe 4 - 160624
Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot, $\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe, der Rest ist Wasser.
Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

2.18 XVII. Olympiade 1977

2.18.1 I. Runde 1977, Klasse 6

Aufgabe 1 - 170611
In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231000	334000	395000	424000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.
Berechne, um wie viel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:
a) von 1951 bis 1960
b) von 1961 bis 1970
c) von 1971 bis 1974!

Aufgabe 2 - 170612
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Aufgabe 3 - 170613
Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig.
Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.
Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

Aufgabe 4 - 170614
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher sprang als Ernst.
(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.

Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichen! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

2.18.2 II. Runde 1977, Klasse 6

Aufgabe 1 - 170621
Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

Aufgabe 2 - 170622
Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:

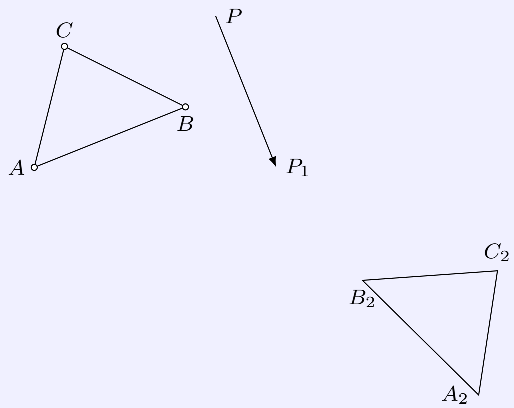
(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, dass Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.

Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, dass die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und dass alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.
Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlauf?

Aufgabe 3 - 170623
In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil.
Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)

Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

Aufgabe 4 - 170624



Auf der Abbildung sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

2.19 XVIII. Olympiade 1978

2.19.1 I. Runde 1978, Klasse 6

Aufgabe 1 - 180611
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

Aufgabe 2 - 180612
Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = \star 3 \star 60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern ($\star$) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, dass z die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) $60000 < z < 100000$,
(2) z ist durch 9 teilbar.

Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

Aufgabe 3 - 180613
Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler.
In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, dass drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften "alpha" und "technikus" lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a.
Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den "technikus" als auch die Zeitschrift "alpha".
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften "alpha" und "technikus"?

Aufgabe 4 - 180614
Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er:

"Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank."

Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

2.19.2 II. Runde 1978, Klasse 6

Aufgabe 1 - 180621
a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!

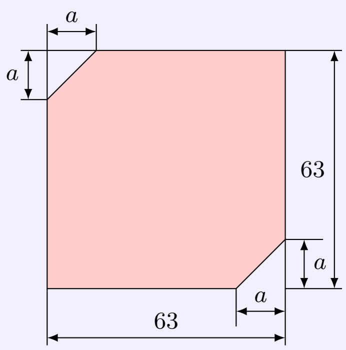
b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Aufgabe 2 - 180622
Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

Aufgabe 3 - 180623
In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart.
Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wie viel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Aufgabe 4 - 180624



Die abgebildete farbige Fläche ist 38 cm^2 groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

2.20 XIX. Olympiade 1979

2.20.1 I. Runde 1979, Klasse 6

Aufgabe 1 - 190611
Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h, für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h, für den dritten Bus 36 Minuten und für den vierten Bus 1 Stunde.
Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab?
Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

Aufgabe 2 - 190612
Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so dass folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,
die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,
die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,
die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 3 - 190613
In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, dass sie mit Sicherheit erreicht, dass sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint: "Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen."
Birgit meint: "Es genügen sogar 13 Kugeln."
Cornelia behauptet: "Es genügen dafür 12 Kugeln."
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 4 - 190614
Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

"Dieter erhielt keinen ersten Preis." (1)
"Karin erhielt keinen zweiten Preis." (2)
"Frank erhielt einen zweiten Preis" (3)

Später stellte sich heraus, dass von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.
Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

2.20.2 II. Runde 1979, Klasse 6

Aufgabe 1 - 190621
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Aufgabe 2 - 190622
In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.
Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Aufgabe 3 - 190623
Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen.
Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat!
Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Aufgabe 4 - 190624
Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

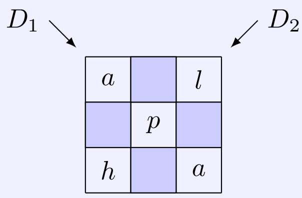
2.21 XX. Olympiade 1980

2.21.1 I. Runde 1980, Klasse 6

Aufgabe 1 - 200611

Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift alpha, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 80 ergibt.



Dabei soll die Zahl a doppelt so groß wie die Zahl p sein; für l soll eine Primzahl eingetragen werden und für h eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von l ist.
Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

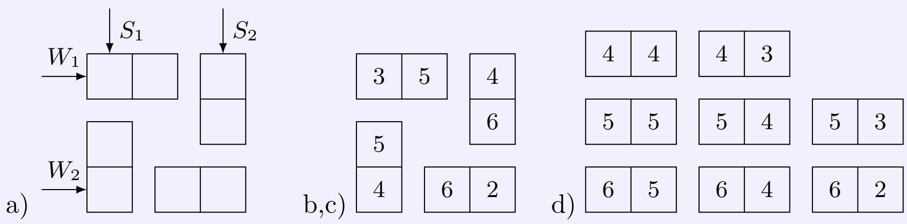
Aufgabe 2 - 200612
Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, dass man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.
Berechne, wie viel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

Aufgabe 3 - 200613
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

Aufgabe 4 - 200614
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt.
Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen W_1, W_2 und zwei senkrechte Streifen S_1, S_2. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z.B. ist diese Summe 12.
Die sonst übliche Regel, dass benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen W_1, W_2, S_1, S_2 die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.



2.21.2 II. Runde 1980, Klasse 6

Aufgabe 1 - 200621
Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

Aufgabe 2 - 200622
Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt?
Wir nehmen an, dass der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

Aufgabe 3 - 200623
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1000 \leq z \leq 1700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 4 - 200624
Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften "alpha" bzw. "Frösi" regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift "alpha".
(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.
(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig. Gerd dagegen nicht.
(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.
Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist!
Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

2.22 XXI. Olympiade 1981

2.22.1 I. Runde 1981, Klasse 6

Aufgabe 1 - 210611
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

Aufgabe 2 - 210612

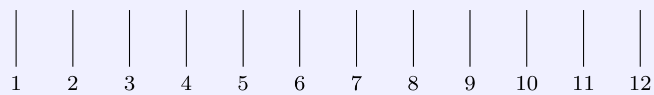
$$\begin{array}{cccccccccccc}
6 & 4 & 6 & : & & \square & 9 & = & & \square & \square \\
 & - & & & & & \cdot & & & + & \\
\square & \square & \square & - & & \square & 6 & = & \square & 4 & \square \\
\hline
\square & 8 & \square & - & \square & \square & \square & = & \square & \square & 0
\end{array}$$

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

Aufgabe 3 - 210613
Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wie viel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

Aufgabe 4 - 210614
Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Abbildung), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs "Doppelhölzchen" (d.h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden:

Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.



Beschreibe eine Serie von Sprüngen die diese Forderungen erfüllt!

2.22.2 II. Runde 1981, Klasse 6

Aufgabe 1 - 210621
Ein Güterzug fährt von einer Station A (Kilometer 0) zu einer Station B (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in A ab.

Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr usw.) befindet!
Begründe diese Kilometerangaben!

Aufgabe 2 - 210622
Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar.
Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form

$$418**$$

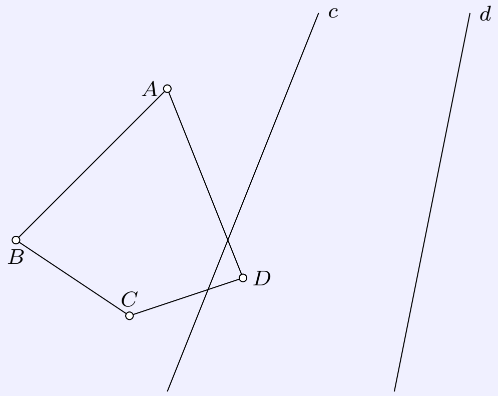
Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, dass sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen lässt.
Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat!
Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

Aufgabe 3 - 210623
Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.
a) Wie viel Tische wurden im Monat Juni hergestellt ?
b) Wie viel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

Aufgabe 4 - 210624

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden c und d!

Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.



2.23 XXII. Olympiade 1982

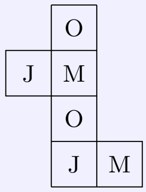
2.23.1 I. Runde 1982, Klasse 6

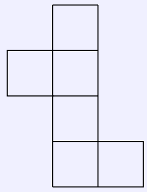
Aufgabe 1 - 220611
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

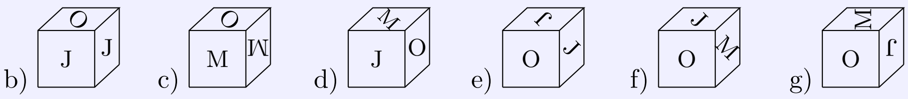
Aufgabe 2 - 220612

Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)

a) 

h) 



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

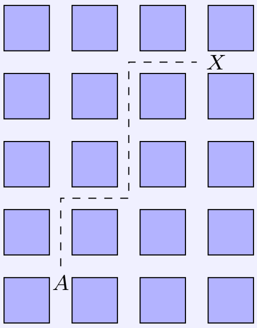
Aufgabe 3 - 220613
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher als Ernst sprang.
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

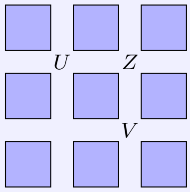
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten lässt!
Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

Aufgabe 4 - 220614
Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z.B. X fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wie viel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.

a)



b)



a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wie viel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wie viel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

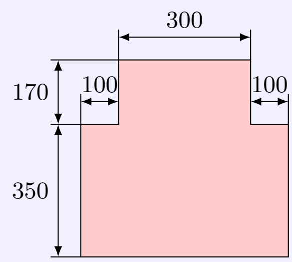
c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise:
Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z.B. w für waagerecht, s für senkrecht!

2.23.2 II. Runde 1982, Klasse 6

Aufgabe 1 - 220621

Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.

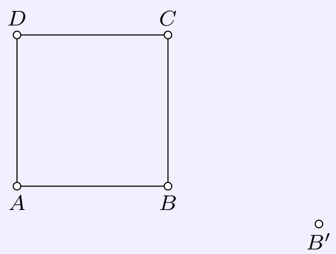


Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

Aufgabe 2 - 220622

Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g.
Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g!
Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Aufgabe 3 - 220623

Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.
Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.
Nenne vier derartige Summanden!
Überprüfe, dass sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, dass die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

Aufgabe 4 - 220624

An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(2) b ist ein Teiler von c,
(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(4) d ist ein Teiler von e,

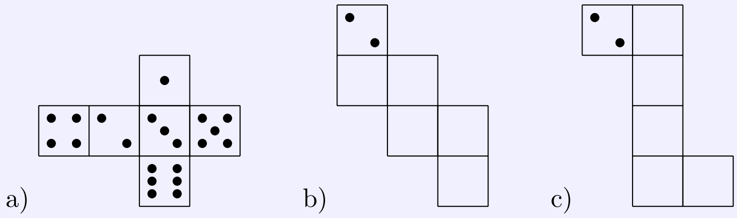
(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,
(6) b ist ein Teiler von d,
(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,
(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt!
Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

2.24 XXIII. Olympiade 1983

2.24.1 I. Runde 1983, Klasse 6

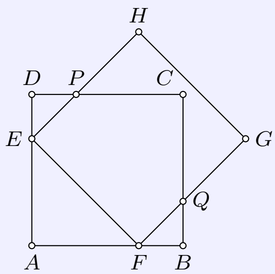
Aufgabe 1 - 230611
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.



Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

Aufgabe 2 - 230612
Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel.
Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.
Wie viel Mark kostete ein Buch? Wie viel Mark kostete ein Ball?

Aufgabe 3 - 230613



Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.
Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

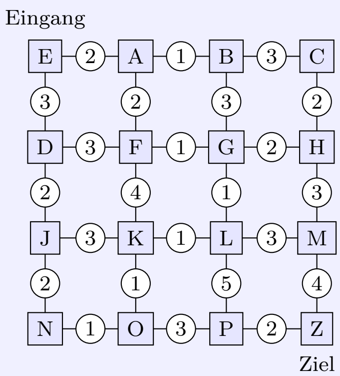
a) genau einen Punkt, b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte, d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte, f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 230614
Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen.
Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird!
Wie viel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit A, B, C, D, E, F, ..., P bezeichnet, wie es in der Abbildung angegeben ist.

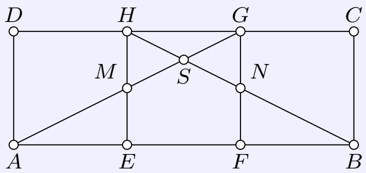


2.24.2 II. Runde 1983, Klasse 6

Aufgabe 1 - 230621
Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden.
Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch fasst.

a) Berechne, wie viel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

Aufgabe 2 - 230622
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Aufgabe 3 - 230623
Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge).
Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgenden ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

Zeige, dass sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln lässt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten!
Gib diese zusammengehörenden Namen an!

Aufgabe 4 - 230624
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, daß es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

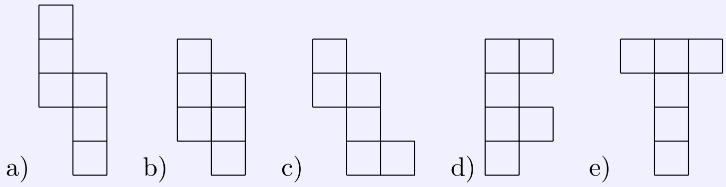
2.25 XXIV. Olympiade 1984

2.25.1 I. Runde 1984, Klasse 6

Aufgabe 1 - 240611
Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

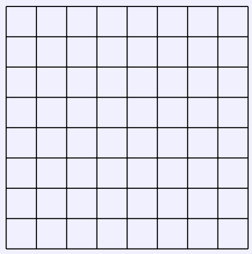
Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

Aufgabe 2 - 240612
Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, dass es Körpernetze von Würfeln seien.



(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

(2) Zeige, dass es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden!



Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.
Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

Aufgabe 3 - 240613
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Aufgabe 4 - 240614
Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111111111.

(a) Um welche Zahl z handelt es sich?
(b) Ermittle eine Zahl x, die folgende Eigenschaft besitzt!
Wenn man x mit der in (a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.
(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?
Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

2.25.2 II. Runde 1984, Klasse 6

Aufgabe 1 - 240621
Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 2 - 240622
Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen?
(Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 3 - 240623
Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.
Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.
Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

Aufgabe 4 - 240624
Rita experimentiert mit einer Balkenwaage.
(Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)
Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

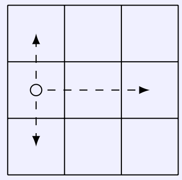
Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:
"Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"
Beweise, dass man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne dass ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

2.26 XXV. Olympiade 1985

2.26.1 I. Runde 1985, Klasse 6

Aufgabe 1 - 250611

Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.



a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

Aufgabe 2 - 250612

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{m} & \mathrm{a} & \mathrm{t} & \mathrm{h} & \mathrm{e} \\ + & & \mathrm{o} & \mathrm{l} & \mathrm{y} & \mathrm{m} \\ + & & & & \mathrm{p} & \mathrm{i} \\ + & & & \mathrm{a} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{k} & \mathrm{l} & \mathrm{a} & \mathrm{s} & \mathrm{s} & \mathrm{e} \end{array}$$

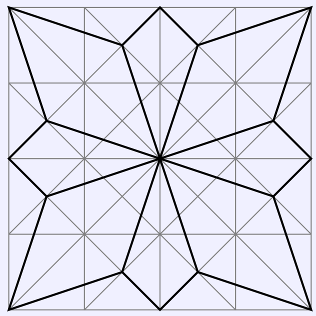
In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist. Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) a ist zwei Drittel von m.
(3) e ist zwei Drittel von a.
(4) Die Summe von a und s ist gleich m.
(5) d ist kleiner als h.

a) Zeige, dass es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wie viel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

Aufgabe 3 - 250613
Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier.
Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, dass sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, dass Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte?
Gib alle Möglichkeiten an!

Aufgabe 4 - 250614

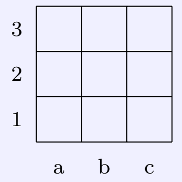


In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!

2.26.2 II. Runde 1985, Klasse 6

Aufgabe 1 - 250621

Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, dass jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.
Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 250622

Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

Aufgabe 3 - 250623

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

Aufgabe 4 - 250624

Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

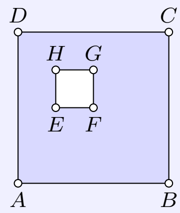
a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, dass es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

2.27 XXVI. Olympiade 1986

2.27.1 I. Runde 1986, Klasse 6

Aufgabe 1 - 260611

In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.



a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!

Aufgabe 2 - 260612
Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, dass jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

Aufgabe 3 - 260613
Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

Aufgabe 4 - 260614
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen.
Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

2.27.2 II. Runde 1986, Klasse 6

Aufgabe 1 - 260621
Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

$$27**7$$

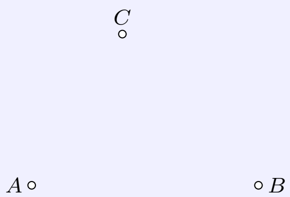
Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Aufgabe 2 - 260622
Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken.
Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.
Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.
Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

Aufgabe 3 - 260623



Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!
c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 4 - 260624
Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

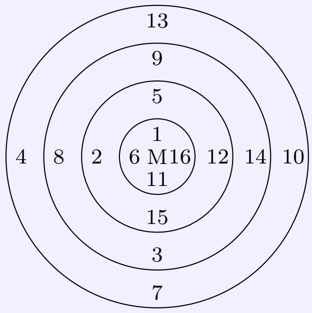
Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, dass Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muss.
Weise nach, dass die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

2.28 XXVII. Olympiade 1987

2.28.1 I. Runde 1987, Klasse 6

Aufgabe 1 - 270611

Vier Kreisscheiben (siehe Abbildung) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, dass danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.
Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 270612

In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (siehe Abbildung) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.
Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.

1			
	1		
		1	
			1

Aufgabe 3 - 270613
Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

Ordne die Jungen nach ihren Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

Aufgabe 4 - 270614
Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, dass der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so dass nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.
Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander. Entsprechend wird fortgesetzt: übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt.
(Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)

(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten Zerschneiden entstanden sind!

(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einen Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

2.28.2 II. Runde 1987, Klasse 6

Aufgabe 1 - 270621
Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

Frank sagte: ”Jens oder Peter wird gewinnen.”
Horst sagte: ”Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael.”
Norbert sagte: ”Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter.”
Stefan sagte: ”Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter.”

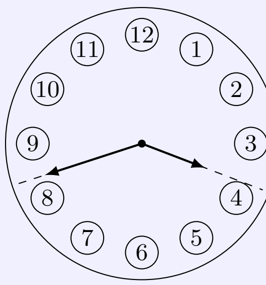
(a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde! In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, dass Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

Aufgabe 2 - 270622
(a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!

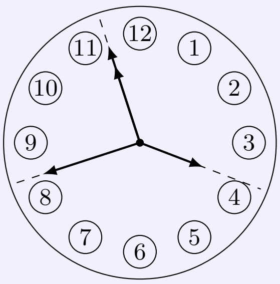
(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, dass bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

Aufgabe 3 - 270623

(a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Abbildung) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9.
Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, dass in einem Teil die Summe $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ und im anderen Teil die Summe $9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$ steht.



Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!



(b) Bei einer anderen Uhr (siehe Abbildung) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.
Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen $4+5+6+7+8 = 30$, $9+10+11 = 20$, $12+1+2+3 = 18$ aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

Aufgabe 4 - 270624
In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden

auf Maschine A genau 2 Werkstücke, auf Maschine B genau 3 Werkstücke,
auf Maschine C genau 8 Werkstücke, auf Maschine D genau 12 Werkstücke

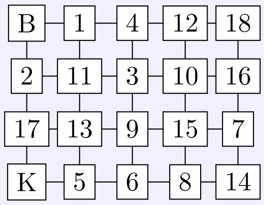
hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, dass zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, dass jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, dass
(a) auf allen vier Maschinen,
(b) auf genau drei der vier Maschinen,
(c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

2.29 XXVIII. Olympiade 1988

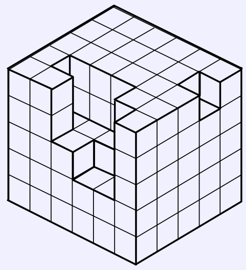
2.29.1 I. Runde 1988, Klasse 6

Aufgabe 1 - 280611



Bello (B) kann nur dann zum Knochen (K) gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2431 beträgt. Welchen Weg muss er wählen?

Aufgabe 2 - 280612



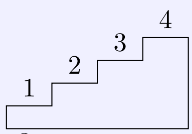
Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

Aufgabe 3 - 280613
Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluss der Schulolympiade stellt sich heraus, dass die Aussage (4) wahr ist und dass in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte!
Zeige, dass die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 4 - 280614



Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z.B. 1, 3, 4.)
a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wie viel sind es insgesamt?
b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!
c) Jemand behauptet: "Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."
Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen lässt!
e) Wie kommt es, dass die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

2.29.2 II. Runde 1988, Klasse 6

Aufgabe 1 - 280621
An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.
In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen. André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wie viel Fahrkarten hat André insgesamt?
(Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte "Hin- und Rückfahrkarten" gibt es jedoch nicht.)

Aufgabe 2 - 280622
Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.
Wie viel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden musste?

Aufgabe 3 - 280623
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!

Aufgabe 4 - 280624
Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten "Handball", "Mehrkampf", "Pop-Gymnastik", "Schwimmen". Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.
(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.
(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.
(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

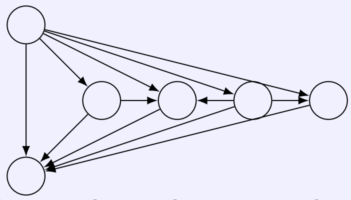
Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,
a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,
b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!
Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

2.30 XXIX. Olympiade 1989

2.30.1 I. Runde 1989, Klasse 6

Aufgabe 1 - 290611
Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wie viel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter.
(Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

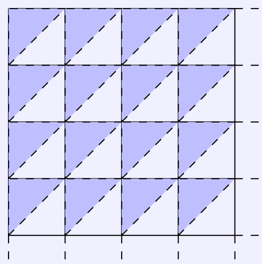
Aufgabe 2 - 290612



a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, dass jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.

b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

Aufgabe 3 - 290613



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

Aufgabe 4 - 290614
Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, dass es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

2.30.2 II. Runde 1989, Klasse 6

Aufgabe 1 - 290621
Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

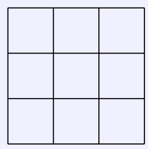
Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, dass sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln lässt!
Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

Aufgabe 2 - 290622
a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(6;5)$ und $D(4;6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

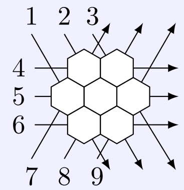
c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

Aufgabe 3 - 290623
Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.
a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!



Aufgabe 4 - 290624
a) In ein 3×3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt. Das linke Bild zeigt dafür ein Beispiel.
Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem rechten Bild und stellt die Aufgabe:

4	9	2
3	5	7
8	1	6



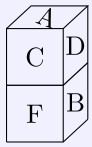
In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.
Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an!
Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

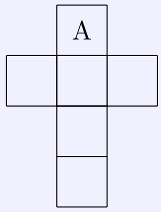
2.31 XXX. Olympiade 1990

2.31.1 I. Runde 1990, Klasse 6

Aufgabe 1 - 300611

Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!

a)


b)


Aufgabe 2 - 300612

a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!
b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z.B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

Aufgabe 3 - 300613

Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, dass 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.
Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte?
Begründe deine Antwort!

Aufgabe 4 - 300614

Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnummeriert.
a) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?
b) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?
c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Nummerierung zu drucken?

2.31.2 II. Runde 1990, Klasse 6

Aufgabe 1 - 300621
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1), \quad B(5;1), \quad C(5;5), \quad D(1;5)$$

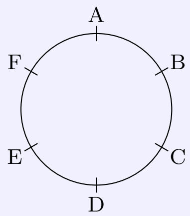
und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

$$P(9;1), \quad Q(13;1), \quad R(13;5), \quad S(9;5)$$

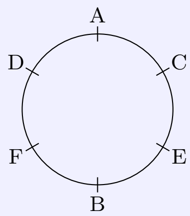
ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

Aufgabe 2 - 300622



a)



b)

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, dass in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann:
Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.

a) Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, dass tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!
b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an!
Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

Aufgabe 3 - 300623
Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stückzahl	350	340	320	340	360	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden.
Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 4 - 300624

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

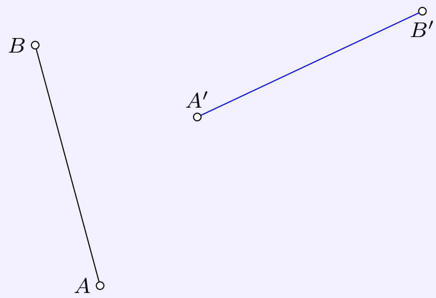
2.32 XXXI. Olympiade 1991

2.32.1 I. Runde 1991, Klasse 6

Aufgabe 1 - 310611
Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck.
Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

Aufgabe 2 - 310612

a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 3 - 310613
Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.
(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.
(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können!
Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

Aufgabe 4 - 310614
An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.
(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.
(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wie viele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

2.32.2 II. Runde 1991, Klasse 6

Aufgabe 1 - 310621
a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.
(2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.
(3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

(4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 310622
Zwischen vier Mannschaften A, B, C, D wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere.
Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften C und D endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft B wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft A belegte und wie viel Punkte sie erreichte!
Wenn das der Fall ist, gib beides an!
b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Platzierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können?
Begründe deine Antwort!

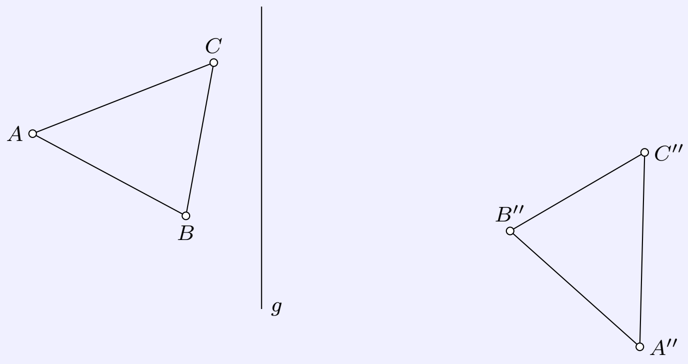
Aufgabe 3 - 310623
Wie viele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die
a) Teiler von 256 sind,
b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,
c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?
Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

Aufgabe 4 - 310624
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.



2.33 XXXII. Olympiade 1992

2.33.1 I. Runde 1992, Klasse 6

Aufgabe 1 - 320611

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & A & = & B \\ \cdot & & - & & - \\ C & \cdot & C & = & D \\ \hline E & - & F & = & G \end{array}$$

Für die Buchstaben sind Grundziffern (0; 1; 2; ...; 8; 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und für unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Grundziffern stehen und dass die angegebenen Rechenoperationen richtig gelöst sind.

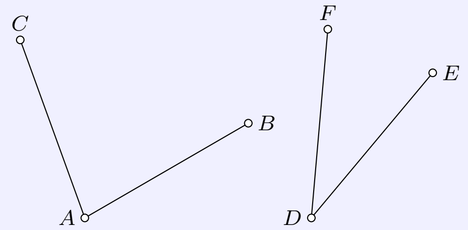
Aufgabe 2 - 320612
Von drei Mädchen aus unterschiedlichen Familien sei folgendes bekannt:

(1) Sie heißen Sabine, Christiane und Miriam.
(2) Miriam hätte lieber blondes Haar wie eines der drei Mädchen.
(3) Jedes der drei Mädchen hat eine andere Haarfarbe.
(4) Das rothaarige Mädchen hat dieselbe Haarfarbe wie ihr Bruder.
(5) Christiane hätte lieber solches schwarzes Haar wie die Schwester von Miriam.
(6) Das schwarzhaarige Mädchen hat keine Geschwister und ist mit seiner Haarfarbe zufrieden.

Welche Haarfarbe hat jedes der drei Mädchen?

Aufgabe 3 - 320613

Gegeben seien zwei Winkel BAC und EDF mit den Maßen $\alpha + \beta$ bzw. $\alpha - \beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen α und β.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.



Aufgabe 4 - 320614
Ein Radfahrer fährt von Schnellhausen nach Sausedorf, wobei er täglich 36 Kilometer zurücklegt. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer Radfahrer, der täglich 34 Kilometer zurücklegt, von Sausedorf aus entgegen. Die Entfernung zwischen Schnellhausen und Sausedorf beträgt 350 km.
In wie viel Tagen treffen sich die beiden Radfahrer? Führe auch eine Probe durch.

2.33.2 II. Runde 1992, Klasse 6

Aufgabe 1 - 320621
Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

$$38\star\star42$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können!
Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Aufgabe 2 - 320622
Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.
a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, dass sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?
b) Wie viele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,
c) Wie viele haben keine rote Seitenfläche?

Aufgabe 3 - 320623
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von A nach D?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

Aufgabe 4 - 320624
Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür, diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz.
Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM. Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein.
Wie viel Geld erhält er zurück?

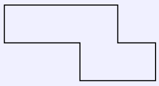
2.34 XXXIII. Olympiade 1993

2.34.1 I. Runde 1993, Klasse 6

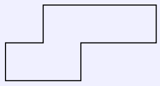
Aufgabe 1 - 330611
Zerlege die Figur aus Abbildung a) so in Teilstücke, dass jedes Teilstück die Gestalt von Abbildung b) oder von Abbildung c) hat und dass auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!

		6	9	2		
	5	2	3	1	2	
4	6	3	1	5	3	2
8	1	7	5	5	3	7
	5	6	1	8	1	
		4	3	2		

a)



b)

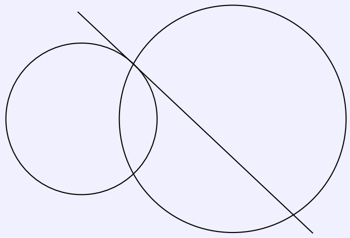


c)

Aufgabe 2 - 330612
Zwei Zahlen sollen die Summe 2028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.
Zeige, dass die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, dass sie die Forderungen erfüllen!

Aufgabe 3 - 330613
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,

1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.



Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Aufgabe 4 - 330614
Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: "n - Fakultät"). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

$$1! + 2! + 3! + 4! + ... + 99! + 100!$$

ergeben würde?

2.34.2 II. Runde 1993, Klasse 6

Aufgabe 1 - 330621
Von einem "Fest der Tiere" wird erzählt:

Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so daß die Erzählung stimmt!
Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!
Bemerkung: Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.

Aufgabe 2 - 330622
Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch die Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

Aufgabe 3 - 330623
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck ABC mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei C!
Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d.h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

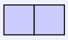
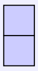
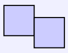
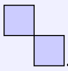
Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

Aufgabe 4 - 330624
In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl.
Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar.
Wie viele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

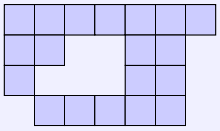
2.34.3 III. Runde 1993, Klasse 6

Aufgabe 1 - 330631
Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, dass $a+b+c=12$ und $c-b=3$ gilt!
Hinweis:
1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, dass sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

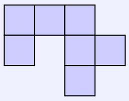
Aufgabe 2 - 330632
Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, dass sie beide genau eine Seite gemeinsam haben:
 oder  (dagegen nicht  und auch nicht .
Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, dass es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:

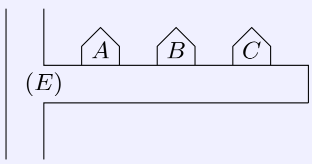


(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.
(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben.
Beispiel: Der Umfang der folgenden Figur beträgt 16 cm.



Zeichne eine solche Figur F!

Aufgabe 3 - 330633
In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:
Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z.B. in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z.B. auch in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.



(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!
(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen.
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!
(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?
Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

Aufgabe 4 - 330634
Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, dass alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt. Die drei Aussagen von Dieter lauten:

(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.
(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.
(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

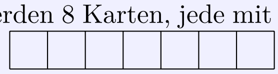
Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 5 - 330635
Ein 4×4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:
In jedem so gefüllten Feld kann man "Wörter" lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die "Wörter" liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten.
(Als Beispiele sind die "Wörter" ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche "Wörter" zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)

a	b	c	d
e	d	d	c
d	f	c	c
a	a	f	d

"Wörter", die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.
Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem "Wort" dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im "Wort" aa).
(2) Kein "Wort" darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das "Wort" cd).
a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!
b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und
b) nur 6 Buchstaben, c) nur 5 Buchstaben
verwendet? Begründe Deine Antworten!

Aufgabe 6 - 330636
Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln: Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern: 

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten.
Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt:
Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!
b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.
c) Untersuche, ob im Fall, dass $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

2.35 XXXIV. Olympiade 1994

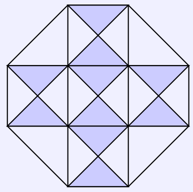
2.35.1 I. Runde 1994, Klasse 6

Aufgabe 1 - 340611
Herr Eilig fuhr auf der Autobahn eine Strecke von 475 Kilometern. Er legte diese Strecke in 3 Stunden und 10 Minuten zurück und verbrauchte dabei 57 Liter Benzin.

a) Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit?
b) Wie viel Benzin hatte er im Durchschnitt für je 100 km verbraucht?
c) Wäre er stattdessen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h gefahren, so hätte er für je 100 km nur 8 Liter verbraucht.

Welche Strecke hätte er bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 120 km/h mit dem gesparten Benzin noch fahren können?

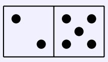
Aufgabe 2 - 340612
Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?



Aufgabe 3 - 340613
Nach einem Wandertag wurden die Kinder gefragt, welche Erfrischungen sie sich gekauft hatten. Es hatte Cola, Hamburger und Popcorn gegeben. Die Befragung ergab das folgende Ergebnis:

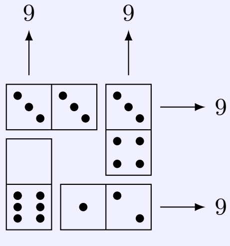
Jeder der Teilnehmer hatte wenigstens eine der drei Waren gekauft.
Von ihnen genau 22 mindestens Cola, genau 14 mindestens einen Hamburger und genau 13 wenigstens Popcorn. Mindestens Cola und Hamburger kauften genau 10 Teilnehmer, mindestens Cola und Popcorn genau 4 und genau 5 wenigstens Hamburger und Popcorn. Alle drei Waren gleichzeitig wurden nur von 2 Teilnehmern gekauft.

Weise nach, dass durch diese Angaben die Anzahl der Teilnehmer eindeutig bestimmt ist!
Berechne diese Anzahl!

Aufgabe 4 - 340614
a) Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5: 

Nenne alle Steine eines Dominospiels!

b) Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in Abb. b) legen, und zwar so, dass auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt (im Beispiel beträgt diese "Seitensumme" 9).
Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 10, eines mit der Seitensumme 11 und eines mit der Seitensumme 12!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

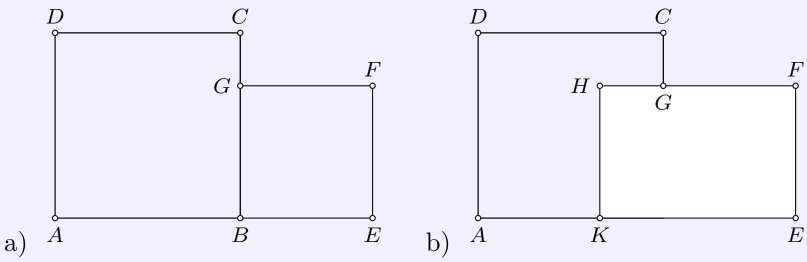


2.35.2 II. Runde 1994, Klasse 6

Aufgabe 1 - 340621
Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.
a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?
b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

Aufgabe 2 - 340622
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

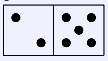
a) Welche Breite AD bzw. EF haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge GH ist Knobels Garten länger geworden?



Aufgabe 3 - 340623
Nach folgenden Regeln lässt sich ein "Zahlenzug" bilden:

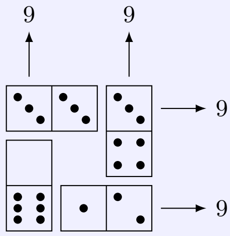
- Im ersten "Waggon" steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem "Waggon" eine gerade Zahl, so steht im nächsten "Waggon" die halb so große Zahl.
- Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten "Waggon" die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem "Waggon" die Zahl 1, so ist der "Zahlenzug" mit diesem "Waggon" beendet.

a) Nenne alle diejenigen "Zahlenzüge", die aus genau 4 "Waggons" bestehen!
Begründe auch, dass deine Aufzählung vollständig ist!
b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht?
Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!
c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht? Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

Aufgabe 4 - 340624
Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor.
Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.) 

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in der unteren Abbildung legen, und zwar so, dass auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel beträgt diese "Seitensumme" 9.

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!
b) Begründe, dass es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!
c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, dass kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat.
Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!

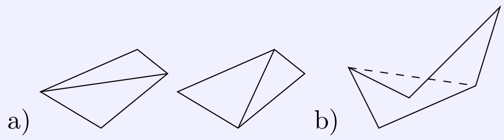


2.35.3 III. Runde 1994, Klasse 6

Aufgabe 1 - 340631
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

a) konvexes Fünfeck b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.



Aufgabe 2 - 340632
Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein "Wort" genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, dass jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort.

Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

$$ALT, \quad ATL, \quad LAT, \quad LTA, \quad TAL, \quad TLA$$

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe u.s.w.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort LAND bilden lassen (das Wort LAND ist dabei mit aufzuzählen)!
(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort LAND?
(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort UMLAND bilden? (Wieder ist UMLAND mitzuzählen.)
(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort UMLAND?

Aufgabe 3 - 340633
Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden Stammbrüche bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!
Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.
(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, dass einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!
(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Aufgabe 4 - 340634
Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.
(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.
(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten.
Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist!
Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

Aufgabe 5 - 340635
In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, dass die vier "Seitensummen" einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier "Seitensummen", zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier "Seitensummen", eine mit dem Wert 13 der vier "Seitensummen" und eine mit dem Wert 17 der vier "Seitensummen"!
(b) Auch mit dem Wert 18 der vier "Seitensummen" ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.
Zeige, dass das stimmt; erkläre den Unterschied!
(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die "Seitensumme" 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann:
"Die vier Zahlen für b, d, f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen 'Seitensumme'."
Gib eine solche Beziehung an und weise nach, dass Fritz recht hat!

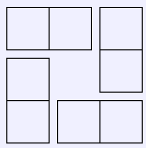
a)

a	b	c
h		d
g	f	e

b)

4	4	6
5		5
5	6	3

c)



Aufgabe 6 - 340636
Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:
(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.
(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)
(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.
(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.
(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?
Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)!
Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!
(b) Zeige, dass man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) weglässt!

3 Aufgaben - Klassenstufe 7

3.1 Vorolympiade 1960

3.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 7

Aufgabe 1 - V00701
Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a.

Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

Aufgabe 2 - V00702
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten:

```
117??? : ??3 = ???
 ??6
 ----
 187?
 ????
 -----
  ????
  ????
  ----
     0
```

Aufgabe 3 - V00703
Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $\frac{1}{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert!
Wie heißt sie?

Aufgabe 4 - V00704
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

$$\frac{35}{47} \qquad \text{oder} \qquad \frac{23}{31}$$

Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

Aufgabe 5 - V00705

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

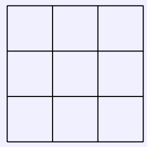
Aufgabe 6 - V00706
Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm.
Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen.

Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100000 Stück!
(Dichte des Eisens 7,8 g$\cdot$cm^{-3})

Aufgabe 7 - V00707
Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit 100 km$\cdot$h^{-1} an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muss Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf 60 km$\cdot$h^{-1} herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

Aufgabe 8 - V00708

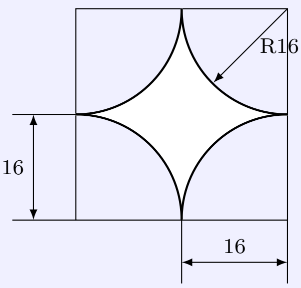
In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.



Aufgabe 9 - V00709
Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

```
abb - cdb = ebd
 :     +     -
 fg *  ch = gic
---------------
 fk + cfc = cbi
```

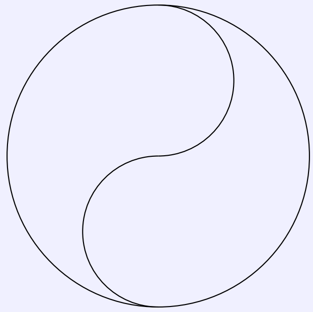
Aufgabe 10 - V00710
Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern.



Aufgabe 11 - V00711
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miss die Höhe h_c!

Aufgabe 12 - V00712
Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen.
Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, dass er die beiden ersten Kreise von außen berührt!
Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

Aufgabe 13 - V00713
Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche Teile zerlegen?
Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen.



3.2 Vorolympiade 1961

3.2.1 I. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10711
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

Aufgabe 2 - V10712
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

Aufgabe 3 - V10713
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Aufgabe 4 - V10714
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Aufgabe 5 - V10715
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!)
Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

Aufgabe 6 - V10716
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

3.2.2 II. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10721
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Erzeugnis	Vorkriegsjahr	1959
Elektroenergie	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Stahl	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Zement	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wieviel Prozent stieg die Erzeugung?

Aufgabe 2 - V10722
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.
Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Aufgabe 3 - V10723
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Aufgabe 4 - V10724
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.

Aufgabe 5 - V10725
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm^2.
Wieviel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen?

3.2.3 III. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10731
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: "558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt."
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

Aufgabe 2 - V10732
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wieviel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

Aufgabe 3 - V10733
Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

```
3?7 * 8?
--------
 2??? 
  ???2
--------
 ?????
```

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Aufgabe 4 - V10734
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

Aufgabe 5 - V10735
Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!

3.3 I. Olympiade 1961

3.3.1 I. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010711

$$a)\ \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \qquad b)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad c)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \qquad d)\ \left(-\frac{4}{5}\right)^4$$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

Aufgabe 2 - 010712

Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe 11 2mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.
Wieviel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

Aufgabe 3 - 010713

Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet.
Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

Aufgabe 4 - 010714

Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung“ folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:
Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow – Max-Kreuziger-Oberschule	1:0
4. Oberschule Köpenick – 8. Oberschule Lichtenberg	2:0

Tabellenstand:

Platz	Mannschaft	Punkte	Tore
1.	4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
2.	12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
3.	Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
4.	8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?
Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für jede Niederlage 0:2 Punkte.

Aufgabe 5 - 010715

Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:
a) zwei benachbarte Seiten,
b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
c) beide Diagonalen,
d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,
e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?
Durch wieviel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!

Aufgabe 6 - 010716
Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche
des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!

3.3.2 II. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010721
Der Kapitalismus hat zur Folge, dass einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.
So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603000000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204000000 t Stahl und 1604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie. Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1283000000 Menschen nur 6000000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Wieviel Stahl und wieviel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Aufgabe 2 - 010722
Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist 123,6 km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,7 $\frac{km}{h}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75,2 $\frac{km}{h}$.
a) Um wieviel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?
b) Wieviel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Aufgabe 3 - 010723
Es ist zu beweisen, dass in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.

Aufgabe 4 - 010724
In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen.
Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 5 - 010725
Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.
Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?

3.3.3 III. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010731
Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.
Um wieviel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität
a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,
b) beim Einsatz eines Melkstandes?
Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Aufgabe 2 - 010732
Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück.
Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750000 stellen wir die folgenden Strecken fest: Zossen–Storkow 4,5 cm, Storkow–Golßen 5,2 cm, Golßen–Zossen 3,9 cm. Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?
b) Um wieviel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Aufgabe 3 - 010733
In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben.
Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wieviel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?

Aufgabe 4 - 010734
Es ist zu beweisen, dass die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.

Aufgabe 5 - 010735
Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.
a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!
b) Lässt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

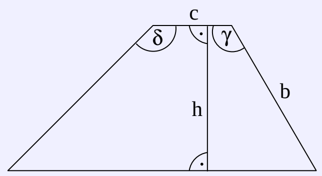
3.4 II. Olympiade 1962

3.4.1 I. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020711
In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen: Länge l = 29,5 cm, Breite b = 12,0 cm.

a) Berechne die Fläche einer Fliese!
b) Wieviel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge? Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

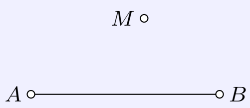
Aufgabe 2 - 020712



Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen.
Wie groß ist die Fläche?
b = 60 mm , c = 34 mm , h = 52 mm , $\gamma = 120°$, $\delta = 135°$

Aufgabe 3 - 020713
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist.

Aufgabe 4 - 020714



Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!
b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist! Beschreibe die Konstruktionen und begründe sie!

Aufgabe 5 - 020715
Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396.
Wie lauten die Zahlen?

Aufgabe 6 - 020716
In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so dass an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.
Wieviel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

3.4.2 II. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020721
An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.
Welcher Stadtbezirk wies die bessere relative Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 2 - 020722
Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuss; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoss die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoss die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 3 - 020723
Emil erzählt: "Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt."
Wie alt ist Emil? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Aufgabe 4 - 020724
Wieviel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?
Begründe deine Antwort!

Aufgabe 5 - 020725
Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

3.4.3 III. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020731
Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wieviel Lösungen waren eingesandt worden?
b) Wieviel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Aufgabe 2 - 020732
In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden.
In welchem Abstand muss angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Aufgabe 3 - 020733
Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, dass er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen.
Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: "Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner."
Sie vereinbaren, dass sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und dass der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)
a) Wer gewinnt?
b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?
c) Wieviel Stufen müsste die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)
Begründe deine Antworten!

Aufgabe 4 - 020734
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.
Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Aufgabe 5 - 020735
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M.
Beweise, dass der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

Aufgabe 6 - 020736
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $BC = a$ und $AC = b$), die Größe des Winkels $\angle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.

3.5 III. Olympiade 1963

3.5.1 I. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030711
Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm.
Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d.h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.
Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Aufgabe 2 - 030712
Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen.
Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen "Schnitt" von 40 km je Stunde.
In welcher Zeit und nach wieviel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 3 - 030713
Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

Aufgabe 4 - 030714
Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt. a) Beweise, dass die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!
b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

Aufgabe 5 - 030715
Mit wieviel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Aufgabe 6 - 030716
a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 lässt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

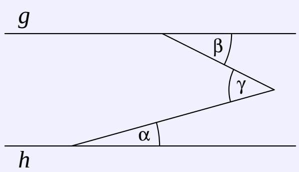
3.5.2 II. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030721
Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Aufgabe 2 - 030722
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 3 - 030723
Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wieviel Schnitte muss man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)
b) Wieviel Würfel erhält man?

Aufgabe 4 - 030724



Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!

Aufgabe 5 - 030725
In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, dass unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.
Wieviel Kugeln muss sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

3.5.3 III. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030731
Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, dass seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.
Wie muss er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Aufgabe 2 - 030732
a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111111 !
b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

Aufgabe 3 - 030733
Eine Zahl $30 \star 0 \star 03$ soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die $\star$ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muss nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)
Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Aufgabe 4 - 030734
Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!
Wieviel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

Aufgabe 5 - 030735
Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, dass sie die Gerade schneiden!
Beweise, dass die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

Aufgabe 6 - 030736
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.
a) Konstruiere dieses Trapez!
b) Begründe die Konstruktion!

3.6 IV. Olympiade 1964

3.6.1 I. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040711
Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.
Gib eine der möglichen Lösungen an!

Aufgabe 2 - 040712
Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Aufgabe 3 - 040713
Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung.
Brigitte findet zwei Lösungswege.

Aufgabe 4 - 040714
Jede natürliche Zahl heißt vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist; wie man sieht; keine vollkommene Zahl.
Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Aufgabe 5 - 040715
In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten BC bzw. CD.
Es ist zu beweisen, dass die Strecken AM und BN aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 6 - 040716
Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm.
Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so dass sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.
Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!

3.6.2 II. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040721
Beweise, dass die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 2 - 040722
In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluss des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur "5", jeder neunte Schüler erhielt die Zensur "1", jeder dritte die Zensur "2" und jeder sechste die Zensur "4".
Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.
Wieviel Schüler erhielten die Zensur "3"?

Aufgabe 3 - 040723
In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Berechne den Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 4 - 040724
Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, dass die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.
Es ist zu beweisen, dass E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

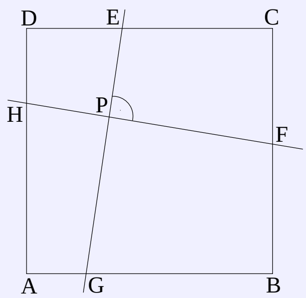
3.6.3 III. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040731
Wieviel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend nummeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Aufgabe 2 - 040732
Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, dass die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!

Aufgabe 3 - 040733
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:
1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.
In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Aufgabe 4 - 040734



Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, dass jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (siehe Abbildung).
Beweise, dass die beiden Strecken EG und HF gleich lang sind!

Aufgabe 5 - 040735
Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{cccc} & \text{D} & \text{R} & \text{E} & \text{I} \\ + & \text{E} & \text{I} & \text{N} & \text{S} \\ \hline & \text{V} & \text{I} & \text{E} & \text{R} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, dass es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Aufgabe 6 - 040736
Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, dass einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.

3.7 V. Olympiade 1965

3.7.1 I. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050711
Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genausoviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag.
Wer hat mehr Geld gespart?

Aufgabe 2 - 050712
Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck.
Es ist zu beweisen, dass der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.

Aufgabe 3 - 050713
Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:
a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.
b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.
c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Aufgabe 4 - 050714
Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:
Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.
Wieviel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

3.7.2 II. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050721
Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN
(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN
(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN (Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)
(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Aufgabe 2 - 050722
Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

Aufgabe 3 - 050723
Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!
a) Welche der beiden Summen ist größer?
b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Aufgabe 4 - 050724
In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, dass sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.
Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?

3.7.3 III. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050731
Auf welche Ziffern endet das Produkt?

$$z = 345926476^3 \cdot 125399676^2 \cdot 2100933776^3$$

Aufgabe 2 - 050732
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.
a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!
b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!
Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

Aufgabe 3 - 050733
Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$.
Beweise, dass für jeden solchen Punkt M $\epsilon > \alpha$ gilt, wenn ϵ ($< 180°$) das Maß des Winkels $\angle BMC$ und α das Maß des Winkels $\angle BAC$ ist!

Aufgabe 4 - 050734
Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Aufgabe 5 - 050735
In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $AD = DC = CB$.
Beweise, dass die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert!

Aufgabe 6 - 050736
Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.
Wieviel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

3.8 VI. Olympiade 1966

3.8.1 I. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060711
Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.
Nach wieviel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Aufgabe 2 - 060712
In dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.
Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\angle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!

Aufgabe 3 - 060713
In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.
Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Aufgabe 4 - 060714
Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.
Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $XS = XP$ gilt.

3.8.2 II. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060721
Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

Aufgabe 2 - 060722
In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, dass alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
Beweise, dass in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Aufgabe 3 - 060723
Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Aufgabe 4 - 060724
In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

3.8.3 III. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060731
Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.
Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$!

Aufgabe 2 - 060732
In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:
Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.
Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Aufgabe 3 - 060733
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $BD + CE = DE$.

Aufgabe 4 - 060734
Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

Aufgabe 5 - 060735
Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:
Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

Aufgabe 6 - 060736
In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe der Winkel $\angle ACB$ ein Gradmaß von $120°$.
Beweise, dass die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

3.9 VII. Olympiade 1967

3.9.1 I. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070711
Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,
b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.
c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.
d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.
e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).
Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

Aufgabe 2 - 070712
Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Aufgabe 3 - 070713
Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Aufgabe 4 - 070714
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\angle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD.
Beweise: Der Winkel $\angle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\angle BEF$!

3.9.2 II. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070721
Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, dass der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 2 - 070722
Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen!

Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

Aufgabe 3 - 070723
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.
Beweise, dass N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Aufgabe 4 - 070724
Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler.
Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, dass in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

3.9.3 III. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070731
Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.
Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

Aufgabe 2 - 070732
Beweise folgende Behauptung!
Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $MD = ME = MF$.

Aufgabe 3 - 070733
Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu "bezahlen".
Wie müssten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Aufgabe 4 - 070734
Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$$

In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, dass $x = 11$ die Gleichung erfüllt.
Wie lautet diese Zahl?

Aufgabe 5 - 070735
Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.
Beweise, dass das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 lässt!

Aufgabe 6 - 070736
Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $BB' = AB$, $CC' = BC$ und $AA' = CA$, abgetragen.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

3.10 VIII. Olympiade 1968

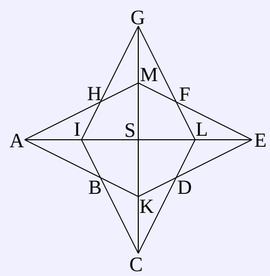
3.10.1 I. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080711
Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.
Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Aufgabe 2 - 080712
Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.
Zeige, dass es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Aufgabe 3 - 080713
Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.
Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, dass es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

Aufgabe 4 - 080714



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis 2 : 1 stehen, so dass die Strecken AEund CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.
Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

3.10.2 II. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080721
Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, dass sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.
Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Aufgabe 2 - 080722
Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

Aufgabe 3 - 080723
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 4 - 080724
Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

3.10.3 III. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080731
Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

Aufgabe 2 - 080732
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z.B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden. Ermittle

a) für $n = 7$,
b) für $n = 10$,
c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n
die Anzahl aller dieser Darstellungen!

Aufgabe 3 - 080733
Beweise folgenden Satz!
Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

Aufgabe 4 - 080734
Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, dass einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.
Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.

Aufgabe 5 - 080735
Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

Aufgabe 6 - 080736
Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.
Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?
(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

3.11 IX. Olympiade 1969

3.11.1 I. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090711
Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, dass die Buchstaben in der Reihenfolge W O L F G A N G übereinander liegen!
Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

Aufgabe 2 - 090712
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Darin sei die die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, dass diese sich im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.
Beweise, dass die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

Aufgabe 3 - 090713
Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Aufgabe 4 - 090714
Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z.B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).
Beweise, dass für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:
Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

3.11.2 II. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090721
Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, dass beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Aufgabe 2 - 090722
Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks "ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.
Ermittle die größtmögliche Anzahl "ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Aufgabe 3 - 090723
Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.
Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.
Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

Aufgabe 4 - 090724
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

3.11.3 III. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090731
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.
Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

Aufgabe 2 - 090732
Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned} (I) \qquad & a + b = 38, \\ (II) \qquad & b + c = 46, \\ (III) \qquad & a + c = 42 \end{aligned}$$

erfüllen. Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen
a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!
b) Weise nach, dass ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!
(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

Aufgabe 3 - 090733
Beweise folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!

Aufgabe 4 - 090734
Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

Aufgabe 5 - 090735
Beweise folgenden Satz!
Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

Aufgabe 6 - 090736
Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\angle BAD = 110°$ und $AC + BD = 15$ cm!
Anmerkung: $\angle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle BAD$.

3.12 X. Olympiade 1970

3.12.1 I. Runde 1970, Klasse 7

Aufgabe 1 - 100711
Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m $\times$ 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen.
Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, daß sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

Aufgabe 2 - 100712
Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!
Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Aufgabe 3 - 100713
a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

Aufgabe 4 - 100714
$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $AB \geq BC$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, dass unter diesen Bedingungen $\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$ gilt.
Dabei sind folgende Fälle zu betrachten: a) $AB = BC$, b) $AB > BC$.

3.12.2 II. Runde 1970, Klasse 7

Aufgabe 1 - 100721
In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.
Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

Aufgabe 2 - 100722
In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\angle ABC$ und CC' die des Winkels $\angle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C').

Ferner seien die Größen der Winkel $\angle AB'B$ bzw. $\angle AC'C$ mit ϵ bzw. δ bezeichnet.
Beweise, dass für jedes derartige Dreieck $\epsilon + \delta = 180°$ gilt!

Aufgabe 3 - 100723
Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer $\star$ so anzugeben dass die folgende Gleichung gilt: $9(230 + t)^2 = 492 \star 04$.

Aufgabe 4 - 100724
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!
Dabei sei α die Größe des Winkels $\angle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

3.12.3 III. Runde 1970, Klasse 7

Aufgabe 1 - 100731
Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, dass man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluss der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

Aufgabe 2 - 100732
Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, dass sich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

Aufgabe 3 - 100733
Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau 3 5 dem Schulchor und genau 7 10 der Schulsportgemeinschaft an. Genau 2 5 der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).

Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

Aufgabe 4 - 100734
Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

"Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert. Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!"

Aufgabe 5 - 100735
Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleigenschaft verloren geht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält!
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

Aufgabe 6 - 100736
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $CD = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

3.13 XI. Olympiade 1971

3.13.1 I. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110711
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d.h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Aufgabe 2 - 110712
Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!

Aufgabe 3 - 110713
Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest:
Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Primzahl.
Ferner gilt $BC = a = 6$ cm, $AC = b = 2$ cm.
Ermittle $AB = c$ und u!

Aufgabe 4 - 110714
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$! Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

3.13.2 II. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110721
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 2 - 110722
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).
(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.
(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}4$ ihrer Spiele.
(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

Aufgabe 3 - 110723
Beweise folgenden Satz:
In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!

Aufgabe 4 - 110724
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $BC = 3{,}5$ cm; $CD = 3{,}5$ cm; $AC = 5$ cm; $\angle DAB = 75°$ und $\angle ABC = 120°$!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

3.13.3 III. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110731
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) p< 100.
(2) p lässt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
(3) p lässt bei Division durch 4 den Rest 1!

Aufgabe 2 - 110732
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.
Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.
(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.
(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.
(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.
(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.
(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.
(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball b) Leichtathletik c) Schwimmen d) Turnen beteiligen!

Aufgabe 3 - 110733
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, dass $BP_1 = P_1C$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $P_2D = 3CP_2$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $P_3A = 3DP_3$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.
Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,
b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, dass P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

Aufgabe 4 - 110734
Fritz erzählt:
"In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen."
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Aufgabe 5 - 110735
Beweise den folgenden Satz:
Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!

Aufgabe 6 - 110736
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

3.14 XII. Olympiade 1972

3.14.1 I. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120711
Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, dass seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen.
Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, dass seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Aufgabe 2 - 120712
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.
(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

Aufgabe 3 - 120713
Beweise den folgenden Satz:
Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ $(AD = BC)$ die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

Aufgabe 4 - 120714
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,
(2) $AC = AC_1$.
(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!
b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt! (Fallunterscheidung)

3.14.2 II. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120721
Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Aufgabe 2 - 120722
Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d.h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 3 - 120723
Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.
(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen "Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser "Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 4 - 120724
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3.14.3 III. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120731
An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die
a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Aufgabe 2 - 120732
Beweise, dass es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Aufgabe 3 - 120733
Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $AB = CD = 5$ cm,
(2) $\angle EAB = \angle ABC = 95°$,
(3) $BC = CE = BE$,
(4) $AE = ED$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 120734
Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, ...$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & a & b & \cdot & c & d \\
\hline
 & e & f & g & 1 & & & \\
h & i & j & 1 & & & & \\
\hline
k & m & n & 1 & p & & &
\end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd:

"Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!"
Doch Gerd entgegnete ihm:
"Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Aufgabe 5 - 120735
Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Aufgabe 6 - 120736
Beweise den folgenden Satz:
Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!

3.15 XIII. Olympiade 1973

3.15.1 I. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130711
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111111 an!

Aufgabe 2 - 130712
Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!

Aufgabe 3 - 130713
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Aufgabe 4 - 130714
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.
Wie heißen die beiden Preisträger?

3.15.2 II. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130721
Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.
(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Aufgabe 2 - 130722
Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
$(a, c) = 6$,
$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, dass es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.
Ist diese Behauptung richtig?
Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

Aufgabe 3 - 130723
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:
Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von $90°$, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Aufgabe 4 - 130724
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.
Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so dass $\angle BPA = 2\gamma$ gilt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

3.15.3 III. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130731
Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Aufgabe 2 - 130732
Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 130733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a-c=3$ cm, $b=4$ cm, $d=6$ cm, $e=9$ cm!
Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 130734
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v=0$ oder $w=0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Aufgabe 5 - 130735
Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $CM + BN = MN$.

Aufgabe 6 - 130736
Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

3.16 XIV. Olympiade 1974

3.16.1 I. Runde 1974, Klasse 7

Aufgabe 1 - 140711
Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.
Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, dass nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

Aufgabe 2 - 140712
Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, dass seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt.

Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, dass eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

Ermittle, um wieviel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muss!

Aufgabe 3 - 140713
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

Aufgabe 4 - 140714
Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

3.16.2 II. Runde 1974, Klasse 7

Aufgabe 1 - 140721
Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Aufgabe 2 - 140722
Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, dass für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung (1) $DB = BC = CD$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 3 - 140723
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5{,}5$ cm!
Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 140724
Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

"Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muss ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wieviel Seiten hat das Buch insgesamt?"

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, daß alle Angaben von Fritz zutreffen!

3.16.3 III. Runde 1974, Klasse 7

Aufgabe 1 - 140731
Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln. Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.
(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.
(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Aufgabe 2 - 140732
Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 140733
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55°$ und $\beta = 85°$!
Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 140734
In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A1 und danach in der Abteilung A2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein musste, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, dass der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?
Auf wieviel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?
Bemerkungen: Es sei angenommen, dass der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

Aufgabe 5 - 140735
Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.
Ermittle die Seitenlängen!

Aufgabe 6 - 140736
Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geht.
Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\angle ABC$ ermitteln.
Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\angle ABC$!

3.17 XV. Olympiade 1975

3.17.1 I. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150711
Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefasst, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Aufgabe 2 - 150712
Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, dass A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, dass A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B, b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

Aufgabe 3 - 150713
Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, dass die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, dass also $AC = BD$ und $AC \parallel BD$ gilt!

Aufgabe 4 - 150714
In der Ebene ϵ seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, dass keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.
a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!
b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

3.17.2 II. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150721
a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, dass die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa "auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

Aufgabe 2 - 150722
Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder.
Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.
Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
Anmerkung: Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.

Aufgabe 3 - 150723
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle DCE = \frac{1}{2}|\angle ABC - \angle CAB|$ gilt!

Aufgabe 4 - 150724
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3.17.3 III. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150731
Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.
Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

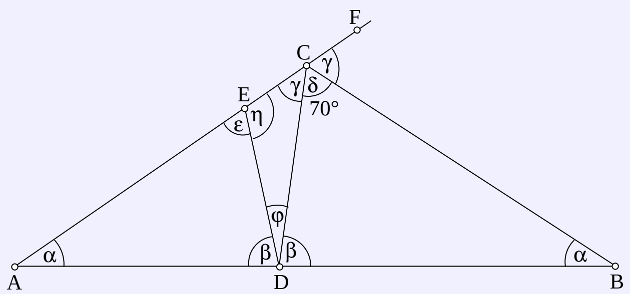
Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (1) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

Aufgabe 2 - 150732

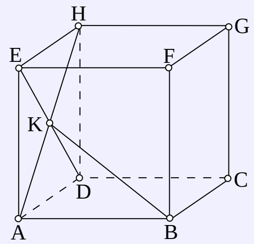


In der abgebildeten Figur gelte: $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$, $\angle ADE = \angle BDC = \beta$, $\angle ACD = \angle BCF = \gamma$, $\angle BCD = \delta$, $\angle AED = \epsilon$, $\angle CED = \eta$, $\angle EDC = \psi$.
Es sei $\delta = 70°$. Ermittle $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \eta$, und ψ!

Aufgabe 3 - 150733
Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, dass sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d.h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, dass jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und dass jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

Aufgabe 4 - 150734
Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist.
Nach wieviel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

Aufgabe 5 - 150735



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.
Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!

Aufgabe 6 - 150736
Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.
Ermittle c für jede 1 000 000 000-stellige durch 9 teilbare Zahl z!

3.18 XVI. Olympiade 1976

3.18.1 I. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160711
Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.
Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, dass in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.
Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten lässt!

Aufgabe 2 - 160712
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... u.s.w. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form

$$z = 12345678910111213...9899100$$

entsteht.
a) Wieviel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 3 - 160713
Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.
Beweise folgenden Satz: Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $AS = BS$.

Aufgabe 4 - 160714
Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{km}{h}$, A mit einer Geschwindigkeit von 45 $\frac{km}{h}$.

a) Nach wieviel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, dass beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?
b) Nach wieviel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen ("überrunden"), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden? Wieviele Runden hätte A und wieviele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

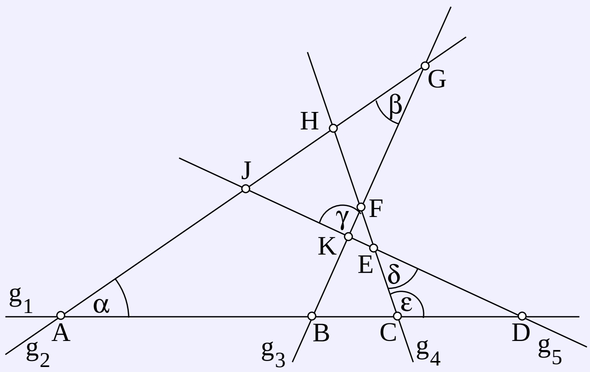
3.18.2 II. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160721
Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Aufgabe 2 - 160722
Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Aufgabe 3 - 160723
Konstruiere aus $a = 5{,}0$ cm und $b = 7{,}0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 160724



Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\angle BAJ, \angle HGF, \angle FKJ$ und $\angle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.
Ermittle die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$!

3.18.3 III. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160731
Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:
Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.
Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Aufgabe 2 - 160732
Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 3 - 160733
Unter "Primzahldrillingen" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.
Beweise, dass es genau eine Zahl p gibt, für die $p, p+2, p+4$ "Primzahldrillinge" sind, und ermittle diese!

Aufgabe 4 - 160734
Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, dass dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!
b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

Aufgabe 5 - 160735
Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Aufgabe 6 - 160736
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9{,}1$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $c = 6{,}7$ cm und $d = 5{,}0$ cm!
Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3.19 XVII. Olympiade 1977

3.19.1 I. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170711
Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

"Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht."

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Aufgabe 2 - 170712
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

Aufgabe 3 - 170713
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9{,}7$ cm, $b = 7{,}6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle ABC$ und γ die des Winkels $\angle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 170714
Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten.
Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.
Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, dass Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

3.19.2 II. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170721
Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist.
Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.
(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Aufgabe 2 - 170722
a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Aufgabe 3 - 170723
Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, dass die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Aufgabe 4 - 170724
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $9x7y$ hat!
Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

3.19.3 III. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170731
Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1500 \leq a \leq 2650$ gilt.
Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Aufgabe 2 - 170732
Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, dass zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, dass drei Kugeln der Sorte C ebensoviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und dass fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wieviel Kugeln der Sorte D muss Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muss Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

Aufgabe 3 - 170733
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC = 9{,}0$ cm, $BC = 6{,}0$ cm und $\angle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, dass D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Aufgabe 4 - 170734
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, dass $BD = AB$ ist.
Beweise, dass dann $\angle DCA = 90°$ ist!

Aufgabe 5 - 170735
Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 6 - 170736
In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.
Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

3.20 XVIII. Olympiade 1978

3.20.1 I. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180711
Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiannamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:

(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.

Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Zunamen?

Aufgabe 2 - 180712
Berechne

$$\begin{aligned} a &= 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} \\ b &= 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \\ c &= \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6 + \left(\frac{45}{56} - 0{,}375\right) \\ d &= c - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

Aufgabe 3 - 180713
Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

Aufgabe 4 - 180714
Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 lässt!

3.20.2 II. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180721
An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.
(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.
(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Aufgabe 2 - 180722
Von einem Bruch wird gefordert, dass er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.
(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Aufgabe 3 - 180723
In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, dass die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist. Außerdem sei $\angle MAC = 36°$.
Beweise, dass dann $\angle CMD = 36°$ ist!

Aufgabe 4 - 180724
Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:
$\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB, E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB.
Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $FB = 15$ cm und $BE = 20$ cm.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!

3.20.3 III. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180731
In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt:
"Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, dass unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.
Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!"

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden.
Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Aufgabe 2 - 180732
Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k "Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)".

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:
"Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab."

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

Aufgabe 3 - 180733
Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.
Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, dass P der Mittelpunkt von BD ist!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 4 - 180734
In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wäßrigen Lösung, d.h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.
Wieviel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

Aufgabe 5 - 180735
In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.
Beweise, dass dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

Aufgabe 6 - 180736
Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:
Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

3.21 XIX. Olympiade 1979

3.21.1 I. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190711
Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, dass von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Aufgabe 2 - 190712
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Aufgabe 3 - 190713
Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.
Beweise hierfür die folgende Aussage:
Wenn $\angle CAB = 22{,}5°$ ist, dann gilt $\angle ADE = \angle CDB$!

Aufgabe 4 - 190714
Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6M und keiner mehr als 12M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
(5) Helga spendete 2M weniger als Frank, Peter 2M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wieviel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

3.21.2 II. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190721
Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Aufgabe 2 - 190722
a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung $CD = AD$ (1) gilt, dann gilt die folgende Aussage (2): Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\angle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Aufgabe 3 - 190723
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d.h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Aufgabe 4 - 190724
Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt.
Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in km h ausgedrückt?
c) Wieviel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

3.21.3 III. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190731
Ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

Aufgabe 2 - 190732
Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.
k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.
k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!

Aufgabe 3 - 190733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $e = 4{,}5$ cm, $f = 6{,}0$ cm! Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 190734
Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG "Bildende Kunst" teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, dass mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG "Bildende Kunst", Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, dass aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, dass Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, dass Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

Aufgabe 5 - 190735
Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus.
Nach dem Einkauf stellt sie fest, dass sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Aufgabe 6 - 190736
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!

3.22 XX. Olympiade 1980

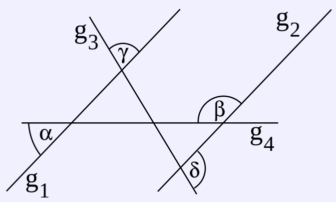
3.22.1 I. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200711
Anläßlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

Aufgabe 2 - 200712
Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v.u.Z.) stammt folgende Aufgabe:
Ein Wanderer stellt fest, dass ein Hirte 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: "Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?"
"Nein", antwortet der Hirte, "ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide."

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

Aufgabe 3 - 200713



Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!

Aufgabe 4 - 200714
Beweise folgenden Satz:
Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $AM = BM = CM$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

3.22.2 II. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200721
Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.
(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Aufgabe 2 - 200722
Von einem Dreieck wird gefordert:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

Aufgabe 3 - 200723
Jens sagt: "Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV) beträgt 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725."

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Aufgabe 4 - 200724
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.
b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$.

3.22.3 III. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200731
Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, dass sie sich in vier Summanden zerlegen lässt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 2 - 200732
Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.
b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!
c) Berechne, wieviel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind!
(Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Aufgabe 3 - 200733
Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, dass auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und dass auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist $SC = CA = AD = DB = BE$ und $SB = SE$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BSE$!

Aufgabe 4 - 200734
Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund:
"In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Aufgabe 5 - 200735
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

Aufgabe 6 - 200736
In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe "Mathematische Schülerbücherei".
Außerdem ergab sich aus Gesprächen, dass genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

3.23 XXI. Olympiade 1981

3.23.1 I. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210711
Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden.
Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wieviel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

Aufgabe 2 - 210712
Andreas sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen!
Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."
Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Aufgabe 3 - 210713
Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen. Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, dass Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, dass Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, dass keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, dass Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, dass Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und dass Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Aufgabe 4 - 210714
In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, dass diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

3.23.2 II. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210721
a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.
Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.
Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wieviel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, dass der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird.
(Es ist auf volle Meter zu runden.)

Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aufgabe 2 - 210722
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.
Beweise, dass Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!

Aufgabe 3 - 210723
Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

Aufgabe 4 - 210724

16	3	2	13
			8
9			12
4			

Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich ”Melancholie” ein ”magisches Quadrat” aus den Zahlen 1 bis 16, d.h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat. In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.
In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben. Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

3.23.3 III. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210731
In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: "An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate."
Beate: "An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate."
Christa: "An der Tafel ist genau ein Parallelogramm."
Detlev: "An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke."

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?
b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

Aufgabe 2 - 210732
Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Aufgabe 3 - 210733
Konstruiere ein Drachenviereck ABCD aus a = 3, 1 cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge AB = BC; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAD$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 210734
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.
(2) Es gilt $MB = BC$.
(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\angle CDB$!

Aufgabe 5 - 210735
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

Aufgabe 6 - 210736
Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet 1,20M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet 2,80M. Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1000 g- Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.
Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1000 g-Flasche gekauft wird?

3.24 XXII. Olympiade 1982

3.24.1 I. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220711
Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,
b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,
c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, dass sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!
Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

Aufgabe 2 - 220712
Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit.
Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine.
Nach Abschluss der Fahrt stellte man fest, dass genau 121 Servietten verbraucht wurden.
Wieviel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

Aufgabe 3 - 220713
Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern.
Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km.
Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, dass jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt. Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Aufgabe 4 - 220714
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

3.24.2 II. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220721
Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

Aufgabe 2 - 220722
In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AC = BC$
(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: ”Dann muß das Dreieck ABC rechtwinklig sein.”
Vera behauptet: ”Nein, dann muss es gleichseitig sein.”
Werner behauptet: ”Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein.”

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 3 - 220723
Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß ABCD ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks EFGH stets 4r betragen muß!

Aufgabe 4 - 220724
Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen 270 cm^3, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

3.24.3 III. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220731
Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;
die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

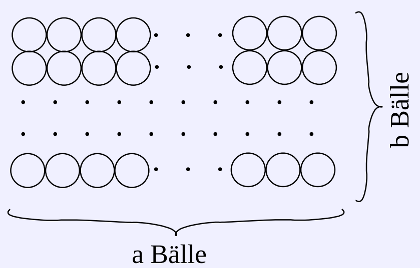
a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

Aufgabe 2 - 220732
Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, dass die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
b) Beweise, dass bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 220733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm und $h = 3{,}0$ cm!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 220734



Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt.

Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

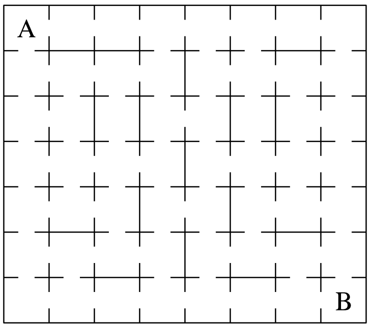
Aufgabe 5 - 220735
Beweise folgenden Satz!
Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

Aufgabe 6 - 220736
Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleich groß.
Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

3.25 XXIII. Olympiade 1983

3.25.1 I. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230711 Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede "Tür" höchstens einmal benutzt werden. Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

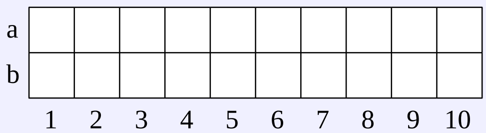


Aufgabe 2 - 230712
Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\frac{km}{h}$.

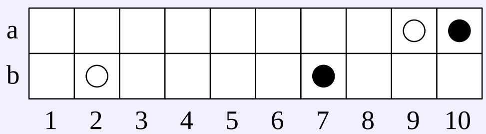
a) Wieviel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wieviel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

Aufgabe 3 - 230713
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\angle ASB$ habe die Größe 120°.
Ermittle die Diagonalenlängen AC und BD in Abhängigkeit von der Seitenlänge BC!

Aufgabe 4 - 230714
Zwei Spieler A und B spielen auf einem "2 x 10 - Brett" folgendes Spiel:



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein.
Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muss, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist "Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7 (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muss (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, dass dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, dass er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.
(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.
(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.
(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.
(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.
(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

3.25.2 II. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230721
Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Aufgabe 2 - 230722
Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.
Beweise, dass dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

Aufgabe 3 - 230723
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!
Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, dass es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

Aufgabe 4 - 230724
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

3.25.3 III. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230731
Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: "Ich bin 5 Jahre jünger als Elke."
(2) Birgit: "Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit."
(3) Carmen: "Ich bin 14 Jahre alt."
(4) Dorit: "Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen."
(5) Elke: "Birgit und Carmen sind beide jünger als ich."

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

Aufgabe 2 - 230732
Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

Aufgabe 3 - 230733
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.
Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her!
Beweise, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

Aufgabe 4 - 230734
Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, dass jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und dass jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

Aufgabe 5 - 230735
Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest:

Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.
Beweise, dass man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

Aufgabe 6 - 230736
Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:
Der Innenwinkel $\angle ABC$ ist größer als 90°.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot BD = AB = BC$.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

3.26 XXIV. Olympiade 1984

3.26.1 I. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240711
Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:
Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften "Foto", "Junge Mathematiker", "Turnen" an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Foto".
(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Junge Mathematiker".
(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Turnen".

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Junge Mathematiker".
(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Turnen".
(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Junge Mathematiker" als auch zur AG "Turnen".

Schließlich gilt auch die Aussage
(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, dass in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)
Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

Aufgabe 2 - 240712
Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, dass $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander "verschieden", wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?
(2) Beim Spiel fragt Peter: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?" Beantworte diese Frage!
(3) Klaus überlegt: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?" Ermittle auch diese Anzahl!
(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

Aufgabe 3 - 240713
In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluss der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluss der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?
Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, dass der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Aufgabe 4 - 240714
(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:
(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!
(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

3.26.2 II. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240721
Drei Ehepaare sitzen zum Rommméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

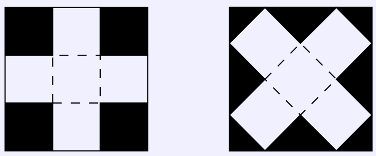
Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 2 - 240722
Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!
b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

Aufgabe 3 - 240723
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle CBA$ auf der Seite CD liegt.
Beweise, dass unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

Aufgabe 4 - 240724



Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt.
Beide Netze sind so angeordnet, dass die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.
Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

3.26.3 III. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240731
Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:
Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer.
Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfasste genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wieviel Fahrern sie dort vertreten waren!
Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 2 - 240732
a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.
(2) x hat die Quersumme 29.
(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

Aufgabe 3 - 240733
Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.
Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 4 - 240734
Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 5 - 240735
In dem Schema 43_1_5_ ist jede der Leerstellen _ so mit einer Ziffer auszufüllen, dass die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wieviel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Aufgabe 6 - 240736
Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$, (2) $AD = BC = 3 \cdot DC = a$, wobei a eine gegebene Länge ist, (3) $\angle BAD = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

3.27 XXV. Olympiade 1985

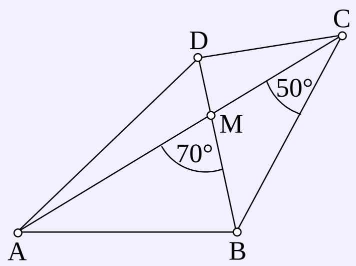
3.27.1 I. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250711
In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, dass das mit nur drei Wägungen möglich ist!

Aufgabe 2 - 250712
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 3 - 250713



Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).
Es soll $AB = BC = AD$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\angle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\angle BCM$ die Größe 50° haben.
Gerd behauptet, dass durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\angle DAM$ eindeutig bestimmt ist.
Uwe vertritt die Meinung, dass es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\angle DAM$ aufweisen. Wer hat recht?

Aufgabe 4 - 250714
Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

3.27.2 II. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250721
Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.
Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: "Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."
Es stellt sich jedoch heraus, dass sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Aufgabe 2 - 250722
Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216$ dm^3, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, dass er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und dass die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 3 - 250723
Es sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BHC = \angle ABC + \angle ACB$ gilt!

Aufgabe 4 - 250724
a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.
Zeige, dass die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.
Beweise, dass die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

3.27.3 III. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250731
Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl $2n$ sind!

Aufgabe 2 - 250732
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $CA = 4$ cm, $CB = 20$ cm.
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d.h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $CB' = CB - x$ cm.
b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 3 - 250733
Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $AE = 6{,}0$ cm und $BE = 4{,}0$ cm.

a) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

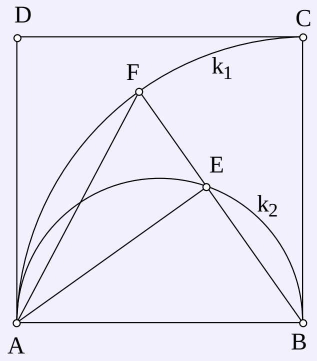
Aufgabe 4 - 250734
Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.
Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Aufgabe 5 - 250735
In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, dass niemand anders als er die Zahlen sehen kann und dass sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen.
Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen. Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

"Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1373736."

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Aufgabe 6 - 250736



Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius AB sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2.
Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\angle DAF = \angle EAF$ folgt!

3.28 XXVI. Olympiade 1986

3.28.1 I. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260711
Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
b) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen lässt.
c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
e) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 2 - 260712
In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Missgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen.
Da zu jedem Vorhängeschloss von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer passt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muss herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloss gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: "Jetzt muss ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muss also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen."
Sein Freund Uwe meinte jedoch, dass man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d.h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloss den passenden Schlüssel findet!

Aufgabe 3 - 260713
Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden.
Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, dass jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Aufgabe 4 - 260714
Ein Junger Mathematiker zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, dass die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

3.28.2 II. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260721
Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.
Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten?
Wir setzen voraus, dass sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

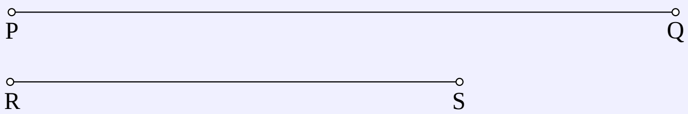
Aufgabe 2 - 260722
Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete:

"Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 lässt."

Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Aufgabe 3 - 260723
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\angle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.
Beweise, dass das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

Aufgabe 4 - 260724



Zu zwei gegebenen Streckenlängen PQ und RS (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

(1) $PQ = 2a + b$,
(2) $RS = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.
Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:
(a) Übertrage PQ und RS auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen $PQ = 9{,}8$ cm und $RS = 6{,}6$ cm betragen!

3.28.3 III. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260731
Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km musste Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf 60 $\frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ auf 60 $\frac{km}{h}$ h herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflusst.)

Aufgabe 2 - 260732
Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben!
Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 3 - 260733
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

Aufgabe 4 - 260734
Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von m und n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

Aufgabe 5 - 260735
Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben?
Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

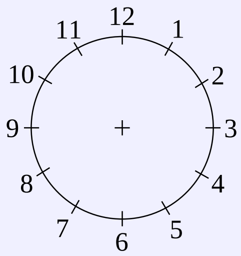
Aufgabe 6 - 260736
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.

a) Beweise, dass der Winkel $\angle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, dass der Winkel $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist!

3.29 XXVII. Olympiade 1987

3.29.1 I. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270711



Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke.
Nachdem der erste Schreck über das Missgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, dass keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen.
Dabei stellte er fest, dass sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.

Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein?
Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, dass die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

Aufgabe 2 - 270712
In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist.
Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, dass man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

Aufgabe 3 - 270713
In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

Aufgabe 4 - 270714
Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Lässt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

3.29.2 II. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270721
Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück.
Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Aufgabe 2 - 270722
Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln lässt!

Aufgabe 3 - 270723
Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.
Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, dass die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Aufgabe 4 - 270724
Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, dass der Winkel $\angle BMC$

(a) die Größe $42°$,
(b) eine beliebig vorgegebene Größe ρ mit $0° < \rho < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ und die des Winkels $\angle ACB$!

3.29.3 III. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270731
Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten! Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen A	B	C	D	Gesamtpunktzahl
A					
B					
C					
D					

Aufgabe 2 - 270732
In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,2 0M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebensoviele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Aufgabe 3 - 270733
Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\angle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\angle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\angle APB$ hat die Größe 2γ.

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, dass sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und dass die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

Aufgabe 4 - 270734
Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die $x^2 + xy + y^2 = 49$ gilt!

Aufgabe 5 - 270735
In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ bzw. $\angle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$.
Vorausgesetzt werde nun, dass der Winkel $\angle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

Aufgabe 6 - 270736
In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.
Beweise, dass für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

3.30 XXVIII. Olympiade 1988

3.30.1 I. Runde 1988, Klasse 7

Aufgabe 1 - 280711
Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:
Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab.
Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

Aufgabe 2 - 280712
Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

Aufgabe 3 - 280713
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\angle DAB$ ein spitzer Winkel ist!
Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!
b) Beweise, dass in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\triangle AED \cong \triangle CFB$ gilt!

Aufgabe 4 - 280714
Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, dass eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, dass der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.
Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim: "Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit: "Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."
Claudia: "Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."
Dorit: "Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

3.30.2 II. Runde 1988, Klasse 7

Aufgabe 1 - 280721
Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: "Die Zahl ist durch 11 teilbar."
(2) Birgit: "Die Zahl ist eine Primzahl."
(3) Christian: "Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."
(4) Doris: "Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.
Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Aufgabe 2 - 280722
Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

Aufgabe 3 - 280723
Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie 5 : 4.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.
(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.
Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 4 - 280724
a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!
b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

3.30.3 III. Runde 1988, Klasse 7

Aufgabe 1 - 280731
Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2.
Wäre das Volumen von w_2 um genau 9 cm^3 kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Aufgabe 2 - 280732
In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Aufgabe 3 - 280733
Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $AD + BE = DE$.

I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Aufgabe 4 - 280734
Ermittle alle diejenigen Paare (p, q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q > p + 1$.
(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 5 - 280735
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

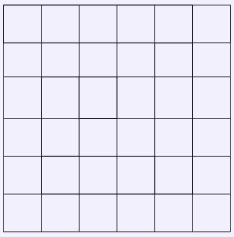
$$AA' + BB' + CC' = DD' + EE' + FF'$$

Aufgabe 6 - 280736
Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d.h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... u.s.w. werden markiert.
Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d.h., beim Weiterzählen lässt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

3.31 XXIX. Olympiade 1989

3.31.1 I. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290711



Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, dass jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft.
Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.

Aufgabe 2 - 290712
Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Plazierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.
Untersuche, ob sich hieraus ermitteln lässt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall so gib die Platzierung an!

Aufgabe 3 - 290713
Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989:
"Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche."
Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

Aufgabe 4 - 290714
Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit: Klaus behauptet:
"Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke $180°$. Folglich muss im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen."
Anja entgegnet: "Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muss folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!

3.31.2 II. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290721
Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte.
Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

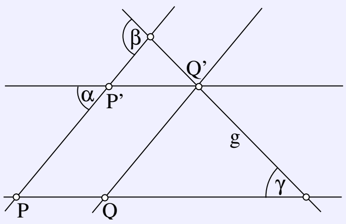
Aufgabe 2 - 290722
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluss aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, dass dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluss aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben.
Weise nach, dass bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus.
Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

Aufgabe 3 - 290723



Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.
Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

Aufgabe 4 - 290724
a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, dass die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!
b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!
d) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

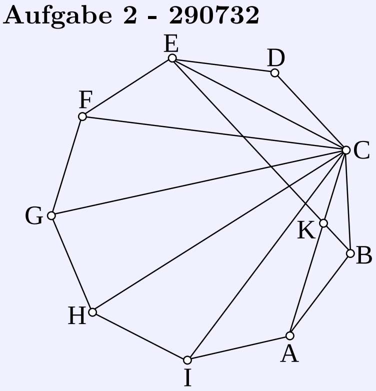
3.31.3 III. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290731
28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.
(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

Aufgabe 2 - 290732



Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$.

a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!
b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!
c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\angle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

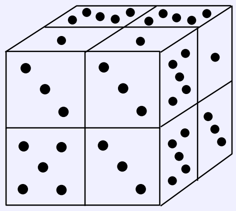
Aufgabe 3 - 290733
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Stelle fest, ob durch diese Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 290734
Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!
(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

Aufgabe 5 - 290735
Wir betrachten das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000.
Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

Aufgabe 6 - 290736



Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt.
Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede genau auf einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.
Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie die Abbildung zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

(a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!
(b) Beweise, dass in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

3.32 XXX. Olympiade 1990

3.32.1 I. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300711
Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen.
Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.
Jedesmal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.
Wie war das möglich?

Aufgabe 2 - 300712
Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

a) Wieviel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Aufgabe 3 - 300713
Von drei Geraden wird vorausgesetzt, dass sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, dass sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, dass C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Winkel $\angle ECD$ und $\angle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\angle BCD$ und $\angle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

Aufgabe 4 - 300714
In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miss die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d.h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß kein Innenwinkel gleich 180° ist.

3.32.2 II. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300721
Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine
a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

Aufgabe 2 - 300722
a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a lässt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung weglässt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

Aufgabe 3 - 300723
a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, dass mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.
Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.
Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, dass der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

Aufgabe 4 - 300724
In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, dass der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, dass dann auch stets der Winkel $\angle BSE$ die Größe 60° hat!
b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\angle BAC$ die Größe des Winkels $\angle BSE$ ergibt!

3.32.3 III. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300731
In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, dass der Hund der Spur des Fuchses folgt und dass beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Aufgabe 2 - 300732
200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, dass B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muss!

Aufgabe 3 - 300733
Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

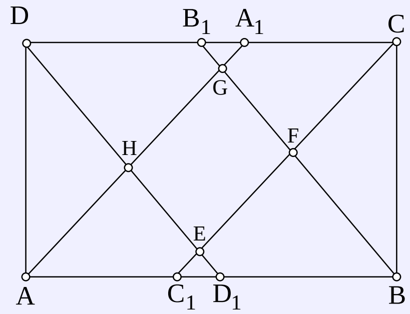
(1) Es gilt $BD = h_b$.
(2) Es gilt $AD = p_b$.
(3) Der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 300734
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:

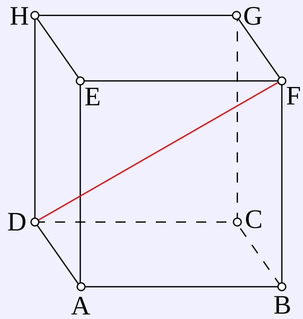
Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird. Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, dass folgendes gilt:
Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

Aufgabe 5 - 300735



Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $AB = a$ und $BC = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, dass die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind.
Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.
Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

Aufgabe 6 - 300736



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.
Beweise, dass die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

3.33 XXXI. Olympiade 1991

3.33.1 I. Runde 1991, Klasse 7

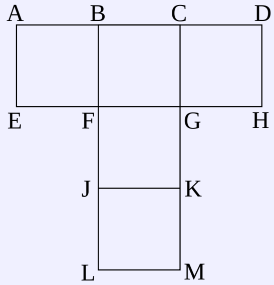
Aufgabe 1 - 310711
Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle, zwei Drittel der blauen Bälle und ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, dass danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,
a) wieviele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.
b) wieviele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

Aufgabe 2 - 310712
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.
(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

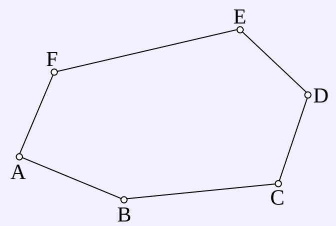
Aufgabe 3 - 310713



Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $AB = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle BSD$ auf!
b) Beweise diese Vermutung!

Aufgabe 4 - 310714



a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verlässt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!
Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, daß ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!

3.33.2 II. Runde 1991, Klasse 7

Aufgabe 1 - 310721
Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem missglückten Torschuss zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.
Thomas: Ich war es nicht.
Frank: Ich auch nicht.
Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, dass mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.
Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

Aufgabe 2 - 310722
Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind.
Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?
b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t? Begründe deine Antworten!

Aufgabe 3 - 310723
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm betragen und der Winkel $\angle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!
Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, dass diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!
b) Beweise, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\angle BAD$ kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 4 - 310724
a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen $AB = 50$ mm, $BC = 45$ mm, $AE = 54$ mm betragen und die Innenwinkel $\angle BAE$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\rho = 114°$ haben!
b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, dass das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!
Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G! Beweise, dass von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

3.33.3 III. Runde 1991, Klasse 7

Aufgabe 1 - 310731
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:
Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest, usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, dass jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt!
Überprüfe, dass für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aufgabe 2 - 310732
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

"Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900 + j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$."
Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 3 - 310733
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!
b) Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!
c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als $180°$ ist.

Aufgabe 4 - 310734
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, dass eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.
Beweise, dass für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 5 - 310735
Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.
Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Aufgabe 6 - 310736
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:
(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.
(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.
(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!
b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4.
Zeige, dass eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

3.34 XXXII. Olympiade 1992

3.34.1 I. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320711
Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

(1) Norbert sammelte mehr als Mike.
(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.
(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.
Untersuche, ob aus diesen Angaben
a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,
b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze
hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Aufgabe 2 - 320712
Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.
Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne dass es überläuft!

Aufgabe 3 - 320713
Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.
In wieviel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

Aufgabe 4 - 320714
In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\angle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

3.34.2 II. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320721
In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.
b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.
c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a), b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, dass du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

Aufgabe 2 - 320722
$ABCD$ sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage 25 cm^2. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonalen AC über C hinaus, dass die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist. Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks $ABED$!

Aufgabe 3 - 320723
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.
a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\angle MEA$ und $\angle MCB$ einander gleichgroß sind!
b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, dass AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann ein Trapez sein muss!

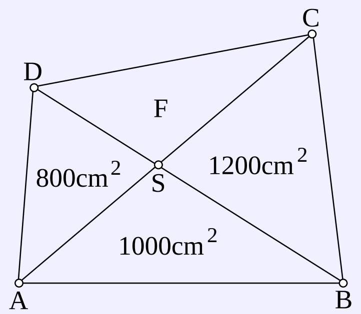
Aufgabe 4 - 320724
In einem Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.
Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen.
Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

3.34.3 III. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320731
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, dass sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.
Wieviele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Nummerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wieviele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.
Wieviele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Aufgabe 2 - 320732



Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, dass die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm^2, 800 cm^2 bzw. 1200 cm^2 haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!

Aufgabe 3 - 320733
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, dass $BP = 2$ cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $CQ = 2$ cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $AR = 2$ cm.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!
a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.
b) Es ist $MP = MQ = MR$.

Aufgabe 4 - 320734
Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Aufgabe 5 - 320735
Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, dass $AD = AC$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, dass $BE = BC$ gilt.
Beweise, dass durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\angle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

Aufgabe 6 - 320736
Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.
Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

3.35 XXXIII. Olympiade 1993

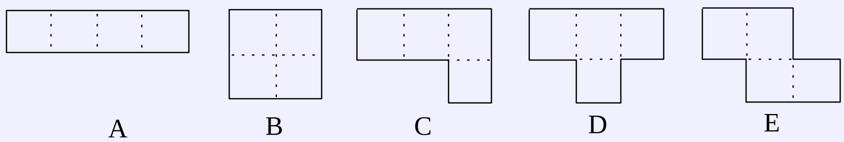
3.35.1 I. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330711
In einer Hühnerfarm wurden 2500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet. Um wieviele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

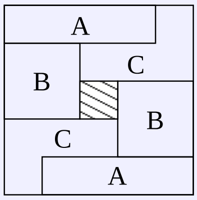
Aufgabe 2 - 330712
Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern $3, a, 3, b, 2, c$ haben.
Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, dass die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 330713
Anke berichtet, daSS sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.
Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.
Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Aufgabe 4 - 330714
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne dass Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.
Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!



b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, dass drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.

Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen "Oberseite" und "Unterseite" unterschieden; jeder Stein darf also auch "gewendet" werden.

3.35.2 II. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330721
An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.
(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.
(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.
(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.
(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

Aufgabe 2 - 330722
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Aufgabe 3 - 330723
Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: "Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt."
Martin: "Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren."
Matthias: "Am ersten Tag wurden genau 5 16 und am vierten Tag genau 1 4 der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft."

Weise nach, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Aufgabe 4 - 330724
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Basiswinkel $\angle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?
b) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ haben, in dem ein Basiswinkel $\angle BAC$ die Größe 70° hat?
c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ möglich sind, bei dem der Winkel $\angle WAH$ die Größe 15° hat!

3.35.3 III. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330731
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Aufgabe 2 - 330732
In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.
Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht.
Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.
Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Aufgabe 3 - 330733
Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ bzw. $\angle ACB$ bezeichnet.
a) Wie groß sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?
b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ die Größe 140° hat!
c) Beweise, dass jedes Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ und $\angle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Aufgabe 4 - 330734
Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit 60 $\frac{km}{h}$ fährt. Sie beobachtet, dass an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, dass dieser Gegenzug 120 m lang ist.
Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ an!

Aufgabe 5 - 330735
Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wieviele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat!
Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, daß sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen musste.
Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, dass die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Aufgabe 6 - 330736
a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!
Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)
Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, dass die genannte Bedingung stets mit diesem - nach deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

3.36 XXXIV. Olympiade 1994

3.36.1 I. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340711
Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.
Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Aufgabe 2 - 340712
Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

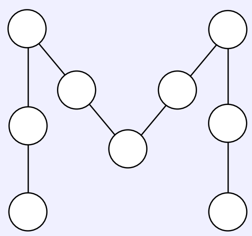
a) Welche Größe muss der Winkel $\angle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!
b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 50° hat!
c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 60° hat?

Aufgabe 3 - 340713
Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.
(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, dass es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

Aufgabe 4 - 340714



In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden:
Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.

a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt! Beweise, dass keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!
c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?

3.36.2 II. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340721
Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten. Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse.
Katja, die beim Nachhausekommen nicht wusste, dass sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel.
Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.
Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Aufgabe 2 - 340722
a) Ein Wettspielgewinn von 1485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.
Wieviel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.
Wieviel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht.
Wie groß waren die drei Einsätze?

Aufgabe 3 - 340723
In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt!
Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?
b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!
c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!

Aufgabe 4 - 340724
a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, dass ihre Summe 230 beträgt.
Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, dass die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.
Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

3.36.3 III. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340731
Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1000000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk: (1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.
Evelyn: (1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.
Franziska: (1) Die gesuchte Zahl lautet 91809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, dass die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Aufgabe 2 - 340732
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.
a) Wieviel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 3 - 340733
Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $AB = 7$ cm und $CD = 4$ cm vorausgesetzt wird.
b) Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, dass es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?
Beweise auch, dass aus dieser Voraussetzung folgt, dass das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Aufgabe 4 - 340734
Ein Viereck heißt genau dann konvex, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.
Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Aufgabe 5 - 340735
In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."
Daniel sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks."
Beweise, dass beide Aussagen wahr sind!

Aufgabe 6 - 340736
Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $AC = 10$ cm. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, dass jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!
b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!

4 Aufgaben

4.1 Vorolympiade 1960

4.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 8

Aufgabe 1 - V00801
Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden.
Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wie viel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

Aufgabe 2 - V00802
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & . & . & . & : & . & . & 7 & = & . & . & . \\
. & . & . & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & . & & & & & & & & & \\
 & . & . & . & . & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & - & & & & & & & &
\end{array}$$

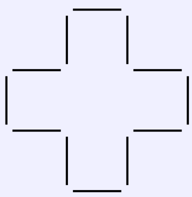
Aufgabe 3 - V00803
Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $\frac{2}{3}$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $\frac{5}{8}$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

Aufgabe 4 - V00804
Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $\frac{2}{5}$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $\frac{3}{8}$ seines Fassungsvermögens.
Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, dass $\frac{4}{5}$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $\frac{3}{4}$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

Aufgabe 5 - V00805
Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl.
Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl.
Wie lauten Peters Lottozahlen?
Hinweis: Beim damals üblichen Lotto wurden 5 Zahlen aus 90 möglichen getippt.

Aufgabe 6 - V00806
Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

Aufgabe 7 - V00807

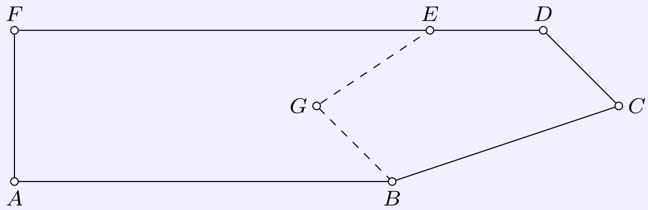


Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht.
Die Streichhölzer sind so umzulegen, dass eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht!
(Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)

Aufgabe 8 - V00808
Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen.
Wie groß ist er?

Aufgabe 9 - V00809
Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung.
Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.
Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?

Aufgabe 10 - V00810



Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (siehe Abbildung). einer LPG ist eine gebrochene Linie EGB. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen, ohne die Größe der Einzelfelder zu verändern.
Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!

Aufgabe 11 - V00811
Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale.
Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme.
Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

Aufgabe 12 - V00812
Beweise, dass die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

Aufgabe 13 - V00813
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren.
Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

Aufgabe 14 - V00814
Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muss der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!

4.2 Vorolympiade 1961

4.2.1 I. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10811
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.
Um wie viel Prozent ist das "Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Aufgabe 2 - V10812
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Aufgabe 3 - V10813
$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$
a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

Aufgabe 4 - V10814
Denkaufgabe:
Fritz sagt: "Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert: "Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

Aufgabe 5 - V10815
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

4.2.2 II. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10821
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wie viel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

Aufgabe 2 - V10822
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wie viel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Aufgabe 3 - V10823
In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Aufgabe 4 - V10824
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

Aufgabe 5 - V10825
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wie viel solcher Geraden gibt es?

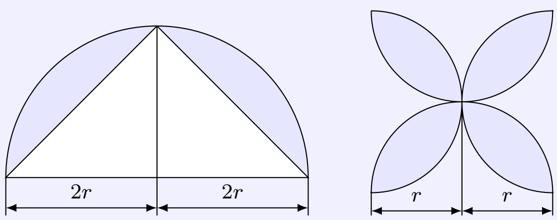
4.2.3 III. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10831
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2 - V10832
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Aufgabe 3 - V10833
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Aufgabe 4 - V10834



Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

4.3 I. Olympiade 1961

4.3.1 I. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010811
Berechne:

$$\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right).$$

Aufgabe 2 - 010812
In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, dass man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde auslegen könnte.
Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384000 km.)

Aufgabe 3 - 010813
Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Aufgabe 4 - 010814
Setze in ein "magisches Quadrat" mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, dass die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Aufgabe 5 - 010815
Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, dass sie einander berühren.

a) Wie viel Adern braucht man?

b) Beweise diese Behauptung!

Aufgabe 6 - 010816
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!

4.3.2 II. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010821
Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Russland) auf etwa 1640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genau soviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Aufgabe 2 - 010822
Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.)

Aufgabe 3 - 010823
In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

Der Steuermann sagt: "Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist."

Der 1. Matrose sagt: "Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist."

Der 2. Matrose sagt: "Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert."

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Aufgabe 4 - 010824
Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 010825
Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind?
Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, dass er die angegebene Eigenschaft hat!

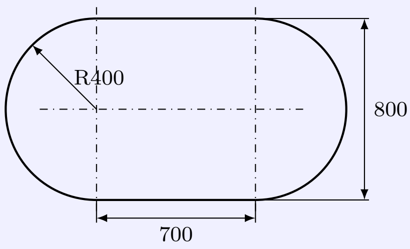
4.3.3 III. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010831
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1350000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, dass dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150000 bzw. 290000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wie viel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?
b) Wie viel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

Aufgabe 2 - 010832

Peter hat für seine Modelleisenbahn ein "Schienenoval" auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: "Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?" Peter antwortet: "Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!"
"Ja", sagt Peter, "das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müsste es umrechnen." Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

Aufgabe 3 - 010833
Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4?

Aufgabe 4 - 010834
Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verlässt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Fritz hat den Ring.
	3.	Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.
Fritz:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
	3.	Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: "Ich muss nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat." Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Aufgabe 5 - 010835
Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3$ cm haben!

Begründe die Konstruktion! Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?

4.4 II. Olympiade 1962

4.4.1 I. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020811
Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?
Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 2 - 020812
Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?
b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Aufgabe 3 - 020813
Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt.
Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m^2, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je 6,37 m^2. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m.
Den oberen Abschluss der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m^2. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen: a) die Höhe der Fassade, b) die Länge der Fassade!

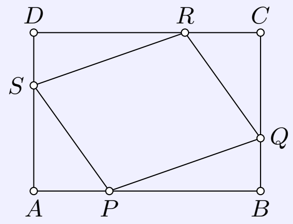
Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Aufgabe 4 - 020814
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * *  : ? =  * * * * 8 * *
* * *
-----
    * * *
    * * *
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          * *
          * *
          ---
            * * *
            * * *
            -----
                0
```

Aufgabe 5 - 020815
Beweise folgenden Satz:
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 6 - 020816



Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1 : 2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.

a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB = 10$ cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)

4.4.2 II. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020821
Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen lässt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Aufgabe 2 - 020822
Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

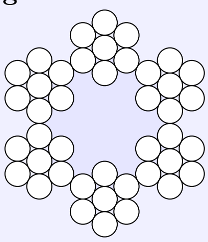
Aufgabe 3 - 020823
Berechne:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n}+\frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

Aufgabe 4 - 020824
Welche x erfüllen die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

Aufgabe 5 - 020825



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Aufgabe 6 - 020826
Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen.
Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Aufgabe 7 - 020827
Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a+b=10\text{ cm},\qquad \beta=45^\circ,\qquad \gamma=60^\circ$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 8 - 020828
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10$ cm! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie 2 : 3 verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 9 - 020829
Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, dass die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)

4.4.3 III. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020831
Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wie viel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

Aufgabe 2 - 020832
Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 = ?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Aufgabe 3 - 020833
Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, dass einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.
Er stellt fest, dass die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.
Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wie viel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Aufgabe 4 - 020834
Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm misst.

Aufgabe 5 - 020835
Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

Aufgabe 6 - 020836
a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

4.5 III. Olympiade 1963

4.5.1 I. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030811
Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge der Hochseefischerei 117291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.

a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?

b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

Aufgabe 2 - 030812
Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, dass 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, dass die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.

Wie viel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

Aufgabe 3 - 030813
Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

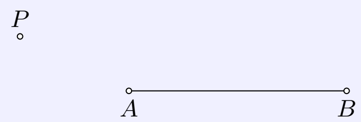
Beweise, dass entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 4 - 030814
Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

Aufgabe 5 - 030815
In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.

Beweise, dass diese Sehnen stets gleichlang sind!

Aufgabe 6 - 030816



Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abbildung).

Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist! Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

4.5.2 II. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030821
Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).
Wie viel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 2 - 030822
Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z.B. 781781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe 3 - 030823
In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wie viel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

Aufgabe 4 - 030824
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, dass die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

Aufgabe 5 - 030825
Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

4.5.3 III. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030831
Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, dass es die kleinste derartige Zahl ist!

Aufgabe 2 - 030832
Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

Aufgabe 3 - 030833
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, dass diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

Aufgabe 4 - 030834
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{cccccc} & \text{f} & \text{o} & \text{r} & \text{t} & \text{y} \\ + & & & \text{t} & \text{e} & \text{n} \\ + & & & \text{t} & \text{e} & \text{n} \\ \hline & \text{s} & \text{i} & \text{x} & \text{t} & \text{y} \end{array}$$

Aufgabe 5 - 030835
Gegeben sind die Strecken $s-a = 3$ cm, $s-b = 2$ cm, $s-c = 1$ cm, wobei $2s = a+b+c$ der Umfang des Dreiecks ist.
a) Konstruiere das Dreieck!
b) Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 6 - 030836
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

4.6 IV. Olympiade 1964

4.6.1 I. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040811
Für ein Experiment werden 50 cm^3 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wie viel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

Aufgabe 2 - 040812
Es ist zu beweisen, dass die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Aufgabe 3 - 040813
Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wie viel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Aufgabe 4 - 040814
Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wie viel Lösungen gibt es?

Aufgabe 5 - 040815
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 6 - 040816
Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden. Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck	b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)
c) rechtwinkliges Dreieck	d) ungleichschenkliges Dreieck
e) Quadrat	f) Rechteck (nicht quadratisch)
g) Fünfeck	h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muß, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

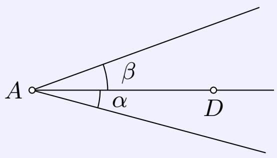
4.6.2 II. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040821
Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Aufgabe 2 - 040822
Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, dass die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 040823

Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).



a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, daß $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!
b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?

Aufgabe 4 - 040824
Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit.
Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden.
Es stellt sich heraus, dass er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wie viel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

4.6.3 III. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040831
Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

Aufgabe 2 - 040832
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?

Aufgabe 3 - 040833
Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 Rad fahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und Rad fahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) Rad fahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und Rad fahren und Schlittschuh laufen können.

Wie viel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wie viel höchstens zur Verfügung?

Aufgabe 4 - 040834
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!
a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!
b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!

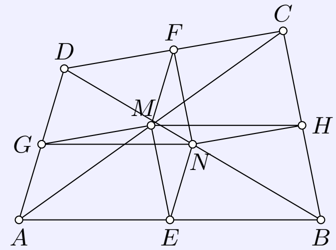
Aufgabe 5 - 040835
Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!
b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Aufgabe 6 - 040836

Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.



4.7 V. Olympiade 1965

4.7.1 I. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050811
Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

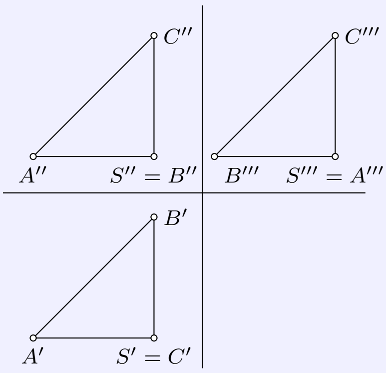
a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Aufgabe 2 - 050812
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab} \quad \text{erfüllt?}$$

Aufgabe 3 - 050813



a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriss besitzt (siehe Abbildung)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)
b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!

Aufgabe 4 - 050814
Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

4.7.2 II. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050821
Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wie viel Schüler die Klasse hat und wie viel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:

(1) Wären 12 Schüler mehr dabei gewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.

(2) Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.

(3) Es soll vorausgesetzt werden, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von Kastanien sammelt.

a) Wie viel Schüler haben teilgenommen?
b) Wie viel Schüler hat die Klasse?

Aufgabe 2 - 050822
In dem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Winkelmaßen α, β und γ sei die Winkelhalbierende w_α eingezeichnet. Sie schneide die Seite BC in D. Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle ADC$ haben die Maße δ bzw. ϵ.

Beweise, dass $\delta - \epsilon = \gamma - \beta$ ist!

Aufgabe 3 - 050823
Die Seiten eines konvexen Fünfecks seien der Reihe nach a, b, c, d und e. Die Seite a sei 5,5 cm, b sei 4 cm, c sei 3,4 cm, d sei 4,6 cm und e sei 2,9 cm lang. Die Seiten a und e schließen einen Winkel mit dem Maß $\alpha = 100°$, die Seiten b und c einen Winkel mit dem Maß $\beta = 93°$ ein.

a) Konstruiere das Fünfeck aus diesen 7 Stücken!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 4 - 050824
Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

(1) D fing mehr als C.

(2) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

(3) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

4.7.3 III. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050831
Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10000 und 99999, die wie z.B. 35453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Aufgabe 2 - 050832
Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Aufgabe 3 - 050833
Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

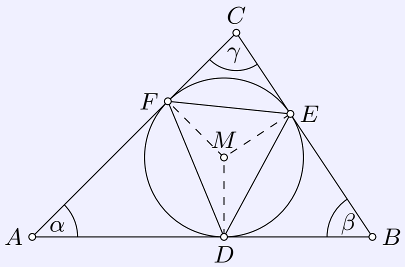
(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

Aufgabe 4 - 050834



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abbildung). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\angle DEF$, $\angle EFD$ und $\angle FDE$ des Dreiecks DEF!

Aufgabe 5 - 050835
Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt lässt?

Aufgabe 6 - 050836

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a + b$, r und α gegeben sind!

Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\angle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

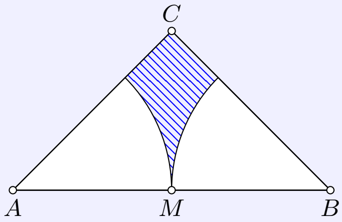
4.8 VI. Olympiade 1966

4.8.1 I. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060811

In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\angle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).

Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!



Aufgabe 2 - 060812

Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, dass die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 3 - 060813

Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wie viel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Aufgabe 4 - 060814

In der Ebene ϵ liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!

4.8.2 II. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060821
Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 2 - 060822
In der Ebene ϵ liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade g.

Beweise, dass die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

Aufgabe 3 - 060823
18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

Aufgabe 4 - 060824
Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

4.8.3 III. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060831
Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

Aufgabe 2 - 060832
Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, dass der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

Aufgabe 3 - 060833
Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, dass genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wie viel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Aufgabe 4 - 060834
Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, dass jeder Schlüssel zu genau einem Koffer passt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, dass er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, dass für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist
a) die kleinste
b) die größte
Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, dass genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

Aufgabe 5 - 060835
In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

Aufgabe 6 - 060836
Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

4.9 VII. Olympiade 1967

4.9.1 I. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070811
Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten musste, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

”Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter.”

Später stellte sich heraus, dass Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, dass alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Aufgabe 2 - 070812
Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Aufgabe 3 - 070813
Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, dass jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Aufgabe 4 - 070814
Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

4.9.2 II. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070821
Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, dass die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

Aufgabe 2 - 070822
Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

Aufgabe 3 - 070823
Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Aufgabe 4 - 070824
Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

4.9.3 III. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070831
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\angle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, dass der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

Aufgabe 2 - 070832
Unter einer Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: z.B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

Aufgabe 3 - 070833
Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$ ist.

Aufgabe 4 - 070834
Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, dass der Bruch $\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

Aufgabe 5 - 070835
Beweise:
Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

Aufgabe 6 - 070836
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.
2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

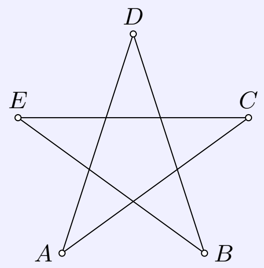
4.10 VIII. Olympiade 1968

4.10.1 I. Runde 1968, Klasse 8

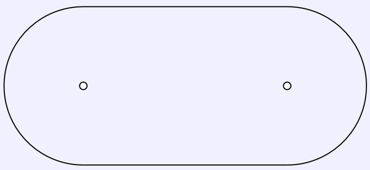
Aufgabe 1 - 080811

Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ACE$!



Aufgabe 2 - 080812



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10000-m-Lauf beobachten wir, dass ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wie viel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Aufgabe 3 - 080813
Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und nummerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den "Stich" und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen "Stichen" ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei "Stiche" gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, dass jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Aufgabe 4 - 080814
Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a + b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a + 4b$ durch 7 teilbar!

4.10.2 II. Runde 1968, Klasse 8

Aufgabe 1 - 080821

a) Beweise folgende Aussage:

Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, dass diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

Aufgabe 2 - 080822

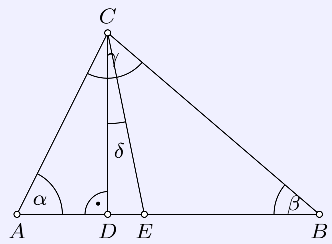
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Aufgabe 3 - 080823

Beweise folgenden Satz:

Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d.h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.



Aufgabe 4 - 080824

Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{km}{h}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

4.10.3 III. Runde 1968, Klasse 8

Aufgabe 1 - 080831
Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

Aufgabe 2 - 080832
Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, dass in jedem Fall (d.h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Aufgabe 3 - 080833
Es ist zu beweisen: Lässt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so lässt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Aufgabe 4 - 080834
Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ $(b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

Aufgabe 5 - 080835
Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: "Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

Aufgabe 6 - 080836
Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

4.11 IX. Olympiade 1969

4.11.1 I. Runde 1969, Klasse 8

Aufgabe 1 - 090811
Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

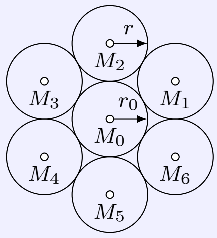
a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Aufgabe 2 - 090812

Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!



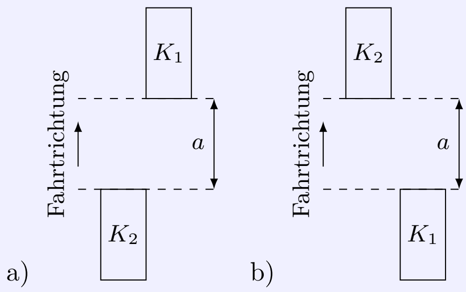
Aufgabe 3 - 090813
a) Beweise folgenden Satz:
Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Aufgabe 4 - 090814
Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?



4.11.2 II. Runde 1969, Klasse 8

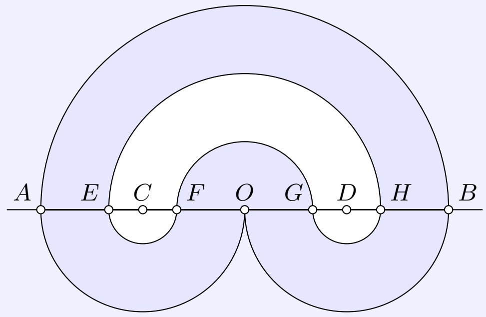
Aufgabe 1 - 090821
Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

Klaus meint, dass unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Aufgabe 2 - 090822
Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} &= 1 \text{ cm}; \\ \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} &= 0{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.

Berechne den Inhalt der farbigen Fläche!

Aufgabe 3 - 090823

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

Aufgabe 4 - 090824
Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck $\triangle ABC$ teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

4.11.3 III. Runde 1969, Klasse 8

Aufgabe 1 - 090831
Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Aufgabe 2 - 090832
Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, dass die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

Aufgabe 3 - 090833
Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:
Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

Aufgabe 4 - 090834
Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \qquad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Aufgabe 5 - 090835
Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Aufgabe 6 - 090836
Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

4.12 X. Olympiade 1970

4.12.1 I. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100811
Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Aufgabe 2 - 100812
Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2} + 1 + \frac{4}{x-2} \quad = \quad 2 + \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 3 - 100813
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Aufgabe 4 - 100814
Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

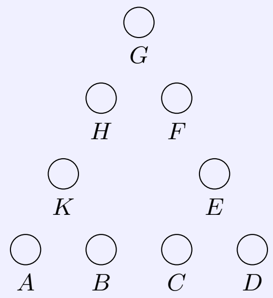
b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

4.12.2 II. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100821

In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der nebenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, dass die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.



a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

Aufgabe 2 - 100822

In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.

Man beweise, dass $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

Aufgabe 3 - 100823

Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen.
Bekannt ist, dass Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung! (Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

Aufgabe 4 - 100824

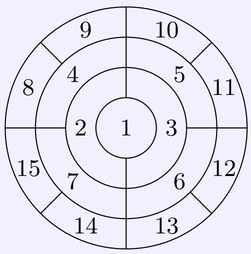
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

4.12.3 III. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100831



Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend nummeriert wurden.

Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Aufgabe 2 - 100832
Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, dass beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Aufgabe 3 - 100833
Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Aufgabe 4 - 100834
Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so dass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 5 - 100835
Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:
(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.
(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.
Brigitte entgegnet darauf: "Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Aufgabe 6 - 100836
Beweise den folgenden Satz:
Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\angle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\angle EFD$ zu führen.)

4.13 XI. Olympiade 1971

4.13.1 I. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110811
a) Berechne die Zahl
$$x=-\left\{-[-(-2)]^2\right\}^3\cdot\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

Aufgabe 2 - 110812
Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:

Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

Aufgabe 3 - 110813
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC}<\overline{AB}$ (1). Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.

Beweise, dass $\overline{ED}=\overline{DB}$ gilt!

Aufgabe 4 - 110814
Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e>0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren lässt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

4.13.2 II. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110821
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 2 - 110822
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

Aufgabe 3 - 110823
Beweise, dass für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Aufgabe 4 - 110824
In einer Ebene ϵ seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, dass dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, dass es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

4.13.3 III. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110831
In ein leeres Gefäß (ohne Abfluss) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Aufgabe 2 - 110832
Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, dass kein Schnittpunkt, der zweite so, dass genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, dass genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, dass genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, dass genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, dass genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, dass genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, dass ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Aufgabe 3 - 110833
Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Aufgabe 4 - 110834
Beweise, dass für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Aufgabe 5 - 110835
Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> "Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuss und dann dem zweiten, dem dritten u.s.w. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?"

Aufgabe 6 - 110836
Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, dass die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

4.14 XII. Olympiade 1972

4.14.1 I. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120811
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Aufgabe 2 - 120812
Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3$ cm! ($\alpha = 60°$, $1 : 3$)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt. Ermittle diesen Wert!

Aufgabe 3 - 120813
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300001. Stelle?

Aufgabe 4 - 120814
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, dass die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

4.14.2 II. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120821
Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Aufgabe 2 - 120822
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\angle BCA$!

Aufgabe 3 - 120823
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

Aufgabe 4 - 120824
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4.14.3 III. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120831
Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tipp darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tippscheine auswerte, stellte sich heraus, dass ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tipps genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tippschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tipp Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Aufgabe 2 - 120832
Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zwei dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Aufgabe 3 - 120833
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, dass dessen Seite DE mit auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, dass dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und daß außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, dass D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, dass dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

Aufgabe 4 - 120834
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\angle AMP_2$!

Aufgabe 5 - 120835
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\angle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, dass A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

Aufgabe 6 - 120836
Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

4.15 XIII. Olympiade 1973

4.15.1 I. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130811
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, dass sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21 mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

Aufgabe 2 - 130812
In $** \cdot\ 9\ * = ***$ ist jedes Sternchen $*$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, dass eine richtige Gleichung entsteht.

Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

Aufgabe 3 - 130813
Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift "alpha" erhielten drei Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris (2) Eva, Elke, Uwe (3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe (5) Roland, Heike, Bernd (6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.

Es stellte sich heraus, dass in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

Aufgabe 4 - 130814
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G.

Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

4.15.2 II. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130821

In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & \cdot & b & a & c \\
\hline
 & * & * & * & b & & \\
 & & & * & * & a & \\
 & & & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Aufgabe 2 - 130822

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\rho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 3 - 130823

Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

Aufgabe 4 - 130824

Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden.
Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, dass g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, dass ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und dass dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, dass dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

4.15.3 III. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130831
Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluss aller Spiele stellte man fest:

(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.

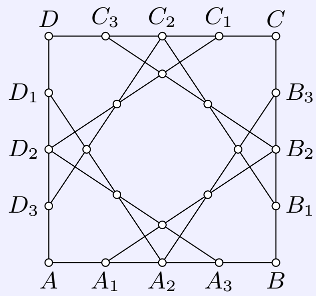
(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.

(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

Aufgabe 2 - 130832
Zeige, dass für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 130833
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch die Punkte B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch die Punkte D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in der Abbildung bezeichnet.



Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 4 - 130834
Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3a-2}{a+1} < 0$$

Aufgabe 5 - 130835
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, dass die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesem Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.

Beweise, dass für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!

Aufgabe 6 - 130836
Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4$ cm genügt!

Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

4.16 XIV. Olympiade 1974

4.16.1 I. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140811

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & E & = & A & F & G \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & & H & \cdot & H & A & = & & C & H \\
\hline
 & B & J & + & A & J & = & A & A & C
\end{array}$$

Ermittle sämtliche Lösungen des Kryptogramms, d.h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

Aufgabe 2 - 140812
Ermittle alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

Aufgabe 3 - 140813
Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, dass die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.

Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

Aufgabe 4 - 140814
Für zwei Sehnen AB und BC $(A \neq C)$ eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Es ist zu beweisen, dass die Gerade durch D und B den Winkel $\angle ADC$ halbiert!

4.16.2 II. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140821
Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.

Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

Aufgabe 2 - 140822
Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{km}{h}$ und B mit 40 $\frac{km}{h}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müsste C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{km}{h}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

Aufgabe 3 - 140823
Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, dass für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

Aufgabe 4 - 140824
Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:

Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, dass $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4.16.3 III. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140831
Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Namen der Schüler dem Alter nach ordnen.
Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira.
(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.

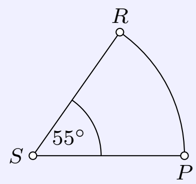
Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Namen der Schüler dem Alter nach (beginnend mit dem Jüngsten)!

Aufgabe 2 - 140832
Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

Aufgabe 3 - 140833
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\angle PSR$ der Größe 55° (siehe Abbildung).



Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d.h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, dass k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Aufgabe 4 - 140834
Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden ein Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

- Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.
- Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
- Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt. Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

Aufgabe 5 - 140835
Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der zwei parallelen Seiten.

Aufgabe 6 - 140836
Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d.h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d.h. die Zahl $x : y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

4.17 XV. Olympiade 1975

4.17.1 I. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150811
Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet:

> "Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf bezahlt. Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen."

Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

Aufgabe 2 - 150812

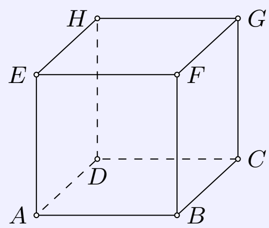
a) Ermittle alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
$$a < 4 \quad (1) \qquad ; \qquad a - b > 0 \quad (2) \qquad ; \qquad a + b > 2 \quad (3)$$

b) Beweise, dass es keine geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a < 0$ oder $b < 0$ ist!

Aufgabe 3 - 150813
Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\angle BDA$ die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$.

Aufgabe 4 - 150814

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Abbildung).
Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrisstafel als auch parallel zur Aufrisstafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend der Abbildung zu benennen.



Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!

Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

4.17.2 II. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150821
Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

Aufgabe 2 - 150822
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

Aufgabe 3 - 150823
Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, dass dann $\overline{\angle AMD} = 3 \cdot \overline{\angle ACM}$ gilt!

Aufgabe 4 - 150824
Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

4.17.3 III. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150831
Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger:

> "Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen. Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet worden sind."

Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf mit Sicherheit ermitteln konnte!

Aufgabe 2 - 150832
Beweise, dass sich alle Primzahlen $p > 3$ in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

Aufgabe 3 - 150833
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so dass die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

Aufgabe 4 - 150834
Eine Pioniergruppe wandert von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, dass sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

Aufgabe 5 - 150835
Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$

auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, dass $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und
auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C Liegen, dass $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und
auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, dass $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und
auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, dass $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt,

so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

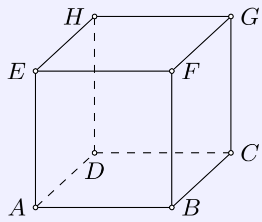
Aufgabe 6 - 150836
Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, dass die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, dass die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll. Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, dass für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d.h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

4.18 XVI. Olympiade 1976

4.18.1 I. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160811
Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.



Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!

Aufgabe 2 - 160812
In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen. Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1.11.1976 (Montag) bis 27.11.1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.

Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:

(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13.11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6.11. oder vom 18. bis 20.11.76 oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24.11.76 zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.

Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen!
Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

Aufgabe 3 - 160813
Beweise den folgenden Satz:
Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

Aufgabe 4 - 160814
Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:

"Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!"

Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:

"Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe."

Stimmt diese Behauptung von Fritz?
Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

4.18.2 II. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160821
Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wie viel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

Aufgabe 2 - 160822
Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.

Um wie viel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

Aufgabe 3 - 160823
In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, dass die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

Aufgabe 4 - 160824
Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Größe β des Innenwinkels $\angle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°.
- Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm.
- Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
- Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm.
- Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4.18.3 III. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160831
Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, dass er diese Summe nicht "passend" hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Aufgabe 2 - 160832
Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, dass jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, dass dann $\overline{\angle BMC} = 90°$ ist!

Aufgabe 3 - 160833
In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Aufgabe 4 - 160834
Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z.B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1)	Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern	$7 \cdot 2 = 14$
(2)	Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.)	1414
(3)	Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern	$49 + 4 = 53$
(4)	Man hängt an das Ergebnis eine Null an	530
(5)	Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt	$1414 + 530 = 1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 5 - 160835
Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 6 - 160836
Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, dass es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.
b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!

4.19 XVII. Olympiade 1977

4.19.1 I. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170811
Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wie viel Prozent des Anfangspreises müsste eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wie viel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

Aufgabe 2 - 170812
Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, dass jedes Stück alle fünf anderen berührt.

Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

Aufgabe 3 - 170813
Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

Aufgabe 4 - 170814
Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. Uwe dagegen meint, dass nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

4.19.2 II. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170821
Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z.B. Dirk, verlässt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

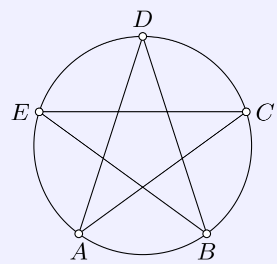
Anja:	Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit:	Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.
Christoph:	Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte! Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

Aufgabe 2 - 170822
Beweise folgenden Satz:

Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

Aufgabe 3 - 170823



Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ADB$!

Aufgabe 4 - 170824
Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

> "Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

4.19.3 III. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170831
Es ist zu beweisen:

Wenn der Winkel $\angle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks!

Aufgabe 2 - 170832
Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.

Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 3 - 170833
Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.

Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

Aufgabe 4 - 170834
Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wie viel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wie viel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

Aufgabe 5 - 170835
Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1; P_2; P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung genügen:

$$P_1(P_2 + P_3) = 165$$

Aufgabe 6 - 170836
Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wie viel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

4.20 XVIII. Olympiade 1978

4.20.1 I. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180811
Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.

Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluss des Laufes zeigte sich, dass in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der 2. Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.
Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

Aufgabe 2 - 180812
Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:

- Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil.
- Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125.
- Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note "5".
- Die Anzahl der "Zweien" war eine ungerade Zahl und größer als 12.
- Die Anzahl der "Dreien" war genau so groß wie die der "Zweien".

a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note "1"?

Aufgabe 3 - 180813
Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, dass das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und dass FS die Länge 6 cm hat.
Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, dass die Seitenfläche ABS in der Grundrisstafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.

Bemerkung: Beschreibung und Begründung der Konstruktion werden nicht verlangt. Man kann z.B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrisstafel liegt.

Aufgabe 4 - 180814
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\angle CAB$ die Größe 60° hat.
Fälle von C aus das Lot CD auf AB, danach von D aus die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!

Weise nach, dass $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

4.20.2 II. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180821
Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!

(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?

(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Aufgabe 2 - 180822
Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:

Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

Aufgabe 3 - 180823
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Aufgabe 4 - 180824
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.

Beweise, daß die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

4.20.3 III. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180831
Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, dass $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\angle PAB$, $\angle PAB$ bzw. $\angle PAC$ seien mit δ, ϵ bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ϵ und η für den Fall, dass $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ϵ und eine Formel für η!

Aufgabe 2 - 180832
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\angle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\angle ABC$ die Beziehungen $a : c = 2 : 3$; $w_\alpha = 6$ cm; $\beta = 35°$ gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, dass jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

Aufgabe 3 - 180833
Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede der leere Flaschen) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, dass er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wie viel Geld er dann zurückerhielt!

Aufgabe 4 - 180834
Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar.

Aufgabe 5 - 180835
Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%iger Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

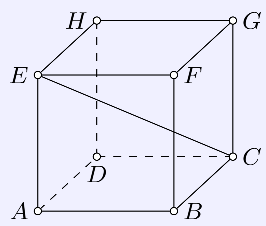
Aufgabe 6 - 180836
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

Beweise, dass dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

4.21 XIX. Olympiade 1979

4.21.1 I. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190811
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrisstafel und senkrecht zur Aufrisstafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.



Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.

Aufgabe 2 - 190812
Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!
Dabei werde
a) vorausgesetzt, dass die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
b) vorausgesetzt, dass die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

Aufgabe 3 - 190813
Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0{,}\overline{3456}..., \qquad q = 0{,}3\overline{456}..., \qquad r = 0{,}34\overline{56}..., \qquad s = 0{,}345\overline{6}.$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt: In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt: In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer!

Aufgabe 4 - 190814
Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, dass sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

4.21.2 II. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190821
Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.
(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.
(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine "2".
(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine "2".
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine "2".

Ermittle aus diesen Angaben, wie viel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wie viel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

Aufgabe 2 - 190822
In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

"Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.

Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!"

Aufgabe 3 - 190823
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, dass die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Aufgabe 4 - 190824
Klaus sagt:

> "Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120.
>
> Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte ?"

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

4.21.3 III. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190831
Klaus erzählt:

"Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück"

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wie viel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Aufgabe 2 - 190832
Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

Aufgabe 3 - 190833
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

Aufgabe 4 - 190834
Beweise, dass das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!

Aufgabe 5 - 190835
Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, dass E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2 = \frac{ac}{4}$ gilt!

Aufgabe 6 - 190836

Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

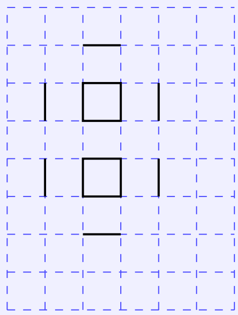
4.22 XX. Olympiade 1980

4.22.1 I. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200811
Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & a & c & - & d & e & = & f & f & e \\
 & : & & & & + & & & - & \\
 & g & b & * & g & f & = & d & b & a \\
\hline
 & h & e & + & i & g & = & k & g & f
\end{array}$$

Aufgabe 2 - 200812



Ulrike fertigt gern Stickarbeiten an.
In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde.

Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, dass der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand a hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.

Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, dass eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

Aufgabe 3 - 200813
Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: "im Preis um 20% herabgesetzt."

Auf dem Heimweg sagte Heinz: "Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart." Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: "Stimmt das?".

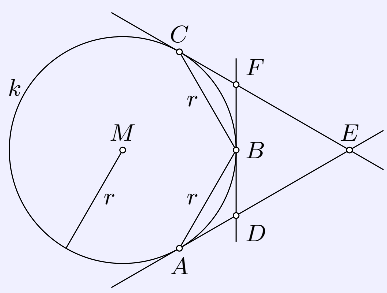
Dieser erklärte ihm darauf: "Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}\%$ des von mir gezahlten Preises eingespart."

Beweise, dass diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

Aufgabe 4 - 200814

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r. AB und BC seien zwei Sehnen der Länge r. In A, B und C seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte D, E und F, wie im Bild angegeben.

Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist!



4.22.2 II. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200821
Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er musste sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark.

Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wie viel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

Aufgabe 2 - 200822
Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:

Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

Aufgabe 3 - 200823
Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.

Beweise, dass dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!

Aufgabe 4 - 200824
Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\angle EDA$ hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle ABC$, die Größe β des Winkels $\angle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\angle CAB$!

4.22.3 III. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200831
Uwe erzählt:

> ”In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt.”

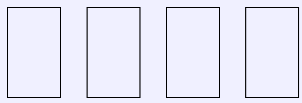
Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, daß Uwes Aussagen zutreffen!

Aufgabe 2 - 200832
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

Aufgabe 3 - 200833
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 4$; $b = 6$ und $c = 7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 200834
Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleichgroßen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Abbildung).



Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:

(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.

(2) Der Bube liegt näher am As als der König.

(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.

(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.

(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.

Beweise, dass aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

Aufgabe 5 - 200835
Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB} = 5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

Aufgabe 6 - 200836
Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

$$(1) \quad \overline{\angle C_1 AB} = \overline{\angle C_2 AB} \qquad ; \qquad (2) \quad \overline{BC_1} = \overline{BC_2} \qquad ; \qquad (3) \quad \overline{AC_1} < \overline{AC_2}$$

Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

4.23 XXI. Olympiade 1981

4.23.1 I. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210811

In nebenstehender Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, dass in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist!

Gib eine derartige Ersetzung an!

X X X X X X X X X
X X X X X X X X
X X X X X X X
X X X X X X
X X X X X
X X X X
X X X
X X
X

Aufgabe 2 - 210812
Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heiko je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10. Weiterhin ist bekannt:

(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss.

(2) Falk schoss die 9.

Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?

a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?

b) Welcher der beiden Jungen schoss die 10?

Aufgabe 3 - 210813
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecke aufeinander senkrecht.

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

Aufgabe 4 - 210814
Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Messgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.

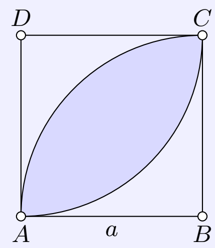
Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeiter 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.

Wie viel Messgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

4.23.2 II. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210821
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$ gilt!

Aufgabe 2 - 210822
Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild blau) einschließen.



a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!

Aufgabe 3 - 210823

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt: Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 4 - 210824
Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

- Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.
- Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.
- Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.
- Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.
- Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.
- Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.
- Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.
- Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so dass alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

4.23.3 III. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210831
In dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A & B & B & C & - & D & C & E & = & F & B & E & G \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & C & D & \cdot & & H & E & = & J & D & A & F \\
\hline
 & J & F & K & + & D & D & A & = & J & J & F & C
\end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ... , 9) ersetzt werden, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

Aufgabe 2 - 210832
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!

Aufgabe 3 - 210833
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$ und beweise, dass es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine "Analyse" (Schlussfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine "Determination" (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 210834
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = 2{,}5$ cm gilt.

Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

Aufgabe 5 - 210835
Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.

Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

Aufgabe 6 - 210836
Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

4.24 XXII. Olympiade 1982

4.24.1 I. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220811
Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.
(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.
(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a)Beweise, dass Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!
b) Beweise, dass sich aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!
c) Beweise, dass sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln lässt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

Aufgabe 2 - 220812
Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert:

z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, dass es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

Aufgabe 3 - 220813
Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wie viel Minuten muss der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

Aufgabe 4 - 220814
In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist!

4.24.2 II. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220821
Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht

(1) Anke fährt an die Ostsee.
(2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.
Untersuche

a) für das Jahr 1981 b) für das Jahr 1982,

für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln lässt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form "A oder B" ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

Aufgabe 2 - 220822
In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

		Ja	Nein
(A)	Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	o	o
(B)	Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	o	o
(C)	Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	o	o

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(a) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,

b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,

c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,

d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

Aufgabe 3 - 220823
Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

Aufgabe 4 - 220824
Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.

(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, dass die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

4.24.3 III. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220831
Cathrin fragt an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete:

> "Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl."

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11 sondern 1911.

Aufgabe 2 - 220832
a) Beweise, dass für $n = 2, 3, 4$ und 5 der folgende Satz gilt:
Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n = 2, 3, 4, 5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

Aufgabe 3 - 220833
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm. Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:

(1) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.
(2) Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.
(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 220834
Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

Aufgabe 5 - 220835
Der Zentriwinkel $\angle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60°. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von innen berührt.
Wie viel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?

Aufgabe 6 - 220836
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.
(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle ASD} = \frac{1}{2}\left(\overline{\angle AMB} + \overline{\angle CMD}\right)$ gilt!

4.25 XXIII. Olympiade 1983

4.25.1 I. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230811
Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g.

Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

Aufgabe 2 - 230812
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d.h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

Aufgabe 3 - 230813
Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage 18 $\frac{km}{h}$. Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wie viel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wie viel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

Aufgabe 4 - 230814

a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm.

Gesucht sind drei Punkte F, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrates liegen, dass die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, dass sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so dass die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

4.25.2 II. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230821
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

Aufgabe 2 - 230822
Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, dass die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

Aufgabe 3 - 230823
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, dass der Punkt M im Innern des Dreiecke ABC liegt. Ferner sei $\overline{\angle CAM} = 20°$ und $\overline{\angle AMB} = 120°$.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle CBM$!

Aufgabe 4 - 230824
Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, B und F bezeichnet.

Beweise, dass der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

4.25.3 III. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230831
Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflußhahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, dass aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

Aufgabe 2 - 230832
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 3 - 230833
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7cm$, $\rho = 2cm$ und $\gamma = 80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 - 230834
Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

Aufgabe 5 - 230835
a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat.
Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wie viel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat.
Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wie viel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

Aufgabe 6 - 230836
Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;
die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;
es gilt $AB \parallel CD$;
die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

4.26 XXIV. Olympiade 1984

4.26.1 I. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240811
An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengenommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

Aufgabe 2 - 240812
Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft "Mathematik" folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen. Wie viel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

Aufgabe 3 - 240813
Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, dass sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

Aufgabe 4 - 240814
Aus drei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a lässt sich ein Trapez zusammensetzen.

a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez lässt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Parallelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a!

4.26.2 II. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240821
Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.
(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.
(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.
(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln lässt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

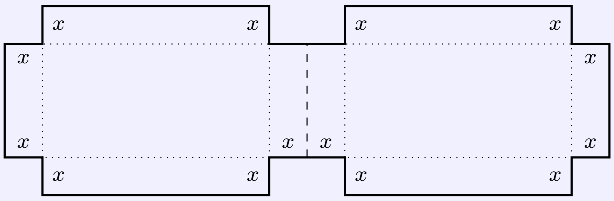
Aufgabe 2 - 240822
Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\angle BAC$ betrage $30°$.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

Aufgabe 3 - 240823
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad \text{erfüllen!}$$

Aufgabe 4 - 240824
Eine Blechtafel hat die in der Abbildung ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.



1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!

3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben.

Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

4.26.3 III. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240831
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

Aufgabe 2 - 240832
Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, dass der Reifen auf dem Hinterrad nach 15000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, dass zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht. Ermittle diese Kilometerzahl!
b) Nach wie viel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, dass sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

Aufgabe 3 - 240833
Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.
(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.
(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.
(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.
(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Stecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, dass jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, dass jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann "nicht überschlagen", wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

Aufgabe 4 - 240834
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ und CH die Höhe auf AB.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle SCW} = \overline{\angle WCH}$ gilt!

Aufgabe 5 - 240835
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

Aufgabe 6 - 240836
Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.

Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

4.27 XXV. Olympiade 1985

4.27.1 I. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250811

a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl 30 um 50% vergrößert.

Um wie viel Prozent muss diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?

b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft!

Aufgabe 2 - 250812
In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitig Aufgaben. Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

*	*	*	2	7	·	*	*
		*	*	*	*	*	5
		*	*	*	*	*	
		*	*	*	*	9	5

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, dass eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, dass es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.

Hat er damit recht? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 3 - 250813
Beweise folgenden Satz: Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.

Aufgabe 4 - 250814
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.

a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!

b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!

c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

4.27.2 II. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250821
Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, dass die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

Aufgabe 2 - 250822
Beweise folgenden Satz:

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, lässt bei Division durch 9 stets den Rest 2!

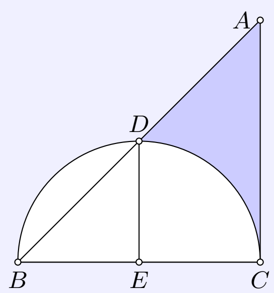
Aufgabe 3 - 250823
Ein Sicherheitsschloss besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) lässt sich das Schloss öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, dass in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?

b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muss?

Aufgabe 4 - 250824

Es sei ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Abbildung).



a) Beweise, dass die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.

Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$*!*

4.27.3 III. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250831
Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Aufgabe 2 - 250832
Brigade Schulz spielt im "Tele-Lotto (5aus 35)" nach einem sogenannten "vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2, ... , 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tipp abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

   Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tipp mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tipp mit fünf richtig getippten Zahlen 3000M.

   Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

   Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

Hinweis: Die Kosten, d.h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 3 - 250833
Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A und B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6cm$.

a) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6cm$) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, dass alle verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

Aufgabe 4 - 250834
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

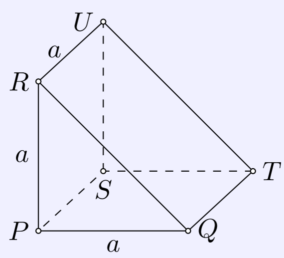
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\angle CBM$ halbiert!

Aufgabe 5 - 250835
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wie viel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, dass jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und dass diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Aufgabe 6 - 250836
Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge a des Dreiecks PQR.



Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

4.28 XXVI. Olympiade 1986

4.28.1 I. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260811
In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\
\hline
 & K & C & + & C & K & = & & D & D
\end{array}$$

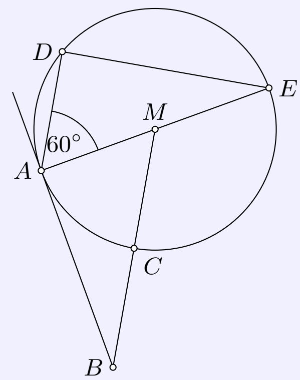
a) Gib eine Eintragung an und zeige, dass sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Aufgabe 2 - 260812
Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45679091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1234570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45679091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, dass 37 ein Teiler von 45679091 ist?

Aufgabe 3 - 260813
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):



(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\angle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.

Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

Aufgabe 4 - 260814
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

4.28.2 II. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260821
In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: "Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können."

(2) Ilka: "Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will."

(3) Katrin: "Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können."

(4) Susann: "Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können."

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Aufgabe 2 - 260822
Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, dass C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\angle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\angle ACD$!

Aufgabe 3 - 260823
Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

Aufgabe 4 - 260824
a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:
Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29 mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:
Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:
Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z''.

4.28.3 III. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260831
Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: "Der Vorrat reicht dafür, dass jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."

(I) Weise nach, dass es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!

(II) Weise nach, dass für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

Aufgabe 2 - 260832
Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.

(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

Aufgabe 3 - 260833
Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

(b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann lässt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.

(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).

Aufgabe 4 - 260834
In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.

(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Aufgabe 5 - 260835
Beweise folgende Sätze:

I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Aufgabe 6 - 260836
Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, daß die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.

Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \qquad \overline{BD} = q, \qquad \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

4.29 XXVII. Olympiade 1987

4.29.1 I. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270811
Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

"Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe des Ergebnis auf!"

Es stellte sich heraus, dass alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Aufgabe 2 - 270812
In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, dass es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann lässt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

Aufgabe 3 - 270813
Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $30°$ hat.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

Aufgabe 4 - 270814
Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine "Division mit Rest" durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rast notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!

b) Nun kann man vermuten, dass diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

Beweise diese Vermutung!

4.29.2 II. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270821
Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird:

> "Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!"

Lässt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln? Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

Aufgabe 2 - 270822
Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und dass der Winkel $\angle ABC$ die Größe $120°$ hat.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

Aufgabe 3 - 270823
Über ein Turnier in einer AG "Schach" wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

Aufgabe 4 - 270824
Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S. Ermittle das Verhältnis $A : S$

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist!

4.29.3 III. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270831
Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man "Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> "Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z.B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Aufgabe 2 - 270832
Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

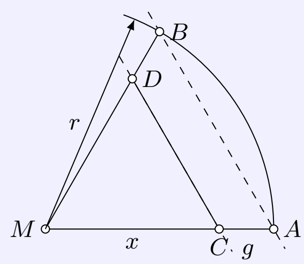
Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Aufgabe 3 - 270833
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\angle BAC$, $\angle ABC$ vorausgesetzt werde, dass $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\angle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

Aufgabe 4 - 270834

Es sei $\overset{\frown}{AB}M$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\angle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, dass der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{AB}DC$ ist (siehe Abbildung).



a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.

Beweise, dass man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

Aufgabe 5 - 270835
Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, dass diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Aufgabe 6 - 270836
Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.

I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden lässt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!

4.30 XXVIII. Olympiade 1988

4.30.1 I. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280811
In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie.

Es soll nun - mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht - die leichtere Kugel ermittelt werden.

Zeige, dass sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d.h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, dass nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

Aufgabe 2 - 280812
Es sei M der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\angle BAM$ betrage $40°$ und die des Winkels $\angle BCM$ sei $30°$.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Aufgabe 3 - 280813
Beweise die folgende Aussage!

Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 4 - 280814
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.

a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miss die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

4.30.2 II. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280821
Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

a) Wie viel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

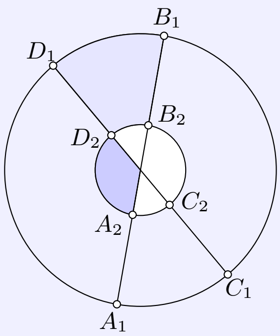
Aufgabe 2 - 280822
Beweise die folgende Aussage! Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

Aufgabe 3 - 280823
In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

a) Simone misst den Winkel $\angle BPM$ und stellt fest, daß die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank misst von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, dass diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

Aufgabe 4 - 280824



Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie 3 : 1 verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie die Abbildung zeigt.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, dass $\angle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!

b) Wie hat man die Größe des Winkels $\angle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?

4.30.3 III. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280831
Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, dass jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, dass auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

Aufgabe 2 - 280832
Beweise den folgenden Satz!

Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

Aufgabe 3 - 280833
Beweise die folgende Aussage!

Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, dass das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das "Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

Aufgabe 4 - 280834
Für ein Schulsportfest möchte die Klasse $8c$ aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

Aufgabe 5 - 280835
Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

Aufgabe 6 - 280836
Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, dass ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

4.31 XXIX. Olympiade 1989

4.31.1 I. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290811
Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40 prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: "Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig."

Stimmt das?

Aufgabe 2 - 290812
Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$.

Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

Aufgabe 3 - 290813
Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, dass sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und dass ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.

a) Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muss!

b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

Aufgabe 4 - 290814
Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.

a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

4.31.2 II. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290821
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.

(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können Schlittschuh laufen.

(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können Ski laufen.

(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder Schlittschuh laufen noch Ski laufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln lässt!

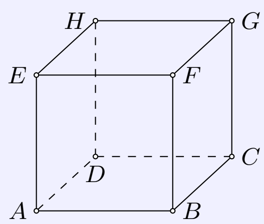
Aufgabe 2 - 290822 a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!
b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, dass die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

Aufgabe 3 - 290823

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Abbildung).

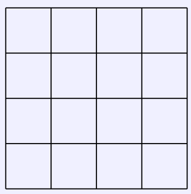


a) Ermittle die Größe des Winkels $\angle DEB$!

b) Beweise, dass die Winkel $\angle AHB$ und $\angle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!

Aufgabe 4 - 290824
Das 4×4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, dass folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.



(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, dass sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, dass es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

4.31.3 III. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290831
Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Dabei stellte er fest, dass sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muss! Weise nach, dass bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

Aufgabe 2 - 290832
Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

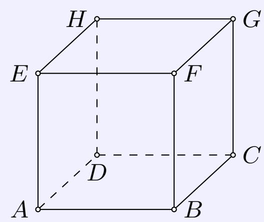
(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

Aufgabe 3 - 290833

In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!



Aufgabe 4 - 290834
Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Aufgabe 5 - 290835

Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, dass von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

Aufgabe 6 - 290836

Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, dass es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$, $\epsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\angle DAB$ und, wenn S der Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ϵ die Größe des Winkels $\angle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, dass durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4.32 XXX. Olympiade 1990

4.32.1 I. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300811
Axel lässt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne dass er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann:

"Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluss die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels. Wenn Du mir diese Summe nennst, kann ich Dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen."

a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!

b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

Aufgabe 2 - 300812
Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt: $A = \frac{e \cdot f}{2}$. Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

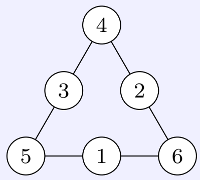
Rolf behauptet, dass diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Hat er recht?

Aufgabe 3 - 300813
In einer Ebene seien sieben Punkte so gegeben, dass keine drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Dreiecke, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind!

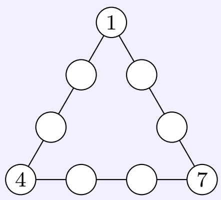
Aufgabe 4 - 300814

a) In das Schema des Bildes a) sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so einzutragen, dass jede der drei "Seitensummen" $5 + 1 + 6$, $6 + 2 + 4$, $4 + 3 + 5$ den Wert $S = 12$ hat.



Untersuche, ob eine solche Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auch mit $S = 9$ möglich ist, ebenso auch mit $S = 10$ und $S = 11$!
Gib jedes Mal, wenn das der Fall ist, je eine derartige Eintragung an!

b) In das Schema des Bildes b) sollen außer den bereits eingetragenen "Eckenzahlen" 1, 4, 7 die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so eingetragen werden, dass jede der drei "Seitensummen" den Wert $S = 19$ hat.



Ermittle alle verschiedenen Eintragungen dieser Art! Dabei sollen zwei Eintragungen genau dann als verschieden gelten, wenn in einer dieser beiden Eintragungen mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 einer anderen Dreiecksseite angehört als in der anderen Eintragung.

c) Im Bild b) beträgt die "Eckensumme" $E = 1 + 4 + 7 = 12$. Ermittle alle diejenigen Werte E, die als "Eckensumme" auftreten können, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in das Schema einträgt, dass die drei Seitensummen den Wert S haben! Begründe, dass es für andere Werte E keine solche Eintragung geben kann!

4.32.2 II. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300821
In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Fass so viele Liter Wasser in das zweite Fass, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Fass so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

Aufgabe 2 - 300822
Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

Aufgabe 3 - 300823
Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, dass keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

Aufgabe 4 - 300824
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 9999 derart hintereinander aufgeschrieben, dass die Ziffern-darstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet $z = 123456789101112131415...$; beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z.B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

4.32.3 III. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300831
Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Aufgabe 2 - 300832
Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, dass ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Aufgabe 3 - 300833
Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

Aufgabe 4 - 300834
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n - 1$, n, $n + 1$ und $n^2 + 1$ eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 5 - 300835

a) Beweise den folgenden Satz:

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

Aufgabe 6 - 300836
Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, dass keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

4.33 XXXI. Olympiade 1991

4.33.1 I. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310811
Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne dass die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln lässt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Aufgabe 2 - 310812
Rudolf macht folgende Aussage:

"Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

Aufgabe 3 - 310813
Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, dass der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!
b) Beweise, dass Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

Aufgabe 4 - 310814
Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, dass zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

4.33.2 II. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310821
In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wie viele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

Aufgabe 2 - 310822

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$ Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

   Beweise, dass sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muss! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.

   Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4cm$ hat! Beweise, dass sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muss! Wie lautet sie?

Aufgabe 3 - 310823
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\angle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30°$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!

Aufgabe 4 - 310824

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis! Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle AMB$ auf!

b) Beweise, dass diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, dass dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

4.33.3 III. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310831
Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Aufgabe 2 - 310832
Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluss des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, daß keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d.h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, dass für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, daß es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Aufgabe 3 - 310833
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.
(2) G liegt auf AB.
(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

a) Beweise, dass für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Aufgabe 4 - 310834
Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Aufgabe 5 - 310835
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

Aufgabe 6 - 310836
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845$ cm die Länge $h_a = \overline{AE} = 840$ cm der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780$ cm der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

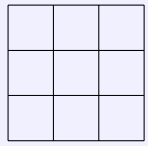
4.34 XXXII. Olympiade 1992

4.34.1 I. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320811

In die Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung) sollen die Zahlen

-0,5; 1; -2; 2,5; -3,5;
4; -5; 5,5; -6,5



so eingetragen werden, dass in jedes Feld genau eine dieser Zahlen kommt und dabei in allen drei Zeilen, in allen drei Spalten und in allen beiden Diagonalen die gleiche Summe entsteht.

a) Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Untersuche, ob es noch andere solche Eintragungen gibt, die sich nicht nur durch Drehung oder Spiegelung von einer gefundenen unterscheiden!

Aufgabe 2 - 320812

Ein Holzwürfel wurde mit den drei Farben Rot, Gelb und Blau angestrichen, jedes der sechs Quadrate seiner Oberfläche mit einer dieser Farben. Dabei wurde jede der drei Farben mindestens einmal verwendet. Anschließend wurde der Würfel in 27 kleine Würfel zersägt. Auf keinem dieser 27 Würfel waren nun die beiden Farben Blau und Gelb vorhanden.

Ist durch diese Angaben die Verteilung der Farben auf die Oberfläche des ursprünglichen Würfels eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, beschreibe diese Verteilung!

Aufgabe 3 - 320813

Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Innenwinkel sämtlich kleiner als 180° sind.

Beweise, dass in jedem solchen Viereck die Summe der Längen der Diagonalen AC und BD stets

a) kleiner als der Umfang des Vierecks $ABCD$, aber

b) größer als der halbe Umfang des Vierecks $ABCD$ ist!

Aufgabe 4 - 320814

Alexander beobachtete zwei Kerzen, eine weiße und eine halb so lange rote. Beide wurden gleichzeitig angezündet; nach 2 Stunden war die weiße Kerze heruntergebrannt, die rote (da sie breiter war) erst nach 5 Stunden.

Wie lange nach dem Anzünden hatte es bis zu dem Zeitpunkt gedauert, an dem beide Kerzen einander genau gleichlang gewesen waren?

4.34.2 II. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320821
Herr Schulz, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, dass er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

Aufgabe 2 - 320822
Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A, B, C so gelegen, dass $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und dass sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe den Winkels $\angle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!

Aufgabe 3 - 320823
Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.

Zeige, dass bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von $ABCD$ In einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der Inkreis von $ABCD$.

Aufgabe 4 - 320824
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von Ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals Im Gleichgewicht?

4.34.3 III. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320831
Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffern einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so dass die Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ gilt!

Aufgabe 2 - 320832
Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d.h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge. Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten. Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

Aufgabe 3 - 320833
Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinkliges Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
$\angle PBA$	δ
$\angle PCA$	δ'

Winkel	Größe
$\angle PCB$	ϵ
$\angle PAB$	ϵ'

Winkel	Größe
$\angle PAC$	φ
$\angle PBC$	φ'

a) Wenn $\delta = \delta$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreieck ABC.
b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

Aufgabe 4 - 320834
Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{km}{h}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

Aufgabe 5 - 320835
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als Inkreis eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von Innen berührt.

Aufgabe 6 - 320836
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen.

Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen,

von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten,

die zweite 63 Minuten,

die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

4.35 XXXIII. Olympiade 1993

4.35.1 I. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330811

Nach dem Kauf eines neuen Autos muss man bekanntlich im Lauf der Zeit mit einem Wertverlust rechnen. Für diesen Wertverlust seien im Lauf des ersten Jahres 20%, im zweiten Jahr weitere 15% und im dritten Jahr nochmals weitere 15% gerechnet, wobei alle diese Prozentangaben vom ursprünglichen Kaufpreis verstanden werden. Der jeweils entstehende verminderte Wert wird als Zeitwert bezeichnet.

a) Frau Grübler bezahlte für ihren Neuwagen 23800 DM. Berechne den Zeitwert nach zwei Jahren!

b) Herr Bauer will sein Auto nach drei Jahren verkaufen. Zu diesem Zeitpunkt würde der Zeitwert des Wagens 16200 DM betragen. Um 10% dieses Wertes verringert sich jedoch aufgrund eines Unfalls der Zeitwert nochmals.
Wie viel Prozent des ursprünglichen Kaufpreises beträgt nun der so entstandene verringerte Zeitwert?

c) Herr Neumann kauft ein neues Auto für 43000 DM. Er möchte den Wagen nach vier Jahren zum Zeitwert verkaufen, den er als 18275 DM annimmt.
Welchen Prozentsatz (vom ursprünglichen Kaufpreis) hat er dabei für den Wertverlust im vierten Jahr zugrunde gelegt?

Aufgabe 2 - 330812

Ermittle alle Möglichkeiten, die leeren Felder im folgenden Rechenschema so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht!

```
_8_ • 4_2
---------
      7__
     3__
   ----
---------
   _____0
```

Aufgabe 3 - 330813

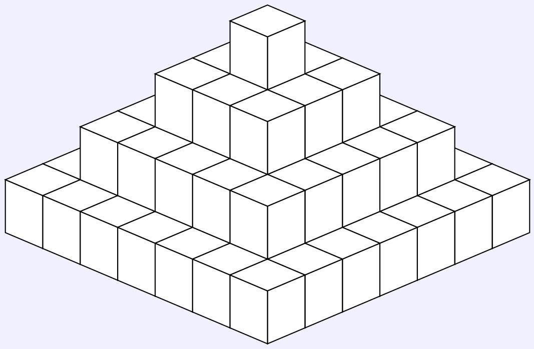
Sebastian betrachtet eine dreistellige natürliche Zahl und stellt fest:

(1) Setzt man vor diese dreistellige Zahl eine Ziffer 5, so ist die entstandene vierstellige Zahl eine Quadratzahl.

(2) Hängt man aber an die (ursprüngliche dreistellige) Zahl eine Ziffer 1 an, so ist die entstandene vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Weise nach, dass es genau eine dreistellige Zahl gibt, mit der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt werden; ermittle diese Zahl!

Aufgabe 4 - 330814
Ria baut aus Würfeln der Kantenlänge 2 cm einen pyramidenartigen Körper. Er besteht aus Schichten, die jeweils eine Quadratfläche vollständig bedecken. Die Abbildung zeigt das Prinzip seines Aufbaues. Die Gesamthöhe dieses Körpers beträgt 10 cm.



Als "Sichtfläche" eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers sei die Gesamtheit aller von oben oder von den Seiten sichtbaren Teilflächen des Körpers verstanden. Zu dieser "Sichtfläche" gehören also keine Flächen, die - wie die Grundfläche des von Ria gebauten Körpern - nur von unten zugänglich sind.

a) Aus wie vielen Würfeln besteht dieser Körper?

b) Ria streicht die "Sichtfläche" dieses Körpers farbig an. In wie vielen der Würfel sind dann sechs, fünf, vier, drei bzw. zwei Flächen, eine bzw. keine Fläche farbig angestrichen?

c) Beate entfernt eine Anzahl derjenigen Teilwürfel, die mindestens eine farbig angestrichene Fläche haben. Sie wählt diese Teilwürfel so, dass der übrigbleibende Körper eine ebenso große "Sichtfläche" hat wie der ursprüngliche Körper. Unter Einhaltung dieser Bedingung wählt Beate die Anzahl der zu entfernenden Teilwürfel aber möglichst groß. Wie groß ist diese Anzahl?

d) An dem von Beate übriggelassenen Körper streicht Ria von neuem dessen "Sichtfläche" farbig an. Danach entfernt wiederum Beate nach denselben Bedingungen wie in c) eine möglichst große Anzahl von Teilwürfeln mit je mindestens einer farbigen Fläche. Wie groß ist diese Anzahl?

Hinweis: Zu b), c), d) werden nur Beschreibungen (gegebenenfalls auch Skizzen), aber keine Begründungen verlangt.

4.35.2 II. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330821
Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wie viele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

Aufgabe 2 - 330822
Susann lässt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 3 - 330823
Es sei $ABCD$ ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass $EFGH$ ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ in dem Flächeninhalt von $EFGH$ enthalten?

Aufgabe 4 - 330824
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 48° hat?

b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\angle WAH$

b) die Größe 12°,

c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem derartigen Dreieck möglich sind!

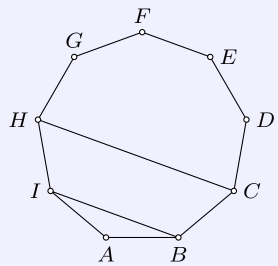
4.35.3 III. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330831
In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.
(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.
(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.
(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Französisch und Latein lernen.
(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wie viele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wie viele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

Aufgabe 2 - 330832



Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$, d.h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Beweise, dass die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!
b) Beweise, dass $CH - BI = BC$ gilt!

Aufgabe 3 - 330833
Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u,
die Gerade durch B und C sei v,
die Gerade durch C und A sei w,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über, bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55°$ vorausgesetzt.

a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75°$ ist?

b) Wie groß muss β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, dass sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

d),e) Stelle eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf der selben Seite der Geraden u liegt wie C; wähle dabei das Dreieck ABC
- d) mit spitzen Innenwinkel bei B.
- e) mit stumpfen Innenwinkel bei B.

(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)

Aufgabe 4 - 330834
Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B, ein zweiter Radfahrer Y von B nach A. Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, dass jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und dass die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die 7,5 km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

Aufgabe 5 - 330835
Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine "Spiegelzahl", wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser "Spiegelzahlen"! Welches ist der größte echte Teiler von s?

b) Beweise, dass für je drei Ziffern a, b, c von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern a, zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 111111 teilbar.

Hinweis: Als echter Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s, die (positiv und) kleiner als s sind.

Aufgabe 6 - 330836

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC, von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf AB senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf AC senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, dass es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf BC senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

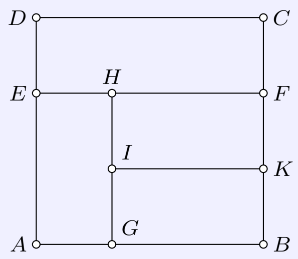
4.35.4 IV. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330841
Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl von Aufgaben durch. Sein Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

> "Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist."

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 2 - 330842



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecke AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abbildung).

a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$ und $IKFH$ untereinander flächengleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!
b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ untereinander umfangsgleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 3 - 330843
Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 g Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!

Aufgabe 4 - 330844
Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

Aufgabe 5 - 330845
Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, dass für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

Aufgabe 6 - 330846

Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

4.36 XXXIV. Olympiade 1994

4.36.1 I. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340811
Anja, Bernd und Christina haben am gleichen Tag Geburtstag.

An diesem Tag sagt Anja zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie $\frac{2}{3}$ meines Alters."

Bernd sagt zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie die Hälfte meines Alters."

Christina sagt: "Die Summe unserer drei Altersangaben in Jahren ausgedrückt, beträgt 58."

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie alt Anja, Bernd und Christina sind! Nenne diese drei Altersangaben!

Aufgabe 2 - 340812
Eine dreistellige natürliche Zahl werde genau dann "symmetrisch" genannt, wenn ihre Hunderterziffer gleich ihrer Einerziffer ist.

a) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, in denen nur Ziffern 0, 1, 2 vorkommen (jede eventuell auch mehrfach oder gar nicht)! Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und in denen nur die Ziffern 2, 5, 8 vorkommen! Beweise, dass genau die von Dir angegebenen Zahlen die geforderten sind!

c) Ermittle die Anzahl aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

d) Ermittle die Summe aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

Aufgabe 3 - 340813
Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt M! Zeichne dann zwei Geraden g und h, die durch M gehen! Einen der Schnittpunkte von k_1 mit g bezeichne mit A, einen der Schnittpunkte von k_2 mit h bezeichne mit B! Weiterhin bezeichne mit C denjenigen Schnittpunkt von k_2 mit g, für den M zwischen A und C liegt; und bezeichne mit D denjenigen Schnittpunkt von k_1 mit h, für den M zwischen B und D liegt!

Untersuche, ob für so konstruierte Punkte A, B, C, D stets eine der Aussagen $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt! Wenn das für eine dieser Aussagen der Fall ist, beweise dies!

Aufgabe 4 - 340814
An einer Analog-Uhr (einer Uhr mit Minutenzeiger und Stundenzeiger) kann man den Winkel zwischen den Zeigern so messen, dass man die Gradzahl angibt, um die man den Minutenzeiger im Uhrzeigersinn drehen müsste, bis er den (hierbei unbeweglich gedachten) Stundenzeiger erreicht.
Neben einer solchen Uhr, von der wir voraussetzen, dass sie stets genau geht, denken wir eine Digitaluhr betrachtet, die ebenfalls genau geht, d.h.: Wir setzen voraus, dass sich ihre Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige stets zu Beginn jeder Sekunde auf die richtige Zahlenangabe einstellt.

a) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 9.30 Uhr und 12.30 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog- Uhr genau aufeinander zu liegen kommen?

b) Wie viele Minuten nach 9.30 Uhr bilden die beiden Zeiger der Analog-Uhr erstmals einen ebenso großen Winkel miteinander wie 9.30 Uhr?

   Hinweis: Fällt ein Zusammenhang mit den Ergebnissen der Aufgabe a) auf?

c) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 3 Uhr und 6 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog-Uhr einen Winkel von 30° miteinander bilden?

4.36.2 II. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340821
Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann "symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, dass jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

Aufgabe 2 - 340822
Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, dass jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a=13$ und $b=26$ gewählt werden.

Beweise, dass es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, dass alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

Aufgabe 3 - 340823

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, dass sie korrekt geht, d.h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

Aufgabe 4 - 340824
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB}=6$ cm. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ}=4$ cm gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_3=7{,}5cm^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_1=F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, daß $F_2=F_3$ gilt!

4.36.3 III. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340831
Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Aufgabe 2 - 340832
Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: "Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften."

Michael meint: "Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften."

Jörg meint: "Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft."

Zeige, daß alle drei Meinungen falsch sind!

Aufgabe 3 - 340833
Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1 \text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11 \text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \leq y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, dass sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Aufgabe 4 - 340834
Ein Schachturnier wurde in "Runden" ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, dass in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und dass im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mussten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, dass daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: "Diese Anzahl ist nicht möglich." Gerd entgegnet: "Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben."

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Aufgabe 5 - 340835
Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, dass $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, dass $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, dass $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, dass es "zum Dreieck entartet", wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.

Aufgabe 6 - 340836

a) Beweise, dass für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, dass für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

$$\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4}.$$

Hinweis: Beachte, dass die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte "überschlagene" Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)

4.36.4 IV. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340841 = 340941
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 2 - 340842
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

Aufgabe 3 - 340843
Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

Aufgabe 4 - 340844 = 340944
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

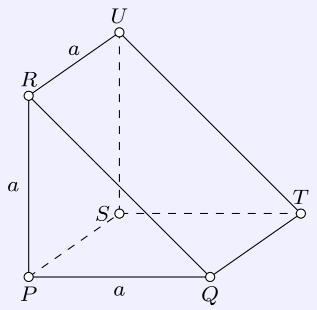
Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Aufgabe 5 - 340845



Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Aufgabe 6 - 340846 = 340946

Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?

5 Aufgaben - Klassenstufe 9

5.1 Vorolympiade 1960

5.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

Aufgabe 1 - V600901
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

Aufgabe 2 - V600902
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Aufgabe 3 - V600903
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhuskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

Aufgabe 4 - V600904
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc}
270 = & 1\cdot 2^8 & +0\cdot 2^7 & +0\cdot 2^6 & +0\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^1 & +0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & \text{L} & \text{L} & 0
\end{array}$$

Aufgabe 5 - V600905
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Aufgabe 6 - V600906
Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{\text{Fe}} = 7{,}5$ p$\cdot$cm^{-3}) in Quecksilber ($\gamma_{\text{Hg}} = 13{,}6$ p$\cdot$cm^{-3}) ein?

Aufgabe 7 - V600907
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

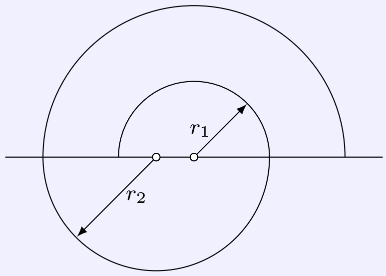
Aufgabe 8 - V600908
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Aufgabe 9 - V600909
Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Aufgabe 10 - V600910

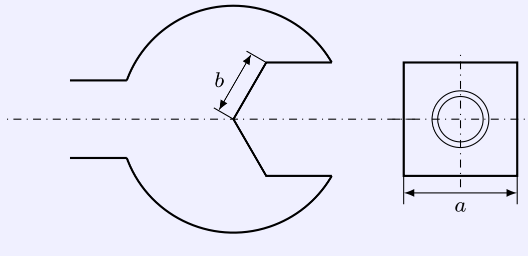


Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

Aufgabe 11 - V600911
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a?
Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Aufgabe 12 - V600912
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2; +2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1; -3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2; +1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

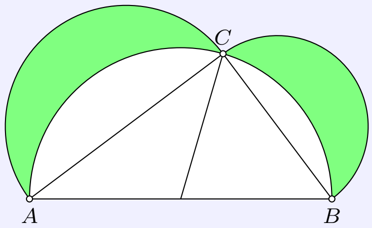
Aufgabe 13 - V600913



Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?

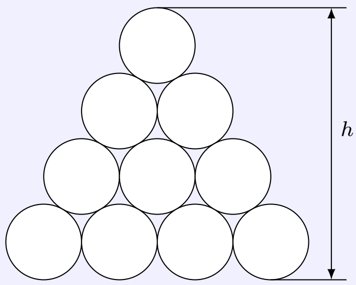
Aufgabe 14 - V600914
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Aufgabe 15 - V600915



Beweisen Sie folgenden Satz:
"Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC." (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

Aufgabe 16 - V600916



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

Aufgabe 17 - V600917
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

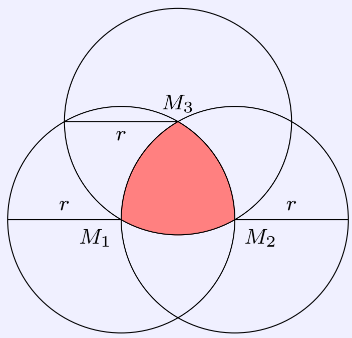
5.2 Vorolympiade 1961

5.2.1 I. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610911
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Aufgabe 2 - V610912
Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Aufgabe 3 - V610913



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8\ \text{p}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Aufgabe 4 - V610914
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 5 - V610915
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

5.2.2 II. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610921
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

Aufgabe 2 - V610922
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

Aufgabe 3 - V610923
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Aufgabe 4 - V610924
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 5 - V610925
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

5.2.3 III. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610931
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade 33 Jahre alt. Wann ist er geboren?

Aufgabe 2 - V610932
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

Aufgabe 3 - V610933
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 4 - V610934
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!

Aufgabe 5 - V610935
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

5.3 I. Olympiade 1961

5.3.1 I. Stufe 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010911
Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Aufgabe 2 - 010912
In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision" p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_m = 0{,}5$ Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von $p_m = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_m = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

Aufgabe 3 - 010913
Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm^3) und möglichst weichem Wasser (Dichte 1,0 g/cm^3) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm^3, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,992 g/cm^3 haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Aufgabe 4 - 010914
Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
 OTTO     MAIS     OTTO     MAIS     OTTO
-ROSE    -SALZ    -SALZ    -ROSE    -MAIS
 4709     2963     3497     4175      534
```

Aufgabe 5 - 010915
Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 6 - 010916
Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3cm$! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

5.3.2 II. Stufe 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010921
Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.
a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?
b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Aufgabe 2 - 010922
a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen.
Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?
b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp.
Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

Aufgabe 3 - 010923
Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 4 - 010924
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.
Wie heißen die Zahlen?

Aufgabe 5 - 010925
Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2, b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$!
Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich?
Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

5.3.3 III. Stufe 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010931
In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus.
Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.
Wieviel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?
Wieviel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Aufgabe 2 - 010932
Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.
Nach wieviel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Aufgabe 3 - 010933
Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!
Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Aufgabe 4 - 010934
Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.
Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, dass $PA = PB$ wird!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 010935
In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

(a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
(b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
(c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
(d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
(e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
(f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

5.4 II. Olympiade 1962

5.4.1 I. Stufe 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020911
Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23m$ und der Höhe $h = 21m$.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wieviel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wieviel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

Aufgabe 2 - 020912
Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald“ senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,– M.

a) Wieviel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?

b) Wieviel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

Aufgabe 3 - 020913
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

Aufgabe 4 - 020914
Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

Aufgabe gelöst von André Lanka

Aufgabe 5 - 020915
Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.
Es ist zu beweisen, dass

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und

b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!

Aufgabe 6 - 020916
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
* & * & * & * & * & * & * & * & : & * & * & * & = & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & * & * & * & * & & & & & & & & & & & \\
 & & & & * & * & * & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & * & * & * & * & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & * & * & * & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

5.4.2 II. Stufe 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020921
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.
Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

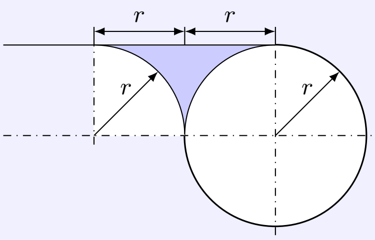
Aufgabe 2 - 020922
Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$. Es wird gebremst.
a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 $\frac{m}{s}$ abnimmt?
b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

Aufgabe 3 - 020923
Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.
Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.
Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Aufgabe 4 - 020924
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

Aufgabe 5 - 020925
Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet!
Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 6 - 020926



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.
a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

5.4.3 III. Stufe 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020931
Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Aufgabe 2 - 020932
Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ 4 hinunter.
Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Aufgabe 3 - 020933
Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von $135°$ miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je $45°$.
Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

Aufgabe 4 - 020934
Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 $\frac{km}{h}$ zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{km}{h}$ zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 $\frac{km}{h}$ erhöht.
Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Aufgabe 5 - 020935
Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.
Beweisen Sie, dass $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

Aufgabe 6 - 020936
In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.
Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.
Wieviel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wieviel in der ganzen Pyramide?

5.5 III. Olympiade 1963

5.5.1 I. Stufe 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030911
Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6370km$.)

a) Wieviel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

Aufgabe 2 - 030912
Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Aufgabe 3 - 030913

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6cm$, $r = 3{,}5cm$ (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6cm$ und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

Aufgabe 4 - 030914
Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Aufgabe 5 - 030915
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Aufgabe 6 - 030916

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wieviel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wieviel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

5.5.2 II. Stufe 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030921
Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:
$AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 4{,}5$ cm, $DA = 3$ cm.
Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 2 - 030922
Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 3 - 030923
Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.
Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 4 - 030924
Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Aufgabe 5 - 030925
a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.
b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

5.5.3 III. Stufe 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030931
Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Aufgabe 2 - 030932
Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.
a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

Aufgabe 3 - 030933
Welche Punkte $P(x; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$? Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ($b > a$)

Aufgabe 4 - 030934
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Aufgabe 5 - 030935
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Aufgabe 6 - 030936
Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

5.6 IV. Olympiade 1964

5.6.1 I. Stufe 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040911
Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

"Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt."

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

Aufgabe 2 - 040912
Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge CBAD. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge ADBC. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Aufgabe 3 - 040913
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Aufgabe 4 - 040914
Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, dass $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

Aufgabe 5 - 040915
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

5.6.2 II. Stufe 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040921
In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.
Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

Aufgabe 2 - 040922
Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

1) Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$

2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92

3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$

4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Aufgabe 3 - 040923
Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Aufgabe 4 - 040924
Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.

(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.

(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.

(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.

(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.

(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.

(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.

(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

5.6.3 III. Stufe 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040931
Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.
In wieviel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Aufgabe 2 - 040932
Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.
Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 9} + \frac{6}{9 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 13} + ... + \frac{6}{31 \cdot 33}$$

Aufgabe 3 - 040933
Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!

Aufgabe 4 - 040934
Ist die folgende Aussage richtig?
Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 5 - 040935
Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: "Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."
Inge: "Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."
Günter: "Die Zahl ist kleiner als 3."
Monika: "Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."
Bärbel: "Die Zahl ist irrational."
Peter: "Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."
Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.
Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 6 - 040936
Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

1. Wieviel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

5.7 V. Olympiade 1965

5.7.1 I. Stufe 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050911
Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Aufgabe 2 - 050912
Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Aufgabe 3 - 050913
Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

Aufgabe 4 - 050914
Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

5.7.2 II. Stufe 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050921
Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Aufgabe 2 - 050922
28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.
Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.
Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.
Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.
Wieviel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Aufgabe 3 - 050923
Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:
"Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ."

a) Wie alt war da die Schwester?
b) Wieviel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Aufgabe 4 - 050924
In einer Ebene ϵ ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ϵ durch A.
Es ist zu beweisen, dass die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser PC liegen.

5.7.3 III. Stufe 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050931
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe 2 - 050932

a) Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$, wenn α, a und s_c gegeben sind. Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\angle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 3 - 050933
Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).
Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

Aufgabe 4 - 050934
Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

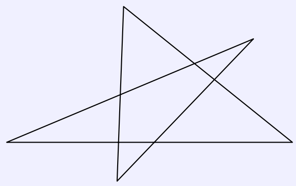
Aufgabe 5 - 050935
In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $(a > b)$ und $AE = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.
Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Aufgabe 6 - 050936
Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.
Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.
Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.
Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.
Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.
Wieviel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

5.8 VI. Olympiade 1966

5.8.1 I. Stufe 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060911



Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.

Aufgabe 2 - 060912
Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

Aufgabe 3 - 060913
In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel $\angle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat
a) vier kongruente Winkel,
b) vier kongruente Seiten,
c) zwei Paare kongruenter Seiten,
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
e) zwei kongruente Winkel.

Aufgabe 4 - 060914
Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

5.8.2 II. Stufe 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060921
Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!
(Je zwei Paare (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Aufgabe 2 - 060922
Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

Aufgabe 3 - 060923
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Aufgabe 4 - 060924
Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

5.8.3 III. Stufe 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060931
Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 2 - 060932
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Aufgabe 3 - 060933
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Aufgabe 4 - 060934
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Aufgabe 5 - 060935
Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v1 \neq v_2$ ist.
Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

Aufgabe 6 - 060936
In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt.
Man untersuche, wie viele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann.

5.9 VII. Olympiade 1967

5.9.1 I. Stufe 1967, Klasse 9

Aufgabe 1 - 070911
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

Aufgabe 2 - 070912
Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Aufgabe 3 - 070913
Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

Aufgabe 4 - 070914
Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.

Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Plazierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln.

Wie ist das möglich?

5.9.2 II. Stufe 1967, Klasse 9

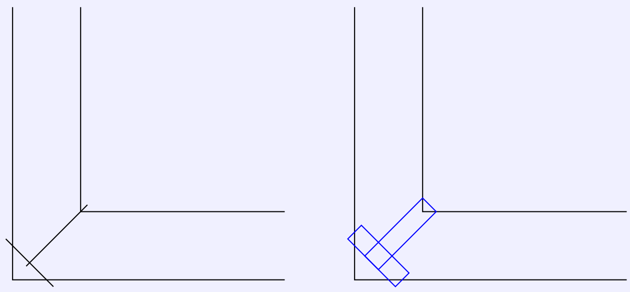
Aufgabe 1 - 070921
Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die $m + n = 111$ gilt.

Aufgabe 2 - 070922
Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18{,}75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

Aufgabe 3 - 070923



In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.
Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?
Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 4 - 070924
Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.
Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

5.9.3 III. Stufe 1967, Klasse 9

Aufgabe 1 - 070931
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Aufgabe 2 - 070932
Auf einem (rechtwinkligen) Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.
Nach welchem Punkt von AB muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Aufgabe 3 - 070933
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.
Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?

Aufgabe 4 - 070934
Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \tag{1}$$

gilt. Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Aufgabe 5 - 070935
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.
Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Aufgabe 6 - 070936
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

5.10 VIII. Olympiade 1968

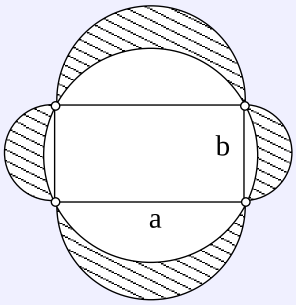
5.10.1 I. Stufe 1968, Klasse 9

Aufgabe 1 - 080911
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Aufgabe 2 - 080912
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!



Aufgabe 3 - 080913
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Aufgabe 4 - 080914
In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & * & * & . & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
\hline
 & * & * & * & 1 & *
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

5.10.2 II. Stufe 1968, Klasse 9

Aufgabe 1 - 080921
Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.
a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

Aufgabe 2 - 080922
Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Aufgabe 3 - 080923
Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Aufgabe 4 - 080924
Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.
B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.
C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.
D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.
Ermitteln Sie x.

5.10.3 III. Stufe 1968, Klasse 9

Aufgabe 1 - 080931
Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.
"Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.
Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.
Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42."
Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Aufgabe 2 - 080932
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a, b+c$ und α! Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\angle BAC$.

Aufgabe 3 - 080933
Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a+b+c=s_1 & a-b+c=s_3 \\ a+b-c=s_2 & a-b-c=s_4 \end{array}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Aufgabe 4 - 080934
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Aufgabe 5 - 080935
Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ durch 512 teilbar ist.

Aufgabe 6 - 080936
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.
Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

5.11 IX. Olympiade 1969

5.11.1 I. Stufe 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090911
Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

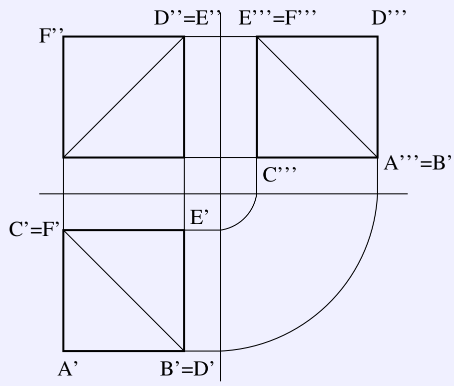
Aufgabe 2 - 090912
Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9dm^2, \quad I_2 = 8dm^2, \quad I_3 = 7dm^2, \quad I_4 = 6dm^2, \quad I_5 = 5dm^2, \quad I_6 = 4dm^2, \quad I_7 = 3dm^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

Aufgabe 3 - 090913
In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.



Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.

Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 4 - 090914
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.
Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

5.11.2 II. Stufe 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090921
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.
Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten.
Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

Aufgabe 2 - 090922
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Aufgabe 3 - 090923
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Aufgabe 4 - 090924
Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

5.11.3 III. Stufe 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090931
Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind.
Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

Aufgabe 2 - 090932
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $s_a = 9{,}6$ cm, $s_b = 12{,}6$ cm und $s_c = 11{,}1$ cm! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 3 - 090933
Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen.
Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Aufgabe 4 - 090934
Man beweise:
Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, dass die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar.

Aufgabe 5 - 090935
Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Aufgabe 6 - 090936
Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$$

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. $f(x_0 + 2)$ bezeichnet.
Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0}$$

5.12 X. Olympiade 1970

5.12.1 I. Stufe 1970, Klasse 9

Aufgabe 1 - 100911
Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

"Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 2 - 100912
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

Aufgabe 3 - 100913
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

Aufgabe 4 - 100914
In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite:	*Ich bin die Schönste.*	(1)
Athene:	*Aphrodite ist nicht die Schönste.*	(2)
Hera:	*Ich bin die Schönste.*	(3)
Aphrodite:	*Hera ist nicht die Schönste.*	(4)
Athene:	*Ich bin die Schönste.*	(5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

5.12.2 II. Stufe 1970, Klasse 9

Aufgabe 1 - 100921
Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A	(1)	"Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
	(2)	"Ich habe den Brief nicht."
	(3)	"Mein Freund hat den Brief."
B	(1)	"Entweder A oder C hat den Brief."
	(2)	"Alle Aussagen von A sind wahr."
	(3)	"D hat den Brief nicht."
C	(1)	"Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
	(2)	"Ich habe den Brief."
	(3)	"B macht keine falschen Aussagen."
D	(1)	"Ich habe den Brief nicht."
	(2)	"Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
	(3)	"B hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Aufgabe 2 - 100922
Jemand behauptet:
Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an! b) Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 3 - 100923
Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.
a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!
b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

Aufgabe 4 - 100924
Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.
In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

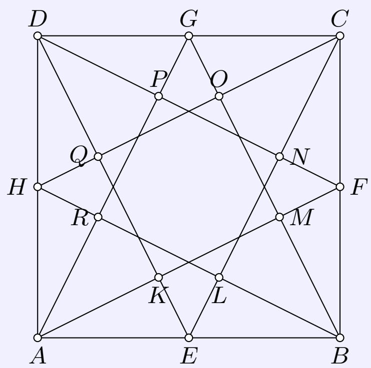
Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

5.12.3 III. Stufe 1970, Klasse 9

Aufgabe 1 - 100931
Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wieviel Schülern bestand Günters Gruppe?

Aufgabe 2 - 100932
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet.
In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Abbildung).



Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!

Aufgabe 3 - 100933
Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z.B. $[3,7] = 3, [-3,7] = -4, [4] = 4$.)
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$\left[\frac{10+3x}{6}\right] = \frac{5x+3}{7}$$

Aufgabe 4 - 100934
Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x + y = 2 \qquad ; \qquad (2) \quad xy - z^2 = 1$$

Aufgabe 5 - 100935
Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $BD = 12$ cm, $CD = 13$ cm, und $\angle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Aufgabe 6 - 100936
Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a + b + c, \angle, \gamma$ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\angle CAB, \angle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

5.13 XI. Olympiade 1971

5.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110911
Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}=\frac{1}{(a+b)(c+d)} \tag{1}$$

Michael meint, dass sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" lässt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen –1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, daß die Gleichung (1) erfüllt wird!

Aufgabe 2 - 110912
Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Aufgabe 3 - 110913
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t=\frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 4 - 110914
In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CDS$!

5.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110921
Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Aufgabe 2 - 110922
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen $aundb$ $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:
Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Aufgabe 3 - 110923
Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.
Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Aufgabe 4 - 110924
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so dass die Gleichungen

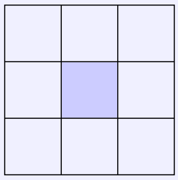
$$(1) \quad a + b = p_2 \qquad \text{und} \qquad (2) \quad a - b = p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

5.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110931
Günter erzählt:
"Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:
Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl."
Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Aufgabe 2 - 110932



In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei "Zeilensummen", die drei "Spaltensummen" und die zwei "Diagonalsummen" sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).
Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!

Aufgabe 3 - 110933
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Aufgabe 4 - 110934
In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB = CD = a$ und $BC = DA = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.
Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\angle AS2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

Aufgabe 5 - 110935
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Aufgabe 6 - 110936
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

5.14 XII. Olympiade 1972

5.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 9

Aufgabe 1 - 120911
Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Aufgabe 2 - 120912
Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Aufgabe 3 - 120913
Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2 : 5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von $30°$.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

Aufgabe 4 - 120914
Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

5.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 9

Aufgabe 1 - 120921
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 2 - 120922
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

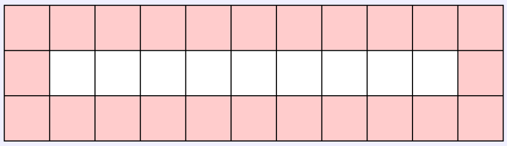
Aufgabe 3 - 120923
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Aufgabe 4 - 120924
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

5.14.3 III. Stufe 1972, Klasse 9

Aufgabe 1 - 120931
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

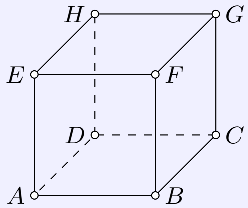
Aufgabe 2 - 120932



Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Aufgabe 3 - 120933



Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.
Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.

Aufgabe 4 - 120934
Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, den Rest mit 5 $\frac{km}{h}$. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, während der übrigen Zeit mit 5 $\frac{km}{h}$.
Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Aufgabe 5 - 120935
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\overparen{AB} + \overparen{CD} = \overparen{BC} + \overparen{DA}$$

Man beweise, dass dann $AC \perp BD$ gilt!

Aufgabe 6 - 120936
a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k,n,m) natürlicher Zahlen k,n,m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m+1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

5.15 XIII. Olympiade 1973

5.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130911
Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Aufgabe 2 - 130912
Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wieviel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

Aufgabe 3 - 130913
In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen. Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Aufgabe 4 - 130914
Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d.h., es gilt

$$n! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

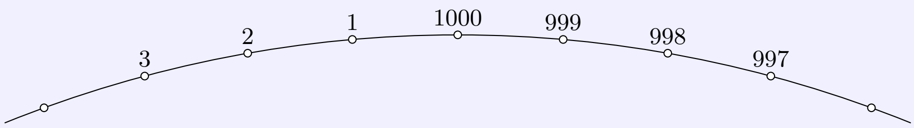
5.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130921
Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

Aufgabe 2 - 130922
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.
Beweisen Sie, dass D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Aufgabe 3 - 130923
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $AD = BC$; $AB > CD$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.
Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Aufgabe 4 - 130924
Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen.
Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

5.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130931
Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B. (25; 61), denn es gilt 52+9 = 61 und 16+9 = 25.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Aufgabe 2 - 130932
Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 130933
Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, dass PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $PC = AB = BC = CD = DE = EF$.
Man beweise, dass dann $\angle APF = 135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Aufgabe 4 - 130934
In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Aufgabe 5 - 130935
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $a, b, c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

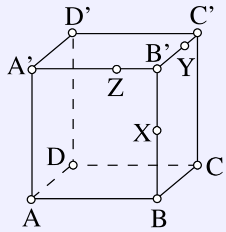
Aufgabe 6 - 130936
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
b) $BD' = CD' = a$,
c) $AD' \neq a$.
Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

5.16 XIV. Olympiade 1974

5.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140911
Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.



a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

Aufgabe 2 - 140912
Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Aufgabe 3 - 140913
An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

Aufgabe 4 - 140914
Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

5.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140921
An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Aufgabe 2 - 140922
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, dass dann $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ gilt.

Aufgabe 3 - 140923
Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Aufgabe 4 - 140924
AB sei eine in der Ebene ϵ gegebene Strecke der Länge a. In ϵ sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist.
In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ϵ errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass $CA = a\sqrt{2}$ und $BD = a\sqrt{3}$ gilt.

5.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140931
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:
Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

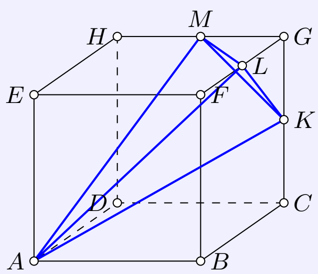
Aufgabe 2 - 140932
Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:
Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Aufgabe 3 - 140933
Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = AB$, $c = CD$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.
Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Aufgabe 4 - 140934
Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 5 - 140935
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P.
Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.
a) Man beweise, dass C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, dass g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

Aufgabe 6 - 140936



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG. Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.

5.17 XV. Olympiade 1975

5.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150911
Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

Aufgabe 2 - 150912
In

$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Aufgabe 3 - 150913
Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

Aufgabe 4 - 150914
Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

5.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150921
Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Aufgabe 2 - 150922

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.
a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!
Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z.B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

Aufgabe 3 - 150923
Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m \leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $MD = m$ gilt.
Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1 : 7$ verhält.
Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

Aufgabe 4 - 150924
Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $AB = c$, $BC = a$ und $\angle BAC = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel $\angle AC_2B$!

5.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150931
Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 2 - 150932
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$ und die Höhenlänge $AD = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, dass BC auf g liegt.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Aufgabe 3 - 150933
Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1,A_2), (B_1,B_2), (C_1,C_2), (D_1,D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!
A1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.
B1) $x - 5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B2) $x + 1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.
C1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C2) x ist die Zahl 389.
D1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen $307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397$.
D2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 4 - 150934
Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

Aufgabe 5 - 150935
Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Aufgabe 6 - 150936
Beweisen Sie, dass für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

5.18 XVI. Olympiade 1976

5.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 9

Aufgabe 1 - 160911
Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie" AG zur "Ziellinie" DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ... , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden. Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

(3) Wenn bereits ein "Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:

a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.

b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

Hinweis: P_{k+1} muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0; 0)$, $B(0; 14)$, $C(7; 21)$, $D(16; 21)$, $E(16; 18)$, $F(7; 18)$, $G(7; 0)$ einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2,..., 9$) ohne Begründung.

Aufgabe 2 - 160912
Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w.

Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Aufgabe 3 - 160913
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

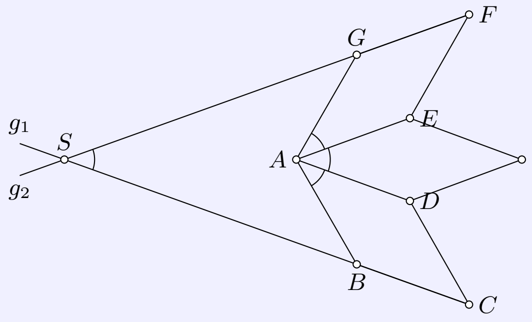
Aufgabe 4 - 160914
Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

5.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 9

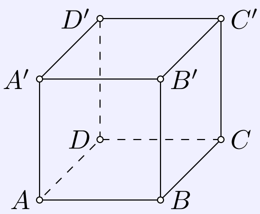
Aufgabe 1 - 160921



Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel $\angle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$.
Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:
"Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel $\angle BAD, \angle DAE$ und $\angle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\angle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."
Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 2 - 160922
Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,
b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.
Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.
Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

Aufgabe 3 - 160923



Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.
Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, dass der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen
a) minimale,
b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

Aufgabe 4 - 160924
In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{ccccc} \text{ab} & \text{X} & \text{ab} & = & \text{cad} \\ \text{Y} & & \text{Y} & & \text{Z} \\ \text{ae} & \text{X} & \text{ae} & = & \text{ffe} \\ \hline \text{ff} & \text{Y} & \text{ff} & = & \text{gg} \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.
Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen "+", "-", "·" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.
Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

5.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 9

Aufgabe 1 - 160931
Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Aufgabe 2 - 160932
Man beweise folgenden Satz:
Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a+1)\cdot(b+1) \geq 4 \qquad (1)$$

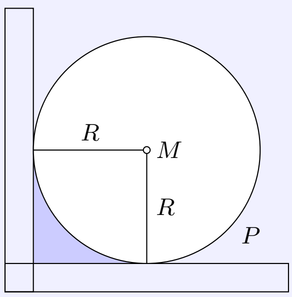
Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Aufgabe 3 - 160933
Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:
(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.
a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

Aufgabe 4 - 160934
Beweisen Sie, dass für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n-1)\cdot p^2+1$ Primzahl ist!

Aufgabe 5 - 160935
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.
Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Aufgabe 6 - 160936
Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.
a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

5.19 XVII. Olympiade 1977

5.19.1 I. Stufe 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170911
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Aufgabe 2 - 170912
Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.

Aufgabe 3 - 170913
Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Aufgabe 4 - 170914
Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.

(2) A wird ersetzt durch aAB.

(3) A wird ersetzt durch a.

(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

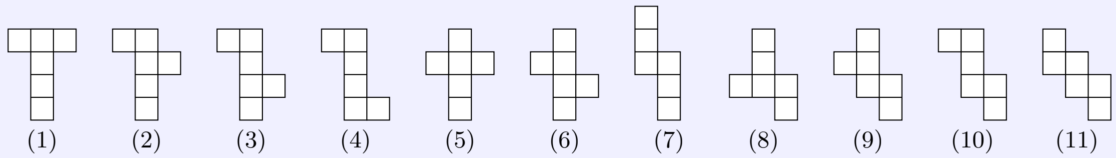
5.19.2 II. Stufe 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170921
Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y = f(x) = mx + n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.
a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

Aufgabe 2 - 170922
Jens sagt zu Christa: "Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält."
Nach kurzem Besinnen sagt Christa: "Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."
Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

Aufgabe 3 - 170923
Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, dass $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\angle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.
Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha = \beta$ und b) $\alpha = \beta$ gilt.

Aufgabe 4 - 170924
Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze
a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d.h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



5.19.3 III. Stufe 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170931
Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Aufgabe 2 - 170932
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe $110°$ hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächengleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Aufgabe 3 - 170933
In einem Dreieck ABC sei $AC = b = 13$ cm und $BC = a = 15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $CD = h_c = 12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

Aufgabe 4 - 170934
Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $BC = CD = DA = a$ sowie $AB > a$.
a) Beweisen Sie, dass die Diagonale AC den Innenwinkel $\angle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, dass $\angle DAB = 60°$ gilt!

Aufgabe 5 - 170935
Beweisen Sie folgende Aussage!
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 6 - 170936
Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leq x_2 + x_3$ und $y_1 \leq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leq d_2 + d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.
Wenn $d_1 \leq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leq x_2 + x_3$.

5.20 XVIII. Olympiade 1978

5.20.1 I. Stufe 1978, Klasse 9

Aufgabe 1 - 180911
Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 180912
Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

> Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
> Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Aufgabe 3 - 180913
In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Aufgabe 4 - 180914
Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

5.20.2 II. Stufe 1978, Klasse 9

Aufgabe 1 - 180921
Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: "Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben."
Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Aufgabe 2 - 180922
In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 3 - 180923
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\angle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Aufgabe 4 - 180924
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:
(1) z ist eine Primzahl.
(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.
(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.
(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

5.20.3 III. Stufe 1978, Klasse 9

Aufgabe 1 - 180931
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Aufgabe 2 - 180932
In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:
"Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist."

Aufgabe 3 - 180933
Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei.
Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt.
Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Aufgabe 4 - 180934
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis $1 : 3$.
Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Aufgabe 5 - 180935
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

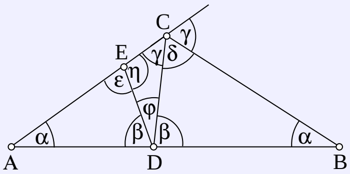
Aufgabe 6 - 180936
Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.
Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.
Man beweise, dass F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

5.21 XIX. Olympiade 1979

5.21.1 I. Stufe 1979, Klasse 9

Aufgabe 1 - 190911
In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\angle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



Aufgabe 2 - 190912

	3	1	0	1	2	4	2	
3								a
3								b
1								c
2								d
2								e
0								f
2								g
	A	B	C	D	E	F	G	

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Aufgabe 3 - 190913
Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Aufgabe 4 - 190914
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

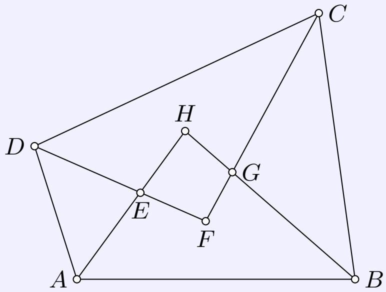
In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

5.21.2 II. Stufe 1979, Klasse 9

Aufgabe 1 - 190921
An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:
(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Aufgabe 2 - 190922
Die Zahlen in einem Zahlentripel (p, q, r) seien genau dann "Primzahldrillinge" genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel (p, q, r) gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 3 - 190923



Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:
Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.
Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel $180°$ beträgt!

Aufgabe 4 - 190924
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!
(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

5.21.3 III. Stufe 1979, Klasse 9

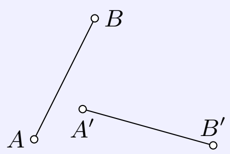
Aufgabe 1 - 190931
Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Aufgabe 2 - 190932
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $AB = a\sqrt{2}$ und $BC = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.
Beweisen Sie, dass die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

Aufgabe 3 - 190933
Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist); ...; die ersten $n - 1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Aufgabe 4 - 190934
a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

Aufgabe 5 - 190935



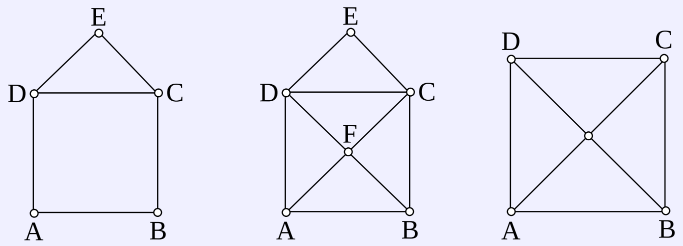
Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.
Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)!
Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!

Aufgabe 6 - 190936
Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird!
Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!

5.22 XX. Olympiade 1980

5.22.1 I. Stufe 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200911
Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

"In einem Zuge" soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Aufgabe 2 - 200912
Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

Aufgabe 3 - 200913

a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

Aufgabe 4 - 200914
Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4{,}5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

5.22.2 II. Stufe 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200921
Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, dass $(a+p)(b+p)(c+p) = 1980$ gilt!
Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Aufgabe 2 - 200922
a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+3}{x-1} < 0$ erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!
b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

Aufgabe 3 - 200923
Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1 > r_2$ gelte.
Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge PQ!

Aufgabe 4 - 200924
a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die die folgende Aussage gilt!
"Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen."
b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!
Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

5.22.3 III. Stufe 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200931
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.
Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f & 5 & g \\
h & i & 5 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
j & k & m & n & & & & & & & & & \\
p & 5 & q & r & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & s & t & u & v & & & & & & & & \\
 & w & x & y & z & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 2 - 200932
Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.
Beweisen Sie, dass dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

Aufgabe 3 - 200933
Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{3}$ cm, $PC = \sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.
Beweisen Sie, dass die Länge PD durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Aufgabe 4 - 200934
Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!
(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.
(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.
(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 5 - 200935
Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!
Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!
Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ gilt.

Aufgabe 6 - 200936
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm!
Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

5.23 XXI. Olympiade 1981

5.23.1 I. Stufe 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210911
Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Aufgabe 2 - 210912
Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Aufgabe 3 - 210913
Elsa behauptet:

> "Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981."

Ist Elsas Behauptung wahr?

Aufgabe 4 - 210914
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

5.23.2 II. Stufe 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210921
In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Aufgabe 2 - 210922
Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.
Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Aufgabe 3 - 210923
Beweisen Sie, dass reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &> 0, \\ x \cdot y \cdot z &> 0, \\ xy + xz + yz &> 0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

Aufgabe 4 - 210924
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.
Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, dass sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $ED = DB + EC$ gilt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

5.23.3 III. Stufe 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210931
Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:	(1) x ist eine zweistellige Zahl.
	(2) x ist kleiner als 1000.
Paar B:	(1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
	(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.
Paar C:	(1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
	(2) x ist durch 37 teilbar.
Paar D:	(1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
	(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!
Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Aufgabe 2 - 210932
Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = AD = 6$ cm und $a = AB > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.
Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Aufgabe 3 - 210933
Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

Aufgabe 4 - 210934
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm!
Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

Aufgabe 5 - 210935
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 6 - 210936
Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $AD = 13$ cm, $BD = 13$ cm geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.
Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

5.24 XXII. Olympiade 1982

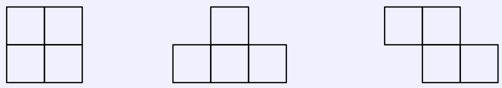
5.24.1 I. Stufe 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220911
Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

Aufgabe 2 - 220912
Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(a) (b) (c)

(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

a) Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!

b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen für $n = 6$ erfüllbar sind!

c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

Aufgabe 3 - 220913

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

Aufgabe 4 - 220914
In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, ..., A_n. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, ..., A_nS seien M_1, M_2, ..., M_n. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε.

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, ..., M_n schneide ε in B_2, B_3, ..., B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten B_1, B_2, ..., B_n, M_1, M_2, ..., M_n habe das Volumen V_K.

a) Beweisen Sie, dass alle Punkte M_1, M_2, .., M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!

b) Beweisen Sie, dass V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

5.24.2 II. Stufe 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220921
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) $n - 9$ ist eine Primzahl.
(2) $n^2 - 1$ ist durch 10 teilbar.

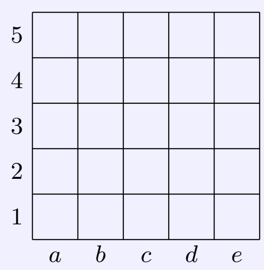
Aufgabe 2 - 220922
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2}$$
$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$
$$c = a^2 - (x^2 - y^2 z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

Aufgabe 3 - 220923
Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:
(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) es gilt $PR \perp QS$.
Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $PR < QS$, $PR = QS$, $PR > QS$ gilt!
Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Aufgabe 4 - 220924



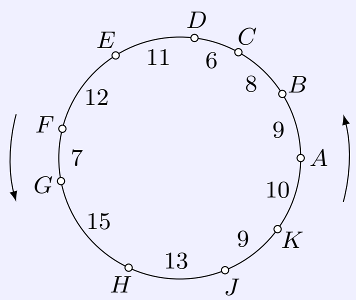
Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist.
Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

5.24.3 III. Stufe 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220931
Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a+b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

Aufgabe 2 - 220932
Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, dass der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt.
Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Aufgabe 3 - 220933



Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.
Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.
Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)
Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Aufgabe 4 - 220934
Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

Aufgabe 5 - 220935
Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, dass für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $PS^2 + QS^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweis:
1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B. PS, PQ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Aufgabe 6 - 220936
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge QR in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

5.25 XXIII. Olympiade 1983

5.25.1 I. Stufe 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230911
Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leq a \leq 10$ und $5 \leq b \leq 10$ gibt es folgende "Fingerregel":

> Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$.

Beweisen Sie, dass diese "Fingerregel" für alle genannten a und b gilt!

Aufgabe 2 - 230912
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

Aufgabe 3 - 230913
Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T_1', T_2', T_3' bezeichnen lassen, dass $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ und $T_3 \cong T_3'$ gilt.

Aufgabe 4 - 230914
Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke GH gibt und dass ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!

5.25.2 II. Stufe 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230921
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

Aufgabe 2 - 230922
Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt
(1) Es gilt $AB \parallel DC$.
(2) Es gilt $AB > DC$.
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.
(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ bzw. $\angle ABC$.
Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

Aufgabe 3 - 230923

$$\begin{array}{ccccc} & \square & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

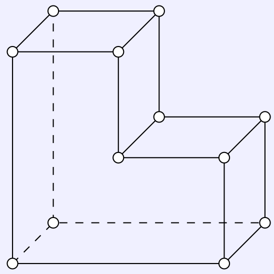
In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.
Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

Aufgabe 4 - 230924
Beweisen Sie:
Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

5.25.3 III. Stufe 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230931
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) x, y und z sind Primzahlen.
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
(3) Es gilt $x < y$.
(4) Es gilt $x + y = z$.

Aufgabe 2 - 230932



In der Abbildung ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.
Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!

Aufgabe 3 - 230933

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Aufgabe 4 - 230934
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$-5 \leq \frac{4x - 3}{2x + 1} < 6$$

Aufgabe 5 - 230935
In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

Aufgabe 6 - 230936
Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Welcher der drei Schüler hat recht?
Hinweis: Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1', D_2 \cong D_2', D_3 \cong D_3'$ gilt.

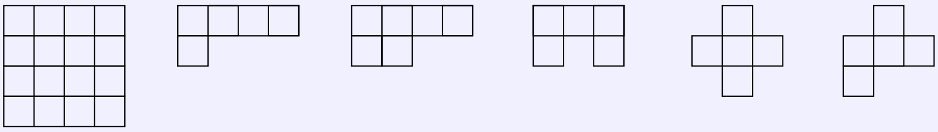
5.26 XXIV. Olympiade 1984

5.26.1 I. Stufe 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240911

a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$-Feldes möglich ist!



a) b) c) d) e) f)

Aufgabe 2 - 240912

Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

Aufgabe 3 - 240913

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D.

Beweisen Sie, dass dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!

Aufgabe 4 - 240914

Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und $\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest:

Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also $1 < \frac{2}{x-10}$;
für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$;
für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$.

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.
Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$.
Petra behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

5.26.2 II. Stufe 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240921
Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.
Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 2 - 240922
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die gilt:

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

Aufgabe 3 - 240923
Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte $BE = FC$ und $BE : EF = 41 : 11$.
Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.
Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

Aufgabe 4 - 240924
Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

5.26.3 III. Stufe 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240931
Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!
(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Aufgabe 2 - 240932
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Aufgabe 3 - 240933
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.
a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!
b) Ermitteln Sie den Abstand MN zwischen M und N!
c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand XY zwischen X und Y die Ungleichung $XY \geq MN$ erfüllt!

Aufgabe 4 - 240934
Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.
Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."
Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"
a) Beweise Ankes Aussage!
b) Beantworte Bernds Frage!

Aufgabe 5 - 240935
Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Aufgabe 6 - 240936
Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

5.27 XXV. Olympiade 1985

5.27.1 I. Stufe 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250911
Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die
a) durch 2,
b) durch 3,
c) durch 4,
d) durch 5,
e) durch 6
teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

Aufgabe 2 - 250912
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a{,}b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a{,}b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

Aufgabe 3 - 250913
Man beweise:

Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Aufgabe 4 - 250914
Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!

Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

5.27.2 II. Stufe 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250921
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) von natürlichen Zahlen a,b,c, für die $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$ gilt!

Aufgabe 2 - 250922
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.
Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.
Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?

Aufgabe 3 - 250923
Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

Aufgabe 4 - 250924
Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gilt!

5.27.3 III. Stufe 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250931
a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden.
(Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Aufgabe 2 - 250932
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt: Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist $z = (a + b)^2$.

Aufgabe 3 - 250933
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)!
Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

Aufgabe 4 - 250934
Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Aufgabe 5 - 250935
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $AB : A'B' = AS : SB'$ gilt!

Aufgabe 6 - 250936
a) Ist durch den Term

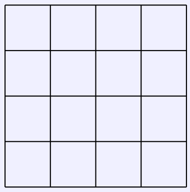
$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

5.28 XXVI. Olympiade 1986

5.28.1 I. Stufe 1986, Klasse 9

Aufgabe 1 - 260911



In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 2 - 260912
Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:
(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$
(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei D.
(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.
(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einen Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
b) Beweisen Sie:
Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE in Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

Aufgabe 3 - 260913
Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

(1) $x \leq y \leq z$ und

(2) $xyz = 1986$ gilt!

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau denn voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$; $z_1 \neq z_2$ gilt.

Aufgabe 4 - 260914
Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass die Lösung x der Gleichung $17x + n = 6x + 185$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

5.28.2 II. Stufe 1986, Klasse 9

Aufgabe 1 - 260921
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n+2}$$

eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 2 - 260922
Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9, \qquad b = 5x + 8, \qquad c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.
Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.
Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.
Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

Aufgabe 3 - 260923
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!
(1) Es gilt $b < c$.
(2) b und c sind zueinander teilerfremd.
(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.
(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.
(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Aufgabe 4 - 260924
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.
Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!
Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$!

5.28.3 III. Stufe 1986, Klasse 9

Aufgabe 1 - 260931
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2(a + b) = ab$ gilt!

Aufgabe 2 - 260932
In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)
Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_U P_V P_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Aufgabe 3 - 260933
Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$$

zugeordnet.
(A) Ermitteln Sie, wenn $a = -3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!
(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!
(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.
(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Aufgabe 4 - 260934
Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

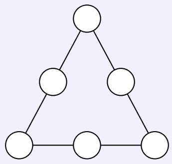
Aufgabe 5 - 260935
Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:
(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $AB > CD$.
(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ beträgt 90°.
Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $MN = \frac{1}{2} \cdot (AB - CD)$ gilt!

Aufgabe 6 - 260936
a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.
Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in Bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muss!
b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

5.29 XXVII. Olympiade 1987

5.29.1 I. Stufe 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270911



In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 2 - 270912

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einen Dominospiel gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Aufgabe 3 - 270913

Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

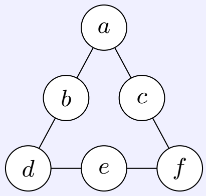
Aufgabe 4 - 270914

Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt $d = 2a - b$ genau dann, wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt!

5.29.2 II. Stufe 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270921



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Aufgabe 2 - 270922
Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Aufgabe 3 - 270923
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

5.29.3 III. Stufe 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270931

a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1987}^{11} = 1988 \qquad (1)$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ und $(x_1', x_2', ..., x_{1987}')$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x_1', x_2 \neq x_2', ..., x_{1987} \neq x_{1987}'$$

Aufgabe 2 - 270932

(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0, b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

Aufgabe 3 - 270933

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden.

Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASD$ sei g.

Beweisen Sie:

Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass g und h zueinander parallel sind.

Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Aufgabe 4 - 270934

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.

Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

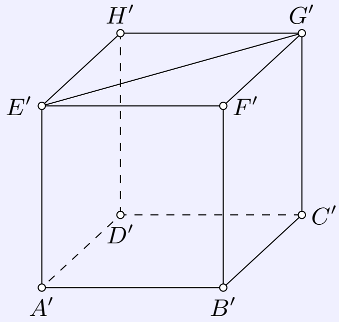
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

Aufgabe 5 - 270935

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 6 - 270936



Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.
a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, dass die Summe $CP_0 + P_0F$ kleiner ist als die Summe $CP + PF$ für jeden anderen Punkt P auf EG.
b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!
Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!
Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.

5.30 XXVIII. Olympiade 1988

5.30.1 I. Stufe 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280911
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

Aufgabe 2 - 280912
Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Aufgabe 3 - 280913
Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!

Aufgabe 4 - 280914
Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M4) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

5.30.2 II. Stufe 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280921
Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

Aufgabe 2 - 280922
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt ("Magisches Quadrat").
a) Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muss!
b) Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muss!

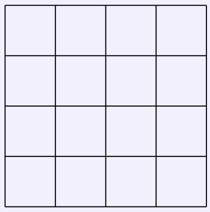
Aufgabe 3 - 280923
In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet.
Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $AD = b$.
Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

Aufgabe 4 - 280924
a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

5.30.3 III. Stufe 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280931
Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Aufgabe 2 - 280932



In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.
Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Aufgabe 3 - 280933
Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, dass die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

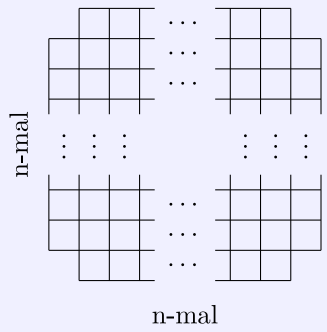
Aufgabe 4 - 280934
Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung

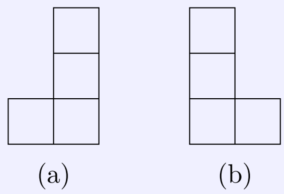
$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

gilt!

Aufgabe 5 - 280935
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Aufgabe 6 - 280936





Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

5.31 XXIX. Olympiade 1989

5.31.1 I. Stufe 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290911
Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.

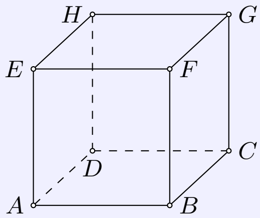
Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Aufgabe 2 - 290912
Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Aufgabe 3 - 290913
Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, numeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen lässt.

Aufgabe 4 - 290914



Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

   Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.

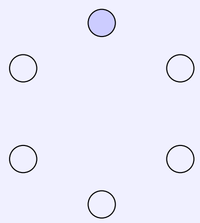
   (Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

5.31.2 II. Stufe 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290921
Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

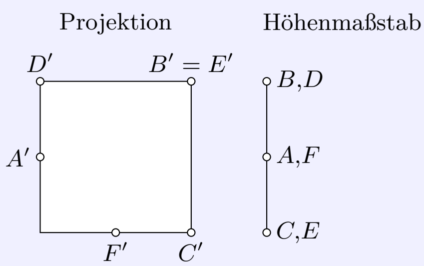
Aufgabe 2 - 290922



Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben.
Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.
Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen.
Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.
Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.
a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?
b) Jemand vermutet: "Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."
Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!
c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist: "Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

Aufgabe 3 - 290923
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

Aufgabe 4 - 290924



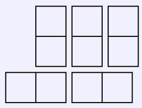
Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.
Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm.
Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!
b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!
Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!
Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!
c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y!
Beschreiben Sie diese Konstruktion!

5.31.3 III. Stufe 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290931
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.
Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\angle BAC$ der Größe 7° bilden.
Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.
Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

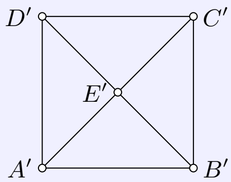
Aufgabe 2 - 290932



Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:
Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{\text{x} \mid \text{y}}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

Aufgabe 3 - 290933



Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:
(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.
(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ϵ ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
(4) Der Punkt D liegt "oberhalb" der Ebene ϵ im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.
(5) Der Punkt E liegt "oberhalb" der Ebene ϵ im Abstand a von ihr.
(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4}a^3$.
Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Aufgabe 4 - 290934
Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Aufgabe 5 - 290935
a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2-1) \cdot f(x+1) \qquad (1)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.
b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

Aufgabe 6 - 290936
Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$.
Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

5.32 XXX. Olympiade 1990

5.32.1 I. Stufe 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300911
Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d.h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z.B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z.B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als "Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die "Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Aufgabe 2 - 300912
Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

Aufgabe 3 - 300913
Beweisen Sie, dass in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 4 - 300914
Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.

Blick aus suedlicher Richtung   Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen. Christoph korrigierte ihn: "Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren.

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

5.32.2 II. Stufe 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300921
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

Aufgabe 2 - 300922
Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\angle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

Aufgabe 3 - 300923
a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z.B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

Aufgabe 4 - 300924
Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet:
Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen.
Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen $0°$ und $360°$ feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die m Strahlen so zeichnen, dass sich dabei a) möglichst wenige,
b) möglichst viele
verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

5.32.3 III. Stufe 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300931
Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.
Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

Aufgabe 2 - 300932
Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3 - 300933
Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Aufgabe 4 - 300934
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis:
Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

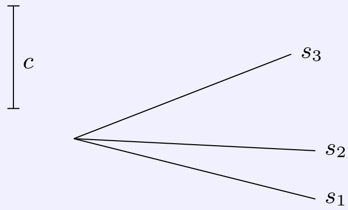
Aufgabe 5 - 300935 = 321034
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 6 - 300936

Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3.

Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\angle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\angle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.

a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\angle(s_1, s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und dass seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

5.33 XXXI. Olympiade 1991

5.33.1 I. Stufe 1991, Klasse 9

Aufgabe 1 - 310911
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

Aufgabe 2 - 310912
Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{cccccc} & J & A & C & K & E \\ + & & H & O & S & E \\ \hline = & A & N & Z & U & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & M & A & N & N \\ + & F & R & A & U \\ \hline = & P & A & A & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & M & I & R \\ + & E & M & I & R \\ \hline = & R & E & I & M \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

Aufgabe 3 - 310913
Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Aufgabe 4 - 310914

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.

Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

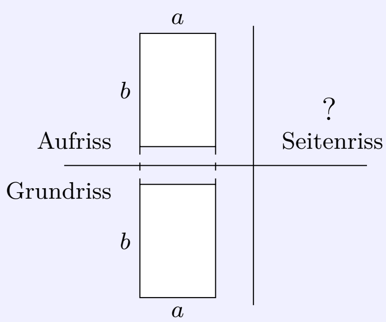
Sind hiernach die die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

5.33.2 II. Stufe 1991, Klasse 9

Aufgabe 1 - 310921
a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n + 1$ durch 10 teilbar sind!
Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!
b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!
Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

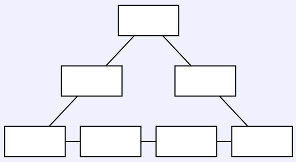
Aufgabe 2 - 310922
Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.
Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel!
Hinweis:
Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.
Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Aufgabe 3 - 310923



Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!
Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)
Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 4 - 310924



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

5.33.3 III. Stufe 1991, Klasse 9

Aufgabe 1 - 310931
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Aufgabe 2 - 310932
In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies "durch" für den Strich! Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist $\frac{5}{20} = 0{,}25$.
Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Aufgabe 3 - 310933
a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.
b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$ $(n > 3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2A_3...A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.
Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!
Hinweis:
Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

Aufgabe 4 - 310934
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F.
Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck DEF gleichseitig sei.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $AD = BE = CF$ folgt.

Aufgabe 5 - 310935
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $|x+y| + |x-y| = 4$ erfüllen.

Aufgabe 6 - 310936
Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:
Es soll A links von B, A links von C, A links von D, E links von F, E links von G, E links von H, E links von J stehen.
Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?
Hinweise:
In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.
Die Formulierung "X links von Y" schließt nicht aus, dass zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

5.34 XXXII. Olympiade 1992

5.34.1 I. Stufe 1992, Klasse 9

Aufgabe 1 - 320911
Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

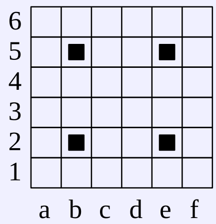
Britta meint: "Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z.B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen."

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

Aufgabe 2 - 320912
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 1$ sein.

Aufgabe 3 - 320913



Auf einem 6×6-Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, daß er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!

b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, daß es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, daß es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

Aufgabe 4 - 320914
Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von ABC ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck ABC der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks ABC.

5.34.2 II. Stufe 1992, Klasse 9

Aufgabe 1 - 320921
Ein pythagoreisches Zahlentripel $(a;b;c)$ besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a,b,c, für die $a^2+b^2=c^2$ gilt.
a) Geben Sie drei verschiedene Tripel $(a;b;c)$ mit $a \leq b$ an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!
b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a=b$?

Aufgabe 2 - 320922
In der Ebene seine vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.
a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?
b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Aufgabe 3 - 320923
Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.
Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?
Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Aufgabe 4 - 320924
Auf einer Geraden g seien A,B,C drei Punkte; B liege zwischen A und C.
Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über die Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $AB=a$ und $BC=b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ und BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

5.34.3 III. Stufe 1992, Klasse 9

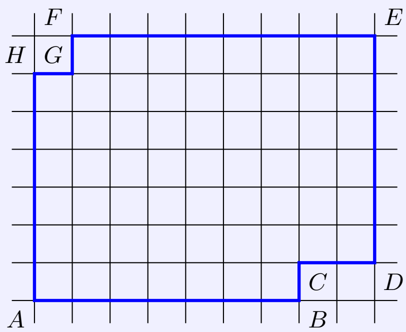
Aufgabe 1 - 320931
In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.
Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:
A sagt zu B: "Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: "Du bist von anderer Sorte als ich."
Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?
Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Aufgabe 2 - 320932
Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1993$ gilt, gibt es insgesamt?

Aufgabe 3 - 320933
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.
a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = AB$, $b = BC$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

Aufgabe 4 - 320934
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p die folgende Aussage $(*)$ gilt!
Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. $(*)$

Aufgabe 5 - 320935



Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.
Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei A mit E zur Deckung kommt.
Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.
Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

Aufgabe 6 - 320936
a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \tag{1}$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

5.35 XXXIII. Olympiade 1993

5.35.1 I. Stufe 1993, Klasse 9

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 330911 = 331011
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

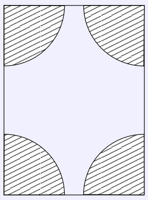
Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 2 - 330912 = 331012
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Aufgabe 3 - 330913 = 331013
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Aufgabe 4 - 330914 = 331014



Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Aufgabe 5 - 330915 = 331015
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Aufgabe 6 - 330916 = 331016
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

5.35.2 II. Stufe 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330921
Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.
Wie heißt die dreistellige Zahl?

Aufgabe 2 - 330922
Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.
Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.
Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.
Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Aufgabe 3 - 330923

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:
1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.
2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe O darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

Aufgabe 4 - 330924
Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt! Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

5.35.3 III. Stufe 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330931
Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2 - 330932
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet: Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.
Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Aufgabe 3 - 330933 = 331033
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus.
Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 4 - 330934

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{\ddot{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:
Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

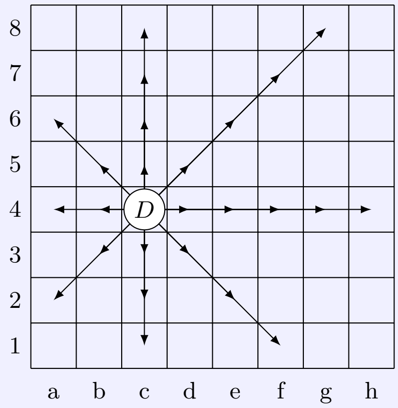
Aufgabe 5 - 330935
Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen $n + 1$, $n + 10$ und $n + 55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Aufgabe 6 - 330936
Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:

Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

5.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330941 = 331041



Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:
(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Aufgabe 2 - 330942
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen $a + b \geq 101$, $a + c \leq 101$, $a + b + c \geq 201$ gelten!

Aufgabe 3 - 330943 = 331043
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Aufgabe 4 - 330944
Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 5 - 330945 = 331045
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

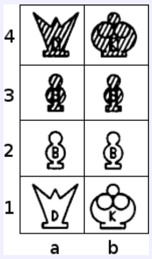
Aufgabe 6 - 330946
Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden:
Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:
Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.
Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muss!

5.36 XXXIV. Olympiade 1994

5.36.1 I. Stufe 1994, Klasse 9

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 340911 = 341011



Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, daß

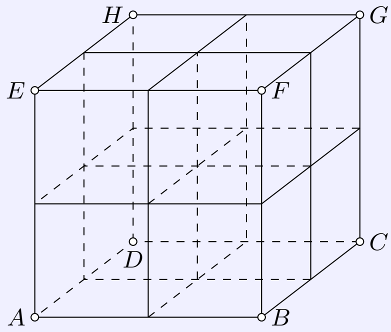
a) das Spiel unentschieden endet,

b) Weiß gewinnt,

c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, daß die drei Behauptungen zutreffen.

Aufgabe 2 - 340912 = 341012



Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel. Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.
Wieviele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?

Aufgabe 3 - 340913 = 341013
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Aufgabe 4 - 340914 = 341014
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, daß in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Aufgabe 5 - 340915 = 341015
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, daß beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Aufgabe 6 - 340916 = 341016
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x|-2|\,, \\ f_2(x) &= |||x|-2|-2|\,, \\ &\ldots \end{aligned}$$

allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

5.36.2 II. Stufe 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340921
Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.
Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genanten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 2 - 340922
Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.
Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.
Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Aufgabe 3 - 340923
Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:
Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot AB$ bis zum Punkt S verlängert,
die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot BC$ bis zum Punkt T verlängert,
die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot CD$ bis zum Punkt U verlängert,
die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot DA$ bis zum Punkt V verlängert.
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

Aufgabe 4 - 340924
Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet.
Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum "rollen, ohne zu gleiten".
(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest u.s.w.).
a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).
Wie lang ist dabei der Weg, den
- der Punkt A,
- der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
- der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates
zurücklegt?

b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene "volle Umrundung des Dreiecks ABC" durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.
Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.
- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seien eigenen Mittelpunkt M wurden dabei insgesamt ausgeführt?

5.36.3 III. Stufe 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340931
Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC.
Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.
(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel $\angle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\angle BXC$.
Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.
Hat Christa recht?

Aufgabe 2 - 340932 = 341031
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Aufgabe 3 - 340933 = 341032
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Aufgabe 4 - 340934 = 341034
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Aufgabe 5 - 340935
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Aufgabe 6 - 340936
Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind.
Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:
Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.
Hinweis:

Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.

In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

5.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340941 = 340841
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.
Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 2 - 340942 = 341041
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 340943 = 341042
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Aufgabe 4 - 340944 = 340844
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte		7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert		7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.
Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.
Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.
1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.
Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.
Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Aufgabe 5 - 340945 = 341045
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Aufgabe 6 - 340946 = 340846
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung $|x - 30| + |y - 10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

6 Aufgaben - Klassenstufe 10

6.1 Vorolympiade 1960

6.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 10

Aufgabe 1 - V601001
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

Aufgabe 2 - V601002
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss die Verpflegungsbombe ausgelöst werden, damit sie ihr Ziel erreicht? ($g = 10$ m/s^2)

Aufgabe 3 - V601003
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Aufgabe 4 - V601004
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Aufgabe 5 - V601005
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

"Sie heißt III Z ... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Aufgabe 6 - V601006
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vom streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

Aufgabe 7 - V601007
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Aufgabe 8 - V601008
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Aufgabe 9 - V601009
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

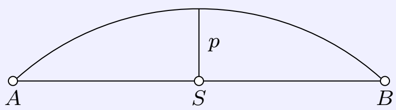
Aufgabe 10 - V601010
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Aufgabe 11 - V601011
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?

Aufgabe 12 - V601012
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

Aufgabe 13 - V601013
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Aufgabe 14 - V601014



Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s/p)$?

Aufgabe 15 - V601015
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.

Aufgabe 16 - V601016
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Aufgabe 17 - V601017

Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:

a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.

6.2 Vorolympiade 1961

6.2.1 I. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611011
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Aufgabe 2 - V611012
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} &a) \quad \sin x = \sin 69° \\ &b) \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32°\right) = 1 \\ &c) \quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - V611013
Peter sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis!
Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 - V611014
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie b, c und α!

Aufgabe 5 - V611015
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Aufgabe 5 - V611016
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

6.2.2 II. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611021
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

Aufgabe 2 - V611022
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm \frac{1}{2}^\circ$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

Aufgabe 3 - V611023
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

Aufgabe 4 - V611024
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611025
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

6.2.3 III. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611031
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

Aufgabe 2 - V611032
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

Aufgabe 3 - V611033
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 75 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Aufgabe 4 - V611034
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611035
Unter der Zahl $n!$, gelesen "n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

6.3 I. Olympiade 1961

6.3.1 I. Stufe 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011011
Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: $AB = c = 87{,}51$ m, $\angle CAB = \alpha = 93{,}42°$.
Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!

Aufgabe 2 - 011012
In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genau soviel Gas erzeugt wie im zaristischen Russland während des gesamten Jahres 1913.
Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!

Aufgabe 3 - 011013
Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in km/h)?
b) Wie lang ist der Zug?

Aufgabe 4 - 011014
Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht.
Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 011015
Es ist
a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist;
b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
Ist dieser Punkt stets vorhanden? Gibt es nur einen solchen Punkt?

Aufgabe 6 - 011016
Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

6.3.2 II. Stufe 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011021
Im Jahre 1970 sollen in der Sowjetunion mindestens 900 Milliarden kWh und 1980 wenigstens 2700 Milliarden kWh Elektroenergie erzeugt werden. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1475 Milliarden kWh bzw. 2230 Milliarden kWh an.
Wann würde die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?

Aufgabe 2 - 011022
An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen $a = 120$ mm, $b = 60$ mm und $c = 17$ mm soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine. Folgende Einstellungen sind möglich:
(1) 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm,
(2) 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm.

a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?
b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen $a = 150$ mm, $b = 50$ mm, $c = 17$ mm?
Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.

Aufgabe 3 - 011023
Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen? Die Behauptung ist zu begründen!

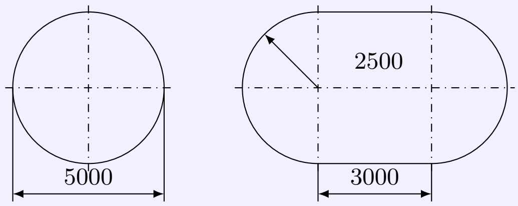
Aufgabe 4 - 011024
Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreiecksseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, dass das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 011025
Gegeben ist die Zahl $9^{(9^9)}$.
a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden.)
b) Wie lang müsste der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?
c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?

6.3.3 III. Stufe 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011031
Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU wurde über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft berichtet, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben.
In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais.
Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha.
Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?

Aufgabe 2 - 011032



In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“ in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (s. Abbildung) und ein Leergewicht von 30 Mp.
a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke?
(Wichte des Stahls 7,85 $\frac{p}{cm^3}$)

b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Aufgabe 3 - 011033
In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel.
Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 4 - 011034
Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Ziffernblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Ziffernblattes verläuft.
Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zur gleichen Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Konstruieren Sie diese Kurve für den folgenden Fall:
Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5$ cm (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich so groß gewählt)!
Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenziffernblattes.

Aufgabe 5 - 011035
Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

6.3.4 IV. Stufe 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011041
Wie auf dem XXII. Parteitag der KPdSU mitgeteilt wurde, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8 fache steigen.
Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) soll stark anwachsen, sie soll auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2 fache.
a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?
b) Wieviel Prozent würde er im Jahre 1980 betragen?

Aufgabe 2 - 011042
Auf einem Fluss mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück.
Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.
a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?
b) Welches Ergebnis erhält man für $s = 250$ m, $v = 150\ \frac{m}{min}$ und $c = 250\ \frac{m}{min}$?

Aufgabe 3 - 011043
Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Berechnen Sie s_2 und s_3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Aufgabe 4 - 011044
Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie BC teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 5 - 011045
Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 40°$.
Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll! Die Konstruktion ist zu begründen!
Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)

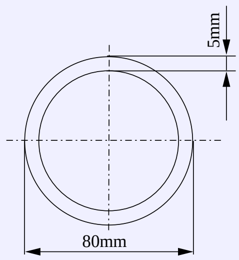
6.4 II. Olympiade 1962

6.4.1 I. Stufe 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021011
Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m.

Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m. Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

Aufgabe 2 - 021012



Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben ($d = 80$ mm, $h = 15$ mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung).

Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?

Aufgabe 3 - 021013
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.
Es ist zu beweisen, dass für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt, stets

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ist, wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!

Aufgabe 4 - 021014
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.
a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle)!
b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle)?

Aufgabe 5 - 021015
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Aufgabe 6 - 021016
Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;
b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

6.4.2 II. Stufe 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021021
Die in einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4%. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6% übererfüllt.
Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

Aufgabe 2 - 021022
In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden.
Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.
Wie groß muss der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8 \frac{p}{cm^3}$)

Aufgabe 3 - 021023
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

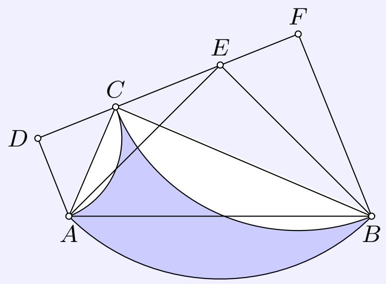
immer eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 4 - 021024
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E.
Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positivem Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, dass das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

Aufgabe 5 - 021025
Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

6.4.3 III. Stufe 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021031



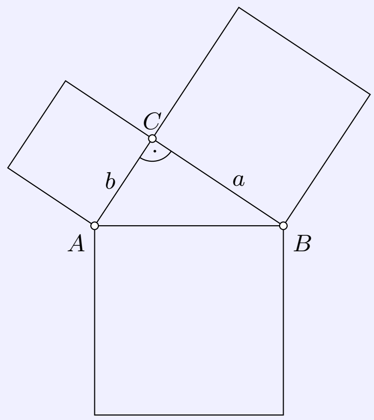
Vergleichen Sie die Flächeninhalte der grauen Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!
(Die Dreiecke $\triangle ACD, \triangle ABE$ und $\triangle CBF$ sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)

Aufgabe 2 - 021032
Berechnen Sie:

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128$$

Aufgabe 3 - 021033
Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 4 - 021034



Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.
Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!

Aufgabe 5 - 021035
Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Aufgabe 6 - 021036
Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_g bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen:
Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen.
Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Fällt man von E aus das Lot auf die Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, dass EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_g angibt.
a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!
b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von $8\Omega, 10\Omega, 12\Omega$ parallel geschaltet werden?

6.4.4 IV. Stufe 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021041
Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ ist!

Aufgabe 2 - 021042
Beweisen Sie, dass für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

Aufgabe 3 - 021043
Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von $60°$ wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, dass die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)

Aufgabe 4 - 021044
Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

Aufgabe 5 - 021045
Beweisen Sie, dass die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

Aufgabe 6 - 021046
Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass eine quadratische Schnittfigur entsteht.
a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

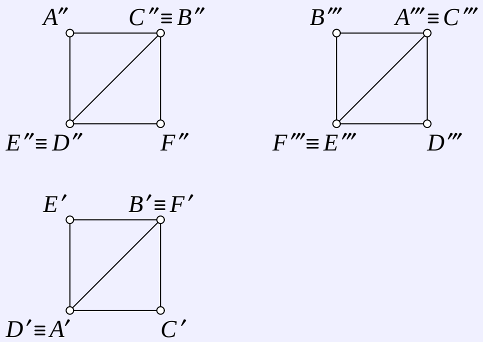
6.5 III. Olympiade 1963

6.5.1 I. Stufe 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031011
Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4235 g.
Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule? (Dichte des Kupfers $\rho = 8{,}93$ g/cm^3.)

Aufgabe 2 - 031012
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 3 - 031013



Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriss, Aufriss und Seitenriss zeigt ($a = 6$ cm)!

Aufgabe 4 - 031014
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, dass ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.
a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus! b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

Aufgabe 5 - 031015
Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{oder} \quad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 6 - 031016
Beim Fußball-Toto ist auf dem Tippschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird. Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten:
Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tippscheine müsste jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte? Der Lösungsweg ist zu begründen.

6.5.2 II. Stufe 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031021
a) Beweisen Sie, dass die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Aufgabe 2 - 031022
In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.
a) Es ist zu beweisen, dass stets $a + h_a \geq b + h_b$ ist!
b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 3 - 031023
Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

Aufgabe 4 - 031024
In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis $1 : 2$ (von der Spitze aus) teilt.
Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius der Kugel?

Aufgabe 5 - 031025
Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

6.5.3 III. Stufe 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031031
Man löse die Gleichung $\lg(2x+1) - \lg x = 2$.

Aufgabe 2 - 031032
Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)

Aufgabe 3 - 031033
Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0, b > 0$). Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308. Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
Wie heißen die Zahlen a und b?

Aufgabe 4 - 031034
Man zeige, dass für jede natürliche Zahl n der Term $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist!

Aufgabe 5 - 031035
Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, dass sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

Aufgabe 6 - 031036
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt:

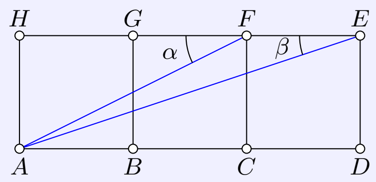
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$

und $x > 2, y > 2$.

6.5.4 IV. Stufe 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031041
Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 $\frac{km}{h}$ auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Aufgabe 2 - 031042



Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung.
Es ist zu beweisen, dass $\alpha + \beta = 45°$ ist!

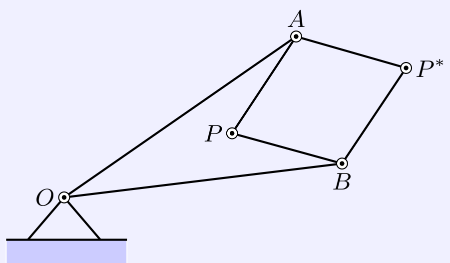
Aufgabe 3 - 031043
Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.
Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Aufgabe 4 - 031044
Wieviel Endnullen hat das Produkt

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdot ... \cdot (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdot ... p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)$$

Dabei sind $p_1, p_2, p_3, ..., p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Aufgabe 5 - 031045



Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB (mit $OA = OB$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $OA > AP$.
Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, dass das Produkt der Entfernungen $OP = r$ und $OP^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.

Aufgabe 6 - 031046
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

6.6 IV. Olympiade 1964

6.6.1 I. Stufe 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041011
In einem Betrieb, in dem Elektromotoren montiert werden, können durch die Anschaffung einer neuen Fließbandanlage, deren Kosten 105000 MDN betragen, die Lohnkosten je Motor um 0,50 MDN und die Gemeinkosten um jährlich 8800 MDN gesenkt werden.
a) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit die Kosten der neuen Anlage bereits in drei Jahren durch die Einsparungen an Löhnen und Gemeinkosten gedeckt werden?
b) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit darüber hinaus noch ein zusätzlicher Gewinn von jährlich 10000 MDN entsteht?

Aufgabe 2 - 041012
In der Aufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & & V & A & T & E & R \\ + & M & U & T & T & E & R \\ \hline & E & L & T & E & R & N \end{array}$$

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Geben Sie sämtliche Lösungen an, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren geben kann!

Aufgabe 3 - 041013
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.
a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Drachenviereck ist, wenn das Sehnenviereck ein Trapez ist! b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Aufgabe 4 - 041014
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder (Kantenlänge 6 cm).
a) Stellen Sie das Tetraeder im dimetrischen Verfahren dar!
b) Beweisen Sie, dass die Gegenkanten (Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben) eines regelmäßigen Tetraeders orthogonal sind!

Aufgabe 5 - 041015
Die Zahl $2^{3217} - 1$ wurde als Primzahl ermittelt.
a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!
b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Aufgabe 6 - 041016
a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

6.6.2 II. Stufe 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041021
Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:

a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.

b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.

c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

Aufgabe 2 - 041022
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten (ohne Benutzung von Logarithmentafel oder Rechenstab):

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 32 - 5 \cdot \lg 25$$

Aufgabe 3 - 041023
Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.
Man beweise, dass das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke flächengleich sind.

Aufgabe 4 - 041024
Der Weg von einem Ort A nach einem Ort B ist 11,5 km lang und führt zuerst bergauf, dann verläuft er auf gleicher Höhe und schließlich bergab. Ein Fußgänger, der von A nach B ging, legte diesen Weg in 2 h 54 min zurück.
Für den Rückweg auf gleichem Kurs brauchte er 3 h 6 min. Dabei ging er jeweils bergauf mit einer Geschwindigkeit von $3\frac{km}{h}$, auf dem Mittelteil mit einer Geschwindigkeit von $4\frac{km}{h}$ und bergab mit $5\frac{km}{h}$.
Wie lang sind die einzelnen Teilabschnitte, wenn man voraussetzt, dass auf jedem Teilabschnitt die jeweilige Geschwindigkeit konstant war?

6.6.3 III. Stufe 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041031
Ein Fußgänger geht (mit konstanter Geschwindigkeit) um 9.00 Uhr von A nach dem 12,75 km entfernten B.
Auf der gleichen Straße fährt um 9.26 Uhr ein Straßenbahnzug von A nach B ab. Er überholt den Fußgänger um 9.36 Uhr und fährt nach 4 Minuten Aufenthalt in B wieder zurück. Dabei begegnet er dem Fußgänger um 10.30 Uhr.

a) Wieviel Kilometer legen der Fußgänger und der Straßenbahnzug durchschnittlich in der Stunde zurück?

b) In welcher Entfernung von A überholt der Straßenbahnzug den Fußgänger, und wo begegnet er ihm bei der Rückfahrt?

Aufgabe 2 - 041032
Eine ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl.
Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?

Aufgabe 3 - 041033
Gegeben sind Strecken von den Längen $a = 5$, $b = 4$ und $c = 1$.
Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den algebraischen Ausdruck

$$x = \frac{a^2 + b^2}{3c}$$

Aufgabe 4 - 041034
Von sechs Schülern einer Schule, die an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teilnahmen, erreichten zwei die volle Punktzahl. Die Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:
1) A und C,
2) B und F,
3) F und A,
4) B und E,
5) D und A.
Nun wissen wir, dass in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.
Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?

Aufgabe 5 - 041035
Ist die folgende Aussage richtig? Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

Aufgabe 6 - 041036
Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhe h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.
Man beweise: $a + b + c + d = h$.

6.6.4 IV. Stufe 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041041
Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden.
Es stehen drei verschiedene Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Aufgabe 2 - 041042
Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

Aufgabe 3 - 041043
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Aufgabe 4 - 041044
Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit $\angle ACB = R$ und ein beliebiger Punkt M auf der Hypotenuse AB. Beweisen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2$$

Aufgabe 5 - 041045
Die Länge der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante wird eine Ebene ϵ so gelegt, dass sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei einander nicht schneidenden Kanten verläuft.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder!

Aufgabe 6 - 041046
In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

- 120 Schüler die Zeitschrift "Technikus"
- 90 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen"
- 180 Schüler die Zeitschrift "Die Trommel"
- 60 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Technikus"
- 16 Schüler die Zeitschriften "Technikus" und "Fröhlichsein und Singen"
- 24 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Fröhlichsein und Singen"
- 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?
b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig? II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

6.7 V. Olympiade 1965

6.7.1 I. Stufe 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051011
Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!
Weisen Sie nach, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Aufgabe 2 - 051012
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Quadratseiten oder deren Verlängerungen gleich 4 ist!

Aufgabe 3 - 051013
Wie verhält sich das Maß der Oberfläche eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zum Maß der Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, wenn das Maß der Rauminhalte beider Körper gleich ist?
Dabei werden bei beiden Figuren gleiche Maßeinheiten zugrundegelegt.

Aufgabe 4 - 051014
Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$, $|v| < |c|$. Es ist zu beweisen, dass dann gilt:

$$\left| \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \right| < |c|$$

6.7.2 II. Stufe 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051021
Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen DB des Parallelogramms $ABCD$. Punkt F sei derjenige Punkt auf AD, für den $|DA| : |DF| = 3 : 1$ gilt.
Wie verhält sich das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks ΔDFE zu dem des Vierecks $ABEF$, wenn man gleiche Maßeinheiten zugrundelegt?

Aufgabe 2 - 051022
Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!

c) Um wieviel Prozent ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)

d) Um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Genauigkeit wie bei c)

Aufgabe 3 - 051023
Wenn gilt $0 < b < a$ (1) und $a^2 + b^2 = 6ab$ (2) dann ist

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

Aufgabe 4 - 051024
Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt.
Wieviel Autobusse, jeder Art sind zu bestellen?

6.7.3 III. Stufe 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051031
Weisen Sie nach, dass alle Zahlen

$$1331; 1030301; 1003003001; ...; 1\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}1$$

Kubikzahlen sind!

Aufgabe 2 - 051032
a) Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e+f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α das Maß des Winkels $\angle DAB$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 3 - 051033
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, b und c für die gilt: $a + bc = (a + b)(a + c)$.

Aufgabe 4 - 051034
Beweisen Sie, das $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!

Aufgabe 5 - 051035
Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

1. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung

$$\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

(mindestens) eine Lösung.

2. Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (1). (Diskussion)

Aufgabe 6 - 051036
Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.
Man beweise, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes Punktes P auf der äußeren Kreislinie von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises konstant ist.

6.7.4 IV. Stufe 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051041
Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.
Man zeige, dass in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Aufgabe 2 - 051042
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10cm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
Dabei ist h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\angle BAC$ und β das Maß des Winkels $\angle CBA$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

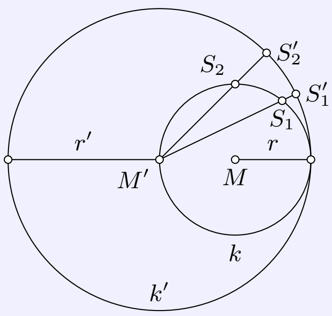
Aufgabe 3 - 051043
Man beweise folgenden Satz:
Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M.
Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.
Anmerkung:
Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

Aufgabe 4 - 051044
Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100!

Aufgabe 5 - 051045
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen:

$$[\sin(x - y) + 1] \cdot [2\cos(2x - y) + 1] = 6$$

Aufgabe 6 - 051046
Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.
Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!



Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!
Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, dass die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.

6.8 VI. Olympiade 1966

6.8.1 I. Stufe 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061011
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten der Länge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ sind im Inneren um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius von der Länge $r = \frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!

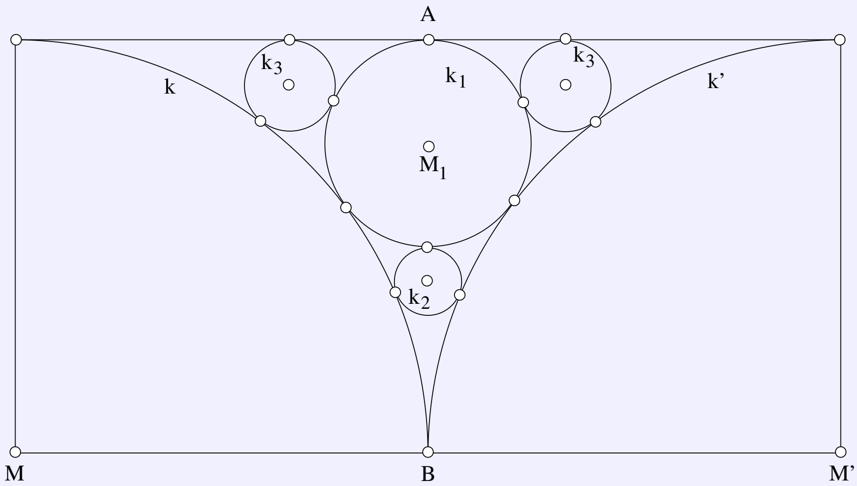
b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt der Flächeninhalt I_K?

Aufgabe 2 - 061012
Wieviel natürliche Zahlen $n < 1000$ gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Aufgabe 3 - 061013

In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise auf. Die Längen der Radien r und r' der Kreise k bzw. k' seien bekannt, und es ist $r = r'$.

Berechnen Sie die Längen r_1, r_2 und r_3 der Radien der Kreise k_1, k_2 und k_3!



Aufgabe 4 - 061014
Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden.

A sagte: "Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter." Nach kurzem Überlegen gratuliert ihm daraufhin B zum Geburtstag.

a) Woher wusste B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?

b) Wann wurde A geboren?

6.8.2 II. Stufe 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061021
Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

Aufgabe 2 - 061022
Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$). Man beweise, dass dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

Aufgabe 3 - 061023
Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so dass die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

Aufgabe 4 - 061024
Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verführt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.

a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenen Oktaeder zueinander?
b) Wie verhalten sich die Volumina von Oktaeder und einbeschriebenen Würfel zueinander?
c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?
d) Wie verhalten sich im zweiten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

6.8.3 III. Stufe 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061031
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$. Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A,B,C,G,H,E von der Diagonalen DF!

Aufgabe 2 - 061032
Zeigen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets gilt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{9}{a+b+c}$$

Aufgabe 3 - 061033
Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:

$$AB = 30, AE = 63, AF = 50, BF = 40, CD = 49, CE = 200, DF = 38$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?

Aufgabe 4 - 061034
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung

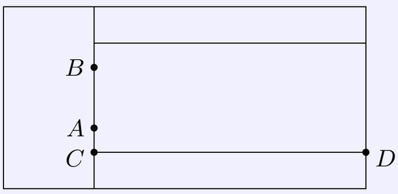
$$x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$$

eine in x quadratische Gleichung ist, die
a) eine Doppellösung hat!
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

Aufgabe 5 - 061035
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} > 1$$

Aufgabe 6 - 061036



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen.
Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\angle APB$ zu verstehen. Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

Anmerkung: Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

6.8.4 IV. Stufe 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061041
Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$

durch 30 teilbar.

Aufgabe 2 - 061042
Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ϵ und ϵ_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ΔABC, das in der Ebene ϵ liegt.
Die Fußpunkte der Lote von A,B,C auf ϵ_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$.
Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{\Delta A_1B_1C_1}$?

Aufgabe 3 - 061043
In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ΔABC; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR so, dass P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

Anita glaubt, dass die Aufgabe nicht für jedes Dreieck ΔABC lösbar ist.
Berthold ist der Meinung, dass es für jedes Dreieck ΔABC genau eine Lösung gibt.
Claus nimmt an, für jedes Dreieck ΔABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke ΔPQR, die Lösung sind, sind einander kongruent.
Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck ΔABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck ΔABC mit der Eigenschaft, dass nicht alle Dreiecke ΔPQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Aufgabe 4 - 061044
Gegeben sei ein Dreieck ΔABC; wie üblich sei $BC = a$, $CA = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\angle ACB$.
Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

Aufgabe 5 - 061045
Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung genügen:

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$$

Aufgabe 6 - 061046
Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100$$

an! Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

6.9 VII. Olympiade 1967

6.9.1 I. Stufe 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071011
Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, dass 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist.

Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: "Ich kann sogar beweisen, daß keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens läßt sich auch beweisen, dass unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist."

Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar faßt dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Aufgabe 2 - 071012
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Seiten folgende Längen (in cm) haben: $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$. Die Seite $\overline{AB}$ ist durch einen Punkt T so zu teilen, dass die Umfänge der Dreiecke $\triangle ATC$ und $\triangle TBC$ gleichlang sind.

Der Flächeninhalt (in cm^2) des Dreiecks $\triangle TBC$ ist zu berechnen!

Aufgabe 3 - 071013
Ein Mathematiker hat den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wusste er allerdings noch, dass sie eine durch 13 teilbare dreiziffrige Zahl war und dass sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.

Geben Sie alle diese Zahlen an!

Aufgabe 4 - 071014
Herr X stellt am 30.05.1967 fest, dass er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazu setzt. Außerdem bemerkt er, daß die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist.

Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?

6.9.2 II. Stufe 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071021
In

$$\begin{array}{cccccc} & F & U & E & N & F \\ + & & Z & W & E & I \\ \hline S & I & E & B & E & N \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wie viele Lösungen die Aufgabe hat!

Aufgabe 2 - 071022
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit Mund A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks ΔSMC!

Aufgabe 3 - 071023
Beweisen Sie, dass für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

Aufgabe 4 - 071024
Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, dass ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden.
Auf die entstandene mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt.
Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischplatte an!

6.9.3 III. Stufe 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071031
Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Aufgabe 2 - 071032
Es ist zu beweisen, dass $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1, b \neq 1$ ist!

Aufgabe 3 - 071033
Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika:

"Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten.
Ich weiß zwar noch, dass alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauten."
"Welche Maßzahlen meintest du, als du 'alle Maßzahlen' sagtest?"
"Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide."
"Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren z.B. die Längen in cm der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?"
"Ja so war es."

Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?

Aufgabe 4 - 071034
Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leq a_i \leq 10$ gilt!

Aufgabe 5 - 071035
Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung
$x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?

Aufgabe 6 - 071036
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm!
Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

6.9.4 IV. Stufe 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071041
Welchen Rest lässt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Aufgabe 2 - 071042
Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, dass er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.
Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

Aufgabe 3 - 071043
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Aufgabe 4 - 071044
Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel!
Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Aufgabe 5 - 071045
Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1,W_2,W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände.
W_1,W_2,W_3 liegen nicht auf derselben Geraden.
Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken W_1W_2, W_2W_3 und W_3W_1) verbunden. Für die Strecken gilt: $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.
Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand.
Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden.
Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.
Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

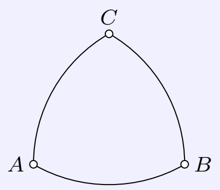
Aufgabe 6 - 071046
Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

6.10 VIII. Olympiade 1968

6.10.1 I. Stufe 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081011



Der Flächeninhalt F der in der Abb. dargestellten Figur soll berechnet werden. Die Punkte haben untereinander die Abstände

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$$

Die Verbindungslinien sind Kreisbögen mit dem Radius a (Mittelpunkt ist jeweils der gegenüberliegende Punkt).

Aufgabe 2 - 081012
Ermitteln Sie alle Primzahlen p mit folgender Eigenschaft!
Addiert man zu p die Zahl 50 und subtrahiert man von p die Zahl 50, dann erhält man zwei Primzahlen.

Aufgabe 3 - 081013

In einem alten Mathematiklehrbuch stößt Günter auf eine Konstruktion, von der behauptet wird, sie führe zur Errichtung der Senkrechten auf einer Geraden g in einem Punkt P. Sie beginnt folgendermaßen:

"Um einen beliebigen, jedoch nicht auf g liegenden Punkt Y wird der Kreis mit dem Radius PY geschlagen. Sein zweiter Schnittpunkt mit der Geraden g sei A. Dann ..."

Die folgende Seite fehlt jedoch.
a) Vervollständigen Sie die Konstruktionsbeschreibung durch geeigneten Text!
b) Weisen Sie die Richtigkeit des Lösungsweges nach!
c) Untersuchen Sie, ob das angegebene Vorgehen immer zum Ziel führt!

Aufgabe 4 - 081014
Einige Schüler der Klassen 9 und 10 einer Schule nahmen an einem Schachturnier teil. Dabei spielte jeder Teilnehmer mit jedem anderen genau eine Partie. Für einen Sieg gab es einen Punkt, für ein Unentschieden einen halben Punkt. Obwohl genau 10 mal so viel Schüler der Klasse 10 wie der Klasse 9 teilnahmen, erreichten sie nur $4\frac{1}{2}$ mal so viele Punkte wie die Schüler der Klasse 9.

Wieviel Teilnehmer aus Klasse 9 waren es, und wie viele Punkte haben sie erreicht?

6.10.2 II. Stufe 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081021
Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1,a_2,...\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,2,...)$ einander gleich sind.
Zeigen Sie, dass es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1,2,...$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

Aufgabe 2 - 081022
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $\log_2 [\log_2(\log_2 x)] = 0$ genügen!

Aufgabe 3 - 081023
Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.
Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 4 - 081024
Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A.
Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.
Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Kraftwagen!

6.10.3 III. Stufe 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081031
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei $AB = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so dass ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck $\triangle ABC$ ist.
Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

Aufgabe 2 - 081032
Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist.
Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?
b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.
Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:
1) für $n = 3$.
2) für beliebiges positives ganzes n.

Aufgabe 3 - 081033
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6ab$ stets gilt:

$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2$$

Aufgabe 4 - 081034
Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.
Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$.
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Aufgabe 5 - 081035
Beweisen Sie folgende Behauptung:
Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Aufgabe 6 - 081036
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Wenn p und q Primzahlen sind $(p > 3, q > 3)$, dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

6.10.4 IV. Stufe 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081041
a) Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck folgender Satz gilt!
Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.
b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

Aufgabe 2 - 081042
Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

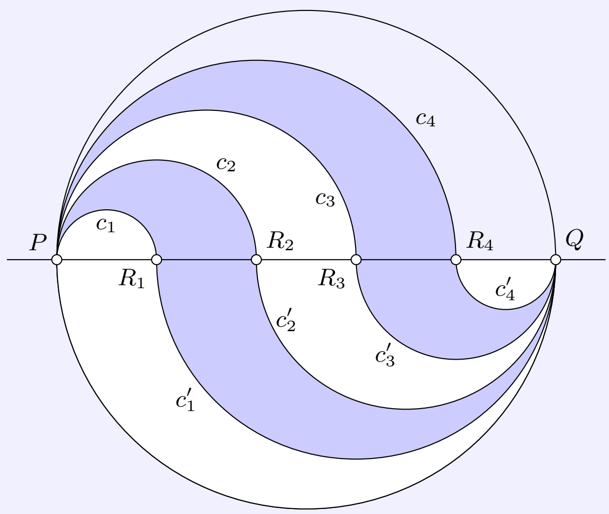
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck} \quad s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

existiert! Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Aufgabe 3 - 081043
In einer Ebene ϵ sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n > 2$ gegeben.
Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$, so dass

$$PR_1 = R_1R_2 = ... = R_{n-2}R_{n-1} = R_{n-1}Q$$

gilt.
Eine der beiden Halbebenen, in die ϵ durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, 2, 3, ..., n-1$).



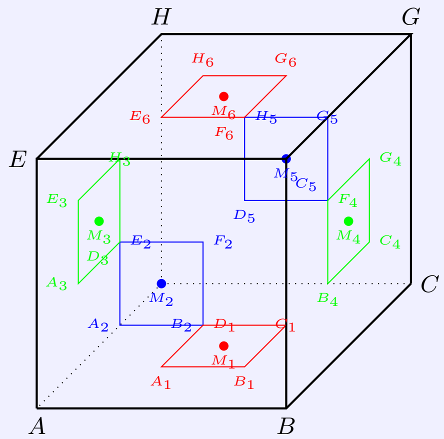
Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, ..., b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

Aufgabe 4 - 081044
Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, dass auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.

Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, dass die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Aufgabe 5 - 081045
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

Aufgabe 6 - 081046
Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate

$$A_1B_1C_1D_1, A_2B_2F_2E_2, A_3D_3H_3E_3, B_4C_4G_4F_4, D_5C_5G_5H_5, E_6F_6G_6H_6$$

einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, ..., M_6$ gelegen, und zwar so, dass die drei Geraden $g_{M_1M_6}, g_{M_2M_5}, g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden. Aus W werden die drei Quader

$$A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6, A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5, A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$$

herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

6.11 IX. Olympiade 1969

6.11.1 I. Stufe 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091011
Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation.

Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert. Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer. Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfaßte genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes. Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnischen am schwächsten und genau die sowjetischen am stärksten vertreten.
a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?
b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?
c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

Aufgabe 2 - 091012
In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

Aufgabe 3 - 091013
In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF.

Berechnen Sie das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.

Aufgabe 4 - 091014
Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, daß dann $f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

6.11.2 II. Stufe 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091021
Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten $\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0,0379]}$.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

Aufgabe 2 - 091022
Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, dass jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3; \quad d_2 = a_3 - a_2; \quad d_3 = a_2 - a_1; d_4 = a_4 - a_2; \quad d_5 = a_3 - a_1; d_6 = a_4 - a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

Aufgabe 3 - 091023
Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).
a) Führen Sie folgende Konstruktion aus:
Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E.
Von A aus werde die Strecke AB mit $AB = n$ so auf g abgetragen, dass B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $BC = m$ so abgetragen, dass A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich). Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius BC geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.
b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

Aufgabe 4 - 091024
Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?

(1) $-3 < x < 1$ (2) $x > -3$ (3) $x < 1$
(4) $x < 1$ oder $x > -3$ (5) $x > 1$ oder $x < -3$)

6.11.3 III. Stufe 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091031
Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei der Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

Aufgabe 2 - 091032
Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, dass ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.
Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

Aufgabe 3 - 091033
Geben Sie
a) eine notwendige und hinreichende,
b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie
c) eine hinreichende und nicht notwendige
Bedingung dafür an, da $\sqrt{1 - |\log_2|5-x||} > 0$ gilt!
Die anzugebenden Bedingungen sind dabei so zu formulieren, dass sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

Aufgabe 4 - 091034
Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

Aufgabe 5 - 091035
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, und auf AB ein Punkt D.
Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

Aufgabe 6 - 091036
Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.
Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

6.11.4 IV. Stufe 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091041
Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Aufgabe 2 - 091042
Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0, b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Aufgabe 3 - 091043
A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abbildung gewählt seien.
K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $DY = EX$ ist.
Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

Aufgabe 4 - 091044
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -1$$

Aufgabe 5 - 091045
Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck $\triangle ABC$ liegen.
Beweisen Sie, dass der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!

Aufgabe 6 - 091046
Man beweise folgenden Satz!
Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.

6.12 X. Olympiade 1970

6.12.1 I. Stufe 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101011
Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel.

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

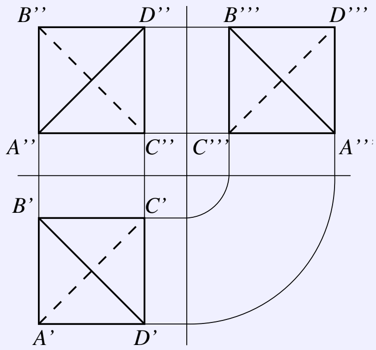
Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

Aufgabe 2 - 101012
Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?

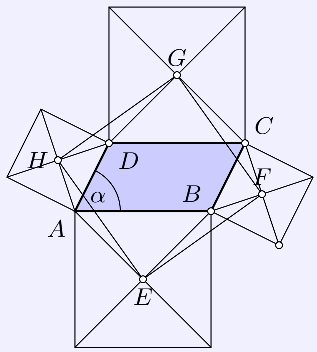
b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?

Aufgabe 3 - 101013



Die Abbildung zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriss.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriss eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$).
b) Berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 4 - 101014



Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

Man beweise, dass $EFGH$ ein Quadrat ist.

6.12.2 II. Stufe 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101021
Beweisen Sie, dass jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

Aufgabe 2 - 101022
Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.
B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.
C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.
D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann!
Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!
Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.
Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

Aufgabe 3 - 101023
In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $AB : SM = 3 : \sqrt{6}$ gilt.
Beweisen Sie, dass das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d.h. dass alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

Aufgabe 4 - 101024
Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2mn; \qquad y = m^2 - n^2; \qquad z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist!

6.12.3 III. Stufe 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101031
a) Beweisen Sie folgenden Satz!
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$.
Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

Aufgabe 2 - 101032
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$.
Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 3 - 101033
Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x gilt: $f(x) = f(x + 1) - a$

Aufgabe 4 - 101034
Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$ gilt:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + ... + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

Aufgabe 5 - 101035
Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.
Nach Abschluss des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D platzierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Aufgabe 6 - 101036
Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.
Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so dass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

6.12.4 IV. Stufe 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101041
Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, dass in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

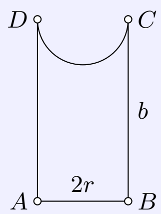
Aufgabe 2 - 101042
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und den Kantenlängen $AB = a, AD = b, AA' = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten. Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.
a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\alpha = 60°, q = 1$ dar.
Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.
b) Man berechne $V_R : V_Q$.

Aufgabe 3A - 101043A
Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die

$$[log_{12} c] \leq [log_4 c]$$

gilt. Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 3B - 101043B



Die Abbildung zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = CD = 2r$ und $BC = AD = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.
Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.

Aufgabe 4 - 101044
Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

Aufgabe 5 - 101045
Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

erfüllen. Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$. b) Es sei $r = -6$.
c) Es sei $-6 < r < 0$. d) Es sei $r > 0$.

Aufgabe 6 - 101046
Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden: Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt.
Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.
Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

6.13 XI. Olympiade 1971

6.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111011
Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Aufgabe 2 - 111012
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

Aufgabe 3 - 111013
Es sei x eine Variable, die alle von 1 und -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann.

Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, daß die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

Aufgabe 4 - 111014
In

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{U} & \mathrm{N} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

6.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111021
Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z.B. der Schüler A, verlässt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen. Jeder der Schüler B, C, D und E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:
(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.
(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.
A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben.
Wie kann das geschehen?

Aufgabe 2 - 111022
Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden. Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?
b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

Aufgabe 3 - 111023
Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{u}{v}$, für die $\frac{u+kv}{v+ku} < 1 \quad (*)$ gilt!

Aufgabe 4 - 111024
Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $AC = BC = a$ die Basislänge $AB = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis $1 : 4$ beträgt.

6.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111031
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen a, b mit $a \neq 0, b \neq 0$, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

Aufgabe 2 - 111032
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:
a) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
b) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Aufgabe 3 - 111033
Gegeben sei die Kathetenlänge $BC = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $AC : BC = 2 : 1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\angle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a!
Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Aufgabe 4 - 111034
Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, dass die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt.
Wie groß muss der Radius r (R, h, r in cm gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

Aufgabe 5 - 111035
Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d.h. für alle reellen x gelte $f(x + p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt.
Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

$$\text{a)} \quad F(x) = \frac{1}{2} f(x) \qquad ; \qquad \text{b)} \quad G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Aufgabe 6 - 111036
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

6.13.4 IV. Stufe 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111041
a) Man beweise den folgenden Satz!
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zwei dieser Primzahlen durch 6 teilbar.
b) Man beweise, dass die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, dass jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird!

Aufgabe 2 - 111042
Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.
b) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.
c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120000.
d) Der größter gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000.

Aufgabe 3A - 111043A
Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $AB = AD > BC = CD$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $AB : BC = BC : FB$ gilt.
Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $EC = BC (= CD)$ und $FE = FB$ gilt.
Beweisen Sie, dass E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

Aufgabe 3B - 111043B
Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe:
Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, dass A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.
Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert! Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $AB = a$ und $BC = b$ bedeutet.
Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, dass er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.
Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Aufgabe 4 - 111044
Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$-2x + 3y = 2m \quad (1) \qquad ; \qquad x - 5y = -11 \quad (2)$$

Aufgabe 5 - 111045
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrates verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2.
Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt.

Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, dass $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$.

Aufgabe 6 - 111046
Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$. Man beweise, dass dann gilt

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1$$

6.14 XII. Olympiade 1972

6.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121011
Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!

Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!

Aufgabe 2 - 121012
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y-Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!

Aufgabe 3 - 121013
Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b.

Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\frac{a \cdot b}{a + b}$!

Aufgabe 4 - 121014
In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte.

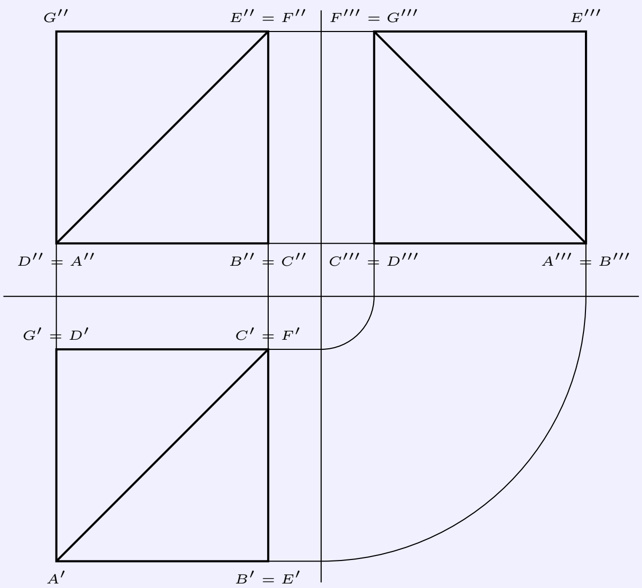
Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

6.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121021
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Bildet man aus irgendeiner im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

Aufgabe 2 - 121022
In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°; q = \frac{1}{2}\right)$.
b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!



Aufgabe 3 - 121023
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0; 6)$.
Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

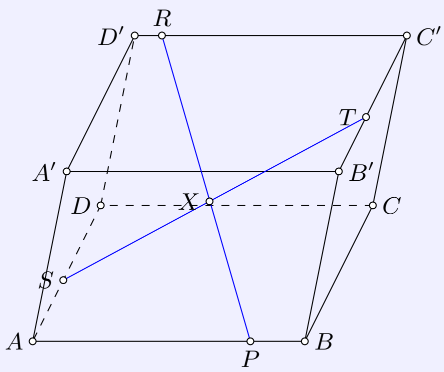
Aufgabe 4 - 121024
a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ grafisch zu ermitteln.
Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so dass diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?

b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, dass $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

6.14.3 III.Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121031
Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $|CD| = h$ und die Basislänge $|AB| = g$ genannt.
Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, dass EF auf AB, G auf BC und H auf AC liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9 : 4$ verhalten.

Aufgabe 2 - 121032



Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d.i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.
Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wenn P ein Punkt auf AB, R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist.

Aufgabe 3 - 121033
Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend nummeriert; es mögen also nummeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, dass dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Aufgabe 4 - 121034
Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, dass er eine Verspätung von genau 4 min hatte.
Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 5 - 121035
Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{26^2}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=\lg\frac{606}{625}$$

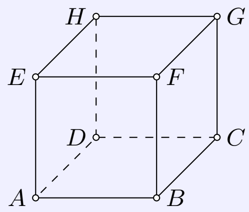
Aufgabe 6 - 121036
Beweisen Sie den folgenden Satz! Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von $36°$, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem "Goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem "Goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

6.14.4 IV.Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121041
a) Zeigen Sie, dass es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist!
Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitz sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

Aufgabe 2 - 121042



Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.
a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!

Aufgabe 3A - 121043A
a) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat!
b) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $AB = AD = x$, $CB = CD = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat!
c) Man beweise! Sind M und U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt:

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$

Aufgabe 3 - 121043B
Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:
Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen "Zug". Ein "Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen.
Dabei darf keiner der Spieler den gleichen "Zug" zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am "Zug" befindliche Spieler aber keinen "Zug" nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 4 - 121044
In einer Ebene mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$.
Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, dass k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$!

Aufgabe 5 - 121045
Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe!
Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, dass sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt und dass man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Aufgabe 6 - 121046
Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.
Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein.
Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

6.15 XIII. Olympiade 1973

6.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131011
Ermitteln Sie alle Mengen $\{a,b,c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, dass $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a,b,c\}$ ist!

Aufgabe 2 - 131012
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.

Man beweise, dass dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist!

Aufgabe 3 - 131013
Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, dass als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben!

Aufgabe 4 - 131014
Jens und Dirk spielen das folgende Spiel

Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen a ($\neq 0$), b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein "ungerechtes Spiel" handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmölichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

6.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131021
Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

Aufgabe 2 - 131022
Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab.
In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz.
Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen vergeben.
Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

Aufgabe 3 - 131023
Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ρ.
Man berechne diesen Inkreisradius ρ!

Aufgabe 4 - 131024
Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$.

6.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131031
Man beweise, dass für alle konvexen Vierecke $ABCD$

$$\frac{1}{2}u < e + f < u$$

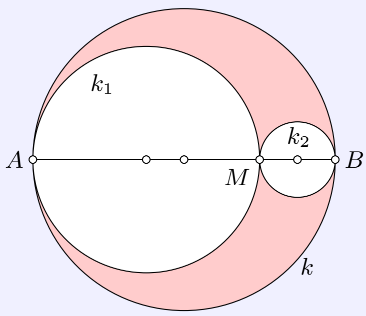
gilt! Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

Aufgabe 2 - 131032
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

Aufgabe 3 - 131033
Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die Länge a.
E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

Aufgabe 4 - 131034
Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

Aufgabe 5 - 131035



Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser AB der Länge d.
In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, dass sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so dass also $AM + MB = AB$ gilt. Dabei sei $AM \geq MB$.
Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.
Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser farbigen Fläche am größten ist!

Aufgabe 6 - 131036
Man beweise, dass die Ungleichung $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1, b \neq 1$ gilt!

6.15.4 IV. Stufe 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131041
In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, dass sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, dass dann $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

Aufgabe 2 - 131042
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm! Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die Länge der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 3A - 131043A
a) Beweisen Sie, dass man zu gegebenem reellen x_0 die Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann!
Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten $(1; 1)$ hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen. Auf q zeichnet man einen Punkt X so, dass die gerichtete Strecke EX die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ als Ordinate.
b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, dass die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

Aufgabe 3B - 131043B
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die Gleichung $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen!

Aufgabe 4 - 131044
Man untersuche, ob die Zahl $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$ positiv, negativ oder gleich Null ist!

Aufgabe 5 - 131045
Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$$

Aufgabe 6 - 131046
Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a.

6.16 XIV. Olympiade 1974

6.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141011
Jemand wählt eine natürliche Zahl n, addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + ... + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z.B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft!

Aufgabe 2 - 141012
Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, dass die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Mal gleich sein.

a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d.h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?

b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

Aufgabe 3 - 141013
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2};0)$ und $B(\frac{1}{2};0)$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!
   (1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.
   (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Aufgabe 4 - 141014
In einem konvexen n-Eck $A_1A_2...A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120° haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ... , A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130°, ... betragen.

Man zeige, dass für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann!

6.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141021
Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass $z_1 > z_2$ ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2!

Aufgabe 2 - 141022
Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) $x - y = 96$,
(2) $y - z = 96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Aufgabe 3 - 141023
Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels.
Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, dass der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.
Man beweise, dass dann $DE = AB + BC$ gilt!

Aufgabe 4 - 141024
Gegeben seien positive Streckenlängen h, r, d mit $d < 2r$. Es bezeichne ϵ eine Ebene und k einen in ϵ gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$.
Auf der Senkrechten zu ϵ durch A sei C ein Punkt mit $AC = h$. Auf k sei D ein Punkt mit $BD = d$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B!
b) Man beweise, dass $BD \perp CD$ gilt!

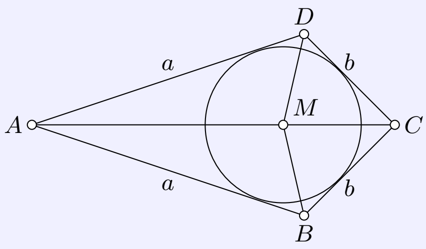
6.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141031

	A	R	Z	T
	A	R	Z	T
Ä	R	Z	T	E

In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

Aufgabe 2 - 141032
Beweisen Sie folgenden Satz!



Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit $AB = AD = a$, $BC = DC = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt
$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM}$$

Aufgabe 3 - 141033
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $x^{\log_a x} = a^2 x$ erfüllen!

Aufgabe 4 - 141034
Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung
$$f(n) = a^n + b^n + (a + b)^n$$
definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass dann $[f(2)]^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

Aufgabe 5 - 141035
Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl $n^2 + 6n - 187$ ohne Rest durch 19 teilbar ist!

Aufgabe 6 - 141036
Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben:
Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.
Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren!
Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt!

6.16.4 IV. Stufe 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141041
Es sei
$$z=\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{4}{199^2}\right)$$
Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z=\frac{p}{q}$ dar, wobei p,q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q>0$ ist!

Aufgabe 2 - 141042
Beweisen Sie folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt:
$$\frac{a}{c}=\frac{AM\cdot BM}{CM\cdot DM}$$

Aufgabe 3A - 141043A
Es sei $ABCDS$ eine geraden vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen ρ $(0^\circ<\rho<90^\circ)$, für die folgendes gilt:
Hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe ρ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzügen $PQRTP$ ein kürzester.

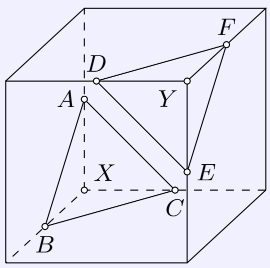
Aufgabe 3B - 141043B
Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining.
Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände:
Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, dass jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: ”Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht.”
Monika: ”Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht.”
Peter: ”Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht.”
Klaus: ”Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift.”
Ilona: ”Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift.”
Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen!
Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

Aufgabe 4 - 141044
Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:
$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r=4$$

Aufgabe 5 - 141045
In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, dass beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und dass die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist.
Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion."
Brigitte widerspricht: "Es lässt sich nur schließen, dass g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."
Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht."
Wer von diesen Schülern hat nun recht?
Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Aufgabe 6 - 141046



Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y.
Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, die Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, dass A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.

a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, dass folgendes gilt!
Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (das ist ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.
b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen!

6.17 XV. Olympiade 1975

6.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151011
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft!

a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.

b) Die Summe alter natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.

Aufgabe 2 - 151012
Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.

Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 3 - 151013
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a : b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a < b$ so zu wählen, daß folgendes gilt!

Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt 60% ihres arithmetischen Mittels.

Aufgabe 4 - 151014
In

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ \hline \mathrm{S} & \mathrm{T} & \mathrm{A} & \mathrm{D} & \mathrm{T} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

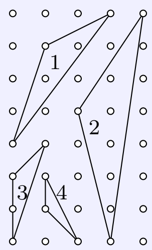
Geben Sie alle Lösungen an!

6.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151021
Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.
Zuschauer (1): "A oder C gewinnt."
Zuschauer (2): "Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."
Zuschauer (3): "Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."
Zuschauer (4): "A oder B wird Zweiter."
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, dass die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und dass alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?

Aufgabe 2 - 151022
Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält.
Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind.
Danach stellt er fest, dass in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

Aufgabe 3 - 151023
Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

Aufgabe 4 - 151024
Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \qquad (1)$$

Es ist zu beweisen, dass dann für diese Zahlen $a + b \geq 2 \quad (2)$ gilt.
Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b) zu ermitteln, für die (1) gilt und für die in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

6.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151031
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $BC = a$ und der Höhenlänge $AD = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

Aufgabe 2 - 151032
Gegeben sei eine Strecke AB mit $AB = 5$ cm.
Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein!

Aufgabe 3 - 151033
Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt $(1 + a^2x^2) : x^2 = b$ (mit gegebenen Zahlen a, b) versehentlich die Gleichung $(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = b$ (mit denselben Zahlen a, b) gedruckt.
Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge!

Aufgabe 4 - 151034
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'} = \frac{CH}{HC'}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

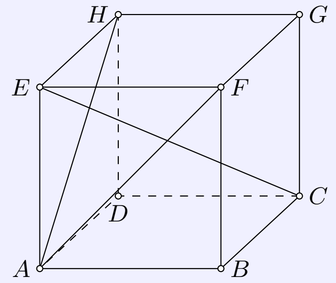
Aufgabe 5 - 151035
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt!
Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x.
(Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

Aufgabe 6 - 151036
Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist: $[x] \leq x < [x] + 1$.
Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4{,}2] = -5$, $[5] = 5$.

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so dass für alle x gilt: $f(x + p) = f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f.
Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f.
Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z.B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.
a) Beweisen Sie, dass durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!
b) Beweisen Sie, dass die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!
c) Weisen Sie nach, dass diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!
d) Stellen Sie f graphisch dar!

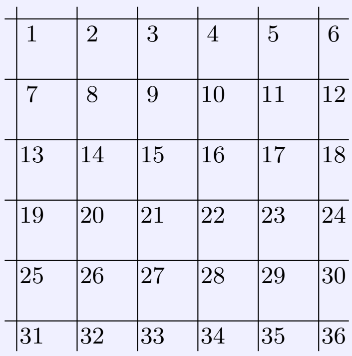
6.17.4 IV. Stufe 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151041



Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, dass sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.
Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!

Aufgabe 2 - 151042



In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in der Abbildung dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, dass
(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.
Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, dass es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!

Aufgabe 3A - 151043A
Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $-10 \leq x \leq 2$ und $[x^2] = [x]^2$ gilt!

Aufgabe 3B - 151043B
In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x; y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.
Man beweise:
Es gibt eine Zahl c, so dass k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c!

Aufgabe 4 - 151044
Man ermittle alle ungeordneten Paare (x, y) aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt!
Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

Aufgabe 5 - 151045
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an der Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert!
Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

Aufgabe 6 - 151046
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, dass f nullstellenfrei ist, d.h., dass keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, dass auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

6.18 XVI. Olympiade 1976

6.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161011
In das Kryptogramm

$$\begin{array}{cccccc} & K & A & T & E & R \\ + & K & A & T & Z & E \\ \hline & T & I & E & R & E \end{array}$$

sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1,..., 9) so einzusetzen, dass eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.

Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

Aufgabe 2 - 161012
Geben Sie alle reellen Zahlen x ($x \neq -3$) an, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3} - \frac{1}{10} \qquad (1)$$

Aufgabe 3 - 161013
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, dass nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird!

Aufgabe 4 - 161014
Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\angle ACB = 90°$.

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!

6.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161021
Es sei q eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\frac{q^3-q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

Aufgabe 2 - 161022
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = AC = 4$ cm und die Länge $p = BD = 1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $CD = h$ und die Länge $q = AD$.

Aufgabe 3 - 161023
In der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} \text{L} & \text{O} & \text{T} & \text{T} & \text{O} \\ + & \text{T} & \text{O} & \text{T} & \text{O} \\ \hline \text{S} & \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{L} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

Aufgabe 4 - 161024
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$.
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben!
(1) Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
(2) Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.
Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

6.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161031
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ und $AB > CD$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA.
Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, dass
der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,
der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,
der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und
der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.
Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P. Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

Aufgabe 2 - 161032
Von einer Gleichung

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

werde vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 ganze Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass dann folgender Satz gilt!
Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

Aufgabe 3 - 161033
Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

$$\begin{array}{ccccc} & I & N & E & S \\ + & J & E & N & S \\ + & A & M & E & S \\ \hline N & A & M & E & N \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!
b) Zeigen Sie, dass die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!
Hinweis: Sind $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, ..., n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n...a_2a_1a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$$z = a_n8^n + a_{n-1}8^{n-1} + ... + a_28^2 + a_18^1 + a_08^0$$

Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n...a_2a_1a_0]_8$ bezeichnen.

Aufgabe 4 - 161034
Beweisen Sie, dass gilt

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + ... + \lg\left(1+\frac{1}{99}\right) = 2$$

Aufgabe 5 - 161035
Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrundegelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.
Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrundegelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat!

Aufgabe 6 - 161036
Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $AD = CD$, $AB = CB$ aus $a + b = 12$ cm, $f = 9$ cm und $\beta + \delta = 172°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\angle ADC$.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert, und beweisen Sie, dass alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

6.18.4 IV. Stufe 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161041
Man beweise den folgenden Satz!
Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf seiner Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf seiner Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.

Aufgabe 2 - 161042
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\varphi = 100°$ und $\epsilon = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ϵ die Größe des Winkels $\angle DAC$ und φ die Größe des Winkels $\angle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.
Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 3A - 161043A
Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...).
In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, dass die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war.
Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.
Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, dass die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge).
Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte nach zwei Wettkämpfen 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D. Zweiter wurde der Sportler C.
Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 3B - 161043B
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die a) leer ist,
b) genau ein Element enthält,
c) aus mehr als einem Element besteht!

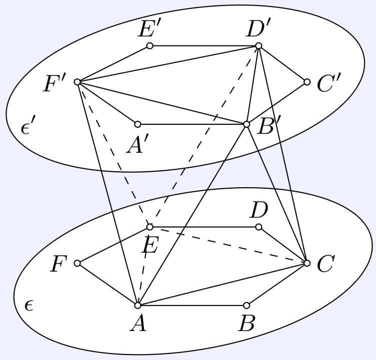
Aufgabe 4 - 161044
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Aufgabe 5 - 161045

Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q-mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.
Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$!

Aufgabe 6 - 161046



In einer Ebene ϵ sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ϵ' sei zu ϵ parallel.
In ϵ' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, dass die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ϵ senkrecht stehen.
Gegeben seien die Seitenlänge $a = AC$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ϵ und ϵ'.
Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat.

6.19 XVII. Olympiade 1977

6.19.1 I. Stufe 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171011
Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.

Aufgabe 2 - 171012
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\dfrac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ definiert ist!

Aufgabe 3 - 171013
Sind a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, 1, ...n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + ... + a_1 \cdot 8 + a_0,$$

so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z.B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leq 2; 0; 7 \leq 7$ und $2 > 0$.

a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

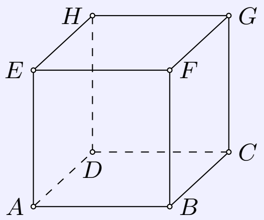
b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{rccccl} [& E & I & N & S &]_8 \\ +[& E & I & N & S &]_8 \\ \hline [& Z & W & E & I &]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, daß im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist.

Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, daß die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

Aufgabe 4 - 171014



Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H. Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, daß der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

6.19.2 II. Stufe 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171021
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, dass sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

Aufgabe 2 - 171022
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d.h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 3 - 171023
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ definiert ist!

Aufgabe 4 - 171024
Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0, ..., n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe

$$Q(Z) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$$

und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt

$$P(Z) = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0 < Z < 1000$, für die $Q(Z) + P(Z) = Z$ gilt!

6.19.3 III. Stufe 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171031
Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, dass dann $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$ gilt!

Aufgabe 2 - 171032
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge UV, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

Aufgabe 3 - 171033
Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7-4\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}$$

definiert werden soll.
Jens sagt, dass z eine natürliche Zahl ist; Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl; Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, dass der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie wer recht hat!

Aufgabe 4 - 171034
Geben Sie alle Primzahlen p an für die $3p+4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 5 - 171035
Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, dass bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so dass die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Aufgabe 6 - 171036
Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, dass A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, dass unter allen so entstandenen Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und dass diese für genau einen Wert r'_1 von r' zustande kommen!
Drücken Sie diesen Wert r'_1 und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, dass für den Wert r'_1 auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben!
Beweisen Sie, dass es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt, und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, dass es genau einen Wert r'_2 von r' mit folgender Eigenschaft gibt:
Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt!
Drücken Sie diesen Wert r'_2 und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

6.19.4 IV. Stufe 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171041
In einer Ebene ϵ sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 2 - 171042
Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist!

Aufgabe 3A - 171043A
Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq ai \leq 3$ $(i = 0, 1, ..., n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + ... + a_1 \cdot 4 + a_0$$

so sagt man, z sei im 4adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz $z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_4$.
Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4adischen System) $(n + 1)$-stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl

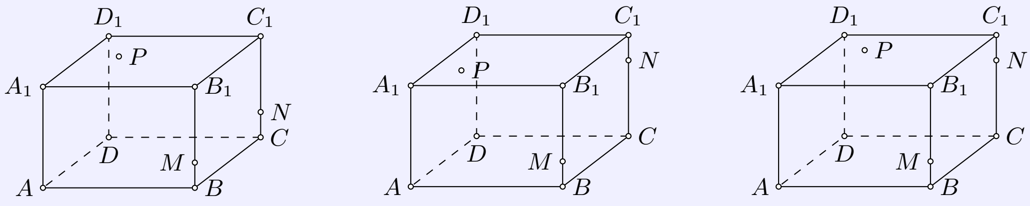
$$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + ... + a_1^2 + a_0^2$$

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'' u.s.w.

Beispiel: z = 54: Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 = [312]_4$, d.h., die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4^1 + 2 = [32]_4$, $z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4^1 + 1 = [31]_4$ u.s.w.

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und lässt bei Darstellungen im 4adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben: $312 \to 32 \to 31$ u.s.w.
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche, im 4adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, dass man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

Aufgabe 3B - 171043B



$CN = BM$ $\quad$ $CN > BM$ $\quad$ $CN > BM$

Auf den Abbildungen ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt.
Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechteckfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.
Konstruieren Sie (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ϵ durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 4 - 171044
Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehenden Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

Aufgabe 5 - 171045
Beweisen Sie, dass der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2}-7)}{\lg(3-2\sqrt{2})} \qquad (1)$$

eine reelle Zahl definiert und dass diese rational ist!

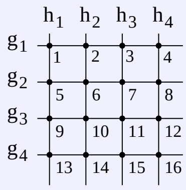
Aufgabe 6 - 171046
Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 2 + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{aligned}$$

6.20 XVIII. Olympiade 1978

6.20.1 I. Stufe 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181011



Die Abbildung zeigt vier zueinander parallele Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist.

Ferner zeigt die Abbildung eine Numerierung der entstehenden Schnittpunkte.

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur numerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.

b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 numerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden numerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), daß für die Ecken jedes in a) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten!

Aufgabe 2 - 181012
In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: ”Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ...”

Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: ” ... ist a negativ.”

Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: ”... sind a und b negativ.”

Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: ”... ist b negativ.”

Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: ”... braucht weder a noch b negativ zu sein.”

Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist!

Aufgabe 3 - 181013
Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:

Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, daß auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und daß jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten.

Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein ”Paar” und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.

Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines ”Paares” oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten ”Paare” besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, daß das Spiel stets damit enden muß, daß sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

Aufgabe 4 - 181014

Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel ACB.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muß sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

6.20.2 II. Stufe 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181021
Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, dass $AB = 10$ cm; $BC = 6$ cm; $BE = 11$ cm; $CD = 2$ cm; $FD = 3$ cm; $AF = 3$ cm und $DE = 7$ cm gilt.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind!

Aufgabe 2 - 181022
Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:
Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius BC. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.
Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge CD ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.

Aufgabe 3 - 181023
Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 4 - 181024
Von einem Dreieck ABC mit $\angle CAB = \alpha = 120°$ und $\angle BCA = \gamma = 30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

6.20.3 III. Stufe 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181031
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

Aufgabe 2 - 181032
Beweisen Sie:
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

Aufgabe 3 - 181033
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20} + \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

Aufgabe 4 - 181034
Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen Sie folgende Aussagen:
(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.
Ist es möglich, dass a) alle vier Aussagen b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind?

Aufgabe 5 - 181035
Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt:
Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definierte Funktion ist, so gilt $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$ und $f(3) = 1$.
Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

Aufgabe 6 - 181036
Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $CM = 6$ cm, $CS = 7$ cm und $MS = 1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, dass sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

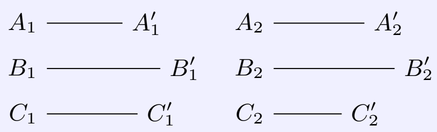
6.20.4 IV. Stufe 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181041
Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$$

erfüllt?

Aufgabe 2 - 181042
In einer Ebene ϵ seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte 6 Strecken A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' gegeben:



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = A_1A_1'$, $b_1 = B_1B_1'$, $c_1 = C_1C_1'$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = A_2A_2'$, $b_2 = B_2B_2'$, $c_2 = C_2C_2'$ hat.
a) Beschreiben Sie eine in ϵ durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (1)!
Falls $P_1Q_1 < P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 < V_2$;
falls $P_1Q_1 = P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 = V_2$;
falls $P_1Q_1 > P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 > V_2$ (1)
Dass P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (!) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.
b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A_1', ..., C_2C_2'$ auf der Abbildung auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

Aufgabe 3A - 181043A
Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.
Man beweise, dass f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g!

Aufgabe 3B - 181043B
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist!

Aufgabe 4 - 181044
Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

$$\text{a)} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{und}$$

$$\text{b)} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Aufgabe 5 - 181045
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ gilt!

Aufgabe 6 - 181046
Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.
Beweisen Sie, dass auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

6.21 XIX. Olympiade 1979

6.21.1 I. Stufe 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191011
Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 22 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, dass kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.

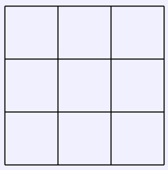
Wie groß muss Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?

Aufgabe 2 - 191012
Es seien b und c von Null verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $a < b$ und $b + 1 = c$ gilt!

Aufgabe 3 - 191013
Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$, für die der Term $x^2 + 3x + 4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt!

Aufgabe 4 - 191014



In die neun quadratischen Felder der Abbildung sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und dass in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.

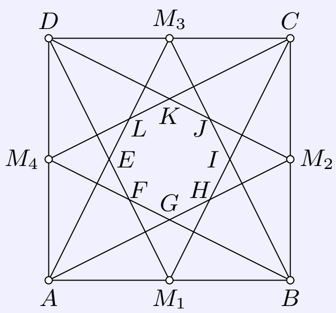
6.21.2 II. Stufe 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191021
Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten, soll einen überall gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Bildes.
Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Längenverhältnisses der Außenkanten des Rahmens, die diese Forderung erfüllen!

Aufgabe 2 - 191022
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Aufgabe 3 - 191023
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ und gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D, die Seite CA in E und die Seite AB in F.
Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte BD, DC, CE, EA, AF und FB, in Abhängigkeit von a, b und c ausgedrückt!

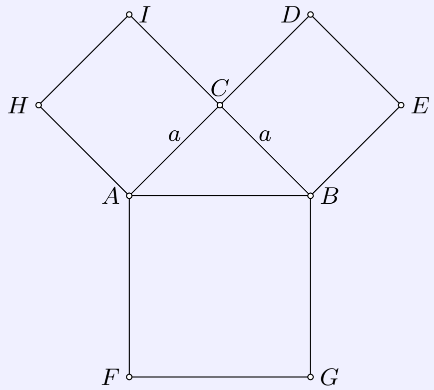
Aufgabe 4 - 191024



Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ enthält.
Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

6.21.3 III. Stufe 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191031



Die Abbildung zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit gegebener Kathetenlänge a, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.
a) Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen!
Ermitteln Sie (zu gegebenem a) den Durchmesser dieses Kreises!
b) Beweisen Sie:
Jeder Kreis, der die Punkte D, E, F, G, H und J in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!

Aufgabe 2 - 191032
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung erfüllt ist!

Aufgabe 3 - 191033
Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d.h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel (d.h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt).
Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, dass die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1 : r_2$, wobei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

Aufgabe 4 - 191034
Beweisen Sie folgende Aussage!
Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius r und hat $\angle ACB$ die Größe γ, so gilt $\sin\gamma = \frac{AB}{2r}$.

Aufgabe 5 - 191035
Von einer Funktion f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, dass folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1) = 1$.
(2) Für jedes $x \neq 0$ ist

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

(3) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Beweisen Sie, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, gilt:

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Aufgabe 6 - 191036
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

6.21.4 IV. Stufe 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191041
Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax} \qquad , \qquad g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen.
Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

Aufgabe 2 - 191042
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + ... + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}$$

Aufgabe 3A - 191043A
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Aufgabe 3B - 191043B
Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$ nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen lässt!

Aufgabe 4 - 191044
Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$.
Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r, die die Eigenschaft haben, dass ein Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

Aufgabe 5 - 191045
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

erfüllen!

Aufgabe 6 - 191046
Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, dass jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt.
Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder.
Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r!

6.22 XX. Olympiade 1980

6.22.1 I. Stufe 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201011

a) Geben Sie ein Paar (x, y) reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$\begin{aligned} 10y - x &\leq 100 && (1)\\ 5y - 5x &> 0 && (2)\\ y + x &\geq 21 && (3) \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie, daß es mehr als zehn verschiedene derartige Paare (x, y) gibt!

Aufgabe 2 - 201012

Beweisen Sie, dass $\dfrac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2}$ für alle ganzen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$

a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar

b) eine ganze Zahl ist!

Aufgabe 3 - 201013

Gegeben seien die Seitenlängen $a = \overline{BC} = 15cm$, $b = \overline{AC} = 14cm$, $c = \overline{AB} = 13cm$ eines Dreiecks ABC.

Berechnen Sie die Länge h_b der durch B verlaufenden Höhe und den Flächeninhalt F dieses Dreiecks!

Aufgabe 4 - 201014

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: "Mußt dich nicht quälen!
's sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag' dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier'
des Abstand kleiner ist als vier"
(Er meint natürlich Zentimeter.)
"Und dies beweis mir mal!" sagt Peter:
"Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht."

6.22.2 II. Stufe 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201021
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $1 + 4 \cdot 9^{2n}$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 2 - 201022
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $BC = 4$ cm und $AC = 3$ cm. Der Kreis um C mit dem Radius AC schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.
Berechnen Sie das Verhältnis $AP_3 : CP_3$!

Aufgabe 3 - 201023
Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen so existiert, dass gilt:

$$(a + n)(b + n)(c + n) = 1980$$

Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Aufgabe 4 - 201024
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0 < z < 1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

6.22.3 III. Stufe 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201031
In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:
(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden "Preisträger" genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.
Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

Aufgabe 2 - 201032
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20 \quad (1) \qquad ; \qquad y - x < 4 \quad (2) \qquad ; \qquad y - ax \geq 6 \quad (3)$$

Aufgabe 3 - 201033
Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ϵ. Untersuchen Sie, ob es in ϵ ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{5}$ cm, $PC = \sqrt{8}$ cm gilt!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

Aufgabe 4 - 201034
Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft! Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

Aufgabe 5 - 201035
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 3$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $x_n > 2$ gilt!

Aufgabe 6 - 201036
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ die Bedingungen $a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$ erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, dass alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!
Hinweis:
In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als "einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgendeiner anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

6.22.4 IV. Stufe 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201041
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und b für die gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b^2$$

Aufgabe 2 - 201042
Gegeben sei eine Länge r_1.
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $CD < AD = AB = BC$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, dass sie einander von außen berühren und dass k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt!
Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

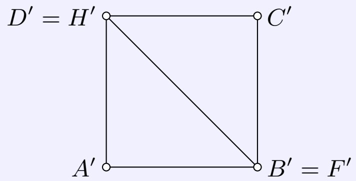
Aufgabe 3A - 201043A
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \log_y(5 - \sqrt{24}) \qquad (1)$$

$$y - x = 2 \qquad (2)$$

Aufgabe 3B - 201043B
Beweisen Sie, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $625 + 4(9^{2n})$ eine Primzahl sein kann!

Aufgabe 4 - 201044



Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriss haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.)
Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrissebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.
Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrissebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.
Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$) dar!
Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

Aufgabe 5 - 201045
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 5$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $4 \leq x_n \leq 5$ gilt!

Aufgabe 6 - 201046
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c \tag{1}$$
$$y < x + c \tag{2}$$
$$y < -2x + 1 \tag{3}$$

6.23 XXI. Olympiade 1981

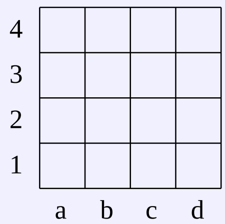
6.23.1 I. Stufe 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211011
Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.

Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, dass er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.

Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

Aufgabe 2 - 211012



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... , $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Aufgabe 3 - 211013
Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff des Durchmessers definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine "längste Strecke" als "Durchmesser" bezeichnen.[1)]

Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann lässt sich beweisen, dass für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geq \overline{XY}$ ist.

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!

(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

[1)] Das heißt man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, daß für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der "Durchmesser" von F.

Aufgabe 4 - 211014

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ durch $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ definiert sind!

b) Im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ seien nun durch $h(x) = f(g(x))$, $k(x) = g(f(x))$ zwei weitere Funktionen h und k definiert.

Hinweis: Man erhält also z.B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, dass man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f(g(x)) = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g(f(-1)) = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, dass man auf Teilstücke des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

6.23.2 II. Stufe 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211021
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB. Für den Höhenfußpunkt D gilt $AD < DB$.
In welchem Verhältnis $AD : DB$ teilt er die Hypotenuse?

Aufgabe 2 - 211022
Über das Ergebnis eines 100 m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:
(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.
(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.
(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.
(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, dass
a) alle vier Aussagen (1) bis (4),
b) genau drei dieser Aussagen,
c) genau zwei dieser Aussagen,
d) genau eine dieser Aussagen,
e) keine dieser Aussagen
gleichzeitig wahr sind!

Aufgabe 3 - 211023
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die $x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Aufgabe 4 - 211024
Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.
Beweisen Sie, dass die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

6.23.3 III. Stufe 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211031
Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.
(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

Aufgabe 2 - 211032
Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)!
Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AG}{BG} = 1$$

Aufgabe 3 - 211033
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6{,}6$$
$$[2a] + 3b = 11{,}9$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g+1$ gilt.
So ist z.B. $[4{,}01] = 4$, da $4 \leq 4{,}01 < 5$ gilt; $[7] = 7$, da $7 \leq 7 < 8$ gilt; $[-\pi] = -4$, da $-4 \leq -\pi < -3$ gilt.

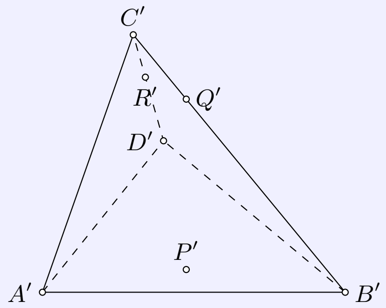
Aufgabe 4 - 211034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1$$

Aufgabe 5 - 211035
In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:
"Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen: Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile u.s.w.
Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?"
Als Lösung musste bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.
Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

Aufgabe 6 - 211036
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben.
Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R'. Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211036



6.23.4 IV. Stufe 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211041
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!
Die Aussagen lauten:

$$b|(a+1), \quad (1)$$
$$a = 2b+5, \quad (2)$$
$$3|(a+b), \quad (3)$$
$$a+7b \quad \text{ist eine Primzahl.} \quad (4)$$

Aufgabe 2 - 211042
Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $XY \leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $PQ = d$ beträgt.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob man jede Vierecksfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!
Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Aufgabe 3A - 211043A
In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.
Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man die Funktion F für alle reellen x durch $F(x) = f(g(x))$ definieren.
Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind.
(Bekanntlich heißt eine Funktion ρ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, dass für alle x die Gleichung $\rho(x+p) = \rho(x)$ gilt.)
Jens behauptet: Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.
Dirk behauptet: Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets die Funktion F periodisch.
Christa behauptet: Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.
Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

Aufgabe 3B - 211043B
Beweisen Sie, dass man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, ..., P_{12}$ so verteilen kann, dass für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!
Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

Aufgabe 4 - 211044
Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor.
Nach jedem Wurf muss der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.
Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, dass mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

$$AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG$$

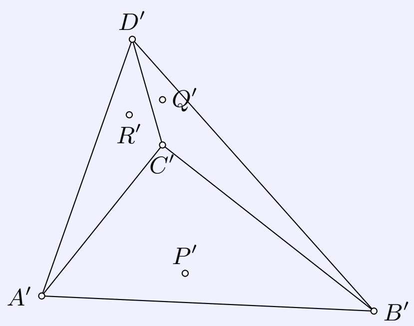
gebildet werden können!
Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d.h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

Aufgabe 5 - 211045
Ermitteln Sie alle Mengen a, b, c aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Gleichung erfüllen

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 2s$$

Aufgabe 6 - 211046
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Abbildung). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211046



6.24 XXII. Olympiade 1982

6.24.1 I. Stufe 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221011

In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, daß alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden!

Beweisen Sie, dass durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für			Insgesamt zur Verfügung
	E_1	E_2	E_3	stehende Mittel in Mark
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

Aufgabe 2 - 221012

In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind.

Peter meinte: "Dann muss auch $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational sein." "Wie beweist du das?" fragte Katrin. "Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x+y$ irrational sein muß, wenn x und y irrational sind." "Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, daß auch ihre Summe $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational ist", erwiderte Peter.

a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, dass es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x+y$ gibt!

b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

Aufgabe 3 - 221013

Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
"Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen."
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
"Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen."
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.

Der Summe wir nun unterstellen
(da ’s möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, daß zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei’n ’s von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreun!
Und jede Ziffer treffe man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd’ vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen E n d beträge!
Dabei beweise man recht rege,
daß es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)

Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

Aufgabe 4 - 221014
Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2...P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks.

Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!

6.24.2 II. Stufe 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221021
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

Aufgabe 2 - 221022
Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, dass in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:
1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b:
"Wenn $a \neq b$ ist, dann muss sogar stets $a > b$ gelten."
Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

Aufgabe 3 - 221023
Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2.
Beweisen Sie, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und dass die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind!
Geben Sie diese Seitenlängen an!

Aufgabe 4 - 221024
Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

6.24.3 III. Stufe 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221031
Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v \qquad \text{und} \qquad x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Aufgabe 2 - 221032
Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, dass M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.
Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!
Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\angle APB$ halb so groß ist wie $\angle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

Aufgabe 3 - 221033
Beweisen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 4 - 221034
Beweisen Sie folgende Aussage:
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

Aufgabe 5 - 221035
Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

Aufgabe 6 - 221036
Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, dass es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt!
Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

6.24.4 IV. Stufe 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221041
Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$, für die gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

Aufgabe 2 - 221042
In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 3A - 221043A
a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$a^x = b \cdot \cos x \qquad (1)$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).
Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, dass es die genannte Eigenschaft besitzt!
b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g + 1$ gilt!
c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, dass für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?
Hinweise: 1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}1416$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

Aufgabe 3B - 221043B
Fünf Kugeln $K_1, ..., K5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte $M_1, ..., M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden.
Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1, ..., K_5$.
Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1, ..., M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Aufgabe 4 - 221044
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

Aufgabe 5 - 221045
Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ genau zwei reelle Lösungen hat!

Aufgabe 6 - 221046
Beweisen Sie, dass sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!

6.25 XXIII. Olympiade 1983

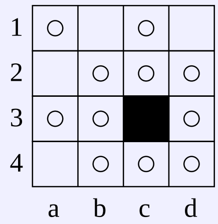
6.25.1 I. Stufe 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231011
Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n, so stellt Anne fest, dass sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt.

Gilt das immer?

Aufgabe 2 - 231012
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

Aufgabe 3 - 231013
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

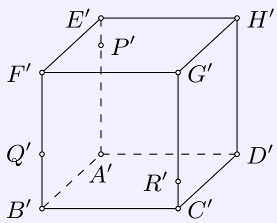


In der Abbildung ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z.B. die Dame in der Abbildung auf c3.

Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

Aufgabe 4 - 231014

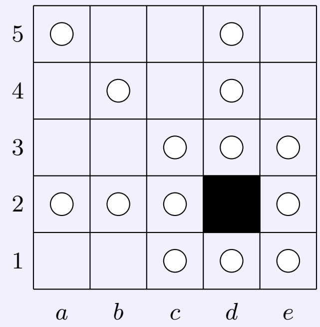


Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, dass $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht, die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, dass der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!

6.25.2 II. Stufe 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231021
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann.

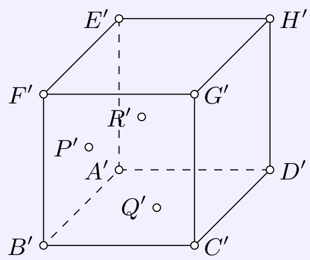


In der Abbildung ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z.B. die Dame auf d2).
Auf einem Quadrat aus 5×5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

Aufgabe 2 - 231022
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $[g; r]$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung erfüllen:

$$\frac{3}{3r^2+1} = g$$

Aufgabe 3 - 231023
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben.
Ferner sind die Bilder P', Q' und R' dreier Punkte P, Q bzw. R gegeben, wobei P auf der Seitenfläche $ABFE$, Q auf der Seitenfläche $BCGF$, R auf der Seitenfläche $DAEH$ liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P, Q und R!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Arbeitsblatt:



Aufgabe 4 - 231024
Beweisen Sie, dass es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt!

6.25.3 III. Stufe 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231031
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g; r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2 - 6r + 10} = g$$

gilt!

Aufgabe 2 - 231032
Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, dass

$$\angle BAC = \angle CBD = 45^\circ \quad \text{und} \quad \angle ABD = \frac{1}{3}\angle BAC$$

gilt. Beweisen Sie, dass dann $AD = \frac{1}{3}AC$ gilt!

Aufgabe 3 - 231033
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, dass jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, dass in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a + d$, $a + 2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, dass (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

Aufgabe 4 - 231034
Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein. Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2 \qquad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

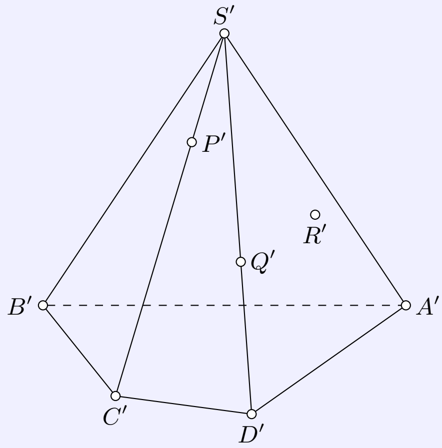
Aufgabe 5 - 231035
Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, dass für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt;
Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.
Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Aufgabe 6 - 231036

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.

Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht!

Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.



6.25.4 IV. Stufe 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231041
Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form

$$z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$$

mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

Aufgabe 2 - 231042
"Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80°$ und der Differenz $u - v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a!"
Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80°$.
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\angle ABC$, $\angle ACB$ sind, so gilt:
$b - c = d$, $u - v = e$, $\beta - \gamma = \delta$.
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

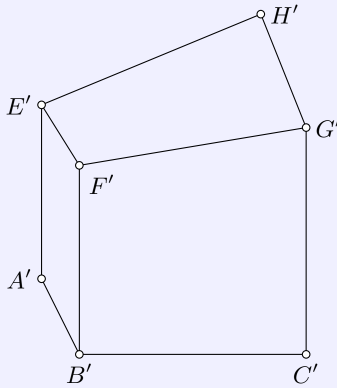
Aufgabe 3A - 231043A
Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $BC = AD$, $CA = BD$ und $AB = CD$ vorausgesetzt.
Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und daß dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d.h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

Aufgabe 3B - 231043B
a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x + 1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \qquad (1)$$

hat!
Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z \leq g + 1$ gilt.
Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat!
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!
b) Beweisen Sie, dass jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muss, d.h., dass sie für jedes reelle x die Gleichung $f(x + 2) = f(x)$ erfüllt!

Aufgabe 4 - 231044
Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und dass die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.
Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!
Arbeitsblatt:



Aufgabe 5 - 231045
Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die $0° \leq x \leq 180°$ (1) und

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \tag{2}$$

gilt!

Aufgabe 6 - 231046
Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:
(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.
(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:
In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$ und $DE = HA$.

6.26 XXIV. Olympiade 1984

6.26.1 I. Stufe 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241011
Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich *im Kopf* nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, dass dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

Aufgabe 2 - 241012
In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D. Für ihn gelte.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!

Aufgabe 3 - 241013
Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x \cdot (y+z) = 0. \qquad (4)$$
$$y \cdot (x+z) = 0. \qquad (5)$$

Aufgabe 4 - 241014
Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k, die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, dass jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und daß jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

6.26.2 II. Stufe 1984, Klasse 10

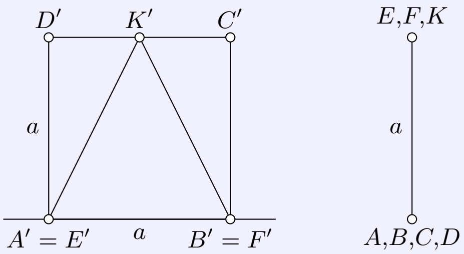
Aufgabe 1 - 241021
Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a, b, c, d) von reellen Zahlen a, b, c, d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2 + bc = 0 \qquad (1)$$
$$ab + bd = 0 \qquad (2)$$
$$ac + cd = 0 \qquad (3)$$
$$bc + d^2 = 0 \qquad (4)$$

Aufgabe 2 - 241022
Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, dass es nicht stumpfwinklig ist und dass für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung $CD \cdot AC = AD \cdot BC$ gilt.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\angle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ!

Aufgabe 3 - 241023
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:
Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

Aufgabe 4 - 241024



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.
Zeigen Sie, dass es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriss, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!
Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben:
Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, dass $UV...Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken $U, V, ..., Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

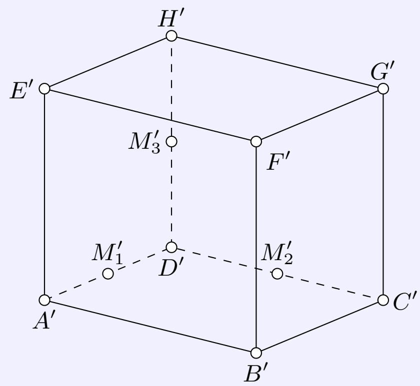
6.26.3 III. Stufe 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241031
In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$:
"Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte."
Bernd behauptet dagegen: "Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat."
Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 2 - 241032
Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \qquad (1)$$

Aufgabe 3 - 241033
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten die Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen.
Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, dass das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!
Arbeitsblatt:



Aufgabe 4 - 241034
Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.
Er findet z.B., dass sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, dass sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen lässt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

Aufgabe 5 - 241035
a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $AC' = 3 \cdot AC$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $BY = 2 \cdot C'Y$ gilt!
Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.
b) Beweisen Sie, dass die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $BX : CX$ führt! Ermitteln Sie diesen Wert!

Aufgabe 6 - 241036
Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f(\frac{3}{7})$.
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

6.26.4 IV. Stufe 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241041
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985}$ gilt!

Aufgabe 2 - 241042
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $BD=2\cdot CD$, $CE=2\cdot AE$, $AF=2\cdot BF$ gilt.
Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Aufgabe 3A - 241043A
a) Man beweise, dass für jede reelle Zahl p mit $1\leq p\leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2\leq x<4$ gilt $f(x)=p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2)=\frac{f(x)}{5\cdot f(x)-1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1\leq p\leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

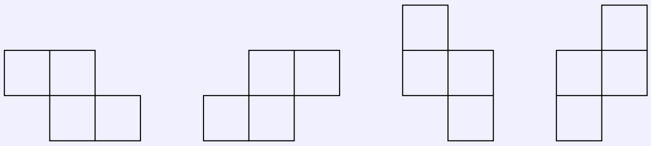
Aufgabe 3B - 241043B
Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann nicht entartet, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 4 - 241044
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a!+b!=(a+b)!$ gilt!
Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n\geq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1\leq k\leq n$ gilt; ferner ist $0!=1$ definiert.

Aufgabe 5 - 241045
Es sei
$$T=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{999998}}+\frac{1}{\sqrt{999999}}+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$
Weisen Sie nach, dass dann $1998<T<1999$ gilt!

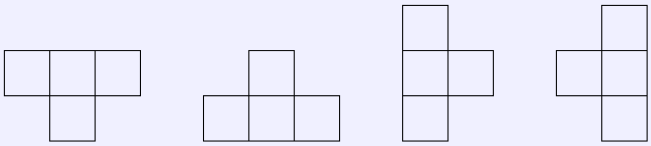
Aufgabe 6 - 241046

a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen $1, 2, ..., 64$ zu nummerieren, dass für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.

b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.

6.27 XXV. Olympiade 1985

6.27.1 I. Stufe 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251011

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$ gilt!

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Aufgabe 2 - 251012
Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest.

Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag.

Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: "Ich bin heute $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie mein Sohn und 11 mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie sie und 4 mal so alt wie mein Sohn."

Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, dass diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen. Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: "Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind."

Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

Aufgabe 3 - 251013
Der Querschnitt einen Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt.

Wegen der geforderten Durchflussmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitte (Sohle des Grabens) vorgegeben.

Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F!

Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.

Man gebe eine derartige Lösung an.

Aufgabe 4 - 251014
Stellen Sie die Zahl 1985

a) im 2adischen Positionasystem (*Dualsystem*)

b) im 3adischen Positionssystem dar!

c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, dass die Zahl ungerade ist?

Anmerkung : Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern 0, 1, ..., $m-1$ benutzt.

6.27.2 II. Stufe 1985, Klasse 10

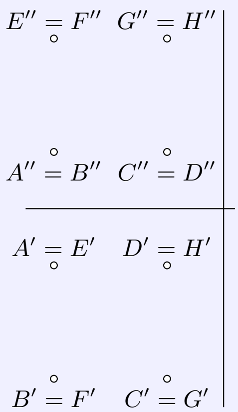
Aufgabe 1 - 251021
Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1985$ an!

Aufgabe 2 - 251022
Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$$

Aufgabe 3 - 251023
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $AB = 20$ cm und der Höhenlänge $CD = 8$ cm.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben werden, dass E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und dass dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, dass es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

Aufgabe 4 - 251024



Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es die Abbildung in Zweitafelprojektion zeigt.
Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch Herausschneiden eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist.
Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

6.27.3 III. Stufe 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251031
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a+b=(a-b)^2$ erfüllen!

Aufgabe 2 - 251032
a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall $0 \leq x \leq a$ (1) durch

$$f(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} \tag{2}$$

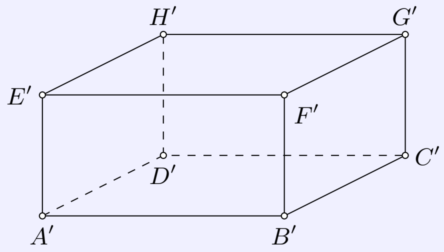
definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird!
Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Aufgabe 3 - 251033
Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen.
Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.
Ermitteln Sie
a) die kleinste,
b) die größte
Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

Aufgabe 4 - 251034
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.
(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

Aufgabe 5 - 251035
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

Aufgabe 6 - 251036
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.
a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecken EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!
Arbeitsblatt:



6.27.4 IV. Stufe 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251041
Beweisen Sie, dass

$$\frac{1281^3 + 1282^3 + 1283^3 + 1284^3 + 1285^3 + 1286^3 + 1287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

Aufgabe 2 - 251042
Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k.
Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist!
Beweisen Sie, dass jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Aufgabe 3A - 251043A
Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:
- Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen lässt!
Beweisen Sie, dass durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!
Hinweis: Unter P_iP_j ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

Aufgabe 3B - 251043B
Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4.
Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, ..., a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, dass es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 = b_1 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + a_3x_3^2 = b_2 \qquad (2)$$
$$x_2^2 + a_4x_3^2 = b_3 \qquad (3)$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

Aufgabe 4 - 251044
Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen, b) genau eine reelle Lösung, c) keine reelle Lösung besitzt!

Aufgabe 5 - 251045
Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, dass als Schnittfigur a) ein regelmäßiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Viereck, c) ein regelmäßiges Fünfeck entsteht!

Aufgabe 6 - 251046
Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, ...)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:
(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.
Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

6.28 XXVI. Olympiade 1986

6.28.1 I. Stufe 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261011
Auf welche Ziffer endet die Zahl

$$z = 4444^{444^{44^4}}\,?$$

Aufgabe 2 - 261012
Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle BAD$ hat. Jörg behauptet, daß sich allein aus diesen Angeben die Größe des Winkels $\angle CBA$ ermitteln läßt.

Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CBA$!

Aufgabe 3 - 261013
Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.

In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden? Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

Aufgabe 4 - 261014
Jürgen behauptet, dass es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 7 & 0 & 1 & \cdot & 3 & 4 \\
\hline
2 & 5 & 0 & 3 & & & \\
 & 3 & 4 & 0 & 4 & & \\
\hline
3 & 0 & 4 & 3 & 4 & &
\end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!

Hinweis : In einen Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern 0, 1, ..., $m-2$, $m-1$. Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen noch fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.

6.28.2 II. Stufe 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261021
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

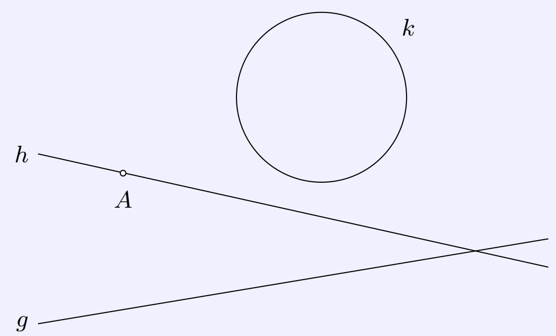
$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0 \qquad (1)$$

gilt!

Aufgabe 2 - 261022
Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.
a) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?
b) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

Aufgabe 3 - 261023
Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar.
Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen. Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine klein angehängte 2 gekennzeichnet.
a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an!
Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[110001]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!
b) Eine natürliche Zahl heiße dekadische Spiegelzahl, wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.
Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

Aufgabe 4 - 261024
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.
Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!
Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!
Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?
Hinweis:
Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g, h, k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist.
Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben. Arbeitsblatt:



6.28.3 III. Stufe 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261031
Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Aufgabe 2 - 261032
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen $0, 1, ..., 6$ je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht).
Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!
b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!
c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.)
Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen.
Beispielsweise gelten die beiden Ketten (2, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (1, 2) und (5, 4), (4, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 5) als einander gleich.

Aufgabe 3 - 261033
Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, dass A zwischen S und B liegt.
Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, dass sie h in S schneidet.
Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf g.
b) Der Innenwinkel $\angle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.
(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.
(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage (I) zutrifft!
(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

Aufgabe 4 - 261034
Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!
Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

Aufgabe 5 - 261035
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt:
Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

Aufgabe 6 - 261036
Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

6.28.4 IV. Stufe 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261041
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge.
Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

Aufgabe 2 - 261042
Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Aufgabe 3A - 261043A
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \qquad (2)$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \qquad (3)$$

Aufgabe 3B - 261043B
a) Beweisen Sie, dass fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, dass stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

Aufgabe 4 - 261044
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung $\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz}$, worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1, \qquad 1 \leq y \leq k-1 \qquad 1 \leq z \leq k-1 \qquad 1 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

Aufgabe 5 - 261045
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 je genau einmal vor.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen.
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz Dreierkette genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus den selben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1, ..., K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1, ...,K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1, ..., K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen M= $\{K_1, ...,K_7\}$ und $M' = \{K'_1, ...,K'_7\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

Aufgabe 6 - 261046
Beweisen Sie, dass es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

6.29 XXVII. Olympiade 1987

6.29.1 I. Stufe 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271011
Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

Aufgabe 2 - 271012

a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt?

b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt!

Aufgabe 3 - 271013

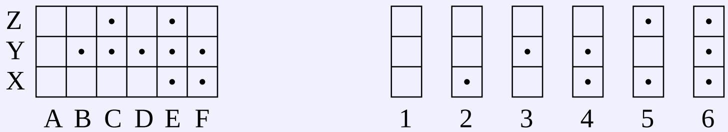


Abbildung a) Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Abbildung b) zusammengesetzt werden.

Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!

Hinweis: Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die in der Abbildung a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z.B. das rechte obere Feld mit FZ bezeichnet.

Aufgabe 4 - 271014
Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

6.29.2 II. Stufe 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271021

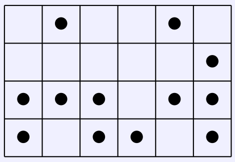


Abbildung a)

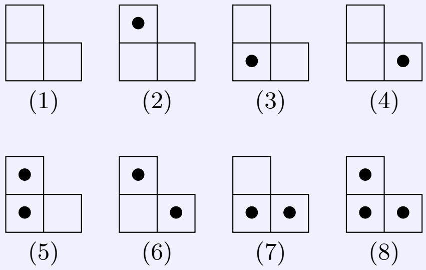


Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) soll aus den Teilen der Abbildung b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

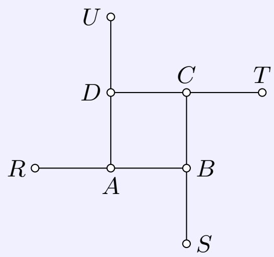
Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechteckes, die auf diese Weise entstehen können!
Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

Aufgabe 2 - 271022
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n+2} \qquad (1)$$

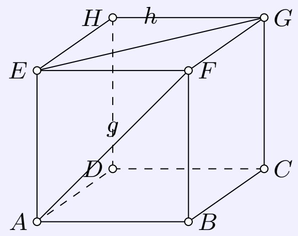
eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 3 - 271023



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie in der Abbildung um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.
a) Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!

Aufgabe 4 - 271024



Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet.
Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.
Ermitteln Sie den Abstand von g und h!
Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

6.29.3 III. Stufe 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271031
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

Aufgabe 2 - 271032
Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl.
Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x + a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so dass für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f.
Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f.
Hinweis:
Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

Aufgabe 3 - 271033
Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, dass sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren.
Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4.
Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d.h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.
Folgende Maße seien gegeben: $r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.
Wie groß muss dann h_4 sein?

Aufgabe 4 - 271034
Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die $x^{2x} = \frac{1}{2}$ gilt!

Aufgabe 5 - 271035
Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $BP : PC$ und $AM : MP$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Aufgabe 6 - 271036

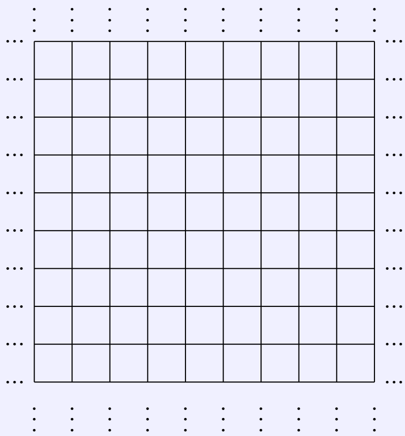


Abbildung a)

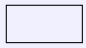


Abbildung b)

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abbildung a).
Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abbildung b) so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
Kein Punkt der Ebenen soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.
Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

6.29.4 IV. Stufe 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271041
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

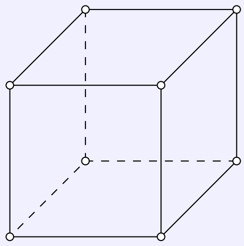
genau zwei reelle Lösungen hat!

Aufgabe 2 - 271042
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Aufgabe 3A - 271043A



Die Abbildung wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.
Zeigen Sie, dass dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!
Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen!
Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der die Abbildung entstehen würde!
Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 3B - 271043B
Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt:
Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2 \quad (1) \qquad ; \qquad b' = 2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird):
Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d.h.

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt.

Aufgabe 4 - 271044
Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, dass der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und dass sich k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $P_1P_2 = 10$ cm gilt.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!
Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z.B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

Aufgabe 5 - 271045
Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:
(1) Endet das Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.
(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.
(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.
(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.
Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendung sind zugelassen.
Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

Aufgabe 6 - 271046
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ gilt, dass jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leq x \leq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5) \leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_5^2 + b_5^2 \leq \frac{5}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5)$$

6.30 XXVIII. Olympiade 1988

6.30.1 I. Stufe 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281011

a) Bernd hörte, dass der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies:

Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen.

Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!

b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 2 - 281012
Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.

Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

Aufgabe 3 - 281013
Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h = 10cm$. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P*$ abgetrennt werden, deren Volumen $V*$ ein Drittel des Volumens V der ursprünglichen Pyramide P ist. Wie groß ist die Höhenlänge h^* dieser abgetrennten Pyramide P^*?

$Hinweis$: Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm

liegen?

Aufgabe 4 - 281014
Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor:

Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.

1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45893127, in Gruppen 045 893 127.
Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme $7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme $3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme $5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.

Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl $+15 - 46 + 17 = -14$; diese ist durch 7 teilbar.

2. Beispiel: Zu der Zahl 45693127 findet man entsprechend die Gesamtsumme $+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die *Gesamtsumme* durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.
Beweisen Sie diese Aussage!

6.30.2 II. Stufe 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281021
Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

Aufgabe 2 - 281022
Weisen Sie nach, dass es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und dass diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

Aufgabe 3 - 281023
Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, dass k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:
Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

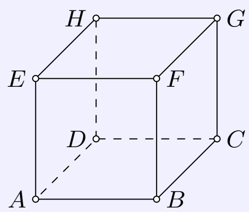
Aufgabe 4 - 281024
Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$.
a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, dass die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

6.30.3 III. Stufe 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281031
Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 u.s.w. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

Aufgabe 2 - 281032
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (f, g) von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt $f(x + 1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

Aufgabe 3 - 281033



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm.
Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!
Hinweis:
Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen.
Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, dass sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

Aufgabe 4 - 281034
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \qquad (1)$$

Aufgabe 5 - 281035
Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlänge $c = AB$ und $a = BC$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\angle ACB$ hat die Größe γ.
I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Anzahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenanten Fall diese Zahl!

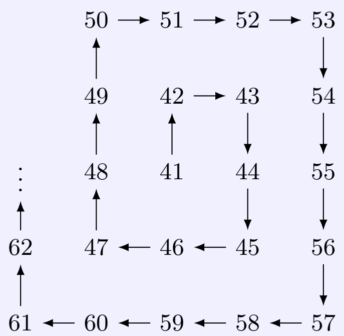
Aufgabe 6 - 281036
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n + 2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis:
Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.

6.30.4 IV. Stufe 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281041
Zeigen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!

Aufgabe 2 - 281042
Zeigen Sie, dass es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es ist $f(0) = 7$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x)\cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Aufgabe 3A - 281043A



Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:
Beweisen Sie, dass (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abbildung die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

Aufgabe 3B - 281043B
Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.
a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält. b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Aufgabe 4 - 281044
Beweisen Sie, dass für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

Aufgabe 5 - 281045
In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.
Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.
Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage.
Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

Aufgabe 6 - 281046
Beweisen Sie, dass zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt!

6.31 XXIX. Olympiade 1989

6.31.1 I. Stufe 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291011
Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

Aufgabe 2 - 291012
Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.

Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, daß nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem Zahlenwert Z "stehenbleibt", d.h., daß der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen - durch das interne Runden des Rechners entstandenen - sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).

a) Beweisen Sie, daß aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muß, unabhängig von der Ausgangszahl A!

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, ..., 10$ überprüfen.

Aufgabe 3 - 291013
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.

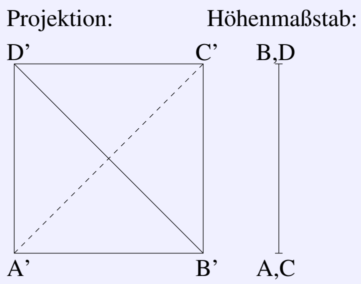
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts.

Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein *Zug*. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines *Zuges* der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von *Zügen*, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 - 291014



Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!

6.31.2 II. Stufe 1989, Klasse 10

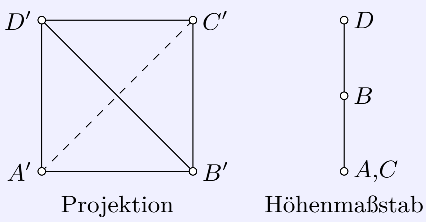
Aufgabe 1 - 291021
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \qquad (1)$$
$$\frac{x+\sqrt{x}}{y+\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 291022
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus.
Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt.
Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein Zug.
Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein Zug ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt.
Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines Zuges der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht.
Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht.
Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von Zügen, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 3 - 291023
Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.
Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $AB < 3 \cdot CD$ gilt.

Aufgabe 4 - 291024



Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.
Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.
a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!
b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des Körpers!

6.31.3 III. Stufe 1989, Klasse 10

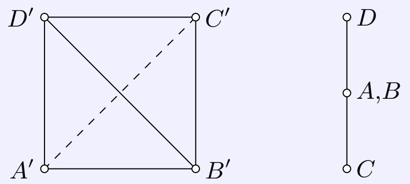
Aufgabe 1 - 291031
Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Aufgabe 2 - 291032
In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geq 3$ von Städten $S_1, S_2, ..., S_n$.
Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes.
Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, dass für jede Stadt gilt:
Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.
Untersuchen Sie für jedes $n \geq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, dass für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!
(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gilt:
Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

Aufgabe 3 - 291033



Projektion Höhenmaßstab

Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat.
Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

Aufgabe 4 - 291034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Aufgabe 5 - 291035
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:
(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.
(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.
(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.
Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

Aufgabe 6 - 291036
a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder −) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.
b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (1) gilt.

6.31.4 IV. Stufe 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291041
Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a.
Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $G_1G_2 = H_1H_2 = J_1J_2 = a$.

Aufgabe 2 - 291042
Von zwei reellen Zahlen werde gefordert:
Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.
Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Aufgabe 3A - 291043A
Man beweise folgende Aussage:
Die Folge $(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis:
Ist (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Folge und sind $k \geq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

Aufgabe 3B - 291043B
Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E.
Sie seien so im Raum gelegen, dass keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und dass keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleich lang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

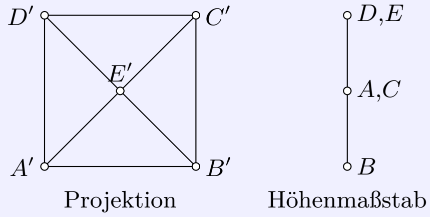
Aufgabe 4 - 291044

				65
	41			
		81		
1				

In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderungen erfüllen!

Aufgabe 5 - 291045
Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Aufgabe 6 - 291046



Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt des Quadrates.
Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft!
Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

6.32 XXX. Olympiade 1990

6.32.1 I. Stufe 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301011

a) Beweisen Sie, dass es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!

b) Beweisen Sie, dass es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!

Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Aufgabe 2 - 301012

Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen lässt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, dass darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, ..., Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.

Bert sagt dazu: "Es genügt, nur die natürlichen Zahlen $N = 2, ..., G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit $G \leq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch $G = \text{INT}(\text{SQR}(Z))$ ermittelt werden kann)."
Er sagt außerdem: "Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren."

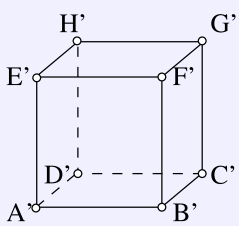
Armin entgegnet: Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, dass jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird."
a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?
b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

Aufgabe 3 - 301013

Wenn die Produktion eines Betriebes um 50% zurückging (z.B. infolge des Ausfallens eines Teils der Anlage), so muss sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d.h. um 100% erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.
Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!

(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muss sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Aufgabe 4 - 301014



Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Vierecksflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate. Die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang. D' liegt im Inneren von $A'B'F'E'$.

Beweisen Sie, dass es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Vierecksflächen einen Innenwinkel der Größe $90°$ hat!

6.32.2 II. Stufe 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301021

$$\begin{array}{cccccc} & & m & o & r & d \\ + & & r & a & u & b \\ \hline = & k & r & i & m & i \end{array}$$

In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.

a) Beweisen Sie, dass sogar in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Aufgabe 2 - 301022

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist! Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.

Aufgabe 3 - 301023

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $AB > AD$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

Aufgabe 4 - 301024

Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = ((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})^{-1}$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_{1989} + a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

6.32.3 III. Stufe 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301031
Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z.B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Aufgabe 2 - 301032
Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z; \qquad a_2 = z + d; \qquad a_3 = z + 2d; \qquad a_n = z + (n-1)d \qquad (1)$$

($n \geq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen) eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geq 1$, $d \geq 1$ sind und für die $n \geq 3$ sowie gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1991 \qquad (2)$$

Aufgabe 3 - 301033
Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.

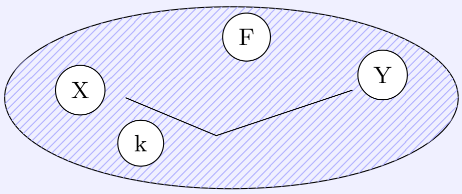


Abbildung a)

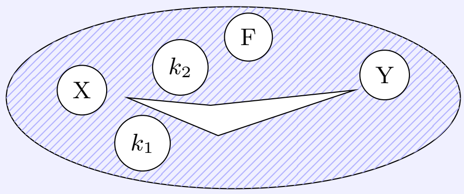


Abbildung b)

Die Abbildungen a und b verdeutlichen den Vorgang des "Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$":
Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2.
Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d.h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so lässt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, dass die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.
Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.
b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so lässt sich F ebenfalls so verbiegen, dass die Randkurve zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.
Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

Aufgabe 4 - 301034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2| < 1 \qquad (1)$$

Aufgabe 5 - 301035
Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 6 - 301036
Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben.
Gefordert wird, dass c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\angle ACB$ die Größe von $60°$ hat.
a) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden.
b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

6.32.4 IV. Stufe 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301041
Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:
(1) Die Seite AB hat die Länge $AB = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $CD = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $AC = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $BD = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S, für diesen hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe φ.
(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 2 - 301042
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist.
Ferner sei $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$$

und es werde $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ vorausgesetzt.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Aufgabe 3A - 301043A
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Aufgabe 3B - 301043B
Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass zwischen ihnen folgende Abstände auftreten: $AB = 7{,}2$ cm; $AC = 9{,}6$ cm; $AD = 15{,}6$ cm; $BC = 12{,}0$ cm; $BD = 15{,}6$ cm; $CD = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Aufgabe 4 - 301044
Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung gilt:

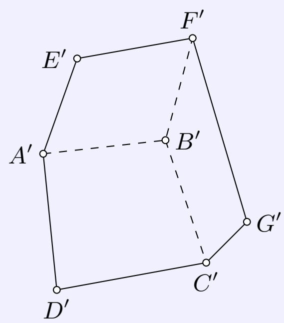
$$f(a) + f(a + b) - f(a - b) = a^2 + 4b + 2$$

Aufgabe 5 - 301045
Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:
Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen.
Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,
a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.
Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert.
Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

Radius r in cm	Anzahl der bei a)	Kästchen bei b)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm^2
1	4	16	$(1 + 4) : 2 = 2{,}5$
2	32	60	$(8 + 15) : 2 = 11{,}5$
3	88	132	$(22 + 33) : 2 = 27{,}5$
4	164	224	$(41 + 56) : 2 = 48{,}5$
5	276	344	$(69 + 86) : 2 = 77{,}5$

Nun wurde bemerkt, dass jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben.
Trifft das auch bei der Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Aufgabe 6 - 301046
Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder $A', B', C', D', E', F', G'$ von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion.
Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$.
Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)



6.33 XXXI. Olympiade 1991

6.33.1 I. Stufe 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311011
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung (1) gilt: $x + y < 1991$.

Aufgabe 2 - 311012
Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm^3, der Oberflächeninhalt 17454 cm^2 und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.

Inge sagt, dass sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und daß die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.

Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.

Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

Aufgabe 3 - 311013
Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat) heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \qquad (1)$$

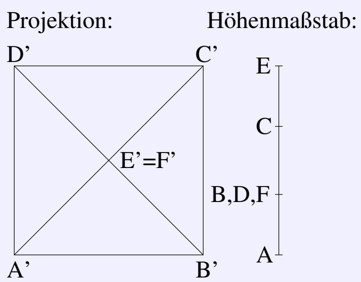
Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die Ungleichung

$$f(u) + f(v) < 2 \cdot f\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad (2)$$

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f(a) + f(a + 2b) &< 2 \cdot f(a + b), \qquad (3)\\ f(a) + f(a + 3b) &< f(a + b) + f(a + 2b). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 - 311014



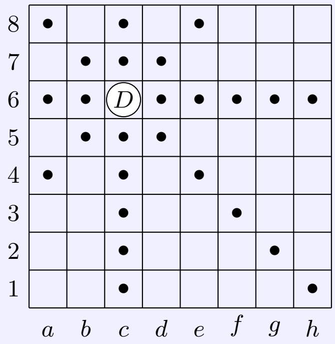
Zur Abbildung wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriss und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

$A'B'C'D'$ ist ein Quadrat, $E' = F'$ sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrecken geteilt.

Weisen Sie nach, dass die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

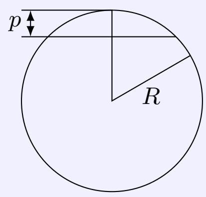
6.33.2 II. Stufe 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311021



Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagerecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung von der Dame auf c6 genau die markierten Felder bedroht.
Leonhard Euler (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, dass keine dieser Damen eine andere bedroht.
Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, dass keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören. Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.
Hinweis: Die verbotenen Felder wirken nicht etwa als Sperre der Bedrohung; z.B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

Aufgabe 2 - 311022
Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, dass die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig.
Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungsachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.
Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen $V(C)$ von C ermitteln.
Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müssten zu diesem h unterschiedliche Werte $V(C)$ möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, $V(C)$ nicht allein aus h ermitteln.
Wer hat recht?



Hinweis : Für das Volumen $V(K), V(A), V(Z)$ einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A (Pfeilhöhe p siehe Abbildung) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r, Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad ; \qquad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3 \qquad ; \qquad V(Z) = \pi r^2 h$$

Aufgabe 3 - 311023
Man beweise, dass sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, dass die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.

Aufgabe 4 - 311024
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24\sqrt{t}}$ rational ist!

6.33.3 III. Stufe 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311031
Beweisen Sie, a) dass gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 23 \cdot 25} > \frac{1}{5}$$

b) dass für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2m-1)} > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

Aufgabe 2 - 311032
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$
a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1$,
b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1$
erfüllen.
Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, dass für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.
Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g+1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Aufgabe 3 - 311033
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat $ABCD$, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates $ABCD$.
Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.
Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = HF$ und $k = HK$ das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Aufgabe 4 - 311034
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen
(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n,m ist $n = 1000$.
b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

Aufgabe 5 - 311035
Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.
a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?
b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?

Aufgabe 6 - 311036

Beweisen Sie, dass es unendlich viele verschiedene Paare (f, g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gilt $f(0) = 1992$.

(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Hinweis: Zwei Paare (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.

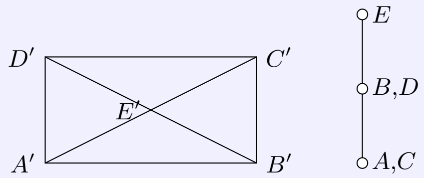
6.33.4 IV. Stufe 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311041
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:
(1) Für jedes Paar $(a;b)$ reeller Zahlen a, b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$

Aufgabe 2 - 311042
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B.
Ferner sei k_A der Kreis durch A, E, F; es sei k_B der Kreis durch B, F, D; und es sei k_C der Kreis durch C, D, E.
Man beweise, dass bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A, B, C, D, E, F, k_A, k_B, k_C gibt, die drei Kreise k_A, k_B, k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 3A - 311043A
Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte $f(n)$ ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung $f(f(m) + f(n)) = m + n$ gilt.
Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert $f(1992)$ bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

Aufgabe 3B - 311043B
In der Abbildung ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt.
$A'B'C'D'$ ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D.
Vorausgesetzt wird ferner, dass der Körper genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!
b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriss aus der Abbildung übernommen ist!
Im Auf- und Seitenriss sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren Linien verdeckt); die Abbildung selbst ist in dieser Weise aufzufassen.



Aufgabe 4 - 311044
Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.
Man zeige, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass für jedes Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n - m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m}$$

gilt. Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

Aufgabe 5 - 311045
Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

Aufgabe 6 - 311046
Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Man ermittle die letzte Ziffer (Einerstelle) in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1992}]$.
Hinweis: Ist z eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

6.34 XXXII. Olympiade 1992

6.34.1 I. Stufe 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321011
Bernd rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1:7 erhält er die mit 7 Stellen nach den Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.1428571.

Nun meint er: Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne noch einen weiteren Schritt zahlenmäßigen Rechnens durchführen zu müssen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, mit nur einem einfachen weiteren Rechenschritt auszukommen.

Beschreiben und begründen Sie, wie der gesuchte Dezimalbruch auf eine dieser Arten gefunden werden kann!

Aufgabe 2 - 321012
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein Pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem Pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 2$ sein.

Aufgabe 3 - 321013
In einer Urne liegen 10 Kugeln, auf denen die Zahlen von 1 bis 10 stehen, jede dieser Zahlen auf genau einer Kugel.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd je eine Kugel (ohne dabei die Zahl auf ihr zu kennen). Nachdem so jeder Spieler fünf der Kugeln erhalten hat, werden folgendermaßen Punkte vergeben: A bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 2 teilbar ist; B bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden vier Ergebnisse eines Spiels möglich sind:

   Beide Spieler bekommen einen Punkt;
   keiner bekommt einen Punkt;
   nur A bekommt einen Punkt;
   nur B bekommt einen Punkt.

b) Es werde eine große Zahl solcher Spiele gespielt (damit dies möglich ist, werden nach jedem Spiel die Kugeln wieder in die Urne gelegt).
   Gefragt wird, wie oft dabei A und wie oft B einen Punktgewinn erwarten kann.

Geben Sie ein Computerprogramm an, das die Beantwortung dieser Frage unterstützt! Schätzen Sie ein, ob Ihr Programm Vermutungen oder genauer gesicherte Aussagen (über die Punktzahlen im Verhältnis zur Zahl der Spiele) ermöglicht!

Aufgabe 4 - 321014

		1	1	1
2		2	1	
	2			
2		2		
			1	

Wir betrachten ein Quadrat, das sich aus 25 kongruenten Teilquadraten zusammensetzt. Mit 5 verschiedenen Farben werden je 5 Teilquadrate gefärbt; dadurch entstehen 5 einfarbige Muster. Für jedes solche Muster kann man feststellen, ob es eine Symmetrieachse hat, die zugleich Symmetrieachse für das ganze Quadrat (ohne Berücksichtigung der Farben) ist. Eine solche Symmetrieachse eines Musters werde *zulässig* genannt.

In der Abbildung beispielsweise hat das Muster der Farbe 1 keine *zulässige* Symmetrieachse; dagegen hat das Munter der Farbe 2 die angedeutete *zulässige* Symmetrieachse. (Seine drei anderen Symmetrieachsen sind nicht *zulässig.*)

Ermitteln Sie, ob es möglich ist, eine Färbung anzugeben, bei der jedes der 5 Muster genau eine *zulässige* Symmetrieachse hat, und zwar so, dass

a) nur eine der Symmetrieachsen des ganzen Quadrates,

b) jede der vier Symmetrieachsen des ganzen Quadrates

unter den Symmetrieachsen der Muster vorkommt.

6.34.2 II. Stufe 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321021
Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl z, die genau vier Teiler t_1, t_2, t_3, t_4 mit $1 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < z$ hat!

Aufgabe 2 - 321022
An einem Kraftsportwettbewerb nehmen Robert, Stefan und Tilo teil. Robert schafft 20 Klimmzüge.
Stefan nimmt sich vor, mindestens 80% der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen; Tilo will mindestens 60% der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen.
Gibt es eine kleinstmögliche Anzahl von Klimmzügen für Stefan und Tilo, so dass beide Vorhaben erfüllt werden?
Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese Anzahl!

Aufgabe 3 - 321023
Gegeben seien n zueinander parallele Geraden sowie weitere n zu ihnen senkrechte, also untereinander ebenfalls parallele Geraden.
Damit entstehen n^2 Schnittpunkte (Gitterpunkte).
Klaus versucht, einen geschlossenen (d.h. zum Anfangspunkt zurückkehrenden) Streckenzug zu zeichnen.
Jede Strecke dieses Streckenzuges soll auf einer der gegebenen Geraden liegen, und jeder Gitterpunkt soll genau einmal von dem Streckenzug erreicht werden.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 4$ und für $n = 6$ der Versuch erfolgreich realisiert werden kann!
b) Beweisen Sie, dass der Versuch für $n = 9$ nicht erfolgreich realisiert werden kann!

Aufgabe 4 - 321024
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm mehr als 64 Kreise mit einem Durchmesser von je 1 cm so einzubeschreiben, dass sich je zwei Kreise nicht überschneiden und dass kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt!

6.34.3 III. Stufe 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321031
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x,y, für die gilt:

$$19 < x^2 + y^2 < 93$$

Aufgabe 2 - 321032
Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.
a) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
b) Beweisen Sie, dass ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

Aufgabe 3 - 321033
Zeigen Sie, dass es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, dass jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!
Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundradius r und die Höhe h solcher Kegel!

Aufgabe 4 - 321034 = 300935
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ natürlicher Zahlen x,y,z, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 5 - 321035
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl k mit $k > 1$ die folgende Aussage gilt:
Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl 11...1 eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

Aufgabe 6 - 321036
Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch die Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

6.34.4 IV. Stufe 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321041
Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Aufgabe 2 - 321042
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$$p_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$$

auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so dass in dem (so geschriebenen) Polynom jede Potenz von x genau einen Koeffizienten erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind mindestens drei Koeffizienten ungerade.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind genau drei Koeffizienten ungerade.

Aufgabe 3A - 321043A
Zeigen Sie, dass es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, das heißt: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; ...; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.
(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:
(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2...P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1P_n...P_{k+2}P_{k+1}$ über.
(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Streckenzug $P_{k+1}P_k...P_2P_1$) abgebildet.
Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind.
Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. Freilich können Sie genaues Zeichnen auch durch - dann lückenlos zu gebende - Konstruktionsbeschreibung ersetzen.

Aufgabe 3B - 321043B
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$

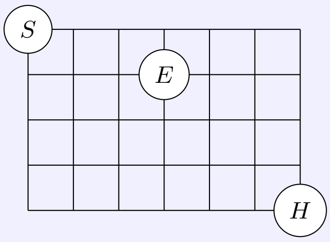
durch das Polynom

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Aufgabe 4 - 321044
Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahl 2^n für alle natürlichen Zahlen n aus $\{10, 11, 12, ..., 108, 109\}$ fest:
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^10 = 1024$ auftritt.
Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt.
Nun wird folgende Frage gestellt:
(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$) zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?
Beweisen Sie, dass die Frage (**) mit "Nein" zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne dass man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$) wieder berechnen müsste!

Aufgabe 5 - 321045



In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar.
Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.
Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis.
Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.
Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus:
Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.
a) Er erklärt dazu: "Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E."
Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: "Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen."
Trifft das zu?

Aufgabe 6 - 321046
Man beweise:
Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

6.35 XXXIII. Olympiade 1993

6.35.1 I. Stufe 1993, Klasse 10

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 331011 = 330911
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

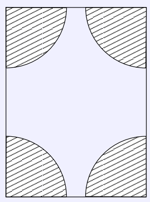
Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 2 - 331012 = 330912
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Aufgabe 3 - 331013 = 330913
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Aufgabe 4 - 331014 = 330914



Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, daß genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Aufgabe 5 - 331015 = 330915
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Aufgabe 6 - 331016 = 330916
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, daß das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, daß für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

6.35.2 II. Stufe 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331021
Untersuchen Sie, ob es eine vierstellige Quadratzahl q mit den nachstehenden Eigenschaften (1), (2) gibt! Wenn es sie gibt, ermitteln Sie alle derartigen Quadratzahlen!
(1) Alle vier Ziffern von q sind kleiner als 7.
(2) Vergrößert man jede Ziffer von q um 3, so ist die entstehende vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Aufgabe 2 - 331022
Man beweise, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die $121 \cdot n - 3$ das Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wäre.

Aufgabe 3 - 331023
Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ABC mit $AC = BC$ die folgende Aussage gilt!
Verlängert man die Strecke AC über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke CB zwischen C und B, dass $3 \cdot CL = CB$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von AB, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgabe 4 - 331024
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, dass keine über den Rand hinausragt!

6.35.3 III. Stufe 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331031
Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2 - 331032
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet: Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und statt dessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. (Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)
Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!
Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

Aufgabe 3 - 331033 = 330933
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, ...$ bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 4 - 331034

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ \hline = & F & Ü & N & F \end{array}$$

Das nebenstehende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!
Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in der einen dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Aufgabe 5 - 331035
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m und n, für die

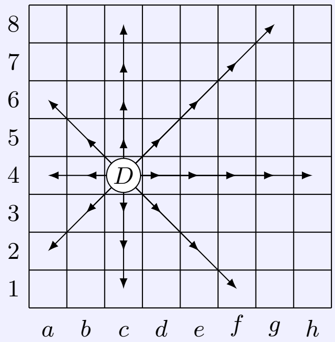
$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$$

eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 6 - 331036
Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r, die Spitze von K sei S, die Höhe $h = MS$ von K betrage $h = r \cdot \sqrt{3}$.
Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, dass der Winkel $\angle AMB$ die Größe $120°$ hat.
Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, dass sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.
Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r!

6.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331041 = 330941



Auf einem Schachbrett wird eine Figur Dame betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.
Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:
(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Aufgabe 2 - 331042
Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist.

Aufgabe 3 - 331043 = 330943
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
a) Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.
b) Man ermittle diesen Flächeninhalt f, formelmäßig durch die Seitenlänge a des Achtecks ausgedrückt.

Aufgabe 4 - 331044
Jemand findet die Angabe

$$23! = 2585201673 * 8849 * 6640000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie diese! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 5 - 331045 = 330945
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

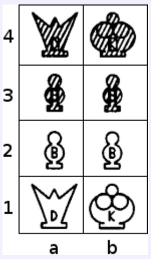
Aufgabe 6 - 331046
An einem Dreieck ABC wurde festgestellt, dass es folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Der Innenwinkel $\angle BAC$ ist ein spitzer Winkel.
(2) Die Seite BC hat die Länge $a = BC = 6{,}5$ cm.
(3) Für die Seitenlängen $b = AC$ und $c = AB$ gilt $b - c = 4{,}5$ cm.
(4) Für die Längen h_b bzw. h_c der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen gilt: $h_c - h_b = 2{,}7$ cm.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

6.36 XXXIV. Olympiade 1994

6.36.1 I. Stufe 1994, Klasse 10

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 341011 = 340911



Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, daß

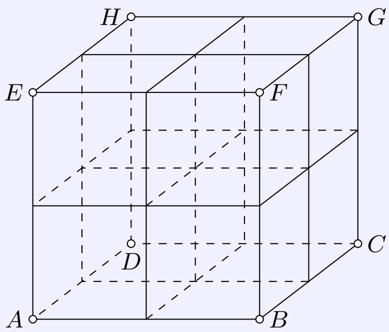
a) das Spiel unentschieden endet,

b) Weiß gewinnt,

c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, daß die drei Behauptungen zutreffen.

Aufgabe 2 - 341012 = 340912



Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel. Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.
Wieviele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?

Aufgabe 3 - 341013 = 340913
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Aufgabe 4 - 341014 = 340914
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, daß in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Aufgabe 5 - 341015 = 340915
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, daß beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Aufgabe 6 - 341016 = 340916
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x|-2|\,, \\ f_2(x) &= |||x|-2|-2|\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

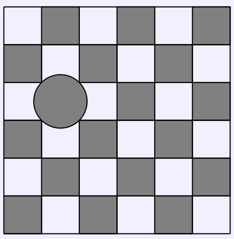
6.36.2 II. Stufe 1994, Klasse 10

Aufgabe 1 - 341021
a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?
Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Aufgabe 2 - 341022
Anja und Bernd sprechen darüber, wie man die an den Kreis k, dessen Mittelpunkt M sei, in einen seiner Punkte P gelegte Tangente t vollständig ausreichend beschreiben kann.
Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die auf MP senkrecht steht und mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.
Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen aus der anderen folgt, d.h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:
(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.
(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.
Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2)!

Aufgabe 3 - 341023
Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Zifferndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht.
Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von $9^2, 99^2, 999^2$ die Vermutung, dass in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten.
Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes einzelne Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, welche Ziffern darin vorkommen und an welchen Stellen sie dort stehen.
Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 4 - 341024



Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt die Abbildung ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Die Abbildung zeigt einen solchen Umkreis.)
a) Beweisen Sie, dass für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt:
Der Flächeninhalt des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20%.
b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt!

6.36.3 III. Stufe 1994, Klasse 10

Aufgabe 2 - 341031 = 340932
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Aufgabe 2 - 341032 = 340933
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

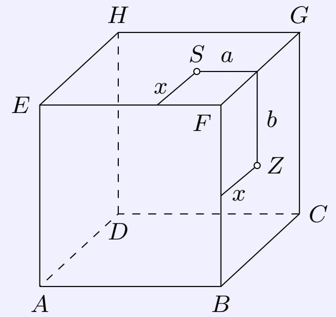
ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Aufgabe 3 - 341033
Antje und Beate beschließen, nachdem ihnen das Spielen mit gewöhnlichen Spielwürfeln zu langweilig wurde, diese durch reguläre Oktaeder zu ersetzen mit den Augenzahlen 1 bis 8.
Bevor sie an die Herstellung dieser Spieloktaeder gehen, vereinbaren sie noch, dass (in Analogie zum Spielwürfel) die Summe der Augenzahlen je zweier einander gegenüberliegender Flächen 9 betragen soll.
Als sie am nächsten Tag ihre selbstgebastelten Oktaeder vergleichen, stellen sie fest:
Ihre Oktaeder sind - auch bei Einhaltung der Vereinbarung - voneinander verschieden in dem Sinne, dass durch keine Drehung die Anordnung der Augenzahlen zur Übereinstimmung gebracht werden kann.
a) Ermitteln Sie, wieviel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen der Augenzahlen es unter Einhaltung der Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen insgesamt gibt!
b) Ermitteln Sie, wieviel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen es insgesamt gibt, wenn die Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen nicht eingehalten werden muss!

Aufgabe 4 - 341034 = 340934
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Aufgabe 5 - 341035
Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.
a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage:
Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Aufgabe 6 - 341036



Auf der Oberfläche eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 1 seien S und Z zwei Punkte.
Ein Weg vom Startpunkt S zum Zielpunkt Z werde genau dann zulässig genannt, wenn er ganz auf der Oberfläche des Würfels verläuft.
Der Startpunkt S liege auf der Quadratfläche $EFGH$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand a mit $0 < a < 1$ und zu EF einen Abstand x.
Der Zielpunkt Z liege auf der Quadratfläche $BCGF$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand b mit $0 < b < 1$ und zu BF ebenfalls den Abstand x.
Die Längen a und b seien - unter Einhaltung von $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ beliebig, aber - fest vorgegeben.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von diesen a und b) alle diejenigen Werte x mit $0 < x < 1$, für die es zwei voneinander verschiedene zulässige Wege von S nach Z gibt, die beide unter allen zulässigen Wegen von S nach Z dieselbe möglichst kleine Länge haben!

6.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 10

Aufgabe 1 - 341041 = 340942
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Aufgabe 2 - 341042 = 340943
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Aufgabe 3 - 341043
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist.

Aufgabe 4 - 341044
Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für jedes x in dem Intervall $[a, b]$ gilt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
(2) Die Funktion f ist nicht konstant.
(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.
Geben Sie (passend zu c) Zahlen a, b und im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f, g an, und weisen Sie nach, dass bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

Aufgabe 5 - 341045 = 340945
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Aufgabe 6 - 341046
In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $AB = BC = CD = DE$ gezeichnet.
Dabei sei diese Länge so gewählt, dass der von A über B, C, D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T.
Beweisen Sie, dass aus dieser Voraussetzung stets $AB^2 = AC \cdot ST$ folgt!

7 Aufgaben - Klassenstufe 11

7.1 Vorolympiade 1960

7.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 11

Aufgabe 1 - V601101
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x;y;z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3+y^3+z^3=2xyz$$

Aufgabe 2 - V601102
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^6\sin 3x-\sin 3x}{3x^9}$$

Aufgabe 3 - V601103
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

Aufgabe 4 - V601104
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 572 $km\cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m\cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Aufgabe 5 - V601105
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y=x\cdot\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Aufgabe 6 - V601106
Gibt es einen Winkel ϵ, für den die Gleichung gilt:

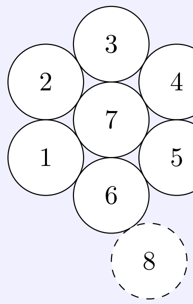
$$\sin\epsilon\cdot\cos\epsilon=1$$

Aufgabe 7 - V601107
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y=\frac{1}{4}(ax-x^3)$$

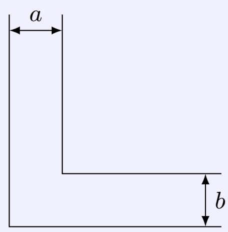
die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 8 - V601108



In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?

Aufgabe 9 - V601109



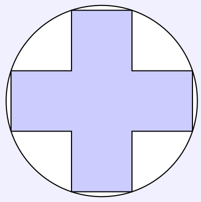
Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden. Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)

Aufgabe 10 - V601110
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\alpha = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

Aufgabe 11 - V601111
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie größ ist die Summe aller Quadrate?

Aufgabe 12 - V601112
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 m liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

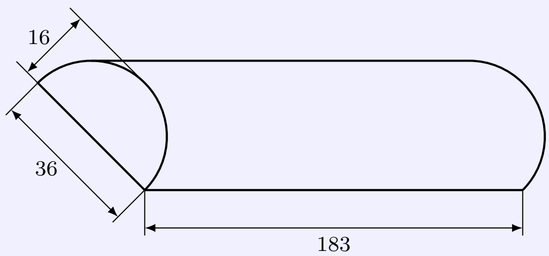
Aufgabe 13 - V601113



Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)

Aufgabe 14 - V601114
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.

Aufgabe 15 - V601115
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

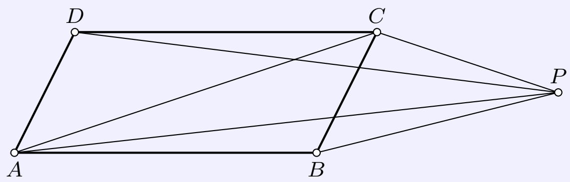
Aufgabe 16 - V601116
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Aufgabe 17 - V601117
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis.
Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

Aufgabe 18 - V601118
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.

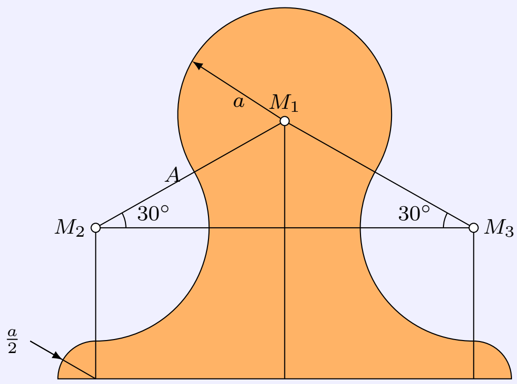
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Aufgabe 19 - V601119
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Aufgabe 20 - V601120



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = a$ ist.

Aufgabe 21 - V601121
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

7.2 Vorolympiade 1961

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

7.2.1 II. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611121
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

Aufgabe 2 - V611122
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

Aufgabe 3 - V611123
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 4 - V611124
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611125

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

7.2.2 III. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611131
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

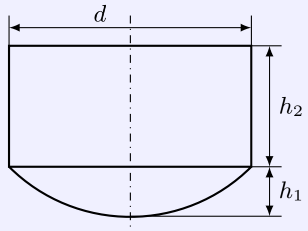
	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Aufgabe 2 - V611132



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

Aufgabe 3 - V611133
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

Aufgabe 4 - V611134
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke. Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611135
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist? b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

7.3 I. Olympiade 1961

7.3.1 I. Stufe 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011111
Es ist zu beweisen, dass bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 2 - 011112
Ein Dampfer fährt auf einem Fluss von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Aufgabe 3 - 011113
Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, dass der erhaltene Schnitt ein a) gleichseitiges Dreieck,
b) Quadrat,
c) regelmäßiges Fünfeck,
d) regelmäßiges Sechseck
ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Aufgabe 4 - 011114
Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.
Es ist zu beweisen, dass unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 5 - 011115
Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind.
Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, dass in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wie viel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wie viel haben eine, wie viel zwei und wie viel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

7.3.2 II. Stufe 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011121
3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden. Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist?
Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Aufgabe 2 - 011122
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in "Rollenform" (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm,
	Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm,
	größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

1. Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?
2. Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Aufgabe 3 - 011123
Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann.
Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?
Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Aufgabe 4 - 011124
Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, dass ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $AB = BC$ ist.
Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!
Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

7.3.3 III. Stufe 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011131
Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 $\frac{km}{h}$ fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.
Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 $\frac{m}{s^2}$ eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 2 - 011132
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält?
Die Behauptung ist zu begründen!

Aufgabe 3 - 011133
In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator.
Eine Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so dass die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen.
Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13500,- M aufgewandt werden.
Wieviel Ventilatoren müssten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird?
Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d.h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Aufgabe 4 - 011134
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A_0, B_0 bzw. C_0, so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist.

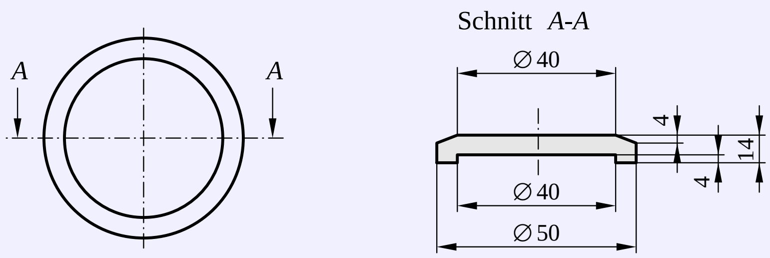
Aufgabe 5 - 011135 = 011234
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

7.4 II. Olympiade 1962

7.4.1 I. Stufe 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021111
Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongressgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte.
Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m.
Berechnen Sie:
a) den Radius r der Kugel,
b) die Fläche der Kugelkalotte und
c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7 \frac{p}{cm^3}$.)

Aufgabe 2 - 021112
Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?
b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Aufgabe 3 - 021113
Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, dadd für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Aufgabe 4 - 021114
Es ist zu beweisen, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}$$

Aufgabe 5 - 021115
Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.
a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, dass $PR = PQ$ ist!
b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Aufgabe 6 - 021116
Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

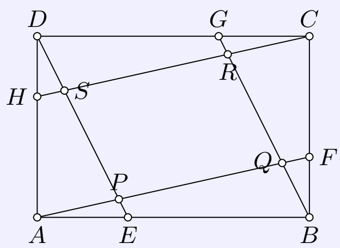
erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

7.4.2 II. Stufe 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021121
Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, dass mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10000fache gesteigert werden kann.
a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)
Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 2 - 021122
Beweisen Sie, dass stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1{,}5$ ist!

Aufgabe 3 - 021123



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H.
Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abbildung).
a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?
b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Aufgabe 4 - 021124
Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, dass von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.
Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Aufgabe 5 - 021125
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

7.4.3 III. Stufe 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021131
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

Aufgabe 2 - 021132
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.
In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Aufgabe 3 - 021133
Auf wieviel verschiedene Weisen lässt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?
(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Aufgabe 4 - 021134
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen.

Aufgabe 5 - 021135
Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Aufgabe 6 - 021136
In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, dass keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.
Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke?
Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.

7.5 III. Olympiade 1963

7.5.1 I. Stufe 1963, Klasse 11

Aufgabe 1 - 031111
Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.
a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt?
Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde R = 6 370 km.)

Aufgabe 2 - 031112
Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.
a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)
b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Aufgabe 3 - 031113
Beweisen Sie, dass $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 4 - 031114
Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Aufgabe 5 - 031115
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.
Beweisen Sie, dass die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Aufgabe 6 - 031116
Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1000050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

7.5.2 II. Stufe 1963, Klasse 11

Aufgabe 1 - 031121
Es ist zu beweisen, dass $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Aufgabe 2 - 031122
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2$$

Aufgabe 3 - 031123
In der Ebene seien n Punkte $(n > 3)$ gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Aufgabe 4 - 031124
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, dass jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Aufgabe 5 - 031125
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & T & O & M & \cdot & A & T & O & M \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & A & T & O & M
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 $(A \neq= O)$. Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.
Wie lautet die Aufgabe?

7.6 IV. Olympiade 1964

7.6.1 I. Stufe 1964, Klasse 11

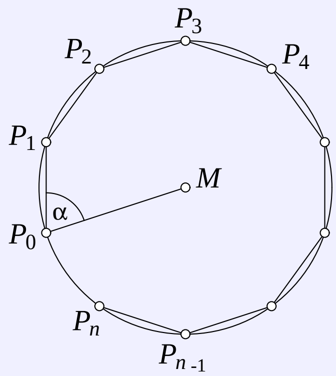
Aufgabe 1 - 041111
Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muss jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

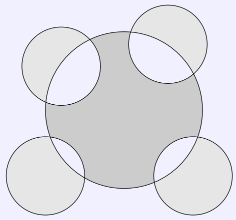
Aufgabe 2 - 041112
In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius MP_0 den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ reflektiert (siehe Abbildung).



a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!
b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?
c) Es sei $\alpha = 50°$.
Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Aufgabe 3 - 041113
Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (siehe Abbildung).



a) Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt der in der Abbildung grauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.
b) Diese Aussage lässt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Aufgabe 4 - 041114
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Aufgabe 5 - 041115
Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Aufgabe 6 - 041116
Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12 \cdot \sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12 \cdot \sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

Hinweis: Ab der IV. Olympiade 1964 und Stufe II lösten die Schüler der Klassenstufe 11 die Aufgaben der Klasse 12.

8 Aufgaben - Klassenstufe 12

8.1 Vorolympiade 1960

8.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 12

Aufgabe 1 - V601201
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

Aufgabe 2 - V601202
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\star\star\star 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Aufgabe 3 - V601203
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Aufgabe 4 - V601204
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{3\cdot 4},\quad ...,\quad \frac{1}{n\cdot(n+1)},\quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n\to\infty$ zu?

Aufgabe 5 - V601205

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{1,5+\sqrt[4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

Aufgabe 6 - V601206
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6+14^6+16^6$$

Aufgabe 7 - V601207
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Aufgabe 8 - V601208
Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!"
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 9 - V601209
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Aufgabe 10 - V601210
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Aufgabe 11 - V601211
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

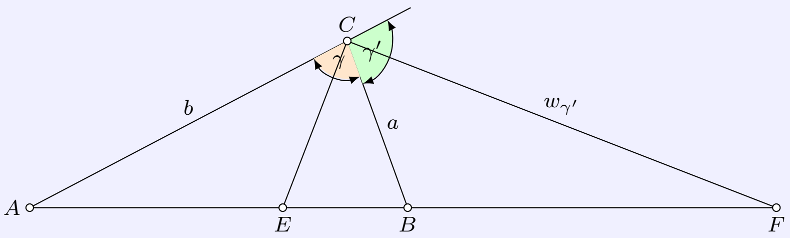
Aufgabe 12 - V601212
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Aufgabe 13 - V601213
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aufgabe 14 - V601214
Beweisen Sie folgenden Satz:

Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

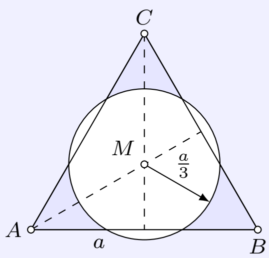
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 15 - V601215
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 16 - V601216



Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?

Aufgabe 17 - V601217
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Aufgabe 18 - V601218
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{10}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{40}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.

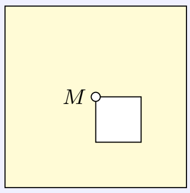
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Aufgabe 19 - V601219
Zeichnen Sie die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 20 - V601220
Berechnen Sie die innere Masse einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Aufgabe 21 - V601221
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Aufgabe 22 - V601222



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen (M = ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).

8.2 Vorolympiade 1961

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

8.2.1 II. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611221
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2 - V611222
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Aufgabe 3 - V611223
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

Aufgabe 4 - V611224
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60$\circ$ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611225
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

8.2.2 III. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611231
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Aufgabe 2 - V611232
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Aufgabe 3 - V611233
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Aufgabe 4 - V611234
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?

Aufgabe 5 - V611235
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder Schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

8.3 I. Olympiade 1961

8.3.1 I. Stufe 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011211
Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 2 - 011212
Bei der Planung unserer Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung.
Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:
Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

- 1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,
- 1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,
- 2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,
- 2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Dabei wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind.

Aufgabe 3 - 011213
Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen? Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

1) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?

2) Was lässt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Aufgabe 4 - 011214
Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\angle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.
Man beweise, dass die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

Aufgabe 5 - 011215
Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi \frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist d der Durchmesser der treibenden Scheibe, D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und $M_1M_2 = a$ der Abstand der beiden Achsen.
Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.
Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?
a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,
b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.

8.3.2 II. Stufe 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011221
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm,
	größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm;
Mindestmaße	Länge 10 cm, Breite 7 cm.

1) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe?
2) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung !)

Aufgabe 2 - 011222
Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 3 - 011223
Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Waagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

Aufgabe 4 - 011224
Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben.
Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen! Begründen Sie die Konstruktion!

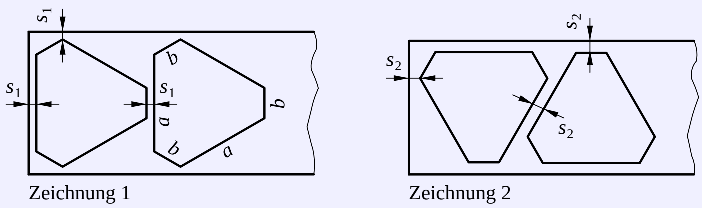
8.3.3 III. Stufe 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011231
Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben.
Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Es wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.

Aufgabe 2 - 011232
Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß, $a = 34$ mm, $b = 8$ mm.)



a) Wie lang und wie breit muss der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, dass die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) $s_1 = 2$ mm betragen muss. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muss nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier $s_2 = 3$ mm.)

Aufgabe 3 - 011233
Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben. Begründen Sie, dass diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

Aufgabe 4 - 011234 = 011135
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 5 - 011235
Es ist zu beweisen, dass $x + y \leq a\sqrt{2}$, wenn $x^2 + y^2 = a^2$ und $a \geq 0$ ist!

8.3.4 IV. Stufe 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011241
Bei 27000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P2O5 (dt/ha)	Ernteertrag (dt/ha)
0,0	237
0,3	251
0,9	269

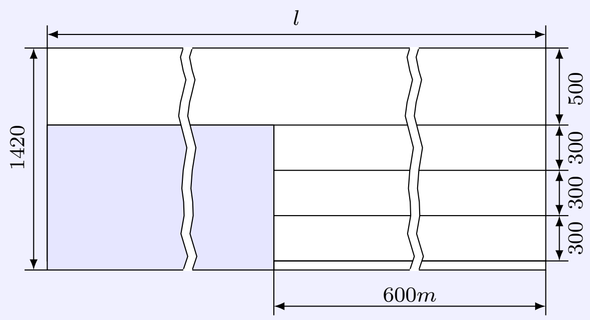
Die zwischen der Düngergabe x (in dt/ha) und dem Ernteertrag y (in dt/ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!
b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt/ha und 1,2 dt/ha!
c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt/ha bzw. 275 dt/ha fest!

Aufgabe 2 - 011242
Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1.
Man soll zeigen, dass unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

Aufgabe 3 - 011243



Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1800 m geschnitten werden. Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die graue Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.
Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, dass der Abfall erheblich geringer wird.
a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?
b) Wie muss die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?
c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?

Aufgabe 4 - 011244
Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.
Es ist zu beweisen, dass für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt: $q \geq \sqrt{2}$.

Aufgabe 5 - 011245

Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken AA', BB'.

a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!

b) In der Ebene P wird ein Kreis O betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort L des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise O oder in dessen Innern befinden!

c) Wird A' fest auf dem Kreise O oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von O, so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so dass der oben bestimmte Ort L derselbe bleibt.

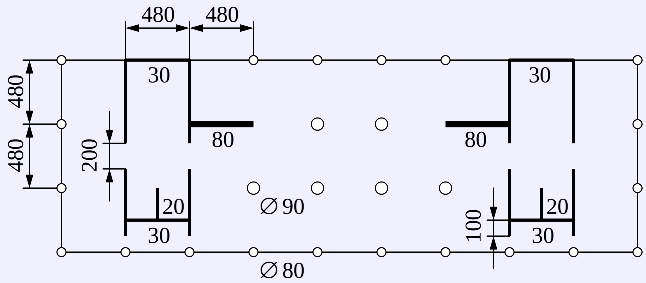
Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden:

1. A' und B' sind verschieden,
2. A' und B' fallen zusammen.

8.4 II. Olympiade 1962

8.4.1 I. Stufe 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021211
Das „Haus des Lehrers“ in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile.



Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m. Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoss! Dabei bleibt die Bewehrung unberücksichtigt.

Aufgabe 2 - 021212
Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wieviel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.

Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

Aufgabe 3 - 021213
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

a) sie ist für alle reellen Zahlen definiert,
b) sie ist für alle $x \geq 1$ wachsend,
c) sie hat den Wertevorrat $0 \leq y < 1$,
d) ihr Bild ist achsensymmetrisch!
Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Aufgabe 4 - 021214
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

für $0° \leq x \leq 360°$ zu bestimmen!

Aufgabe 5 - 021215
Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben.
Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dass $ABCD$ sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist!

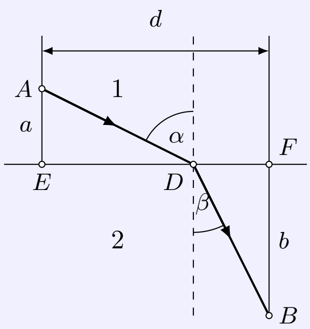
(Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

Aufgabe 6 - 021216
Es ist zu beweisen, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist!

8.4.2 II. Stufe 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021221
Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L.W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:
In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:
a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.
Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,
b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,
c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.
Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Aufgabe 2 - 021222



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium 1 die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium 2 die Geschwindigkeit c_2.
Beweisen Sie, dass die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Aufgabe 3 - 021223
a) Beweisen Sie, dass für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 4 - 021224
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, dass $CE = CB$ ist!
Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, dass $CA = CD$ ist!
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.
Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, dass jeder seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 5 - 021225
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist! Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

8.4.3 III. Stufe 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021231
Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$$

Aufgabe 2 - 021232
Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Aufgabe 3 - 021233
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

Aufgabe 4 - 021234
Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

alle Lösungen an!

Aufgabe 5 - 021235
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M.
Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate $AMDE$ und $MBGH$! Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

Aufgabe 6 - 021236
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $A'D'C'B'$ in dieser Reihenfolge.
Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

8.4.4 IV. Stufe 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021241
a) Beweisen Sie, dass der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 - 021242
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1$$

Aufgabe 3 - 021243
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 4 - 021244
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, dass die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.
Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Aufgabe 5 - 021245
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, dass ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

Aufgabe 6 - 021246
Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, dass N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.
a) Beweisen Sie, dass auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!
b) Beweisen Sie, dass die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

8.5 III. Olympiade 1963

8.5.1 I. Stufe 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031211
Von den Punkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man misst folgende Winkel:

$$\angle \mathrm{DAB} = 80°, \quad \angle \mathrm{CAB} = 30°, \quad \angle \mathrm{ABC} = 60°, \quad \angle \mathrm{ABD} = 20°.$$

Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmäßige Berechnung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 2 - 031212
Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1N + a_2N^2 + a_3N^3 + a_4N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16km$!

*) Ein Dynamometer ist ein Gerät zur Messung von Kräften, bei dem die elastische Deformation einer Feder über ein Hebelwerk auf einer (meist kreisförmigen) Skala angezeigt wird (Federwaage).

Aufgabe 3 - 031213
Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= px_1, \\ x_1 + x_3 &= px_2, \\ x_1 + x_2 &= px_3 \end{aligned}$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

Aufgabe 4 - 031214
Man beweise:
Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Aufgabe 5 - 031215
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

Aufgabe 6 - 031216
Es ist

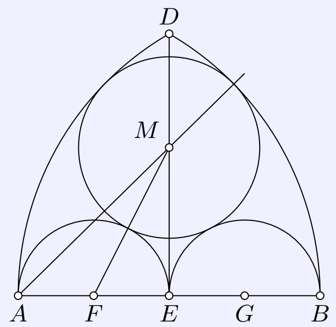
$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne dass sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

8.5.2 II. Stufe 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031221
Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

Aufgabe 2 - 031222



Gegeben sei eine Strecke AB. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit AB geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung).
E sei der Mittelpunkt von AB. Über AE und EB als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen.
Berechnen Sie ME, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{BD}$ berührt!

Aufgabe 3 - 031223
Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 4 - 031224
Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden.
Man beweise, dass gilt

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}$$

Aufgabe 5 - 031225
Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen:
Der erste Hirte erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist.
Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

8.5.3 III. Stufe 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031231
Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!
Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 2 - 031232
Beweisen Sie folgenden Satz:
Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

Aufgabe 3 - 031233
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2)$$

Aufgabe 4 - 031234
Für welche reellen Zahlen x ist

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

Aufgabe 5 - 031235
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Aufgabe 6 - 031236
Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B.
Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.
b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.
c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
d) Es ist $r_1 = 2r_2$.

8.5.4 IV. Stufe 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031241
Beweisen Sie, dass für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 2 - 031242
Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Aufgabe 3 - 031243
Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.
Beweisen Sie, dass dann folgende Punkte zusammenfallen:
a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,
b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!

Aufgabe 4 - 031244
Es bezeichne an die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).
Beweisen Sie, dass die Zahlen an eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Aufgabe 5 - 031245
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite BC liege ein Punkt P, wobei $BP : PC = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\angle APC = 60°$ sind.
Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.

Aufgabe 6 - 031246
Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.
c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

8.6 IV. Olympiade 1964

8.6.1 I. Stufe 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041211
Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636000} \approx 86{,}00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389000} \approx 73{,}00$$

Daher ist $z = \sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 13$.

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

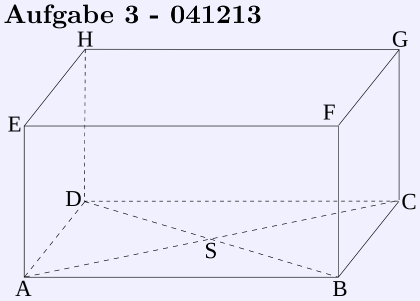
Aufgabe 2 - 041212
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ gesetzt wird.

Aufgabe 3 - 041213



Gegeben sei ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$ sei S.

a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.

b) Es ist zu beweisen, dass die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.

Aufgabe 4 - 041214
Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

Aufgabe 5 - 041215
In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball). Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir folgende Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.

(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.

(3) Der Pole ist Journalist.

(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.

(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.

(6) Der Kapitän reist nach Rostock.

(7) Der Handballspieler stammt aus der DDR.

(8) Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.

(9) Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.

(10) Der Leichathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.

(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.

(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.

(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.

(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?

Weisen Sie nach, dass die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

8.6.2 II. Stufe 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041221
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, dass aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.
Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen.
Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!
a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.
b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.
c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Aufgabe 2 - 041222
Es ist zu beweisen, dass alle Zahlen der Form

$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$

wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist; durch 1965 teilbar sind.

Aufgabe 3 - 041223
Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$$

richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 4 - 041224
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} &= \frac{5}{3} \\ x + y &= 90^\circ \end{aligned}$$

Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.

Aufgabe 5 - 041225
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d.h. $\angle BPA \cong \angle CPB \cong \angle CPA$).

Aufgabe 6 - 041226
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen

$$x^2 + y^2 < r^2 \qquad \text{und} \qquad |y - x| > \frac{r}{2}$$

genügen ($r > 0$)!

8.6.3 III. Stufe 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041231
In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:
1) a ist eine rationale Zahl.
2) a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3) a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4) a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5) a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8000$.
6) a ist eine gerade Zahl.
Er erfährt, dass von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.
Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Aufgabe 2 - 041232
Es sei

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten ($c \neq 0$).
Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert?
Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a, b, c, d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Aufgabe 3 - 041233
Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.
Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d.h. für den $\angle APB \geq \angle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Aufgabe 4 - 041234
Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ erfüllt?

Aufgabe 5 - 041235
Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Aufgabe 6 - 041236
Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

8.6.4 IV. Stufe 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041241
Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Aufgabe 2 - 041242
Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen $2,3,5,7,11,13,109,151,491$ die Zahl $z = 1963^{1965} - 1963$ teilbar ist.

Aufgabe 3 - 041243
Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d.h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen.
Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.
Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'', B'', C'', D''.
Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'', B'', C'', D'' gebildete Figur machen?

Aufgabe 4 - 041244
Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Keises ist!

Aufgabe 5 - 041245
Ermitteln Sie alle Zifferntripel (x,y,z) mit $x,y,z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx...x)-(yyy...y)}=(zzz...z) \qquad (1)$$

$(xxx...x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy...y)$: n Ziffern; $(zzz...z)$: n Ziffern
für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist!
Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Aufgabe 6 - 041246
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

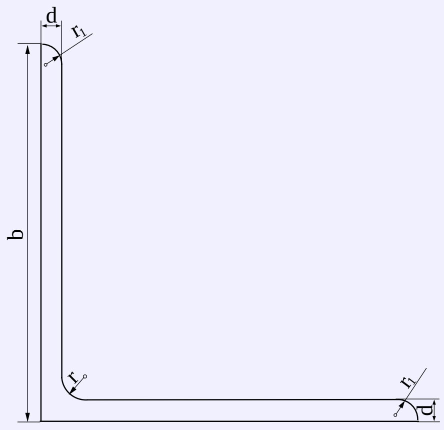
8.7 V. Olympiade 1965

8.7.1 I. Stufe 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051211
Ein Winkelstahl (gleichschenkliger L-Stahl) hat den in der Abb. angegebenen Querschnitt. Dabei ist $b = 50mm$, $d = 5mm$, $r = 2r_1 = 7mm$.

a) Wie groß ist seine Masse bei einer Länge von 5 m? (Dichte des Stahls $\rho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}$)?

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die Rundungen vernachlässigt und annimmt, dass die Querschnittsfläche aus zwei rechteckigen Flächen besteht?



c) Wie groß ist der maximale prozentuale Fehler, der bei der zu b) durchgeführten Näherungsrechnung entsteht, wenn $b = 50mm$ und $r = 7mm$ konstant sind und d zwischen 5 mm und 9 mm liegt?

Aufgabe 2 - 051212
Vier kongruente Kugeln berühren eine Ebene auf ein und derselben Seite. Ferner berührt jede Kugel zwei der anderen, und jede der Kugeln berührt einen und denselben geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis in der gegebenen Ebene liegt.

Es ist der Radius des Grundkreises des Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Kugeln und von der Höhe des Kegels darzustellen (Fallunterscheidung).

Aufgabe 3 - 051213
Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende "Siebenerregel":

Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.

Man untersuche, ob diese "Siebenerregel" richtig ist.

Aufgabe 4 - 051214
Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:

Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?

b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, dass ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

8.7.2 II. Stufe 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051221
Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Aufgabe 2 - 051222
Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Aufgabe 3 - 051223
Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x+a$ und $x-a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist, d. h., dass es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so dass $f(x) = f(x+kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.
b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Aufgabe 4 - 051224
Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist.

Aufgabe 5 - 051225
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

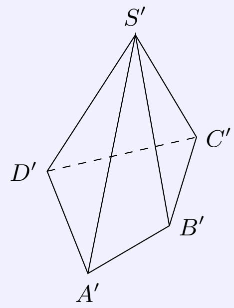
a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und
b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1 \leq x \leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Aufgabe 6 - 051226
Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

8.7.3 III. Stufe 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051231
Es ist zu beweisen, dass die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

Aufgabe 2 - 051232
Die in der Abbildung im Grundriss gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, dass die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.



a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriss die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!
b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?
c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

Aufgabe 3 - 051233
a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.
b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Aufgabe 4 - 051234
Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ y_0 &= 0, \\ x_{n+1} &= x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}$$

für $n \geq 0$. Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung gilt:

$$x^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

Aufgabe 5 - 051235
Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d. Man beweise, dass stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 6 - 051236
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$(1) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x \neq 0$$

$$(2) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = 0 \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x = 0$$

8.7.4 IV. Stufe 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051241
Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die $(a+b)^n = a^n + b^n$ gilt.

Aufgabe 2 - 051242
An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren.
Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, dass es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, dass an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat.
Es wird vorausgesetzt, dass der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.

Aufgabe 3 - 051243
Unter allen Strecken MN, die das Dreieck ΔABC in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Aufgabe 4 - 051244
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \\
(**) \qquad & x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \\
& x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \\
& x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 - 051245
Man beweise, dass $\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt.

Aufgabe 6 - 051246
Man beweise den folgenden Satz:
Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).

8.8 VI. Olympiade 1966

8.8.1 I. Stufe 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061211
Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S liegt 140 m über dem Mittelpunkt M der Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 231 m. Wir wollen einmal annehmen, dass folgendes möglich ist:

Ein Tourist besteigt die Pyramide derart, dass er von A ausgehend auf geradem Wege senkrecht zur Kante BS gelangt. Nachdem er diese Kante im Punkt B_1 erreicht hat, geht er weiter auf geradem Wege senkrecht zur Kante CS bis zu dieser Kante im Punkt C_1, von dort entsprechend weiter zum Punkt D_1 auf Kante DS und zum Punkt A_1 auf der Kante AS.

a) Wie lang wäre der von ihm von A bis zum Punkt A_1 zurückgelegte Weg?

b) In welcher Höhe über der Grundfläche befände sich der Tourist im Punkt A_1?

c) Welche Winkel würden die geraden Teilwege mit der Ebene der Grundfläche bilden?

Aufgabe 2 - 061212
In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, dass keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:
   (1.) Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.
   (2.) Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller (voneinander verschiedenen) Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

Aufgabe 3 - 061213
In einer quaderförmigen Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln von 1 cm Durchmesser einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.

Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!

Aufgabe 4 - 061214
Geben Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen an, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!

8.8.2 II. Stufe 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061221
Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$$

Aufgabe 2 - 061222
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS) gegeben. Es ist zu zeigen, dass man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, dass ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Aufgabe 3 - 061223
Beweisen Sie folgende Behauptung! Ist $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch

$$p = a_1^5 + a_2^5 + .. + a_n^5$$

durch 30 teilbar. ($a_1, a_2, ..., a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Aufgabe 4 - 061224
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.
Beweisen Sie, dass I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

Aufgabe 5 - 061225
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r + s\sqrt{p})^n + (r - s\sqrt{p})^n}{2}, \quad v = \frac{(r + s\sqrt{p})^n - (r - s\sqrt{p})^n}{2\sqrt{p}}, \quad t = r^2 - s^2 p, \quad z = u^2 - t^n$$

a) u und v sind natürliche Zahlen.
b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

Aufgabe 6 - 061226

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem (1)

$$2x + 3y + z = 1 \quad ; \quad 4x - y + 2z = 2 \quad ; \quad 8x + 5y + 3z = 4$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
Als "Koeffizienten" seien hier sowohl die auf der "linken Seiten" stehenden "Vorzahlen" der Variablen als auch die "absoluten Glieder" auf den "rechten Seiten" bezeichnet.
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

8.8.3 III. Stufe 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061231
In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n > 2$) so verteilt, dass es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Aufgabe 2 - 061232
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand der Geraden BC und AM?
Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.

Aufgabe 3 - 061233
Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Aufgabe 4 - 061234
Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$$

genügen.
Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist $\left[\frac{13}{2}\right] = 6$, $[-6{,}5] = -7$ und $[6] = 6$.

Aufgabe 5 - 061235
Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, ..., n$ nebeneinander aufgestellt.
Ein Umordnungsbefehl besteht darin, dass jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, ..., n-1$ entsteht.

Aufgabe 6 - 061236
Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

8.8.4 IV. Stufe 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061241
In einer Ebene ϵ seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ϵ, für die das Dreieck ΔPQR gleichseitig ist!

Aufgabe 2 - 061242
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge "F_n" genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, ..., z_n$ existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, ..., z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, .., z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.
Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ...\}$ oder $\{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ..., x_{mt}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < ...$

Beantworten Sie folgende Fragen:
a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?
b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

Aufgabe 3 - 061243
Man beweise folgenden Satz:
Ist $n > 2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, ..., a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i_1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

Aufgabe 4 - 061244
Gegeben ist eine natürliche Zahl $n > 3$. Es sei $V = P_1P_2...P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\Delta P_kP_lP_m$ (wobei P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

Aufgabe 5 - 061245
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$.

Aufgabe 6 - 061246
Man beweise folgenden Satz:
Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, ..., n$; $n > 2$, so im dreidimensionalen Raum, dass jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

8.9 VII. Olympiade 1967

8.9.1 I. Stufe 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071211
Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jeder der vier gibt über diese Zahl die folgenden drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11fache der Zahl ist kleiner als 1000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12fache der Zahl ist größer als 1000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?

Aufgabe 2 - 071212
Die Rentabilität des Einsatzes von Rohbraunkohle oder Braunkohlenbriketts wird auch durch die Transportkosten beeinflusst. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten (in M je Mill. kcal) einschließlich der Transportkosten für Rohbraunkohle bzw. Braunkohlenbriketts, und zwar für Transportentfernungen von 0 km, 100 km und 200 km.

Transportentfernung	Kosten in M je Mill. kcal	
in km	Rohbraunkohle	Braunkohlenbriketts
x	y	z
0	4,0	8,0
100	8,6	9,2
200	12,1	10,0

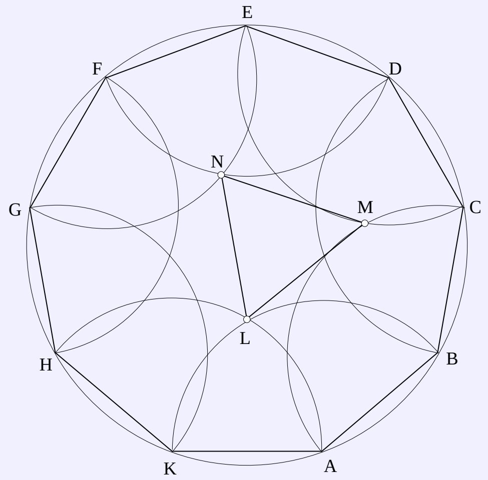
Allgemein lassen sich die Kosten für die Entfernungen bis etwa 400 km durch eine Funktion vom Typ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ darstellen.

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in beiden Fällen! Entscheiden Sie, für welche Transportentfernungen bis 400 km der Einsatz von Rohbraunkohle billiger ist!

Aufgabe 3 - 071213

Die Abb. zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit seinem Umkreis. Um die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H und K dieses Neunecks sind in der aus der Abb. ersichtlichen Weise Kreisbögen gezeichnet, deren Radien ebenso lang wie die Neuneckseiten sind.

Untersuchen Sie, ob die in der Figur mit L, M und N bezeichneten Schnittpunkte dieser Kreisbögen Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind!



Aufgabe 4 - 071214
Zur Verfügung stehen eine Holzkugel, ein Zirkel, mit dem man sowohl auf einer (genügend groß gedachten) ebenen Fläche als auch auf der Kugeloberfläche zeichnen kann, Bleistift, ein starr geradliniges (ohne Längenskale) Lineal und (ebenes) Zeichenpapier.

Man konstruiere den Radius der Holzkugel!

8.9.2 II. Stufe 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071221
Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leq x_k \leq 2$ und $0 \leq y_k \leq 2$ erfüllen.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von Pk bedeuten!
Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 genau dann als gleich, wenn jede Ecke von Δ_1 auch Ecke von Δ_2 ist.
b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

Aufgabe 2 - 071222
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat.
Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Aufgabe 3 - 071223
Beweisen Sie, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

Aufgabe 4 - 071224
Beweisen Sie, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Aufgabe 5 - 071225
Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x \cdot (ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y \cdot (ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ und $a \neq b$.

Aufgabe 6 - 071226
Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.
Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

8.9.3 III. Stufe 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071231
Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.
Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Aufgabe 2 - 071232
Es ist das Produkt

$$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \sin 85^\circ$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
Beispiel: $\sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe 3 - 071233
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Aufgabe 4 - 071234
Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \qquad (1)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie!
Die Funktion $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\phi(x+1) = (x+1)\phi(x) \qquad (2)$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

Aufgabe 5 - 071235
In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)
Beweisen Sie, dass man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, dass in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Aufgabe 6 - 071236
Beweisen Sie, dass es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d.h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, dass diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

8.9.4 IV. Stufe 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071241
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + ax_2 + x_3 = b \qquad (1)$$
$$x_2 + ax_3 + x_4 = b \qquad (2)$$
$$x_3 + ax_4 + x_1 = b \qquad (3)$$
$$x_4 + ax_1 + x_2 = b \qquad (4)$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Aufgabe 2 - 071242
Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Aufgabe 3 - 071243
Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

Aufgabe 4 - 071244
Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehnstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.
Man beweise, dass es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Aufgabe 5 - 071245
Es ist zu beweisen, dass für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$

erfüllt ist.

Aufgabe 6 - 071246
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.

8.10 VIII. Olympiade 1968

8.10.1 I. Stufe 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081211
Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, "Vierer mit", Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wieviel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
"Vierer mit" bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, dass die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim "Vierer mit" abschloss. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Aufgabe 2 - 081212

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

   Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Aufgabe 3 - 081213
In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\angle CSD$!

Aufgabe 4 - 081214
Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, dass für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2+b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3+b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie läßt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, dass $a^3 + b$ zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!

8.10.2 II. Stufe 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081221
Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p+10$ als auch $p+14$ Primzahlen sind!

Aufgabe 2 - 081222
In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.
Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander $90°$ beträgt?

Aufgabe 3 - 081223
Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6$ so an, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung gilt:

$$x^{12}+1=(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)\cdot(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)$$

Aufgabe 4 - 081224
Es sind, alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4|=|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|$$

erfüllt ist.

Aufgabe 5 - 081225
Man beweise $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ ohne die Wurzeln auszurechnen.

Aufgabe 6 - 081226
Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a>b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

8.10.3 III. Stufe 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 2 - 081232
a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - 5n$, streng monoton fallend ist.
b) Beweisen Sie, dass alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Aufgabe 3 - 081233
Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ϵ und g die Gerade, die diese Strecke enthält.
a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ϵ, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.
Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 4 - 081234
Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden.
Während im Jahre 1950 noch 92760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?
b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?
c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

Aufgabe 5 - 081235
Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.
(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.
(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.
(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.
(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, dass von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.
Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Aufgabe 6 - 081236
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

8.10.4 IV. Stufe 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081241
Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0, q > 0$).
Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.
Beweisen Sie!
Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4... \\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3} \\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2} \\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung p/q stets gleiche Nenner.

Aufgabe 2 - 081242
In einer Ebene ϵ liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als "Spiegelung am Kreis k" bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ϵ ein Punkt P' aus ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $MP \cdot MP' = r^2$.
a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!
b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, dass M außerhalb von k_1 liegt. Konstruieren Sie k_1' , d.h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

Aufgabe 3 - 081243
Eine Menge M von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M eindeutig ein Element w aus M zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente u, v, w aus M gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und es sei M die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus M werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche
a) ob M eine Halbgruppe ist;
b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Aufgabe 4 - 081244
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 - 081245
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

Aufgabe 6 - 081246
Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt.
Man beweise, dass dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!

8.11 IX. Olympiade 1969

8.11.1 I. Stufe 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091211
Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, daß jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, daß je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten.

Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

Aufgabe 2 - 091212

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

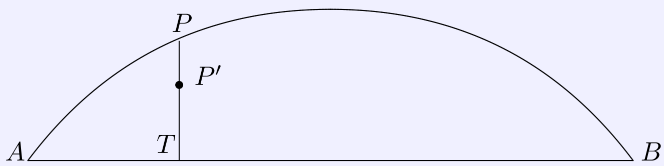
Aufgabe 3 - 091213
Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist.

Anmerkung: a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$.

Aufgabe 4 - 091214
In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$. Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqslant \frac{1}{5}r$.

Es ist zu beweisen, dass dann der relative Fehler $\delta = \frac{|z-z'|}{z}$ stets kleiner als 0,0051, d.h. 0,51 % ist.



8.11.2 II. Stufe 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091221
Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ durch die (independente) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c0 \qquad (1)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D(1)_n = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.
a) Es seien $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D(1)_n$, $D(2)_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
b) Es ist allgemein zu beweisen, dass für (1) die Folge $D(2)_n$ konstant ist.

Aufgabe 2 - 091222
In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ϵ die Ebene durch G, B, E.
Es ist zu beweisen, dass die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ϵ steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

Aufgabe 3 - 091223
Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \qquad (1)$$
$$x - y = bz \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = cz \qquad (3)$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 4 - 091224
Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so dass ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muss, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muss erfüllt sein, damit
a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler
den Gewinn erzwingen kann?

8.11.3 III. Stufe 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091231
a) Es ist zu beweisen, dass die Zahl

$$z = \frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 6538^3 + 65539^3}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 32771}$$

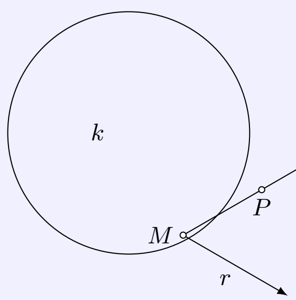
ganzrational ist!
b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Aufgabe 2 - 091232
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, dass jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, dass Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so dass diese Wünsche erfüllt sind!

Aufgabe 3 - 091233



Gegeben sei in einer Ebene ϵ ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $MP \cdot MP_1 = r^2$ ist.
Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ϵ, der k orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.
Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Aufgabe 4 - 091234
Beweisen Sie, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot ... \cdot \frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl) kleiner als 0,02 ist!

Aufgabe 5 - 091235
Die Ebene ϵ eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, dass die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.
Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Aufgabe 6 - 091236
a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d.h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!
b) Zeigen Sie, dass es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

8.11.4 IV. Stufe 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091241
An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Aufgabe 2 - 091242
Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ möglichst klein ist.

Aufgabe 3 - 091243
Es ist zu beweisen, dass für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

Aufgabe 4 - 091244
Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, ..., P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k $(k = 1, 2, ..., n)$ können parallel zu sich selbst so verschoben werden, dass sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z.B. mit Hilfe des Satzes unter a)), dass folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 5 - 091245
Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Aufgabe 6 - 091246
Es ist zu beweisen, dass für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

8.12 X. Olympiade 1970

8.12.1 I. Stufe 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101211
In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

Aufgabe 2 - 101212
In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, dass jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a!

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

Aufgabe 3 - 101213
Beweisen Sie!

Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Aufgabe 4 - 101214
Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x)=ax^2+bx+c$ gesetzt.

a) Man beweise, dass folgender Schluss richtig ist:

Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

Behauptung: Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0), f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel $(p,\, q,\, r)$ ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, dass ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

8.12.2 II. Stufe 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101221
Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 2 - 101222
Der Binominalkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k > 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)...[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.
a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a > k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung gilt:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Zeigen Sie, dass für $k > 2$ gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} \cdot (-1)^{k+1}$$

Aufgabe 3 - 101223
Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
...	

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:
Die einzige Zahl in der Zeile 0 sei die Zahl 1. Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.
Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, dass in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

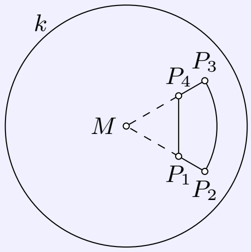
Aufgabe 4 - 101224
Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und δ die Größe des Winkels $\angle BSA$.
Beweisen Sie, dass dann $ac - bd = ef \cdot \cos\delta$ gilt!

8.12.3 III. Stufe 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101231
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2 \gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Aufgabe 2 - 101232
In einer Ebene ϵ liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ϵ der folgendermaßen definierte Punkt P' in ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $MP \cdot MP' = r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:



P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $MP_1 = MP_4 < MP_2 = MP_3$. Der Winkel $\angle P_2MP_3$ sei kleiner als $180°$.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overparen{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.
Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Aufgabe 3 - 101233
Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Aufgabe 4 - 101234
Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

Aufgabe 5 - 101235
Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, dass P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ϵ genau dann parallel, wenn es in ϵ eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

Aufgabe 6 - 101236
Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

$$y \geq 0 \qquad (1)$$
$$y - 2x \leq 1 \qquad (2)$$
$$y + 2x \leq 1 \qquad (3)$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \qquad (4)$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \qquad (5)$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.
b) Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.
c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und $y \leq 1 - \frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, dass es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n_1}$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?

8.12.4 IV. Stufe 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101241
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so dass $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ erfüllt ist.
Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Aufgabe 2 - 101242
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x)=f(x)+h\cdot f'(x)+h^2\cdot f''(x)+...+h^n\cdot f^{(n)}(x)$$

definiert ist.

Aufgabe 3 - 101243
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Aufgabe 4 - 101244
Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+a_1y&=b_1 && (1)\\ a_2y+b_2z&=a_3 && (2)\\ b_3x+a_4z&=b_4 && (3) \end{aligned}$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für $a2$, dann B für $b2$ u.s.w., zum Schluss B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.
A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x,y,z) hat.
a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten $a_1,...,a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1,...,b_3$ durch B so auswählen, dass er gewinnt?
b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1,...,a_4$ solche Werte angeben, dass er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Aufgabe 5 - 101245
Es seien $A_0A_1...A_n$ $(n>2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0\neq A_n$. Die Punkte $A_1,...,A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.
Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1...A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, dass also $F\leq\pi\frac{s^2}{2}$ gilt.

Aufgabe 6A - 101246A
Definition: Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.
Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Aufgabe 6B - 101246B
In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, dass in beliebigen Punkten P' von t (mit $AP' = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, dass die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $P'P = y < r$.
a) Man beweise, dass dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!
b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise: Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt. Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, dass für alle positiven reellen Zahlen $x \leq \frac{1}{n}r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, dass also $\delta \leq 0{,}001$ gilt.

8.13 XI. Olympiade 1971

8.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111211
Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der Nationalen Volksarmee der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als "Zweitsprache" noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.

(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.

(2) E beherrscht keine Fremdsprache.

(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.

(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch noch Polnisch noch Russisch.

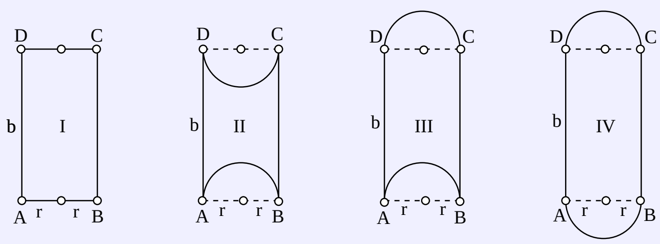
(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.

(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.

Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er - wenn überhaupt - beherrscht.

Aufgabe 2 - 111212

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedesmal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:



Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartigen Streckenverhältnisse anzugeben.

Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.

Aufgabe 3 - 111213
Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom $f(x) = (x+1)^4 - (kx)^2$
a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene,
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene,
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

Aufgabe 4 - 111214
In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$ sei P ein im Inneren des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, dass dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.

8.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111221
Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b.
Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.
a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.
b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

Aufgabe 2 - 111222
Beweisen Sie, dass für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

Aufgabe 3 - 111223
Klaus bemerkt, dass die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von $110°$ bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

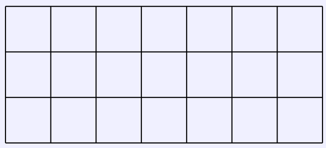
Aufgabe 4 - 111224
Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
Es ist zu beweisen, dass keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

8.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111231
Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90°$.
a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d.h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent).
Deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

Aufgabe 2 - 111232
Man beweise, dass die Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Aufgabe 3 - 111233



21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abbildung angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, dass jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt.
Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.
Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden lässt.

Aufgabe 4 - 111234
a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Man zeige, dass die so definierte Folge a_n eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n > 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass a_n eine geometrische Folge ist!

Aufgabe 5 - 111235
Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{1-\sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Aufgabe 6A - 111236A
Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun K die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in K eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man beweise, dass K eine Gruppe bezüglich A ist.

Aufgabe 6B - 111236B
50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.
Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:
1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.
2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ u anzusetzen.
3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

8.13.4 IV. Stufe 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111241
Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \qquad (1)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die folgende Ungleichung (2) erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 111242
Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt } (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Man beweise, dass die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 3 - 111243
Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei der Punkte P_i, P_j $(i, j = 1, 2, 3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen $0°$ und $180°$ liegt.
Man beweise, dass für diese Größen die Ungleichung $\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}$ gilt.

Aufgabe 4 - 111244
a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$ erfüllen.
b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

Aufgabe 5 - 111245
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:
Hängt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge der Zahl $x + 1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Aufgabe 6A - 111246A
Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, dass auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.
Man beweise, dass dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

Aufgabe 6B - 111246B
Als "Abstand" zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.
Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.
Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der "Abstand" von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

8.14 XII. Olympiade 1972

8.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121211
Eine "utopische Aufgabe":

Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben Rot, Gelb, Schwarz und Blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt. Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten:

Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, daß der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, dass die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichen. Immerhin konnte man ermitteln, dass für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, dass der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, dass der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut?

Aufgabe 2 - 121212
Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a,b,c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 3 - 121213
Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \qquad (**)$$

ermittelt werden, so dass der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht.

Man zeige, dass dies immer möglich ist und dass die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

Aufgabe 4 - 121214
Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y ($x \leqslant y$)anzugeben, für die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ erfüllt ist.

8.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121221
Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, dass dann

$$x = u \cdot v; \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2+y^2 = z^2$ gilt, d.h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

Aufgabe 2 - 121222
Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynom $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann Teiler eines Polynom $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so dass $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

Aufgabe 3 - 121223
Man beweise, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n+2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Aufgabe 4 - 121224
In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:
(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.
Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

8.14.3 III. Stufe 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4$$

erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

Aufgabe 2 - 121232
Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleich weit entfernt sind.

Aufgabe 3 - 121233
Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: "Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"
Zuschauer: "Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."
Reporter: "Wie wurden die Punkte verteilt?"
Zuschauer: "In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."
Reporter: "In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"
Zuschauer: "Ich weiß es nicht."
Reporter: "Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"
Zuschauer: "Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei.

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!
a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?
(Es sei bekannt, dass in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

Aufgabe 4 - 121234
Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an+b$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben.
Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.
Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

Aufgabe 5 - 121235
Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.
Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n $(n \geq 4)$ an, für die das gilt.

Aufgabe 6A - 121236A
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x \cdot f(x+1)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.
b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.
c) Man gebe eine spezielle Funktion f_0 an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

Aufgabe 6B - 121236B
Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, dass sie die Strecke AB in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.
a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei aus den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, dass sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren lässt.
b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert: Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein "Fall" bezeichnet.
Ein "Fall" heiße ein "günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, dass sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden lässt.
Ist z die Anzahl aller möglichen "Fälle" und z_1 die Anzahl aller "günstigen Fälle" so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

8.14.4 IV. Stufe 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121241
Man untersuche, ob unter allen Paaren (a,b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

Aufgabe 2 - 121242
Es sind alle Paare (x,y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung erfüllt ist:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

Aufgabe 3 - 121243
Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

Aufgabe 4 - 121244
Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3;4;0)$ bzw. $(10;8;4)$.
Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so dass das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

Aufgabe 5 - 121245
Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen 0 und 1 befanden.
Danach ersetzt er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden musste.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzig mal durch. Zum Schluss stellte er fest, dass er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

Aufgabe 6A - 121246A
Man zeige , dass der Term $$\frac{(14+\cos x)\cdot \sin x}{9+6\cdot \cos x}$$
im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, dass für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenzen beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung: Es gilt $\pi = 3{,}14159 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$ und $\sqrt{2} = 1{,}41421 + \epsilon$ mit $0 < \epsilon < 10^{-5}$.

Aufgabe 6B - 121246B
In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben.
Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, dass B auf k_1 und C auf k_2 liegen.
a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.
b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solcher Dreiecke gibt.

8.15 XIII. Olympiade 1973

8.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131211
Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus M), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 2 - 131212
Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Aufgabe 3 - 131213
Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $M = \{a, a^2, ..., a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen M_1 und M_2, für die die Summe der in M_1 enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in M_2 enthaltenen Zahlen ist.

Aufgabe 4 - 131214
Gegeben seien k reelle Zahlen a_1, a_2, ... , a_k (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ und

(2) $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$ gilt.

Man beweise, dass dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$

8.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131221
Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0; q \neq 0; q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ gilt.
a) Man beweise, dass die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \quad \text{und} \quad \{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.
b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0; q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

Aufgabe 2 - 131222
Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen.
Dabei musste jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.
Schüler A meint, dass es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte.
Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, dass es sogar acht solcher Schüler geben müsse.
Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

Aufgabe 3 - 131223
In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

Aufgabe 4 - 131224
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$$

8.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131231
Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder.
Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Sohn und Tochter alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

Aufgabe 2 - 131232
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

Aufgabe 3 - 131233
Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck. Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb von V.

Aufgabe 4 - 131234
Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, ..., 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.
Man beweise, dass die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn gilt:

$$P_1P_2 + P_3P_4 = P_1P_3 + P_2P_4 = P_1P_4 + P_2P_3$$

Aufgabe 5 - 131235
Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Aufgabe 6A - 131236A
Eine Menge G von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d.h., jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus G gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei P die Menge aller reeller Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, dass die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

Aufgabe 6B - 131236B
M sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus M der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweis: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

8.15.4 IV. Stufe 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131241
Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ψ und ζ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, ... \qquad (1)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, dass die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

Aufgabe 2 - 131242
Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z.B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[-0{,}7] = -1$.)
a) Man zeige, dass es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, dass die Zahlen

$$c_n = a \cdot n + b - [a \cdot n + b], \qquad (n = 1, 2, ...)$$

eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und dass dabei alle $c_n \neq 0$ sind.
b) Man beweise, dass für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

Aufgabe 3 - 131243
Es seien n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, dass es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, dass dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Aufgabe 4 - 131244
Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von $-1; 0$ und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen erfüllen:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = x^2 \cdot g(x) \qquad (2)$$

Aufgabe 5 - 131245
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, dass $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

Aufgabe 6A - 131246A
Erklärungen: Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, ..., K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, ..., S_n$ angebracht.
Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt vom eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.
Unter einem "Schaltbild" B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z.B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_0 bezeichnet sei.
Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der "Summe" $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Es sei B dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{n_1}, ..., S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{k_1}, ..., S_{k_p}$ eingeschaltet sind.
Dann beginne man mit dem Schaltbild B_0 und
(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, ..., K_{n_p}$, jeden genau einmal. Anschließend (ohne nach B_0 zurückzugehen!)
(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, ..., K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem "Produkt" $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:
Man beginne mit dem Schaltbild B_0, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend
(c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jedoch noch genau einmal.
Man beweise die folgenden beiden Aussagen:
(1) Sind B, B', B'' Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'')$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

Aufgabe 6B - 131246B
a) Man beweise folgende Behauptung:
Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen gelten:

$$f(x) > f''(x) \qquad (1)$$
$$f'(x) > f''(x) \qquad (2)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch $f(x) > f'(x) \quad (3)$ ersetzt?

8.16 XIV. Olympiade 1974

8.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141211
Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z.B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)

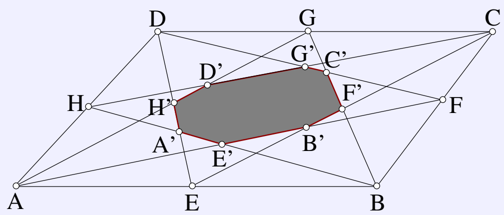
a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahl der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.

b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 2 - 141212
Man beweise:

Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

Aufgabe 3 - 141213



In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA.

Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A',
der von HB mit AF sei E',
der von AF mit EC sei B',
der von EC mit GB sei F',
der von GB mit FD sei C',
der von FD mit CH sei G',
der von CH mit GA sei D', und
der von GA mit DE sei H' (siehe Abbildung).

Man beweise, dass der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

Aufgabe 4 - 141214
Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a, \qquad ; \qquad x^2y^3z = b, \qquad ; \qquad x^3yz^2 = c \qquad (*,**,***)$$

1) keine,
2) genau eine,
3) genau zwei,
4) mehr als zwei, jedoch endlich viele,
5) unendlich viele

reelle Lösungen (x, y, z) hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

8.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141221
Es sei x_n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.
Man gebe die Glieder x_1, x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(n) = x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ an.

Aufgabe 2 - 141222
Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, dass
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleich groß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleich groß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

Aufgabe 3 - 141223
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so dass sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden.
Die Gerade g halbiere den Winkel $\angle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\angle AFB$.
Man beweise, dass dann $g \parallel h$ ist.

Aufgabe 4 - 141224
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \qquad (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \qquad (2) \\ x^4 + y^4 + z^4 &= a \qquad (3) \end{aligned}$$

a) keine reellen Lösungen (x, y, z)
b) genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung hat.

8.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 12

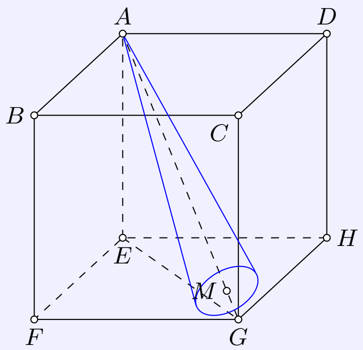
Aufgabe 1 - 141231

In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, dass in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 u.s.w. in dieser Reihenfolge stehen.
Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen.
Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.
Anmerkung:
Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

Aufgabe 2 - 141232

Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a,b) aus rationalen Zahlen a,b, für die $a+b=c$ gilt.
Beweisen Sie, dass unter allen Produkten $a\cdot b$ mit $(a,b)\in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a,b) mit $a=b$ gebildet wurde!

Aufgabe 3 - 141233



Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:
a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.
Man beweise:
Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha+\sqrt{2}}$$

Aufgabe 4 - 141234

Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y=\log_a(bx+c)$ mit a,b,c reell; $a>1$ gibt, deren Graph in einem x,y-Koordinatensystem durch die Punkte $(2;2)$, $(-1;0)$ und $(0;1)$ verläuft.
Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a,b,c) an, für die das zutrifft.

Aufgabe 5 - 141235
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, dass F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.
Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist.
Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Aufgabe 6A - 141236A
Ein in einem industriellen Prozess eingebauter Messkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird.
Jede Übertragungseinheit A_i $(i = 1, 2, 3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.
Es sei nun bekannt, daß am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?
Hinweis:
Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.
Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.
a) Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.
b) Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, dass unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

Aufgabe 6B - 141236B
Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1}$$

für alle reellen x. (1)
a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d.h., dass es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so dass $f(x+q) = f(x)$ für alle reellen x gilt. (2)
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.
Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \cdot \sin^2 x}{c + d \cdot \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

8.16.4 IV. Stufe 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141241
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \qquad (1)$$

Aufgabe 2 - 141242
Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Messwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$.
Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Messwerte so verändert werden, dass die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich $180°$ ist.
Es ist zu beweisen, dass für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt.

Aufgabe 3 - 141243
In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(a) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.
Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(b) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.
Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.
Hinweise:
(1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ begrenzten Sehne gelegenen Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.
(2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

Aufgabe 4 - 141244
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen gelten:

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \qquad (1) \quad \text{und}$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 5 - 141245
Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet.
Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.
a) Man zeige, dass es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.
b) Man beweise, dass für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^* zusammenfällt.

Aufgabe 6A - 141246A
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.
Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben.
Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).
Man beweise:
Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen "möglichen Fall".
Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein "günstiger Fall". Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei a_n genannt, die Anzahl aller "günstigen Fälle" g_n.
Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Aufgabe 6B - 141246B
In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:
Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand"

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0; 2)$ und $B(1; 4)$ gleich weit entfernt sind.

8.17 XV. Olympiade 1975

8.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151211
An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, dass es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

Aufgabe 2 - 151212
Man beweise, dass es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.

Bemerkung: Eine Halbkugel(-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

Aufgabe 3 - 151213
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{20} \quad \text{gilt.} \qquad (8)$$

Aufgabe 4 - 151214
Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.

Man beweise, dass keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.

8.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151221
a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} \cdot b + c_2 a^{n-2} \cdot b^2 + ... + c_n b^n \qquad (1)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0 + c_1 + c_2 = 79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.
b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass aus (1) durch die Ersetzung $a = x^2, b = \frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = c_0 x^{k_0} + c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + ... + c_n x^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i = 0$ hat, d.h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.
b) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 2 - 151222
Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

Aufgabe 3 - 151223
Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren.
An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

Aufgabe 4 - 151224
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a && (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 && (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 && (3) \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

8.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151231
Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.
Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest.
Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ.
Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

Aufgabe 2 - 151232
Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine "Einheit von M" bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung $\frac{x}{e} \in M$ gilt.
(So besitzt z.B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten +1 und -1, während z.B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z.B. +1 und -1 Einheiten.
a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.
b) Man beweise, dass M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Aufgabe 3 - 151233
Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegende Punkte.
Man beweise, dass X, Y und Z auf ein und derselben Geraden liegen.

Aufgabe 4 - 151234
Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$

darstellen lässt.
Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad \text{alle} \quad a_m = ... = a_0 = 0$$

verschieden ist.

Aufgabe 5 - 151235
In der Ebene mögen n Punkte ($n \geq 4$) so gelegen sein, dass je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.
Man beweise, dass dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Aufgabe 6A - 151236A
Gegeben seien n Punkte einer Ebene ($n > 0$), von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, dass es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, dass sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken gilt:

$$Z_v \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

Man zeige ferner, dass sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.
Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 6B - 151236B
Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte.
Bei der Division dieses Polynoms durch $(x - p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x - q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x - p)(x - q)$?

8.17.4 IV. Stufe 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151241
Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so dass $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt.
Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

Aufgabe 2 - 151242
Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:
Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

Aufgabe 3 - 151243
P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände $PA = u$, $PB = v$, $PC = w$ hat.
Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

Aufgabe 4 - 151244
Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x, y, z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solcher Tripel jeweils die Zahl

$$f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$$

zuordnet. Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f und weisen Sie nach, daß jeder Wert in diesem Bereich angenommen wird!

Aufgabe 5 - 151245
Bekanntlich gilt:
Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile zerlegt.
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen sind und keine zwei zueinander parallel sind.

Aufgabe 6A - 151246A
Mit R^n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R^n ist durch

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.
Es sei M eine Teilmenge von R^n, für die gilt:
Mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) \in M \qquad (1)$$

Ein n-Tupel $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ heißt x-Element von M, wenn aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2}(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

und damit $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ist $*$-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0 < \lambda < 1$ aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

also

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

folgt.

Aufgabe 6B - 151246B
In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{2k}; \qquad N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}; \qquad m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist.
a) Man berechne die Summen M, N und m.
b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} (k - x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.
Man berechne $f(x)$ und weise nach, dass f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für $x = m$ annimmt.

8.18 XVI. Olympiade 1976

8.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161211
Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen $(x,\, y,\, z)$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + yz = 7 \qquad (1)$$
$$xy + z = 5 \qquad (2)$$
$$x + y + z = 6 \qquad (3)$$

Aufgabe 2 - 161212
Man beweise, dass für jedes Dreieck ABC die Gleichung

$$\overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma = 2F$$

gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

Aufgabe 3 - 161213
Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:

2 Zelte für je 3 Personen,

1 Zelt für 8 Personen,

2 Zelte für je 10 Personen und

2 Zelte für je 16 Personen.

Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, dass es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist. Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.

a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?

b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

Aufgabe 4 - 161214
Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.

Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.

Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

8.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161221
Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d. Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.
Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

Aufgabe 2 - 161222
Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d.h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Für jedes $n = 1, 2, ...$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.
a) Man ermittle das Volumen V_{10}.
b) Man ermittle S_{10}.
c) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.
Hinweis:
Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

Aufgabe 3 - 161223
In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Man beweise, dass es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

Aufgabe 4 - 161224
Es seien x und y
a) nichtnegative reelle Zahlen,
b) nichtnegative ganze Zahlen,
für die die Ungleichungen

$$8x + 3y \leq 25 \qquad (1)$$
$$-2x + 3y \leq 10 \qquad (2)$$

erfüllt sind. Man weise nach, dass für die Summe

$$z = 2x + y \qquad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

8.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161231
Man gebe alle Paare (x, y) reeller Zahlen an, für die gilt:

$$x^2 + y = 2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad y^2 + x = 2 \quad (2)$$

Aufgabe 2 - 161232
In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, dass die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.
Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen r und h.
Man weise insbesondere nach, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r_1}{h}$$

ist.

Aufgabe 3 - 161233
Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind.
Ein Punkt dieser Menge heiße außergewöhnlich, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.
Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.
Man beweise:
Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

Aufgabe 4 - 161234
a) Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ die Ungleichung gilt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 5 - 161235
In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Man beweise, dass für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Aufgabe 6A - 161236A
Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0;1)$, $Q(x;\cos x)$ und $R(-x;\cos(-x))$ gelegt.
a) Man gebe eine Funktion f so an, dass für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.
b) Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.
c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x, für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

Aufgabe 6B - 161236B
Es sei M eine Menge, für die folgendes gilt:
(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, dass $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:
Wenn für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ die Beziehung $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ g ilt, dann gilt für alle $p \in M, q \in M, r \in M, s \in M$ die Beziehung

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

8.18.4 IV. Stufe 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161241
Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller reeller Zahlen x mit $a < x < b$ sei I genannt.
Eine in I definierte Funktion f, sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist g genau dann an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Aufgabe 2 - 161242
Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$.
Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, dass jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.
Hinweis:
Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

Aufgabe 3 - 161243
Ist $P_1P_2P_3P_4$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ϵ_i und die Größe des Winkels zwischen ϵ_{i-1} und ϵ_i mit α_i bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch den Index 4 ersetzt).
Man beweise:
Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

Aufgabe 4 - 161244
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \qquad (1)$$

Aufgabe 5 - 161245
Man ermittle die Anzahl aller Paare (p, q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, dass die Gleichung $x^5 + px + q = 0$ mindestens eine rationale Lösung hat.

Aufgabe 6A - 161246A
Es sind alle Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen x gilt $x \cdot f(x-1) = (x-2) \cdot f(x)$.

Aufgabe 6B - 161246B
Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.
Hinweis:
Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

8.19 XVII. Olympiade 1977

8.19.1 I. Stufe 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171211
Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

Aufgabe 2 - 171212
Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$2 \cdot \sqrt{x+y} + x + y = 8 \qquad (1)$$

$$x^3 + y^3 = 40. \qquad (2)$$

Aufgabe 3 - 171213
Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, dass A, B, C, D in einer Ebene ξ liegen; dass sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und dass S nicht in ξ liegt.

Es ist zu beweisen, dass dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCDS$ eine Ebene existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Aufgabe 4 - 171214
Jemand sucht alle Möglichkeiten, vier Ecken eines gegebenen Würfels schwarz zu markieren. Er betrachtet zwei dieser Markierungsmöglichkeiten genau dann als gleich, wenn es eine Drehung des Würfels gibt, die die eine der beiden Markierungsmöglichkeiten in die andere überführt.

Ermitteln Sie alle verschiedenen Markierungsmöglichkeiten!

8.19.2 II. Stufe 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171221
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt:
Wenn
(1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn
(2) b_1 ($\neq 0$) das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1 = -3b_1$,
(4) $a_2 = 2b_2$,
(5) $a_3 = b_3$,
(6) d ist eine ganze Zahl.

Aufgabe 2 - 171222
Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen x, die diesen Bedingungen genügen:

(A1) x ist dreistellig.
(A2) Es gilt: $500 < x < 600$.
(A3) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
(B1) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.
(B2) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
(B3) x ist durch 5 teilbar.
(C1) x ist eine Quadratzahl.
(C2) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
(C3) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
(D1) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
(D2) x ist Primzahl.
(D3) x ist ungerade.

Aufgabe 3 - 171223
Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$$

ganzzahlig ist.

Aufgabe 4 - 171224
Gegeben sei in einer Ebene ϵ ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ϵ, für die $AX + BX = CX$ gilt.

8.19.3 III. Stufe 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171231
Gegeben sei die Folge (a_n) durch
$$a_n = \frac{4n}{4n^2+121} \qquad (1)$$
für $n = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

Aufgabe 2 - 171232
Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung
$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0$$

Aufgabe 3 - 171233
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, dass gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.
Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

Aufgabe 4 - 171234
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung gilt:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Aufgabe 5 - 171235
Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt
$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$$
Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Aufgabe 6A - 171236A
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in $\mathbb{R}$ stetig sind und die Eigenschaft haben, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung $f(x^n) = f(x) \quad (1)$ gilt.
b) Man gebe eine in $\mathbb{R}$ definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Aufgabe 6B - 171236B
Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $[\frac{7}{2}] = 3$; $[5] = 5$; $[-\pi] = -4$.
Man beweise:
Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

8.19.4 IV. Stufe 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171241
Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert:

$$d_1(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$$

$d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie zwei Strecken auf den Geraden $x = -1$ bzw. $x = 1$ begrenzt wird.
(Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefasst.)
Es seien nun f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1} \quad \text{und} \quad h(x) = 1$$

definierte Funktionen.
a) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Aufgabe 2 - 171242
Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1 \qquad (1)$$
$$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1 \qquad (2)$$

definierten Funktionen. Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind. Für diese Funktionen gelten:

$$f_1(1) = -1, \quad f_6(1) = f_7(1) = 1 \qquad (3)$$
$$f_3(f_4(1)) = -1 \qquad (4)$$
$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1 \qquad (5)$$

Man beweise, dass in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

Aufgabe 3 - 171243
a) Man gebe alle Möglichkeiten an, eine gegebene Dreiecksfläche D in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
b) Man beweise:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig.

Aufgabe 4 - 171244
Definition:
Es sei mit $d(X,Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge m bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von m, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus m gilt $d(X,Y) \leq d$.
(2) Es gibt Punkte P, Q aus m, für die $d(P,Q) = d$ ist.
Man beweise:
a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.
b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ϵ_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebenen Schnittfläche ϵ_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

Aufgabe 5 - 171245
Es seien $f_1, f_2, ...$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)}$$

für $k = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

Aufgabe 6A - 171246A
Es sei n eine positive Zahl, $(a_1, ..., a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a2 \leq ... \leq a_n$.
Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, ..., a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, dass die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.
Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den dazugehörigen minimalen Wert von z an.

Aufgabe 6B - 171246B
a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1...A_{2n-1}$.
Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße einseitig, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Eckpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken einseitig ist.
b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ falls er existiert.
Hinweis:
Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller einseitigen unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als $w_n = \frac{g_n}{m_n}$.

8.20 XVIII. Olympiade 1978

8.20.1 I. Stufe 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181211
Bei der Mathematikolympiade treffen sich drei Schüler. "Ist euch schon aufgefallen", fragt einer von ihnen, ein Mädchen, dass wir Lang, Dick und Dünn heißen und dass auch genau einer von uns außergewöhnlich lang, genau ein anderer beachtlich dick und der dritte erschreckend dünn ist?"

"Ja, tatsächlich", entgegnet darauf ein anderer, der dünne Schüler, "aber bei keinem von uns stimmen Name und die den jeweiligen Schüler charakterisierende Eigenschaft überein." "Da hast du völlig recht!" stimmt ihm der Schüler namens Lang zu.

Wie heißt hiernach der lange Schüler, wie der dicke und wie der dünne Schüler, wenn darüber hinaus vorausgesetzt wird, dass das Mädchen, das gefragt hat, nicht dick ist? Welche der charakterisierenden Eigenschaften und welchen Namen hat das Mädchen?

Aufgabe 2 - 181212
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 5$ gilt:

Jedes Quadrat lässt sich in n Teilquadrate zerlegen.

Erklärung: Sind Q, T_1, ..., T_n Quadrate (als Flächen, einschließlich ihrer Randpunkte betrachtet), so liegt genau dann eine Zerlegung von Q in T_1, ..., T_n als Teilquadrate vor, wenn

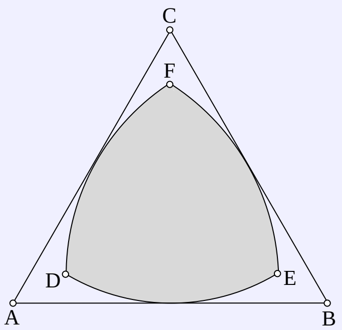
(1) Q die Vereinigungsmenge der Mengen T_1, ..., T_n ist und

(2) für $i \neq j$ der Durchschnitt von T_i mit T_j stets entweder keine Punkte oder nur solche Punkte enthält, die sowohl für T_i als auch für T_j Randpunkte sind.

Aufgabe 3 - 181213
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3, \qquad y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

Aufgabe 4 - 181214



Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein.

Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).

8.20.2 II. Stufe 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181221
Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, dass durch $a_n = \frac{n+b}{cn+d}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt.
Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

Aufgabe 2 - 181222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k = \frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

Aufgabe 3 - 181223
Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0° < \alpha < 180°$ gilt.
Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels.
Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t. Man beweise, dass es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

Aufgabe 4 - 181224
Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:
(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
(6) Die Anzahl der Fußballer ist größer als die Anzahl der Schwimmer, diese wiederum ist größer als die Anzahl der Turner und diese größer als die Anzahl der Leichtathleten.
(7) Die Anzahl der Fußballer ist gleich der Summe der Anzahl der Turner und der Leichtathleten.
In (6) und (7) bezeichnet Fußballer, Schwimmer u.s.w. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.
Gib die Anzahl der Fußballer, der Schwimmer, der Turner und der Leichtathleten in meiner Klasse an!
Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, dass diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei. Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

8.20.3 III. Stufe 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181231
Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) - f(x) = x + 1$ erfüllen.

Aufgabe 2 - 181232
Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ϵ eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ϵ ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ϵ alle diejenigen Punkte C auf ϵ, für die die Abstandssumme $AC + BC$ möglichst klein ist.

Aufgabe 3 - 181233
Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i.
(2) Jede der Mengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ enthält genau 1111 Elemente.
(3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

Aufgabe 4 - 181234
Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x\sqrt{k})$$

definierte Funktion f nichtperiodisch.

Aufgabe 5 - 181235
Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1, ..., x_n \geq 0$, für die $x_1 + ... + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + ... + x_n^3$
a) möglichst groß, b) möglichst klein ist.
Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.

Aufgabe 6A - 181236A
Es sei (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelte.
Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so dass für alle $n = 1, 2, ...$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

Aufgabe 6B - 181236B
Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C, B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A, C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man:
Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck - mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechende Ecken -, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

8.20.4 IV. Stufe 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181241
Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30$$
$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, dass für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

Aufgabe 2 - 181242
Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten.
Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten lässt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist.
Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten:
Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.
Man beweise, dass dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

Aufgabe 3 - 181243
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, ..., Q_n$ so gelegen, dass $Q_1, ..., Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine Ecke von E. (1)
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist.
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

Aufgabe 4 - 181244
Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m > n$ die durch

$$s(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |i - j|$$

definierte Summe $s(m, n)$ den Wert hat:

$$s(m,n) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n)$$

Aufgabe 5 - 181245
Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Man zeige, dass es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_j = n! + j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weitere Zahl a_k $(k \neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

Aufgabe 6A - 181246A
Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s.
Um jeden Punkt A_i $(i = 1,2,3,4,5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt.
Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.
Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 6B - 181246B
a) Es sei M die Menge aller Tripel (x,y,z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54 \qquad (1)$$
$$55y + z \leq 54 \qquad (2)$$
$$55x - 4z \geq 4 \qquad (3)$$
$$55y - 4z \geq 4 \qquad (4)$$
$$z \geq -1 \qquad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0,y_0,z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x,y,z) \in M$ die Ungleichung

$$f(x_0,y_0,z_0) \geq f(x,y,z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0,y_0,z_0)$.
b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x,y,z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind.
Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $(x_1,y_1,z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x,y,z) \in M'$ die Ungleichung

$$f(x_1,y_1,z_1) \geq f(x,y,z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1,y_1,z_1)$.

8.21 XIX. Olympiade 1979

8.21.1 I. Stufe 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191211
Es sei (bezüglich eines kartesischen x,y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

Aufgabe 2 - 191212
Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B', oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

Aufgabe 3 - 191213
Von einem Dreieck werde gefordert, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, dass diese Forderung erfüllbar ist und dass durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

Aufgabe 4 - 191214
a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (1)$$
$$0{,}069x + y = 0{,}3 \qquad (2)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_0,\, y_0)$ hat, und ermitteln Sie diese!
Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x *innerhalb einer gegebenen -Umgebung von 0,069 verändert*, d.h., für gegebenes reelles $\delta > 0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leq h \leq \delta$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (3)$$
$$(0{,}069 + h)x + y = 0{,}3 \qquad (4)$$

betrachtet. Man möchte erreichen, dass sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 *um höchstens 1% ändern kann.* Damit ist die folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta > 0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ (*bezüglich (3) maximaler relativer Fehler* von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta > 0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!
c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \leq 0{,}01$ gilt!

8.21.2 II. Stufe 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191221
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x - \frac{1}{y} = 1 \quad ; \quad y - \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad z - \frac{1}{x} = 1 \qquad (1)$$

Aufgabe 2 - 191222
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\angle DAB$ mit α bezeichnet.
Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$\begin{aligned} AB \parallel CD & \qquad (1)\\ |AB| > |CD| & \qquad (2)\\ |BC| = |CD| = |DA| & \qquad (3)\\ AC \perp BC & \qquad (4) \end{aligned}$$

Man beweise, dass die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und dass die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

Aufgabe 3 - 191223
100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen.
Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar
a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung:
Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.
Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!
(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, dass jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

Aufgabe 4 - 191224
a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.

8.21.3 III. Stufe 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191231
Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Aufgabe 2 - 191232
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, dass sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d.h. es wird vorausgesetzt:

$$AE : EB = DA : BC; BF : FC = AB : CD; CG : GD = BC : DA; DH : HA = CD : AB \qquad (1)$$

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck $ABCD$ gilt $AB + CD = BC + DA$ (d.h. $ABCD$ ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck $EFGH$ für die Größe der Innenwinkel

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

gilt (d.h. wenn $EFGH$ ein Sehnenviereck ist).

Aufgabe 3A - 191233A
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Für alle Paare $(x_1; x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Aufgabe 3B - 191233B
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt.
Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, dass jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Aufgabe 4 - 191234
Man untersuche, ob unter allen Tetraedern $ABCD$ mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\angle BDC$, $\angle CDA$, $\angle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $AB+AC+AD+BC+BD+CD$ existiert.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Aufgabe 5 - 191235
Man beweise:
Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}$$

Aufgabe 6 - 191236
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a.
Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^5 + y^5 = 1 \qquad , \qquad x + y = a$$

8.21.4 IV. Stufe 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191241
Man ermittle alle Paare $(f(x); g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.
(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.
(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.
(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.
(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

Aufgabe 2 - 191242
Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ϵ liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ϵ als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben.
Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cup Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt.
Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

Aufgabe 3 - 191243
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y \qquad ; \qquad 2y + y^2z = z \qquad ; \qquad 2z + z^2x = x$$

gilt. Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, von reellwertigen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

Aufgabe 4 - 191244
Man beweise, dass für keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m$ (1) gilt!

Aufgabe 5 - 191245
Man beweise:
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Aufgabe 6A - 191246A
Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = z$$

gilt.
Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an der Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $\{x_k\}$, die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $\{f(x_k)\}$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist.
Man zeige:
a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt:
Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.
b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Aufgabe 6B - 191246B
In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

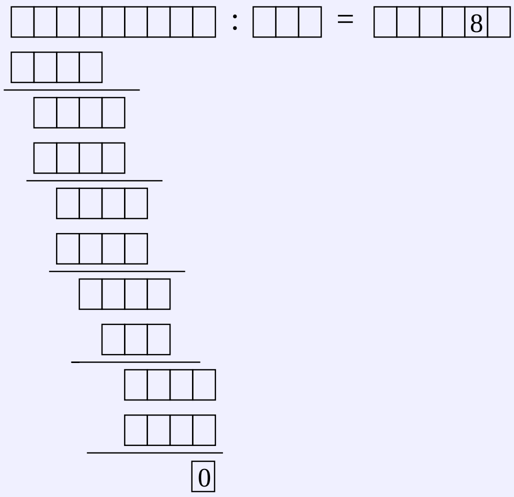
Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.
Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von n Zügen bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

8.22 XX. Olympiade 1980

8.22.1 I. Stufe 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201211



In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Aufgabe 2 - 201212
Vier Personen A, B, C, D machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl x. Es ist bekannt, dass

(1) von A, B, C genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,

(2) D zwei wahre Aussagen macht.

Die von A, B, C, D gemachten Aussagen lauten:

(A1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von x ist gerade.

(A2) x ist Quadratzahl.

(B1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von x mindestens einmal vorhanden.

(B2) x ist vierstellig.

(C1) x ist durch 10 teilbar.

(C2) x lässt bei Division durch 3 den Rest 1 .

(D1) In der dekadischen Darstellung von x ist, falls x aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.

(D2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von x ist nicht größer als 2.

Man ermittle alle Zahlen x, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 3 - 201213
Eine gerade Pyramide K_1 mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide K_2 und einen Pyramidenstumpf K_3 zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von K_1 und K_2 seien a_1 bzw. a_2, die Volumina von K_2 bzw. K_3 seien V_2 bzw. V_3.

Man ermittle $a_1 : a_2$ so, dass $V_2 : V_3 = 2 : 3$ gilt.

Aufgabe 4 - 201214
In einem rechtwinkligen kartesischen x,y-Koordinatensystem seien gegeben:

Die Punkte $M(0;0)$, $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$, $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade g mit der Gleichung $x = -8$, der Kreis k_1 um M durch A, der Kreis k_2 um M durch B.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$* versteht man die Menge E_1 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2 \cdot \overline{MA}$ gilt.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkt F_2, Leitlinie g und Exzentrizität 1/2* versteht man die Menge E_2 aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt $\overline{F_2P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ}$.

Unter der *Ellipse durch A mit Hauptscheitelkreis k_1 und Nebenscheitelkreis k_2* versteht man die Menge E_3 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von M ausgehenden Strahl. Er schneidet k_1 bzw. k_2 in je einem Punkt R_1 bzw. R_2. Die Parallele durch R_1 zur y-Achse und die Parallele durch R_2 zur x-Achse schneiden sich in P.

Beweisen Sie, dass die drei Punktmengen E_1, E_2, E_3 einander gleich sind!

8.22.2 II. Stufe 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201221
Für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$$I_1 = [1; 2], \quad I_2 = [0{,}53; 0{,}531], \quad I_3 = [0{,}509; 0.51], \quad I_4 = [0{,}4; 0{,}5]$$

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge $\{a_n\}$ liegen.
Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

Aufgabe 2 - 201222
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \qquad b = \frac{k+1}{2}, \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Aufgabe 3 - 201223
An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal.
Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.
Nach Abschluss des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze $1, 2, ..., n$ der Abschlusstabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)
Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

Aufgabe 4 - 201224
Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, das
a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;
b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.
Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.

8.22.3 III. Stufe 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0 \qquad (1)$$
$$2x^3 + x - 1 < 0 \qquad (2)$$
$$x^3 - x > 0 \qquad (3)$$

Aufgabe 2 - 201232
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f
a) die Menge aller ganzen Zahlen,
b) die Menge aller reellen Zahlen ist.
Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

Aufgabe 3A - 201233A
Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n}$$

Aufgabe 3B - 201233B
Ist f eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:
(1) Für jedes reelle x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt $f(x) \geq 0$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für jedes reelle x_1 mit $0 \leq x_1 \leq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0 \leq x_2 \leq 1$ und $x_1 + x_2 \leq 1$ gilt $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.
a) Man beweise:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) < 2x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.
b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) \leq 1{,}99 \cdot x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.

Aufgabe 4 - 201234
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d.h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

Aufgabe 5 - 201235
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

Aufgabe 6 - 201236
Man zeige, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B > 1$ eine natürliche Zahl $C \geq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern Null und Eins besteht und durch n teilbar ist.

8.22.4 IV. Stufe 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201241
In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.
Man beweise:
Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

Aufgabe 2 - 201242
In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung.
Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen.
Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis:
Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist.
Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, ..., 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfen erfolgte.
Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

Aufgabe 3 - 201243
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$.
Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}$$

Aufgabe 4 - 201244
Es sei $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt. Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

Aufgabe 5 - 201245
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d.h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, dass zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).
Hinweis:
Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.

Aufgabe 6A - 201246A
Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch wiederholtes Halbieren in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:
(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, ..., P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.
(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als n-te Näherung Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, ..., P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, ..., 9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, ..., Q_9$ die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $AQ_1 = Q_1Q_2 = ... = Q_8Q_9 = Q_9B = 1$ m gilt.
Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl N so existiert, dass für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, ..., P_9^{(0)}$ auf AB gilt:
Bei der n-ten Näherung weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ $(j = 1, 2, ..., 9)$ um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d.h., es gilt $P_J^{(N)} Q_j < 1$ mm.

Aufgabe 6B - 201246B
Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T.
Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben.
Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt.
Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s.
Die geforderten Eigenschaften sind:
(1) $\angle BDC = \angle CDA = \angle ADB = 90°$.
(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.
(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

8.23 XXI. Olympiade 1981

8.23.1 I. Stufe 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211211
Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:

(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.

(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.

Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

Aufgabe 2 - 211212
Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 3(x+y) &= 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - 211213
Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

Aufgabe 4 - 211214
Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

In welcher der beiden natürlichen Zahlen 1981! und 1000! $\cdot$ 981! erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?

Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

8.23.2 II. Stufe 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211221
Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, ...$ Ferner werde für $n = 1, 2, 3, ...$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad ; \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$$

a) Man ermittle a_1 und d so, dass $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Man beweise, dass für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right)$$

Aufgabe 2 - 211222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{2x^2-1} < \frac{1}{x}$ gilt.

Aufgabe 3 - 211223
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F. Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 4 - 211224
Man beweise:
Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

8.23.3 III. Stufe 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211231
Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise:
Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Aufgabe 2 - 211232
a) Beweisen Sie, dass kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!
b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!
Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

Aufgabe 3 - 211233
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen Zahlen $x \neq -c$ durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$.

Aufgabe 4 - 211234
Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, dass in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

Aufgabe 5 - 211235
37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, dass genau 9 Karten von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen.
Es sollen nun in Arbeitsgängen Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen Arbeitsgang genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen Arbeitsgängen erreichen kann, dass alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen. Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden Arbeitsgänge!

Aufgabe 6A - 211236A

1. Reihe	□
2. Reihe	□□
3. Reihe	□□□
...	...
m-te Reihe	□□□...□□

Unter einem Stapel von Gegenständen (wie z.B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in der Abbildung verstanden, bei der jeweils für $k = 1, 2, ..., m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen.
Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als Höhe des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)
Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, dass es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt!

Aufgabe 6B - 211236B
Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$:
Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten lässt.

8.23.4 IV. Stufe 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211241
Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ ($k = 1, 2, ..., 1982$) genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Aufgabe 2 - 211242
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1 \qquad (1) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.
Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B u.s.w., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) besitzt.
Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 3 - 211243
Man beweise, dass sich aus fünf geraden Stäben kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden lässt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:
(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt: Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen;
ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.
Hinweis:
Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d.h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

Aufgabe 4 - 211244
Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte.
Man setze

$$r = \frac{|a_0| + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:
a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.
b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Aufgabe 5 - 211245
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $PA^2 + PB^2 = PC^2$ gilt.

Aufgabe 6A - 211246A
a) Man beweise: Wenn

$$a = BC, b = AC, c = AB, d = AD, e = BD, f = CD \qquad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_O dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen lässt:
Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so dass für den Oberflächeninhalt A_O jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_O \leq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (3)$$

gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Aufgabe 6B - 211246B
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.
(2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.
(3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

(4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$$

8.24 XXII. Olympiade 1982

8.24.1 I. Stufe 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221211
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \qquad (1)$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 221212
Man beweise:

Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.

Aufgabe 3 - 221213
In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n, die größer als 7 ist, angegeben:

	Beispiel für $n = 326$
Man dividiere zunächst n durch 7	$(326 : 7 = 46$, Rest $4)$
und schreibe als erste Zahl den ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf.	$\boxed{46}$
Dann multipliziere man 142857 mit dem Rest	$(142857 \cdot 4 = 571428)$
und schreibe das Produkt hinter die zuerst aufgeschriebene Zahl.	46571428
Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man die zuerst aufgeschriebene Zahl.	-46
Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.	$46571382 = 142857 \cdot 326$

Es zeigt sich jedoch, dass dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

Aufgabe 4 - 221214
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden Aussagen (A), bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl, oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form "Wenn p, so q" ist genau dann wahr, wenn die Aussage "(nicht p) oder q" wahr ist. Eine Aussage der Form "u oder v" ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

8.24.2 II. Stufe 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221221
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x \cdot (y+z) = 5$$
$$y \cdot (x+z) = 8$$
$$z \cdot (x+y) = 9$$

erfüllen!

Aufgabe 2 - 221222
Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen $a \leq 1cm \leq b \leq 2cm \leq c \leq 3cm$ gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt.
Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

Aufgabe 3 - 221223
Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt $a + b \leq d + v$. (1)
Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 4 - 221224
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ gegeben.
Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, dass folgende Forderungen erfüllt sind:
Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.
Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.
a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, ..., P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, dass damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfasst sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, ..., A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

8.24.3 III. Stufe 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221231
Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60 \\ 3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65 \\ 4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70 \\ 5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 2 - 221232
Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1, ..., 30)$, die

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$$

erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Aufgabe 3A - 221233A
a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks

$$F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks

$$F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

Aufgabe 3B - 221233B
Man beweise:
a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \qquad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeder berührt.
Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

Aufgabe 4 - 221234
Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichnet f die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \sin\frac{c}{x}$ definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.
a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, dass f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat.
Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

Aufgabe 5 - 221235
a) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.
b) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte $P1$ und $P2$ mit folgenden Eigenschaften:
Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$;
für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

Aufgabe 6 - 221236
Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden.
Zu jedem Schloss soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloss passen soll.
Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloss.
Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:
Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloss auch ein passender Schlüssel; immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloss keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

8.24.4 IV. Stufe 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221241
a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, dass die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!
b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, dass die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

Aufgabe 2 - 221242
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = a \qquad (2)$$
$$x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = a^2 \qquad (3)$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = a^3 \qquad (4)$$

Aufgabe 3 - 221243
Man untersuche, ob es nichtnegative
a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4
mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so dass die Summe

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

Aufgabe 4 - 221244
Man beweise, dass das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{630} \cdot x^9 - \frac{1}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{30} \cdot x^5 - \frac{82}{63} \cdot x^3 + \frac{32}{35} \cdot x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

Aufgabe 5 - 221245
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Bei einem ungestörten technischen Prozess sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, ..., a_n$ abhängigen Größe. Bei einem gestörten technischen Prozess betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\epsilon_1} + \frac{a_2}{1+\epsilon_2} + ... + \frac{a_n}{1+\epsilon_n} \qquad (2)$$

Dabei seien $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, dass für alle $\mu = 1, 2, ..., n$ die Ungleichung $|\epsilon_\mu| \leq 10^{-m}$ (3) gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{10^m - 1}(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$$

folgt!

Aufgabe 6A - 221246A
Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinanderstehen.
Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b, bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.
a) Man beweise, dass dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets gilt:

$$s \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

Aufgabe 6B - 221246B
Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, dass sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$.
Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, ..., n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot p^k \qquad (1)$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als

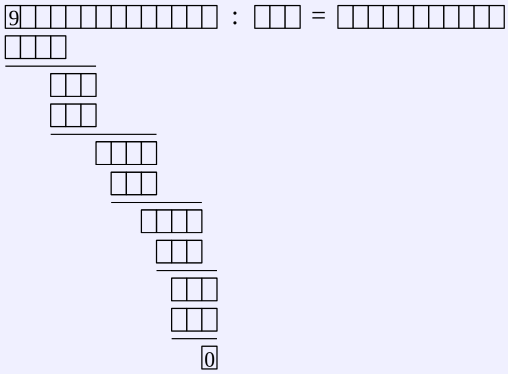
$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = n \cdot p$$

aufzufassen.

8.25 XXIII. Olympiade 1983

8.25.1 I. Stufe 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231211



In dem folgenden Schema (siehe Abbildung) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Aufgabe 2 - 231212
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} = -2 \qquad (1)$$

$$y + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x} + z = 1. \qquad (3)$$

Aufgabe 3 - 231213
Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

(1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.

(2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.

(3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.

(4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90°.

Aufgabe 4 - 231214
Bernd und Jürgen führen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; danach verfährt er nach folgenden Vorschriften:

(1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.

(2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.

(3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet. Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, dass nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so dass der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen. Jürgen macht den ersten Zug.

Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

8.25.2 II. Stufe 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231221
Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, ..., a_5$.

Aufgabe 2 - 231222
Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'.
Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, dass der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen $V_K = \frac{1}{3}F(x+y+z)$ hat, wobei $x = AX$, $y = BY$, $z = CZ$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

Aufgabe 3 - 231223
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = F$$

Man beweise, dass dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2) \qquad (1)$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2) \qquad (2)$$

Aufgabe 4 - 231224
Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

8.25.3 III. Stufe 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231231
In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, dass sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und dass dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzung das Verhältnis $AD : DC$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

Aufgabe 2 - 231232
Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.
Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3} \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 3A - 231233A
Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

d.h. an ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

Aufgabe 3B - 231233B
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so dass die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne dass B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten Zug nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten).
Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück.
Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat.
B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie:
Er nimmt im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,
im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt, falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

Aufgabe 4 - 231234
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$, die das Gleichungssystem

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

erfüllen.

Aufgabe 5 - 231235
Man ermittle alle Paare $(a; b)$ von Primzahlen a und b für die gilt:

$$3a^2 + a = b^2 + b$$

Aufgabe 6 - 231236
Es sei $\angle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$.
Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedes mal, wenn er auf einen der Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen.
Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, ...$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren).
Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).
Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen,

- ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, ...$ gibt,
- ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, ...$ einen Punkt P_k derart gibt, dass $SP_k \leq SP_i$ für alle $i = 1, 2, 3, ...$ gilt und
- durch wieviele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, dass der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $SP_{m-1} = SP_m$ durchläuft, so dass also das Wegstück $P_0...P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m...P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle P_0SQ$.

Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfasst:
I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α
(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$ erreicht.
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, ..., m-1$ die Ungleichung $SP_k < SP_{k-1}$ erfüllen, dass dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $SP_m \geq SP_{m-1}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, ..., n$ sogar $SP_k > SP_{k-1}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es
(C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n
Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, dass für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $SP_m = SP_{m-1}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

8.25.4 IV. Stufe 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231241
Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und gilt:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Aufgabe 2 - 231242
a) Man beweise, dass es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:
(1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.
(2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.
(3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.
(4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M.
b) Man ermittle eine Menge M, die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat.
Dass die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

Aufgabe 3 - 231243
Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:
T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$.
Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, dass die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.
Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:
P: "Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln."
S: "Das wusste ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben."
P: "Jetzt kann ich das Tripel ermitteln."
D: "Ich auch."
S: "Ich jetzt auch."
Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

Aufgabe 4 - 231244
Seien $P_1, P_2, ..., P_n$ verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{ij} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{ij} P_iP_J \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

Aufgabe 5 - 231245
Man ermittle alle Funktionen f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x_1+x_2}) = f(\frac{1}{x_1}) + f(\frac{1}{x_2})$.
(2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(3) Es gilt $f(1) = 1$.

Aufgabe 6A - 231246A
Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, dass jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecken hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.
Man beweise aus dieser Voraussetzung, dass es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Inneren oder auf seinem Rand enthält.
Anmerkung:
In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfahre man ebenso.

Aufgabe 6B - 231246B
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche $a_1, a_2, ..., a_k$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so dass

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1984 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k$ an.

8.26 XXIV. Olympiade 1984

8.26.1 I. Stufe 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241211
Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1.

Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert!

Aufgabe 2 - 241212
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2y - \frac{6}{xy} &= 13 \\ xy + x^2y &= 6 \quad \text{erfüllen.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - 241213
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $2x-3$, $5x-14$ und $\dfrac{2x-3}{5x-14}$ ganze Zahlen sind.

Aufgabe 4 - 241214
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B u.s.w. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

8.26.2 II. Stufe 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241221
Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt.
a) Berechnen Sie a_2 und a_3, und beweisen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt!
b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

Aufgabe 2 - 241222
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy \qquad (1)$$
$$(x + y)^2 = 36 \qquad (2)$$

Aufgabe 3 - 241223
Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, so dass für

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt.

Aufgabe 4 - 241224
a) Beweisen Sie, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \qquad (1)$$

gilt!
b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!
Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

8.26.3 III. Stufe 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241231
Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, ..., a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:
(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

Aufgabe 2 - 241232
Man beweise:
Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Aufgabe 3A - 241233A
Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:
(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$.

Aufgabe 3B - 241233B
Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot ... \cdot (x + n - 1) = (x + n) \cdot (x + n + 1) \cdot (x + n + 2) \cdot ... \cdot (x + 2n - 1)$$

Aufgabe 4 - 241234
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

Aufgabe 5 - 241235
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

Aufgabe 6 - 241236
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

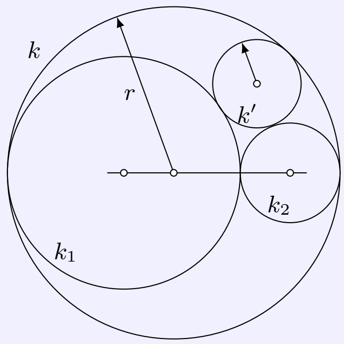
8.26.4 IV. Stufe 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241241
a) Man beweise, dass durch

$$f(x)=\frac{(x^2-x)\cdot(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)\cdot(x^2-x+6)+9}$$

eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

Aufgabe 2 - 241242



Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt:
Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.
Man beweise:
Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r' \leq \frac{r}{3}$.

Aufgabe 3 - 241243
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = x \cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 1 + f(\frac{1}{x+y})$.
(3) Es gilt $f(1) = 2$.

Aufgabe 4 - 241244
Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Man beweise, dass das Gleichungssystem

$$\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1 \qquad (1)$$
$$\sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1 \qquad (2)$$
$$\sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1 \qquad (3)$$

genau eine Lösung (x, y, z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

Aufgabe 5 - 241245
Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als $90°$.

Aufgabe 6A - 241246A
Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtliche kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

Aufgabe 6B - 241246B
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist.
Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

8.27 XXV. Olympiade 1985

8.27.1 I. Stufe 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251211
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1, \qquad (1)$$
$$x + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 251212
Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.

Man beweise, dass bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat, und berechne diesen Wert.

Aufgabe 3 - 251213
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

(1) n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1,

(2) n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1,

(3) es gilt: $100 < n < 200$.

Aufgabe 4 - 251214
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Zu Beginn geben sie sich (z.B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Darauf multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozess abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.

a) Wie muss Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?

b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muss er anwenden, wenn $K = 1000000$ vorgegeben ist?

c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muss dieser Spieler vorgehen?

8.27.2 II. Stufe 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251221
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 251222
Beweisen Sie, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung gilt:

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Aufgabe 3 - 251223
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch $a_n = 3n - 2, b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, dass dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

Aufgabe 4 - 251224
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben:
Im abgeschlossenen Intervall $[2^n, 2^{n+1}]$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

8.27.3 III. Stufe 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251231
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m+n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

Aufgabe 2 - 251232
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise $K_1, ..., K_n$, so in einer Ebene gelegen, dass sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen $K_1, ..., K_n$ liegt. Für $i = 1, ..., n$ gilt:
K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.
Die Punkte $A_1, ..., A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, A_1$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, ..., P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: Für $i = 1, ..., n$ gilt: P_i liegt auf Kreis K_i und ist von O und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von O aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, ..., P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Aufgabe 3A - 251233A
Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13} \qquad (1)$$

Aufgabe 3B - 251233B
Beweisen Sie, dass es unter allen Zerlegungen $100 = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ der Zahl 100 in reelle Faktoren $z_i \geq 2$ ($i = 1, 2, ..., n$; n positiv ganzzahlig) eine Zerlegung gibt, für die die Summe $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

Aufgabe 4 - 251234
Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, ..., A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränke S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht.
In dem Schrank S_1 befinden sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7;
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

Aufgabe 5 - 251235
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} = 6 \cdot \sqrt{x} \qquad (1)$$

Aufgabe 6 - 251236
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1, ..., P_{2n}$ im Raum so gelegen, dass es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen.
Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge $M = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ angehören.
Für jede Ebene ϵ, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ϵ die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ϵ ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ϵ annehmen kann!

8.27.4 IV. Stufe 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251241
Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, dass unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.
Man beweise, dass der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, dass an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

Aufgabe 2 - 251242
Es seien $q_1, q_2, ..., q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen. Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot ... \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25}$$

Aufgabe 3 - 251243
Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?
(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4 - 251244
Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$, $A_2A_3 = d$, $A_2A_4 = e$, $A_3A_4 = f$.
Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so dass die Summe s der Quadrate des Abstandes des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt.
Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

Aufgabe 5 - 251245
Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d.h., es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ...
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

Aufgabe 6A - 251246A
Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei Spiegelzahl genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d.h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358853, 27672, 44444 Spiegelzahlen.
Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

Aufgabe 6B - 251246B
Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ϵ die Größe des kleinsten Winkels des Dreiecks ABC.
a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so dass für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \sin \epsilon} \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

8.28 XXVI. Olympiade 1986

8.28.1 I. Stufe 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261211
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):

(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

Aufgabe 2 - 261212
Man beweise:

a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 3 - 261213
An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der CSSR, der VR Polen und der DDR teil. Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:

(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprechen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)

(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.

(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.

(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.

a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.

b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

Aufgabe 4 - 261214
Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n + b}{2n - 1} \quad (n = 1, 2, ...) \qquad (1)$$

definiert ist.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \qquad (2)$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.

8.28.2 II. Stufe 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261221
Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x; y; z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \quad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5 \quad (3)$$

Aufgabe 2 - 261222
Man ermittle alle diejenigen Tripel (p, q, r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

Aufgabe 3 - 261223
In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen.
Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, dass im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:
(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.
Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.
Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

Aufgabe 4 - 261224
Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, dass sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und dass die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt.
Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.
Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

8.28.3 III. Stufe 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261231
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x+y-z=1 \qquad (1)$$
$$x^2-y^2+z^2=1 \qquad (2)$$
$$-x^3+y^3+z^3=-1 \qquad (3)$$

Aufgabe 2 - 261232
Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $P_1P_2 = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $Q_1Q_2 = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Aufgabe 3A - 261233A
Man untersuche ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Jede der vier Zahlen lässt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, dass sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

Aufgabe 3B - 261233B
Man beweise, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlänge $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\angle CAB; \angle ABC; \angle BCA$ sowie für den Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt F die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{27\rho}{8F} \qquad (1)$$

Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 4 - 261234
Beweisen Sie:
Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \qquad (1)$$

Aufgabe 5 - 261235
Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:
Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n-1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, dads die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zuge sind:
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, dass Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n-1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 6 - 261236
Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

8.28.4 IV. Stufe 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261241
500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind.
Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, dass deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

Aufgabe 2 - 261242
Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, ...$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 3 - 261243
Es seien $k_1, ..., k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren.
Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, dass je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und dass die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27}V$ hat.

Aufgabe 4 - 261244
Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a + 1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar ist.

Aufgabe 5 - 261245
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, 2, ..., n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Aufgabe 6A - 261246A
Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, ..., P_n$ nummeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, ...$) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt Wappen oben, so scheidet P_1 aus, bei Zahl P_2.
Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen.
Bei Wappen scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei Zahl der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.
a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit W_1, W_2, W_3 dafür, dass P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabende bestimmt werden.
b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, dass die Auswahlmethode ungerecht ist, d.h. dass die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, ..., P_n$ gleich ist.
Bemerkung:
Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{M}{N}$.

Aufgabe 6B - 261246B
Es seien $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, dass die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

8.29 XXVII. Olympiade 1987

8.29.1 I. Stufe 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271211
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + xy + y = -1 \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 5! \quad (2)$$

Aufgabe 2 - 271212
Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

Aufgabe 3 - 271213
Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.

Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$ gilt!

Aufgabe 4 - 271214
Man ermittle den Rest, den die Summe $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 lässt!

8.29.2 II. Stufe 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271221
Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6 \qquad (1)$$
$$y \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 271222
Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl.
Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k : 1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

Aufgabe 3 - 271223
a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2) \cdot x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert. Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

Aufgabe 4 - 271224
a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, dass jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen:
Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, dass eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

8.29.3 III. Stufe 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271231
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 271232
Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind.
Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, dass es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, dass der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholten Anfahren u.s.w. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Aufgabe 3A - 271233A
Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

Aufgabe 3B - 271233B
Es sei f diejenige für alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0, y) = y + 1 \qquad (1)$$
$$f(x + 1, 0) = f(x, 1) \qquad (2)$$
$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \qquad (3)$$

Man ermittle a) den Funktionswert $f(3, 3)$, b) den Funktionswert $f(4, 2)$.
Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

Aufgabe 4 - 271234
Man beweise für jedes Dreieck ABC:
Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\angle BAC$, so gilt

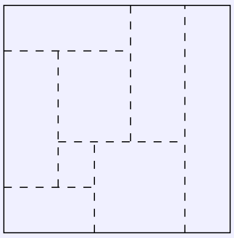
$$h_a \leq \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 5 - 271235
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z) \qquad (1)$$

Aufgabe 6 - 271236



Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben.
Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, ..., F_n$ zerlegt werden.
Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.
Ferner werde gefordert, dass jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.
b) Man beweise, dass es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

8.29.4 IV. Stufe 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271241
In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind.
Ferner sei F die Menge von 1988 verschiedenen Farben.
Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F enthält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

Aufgabe 2 - 271242
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 &= 1988 \qquad (1)\\ 1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 &= 1988 \qquad (2)\\ 1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 &= 1988 \qquad (3) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - 271243
Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, ..., n$ derart bilden, dass

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1, ..., n - 1$ gilt?

Aufgabe 4 - 271244
Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2...P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.
Die Gerade g sei so gelegt, dass sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d.h., dass die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

Aufgabe 5 - 271245
Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$$

$(n = 2, 3, 4, ...)$ definierte Zahlenfolge.
Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls dies zutrifft, ihren Grenzwert.

Aufgabe 6A - 271246A
Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z.B. Werfen einer Münze festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält.
Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende sondern während des gesamten Vorganges niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür dass ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
(a) Man ermittle $w(4)$.
(b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geq 2$.

Aufgabe 6B - 271246B
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und für je n im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$, für die

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt.

8.30 XXVIII. Olympiade 1988

8.30.1 I. Stufe 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281211
Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto *5 aus 35* beteiligen. Die Kollegen A, B, C werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen.

So verlangt A, dass jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist. B fordert, dass jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist. C erwartet, dass jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.

Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Aufgabe 2 - 281212
Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel bei C gibt, in denen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge

a) eine geometrische Folge,

b) eine arithmetische Folge

bilden.

Falle es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von a alle diejenigen Seitenlängen b, c für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

Aufgabe 3 - 281213

a) Man gebe zwei Quadrupel (x, y, z, u) reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.

b) Man ermittle ein Quadrupel (x, y, z, u) ganzer Zahlen so, dass eine der Variablen x, y, z, u den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

$$1x + 9y + 8z + 8u = 1 \qquad (1)$$
$$9x + 9y + 24z + 24u = 9 \qquad (2)$$
$$8x - 13y + 8z + 7u = 8 \qquad (3)$$
$$8x - 21y - 10z + 8u = 8 \qquad (4)$$

Aufgabe 4 - 281214
Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, dass die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.

(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.
Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht. Dabei sei angenommen, dass sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.

8.30.2 II. Stufe 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281221
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z \qquad (1)$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -x \qquad (2)$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = y \qquad (3)$$

Aufgabe 2 - 281222
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$\begin{aligned} & f_1(x) = (x-1)^2 \\ & f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 \\ \text{allgemein} \quad & f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + ... + (nx-1)^2 \end{aligned}$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, dass die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

Aufgabe 3 - 281223
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.
Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

Aufgabe 4 - 281224
Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
festgelegt. Man untersuche, ob a) alle Zahlen x_n, b) alle Zahlen y_n positiv sind.

8.30.3 III. Stufe 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281231
Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{r}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

Aufgabe 2 - 281232
Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene ϵ sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge alle derjenigen Punkte C in ϵ, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB = a$ und $AC : AB = BD : AD$ ist.

Aufgabe 3A - 281233A
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, 2, ..., n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

Aufgabe 3B - 281233B
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet:
Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, dass die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.
(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.
(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, dass dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.
a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
b) Beweisen Sie, dass es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 281234
Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge
$a_1, a_2, ..., a_{21} \quad (*)$
dieser Zahlen so gibt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
(2) Die Summe aller 21 Zahlen ergibt 1989.

Aufgabe 5 - 281235
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ... + \frac{x_n}{n} \leq 3$$

Aufgabe 6 - 281236
Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.
Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt!
Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!
Hinweis:
Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet.
Diese Erklärung gilt auch für den Fall, dass derartige Punkte G, H sogar den Stecken UV bzw. XY angehören.

8.30.4 IV. Stufe 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281241
Man ermittle alle reellen Lösungen (x,y,z) des Gleichungssystems

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x+2y+3z=\sqrt{14}$$

Aufgabe 2 - 281242
Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.
(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x)=f(x) \quad \text{sowie} \quad f_{k+1}(x)=f(f_k(x)) \quad \text{für} \quad k=1,2,...,n$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x)$$

Aufgabe 3 - 281243
Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$P_1X^2+P_2X^2+...+P_nX^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

Aufgabe 4 - 281244
Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1,a_2,a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für die jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind.
Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1,k_2,k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i=a_i$ $(i=1,2,3)$ erfüllt.
Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d.h. für jede unbekannte Kombination (a_1,a_2,a_3)) sich öffnen muss.

Aufgabe 5 - 281245
Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, das der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt.
Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'.
Der Radius der Umkugel sei r.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets

$$AA'+BB'+CC'+DD' \geq \frac{16}{3}r$$

folgt!

Aufgabe 6A - 281246A
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n+2$ reelle Zahlen p, q, a_1, a_2, ..., a_n, die

$$0 < p \leq ai \leq q \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \qquad (2)$$

Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g + 1$.
Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)
a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,
b) zwischen der zweiten und dritten Zahl
das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 6B - 281246B
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

8.31 XXIX. Olympiade 1989

8.31.1 I. Stufe 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291211
Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.

(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.

(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von z durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z+z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

Aufgabe 2 - 291212
Man ermittle alle Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^3 + y^3 = 7 \qquad (1)$$
$$x + xy + y = -1 \qquad (2)$$

Aufgabe 3 - 291213
In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, dass A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.

Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

Aufgabe 4 - 291214
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + ... + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!

b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!

c) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

8.31.2 II. Stufe 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291221
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21 \qquad (1)$$
$$y + xy + x^2y = 14 \qquad (2)$$
$$x + y = -1 \qquad (3)$$

Aufgabe 2 - 291222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, daß für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m + 2)x + 8m + 1 > 0 \qquad (1)$$

Aufgabe 3 - 291223
Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, dass je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muss.

Aufgabe 4 - 291224
Man löse die folgende Aufgabe
a) für $n = 8$ und $k = 5$,
b) für $n = 9$ und $k = 6$.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen $1, 2, ..., n^2$ in ein schachbrettartiges $n \times n$-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!
Hinweise:
1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, dass jedes Feld genau eine Zahl erhält und dass jede Zahl genau einmal verwendet wird.
2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

8.31.3 III. Stufe 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291231
Man beweise:
Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, ..., a_n$ Zahlen sind, die

$$a_1^2 = ... = a_n^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

Aufgabe 2 - 291232
Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichnet R den Radius seiner Umkugel (d.h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d.h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, dass es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Aufgabe 3A - 291233A
Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 $\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\frac{m}{s}$.
Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B, P_3 in C.
Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufsinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.
Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefasst werde).

Aufgabe 3B - 291233B
Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geq \frac{1}{n^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert
b) einen größten Wert
annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

Aufgabe 4 - 291234
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

Aufgabe 5 - 291235
Man beweise:
In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.
Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

Aufgabe 6 - 291236
Man beweise:
Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

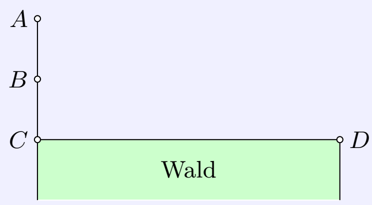
8.31.4 IV. Stufe 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291241
Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}}=x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

Aufgabe 2 - 291242



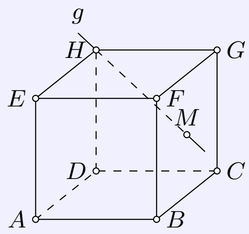
Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abbildung).
In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befindet sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C.
Dabei sei $AB = BC = a$ und $CD = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase. Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefasst, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, dass er nicht unterwegs vom Wolf gefasst wird.

Aufgabe 3 - 291243
Man beweise:
Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

Aufgabe 4 - 291244
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17 \qquad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9 \qquad (2)$$

Aufgabe 5 - 291245



Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in der Abbildung mit A,B,C,D,E,F,G,H bezeichnet.
Die Ebene, in der A,B,C,D liegen sei ϵ_1; die Ebene, in der B,C,G,F liegen sei ϵ_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.
Man beweise, dass es unter allen Strecken, die einen Punkt von ϵ_1 mit einem Punkt von ϵ_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt.
Man ermittle diese kleinste Länge.

Aufgabe 6A - 291246A
In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln.
Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot.
Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden.
Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 2 rot ist.
Hinweis:
Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, dass für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist.
Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als günstig und $M-G$ als ungünstig angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

Aufgabe 6B - 291246B
Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n>1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x=0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

8.32 XXX. Olympiade 1990

8.32.1 I. Stufe 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301211
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \qquad (1)$$
$$a + b + c + d < 11111. \qquad (2)$$

Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

Aufgabe 2 - 301212
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$3x^2 + ax - 2 = 0 \qquad (1)$$

zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung

$$6x_1 + x_2 = 0 \qquad (2)$$

genügen.

Aufgabe 3 - 301213
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:

$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \qquad (1)$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Aufgabe 4 - 301214
In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\angle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.

Man beweise, dass in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:

$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}.$$

8.32.2 II. Stufe 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301221
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$ (1) gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 301222
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \qquad (1)$$
$$4x + 2y > 5 \qquad (2)$$

Aufgabe 3 - 301223
Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \qquad (1)$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leq i \leq q$ gilt.

Aufgabe 4 - 301224
Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, dass das Verhältnis $r = J(UVW) : J(ABC)$ in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

8.32.3 III. Stufe 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301231
a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.
b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.

Aufgabe 2 - 301232
Im Raum seien n Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, dass sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.
Man beweise, dass es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muss, so dass jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.
Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Aufgabe 3A - 301233A
Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, ..., x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{17}$.
(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + ... + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.
Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, ..., x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einerziffer, x_{16} die Zehnerziffer u.s.w.

Aufgabe 3B - 301233B
Es seien $D_1, ..., D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, ..., d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad ..., \quad d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1, ..., G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, ..., g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad ..., \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, dass jeweils gilt:
Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, passt G_i in D_j.
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.
Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Aufgabe 4 - 301234
Man beweise:
In jedem n-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $a \leq b < 2a$ gilt.

Aufgabe 5 - 301235
Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Aufgabe 6 - 301236
Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

8.32.4 IV. Stufe 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301241
Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x^2 - (y-z)^2 = a \\ &(2) \qquad y^2 - (z-x)^2 = b \\ &(3) \qquad z^2 - (x-y)^2 = c \end{aligned}$$

Aufgabe 2 - 301242
Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als markiert bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige (in cm gemessene) Abstände haben.
Man beweise:
Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm $\times$ 2 cm $\times$ 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.
Dabei gilt ein Baustein genau dann als durchstochen, wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

Aufgabe 3 - 301243
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.
(2) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) - 4f(x^2) = x - 16x^4$.

Aufgabe 4 - 301244
Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann m-schmal genannt, wenn für alle $a = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_a - x_{a-1} \leq m$ gelten.
Eine Menge A von Zahlen werde genau dann m-dicht genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.
Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende) Aussage:
Zu jeder Zerlegung der Menge N aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \geq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive Zahl m, so dass (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

1)Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der Aufgabe nicht ausreichen.

Aufgabe 5 - 301245
Man ermittle ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \qquad (a_0, a_1, ..., a_n reell; a_n \neq 0) \qquad (1)$$

das die Bedingungen

$$f(-4) = 0, f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1, f(4) = 0(2)$$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Aufgabe 6A - 301246A
Man beweise:
In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$$xyz \geq (v + w)(w + u)(u + v)$$

Aufgabe 6B - 301246B
Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine Menge N von n Personen genau dann als k-familiär bezeichnet, wenn sich in jeder Menge K von k Personen aus N eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus K bekannt ist.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, dass jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muss!
Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.
Ferner werde vorausgesetzt, dass jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine Menge von Personen realisiert werden kann.

8.33 XXXI. Olympiade 1991

8.33.1 I. Stufe 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311211
Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

Aufgabe 2 - 311212
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:

(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.

(2) Es gilt $97ab = (a + n)(b + n)$.

Aufgabe 3 - 311213
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, dass DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen

a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ auf AC liegt,

b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates $DPQR$

c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,

d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Aufgabe 4 - 311214
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit $x \leq y \leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x + y + z = 5, \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 15, \tag{2}$$
$$xyz = -3. \tag{3}$$

8.33.2 II. Stufe 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311221
Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x + y = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = c \qquad (2)$$

gebildet.
a) Man ermittle für $c = 2$ alle Paare $(x; y)$, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.
Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das Gleichungssystem (1), (2)
b) keine Lösung $(x; y)$ aus reellen Zahlen x, y hat,
c) genau eine Lösung $(x; y)$ hat,
d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

Aufgabe 2 - 311222
Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

Aufgabe 3 - 311223
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.
(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.
(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Aufgabe 4 - 311224
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0$$

gilt.

8.33.3 III. Stufe 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311231
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt:
Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen a, b gelten für jedes reelle x die Gleichungen $f(a-x) = f(a+x)$ und $f(b-x) = f(b+x)$.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch.
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl p existiert, mit der für jedes reelle x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

Aufgabe 2 - 311232
Man beweise, dass jedes konvexe Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ betragen und die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ die Größen β bzw. γ haben, den Flächeninhalt hat:

$$F = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta+\gamma))$$

Aufgabe 3A - 311233A
Man beweise, dass es unter allen Werten, die der Term

$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} + \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen x, y annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

Aufgabe 3B - 311233B
Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer A, B seien die folgenden beiden Aussagen wahr:
(1) Ist A mit B bekannt, so gibt es keinen von A und B verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit A als auch mit B bekannt wäre.
(2) Ist A nicht mit B bekannt, so gibt es genau zwei von A und B verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit A als auch mit B bekannt sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.
Hinweis: Für je zwei Teilnehmer A, B gelte:
Ist A mit B bekannt, so auch B mit A. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

Aufgabe 4 - 311234
Für jede natürliche Zahl $a > 0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > a$$

erfüllen.

Aufgabe 5 - 311235
Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, dass ihre Summe 2525 beträgt und dass keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

Aufgabe 6 - 311236
Es seien alle diejenigen Pyramiden $ABCS$ betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Grundfläche ABC der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.
(2) Es gilt $AB = AC = SB = SC$.
(3) Es gilt $BC = SA$.
Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\angle BAC$.

8.33.4 IV. Stufe 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311241
Es sei
$$x = e^{0,000009} - e^{0,000007} + e^{0,000002} - e^{0,000001}; \qquad y = e^{0,000008} - e^{0,000005}$$
Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

Aufgabe 2 - 311242
Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k.
Für $i = 1; 2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

Aufgabe 3 - 311243
Man beweise:
Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$n = a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + a_1 p + a_0$$
$$k = b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + b_1 p + b_0$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0, 1, ..., t$), so lässt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie
$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}$$
Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

definiert, für ganze Zahlen $n \geq 0$ ferner $\binom{n}{0} = 1$.

Aufgabe 4 - 311244
Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sei Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.
a) Man beweise, dass eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1, P_2, P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.
b) Man beweise, dass dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt

$$F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

beträgt.

Aufgabe 5 - 311245
Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen.
(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y mit x, y mit $x \geq y$ gilt:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

(3) Es gilt $f(1) = a$.
Bemerkung: f soll als elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck angegeben werden, d.h.:
Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte $f(x)$ soll dadurch erfolgen, dass auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.

Aufgabe 6A - 311246A
Man untersuche, ob es eine Anzahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ derart gibt, dass die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

Aufgabe 6B - 311246B
In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede.
An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.
Man beweise:
Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.
Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.

8.34 XXXII. Olympiade 1992

8.34.1 I. Stufe 1992, Klasse 12

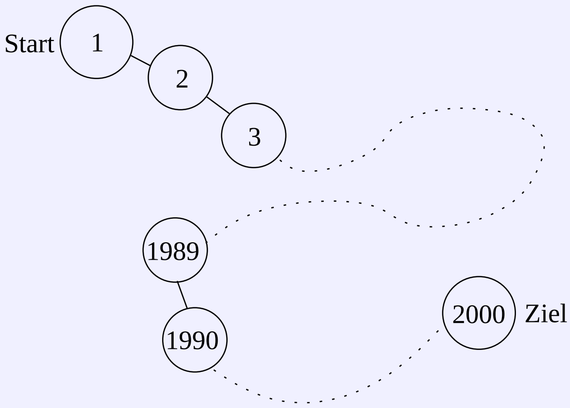
Aufgabe 1 - 321211
Man ermittle alle diejenigen Paare $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b, für die das Quadrat ihren Produkts doppelt so groß wie die Summe ihrer Quadrate ist.

Aufgabe 2 - 321212
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a \geq 3$ die Ungleichung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a+1}$ gilt.

Aufgabe 3 - 321213
Dora und Karla berechnen für verschiedene Flächen jeweils den Quotienten aus Flächeninhalt und Umfang. Sie vermuten: Wählt Dora ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck D und Karla den einbeschriebenen Kreis K dieses Dreiecks D, so müssen sich stets einander gleichgroße Quotientenwerte ergeben.

Trifft diese Vermutung zu?

Aufgabe 4 - 321214
Bei einem Würfelspiel *Reise durch Deutschland* sind 2000 Felder längs der Reiseroute angeordnet (siehe Abbildung). Beim Startfeld 1 beginnend, wird der Spielstein nach jedem Mal Würfeln in Richtung Ziel um die gewürfelte Augenzahl weiterbewegt, Steht der Stein dann genau auf dem Feld 1990, so erhält der Spieler einen Bonus. Für jedes Feld n mit $1 \leq n \leq 1989$ bezeichne $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein auf dem Feld n stehender Stein im weiteren Verlauf des Spieles diesen Bonus einbringt.



Man ermittle diejenige Zahl n $(1 \leq n \leq 1989)$, für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Hinweis: Informieren Sie sich gegebenenfalls über den Begriff Wahrscheinlichkeit!

8.34.2 II. Stufe 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321221
Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllen:

$$x^2 + k \cdot y^2 = 4 \qquad (1)$$
$$k \cdot x^2 - y^2 = 2 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 321222
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung gilt:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Aufgabe 3 - 321223
Man beweise:
In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

Aufgabe 4 - 321224
Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando rechts um! drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.
Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.
Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muss, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.

8.34.3 III. Stufe 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321231
Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.
Hinweis:
Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

Aufgabe 2 - 321232
Man beweise:
Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$, die durch

$$a_1 = c, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + c \qquad (k = 1, 2, 3, ...)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.
Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle $k = 1, 2, 3, ...$ die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine Periodenlänge der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$.

Aufgabe 3A - 321233A
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 \neq 0$ und $x^2 + x - 1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1}\right) = 5 \cdot f\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

Aufgabe 3B - 321233B
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= 3 \cdot (x_1 + x_2) \\ x_2 \cdot x_3 &= 3 \cdot (x_2 + x_3) \\ &... \\ x_{n-1} \cdot x_n &= 3 \cdot (x_{n-1} + x_n) \\ x_n \cdot x_1 &= 3 \cdot (x_n + x_1) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 - 321234
Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ werde vorausgesetzt, dass jede der Zahlen $1, 2, ..., n$ genau einmal unter den $a_1, a_2, ..., a_n$ vorkommt.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot ... \cdot (a_n - n)$$

stets eine gerade Zahl sein muss.

Aufgabe 5 - 321235
Man beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so dass für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c \cdot \left(1 + a^{2n+1}\right)$$

gilt.
Man beweise auch, dass es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

Aufgabe 6 - 321236
Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$.
Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, dass A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.
Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt existiert.

8.34.4 IV. Stufe 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321241
Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt. Beweisen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

Aufgabe 2 - 321242
Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Aufgabe 3 - 321243
Von 1993 Punkten $P_1, ..., P_{1993}$ werde vorausgesetzt, dass keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, dass jeder der 1993 Punkte P_i mit mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Stecken verbunden ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Aufgabe 4 - 321244
Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$a + b + c = 2 \qquad ; \qquad ab + ac + bc = 1$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq b \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq c \leq \frac{4}{3}$$

Aufgabe 5 - 321245
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Aufgabe 6A - 321246A
Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt.
Von n Städten $S_1, ..., S_n$ werde vorausgesetzt, dass zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen benutzbare) Verbindung besteht und dass diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, dass es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muss, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Aufgabe 6B - 321246B
Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen:
f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.
Man beweise:
Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.

8.35 XXXIII. Olympiade 1993

8.35.1 I. Stufe 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331211
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Zahl n ist zehnstellig. Für die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung, von links nach rechts mit a_0, a_1, ..., a_9 bezeichnet, gilt: a_0 stimmt mit der Anzahl der Nullen, a_1 mit der Anzahl der Einsen, ..., a_9 mit der Anzahl der Neunen in der Dezimaldarstellung von n überein.

Aufgabe 2 - 331212
Zeigen Sie, dass sich jede positive ganze Zahl z in der Form

$$z = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_n \cdot n^2$$

darstellen lässt, wobei n eine positive ganze Zahl ist und jeder Koeffizient a_1, a_2, ..., a_n eine der Zahlen 0, 1, -1 ist!

Aufgabe 3 - 331213
In einem Schönheitswettbewerb für Pudel stellen sich Asta, Benno, Cäsar und Dolly einer Jury aus vier Mitgliedern. Jedes Jurymitglied stimmt für einen der Hunde durch Heben eines Kärtchens mit dem Anfangsbuchstaben des Hundenamens. Als Regel zur Auswertung dieses Abstimmungsergebnisses wurde festgelegt: Kommen eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vor, so gelten sie als qualifiziert. Tritt aber der Fall ein, dass in dem Abstimmungsergebnis nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, so wird eine Zusatzregelung getroffen (z.B. eine erneute Abstimmung angesetzt).

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Abstimmungsergebnisse, die zu diesem letztgenannten Fall führen! Dabei gelten Abstimmungsergebnisse genau dann als einander gleich, wenn sie nicht nur in den Stimmenzahlen der Hunde, sondern auch darin übereinstimmen, welche Jurymitglieder für die betreffenden Hunde gestimmt haben. Beispielsweise gelten die Abstimmungsergebnisse $AABC$ und $CABA$ als voneinander verschieden.

Aufgabe 4 - 331214
Man beweise, dass für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:

Sind a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkelgrößen, ist F der Flächeninhalt, ist D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe und ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so gilt für die Streckenlängen $\overline{CH}$ und $\overline{HD}$ die Gleichung

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

8.35.2 II. Stufe 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331221
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$2-x+y=\sqrt{18+x-y} \qquad (1)$$
$$\sqrt{1+x+y}+\sqrt{2+x-y}=5 \qquad (2)$$

Aufgabe 2 - 331222
a) Beweisen, Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2-9}{4^2-4}\cdot\frac{5^2-9}{5^2-4}\cdot ...\cdot\frac{n^2-9}{n^2-4}>\frac{1}{6}$$

gilt!
b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne dass damit aus der in a) zu beweisenden Aussage eine falsche Aussage entsteht?

Aufgabe 3 - 331223
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen m,n, für die 1994^m-1993^n eine Quadratzahl ist.

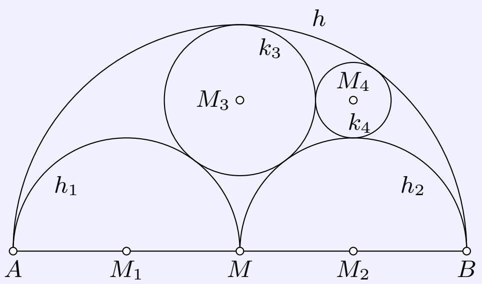
Aufgabe 4 - 331224
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, C' sei der Bildpunkt von C bei der Spiegelung an AB.
Für jeden Punkt P, der auf AB zwischen A und B liegt, seien Q auf BC und R auf CA so gelegen, dass $PQCR$ ein Parallelogramm ist.
Dann sei X der von P verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke APR und BPQ.
Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X stimmt überein mit dem im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Bogen den Umkreises des Dreiecks ABC'.

8.35.3 III. Stufe 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331231
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}} \qquad (1)$$

Aufgabe 2 - 331232



Über einer Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert.
Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.
Man beweise, dass M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Aufgabe 3A - 331233A
Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\{0,1,2,...\}}$ durch die Festsetzung definiert, dass $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m lässt.
Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl m mit $m \geq 2$ eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

Aufgabe 3B - 331233B
Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3)\cdot x^2 + 2n\cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen n mit $n \geq 0$, für die gilt:
Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

Aufgabe 4 - 331234
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$ gilt.

Aufgabe 5 - 331235
Zwei kongruente regelmäßige $2n$-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt.
Von einem der beiden $2n$-Ecke werde vorausgesetzt, dass es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$-Ecke so aufeinanderzulegen, dass in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

Aufgabe 6 - 331236
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4+\sqrt{18})^n\right]$ ist.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g+1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

8.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331241
Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:
a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.
b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.
Hinweis: In dieser Aufgabe sei als Differenz zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x-y|$ verstanden.
Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x-y|$ und als $|y-x|$).

Aufgabe 2 - 331242
Für $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \frac{1}{1 \cdot s_1^2} + \frac{1}{2 \cdot s_2^2} + ... + \frac{1}{n \cdot s_n^2}$$

Man beweise für alle $n = 1, 2, 3, ...$ die Ungleichung $t_n < 2$.

Aufgabe 3 - 331243
Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Ferner seien A', B', C', D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.
Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Die Punkte A', B', C', D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

Aufgabe 4 - 331244
Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.
Man beweise:
Unter dieser Voraussetzung ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B, C bzw. durch A, C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A, B.

Aufgabe 5 - 331245
Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag.
Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen.
Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muss, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Aufgabe 6A - 331246A
Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die
a) $f(n) = 1$, b) $f(n) = 0$
gilt.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Aufgabe 6B - 331246B
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ ganzer, nicht negativer Zahlen m, n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.

8.36 XXXIV. Olympiade 1994

8.36.1 I. Stufe 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341211
Von einer natürlichen Zahl n sei bekannt, dass ihre Dezimaldarstellung nur die Ziffern Drei und Null enthält, wobei die Drei genau 1994 mal und die Null genau 1995 mal auftritt.

Man untersuche, ob eine solche Zahl Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 2 - 341212
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen n, welche die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen:

(1) Die Zahl n ist durch 5 teilbar.

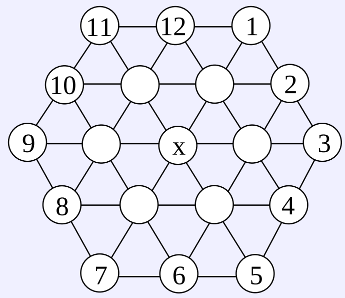
(2) Die Zahl n und ihre Quersumme enthalten beide in ihrer Dezimaldarstellung keine Ziffer Null.

(3) Die Quersumme der Quersumme von n beträgt 2.

Aufgabe 3 - 341213

In die Kreise der Abbildung lassen sich reelle Zahlen so eintragen, dass an die Randkreise die angegebenen Zahlen kommen und dass in jedem der sieben inneren Kreise jeweils das arithmetische Mittel der sechs benachbarten Kreise steht.

Man untersuche, welche Zahl x dabei im mittleren Kreis steht.



Aufgabe 4 - 341214
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{x-1} \quad \text{erfüllen.}$$

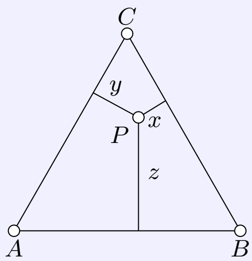
8.36.2 II. Stufe 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341221
Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

gelten.

Aufgabe 2 - 341222



Man beweise für jeden Punkt P, der im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F = 1$ liegt:
Die Längen x, y, z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abbildung) erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = \sqrt[4]{3}$$

Aufgabe 3 - 341223
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen $AD = BD = CD = 1$ und $AB = BC = CA$ erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Aufgabe 4 - 341224
Ist z eine 1995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1994$, so bezeichne $z[n]$ diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung entsteht, indem man aus der Zifferndarstellung von z die ersten n Ziffern weglässt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Zifferndarstellung anfügt.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1994$:
Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

8.36.3 III. Stufe 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341231
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}} \leq 1$$

Aufgabe 2 - 341232
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Aufgabe 3A - 341233A
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:

$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 \qquad (1)$$
$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1 \qquad (2)$$

Aufgabe 3B - 341233B
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 \qquad (1)$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \qquad (2)$$
$$f(1) = 2 \qquad (3)$$

Aufgabe 4 - 341234
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):
(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 5 - 341235
Man beweise:
Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Aufgabe 6 - 341236
Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right]$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g=[z]$, für die $g \leq z < g+1$ gilt.

8.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341241
Man beweise:
Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl x die Zahl $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses x und jede positive ganze Zahl n auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

Aufgabe 2 - 341242
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BXP, CYP, AZP nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Aufgabe 3 - 341243
Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \binom{2n+1}{k}$$

gilt.
Hinweis: Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ definiert man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, wobei für ganze Zahlen m mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$ [ausführlicher: $0! = 1$ sowie $m! = (m-1)! \cdot m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$].

Aufgabe 4 - 341244
Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E werde vorausgesetzt:
D liegt auf der Strecke BC und ist von C verschieden, E liegt auf der Strecke AC und ist von C verschieden.
Die Strecke DE geht durch den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC. Der Inkreisradius des Dreiecks ABC sei r, der Flächeninhalt des Dreiecks CDE sei F.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

Aufgabe 5 - 341245
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen x, y, für die gilt:

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$$

Aufgabe 6A - 341246A
Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen a und b sei $(x_n)_{n=0,1,2,...}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

definiert ist.
Man beweise: Für jede Wahl von a und b enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

Aufgabe 6B - 341246B
Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel:
In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl.
Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.
Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.

Anmerkung:
Dieser Text enthält alle 3790 Aufgaben der Mathematik-Olympiade der Klassenstufen 5 bis 12 der I. bis IV. Stufe der Jahre 1960 bis 1994.
Auch die Aufgaben der zwei Vorolympiaden von 1960 und 1961 sind enthalten.

Die Texte wurden aus verschiedenen Quellen zusammengetragen, darunter der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha", den offiziellen Lösungsvorschlägen der Aufgabenkommission, der Zeitschrift "Mathematik in der Schule", der Internetseite `www.olympiade-mathematik.de` von Manuela Kugel und den Büchern "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR" von Prof. W.Engel und Prof. U.Pirl.

Die Aufgaben ab dem Jahr 1995 können über das Aufgabenarchiv `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv` von "Mathematik-Olympiaden e.V." aufgerufen werden.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik wurde der heutigen Form angepasst. Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

Der einleitende Text jedes Aufgabenblattes:

> Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

wurde nicht übernommen.

Quellen:

1) Zeitschrift "alpha", Verlag Volk und Wissen 1967-1990
2) "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR", W.Engel und U.Pirl, Verlag Volk und Wissen 1975
3) Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Verlag Volk und Wissen 1968
4) `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Viviani`
5) Offizielle Aufgabenkommission
6) "573 Mathematikaufgaben aus Olympiaden der DDR", J.Lehmann und W.Unze