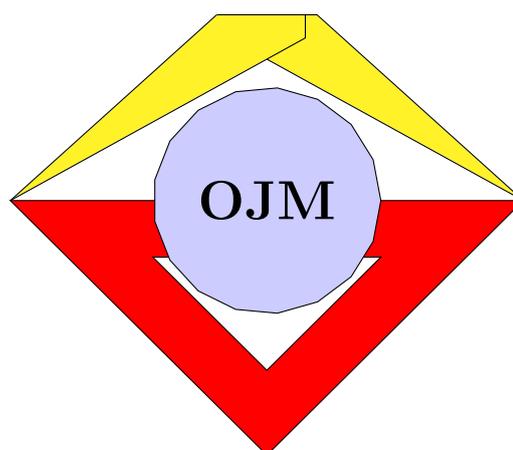


**524 Aufgaben und Lösungen  
der I. bis IV. Stufe der Klassenstufe 9  
der Mathematik-Olympiade  
von 1960 bis 1994**



**Zentrales Komitee für die  
Olympiaden Junger Mathematiker**

mit Lösungen von 32 Autoren

unter Nutzung von Manuela Kugels  
<http://www.olympiade-mathematik.de/>

zusammengestellt von Steffen Polster  
<https://mathematikalpha.de>  
Chemnitz, April-Juli 2019

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>3</b>
1.1	Vorolympiade 1960 . . . . .	3
1.2	Vorolympiade 1961 . . . . .	6
1.3	I. Olympiade 1961 . . . . .	9
1.4	II. Olympiade 1962 . . . . .	12
1.5	III. Olympiade 1963 . . . . .	15
1.6	IV. Olympiade 1964 . . . . .	18
1.7	V. Olympiade 1965 . . . . .	21
1.8	VI. Olympiade 1966 . . . . .	24
1.9	VII. Olympiade 1967 . . . . .	27
1.10	VIII. Olympiade 1968 . . . . .	30
1.11	IX. Olympiade 1969 . . . . .	33
1.12	X. Olympiade 1970 . . . . .	37
1.13	XI. Olympiade 1971 . . . . .	40
1.14	XII. Olympiade 1972 . . . . .	43
1.15	XIII. Olympiade 1973 . . . . .	46
1.16	XIV. Olympiade 1974 . . . . .	49
1.17	XV. Olympiade 1975 . . . . .	52
1.18	XVI. Olympiade 1976 . . . . .	55
1.19	XVII. Olympiade 1977 . . . . .	59
1.20	XVIII. Olympiade 1978 . . . . .	63
1.21	XIX. Olympiade 1979 . . . . .	66
1.22	XX. Olympiade 1980 . . . . .	70
1.23	XXI. Olympiade 1981 . . . . .	73
1.24	XXII. Olympiade 1982 . . . . .	76
1.25	XXIII. Olympiade 1983 . . . . .	79
1.26	XXIV. Olympiade 1984 . . . . .	83
1.27	XXV. Olympiade 1985 . . . . .	86
1.28	XXVI. Olympiade 1986 . . . . .	89
1.29	XXVII. Olympiade 1987 . . . . .	92
1.30	XXVIII. Olympiade 1988 . . . . .	96
1.31	XXIX. Olympiade 1989 . . . . .	99
1.32	XXX. Olympiade 1990 . . . . .	104
1.33	XXXI. Olympiade 1991 . . . . .	109
1.34	XXXII. Olympiade 1992 . . . . .	114
1.35	XXXIII. Olympiade 1993 . . . . .	117
1.36	XXXIV. Olympiade 1994 . . . . .	124
<b>2</b>	<b>Lösungen 9</b>	<b>132</b>
2.1	Vorolympiade 1960 . . . . .	132
2.2	Vorolympiade 1961 . . . . .	138
2.3	I. Olympiade 1961 . . . . .	144
2.4	II. Olympiade 1962 . . . . .	151
2.5	III. Olympiade 1963 . . . . .	159
2.6	IV. Olympiade 1964 . . . . .	167
2.7	V. Olympiade 1965 . . . . .	175
2.8	VI. Olympiade 1966 . . . . .	183
2.9	VII. Olympiade 1967 . . . . .	191
2.10	VIII. Olympiade 1968 . . . . .	200
2.11	IX. Olympiade 1969 . . . . .	208
2.12	X. Olympiade 1970 . . . . .	216
2.13	XI. Olympiade 1971 . . . . .	225
2.14	XII. Olympiade 1972 . . . . .	232
2.15	XIII. Olympiade 1973 . . . . .	240
2.16	XIV. Olympiade 1974 . . . . .	249
2.17	XV. Olympiade 1975 . . . . .	258
2.18	XVI. Olympiade 1976 . . . . .	267
	2.19 XVII. Olympiade 1977 . . . . .	276
	2.20 XVIII. Olympiade 1978 . . . . .	284
	2.21 XIX. Olympiade 1979 . . . . .	291
	2.22 XX. Olympiade 1980 . . . . .	299
	2.23 XXI. Olympiade 1981 . . . . .	309
	2.24 XXII. Olympiade 1982 . . . . .	318
	2.25 XXIII. Olympiade 1983 . . . . .	328
	2.26 XXIV. Olympiade 1984 . . . . .	337
	2.27 XXV. Olympiade 1985 . . . . .	343
	2.28 XXVI. Olympiade 1986 . . . . .	352
	2.29 XXVII. Olympiade 1987 . . . . .	359
	2.30 XXVIII. Olympiade 1988 . . . . .	366
	2.31 XXIX. Olympiade 1989 . . . . .	376
	2.32 XXX. Olympiade 1990 . . . . .	386
	2.33 XXXI. Olympiade 1991 . . . . .	396
	2.34 XXXII. Olympiade 1992 . . . . .	408
	2.35 XXXIII. Olympiade 1993 . . . . .	415
	2.36 XXXIV. Olympiade 1994 . . . . .	428

# 1 Aufgaben

## 1.1 Vorolympiade 1960

### 1.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - V00901

Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

#### Aufgabe 2 - V00902

Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

#### Aufgabe 3 - V00903

Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):

Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.

Wie tief war der Teich?

#### Aufgabe 4 - V00904

Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!

Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 270 = & 1 \cdot 2^8 & +0 \cdot 2^7 & +0 \cdot 2^6 & +0 \cdot 2^5 & +0 \cdot 2^4 & +1 \cdot 2^3 & +1 \cdot 2^2 & +1 \cdot 2^1 & +0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & L & L & L & 0
 \end{array}$$

#### Aufgabe 5 - V00905

An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.

Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

#### Aufgabe 6 - V00906

Wie tief taucht ein Würfel ( $a = 30 \text{ mm}$ ) aus Eisen ( $\gamma_{\text{Fe}} = 7,5 \text{ p}\cdot\text{cm}^{-3}$ ) in Quecksilber ( $\gamma_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ p}\cdot\text{cm}^{-3}$ ) ein?

#### Aufgabe 7 - V00907

Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

#### Aufgabe 8 - V00908

Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

**Aufgabe 9 - V00909**

Wie viel verschiedene Würfe lassen sich mit

- zwei Würfeln,
- drei Würfeln

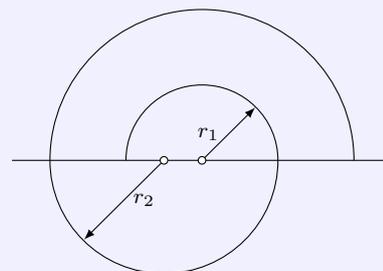
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?

Wie wurde die Lösung gefunden?

**Aufgabe 10 - V00910**

Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.

- Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn  $r_1 = 1$  cm,  $r_2 = 1,5$  cm usw. ist?
- Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

**Aufgabe 11 - V00911**

Einer Kugel mit dem Radius  $r_u = 1$  ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante  $a$ ? Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius  $r_i$ ?

**Aufgabe 12 - V00912**

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:

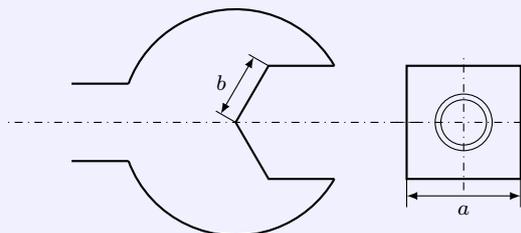
- Fußpunkt  $F$  der Höhe  $h_a(-2; +2)$
- Mittelpunkt  $D$  der Seite  $AB = c(+1; -3)$
- Mittelpunkt  $M$  des Umkreises  $(+2; +1)$

Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm  $\cong$  1 Einheit im Koordinatensystem)

**Aufgabe 13 - V00913**

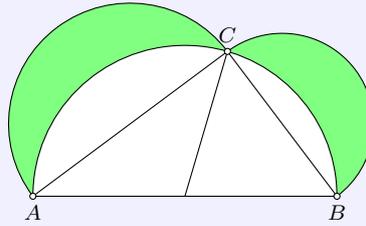
Eine Vierkantsmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei  $b$ ) gelöst werden.

Welche Abmessungen muss  $b$  haben, damit der Schlüssel passt?

**Aufgabe 14 - V00914**

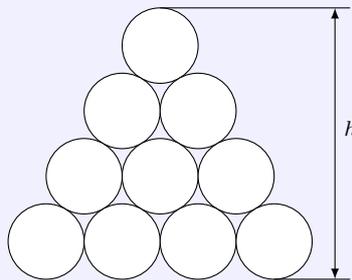
Es sei  $r$  der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises,  $h$  die kleinste Höhe des Dreiecks.

Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen  $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$  gelten!

**Aufgabe 15 - V00915**

Beweisen Sie folgenden Satz:

”Die Summe der beiden Mondsicheln  $AC$  und  $BC$  über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks  $ABC$ .” (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

**Aufgabe 16 - V00916**

Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

**Aufgabe 17 - V00917**

In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.

Wie lang sind die gezogenen Rohre?

## 1.2 Vorolympiade 1961

### 1.2.1 I. Runde V1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - V10911

Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).

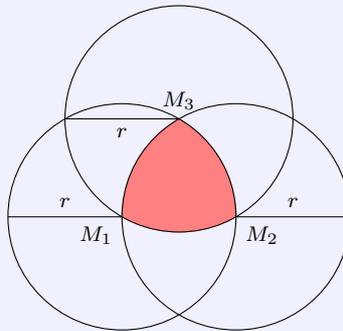
- Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
- Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?

Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

#### Aufgabe 2 - V10912

Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

#### Aufgabe 3 - V10913



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius  $r$  beträgt 20 mm,  $\gamma = 7,8 \text{ p-cm}^{-3}$ .

#### Aufgabe 4 - V10914

Zeichnen Sie ein Parallelogramm  $ABCD$ !

Tragen Sie von  $A$  aus auf  $AB$  die Strecke  $m$  ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt  $A'$ ! Tragen Sie von  $B$  aus auf  $BC$ , von  $C$  aus auf  $CD$  und von  $D$  aus auf  $DA$  dieselbe Strecke  $m$  ab! Sie erhalten die Punkte  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$ !

Was für eine Figur stellt  $A'B'C'D'$  dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

#### Aufgabe 5 - V10915

Konstruieren Sie ein Dreieck aus:  $s_c = 5,4 \text{ cm}$ ,  $c = 6,9 \text{ cm}$ ,  $b = 6,2 \text{ cm}$ .

In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel  $\beta$  gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite  $b$  liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

### 1.2.2 II. Runde V1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - V10921

Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.

- Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in  $\frac{km}{h}$ ?
- Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von  $\pm 0,5$  s behaftet war?

#### Aufgabe 2 - V10922

Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.

Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

#### Aufgabe 3 - V10923

Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ( $r_1 = 2$  cm).

Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

#### Aufgabe 4 - V10924

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ . Auf der Kathete  $a$  wird  $A'$ , auf  $b$  wird  $B'$  beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck  $ABA'B'$ . Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.

Welche beiden Viereckseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

#### Aufgabe 5 - V10925

Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

**1.2.3 III. Runde V1961, Klasse 9****Aufgabe 1 - V10931**

Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre  $x^2$  gerade  $x$  Jahre alt. Wann ist er geboren?

**Aufgabe 2 - V10932**

Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenteile wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind  $h$  die Höhe,  $d_1$  der untere Durchmesser und  $d_2$  der obere Durchmesser. In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei  $d$  der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:

$h = 10$  m,  $d_1 = 20$  cm,  $d_2 = 14$  cm!

b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?

c) Stellen Sie eine Formel für  $\frac{V-V'}{V}$  an, indem Sie  $d_1 = d + \delta$  und  $d_2 = d - \delta$  setzen! Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

**Aufgabe 3 - V10933**

Für alle ungeraden Zahlen  $n$  ist die Differenz  $n^2 - 1$  durch 8 teilbar.

Beweisen Sie diese Aussage!

**Aufgabe 4 - V10934**

Man kann den Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $AB$  auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie  $AB$ ! Schlagen Sie um  $B$  mit  $AB$  einen Kreis und um  $A$  mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in  $C$  bzw.  $C'$  schneidet! Um  $C$  schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um  $B$  in  $D$  schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um  $D$ !

Sie erhalten Punkt  $E$  als Schnittpunkt mit dem Kreis um  $B$ . Jetzt schlagen Sie um  $E$  mit  $CE$  und um  $A$  mit  $AE$  Kreise, die einander in  $F$  und  $F'$  schneiden!

Schlagen Sie schließlich noch um  $F$  und  $F'$  Kreise mit  $FE$ , dann erhalten Sie den Punkt  $M$ !

Beweisen Sie, dass  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$  ist!

**Aufgabe 5 - V10935**

Mit welcher Ziffer endet die Zahl  $2^{100}$ ? Begründen Sie das!

**1.3 I. Olympiade 1961****1.3.1 I. Runde 1961, Klasse 9****Aufgabe 1 - 010911**

Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

**Aufgabe 2 - 010912**

In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision"  $p_m$ . Nimmt man  $p_m$  als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa  $4\frac{1}{2}$ mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von  $p_m = 0,5$  Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von  $p_m = 0,1$  Prozent und in ferner Zukunft sogar  $p_m = 0,05$  Prozent erreichen.

- Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?
- Welche mittlere Präzision  $p_m$  wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

**Aufgabe 3 - 010913**

Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte  $0,98 \text{ g/cm}^3$ ) und möglichst weichem Wasser (Dichte  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte  $0,996 \text{ g/cm}^3$ , bei Schleifarbeiten die Dichte  $0,992 \text{ g/cm}^3$  haben. Wie viel Liter gefettetes Mineralöl und wie viel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

**Aufgabe 4 - 010914**

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

OTTO	MAIS	OTTO	MAIS	OTTO
<u>-ROSE</u>	<u>-SALZ</u>	<u>-SALZ</u>	<u>-ROSE</u>	<u>-MAIS</u>
4709	2963	3497	4175	534

**Aufgabe 5 - 010915**

Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

**Aufgabe 6 - 010916**

Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius  $r = 3cm!$  Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

### 1.3.2 II. Runde 1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 010921

Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa  $\frac{3}{5}$  in der Sowjetunion,  $\frac{2}{9}$  der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.

- Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?
- Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

#### Aufgabe 2 - 010922

a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen. Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je  $\text{mm}^2$  Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp.

Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je  $\text{mm}^2$  Querschnitt 0,8 p wiegt?

#### Aufgabe 3 - 010923

Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.

Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

#### Aufgabe 4 - 010924

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.

Wie heißen die Zahlen?

#### Aufgabe 5 - 010925

Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten  $a_1, b_1, c_1$  bzw.  $a_2, b_2, c_2$ ! Bilden Sie  $a_1 + a_2, b_1 + b_2$  und  $c_1 + c_2$ !

Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich?

Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

### 1.3.3 III. Runde 1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 010931

In den ersten  $2\frac{1}{2}$  Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus. Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.

Wie viel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?

Wie viel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

#### Aufgabe 2 - 010932

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.

Nach wie viel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

#### Aufgabe 3 - 010933

Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!

Wie haben Sie die Lösung gefunden?

#### Aufgabe 4 - 010934

Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt  $S$  sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt  $P$ .

Konstruieren Sie eine durch  $P$  verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten  $A$  und  $B$  so schneidet, dass  $PA = PB$  wird!

Die Konstruktion ist zu begründen!

#### Aufgabe 5 - 010935

In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

- (a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
- (b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
- (c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
- (d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
- (e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
- (f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

## 1.4 II. Olympiade 1962

### 1.4.1 I. Runde 1962, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 020911

Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser  $d = 23m$  und der Höhe  $h = 21m$ .

- Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!
- Wie viel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa  $0,85 \text{ g/cm}^3$ )?
- Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?
- Wie viel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

#### Aufgabe 2 - 020912

Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik "Klement Gottwald" senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch  $\frac{2}{5}$  ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,- M.

- Wie viel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?
- Wie viel Prozent beträgt er jetzt?
- Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

#### Aufgabe 3 - 020913

Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenkelig ist!

#### Aufgabe 4 - 020914

Welche zweistelligen Zahlen  $xy$  haben ein Quadrat von der Form  $zxy$  ( $x, y$  und  $z$  sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

#### Aufgabe 5 - 020915

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in  $A$  und  $B$ . Ihr Schnittpunkt sei  $D$ . Nun ziehe man durch  $D$  die Parallele zu der Tangente in  $C$ . Die Verlängerungen der Seiten  $CA$  und  $CB$  schneiden diese Parallelen in  $A'$  bzw.  $B'$ .

Es ist zu beweisen, dass

- die Dreiecke  $AA'D$  und  $DB'B$  gleichschenkelig sind und
- es einen Kreis gibt, der durch  $A, A', B, B'$  geht!

#### Aufgabe 6 - 020916

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * * * = * * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 8 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

## 1.4.2 II. Runde 1962, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 020921**

Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.

Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

**Aufgabe 2 - 020922**

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Es wird gebremst.

- In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  abnimmt?
- Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

**Aufgabe 3 - 020923**

Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.

Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.

Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

**Aufgabe 4 - 020924**

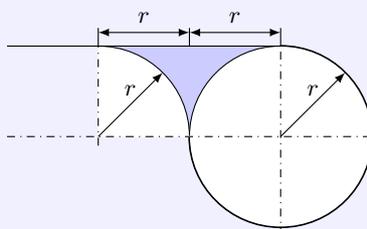
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.

Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

**Aufgabe 5 - 020925**

Zeichnen Sie eine Gerade  $g$  und auf derselben Seite von  $g$  zwei Punkte  $A$  und  $B$ , die verschiedenen Abstand von  $g$  haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade  $g$  nicht unter einem rechten Winkel schneidet!

Konstruieren Sie auf  $g$  einen Punkt  $P$ , für den der Winkel zwischen  $AP$  und  $g$  gleich dem Winkel zwischen  $BP$  und  $g$  ist! Begründen Sie die Konstruktion!

**Aufgabe 6 - 020926**

An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.

- Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
- Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

### 1.4.3 III. Runde 1962, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 020931

Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

#### Aufgabe 2 - 020932

Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag  $\frac{1}{2}$  Elle herunter und in der Nacht wieder  $\frac{1}{6}$  Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht  $\frac{1}{4}$  4 hinunter.

Nach wie viel Tagen erreicht die Katze die Maus?

#### Aufgabe 3 - 020933

Von einem Punkt  $P$  auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von  $135^\circ$  miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von  $P$  ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je  $45^\circ$ .

Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer  $P$ ) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

#### Aufgabe 4 - 020934

Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf  $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  erhöht.

Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

#### Aufgabe 5 - 020935

Über den Seiten  $a, b, c$  und  $d$  eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten  $F_1, F_2, F_3$  und  $F_4$  in dieser Reihenfolge errichtet.

Beweisen Sie, dass  $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$  ist!

#### Aufgabe 6 - 020936

In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.

Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.

Wie viel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wie viel in der ganzen Pyramide?

## 1.5 III. Olympiade 1963

### 1.5.1 I. Runde 1963, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 030911

Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius  $R = 6370$  km.)

- Wie viel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmen und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)
- Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

#### Aufgabe 2 - 030912

Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

#### Aufgabe 3 - 030913

- Konstruieren Sie ein Dreieck aus  $a = 5,6$  cm,  $r = 3,5$  cm (Radius des Umkreises) und  $\gamma = 60^\circ$ !
- Beschreiben Sie die Konstruktion!
- Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite  $a$ !
- Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit  $a = 5,6$  cm und  $\gamma = 60^\circ$  nicht möglich ist!

#### Aufgabe 4 - 030914

Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

#### Aufgabe 5 - 030915

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

#### Aufgabe 6 - 030916

- Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wie viel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?
- Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?
- Die Anzahl der Punkte sei  $n$ . Wie viel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

### 1.5.2 II. Runde 1963, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 030921

Von einem Trapez  $ABCD$  mit den parallelen Seiten  $AB$  und  $CD$  sind gegeben:

$AB = 6$  cm,  $BC = 4$  cm,  $CD = 4,5$  cm,  $DA = 3$  cm.

Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

#### Aufgabe 2 - 030922

Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt.

Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

#### Aufgabe 3 - 030923

Einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite  $BC$  verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks  $ABC$  liegen.

Begründen Sie die Konstruktion!

#### Aufgabe 4 - 030924

Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

#### Aufgabe 5 - 030925

a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.

b) Wie viel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

### 1.5.3 III. Runde 1963, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 030931

Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

#### Aufgabe 2 - 030932

Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius  $r$ .

- Führen Sie die Konstruktion durch ( $r = 3$  cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
- Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

#### Aufgabe 3 - 030933

Welche Punkte  $P(x; 0)$  sind von dem Punkt  $P_1(a; 0)$  doppelt so weit entfernt wie von  $P_2(b; 0)$ ? Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ( $b > a$ )

#### Aufgabe 4 - 030934

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024. Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

#### Aufgabe 5 - 030935

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Paralleelseiten).

#### Aufgabe 6 - 030936

Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

- Anna hat den Ball.
- Brigitte hat den Ball nicht.
- Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

## 1.6 IV. Olympiade 1964

### 1.6.1 I. Runde 1964, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 040911

Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

”Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt.”

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

#### Aufgabe 2 - 040912

Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge  $CBAD$ . Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge  $ADBC$ . Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

#### Aufgabe 3 - 040913

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ , dessen Hypotenuse  $\overline{AB}$  25 mm und dessen Kathete  $\overline{BC}$  20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke  $\overline{BD}$  von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt  $D$  aus wird das Lot  $\overline{DE}$  auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks  $BDE$ !

#### Aufgabe 4 - 040914

Von den natürlichen Zahlen  $p$  und  $q$  ist bekannt, dass  $0 < p < q$  gilt.

- Ordnen Sie die Zahlen  $1$ ,  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{q}{p}$  der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!
- Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{q}{p}$  näher an 1 liegt!

#### Aufgabe 5 - 040915

In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

- Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!
- Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

### 1.6.2 II. Runde 1964, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 040921

In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.

Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

- a) Wie viel Arbeiter hat die Abteilung?
- b) Auf wie viel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

#### Aufgabe 2 - 040922

Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt  $95 \cdot 97$  auf folgende Weise:

- 1) Er addiert die Faktoren.  $95 + 97 = 192$
- 2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92
- 3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander.  $5 \cdot 3 = 15$
- 4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

#### Aufgabe 3 - 040923

Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

#### Aufgabe 4 - 040924

Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

- (1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.
- (2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.
- (3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.
- (4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.
- (5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.
- (6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.
- (7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.
- (8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

**1.6.3 III. Runde 1964, Klasse 9****Aufgabe 1 - 040931**

Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.

In wie viel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität  $66\frac{2}{3}\%$  von der des Werkes A beträgt.

**Aufgabe 2 - 040932**

Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet. Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie  $x$  möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 9} + \frac{6}{9 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{6}{31 \cdot 33}$$

**Aufgabe 3 - 040933**

Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius  $r$  das einbeschriebene Quadrat!

**Aufgabe 4 - 040934**

Ist die folgende Aussage richtig?

Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

**Aufgabe 5 - 040935**

Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: "Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."

Inge: "Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."

Günter: "Die Zahl ist kleiner als 3."

Monika: "Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."

Bärbel: "Die Zahl ist irrational."

Peter: "Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."

Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.

Wie heißt die Zahl?

**Aufgabe 6 - 040936**

Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von  $45^\circ$  bilden.

1. Wie viel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante  $a$  an!

## 1.7 V. Olympiade 1965

### 1.7.1 I. Runde 1965, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 050911

Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

#### Aufgabe 2 - 050912

Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

#### Aufgabe 3 - 050913

Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

#### Aufgabe 4 - 050914

Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

### 1.7.2 II. Runde 1965, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 050921

Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen  $a$  und  $b$ , für die  $(a + b)^3 = a^3 + b^3$  gilt.

#### Aufgabe 2 - 050922

28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.

Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.

Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.

Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.

Wie viel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

#### Aufgabe 3 - 050923

Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:

”Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... .”

- a) Wie alt war da die Schwester?
- b) Wie viel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

#### Aufgabe 4 - 050924

In einer Ebene  $\epsilon$  ist ein Rechteck  $ABCD$  gegeben.  $P$  sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene  $\epsilon$  durch  $A$ .

Es ist zu beweisen, dass die Punkte  $A, B, D$  auf der Kugel mit dem Durchmesser  $PC$  liegen.

**1.7.3 III. Runde 1965, Klasse 9****Aufgabe 1 - 050931**

Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

**Aufgabe 2 - 050932**

a) Konstruieren Sie das Dreieck  $\triangle ABC$ , wenn  $\alpha$ ,  $a$  und  $s_c$  gegeben sind. Dabei bedeutet  $\alpha$  das Maß des Winkels  $\angle CAB$ ,  $a$  die Länge der Seite  $BC$  und  $s_c$  die Länge der Seitenhalbierenden  $CD$ , wobei  $D$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$  ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

**Aufgabe 3 - 050933**

Die positive ganze Zahl  $x$  ende auf die Ziffern  $a$  und  $b$  (in dieser Reihenfolge).

Man ermittle alle geordneten Paare  $(a, b)$ , für die  $x^2$  auf dieselben Ziffern  $a$  und  $b$  (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

**Aufgabe 4 - 050934**

Man ermittle für die reellen Zahlen  $a$  und  $b$ ,  $a \neq 0$ , die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

**Aufgabe 5 - 050935**

In dem Parallelogramm  $ABCD$  sei  $AB = CD = a$ ,  $BC = AD = b$ , ( $a > b$ ) und  $AE = h_a$ , wobei  $E$  der Fußpunkt des vom Punkt  $A$  des auf die Seite  $CD$  bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.

Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge  $r$  gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche  $F$ , die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

**Aufgabe 6 - 050936**

Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerkung, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.

Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.

Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.

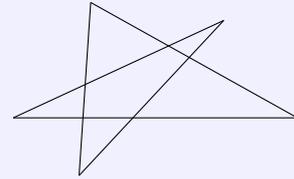
Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.

Die Mutter stellt danach fest, dass insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.

Wie viel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

**1.8 VI. Olympiade 1966****1.8.1 I. Runde 1966, Klasse 9****Aufgabe 1 - 060911**

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.

**Aufgabe 2 - 060912**

Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

**Aufgabe 3 - 060913**

In einem Viereck  $ABCD$  wird die Seite  $AB$  über  $B$  hinaus bis zum Punkt  $E$  so verlängert, dass  $\overline{BE} = \overline{AB}$  ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel  $\angle ACE$  ein rechter Winkel ist.

Das Viereck  $ABCD$  hat

- vier kongruente Winkel,
- vier kongruente Seiten,
- zwei Paare kongruenter Seiten,
- zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
- zwei kongruente Winkel.

**Aufgabe 4 - 060914**

Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden  $\frac{1}{2}$  Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

**1.8.2 II. Runde 1966, Klasse 9****Aufgabe 1 - 060921**

Geben Sie vier verschiedene Paare  $(a, b)$  positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!  
(Je zwei Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

**Aufgabe 2 - 060922**

Innerhalb eines Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius von der Länge  $r$  liege der von  $M$  verschiedene Punkt  $P$ .

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch  $P$  die kürzeste!

**Aufgabe 3 - 060923**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks  $ABCD$  schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei  $a, b, c$  und  $d$  die Seitenlängen des Vierecks sind.

**Aufgabe 4 - 060924**

Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

### 1.8.3 III. Runde 1966, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 060931

Zwei Primzahlen  $p_1$  und  $p_2$  (mit  $p_1 > p_2$ ) heißen Primzahlzwillinge, wenn  $p_1 - p_2 = 2$  gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge  $p_1$  und  $p_2$ , für die  $p_2 > 3$  ist, stets die Summe  $p_1 + p_2$  durch 12 teilbar ist!

#### Aufgabe 2 - 060932

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder  $ABCD$  die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

#### Aufgabe 3 - 060933

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fache der Summe der Kathetenlängen.

#### Aufgabe 4 - 060934

Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form  $2p+1$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

#### Aufgabe 5 - 060935

Auf dem Kreis  $k$  bewegen sich der Punkt  $A$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_1$  und der Punkt  $B$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_2$ , wobei  $v_1 \neq v_2$  ist.

Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt  $A$  den Punkt  $B$  jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  (in m/min)?

#### Aufgabe 6 - 060936

In einer Ebene sind ein Kreis  $k$ , eine Gerade  $g$  sowie ein Punkt  $A$  auf  $g$  gegeben.

Man konstruiere einen Kreis  $k'$ , der erstens  $k$  berührt und zweitens  $g$  in  $A$  berührt.

Man untersuche, wie viele solcher Kreise  $k'$  es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von  $k$ ,  $g$  und  $A$  geben kann.

## 1.9 VII. Olympiade 1967

### 1.9.1 I. Runde 1967, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 070911

Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

- (1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.
- (2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

#### Aufgabe 2 - 070912

Es ist  $x$  eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie  $x$ .

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

#### Aufgabe 3 - 070913

Für jede ganze Zahl  $n \geq 3$  ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes  $n$ -Eck haben kann.

#### Aufgabe 4 - 070914

Vier Mannschaften  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.

Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft  $D$ . Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel  $A$  gegen  $B$  endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Platzierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln. Wie ist das möglich?

## 1.9.2 II. Runde 1967, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 070921**

Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen  $(m, n)$ , für die  $m + n = 111$  gilt.

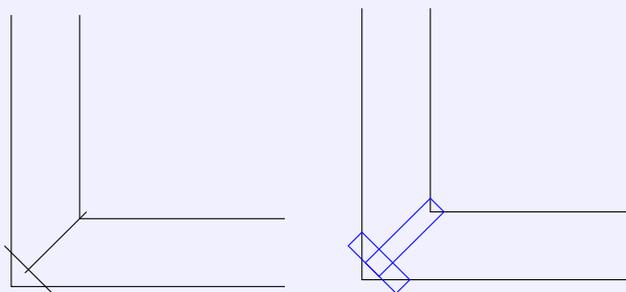
**Aufgabe 2 - 070922**

Für zwei rationale Zahlen  $a$  und  $b$  gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18,75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$  und  $a : b$  überein.

Ermitteln Sie die Zahlen  $a$  und  $b$ !

**Aufgabe 3 - 070923**

In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.

Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

- Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
- Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei  $a$ , die Breite der Bohlen sei  $b$ . Welchen Wert hat das Verhältnis  $b : a$ , wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?  
Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

**Aufgabe 4 - 070924**

Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.

Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

**1.9.3 III. Runde 1967, Klasse 9****Aufgabe 1 - 070931**

Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

**Aufgabe 2 - 070932**

Auf einem rechtwinkligen Billardtisch  $ABCD$  befindet sich im Punkt  $P$  eine Kugel. Nach welchem Punkt von  $AB$  muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten  $AB, BC, CD$  und  $DA$  des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt  $P$  eintrifft?

**Aufgabe 3 - 070933**

Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.

Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314\dots979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.

Wie lautet diese?

**Aufgabe 4 - 070934**

Man ermittle alle geordneten Tripel  $(a, b, c)$  natürlicher Zahlen  $a, b$  und  $c$ , für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1)$$

gilt. Zwei Tripel  $(a_1, b_1, c_1)$  und  $(a_2, b_2, c_2)$  heißen dabei genau dann gleich, wenn  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$  und  $c_1 = c_2$  ist.

**Aufgabe 5 - 070935**

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  bekannt. Berechnen Sie die Länge  $s_c$  der Seitenhalbierenden der Seite  $AB$ !

**Aufgabe 6 - 070936**

Man ermittle alle reellen Zahlen  $x$ , die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

## 1.10 VIII. Olympiade 1968

### 1.10.1 I. Runde 1968, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 080911

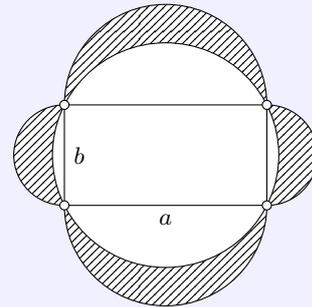
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

#### Aufgabe 2 - 080912

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ . Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!



#### Aufgabe 3 - 080913

Konstruieren Sie ein Trapez aus  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ !

Dabei seien  $a$  die Länge der Seite  $AB$ ,  $b$  die Länge der Seite  $BC$ ,  $c$  die Länge der Seite  $CD$  und  $d$  die Länge der Seite  $DA$ . Weiterhin soll  $AB \parallel CD$  und  $a > c$  gelten.

#### Aufgabe 4 - 080914

In

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & * & * & . & * & * \\
 \hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
 \hline
 & * & * & * & 1 & *
 \end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

### 1.10.2 II. Runde 1968, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 080921

Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

- Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
- Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

#### Aufgabe 2 - 080922

Von einem Dreieck  $\triangle ABC$  seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

#### Aufgabe 3 - 080923

Geben Sie alle Paare  $(x, y)$  natürlicher Zahlen an, für die  $x^3 - y^3 = 999$  ist!

#### Aufgabe 4 - 080924

Vier Personen  $A, B, C$  und  $D$  machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl  $x$ . Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

$A$  sagt:

- Das Reziproke von  $x$  ist nicht kleiner als 1.
- $x$  enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
- Die 3. Potenz von  $x$  ist kleiner als 221.

$B$  sagt:

- $x$  ist eine gerade Zahl.
- $x$  ist eine Primzahl.
- $x$  ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

$C$  sagt:

- $x$  ist irrational.
- $x$  ist kleiner als 6.
- $x$  ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

$D$  sagt:

- $x$  ist größer als 20.
- $x$  ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
- $x$  ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie  $x$ .

**1.10.3 III. Runde 1968, Klasse 9****Aufgabe 1 - 080931**

Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.

”Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.

Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.

Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.”

Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

**Aufgabe 2 - 080932**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $a, b + c$  und  $\alpha$ !

Dabei sind  $a, b, c$  die Längen der Dreiecksseiten und  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle BAC$ .

**Aufgabe 3 - 080933**

Geben Sie alle Zahlentripel  $(a, b, c)$  an, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b + c &= s_1 & a - b + c &= s_3 \\ a + b - c &= s_2 & a - b - c &= s_4 \end{aligned}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

**Aufgabe 4 - 080934**

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle ABC$ . Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

**Aufgabe 5 - 080935**

Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl  $n$  die Zahl  $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$  durch 512 teilbar ist.

**Aufgabe 6 - 080936**

Es sei  $ABCD$  ein Rechteck, und es sei  $P$  ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht.  $P$  habe vom Eckpunkt  $A$  den Abstand  $a$ , vom Punkt  $B$  den Abstand  $b$  und vom Punkt  $C$  den Abstand  $c$ .

Man berechne den Abstand  $d$  des Punktes  $P$  vom Eckpunkt  $D$  und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes  $d$  die Kenntnis der drei Abstände  $a, b, c$  ausreicht.

## 1.11 IX. Olympiade 1969

### 1.11.1 I. Runde 1969, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 090911

Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

#### Aufgabe 2 - 090912

Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9 \text{ dm}^2, \quad I_2 = 8 \text{ dm}^2, \quad I_3 = 7 \text{ dm}^2, \quad I_4 = 6 \text{ dm}^2, \quad I_5 = 5 \text{ dm}^2, \quad I_6 = 4 \text{ dm}^2, \quad I_7 = 3 \text{ dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

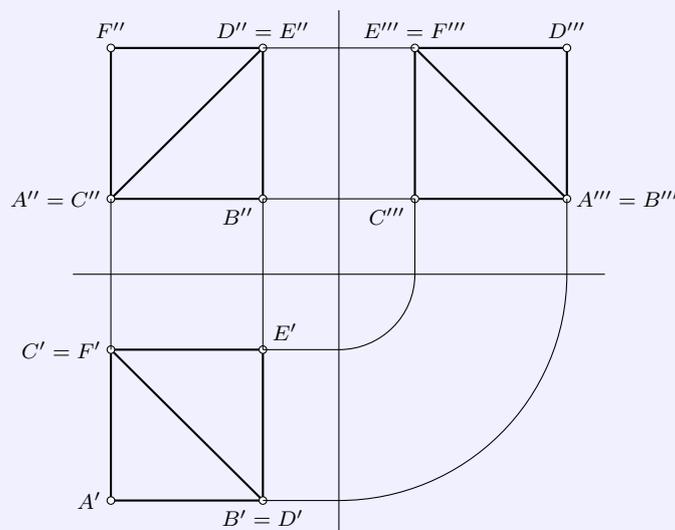
#### Aufgabe 3 - 090913

In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper  $K$  heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen  $F$  gilt: Ist  $\varepsilon$  die Ebene, in der  $F$  liegt, so befindet sich  $K$  ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch  $\varepsilon$  zerlegt wird.

Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge  $a$ .

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!



**Aufgabe 4 - 090914**

Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl  $z$  sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von  $z$  eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von  $z$  bezeichnet.

*Beispiele:* Die erste Quersumme von 98 ist  $9 + 8 = 17$ , die zweite Quersumme von 98 ist  $1 + 7 = 8$ . Die erste Quersumme von 43 ist  $4 + 3 = 7$ , eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von  $z$  eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von  $z$ . In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

- a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!
- b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!
- c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

**1.11.2 II. Runde 1969, Klasse 9****Aufgabe 1 - 090921**

Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.

Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

- a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
- b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

**Aufgabe 2 - 090922**

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge  $a_1$  und dem Volumen  $V_1$  sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge  $a_2$  und dem Volumen  $V_2$ . Für die Kantenlängen gelte  $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$ . Berechnen Sie das Verhältnis  $V_1 : V_2$ !

**Aufgabe 3 - 090923**

Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.

Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

**Aufgabe 4 - 090924**

Es ist zu beweisen:

Verbindet man in einem Parallelogramm  $ABCD$  den Eckpunkt  $C$  mit den Mittelpunkten der Seiten  $AB$  und  $AD$ , so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale  $BD$  in drei gleich lange Teilstrecken.

**1.11.3 III. Runde 1969, Klasse 9****Aufgabe 1 - 090931**

Es sei  $ABCDEFGH$  ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte  $A, B, C, D, E, F, G, H$  sind.

Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

**Aufgabe 2 - 090932**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $s_a = 9,6$  cm,  $s_b = 12,6$  cm und  $s_c = 11,1$  cm! Dabei sind  $s_a, s_b$  und  $s_c$  die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

**Aufgabe 3 - 090933**

Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau  $m$ -mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau  $n$ -mal so lange wie C und A zusammen und C genau  $p$ -mal so lange wie A und B zusammen. Berechnen Sie  $p$  in Abhängigkeit von  $m$  und  $n$ !

**Aufgabe 4 - 090934**

Man beweise:

Wenn zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  die Bedingung erfüllen, dass die Zahl  $11a + 2b$  durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl  $18a + 5b$  durch 19 teilbar.

**Aufgabe 5 - 090935**

Die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$  werde durch eine Parallele zur Seite  $AB$  in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite  $AB$  gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

**Aufgabe 6 - 090936**

Es sei  $f(x)$  die für alle reellen  $x$  definierte Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$$

Ferner sei  $x_0$  eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion  $f(x)$  an den Stellen  $x_0 + 1$  und  $x_0 + 2$  mit  $f(x_0 + 1)$  bzw.  $f(x_0 + 2)$  bezeichnet. Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0}$$

**1.12 X. Olympiade 1970****1.12.1 I. Runde 1970, Klasse 9****Aufgabe 1 - 100911**

Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr  $X$ :

”Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre.”

Können die Angaben von Herrn  $X$  zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr  $X$ ? (Angaben in vollen Lebensjahren)

**Aufgabe 2 - 100912**

Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. In einer Ebene  $\varepsilon$  liege ein Rechteck  $ABCD$  mit den Seitenlängen  $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ . Ferner sei  $S$  ein Punkt der in  $A$  auf  $\varepsilon$  errichteten Senkrechten, wobei  $\overline{AS} = c$  gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte  $A, B, C, D, S$  liegen, und berechne aus den gegebenen Längen  $a, b, c$  die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

**Aufgabe 3 - 100913**

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213\dots9989991000.$$

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

**Aufgabe 4 - 100914**

In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

- |            |  |     |
|------------|--|-----|
| Aphrodite: | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (1) |
| Athene:    | <i>Aphrodite ist nicht die Schönste.</i> | (2) |
| Hera:      | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (3) |
| Aphrodite: | <i>Hera ist nicht die Schönste.</i>      | (4) |
| Athene:    | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (5) |

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

## 1.12.2 II. Runde 1970, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 100921**

Vier Freunde  $A, B, C$  und  $D$  verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

- $A$  (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn  $C$ ."  
 (2) "Ich habe den Brief nicht."  
 (3) "Mein Freund hat den Brief."  
 $B$  (1) "Entweder  $A$  oder  $C$  hat den Brief."  
 (2) "Alle Aussagen von  $A$  sind wahr."  
 (3) " $D$  hat den Brief nicht."  
 $C$  (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn  $B$ ."  
 (2) "Ich habe den Brief."  
 (3) " $B$  macht keine falschen Aussagen."  
 $D$  (1) "Ich habe den Brief nicht."  
 (2) "Entweder hat  $A$  den Brief, oder er hat ihn nicht."  
 (3) " $B$  hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

**Aufgabe 2 - 100922**

Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von  $a$  und  $b$  diese Eigenschaft.

- a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!  
 b) Beweisen Sie diesen Satz!

**Aufgabe 3 - 100923**

Gegeben seien zwei reelle Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$ . Ferner sei  $f$  die durch  $f(x) = mx + n$  für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

- a) Ermitteln Sie für  $m = 1$  und  $n = 0$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle  $x_0 + 2$  doppelt so groß ist wie der an der Stelle  $x_0$ )!  
 b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt!

**Aufgabe 4 - 100924**

Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt. In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken  $A, B, C, D$  und der Spitze  $D$  sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche  $60^\circ$  groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge  $a$ .

Berechnen Sie das Volumen  $V$  dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist  $P$  ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in  $P$  auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

## 1.12.3 III. Runde 1970, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 100931**

Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.

Ferner ist folgendes bekannt:

- (1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
- (2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
- (3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
- (4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.

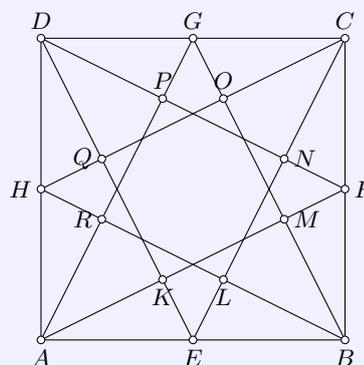
Aus wie viel Schülern bestand Günters Gruppe?

**Aufgabe 2 - 100932**

In einem Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a$  seien die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CD, DA$  mit  $E, F, G, H$  bezeichnet.

In dem Streckenzug  $AFDECHBGA$  auftretenden Schnittpunkte seien so mit  $K, L, M, N, O, P, R$  bezeichnet, dass  $AKELBMFNCOGPDQHR$  ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Bild).

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!

**Aufgabe 3 - 100933**

Wenn  $x$  eine reelle Zahl ist, so bedeute  $[x]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $x$  ist. (So ist z.B.  $[3, 7] = 3$ ,  $[-3, 7] = -4$ ,  $[4] = 4$ .)

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$\left[ \frac{10 + 3x}{6} \right] = \frac{5x + 3}{7}$$

**Aufgabe 4 - 100934**

Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen  $(x, y, z)$ , welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x + y = 2 \quad ; \quad (2) \quad xy - z^2 = 1$$

**Aufgabe 5 - 100935**

Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken  $A, B, C, D$  und der Spitze  $D$  habe die Kantenlängen  $AB = 4$  cm,  $AC = 3$  cm,  $BC = 5$  cm,  $BD = 12$  cm,  $CD = 13$  cm, und  $\angle ABD$  sei ein rechter Winkel.

Man berechne das Volumen  $V$  dieser Pyramide.

**Aufgabe 6 - 100936**

Es sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $a + b + c, \angle, \gamma$  zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich  $a, b, c$  die Längen der Seiten  $BC, AC, AB$  und  $\alpha, \gamma$  die Größen der Winkel  $\angle CAB, \angle ACB$ .

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

**1.13 XI. Olympiade 1971****1.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 9****Aufgabe 1 - 110911**

Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)} \quad (1)$$

Michael meint, dass sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" lässt, wählt für die Variablen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird!

**Aufgabe 2 - 110912**

Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

**Aufgabe 3 - 110913**

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen  $a$ , für die der Term

$$t = \frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

**Aufgabe 4 - 110914**

In einer Ebene  $\varepsilon$  liege ein Rechteck  $ABCD$ .  $S$  sei ein Punkt der Senkrechten in  $A$  auf  $\varepsilon$ .

Ermitteln Sie die Größe des Winkels  $\angle CDS$ !

**1.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 9****Aufgabe 1 - 110921**

Bei einem geraden Kreiszyylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm<sup>2</sup>) und seines Volumens (in cm<sup>3</sup>) untereinander gleich sein. Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

**Aufgabe 2 - 110922**

Ermitteln Sie alle geordneten Paare  $(a, b)$  ganzer Zahlen  $a$  und  $b$  ( $b \neq 0$ ) mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man den Zähler  $a$  des Bruches  $\frac{a}{b}$  durch die Summe aus  $a$  und einer geeigneten natürlichen Zahl  $n$  ( $n \neq 0$ ) und ersetzt man zugleich den Nenner  $b$  dieses Bruches durch das Produkt aus  $b$  und der gleichen Zahl  $n$ , so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch  $\frac{a}{b}$  gleich ist.

**Aufgabe 3 - 110923**

Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit  $P_1$  bis  $P_{30}$  bezeichnet.

Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken  $P_7P_{18}$  und  $P_{12}P_{21}$  schneiden!

**Aufgabe 4 - 110924**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind  $p_1$  und  $p_2$  Primzahlen, für die  $3 < p_1 < p_2$  gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , so dass die Gleichungen

$$(1) \quad a + b = p_2 \quad \text{und} \quad (2) \quad a - b = p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt  $a \cdot b$  durch 6 teilbar ist.

## 1.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 110931**

Günter erzählt:

”Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:

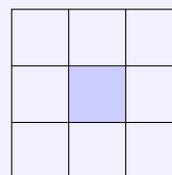
Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.”

Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

**Aufgabe 2 - 110932**

In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei ”Zeilensummen”, die drei ”Spaltensummen” und die zwei ”Diagonalsummen” sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).

Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!

**Aufgabe 3 - 110933**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks  $\triangle ABC$  wie  $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ , dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

**Aufgabe 4 - 110934**

In einem Rechteck  $ABCD$  mit  $AB = CD = a$  und  $BC = DA = b$ , ( $a > b$ ) schneide die Halbierende des Winkels  $\angle BAD$  die Seite  $CD$  in  $S_1$ . Weiter sei  $S_2$  der Mittelpunkt von  $AB$ .

Ermitteln Sie das Verhältnis  $a : b$  der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels  $\angle AS_2C$  die Seite  $CD$  in  $S_1$  schneidet!

**Aufgabe 5 - 110935**

Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

**Aufgabe 6 - 110936**

Ermitteln Sie alle geordneten Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen  $x, y$ , die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

## 1.14 XII. Olympiade 1972

### 1.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 120911

Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl  $n \geq 4$  einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau  $n$  Ecken und genau  $n$  Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

#### Aufgabe 2 - 120912

Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

#### Aufgabe 3 - 120913

Ein Durchmesser  $AB$  eines Kreises werde von einer Sehne  $CD$  in einem Punkt  $E$  geschnitten, der  $AB$  innen im Verhältnis  $2 : 5$  teilt. Dabei schneide die Sehne  $CD$  den Durchmesser  $AB$  unter einem Winkel von  $30^\circ$ .

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt  $M$  des Kreises, wenn die Länge  $d$  des Durchmessers gegeben ist!

#### Aufgabe 4 - 120914

Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

### 1.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 120921

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

#### Aufgabe 2 - 120922

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für die der Quotient  $\frac{8-3x}{7x-2}$  negativ ist!

#### Aufgabe 3 - 120923

Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
- (2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
- (3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
- (4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
- (5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
- (6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

#### Aufgabe 4 - 120924

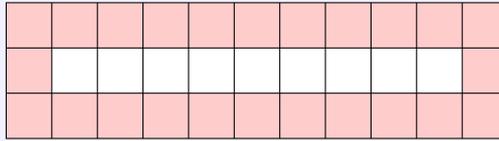
Ein konvexes Tangentenviereck  $ABCD$  (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang  $u$ , der Radius seines Inkreises sei  $r$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $F$  dieses Tangentenvierecks!

## 1.14.3 III. Stufe 1972, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 120931**

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Zahl  $n^6 - n^2$  durch 10 teilbar ist.

**Aufgabe 2 - 120932**

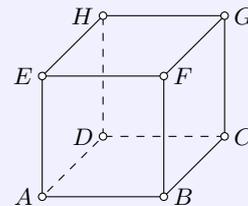
Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derart zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

**Aufgabe 3 - 120933**

Ein Würfel mit der Kantenlänge  $a$  und den Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte  $A, B, G, H$ ;  $D, C, F, E$ ;  $A, D, G, F$ ;  $B, C, H, E$ ;  $A, E, G, C$  und  $B, H, F, D$  gehen.

Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.

**Aufgabe 4 - 120934**

Zwei Fußgänger  $A$  und  $B$  legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

$A$  ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $4 \frac{km}{h}$ , den Rest mit  $5 \frac{km}{h}$ .  $B$  ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer

Durchschnittsgeschwindigkeit von  $4 \frac{km}{h}$ , während der übrigen Zeit mit  $5 \frac{km}{h}$ .

Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

**Aufgabe 5 - 120935**

Es sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck,  $k$  sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von  $k$ , auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$$

Man beweise, dass dann  $AC \perp BD$  gilt!

**Aufgabe 6 - 120936**

a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel  $(k, n, m)$  natürlicher Zahlen  $k, n, m$ , für die  $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$  gilt.

b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt  $knm$  den kleinsten Wert annimmt.

**1.15 XIII. Olympiade 1973****1.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 9****Aufgabe 1 - 130911**

Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte  $A$  und  $B$  befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke  $AB$  ist 51 m lang. Ein in  $A$  erzeugter Schall trifft in  $B$  auf direktem Wege um genau  $\frac{1}{10}$ s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte  $A$  und  $B$  von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

**Aufgabe 2 - 130912**

Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wie viel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

**Aufgabe 3 - 130913**

In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen.

Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

**Aufgabe 4 - 130914**

Unter  $n!$  (gelesen  $n$ -Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ ; d.h., es gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für  $n = 1000$  die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl  $n!$  endet (Endnullen).

## 1.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 130921**

Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

**Aufgabe 2 - 130922**

In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$ , in dem die Winkel  $ABC$  und  $BAC$  die Größe  $90^\circ$  bzw.  $60^\circ$  haben, schneide die Halbierende des Winkels  $BAC$  die Gegenseite im Punkt  $D$ . Beweisen Sie, dass  $D$  die Seite  $BC$  im Verhältnis  $1 : 2$  teilt!

**Aufgabe 3 - 130923**

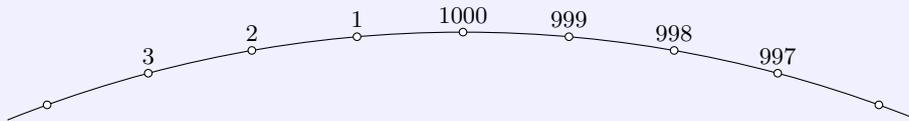
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ;  $AD = BC$ ;  $AB > CD$ ) soll folgende Eigenschaften haben:

Es soll sich einem Kreis mit dem Radius  $r = 12$  cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll  $u = 100$  cm betragen.

Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

**Aufgabe 4 - 130924**

Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

## 1.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 130931**

Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare  $(x, y)$ , worin  $x$  und  $y$  je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:

Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B.  $(25; 61)$ , denn es gilt  $52+9 = 61$  und  $16+9 = 25$ .)

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen  $x, y$  eines solchen Paares  $(x; y)$  einander zugeordnet.

- Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
- Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

**Aufgabe 2 - 130932**

Man gebe alle natürlichen Zahlen  $n$  an, für die  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$  durch 10 teilbar ist!

**Aufgabe 3 - 130933**

Auf einer Geraden  $g$  seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F$  gelegen. Ein Punkt  $P$  außerhalb von  $g$  sei so gelegen, dass  $PC$  das Lot von  $P$  auf  $g$  ist. Dabei gelte  $PC = AB = BC = CD = DE = EF$ .

Man beweise, dass dann  $\angle APF = 135^\circ$  gilt.

Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

**Aufgabe 4 - 130934**

In einer Ebene sollen regelmäßige  $n$ -Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel  $360^\circ$  beträgt.

Geben Sie alle natürlichen Zahlen  $n$  an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten  $n$ -Ecke an!

**Aufgabe 5 - 130935**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn für rationale Zahlen  $a, b, c$  mit  $a, b, c \neq 0$  und  $a + b + c \neq 0$  die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen  $a, b, c$  zueinander entgegengesetzt.

(Rationale Zahlen  $x, y$  heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn  $x = -y$  gilt.)

**Aufgabe 6 - 130936**

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  und der Kantenlänge  $a$ . Ein Punkt  $D'$  soll folgende Eigenschaften haben:

- Das Tetraeder mit den Eckpunkten  $A, B, C, D'$  ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
- $BD' = CD' = a$ , c)  $AD' \neq a$ .

Man untersuche, ob es solche Punkte  $D'$  gibt, und ermittle für jedes solche  $D'$  die Länge der Kante  $AD'$ .

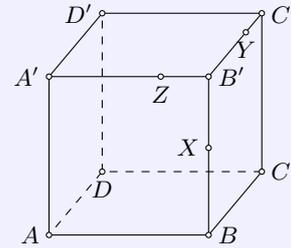
## 1.16 XIV. Olympiade 1974

## 1.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 140911**

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  und der Kantenlänge  $a$  (siehe Abbildung). Auf  $BB'$  liege ein Punkt  $X$ , auf  $B'C'$  ein Punkt  $Y$  und auf  $A'B'$  ein Punkt  $Z$ , wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von  $B'$  verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von  $X, Y, Z$  den geschlossenen Streckenzug  $XYZX$ . Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen  $\overline{XY}$ ,  $\overline{YZ}$  und  $\overline{ZX}$ .



- Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!
- Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!
- Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

**Aufgabe 2 - 140912**

Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck  $ABC$ , in dem  $D$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$  ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden  $CD$  und der halben Seite  $AD$  feststellen, ob das Dreieck bei  $C$  einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

**Aufgabe 3 - 140913**

An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl  $z$  werden folgende Forderungen gestellt:

- Die Quersumme von  $z$  soll 11 betragen.
- Die Ziffern von  $z$  sollen paarweise verschieden sein.
- Die Zahl  $z$  soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen  $z$ , die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

**Aufgabe 4 - 140914**

Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

### 1.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 140921

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.

Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

#### Aufgabe 2 - 140922

Es sei  $\triangle ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck,  $H$  sei der Schnittpunkt seiner Höhen und  $D, E, F$  deren Fußpunkte, wobei  $D$  auf  $BC$ ,  $E$  auf  $CA$  und  $F$  auf  $AB$  liegen mögen.

Man beweise, dass dann  $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$  gilt.

#### Aufgabe 3 - 140923

Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

#### Aufgabe 4 - 140924

$AB$  sei eine in der Ebene  $\epsilon$  gegebene Strecke der Länge  $a$ . In  $\epsilon$  sei  $g$  die Gerade durch  $A$ , die senkrecht zu  $AB$  ist.

In  $B$  sei die Senkrechte  $s$  auf die Ebene  $\epsilon$  errichtet. Schließlich seien  $C$  ein von  $A$  verschiedener Punkt auf  $g$  und  $D$  ein von  $B$  verschiedener Punkt auf  $s$ .

a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  geht.

b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass  $CA = a\sqrt{2}$  und  $BD = a\sqrt{3}$  gilt.

## 1.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 140931**

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl  $x$  (wobei  $x$  nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:

Die Zahl  $83 \cdot x$  (das Produkt aus 83 und  $x$ ) hat als Darstellung die Ziffernfolge  $3x8$  (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl  $x$  ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

**Aufgabe 2 - 140932**

Man gebe alle geordneten Quadrupel  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen  $a_1, a_2, a_3, a_4$  mit  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

**Aufgabe 3 - 140933**

Von einem beliebigen Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$  seien die Längen  $a = AB$ ,  $c = CD$  seiner Parallelseiten sowie der Abstand  $h$  der diese beide Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sei  $S$ .

Man berechne aus den gegebenen Längen  $a, c, h$  die Flächeninhalte  $F_1, F_2, F_3, F_4$  der Dreiecke  $ABS, BCS, CDS$  bzw.  $ADS$ .

**Aufgabe 4 - 140934**

Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen  $x, y, z$  die folgende Beziehung gilt:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ .

Ferner gebe man für  $x, y, z$  Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

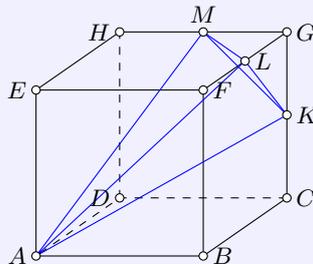
**Aufgabe 5 - 140935**

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Auf dem Umkreis  $k$  des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen  $\widehat{AB}$ , der  $C$  nicht enthält, ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt  $P$ .

Symmetrisch zu  $P$  bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $C$  bzw. der durch  $B$  und  $C$  mögen die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegen.

a) Man beweise, dass  $C$  auf der Geraden  $g$  durch  $P_1$  und  $P_2$  liegt.

b) Man beweise, dass  $g$  genau dann die Tangente im Punkt  $C$  an den Umkreis  $k$  ist, wenn  $CP \perp AB$  gilt.

**Aufgabe 6 - 140936**

In einem Würfel mit den Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  (siehe Abbildung) und der Kantenlänge  $a$  seien  $K, L, M$  die Mittelpunkte der Seiten  $CG, FG$  bzw.  $HG$ . Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten  $A, K, L, M$ .

**1.17 XV. Olympiade 1975****1.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 9****Aufgabe 1 - 150911**

Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

- (1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.
- (2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

**Aufgabe 2 - 150912**

In

$$\begin{array}{rcccc}
 & & H & A & U & S \\
 & & H & A & U & S \\
 \hline
 S & T & A & D & T & 
 \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

**Aufgabe 3 - 150913**

Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden  $g$  und  $h$ . Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke  $AB$  in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von  $A$  zu  $g$  kleiner ist als der Abstand von  $A$  zu  $h$ . Für jeden Punkt  $P$  auf  $h$  bezeichne  $A'$  bzw.  $B'$  den Schnittpunkt von  $g$  mit  $PA$  bzw.  $PB$ .

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte  $P$  auf  $h$ , für die mit diesen Bezeichnungen  $\overline{A'P} = \overline{B'P}$  gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte  $P$  mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen  $g$ ,  $h$ ,  $A$ ,  $B$  geben kann!

**Aufgabe 4 - 150914**

Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

## 1.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 150921**

Klaus hat bei einer Hausaufgabe  $4^2 - 3^2$  auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier  $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$  ist.

Ermitteln Sie alle Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen mit  $a > b$ , für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

**Aufgabe 2 - 150922**

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

- Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
- Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!

Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z.B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

**Aufgabe 3 - 150923**

Gegeben seien die Seitenlänge  $a$  eines Quadrates  $ABCD$  sowie eine Länge  $m$ , für die  $m \leq a$  gilt. Es sei  $M$  derjenige Punkt auf der Seite  $CD$ , für den  $MD = m$  gilt.

Gesucht ist ein Punkt  $N$  auf der Seite  $AD$  so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks  $NMD$  zu dem des Quadrates  $ABCD$  wie 1 : 7 verhält.

Man ermittle alle diejenigen Werte von  $m$ , für die ein solcher Punkt  $N$  auf  $AD$  existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke  $DN$ .

**Aufgabe 4 - 150924**

Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck  $ABC$  aus  $AB = c$ ,  $BC = a$  und  $\angle BAC = \alpha$  zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$  entstanden, die den Bedingungen genügen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels  $\angle AC_1B$ , wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel  $\angle AC_2B$ !

**1.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 9****Aufgabe 1 - 150931**

Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

**Aufgabe 2 - 150932**

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $BC = a$  und die Höhenlänge  $AD = h_a$  bekannt. Eine Gerade  $g$  verläuft so, dass  $BC$  auf  $g$  liegt.

Berechnen Sie das Volumen  $V$  des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade  $g$  beschrieben wird!

**Aufgabe 3 - 150933**

Über eine Zahl  $x$  werden die folgenden vier Paare  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$ ,  $(C_1, C_2)$ ,  $(D_1, D_2)$  von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl  $x$  gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl  $x$ !

A1) Es gibt außer  $x$  keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.

A2)  $x$  ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B1)  $x - 5$  ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.

B2)  $x + 1$  ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.

C1)  $x$  ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.

C2)  $x$  ist die Zahl 389.

D1)  $x$  ist eine dreistellige Primzahl mit  $300 < x < 399$ , also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.

D2)  $x$  ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

**Aufgabe 4 - 150934**

Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

**Aufgabe 5 - 150935**

Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

**Aufgabe 6 - 150936**

Beweisen Sie, dass für alle Tripel  $(a, b, c)$  positiver reeller Zahlen mit  $abc = 1$  die Ungleichung

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

## 1.18 XVI. Olympiade 1976

### 1.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 160911

Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug  $ABCDEFGA$  eingeschlossen, wobei  $A, B, C, D, E, F, G$  Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie"  $AG$  zur "Ziellinie"  $DE$  oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug  $P_0P_1P_2\dots P_n$  bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die  $P_0, P_1, \dots, P_n$  Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$  des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt  $P_k$  zu dem nächsten Punkt  $P_{k+1}$  verstanden. Die Spielregeln lauten:

- (1)  $P_0$  liegt auf  $AB$
- (2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke  $P_0P_1$ , wobei  $\overline{P_0P_1} = 1$  (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.
- (3) Wenn bereits ein "Zug"  $P_{k-1}P_k$  ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug"  $P_kP_{k+1}$  folgendermaßen:

- a) Man verlängert die Strecke  $P_{k-1}P_k$  über  $P_k$  hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der  $Q_k$  genannt sei.
- b) Man wählt entweder den Punkt  $Q_k$  oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt  $P_{k+1}$ .

Hinweis:  $P_{k+1}$  muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig  $Q_k$ .

Geben Sie für ein Spielfeld mit  $A(0;0), B(0;14), C(7;21), D(16;21), E(16;18), F(7;18), G(7;0)$  einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug  $P_0P_1P_2\dots P_9$  an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke  $P_8P_9$  erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte  $P_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ ) ohne Begründung.

#### Aufgabe 2 - 160912

Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w. Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

#### Aufgabe 3 - 160913

Es sei  $\triangle ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis  $AB$ , der Länge  $\overline{AB} = b$  und der Schenkellänge  $2b$ . Die Punkte  $D$  bzw.  $E$  seien die inneren Punkte von  $AC$  bzw.  $BC$ , in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser  $AB$  schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks  $ABED$ .

#### Aufgabe 4 - 160914

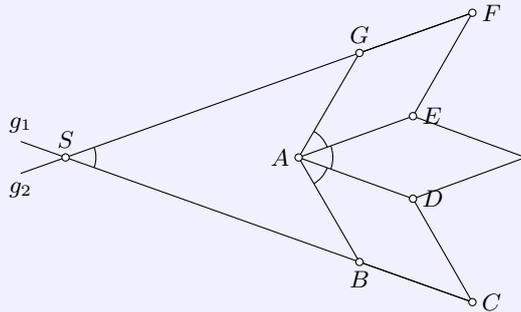
Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in $\text{cm}^2$	Volumen in $\text{cm}^3$
Würfel	$a$	$b$	$b$
Kugel	$c$	$d$	$d$
reguläres Tetraeder	$e$	$f$	$f$

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen  $a, c, e$ , die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

## 1.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 160921



Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel  $\angle BSG$  genau so groß ist wie jeder der Winkel  $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$ .

Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:

„Sind zwei Parallelogramme  $ABCD$  und  $AEFG$ , die genau den Punkt  $A$  gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel  $\angle BAD, \angle DAE$  und  $\angle EAG$  gleich groß und kleiner als  $120^\circ$  sind, dann hat auch der Winkel  $\angle BSG$ , den die Gerade  $g_1$  durch  $B$  und  $C$  mit der Geraden  $g_2$  durch  $F$  und  $G$  einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel.“

Beweisen Sie diesen Satz!

## Aufgabe 2 - 160922

Die Zahl  $\frac{20}{21}$  soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass

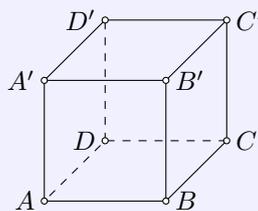
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

## Aufgabe 3 - 160923



Gegeben sei ein Würfel  $ABCA'B'C'D'$  (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge  $XYZTX$ , wobei  $X, Y, Z$  und  $T$  in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten  $AA', BB', CC'$  bzw.  $DD'$  seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte  $X, Y, Z, T$  so gibt, dass der Streckenzug  $XYZTX$  unter allen betrachteten Streckenzügen

a) minimale,

b) maximale

Gesamtlänge besitzt!

**Aufgabe 4 - 160924**

In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{rcccc}
 ab & X & ab & = & cad \\
 Y & & Y & & Z \\
 ae & X & ae & = & ffe \\
 \hline
 ff & Y & ff & = & gg
 \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben  $b, d, e$  die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für  $a, c, f, g$  die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben  $X, Y, Z$  ist die Menge der Operationszeichen "+", "-", "·" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

## 1.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 160931**

Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes  $n$ -Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um  $180^\circ$  um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt  $P$  gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl  $n$  die Summe  $s$  der Quadrate der Abstände des Punktes  $P$  zu allen Punkten des  $n$ -Ecks!

**Aufgabe 2 - 160932**

Man beweise folgenden Satz:

Sind  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen, für die  $ab = 1$  gilt, dann gilt

$$(a + 1) \cdot (b + 1) \geq 4 \quad (1)$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

**Aufgabe 3 - 160933**

Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

- (1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
  - (2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge  $a$  und drei die Länge  $a\sqrt{2}$ .
- a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
  - b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

**Aufgabe 4 - 160934**

Beweisen Sie, dass für keine Primzahl  $p \neq 3$  und für keine natürliche Zahl  $n \geq 1$  die Zahl  $(3n-1) \cdot p^2 + 1$  Primzahl ist!

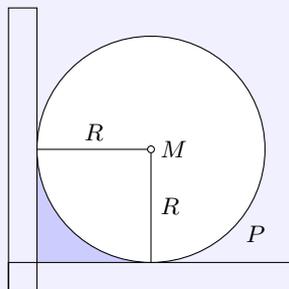
**Aufgabe 5 - 160935**

Es sei  $\triangle ABC$  ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks  $ABC$  in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.

Untersuchen Sie, ob es einen Punkt  $P$  gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

**Aufgabe 6 - 160936**

Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe  $P$  gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius  $R$  dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe  $P$  soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe  $P$  berührt.

- a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
- b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

## 1.19 XVII. Olympiade 1977

### 1.19.1 I. Runde 1977, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 170911

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen ( $\geq 1$ ) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

#### Aufgabe 2 - 170912

Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

*Hinweis:* Unter dem Abstand eines Punktes  $P$  im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke  $PQ$ , wobei  $Q$  folgendermaßen definiert ist: Man lege durch  $P$  einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis  $k$  mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  erscheint. Ist  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ , so sei  $Q$  der Schnittpunkt von  $k$  mit der Geraden durch  $M$  und  $P$ .

#### Aufgabe 3 - 170913

Herr  $A$  kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr  $B$ , ein Bekannter von Herrn  $A$ , hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn  $A$  einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr  $A$  denjenigen Teilbetrag für Herrn  $B$  mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr  $A$  für Herrn  $B$  damit ausgelegt?

#### Aufgabe 4 - 170914

Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen  $A, B, S, a, b$  in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

- (1)  $S$  wird ersetzt durch  $A$ .
- (2)  $A$  wird ersetzt durch  $aAB$ .
- (3)  $A$  wird ersetzt durch  $a$ .
- (4)  $B$  wird ersetzt durch  $b$ .

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen  $S$  ein.

- a) Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!
- b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?
- c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

## 1.19.2 II. Runde 1977, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 170921**

Für jede reelle Zahl  $m$  und jede reelle Zahl  $n$  wird durch  $y = f(x) = mx + n$  ( $x$  reell) eine Funktion  $f$  definiert, deren Graph eine Gerade  $g$  ist.

a) Es sei  $m = \frac{1}{2}$  und  $n$  beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf  $g$ , deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!

b) Es seien  $m$  und  $n$  beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf  $g$ , deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche  $m$  und  $n$  überhaupt ein solcher Punkt auf  $g$  existiert!)

**Aufgabe 2 - 170922**

Jens sagt zu Christa: "Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält."

Nach kurzem Besinnen sagt Christa: "Man kann sogar für jede natürliche Zahl  $n > 2$  die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau  $n$ -mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."

Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

**Aufgabe 3 - 170923**

Gegeben seien ein Kreis  $k$  und ein Durchmesser  $AB$  von  $k$ . Der Mittelpunkt von  $k$  sei  $M$ . Sind  $C$  und  $D$  so auf  $k$  gelegen, dass  $ABCD$  ein konvexes Viereck mit  $AB \parallel DC$  ist, so sei  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle CMB$  und  $\beta$  die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne  $DC$  mit der Tangente  $t$  an  $k$  in  $D$  einschließt.

Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen  $AB$  und  $CD$ , für die

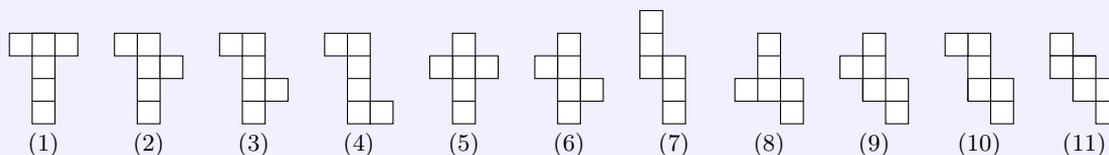
a)  $2\alpha = \beta$       und b)  $\alpha = \beta$       gilt.

**Aufgabe 4 - 170924**

Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze

a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d.h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!

b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



**1.19.3 III. Runde 1977, Klasse 9****Aufgabe 1 - 170931**

Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

**Aufgabe 2 - 170932**

Es sei  $ABCD$  ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen  $AB = 9$  cm,  $BC = 6$  cm,  $CD = 11$  cm,  $AD = 8$  cm hat und in dem der Innenwinkel bei  $B$  die Größe  $110^\circ$  hat.

Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von  $ABCD$  eindeutig bestimmt ist!

Von einem Rechteck  $EFGH$  werden nun folgende Eigenschaften gefordert:

- (1) Das Rechteck  $EFGH$  ist flächengleich dem Viereck  $ABCD$ .
- (2)  $A$  liegt auf der Rechteckseite  $EH$  zwischen  $E$  und  $H$ , und  $C$  liegt auf der Rechteckseite  $FG$ .
- (3) Die Rechteckseite  $EH$  steht auf  $AC$  senkrecht.

Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt  $E$  eines Rechtecks  $EFGH$  mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

**Aufgabe 3 - 170933**

In einem Dreieck  $ABC$  sei  $AC = b = 13$  cm und  $BC = a = 15$  cm. Das Lot von  $C$  auf die Gerade durch  $A$  und  $B$  sei  $CD$ , und es gelte  $CD = h_c = 12$  cm.

Ermitteln Sie für alle Dreiecke  $ABC$ , die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt  $I$ !

**Aufgabe 4 - 170934**

Für ein gleichschenkliges Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$  gelte  $BC = CD = DA = a$  sowie  $AB > a$ .

- a) Beweisen Sie, dass die Diagonale  $AC$  den Innenwinkel  $\angle DAB$  des Trapezes halbiert!
- b) Berechnen Sie die Länge von  $AB$  für den Fall, dass  $\angle DAB = 60^\circ$  gilt!

**Aufgabe 5 - 170935**

Beweisen Sie folgende Aussage!

Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

**Aufgabe 6 - 170936**

Für jedes  $i = 1, 2, 3$  seien  $x_i$  und  $y_i$  zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit  $d_i$  die größere der beiden Zahlen  $x_i$  und  $y_i$  bezeichnet.

a) Beweisen Sie:

Wenn  $x_1 \leq x_2 + x_3$  und  $y_1 \leq y_2 + y_3$  gilt, dann gilt  $d_1 \leq d_2 + d_3$ .

b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.

Wenn  $d_1 \leq d_2 + d_3$  gilt, dann gilt auch  $x_1 \leq x_2 + x_3$ .

## 1.20 XVIII. Olympiade 1978

### 1.20.1 I. Runde 1978, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 180911

Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von  $1 \text{ dm}^3$  Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

#### Aufgabe 2 - 180912

Es seien  $a$  und  $b$  rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

Vermindert man  $a$  um 10%, so erhält man 297.

Vergrößert man  $b$  um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von  $a$  beträgt dann  $b$ ? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

#### Aufgabe 3 - 180913

In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

#### Aufgabe 4 - 180914

Gegeben seien zwei Punkte  $A_0$  und  $A_1$ . Ihr Abstand voneinander werde mit  $a$  bezeichnet.

Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge  $3a$  unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

### 1.20.2 II. Runde 1978, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 180921

Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.

Der jüngste Sohn meint: "Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben."

Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Wer von beiden hat recht?

#### Aufgabe 2 - 180922

In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:

- (1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
- (2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
- (3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

#### Aufgabe 3 - 180923

Von einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $B$  und  $\angle BAC = 60^\circ$  ist die Länge  $r$  des Umkreisradius gegeben.

Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

#### Aufgabe 4 - 180924

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen  $z$ , die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:

- (1)  $z$  ist eine Primzahl.
- (2) Jede Ziffer von  $z$  stellt eine Primzahl dar.
- (3) Die Quersumme  $z'$  von  $z$  ist eine zweistellige Primzahl.
- (4) Die Quersumme  $z''$  von  $z'$  ist eine Primzahl.

### 1.20.3 III. Runde 1978, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 180931

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn  $a, b, c$  und  $d$  reelle Zahlen sind, für die  $ab - cd \neq 0$  gilt, dann gilt  $a^2 + b^2 > 0$  oder  $c^2 + d^2 > 0$ .

#### Aufgabe 2 - 180932

In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Man ermittle die größte natürliche Zahl  $n$ , für die die folgende Aussage wahr ist:

”Es gibt  $n$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.”

#### Aufgabe 3 - 180933

Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit  $V_1$  bezeichnet sei.

Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei  $V_2$  genannt.

Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei  $V_3$  genannt.

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_1 : V_2 : V_3$ !

#### Aufgabe 4 - 180934

In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$  teile die von  $C$  auf die Hypotenuse  $AB$  gefällte Höhe diese im Verhältnis 1 : 3.

Berechnen Sie die Größe der bei  $A$  bzw.  $B$  liegenden Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$ !

#### Aufgabe 5 - 180935

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl  $p$  der Rest, den  $p$  bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

#### Aufgabe 6 - 180936

Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  sowie zwei Punkte  $A_1$  und  $B_2$  im Innern dieses Dreiecks.

Bei der Verschiebung, die  $A$  in  $A_1$  überführt, habe  $\triangle ABC$  das Bilddreieck  $A_1B_1C_1$ .

Bei der Verschiebung, die  $B$  in  $B_2$  überführt, habe  $\triangle ABC$  das Bilddreieck  $A_2B_2C_2$ .

Der Durchschnitt der Dreiecksflächen  $(ABC)$  und  $(A_1B_1C_1)$  sei die Fläche  $F_1$ . Der Durchschnitt der Dreiecksflächen  $(ABC)$  und  $(A_2B_2C_2)$  sei die Fläche  $F_2$ .

Man beweise, dass  $F_1$  entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in  $F_2$  überführt werden kann.

Hinweis: Ist  $XYZ$  ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche  $(XYZ)$  die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks  $XYZ$ .

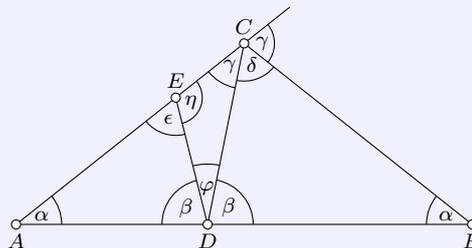
### 1.21 XIX. Olympiade 1979

#### 1.21.1 I. Runde 1979, Klasse 9

##### Aufgabe 1 - 190911

In der dargestellten Figur sei die Größe  $\delta$  des Winkels  $\angle DCB$  bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\delta$ !



##### Aufgabe 2 - 190912

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

	3	1	0	1	2	4	2		
3									<i>a</i>
3									<i>b</i>
1									<i>c</i>
2									<i>d</i>
2									<i>e</i>
0									<i>f</i>
2									<i>g</i>
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>		

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

##### Aufgabe 3 - 190913

Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist  $n$  die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen  $1, \dots, n$  zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

##### Aufgabe 4 - 190914

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$ .

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck  $ABC$  hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck  $ABC$  flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

## 1.21.2 II. Runde 1979, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 190921**

An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:

- (1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
- (2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
- (3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
- (4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

**Aufgabe 2 - 190922**

Die Zahlen in einem Zahlentripel  $(p, q, r)$  seien genau dann "Primzahltrillings" genannt, wenn jede der drei Zahlen  $p, q, r$  eine Primzahl ist und wenn  $p, q, r$  in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.

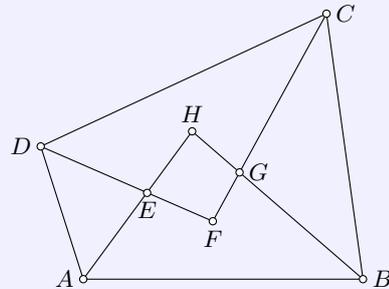
Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel  $(p, q, r)$  gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

**Aufgabe 3 - 190923**

Von einem konvexen Viereck  $ABCD$  werde folgendes vorausgesetzt:

Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte  $E, F, G, H$ , die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck  $EFGH$  die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel  $180^\circ$  beträgt!

**Aufgabe 4 - 190924**

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $x$ , für die folgendes gilt!

- (1)  $x$  ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (2) Vergrößert man  $x$  um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (3) Vermindert man  $x$  um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

## 1.21.3 III. Runde 1979, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 190931**

Beim Lösen einer Gleichung der Form  $ax - 6 = bx - 4$  mit gegebenen natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  stellt Matthias fest:

- (1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl  $x$  als Lösung.
- (2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung  $x$  einsetzt.

Ermitteln Sie alle Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

**Aufgabe 2 - 190932**

Gegeben sei ein Rechteck  $ABCD$ , für das  $AB = a\sqrt{2}$  und  $BC = a$  gilt. Es sei  $F$  der Mittelpunkt der Seite  $CD$ .

Beweisen Sie, dass die Strecken  $AC$  und  $BF$  senkrecht zueinander verlaufen!

**Aufgabe 3 - 190933**

Von  $n$  Kartons ( $n$  eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:

Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls  $n \geq 2$  ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls  $n \geq 3$  ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls  $n \geq 4$  ist); ...; die ersten  $n - 1$  Kartons können nebeneinander in den  $n$ -ten gelegt werden.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige  $n$  Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).

(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.

(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

**Aufgabe 4 - 190934**

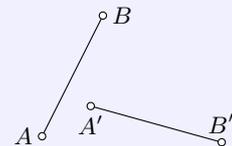
a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl  $n \geq 3$  im Zahlensystem mit der Basis  $n$  eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

**Aufgabe 5 - 190935**

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken  $AB$  und  $A'B'$  gegeben. Gesucht ist ein Punkt  $Z$  der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Drehung um  $Z$ , die  $A$  in  $A'$  und  $B$  in  $B'$  überführt.



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes  $Z$  (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt  $Z$  existiert!

**Aufgabe 6 - 190936**

Für geeignete natürliche Zahlen  $n$  gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit  $n$  Ecken und weniger als  $n$  Flächen. Zum Beispiel ist für  $n = 8$  ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.

Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl  $N$  die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl  $n \geq N$  einen ebenflächig begrenzten Körper mit  $n$  Ecken gibt, der von weniger als  $n$  ebenen Flächen begrenzt wird!

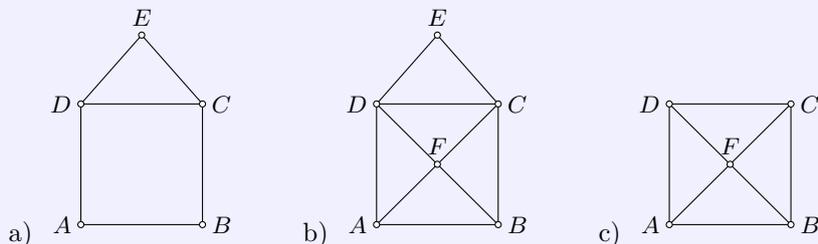
Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $N$  mit dieser Eigenschaft!

## 1.22 XX. Olympiade 1980

## 1.22.1 I. Runde 1980, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 200911**

Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



„In einem Zuge“ soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

**Aufgabe 2 - 200912**

Zwei Personen,  $A$  und  $B$ , spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl  $Z$  vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl  $Z$  zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl  $Z = 12$  lautete, ergab sich:

Die von  $A$  gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von  $B$  gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler  $A$  als auch der Spieler  $B$  einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

**Aufgabe 3 - 200913**

a) Kann der Bruch  $\frac{1711}{3421}$  durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  der Zähler und der Nenner des Bruches  $\frac{14n+1}{28n+5}$  zueinander teilerfremd sind!

*Hinweis:* Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

**Aufgabe 4 - 200914**

Gegeben seien ein Kreis  $k_1$  mit dem Mittelpunkt  $M_1$  und dem Radius  $r_1 = 4,5$  cm sowie ein Kreis  $k_2$  mit dem Mittelpunkt  $M_2$  und dem Radius  $r_2 = 2,5$  cm. Es sei  $\overline{M_1M_2} = 7$  cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise  $k_1$  und  $k_2$ ! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

### 1.22.2 II. Runde 1980, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 200921

Ermitteln Sie die größte Primzahl  $p$ , für die ein Tripel  $(a, b, c)$  von natürlichen Zahlen  $a, b$  und  $c$  so existiert, dass  $(a + p)(b + p)(c + p) = 1980$  gilt!

Ermitteln Sie zu dieser Primzahl  $p$  alle verschiedenen zugehörigen Tripel  $(a, b, c)$  mit der genannten Eigenschaft!

#### Aufgabe 2 - 200922

a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen  $x$ , die die Ungleichung  $\frac{x+3}{x-1} < 0$  erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!

b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen  $x$ , die diese Ungleichung erfüllen!

#### Aufgabe 3 - 200923

Von zwei Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  seien die Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  gegeben, wobei  $r_1 > r_2$  gelte.

Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in  $P$  und die andere gemeinsame Tangente in  $Q$ .

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus  $r_1$  und  $r_2$  die Länge  $PQ$ !

#### Aufgabe 4 - 200924

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n \geq 3$ , für die die folgende Aussage gilt!

”Jedes Prisma, das ein konvexes  $n$ -Eck als Grundfläche hat, hat genau  $20n$  Diagonalen.”

b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!

Hinweis: Ein  $n$ -Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  ist.

## 1.22.3 III. Runde 1980, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 200931**

In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad 5 \quad 5 \quad : \quad 5 \quad d \quad e \quad = \quad f \quad 5 \quad g \\
 h \quad i \quad 5 \\
 \hline
 j \quad k \quad m \quad n \\
 p \quad 5 \quad q \quad r \\
 \hline
 s \quad t \quad u \quad v \\
 w \quad x \quad y \quad z
 \end{array}$$

**Aufgabe 2 - 200932**

Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen, für die  $a > b > c > d$  sowie  $a + d = b + c$  vorausgesetzt wird. Beweisen Sie, dass dann stets  $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$  gilt!

**Aufgabe 3 - 200933**

Von einem Rechteck  $ABCD$  und einem Punkt  $P$  in seinem Innern wird  $PA = \sqrt{2}$  cm,  $PB = \sqrt{3}$  cm,  $PC = \sqrt{5}$  cm vorausgesetzt.

Beweisen Sie, dass die Länge  $PD$  durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

**Aufgabe 4 - 200934**

Ermitteln Sie alle Paare  $(a; b)$  natürlicher Zahlen  $a, b$  mit  $a > b$ , für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

- (1) Die Zahl  $a$  ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl  $b$  ebenfalls.
- (2) Vertauscht man die Ziffern von  $a$  miteinander, so erhält man  $b$ .
- (3) Subtrahiert man  $b^2$  von  $a^2$ , so erhält man eine Quadratzahl.

**Aufgabe 5 - 200935**

Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders  $ABCD$  so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge  $a$  des Tetraeders  $ABCD$  den Flächeninhalt  $I$  eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders  $ABCD$  versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  und  $BCD$  begrenzt wird, wobei  $AB = AC = AD = BC = BD = CD$  gilt.

**Aufgabe 6 - 200936**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $b = 7$  cm,  $\beta = 40^\circ$  und  $h_b = 5$  cm!

Dabei sollen  $b$  die Länge der Seite  $AC$ ,  $\beta$  die Größe des Winkels  $\angle CBA$  und  $h_b$  die Länge der von  $B$  ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck  $ABC$  gibt, das die geforderten Größen  $b$ ,  $\beta$  und  $h_b$  aufweist!

**1.23 XXI. Olympiade 1981****1.23.1 I. Runde 1981, Klasse 9****Aufgabe 1 - 210911**

Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ . Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

- (1) Das Endspiel wird lauten:  $B$  gegen  $C$ .
- (2) Das Endspiel wird nicht lauten:  $A$  gegen  $B$ .
- (3) Das Endspiel wird lauten:  $C$  gegen  $D$ .
- (4) Wenn  $A$  das Endspiel erreicht, dann erreicht  $B$  nicht das Endspiel.
- (5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften  $B$ ,  $C$ ,  $D$  bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

**Aufgabe 2 - 210912**

Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

**Aufgabe 3 - 210913**

Elsa behauptet:

"Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl  $n$  der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $∴$ . Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981."

Ist Elsas Behauptung wahr?

**Aufgabe 4 - 210914**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70^\circ$ ,  $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50^\circ$  und  $r = 5$  cm, wobei  $r$  der Radius des Umkreises des Dreiecks  $ABC$  ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck  $ABC$  bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

### 1.23.2 II. Runde 1981, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 210921

In der Divisionsaufgabe  $a : b = c$  sind  $a, b, c$ , so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.

Ermitteln Sie alle Tripel  $(a; b; c)$  natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

#### Aufgabe 2 - 210922

Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen  $a, b$  und  $c$  die Beziehung  $a < b < c$  gilt. Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

#### Aufgabe 3 - 210923

Beweisen Sie, dass reelle Zahlen  $x, y, z$  genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned}x + y + z &> 0, \\x \cdot y \cdot z &> 0, \\xy + xz + yz &> 0\end{aligned}$$

erfüllen, wenn  $x, y$  und  $z$  positiv sind!

#### Aufgabe 4 - 210924

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$ .

Konstruieren Sie eine Parallele zu  $BC$  so, dass sie die Dreieckseiten  $AB$  und  $AC$  in Punkten  $D$  bzw.  $E$  schneidet, für die  $ED = DB + EC$  gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck  $ABC$ ) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

**1.23.3 III. Runde 1981, Klasse 9****Aufgabe 1 - 210931**

Über eine natürliche Zahl  $x$  werden vier Paare von Aussagen gemacht:

- Paar A: (1)  $x$  ist eine zweistellige Zahl.  
 (2)  $x$  ist kleiner als 1000.
- Paar B: (1) Die zweite Ziffer der Zahl  $x$  ist eine 0.  
 (2) Die Quersumme der Zahl  $x$  ist 11.
- Paar C: (1)  $x$  wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.  
 (2)  $x$  ist durch 37 teilbar.
- Paar D: (1) Die Quersumme der Zahl  $x$  ist 27.  
 (2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von  $x$  dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen  $x$  mit  $x \neq 0$  gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!

Gibt es solche Zahlen  $x$ , so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

**Aufgabe 2 - 210932**

Ist  $ABCD$  ein Rechteck, für dessen Seitenlängen  $b = AD = 6$  cm und  $a = AB > b$  gilt, so seien  $E, G$  diejenigen Punkte auf  $CD$  und  $F, H$  diejenigen Punkte auf  $AB$ , für die  $AFED$  und  $HBCG$  Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge  $a$  gibt, für die  $EH \perp AC$  gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

**Aufgabe 3 - 210933**

Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

**Aufgabe 4 - 210934**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $\alpha = 50^\circ$ ,  $r = 4$  cm und  $h_a = 6$  cm!

Dabei bezeichne  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle BAC$ ,  $r$  den Umkreisradius und  $h_a$  die Länge der auf  $BC$  senkrechten Höhe des Dreiecks  $ABC$ .

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck  $ABC$  durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

**Aufgabe 5 - 210935**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

**Aufgabe 6 - 210936**

Bei einem Tetraeder  $ABCD$  seien die Kantenlängen  $AB = 10$  cm,  $BC = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $AD = 13$  cm,  $BD = 13$  cm geben, das Lot von  $D$  auf die Fläche des Dreiecks  $ABC$  sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante  $CD$  eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

## 1.24 XXII. Olympiade 1982

## 1.24.1 I. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220911**

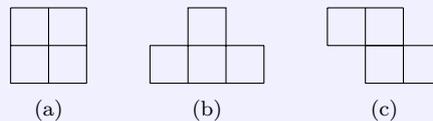
Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl  $z$ , deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von  $z$  setze, dann erhalte ich das Quadrat von  $z$ ."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl  $z$ , die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl  $z$  ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie  $z$  an!

**Aufgabe 2 - 220912**

Ist  $n$  eine natürliche Zahl mit  $n \geq 2$ , so bezeichne  $F_n$  eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in  $n$  gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den  $n^2$  Feldern von  $F_n$  kongruent ist.)

Die Fläche  $F_n$  soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von  $F_n$  mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über  $F_n$  hinausragen.

- Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden  $n$  und für alle  $n \leq 4$  nicht erfüllbar sind!
- Zeigen Sie, dass die Bedingungen für  $n = 6$  erfüllbar sind!
- Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen  $n \geq 8$  die Bedingungen erfüllbar sind!

**Aufgabe 3 - 220913**

- Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die der Term  $\frac{4x-4}{2x-3}$  definiert ist.
- Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen  $x$  alle diejenigen, für die  $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$  gilt!

**Aufgabe 4 - 220914**

In einer Ebene  $\varepsilon$  befinde sich ein  $n$ -Eck mit den Eckpunkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $S$ . Das Volumen der Pyramide sei  $V_P$ . Die Mittelpunkte der Kanten  $A_1S, A_2S, \dots, A_nS$  seien  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Ferner sei  $B_1$  ein beliebiger Punkt in der Ebene  $\varepsilon$ .

Die zu  $M_1B_1$  parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte  $M_2, M_3, \dots, M_n$  schneide  $\varepsilon$  in  $B_2, B_3, \dots, B_n$ . Der Körper  $K$  mit den Eckpunkten  $B_1, B_2, \dots, B_n, M_1, M_2, \dots, M_n$  habe das Volumen  $V_K$ .

- Beweisen Sie, dass alle Punkte  $M_1, M_2, \dots, M_n$  in einer gemeinsamen zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene liegen und  $K$  daher ein Prisma ist!
- Beweisen Sie, dass  $V_K$  durch  $V_P$  eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie  $V_K$  in Abhängigkeit von  $V_P$ !

## 1.24.2 II. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220921**

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$ , die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

- (1)  $n - 9$  ist eine Primzahl.
- (2)  $n^2 - 1$  ist durch 10 teilbar.

**Aufgabe 2 - 220922**

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn  $x, y$  und  $z$  von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2}$$

$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$

$$c = a^2 - (x^2 - y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und  $b$  ist ein Teiler von  $c$ .

**Aufgabe 3 - 220923**

Von einem Quadrat  $ABCD$  und vier Punkten  $P, Q, R, S$  wird folgendes vorausgesetzt:

- (1)  $P$  liegt auf der Strecke  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$ ,
- (2)  $Q$  liegt auf der Strecke  $BC$  zwischen  $B$  und  $C$ ,
- (3)  $R$  liegt auf der Strecke  $CD$  zwischen  $C$  und  $D$ ,
- (4)  $S$  liegt auf der Strecke  $DA$  zwischen  $D$  und  $A$ ,
- (5) es gilt  $PR \perp QS$ .

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen  $PR < QS$ ,  $PR = QS$ ,  $PR > QS$  gilt!

Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

**Aufgabe 4 - 220924**

5					
4					
3					
2					
1					
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$

Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ , zerlegt ist.

Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

## 1.24.3 III. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220931**

Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen  $z$ , die die Gleichung  $z = (a + b)^c$  erfüllen, wobei  $a, b$  und  $c$  in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von  $z$  sind.

**Aufgabe 2 - 220932**

Über zwei Kreise  $k_1, k_2$  und ihre Mittelpunkte  $M_1$  bzw.  $M_2$  wird vorausgesetzt, dass der Kreis  $k_2$  durch den Punkt  $M_1$  geht und den Kreis  $k_1$  in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von  $k_1$  mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt  $M_1$  hat und durch  $M_2$  geht,  $S$  genannt.

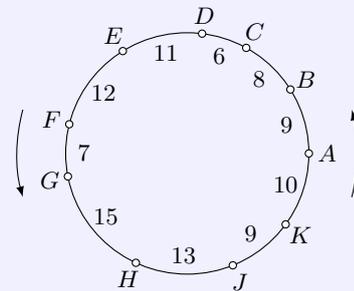
Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit diesen Kreisen hat, seien  $P_1$  und  $P_2$  genannt.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $P_2S$  auf  $M_1S$  senkrecht steht!

**Aufgabe 3 - 220933**

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$  und  $K$ . Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.

Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

**Aufgabe 4 - 220934**

Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Wer hat recht?

**Aufgabe 5 - 220935**

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien  $P$  und  $Q$ .

Beweisen Sie, dass für jeden Punkt  $S$  der Kugeloberfläche die Summe  $PS^2 + QS^2$  denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweis:

1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B.  $PS, PQ$  seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

**Aufgabe 6 - 220936**

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $AB = c$ ,  $AC = b$  und  $BC = a$  gegeben. Die Halbierenden der Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle ABC$  mögen einander in  $P$  schneiden. Durch  $P$  sei die Parallele zu  $AB$  gelegt. Sie schneide  $AC$  in  $Q$  und  $BC$  in  $R$ .

Ermitteln Sie die Länge  $QR$  in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

**1.25 XXIII. Olympiade 1983****1.25.1 I. Runde 1983, Klasse 9****Aufgabe 1 - 230911**

Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $5 \leq a \leq 10$  und  $5 \leq b \leq 10$  gibt es folgende "Fingerregel":

Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl  $a$  größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl  $b$ . Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis  $a \cdot b$ .

Beweisen Sie, dass diese "Fingerregel" für alle genannten  $a$  und  $b$  gilt!

**Aufgabe 2 - 230912**

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen  $x$  und  $y$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Zahl  $y$  entsteht aus  $x$  durch Vertauschen der beiden Ziffern.
- (2) Es gilt  $x + y = 121$ .

**Aufgabe 3 - 230913**

Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

- a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!
- b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder  $T_1, T_2, T_3$  verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als  $T'_1, T'_2, T'_3$  bezeichnen lassen, dass  $T_1 \cong T'_1$ ,  $T_2 \cong T'_2$  und  $T_3 \cong T'_3$  gilt.

**Aufgabe 4 - 230914**

Ein Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel DC$  und  $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$  soll durch eine zu  $AB$  parallele Strecke  $GH$  in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke  $GH$  gibt und dass ihre Länge  $\overline{GH} = s$  eindeutig durch  $a$  und  $c$  bestimmt ist! Ermitteln Sie  $s$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $c$ !

**1.25.2 II. Runde 1983, Klasse 9****Aufgabe 1 - 230921**

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen  $x$ , für die die Summe aus  $x$  und der durch Vertauschen der Ziffern von  $x$  entstehenden Zahl  $y$  eine Quadratzahl ist!

**Aufgabe 2 - 230922**

Von einem Trapez  $ABCD$  wird vorausgesetzt

- (1) Es gilt  $AB \parallel DC$ .
  - (2) Es gilt  $AB > DC$ .
  - (3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von  $110^\circ$ .
  - (4) Die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sind die Halbierenden der Winkel  $\angle DAB$  bzw.  $\angle ABC$ .
- Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

**Aufgabe 3 - 230923**

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \square \\
 + \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square
 \end{array}$$

In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.

Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

**Aufgabe 4 - 230924**

Beweisen Sie:

Ist  $p$  eine Primzahl, dann ist  $\sqrt{p}$  keine rationale Zahl.

## 1.25.3 III. Runde 1983, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 230931**

Man ermittle alle Tripel  $(x, y, z)$  natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

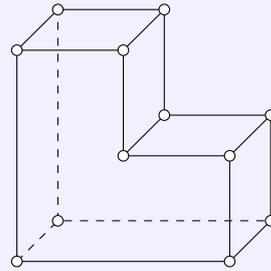
- (1)  $x, y$  und  $z$  sind Primzahlen.
- (2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von  $x, y$  und  $z$  (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
- (3) Es gilt  $x < y$ .
- (4) Es gilt  $x + y = z$ .

**Aufgabe 2 - 230932**

In der Abbildung ist ein Körper  $K$  skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengesetzt sind.

Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt  $K$  soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel  $W$  (Kantenlänge  $n$  Zentimeter) zusammengesetzt werden.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n > 0$ , für die das möglich ist!

**Aufgabe 3 - 230933**

$$\begin{array}{r} \square \quad \square \quad \square \\ + \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \quad \square \quad \square \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

**Aufgabe 4 - 230934**

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$-5 \leq \frac{4x - 3}{2x + 1} < 6$$

**Aufgabe 5 - 230935**

In einem Dreieck  $ABC$  schneide eine Parallele zu  $AB$ , über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite  $AC$  in einem Punkt  $A_1$  zwischen  $A$  und  $C$ , und sie schneide die Seite  $BC$  in  $B_1$ . Ferner sei  $P$  auf  $AB$  ein Punkt zwischen  $A$  und  $B$ , über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  sei  $F_0$ , der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_1B_1C$  sei  $F_1$ .

Ermitteln Sie den Flächeninhalt  $F$  des Vierecks  $A_1PB_1C$  in Abhängigkeit von  $F_0$  und  $F_1$ !

**Aufgabe 6 - 230936**

Drei Schüler  $X, Y, Z$  diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck  $D$  in drei flächengleiche Dreiecke  $D_1, D_2, D_3$  zu zerlegen.

$X$  behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.

$Y$  behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.

$Z$  behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Welcher der drei Schüler hat recht?

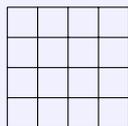
Hinweis: Zwei Zerlegungen von  $D$  (einmal in  $D_1, D_2, D_3$ , ein zweites Mal in  $D'_1, D'_2, D'_3$ ) werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen  $D'_1, D'_2, D'_3$  gibt, für die  $D_1 \cong D'_1, D_2 \cong D'_2, D_3 \cong D'_3$  gilt.

## 1.26 XXIV. Olympiade 1984

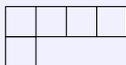
## 1.26.1 I. Runde 1984, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 240911

- a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!
- b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n > 0$ , für die eine solche Zerlegung eines  $n \times n$ -Feldes möglich ist!



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

## Aufgabe 2 - 240912

Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

## Aufgabe 3 - 240913

Es sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $A$ . Der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $BC$  sei  $D$ .

Beweisen Sie, dass dann stets  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$  gilt!

## Aufgabe 4 - 240914

Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und  $\frac{2}{x-10}$  für reelle Zahlen  $x \neq 10$  gilt. Sie stellen fest:

Für  $x = 11$  ist  $\frac{2}{x-10} = 2$ , also  $1 < \frac{2}{x-10}$ ;

für  $x = 12$  ist  $1 = \frac{2}{x-10}$ ;

für  $x = 13$  ist  $1 > \frac{2}{x-10}$ .

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung  $1 = \frac{2}{x-10}$  gilt genau für  $x = 12$ .

Norbert behauptet: Die Ungleichung  $1 < \frac{2}{x-10}$  gilt genau für alle  $x < 12$ .

Petra behauptet: Die Ungleichung  $1 > \frac{2}{x-10}$  gilt genau für alle  $x > 12$ .

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

**1.26.2 II. Runde 1984, Klasse 9****Aufgabe 1 - 240921**

Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.

Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

**Aufgabe 2 - 240922**

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen  $x$  mit  $x \neq 5$ , für die gilt:

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

**Aufgabe 3 - 240923**

Es sei  $ABCD$  ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte  $E$  und  $F$ , die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite  $BC$  zwischen  $B$  und  $C$  liegen, gelte  $BE = FC$  und  $BE : EF = 41 : 11$ .

Die Gerade durch  $A$  und  $E$  sei  $g$ , die Gerade durch  $D$  und  $F$  sei  $h$ , der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  sei  $S$ .

Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten  $A, B, C, D, E, F, S$ , die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck  $EFS$  gleichseitig ist!

**Aufgabe 4 - 240924**

Beweisen Sie: Sind  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen, wobei nur  $b \neq 0$  vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

**1.26.3 III. Runde 1984, Klasse 9****Aufgabe 1 - 240931**

Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl  $z$  mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

- (1) Die erste und die dritte Ziffer von  $z$  sind einander gleich.
- (2) Die zweite und die vierte Ziffer von  $z$  sind einander gleich.

**Aufgabe 2 - 240932**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis  $k$  um den Ursprung mit dem Radius  $\sqrt{2}$  und die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -x + 10$  gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu  $g$  parallelen Tangenten an  $k$ !

**Aufgabe 3 - 240933**

Es sei  $ABCD$  ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge  $a$ . Der Mittelpunkt der Kante  $AB$  sei  $M$ , der Mittelpunkt der Kante  $CD$  sei  $N$ .

- a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch  $M$  und  $N$  sowohl auf der Geraden  $g$  durch  $A$  und  $B$  als auch auf der Geraden  $h$  durch  $C$  und  $D$  senkrecht steht!
- b) Ermitteln Sie den Abstand  $MN$  zwischen  $M$  und  $N$ !
- c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt  $X$  auf  $g$  und jeden Punkt  $Y$  auf  $h$  der Abstand  $XY$  zwischen  $X$  und  $Y$  die Ungleichung  $XY \geq MN$  erfüllt!

**Aufgabe 4 - 240934**

Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl  $n^2 > 1$  als Summe von  $n$  natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.

Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen  $n^2 > 1$ , die jeweils als Summe von  $n$  natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."

Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen  $n^2 > 1$ , die sich als Summe von  $2n$  natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"

- a) Beweise Ankes Aussage!
- b) Beantworte Bernds Frage!

**Aufgabe 5 - 240935**

Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen  $a, b$  und die Hypotenusenlänge  $c$  jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung  $a^5 + b^5 < c^5$  gilt!

**Aufgabe 6 - 240936**

Es sei  $AB$  eine Strecke und  $P$  ein Punkt auf der Verlängerung von  $BA$  über  $A$  hinaus. Von  $P$  werden an alle diejenigen Kreise, die  $AB$  als Sehne haben, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um  $P$  gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

**1.27 XXV. Olympiade 1985****1.27.1 I. Runde 1985, Klasse 9****Aufgabe 1 - 250911**

Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die

- a) durch 2,
- b) durch 3,
- c) durch 4,
- d) durch 5,
- e) durch 6

teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

**Aufgabe 2 - 250912**

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare  $(a, b)$  einstelliger natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$ , für die

$$a < \overline{a,b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit  $\overline{a,b}$  sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer  $a$  vor dem Komma und die Ziffer  $b$  nach dem Komma hat.

**Aufgabe 3 - 250913**

Man beweise:

Für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $n \geq 6$  ist es möglich, eine Quadratfläche in  $n$  (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

**Aufgabe 4 - 250914**

Drei Kreise mit dem gegebenen Radius  $r$  mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von  $r$ !

*Hinweis:* Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

**1.27.2 II. Runde 1985, Klasse 9****Aufgabe 1 - 250921**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a, b, c)$  von natürlichen Zahlen  $a, b, c$ , für die  $a \leq b \leq c$  und  $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$  gilt!

**Aufgabe 2 - 250922**

Es sei  $ABCD$  ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks  $ABCD$  am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.

Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck  $STUV$  bilden.

Welches der beiden Vierecke  $ABCD$  bzw.  $STUV$  hat den größeren Flächeninhalt?

**Aufgabe 3 - 250923**

Es seien  $a, b, x$  und  $y$  positive reelle Zahlen, und es gelte  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ .  
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

**Aufgabe 4 - 250924**

Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen  $a$  und  $b$  gibt, für die  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$  gilt!

**1.27.3 III. Runde 1985, Klasse 9****Aufgabe 1 - 250931**

a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl  $N$  gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!

(1) Für jede natürliche Zahl  $n$  für die  $n \geq N$  ist, kann eine Quadratfläche  $F$  in genau  $n$  Teilquadrate  $T_1, \dots, T_n$  zerlegt werden.

(Dabei sollen die Flächen  $T_1, \dots, T_n$  die Fläche  $F$  vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $N$ , für die die Aussage (1) gilt!

**Aufgabe 2 - 250932**

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare  $(a, b)$  von zweistelligen Zahlen  $a$  und  $b$ , für die folgendes gilt:

Bildet man durch Hintereinanderschreiben von  $a$  und  $b$  in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl  $z$ , so ist  $z = (a + b)^2$ .

**Aufgabe 3 - 250933**

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei  $V_T$ , das Volumen seiner Umkugel sei  $V_K$ .

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_K : V_T$  und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu  $V_K : V_T$  nächstgelegene ganze Zahl)!

Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte  $\sqrt{3} \approx 1,7$  und  $\pi \approx 3,14$  verwendet werden.

**Aufgabe 4 - 250934**

Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.

(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

**Aufgabe 5 - 250935**

In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  sei  $A'$  der Fußpunkt der durch  $A$  gehenden Höhe,  $B'$  der Fußpunkt der durch  $B$  gehenden Höhe und  $S$  der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $AB : A'B' = AS : SB'$  gilt!

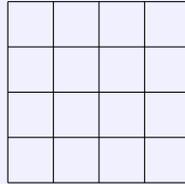
**Aufgabe 6 - 250936**

a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?

b) Wenn dies der Fall ist, ist  $z$  rational?

**1.28 XXVI. Olympiade 1986****1.28.1 I. Runde 1986, Klasse 9****Aufgabe 1 - 260911**

In dem abgebildeten Quadrat mit  $4 \times 4$  Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Aufgabe 2 - 260912**

Es seien  $a, b, s$  drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge  $s$  im Verhältnis  $a^2 : b^2$  teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:

- (1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  und  $\angle ACB = 90^\circ$
- (2) Von  $C$  fällt man das Lot auf  $AB$ , sein Fußpunkt sei  $D$ .
- (3) In  $B$  trägt man an  $BA$  einen Winkel an, dessen Größe zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von  $B$  aus die Strecke der Länge  $s$  abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei  $E$ .
- (4) Die Parallele zu  $EA$  durch  $D$  schneide  $BE$  in einen Punkt, der  $F$  genannt sei.

- a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
- b) Beweisen Sie:

Wenn eine Strecke  $BE$  und ein Punkt  $F$  nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt  $F$  die Strecke  $BE$  in Verhältnis  $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$ .

**Aufgabe 3 - 260913**

Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen  $(x, y, z)$ , für die

- (1)  $x \leq y \leq z$  und
- (2)  $xyz = 1986$  gilt!

*Hinweis:* Zwei Tripel  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  heißen genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen  $x_1 \neq x_2$ ;  $y_1 \neq y_2$ ;  $z_1 \neq z_2$  gilt.

**Aufgabe 4 - 260914**

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen  $n$  derart gibt, dass die Lösung  $x$  der Gleichung  $17x + n = 6x + 185$  ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl  $n$  und die zugehörige Lösung  $x$  der gegebenen Gleichung!

**1.28.2 II. Runde 1986, Klasse 9****Aufgabe 1 - 260921**

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2} \quad \text{eine natürliche Zahl ist!}$$

**Aufgabe 2 - 260922**

Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9, \quad b = 5x + 8, \quad c = 4x + 1$$

hatten, wobei  $x$  eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl  $x$  gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen  $a, b, c$  seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl  $x$ , für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

**Aufgabe 3 - 260923**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a; b; c)$  natürlicher Zahlen  $a, b, c$ , die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

- (1) Es gilt  $b < c$ .
- (2)  $b$  und  $c$  sind zueinander teilerfremd.
- (3)  $a$  ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.
- (4)  $b$  und  $c$  sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.
- (5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge  $A = \{4; 9; 12; a\}$  ist, ist in der Menge  $B = \{13; 16; 21; b; c\}$  enthalten.

**Aufgabe 4 - 260924**

Von einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$  wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite  $AB$ , die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ACB$  und die auf der Seite  $AB$  senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck  $ABC$  gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!

Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel  $\angle BAC$  und  $\angle ABC$ !

**1.28.3 III. Runde 1986, Klasse 9****Aufgabe 1 - 260931**

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen, für die die Gleichung  $2(a + b) = ab$  gilt!

**Aufgabe 2 - 260932**

In einer Ebene  $e$  sei ein Dreieck  $ABC$  fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  seien  $U$ ,  $V$  bzw.  $W$  in dieser Reihenfolge.

Weiter sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene  $e$ . Spiegelt man  $P$  sowohl an  $U$ ,  $V$  als auch an  $W$ , so erhält man die Bildpunkte  $P_U, P_V$  bzw.  $P_W$ .

(Unter dem Bildpunkt  $P_S$  von  $P$  bei der Spiegelung an einem Punkt  $S$  versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass  $S$  der Mittelpunkt der Strecke  $PP_S$  ist. Falls  $P = S$  ist, ist  $P_S = P$ .)

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $P_U P_V P_W$  unabhängig von der Lage des Punktes  $P$  ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks  $ABC$ !

**Aufgabe 3 - 260933**

Wenn eine reelle Zahl  $a$  gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl  $x$  eine Zahl  $y$ , nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$$

zugeordnet.

(A) Ermitteln Sie, wenn  $a = -3$  gegeben ist, zwei ganze Zahlen  $x$ , deren zugeordnete Zahlen  $y$  ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl  $a$ , für die die folgende Aussage (\*) gilt!

(\*) Wenn die Zahl  $a$  gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen  $x$ , deren jeweils zugeordnete Zahlen  $y$  ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl  $a$  noch eine andere reelle Zahl  $a$  gibt, für die die Aussage (\*) gilt!

**Aufgabe 4 - 260934**

Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn  $a$  und  $b$  zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die  $\frac{a}{b}$  ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  eine irrationale Zahl.

**Aufgabe 5 - 260935**

Von einem Viereck  $ABCD$  werde vorausgesetzt:

(1)  $ABCD$  ist ein Trapez mit  $AB \parallel CD$ .

(2) Es gilt  $AB > CD$ .

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel  $\angle BAD$  und  $\angle CBA$  beträgt  $90^\circ$ .

Der Mittelpunkt von  $AB$  sei  $M$ , der Mittelpunkt von  $CD$  sei  $N$ .

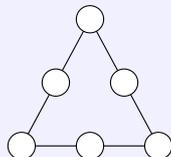
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $MN = \frac{1}{2} \cdot (AB - CD)$  gilt!

**Aufgabe 6 - 260936**

a) Ein regelmäßiges Tetraeder  $ABCD$  soll durch eine Ebene  $e$ , die durch den Punkt  $A$  geht, in zwei Tetraeder  $T_1, T_2$  zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage  $e$  in Bezug auf die drei Punkte  $B, C, D$  bei derartigen Zerlegungen haben muss!

b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen  $T_1$  volumengleich zu  $T_2$  wird!

**1.29 XXVII. Olympiade 1987****1.29.1 I. Runde 1987, Klasse 9****Aufgabe 1 - 270911**

In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

**Aufgabe 2 - 270912**

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

- Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine!
- Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

**Aufgabe 3 - 270913**

Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltafel; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

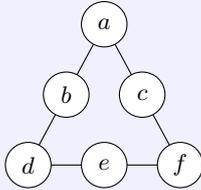
**Aufgabe 4 - 270914**

Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit  $a$ ,  $b$  bezeichnet, die Diagonalenlänge mit  $d$  und der Flächeninhalt mit  $A$ . Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt  $d = 2a - b$  genau dann, wenn  $A = \frac{3}{4}a^2$  gilt!

## 1.29.2 II. Runde 1987, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 270921



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für  $a, b, c, d, e, f$  die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

## Aufgabe 2 - 270922

Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.

In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

- Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!
- Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

## Aufgabe 3 - 270923

Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit  $a, b, c$  bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit  $d$  und der Oberflächeninhalt mit  $A$ .

Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt genau dann  $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$ , wenn  $A = 8 \cdot d^2$  gilt.

## Aufgabe 4 - 270924

Für je zwei natürliche Zahlen  $a, b$ , die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10 \quad (1) \quad ; \quad 3a + 8b \leq 25 \quad (2)$$

erfüllen, sei  $S = a + 2b$ .

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen  $S$ , die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von  $S$ !

## 1.29.3 III. Runde 1987, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 270931**

a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \dots + x_{1987}^{11} = 1988 \quad (1)$$

keine reelle Lösung  $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$  besitzt, in der alle Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{1987}$  natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen  $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{1987})$  genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x'_1, x_2 \neq x'_2, \dots, x_{1987} \neq x'_{1987}$$

**Aufgabe 2 - 270932**

(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn  $a, b, c, d$  reelle Zahlen sind, für die  $b \neq 0, b + c \neq 0$  und  $b + d \neq 0$  gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

**Aufgabe 3 - 270933**

Es sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck, dessen Seiten  $AB$  und  $CD$  so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von  $AB$  über  $B$  hinaus und die Verlängerung von  $DC$  über  $C$  hinaus in einem Punkt  $T$  schneiden.

Die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ATD$  sei  $h$ . Der Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sei  $S$ ; die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ASD$  sei  $g$ .

Beweisen Sie:

Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass  $g$  und  $h$  zueinander parallel sind.

Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass  $g$  und  $h$  in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

**Aufgabe 4 - 270934**

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.

Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl  $A$  aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl  $A$  müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

**Aufgabe 5 - 270935**

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt, für die  $2^{n+2} + 3^{2n+1}$  eine Primzahl ist!

**Aufgabe 6 - 270936**

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  eines Würfels  $ABCDEFGH$  bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche  $ABFE$  ohne Verzerrung in wahrer Größe  $A'B'F'E'$  erscheint.

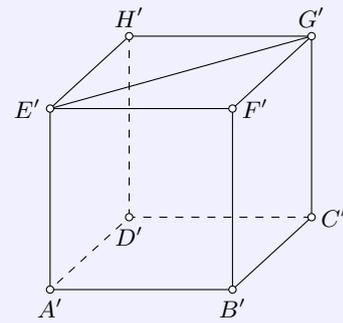
a) Beweisen Sie folgende Aussage:

Es gibt auf der Strecke  $EG$  genau einen Punkt  $P_0$  mit der Eigenschaft, dass die Summe  $CP_0 + P_0F$  kleiner ist als die Summe  $CP + PF$  für jeden anderen Punkt  $P$  auf  $EG$ .

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild  $P'_0$  dieses Punktes  $P_0$  bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!

Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!

Hinweis:  $CP_0, P_0F, CP, PF$  bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.



**1.30 XXVIII. Olympiade 1988****1.30.1 I. Runde 1988, Klasse 9****Aufgabe 1 - 280911**

In ein Quadrat mit  $4 \times 4$  Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

**Aufgabe 2 - 280912**

Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

**Aufgabe 3 - 280913**

Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck  $ABCD$  mit  $\overline{AB} > \overline{BC}$  die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen  $AC$  die Seite  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$  schneidet!

**Aufgabe 4 - 280914**

Drei Werkstücke  $W_1, W_2, W_3$  durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge  $M_1, M_2, M_3, M_4$  durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
$W_1$	4	1	2	1,5
$W_2$	2	2,5	1	0,5
$W_3$	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine  $M_1$  bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine  $M_4$ ) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

### 1.30.2 II. Runde 1988, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 280921

Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

#### Aufgabe 2 - 280922

In ein Quadrat mit  $4 \times 4$  Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe  $s$  ergibt ("Magisches Quadrat").

- Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in  $4 \times 4$  Feldern) derselbe Wert für  $s$  auftreten muss!
- Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von  $4 \times 4$  Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls  $s$  sein muss!

#### Aufgabe 3 - 280923

In einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet.

Die Winkelhalbierende von  $\angle BAC$  schneide die Seite  $BC$  in einem Punkt  $D$ . Dabei sei  $AD = b$ .

Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$ !

#### Aufgabe 4 - 280924

a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!

b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

**1.30.3 III. Runde 1988, Klasse 9**

**Aufgabe 1 - 280931**

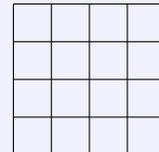
Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen  $a, b, c$  genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

**Aufgabe 2 - 280932**

In jedes der 16 Felder eines  $4 \times 4$ -Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.

Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.



**Aufgabe 3 - 280933**

Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide  $P = ABCDS$  mit quadratischer Grundfläche  $ABCD$  eine Ebene  $e$  so gibt, dass die Schnittfigur von  $P$  mit  $e$  ein gleichseitiges Dreieck ist!

Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide  $P$  eine solche Ebene  $e$ , so ist für eine Pyramide  $P$  diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene  $e$ , so ist anzugeben, wie eine Ebene  $e$  gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene  $e$  die geforderte Bedingung erfüllt.

**Aufgabe 4 - 280934**

Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen  $x$  und  $y$  stets die Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

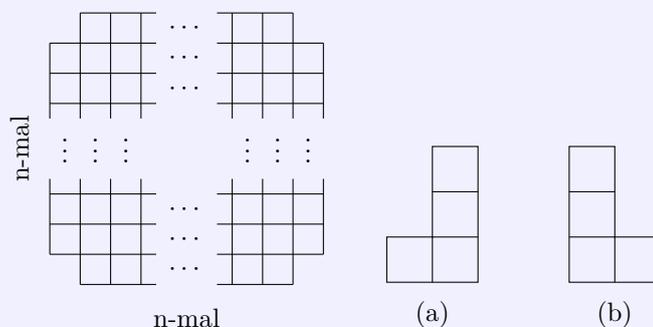
**Aufgabe 5 - 280935**

Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck  $ABCD$  gibt, in dem die Winkelhalbierende von  $\angle ACB$  durch den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  geht!

**Aufgabe 6 - 280936**

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen  $n \geq 3$ , für die es möglich ist, ein  $n \times n$ -Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.



**1.31 XXIX. Olympiade 1989****1.31.1 I. Runde 1989, Klasse 9****Aufgabe 1 - 290911**

Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziert die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibt hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von  $25^2$  führt die Regel wegen  $2 \cdot 3 = 6$  auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

**Aufgabe 2 - 290912**

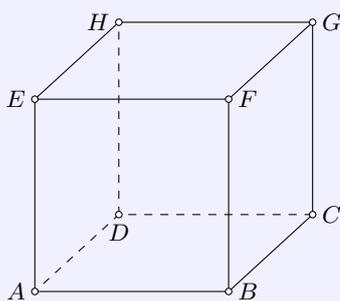
Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

**Aufgabe 3 - 290913**

Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.

a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, nummeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit  $k$  Kindern und einem Abzählvers aus  $s$  Silben lösen lässt.

**Aufgabe 4 - 290914**

Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen  $BHA$ ,  $BHC$ ,  $BHD$ ,  $BHE$ ,  $BHF$  und  $BHG$  (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.

(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

## 1.31.2 II. Runde 1989, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 290921**

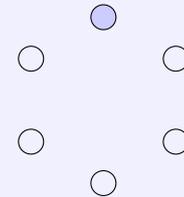
Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

**Aufgabe 2 - 290922**

Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl  $a \geq 1$  fest vorgegeben.

Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis  $a$ .

Der Stein, der dabei die Nummer  $a$  erhält, wird weggenommen.



Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer  $a$  erhält, weggenommen.

Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei  $a = 4$ . Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

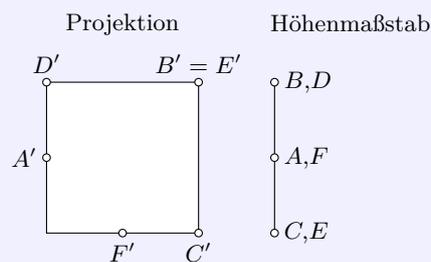
b) Jemand vermutet: "Wenn man  $a$  durch  $a + 6$  ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für  $a = 4$  nachprüfen!

c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl  $z$  gibt, mit der für jedes  $a \geq 1$  die folgende Aussage wahr ist: "Wenn man  $a$  durch  $a + z$  ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

**Aufgabe 3 - 290923**

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl  $n$ , für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von  $n$  als auch Teiler der Quersumme von  $n + 1$  ist.

**Aufgabe 4 - 290924**

Die Abbildung stellt sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F$  in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.

Die Punkte  $C', B', D'$  und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge  $a = 6$  cm.

Die Punkte  $A'$  und  $F'$  sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben  $A, F$  von  $B, D$  den Abstand 3 cm und  $C, E$  von  $B, D$  den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen  $\alpha = 45^\circ$ ,  $q = \frac{1}{2}$  sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte  $B, C, D, E$  gehören, und dazu die Punkte  $A$  und  $F$ !

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen  $ABC$  und  $DEF$  durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke  $XY$ , die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!

Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Eine Verdeckung durch davor liegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).

Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck  $ABC$  parallel zu  $CB$ , im Dreieck  $DEF$  in dichter Schraffur parallel zu  $DE$ !

c) Geben Sie für die Schnittstrecke  $XY$  eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von  $X$  und  $Y$ !

Beschreiben Sie diese Konstruktion!

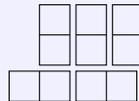
## 1.31.3 III. Runde 1989, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 290931**

Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken  $AB$  und  $AC$ , die einen Winkel  $\angle BAC$  der Größe  $7^\circ$  bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

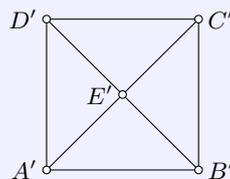
**Aufgabe 2 - 290932**

Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:

Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein  $\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}$  mit  $0 \leq x \leq y \leq 6$  genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

**Aufgabe 3 - 290933**

Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

- (1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte  $A, B, C, D, E$ .
- (2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte  $A', B', C', D', E'$  die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge  $a$ .  
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
- (3) Die durch  $A, B, C$  gehende Ebene  $\epsilon$  ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
- (4) Der Punkt  $D$  liegt "oberhalb" der Ebene  $\epsilon$  im Abstand  $\frac{a}{2}$  von ihr.
- (5) Der Punkt  $E$  liegt "oberhalb" der Ebene  $\epsilon$  im Abstand  $a$  von ihr.
- (6) Der Körper hat das Volumen  $\frac{1}{4}a^3$ .

Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

**Aufgabe 4 - 290934**

Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen  $a, b$  mit  $a < b$  eine rationale Zahl  $x$  und eine irrationale Zahl  $y$  gibt, für die  $a < x < y < b$  gilt!

**Aufgabe 5 - 290935**

a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion  $f$ , die für alle reellen Zahlen  $x$  die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2 - 1) \cdot f(x+1) \quad (1)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen  $x$  mit  $f(x) = 0$  gibt.

b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion  $f$  gibt, die für alle reellen Zahlen  $x$  die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl  $x$  den Funktionswert  $f(x) = 0$  hat!

**Aufgabe 6 - 290936**

Es seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  gelte  $r_1 > r_2$ .

Eine Gerade, die  $k_1$  und  $k_2$  in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei  $t$ . Die von  $t$  verschiedene und zu  $t$  parallele Tangente an  $k_1$  sei  $u$ .

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von  $r_1$  und  $r_2$  den Radius  $r_3$  desjenigen  $u$  berührenden Kreises  $k_3$ , der  $k_1$  und  $k_2$  von außen berührt!

**1.32 XXX. Olympiade 1990****1.32.1 I. Runde 1990, Klasse 9****Aufgabe 1 - 300911**

Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d.h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler *A* die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler *B* die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler *C* das Ziehen der Quadratwurzel (z.B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z.B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als "Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die "Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

**Aufgabe 2 - 300912**

Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

**Aufgabe 3 - 300913**

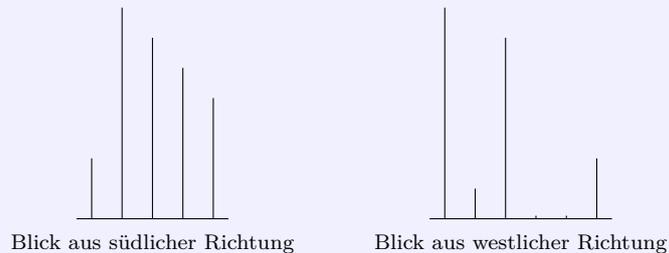
Beweisen Sie, dass in jedem Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$ , dessen Diagonalen  $AC$  und  $BD$  aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$

**Aufgabe 4 - 300914**

Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).

Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.



Bernd meint: Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen. Christoph korrigierte ihn: "Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren.

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

**1.32.2 II. Runde 1990, Klasse 9****Aufgabe 1 - 300921**

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x \neq 3$ , für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

**Aufgabe 2 - 300922**

Man untersuche, ob es ein Rechteck  $ABCD$  mit einander gegenüberliegenden Ecken  $A$  und  $C$  gibt, bei dem im Dreieck  $ABC$  die Winkelhalbierende des Innenwinkels  $\angle ACB$  die Seite  $AB$  in deren Mittelpunkt schneidet.

**Aufgabe 3 - 300923**

- Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z.B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
- Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
- Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

**Aufgabe 4 - 300924**

Für jede natürliche Zahl  $m \geq 2$  sei folgendes Vorhaben betrachtet:

Jemand möchte  $m$  verschiedene von einem Punkt  $P$  ausgehende Strahlen zeichnen.

Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die  $m$  Strahlen so zeichnen, dass sich dabei

- möglichst wenige,
- möglichst viele verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von  $m$  die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

### 1.32.3 III. Runde 1990, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 300931

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:

Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.

Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.

Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.

Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.

Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

#### Aufgabe 2 - 300932

Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

#### Aufgabe 3 - 300933

Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

#### Aufgabe 4 - 300934

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$  zwischen 100 und 400, für die die Summe  $s$  der Ziffern bei Darstellung von  $n$  im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe  $t$  der Ziffern ist, die bei der Darstellung von  $n$  im System mit der Basis 9 auftreten.

Hinweis:

Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ..., 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

#### Aufgabe 5 - 300935 = 321034

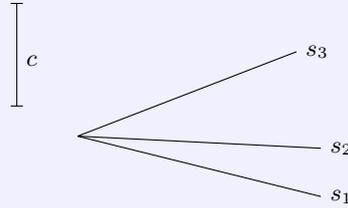
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(x, y, z)$  natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

**Aufgabe 6 - 300936**

Gegeben seien drei von einem Punkt  $S$  ausgehenden Strahlen  $s_1, s_2, s_3$ .

Dabei habe der von  $s_1$  und  $s_3$  gebildete Winkel  $\angle(s_1, s_3)$  eine beliebige Größe kleiner als  $60^\circ$ , und der Strahl  $s_2$  sei ein beliebiger von  $S$  aus in das Innere des Winkels  $\angle(s_1, s_3)$  hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge  $c$ .

- Wählen Sie derartige Vorgaben  $c, s_1, s_2, s_3$  (dabei  $s_2$  nicht als Winkelhalbierende von  $\angle(s_1, s_3)$ ) und konstruieren Sie dann drei von  $S$  verschiedene Punkte  $A$  auf  $s_1$ ,  $B$  auf  $s_2$  und  $C$  auf  $s_3$  so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  der Seitenlänge  $c$  sind!
- Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
- Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck  $ABC$  gleichseitig ist und dass seine Ecken  $A, B, C$  auf  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$  liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

**1.33 XXXI. Olympiade 1991****1.33.1 I. Runde 1991, Klasse 9****Aufgabe 1 - 310911**

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

- a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn man an die Ecken eines Tetraeders  $ABCD$  in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

- b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

**Aufgabe 2 - 310912**

Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & J & A & C & K & E \\
 + & & H & O & S & E \\
 \hline
 = & A & N & Z & U & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcccc}
 & M & A & N & N \\
 + & F & R & A & U \\
 \hline
 = & P & A & A & R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcccc}
 & & M & I & R \\
 + & E & M & I & R \\
 \hline
 = & R & E & I & M
 \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

**Aufgabe 3 - 310913**

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

**Aufgabe 4 - 310914**

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.

Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

## 1.33.2 II. Runde 1991, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 310921**

a) Geben Sie eine natürliche Zahl  $n$  an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von  $n$  als auch die Quersumme von  $n + 1$  durch 10 teilbar sind!

Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!

b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!

Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

**Aufgabe 2 - 310922**

Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte  $A$  und  $B$ .

Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt  $C$ , für den  $\angle ABC$  ein rechter Winkel ist!

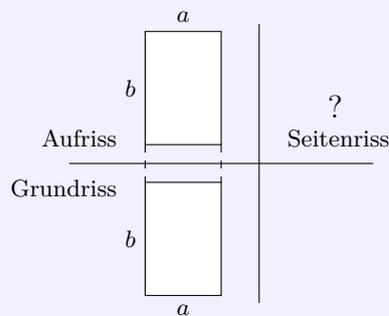
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Beweisen Sie: Wenn ein Punkt  $C$  nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist  $\angle ABC$  ein rechter Winkel!

Hinweis:

Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt  $M$  ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte  $P, Q$  ist (für die auch  $M = P$  oder  $M = Q$  sein darf), wobei die Punkte  $M, P, Q$  entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.

Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

**Aufgabe 3 - 310923**

Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.

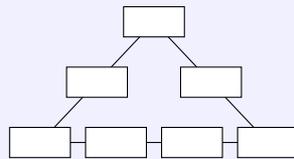
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen  $a, b$ ) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)

Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!

Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes  $P$  bezeichne man mit  $P'$ ,  $P''$  bzw.  $P'''$ ; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)

Geben Sie in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  die Volumina der drei dargestellten Körper an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Aufgabe 4 - 310924**

In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

**1.33.3 III. Runde 1991, Klasse 9****Aufgabe 1 - 310931**

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

**Aufgabe 2 - 310932**

In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies "durch" für den Strich! Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist  $\frac{5}{20} = 0,25$ .

Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

**Aufgabe 3 - 310933**

a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  und jedes Dreieck  $ABC$  ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in  $k^2$  einander kongruente, zu  $ABC$  ähnliche Dreiecke zu zerlegen.

b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  und jedes konvexe  $n$ -Eck  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ( $n > 3$ ) ist es möglich, die Fläche dieses  $n$ -Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl  $t$  von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich  $k^2$  einander kongruente, zu  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ähnliche  $n$ -Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der  $t$  Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!

Hinweis:

Eine Fläche  $F$  heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in  $F$  liegen, ganz in  $F$  liegt.

**Aufgabe 4 - 310934**

Es sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von  $BA$  über  $A$  hinaus liege ein Punkt  $D$ , auf der Verlängerung  $CB$  über  $B$  hinaus ein Punkt  $E$ , und auf der Verlängerung von  $AC$  über  $C$  hinaus liege ein Punkt  $F$ .

Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck  $DEF$  gleichseitig sei.

Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets  $AD = BE = CF$  folgt.

**Aufgabe 5 - 310935**

Man ermittle und zeichne in einem  $x, y$ -Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten  $(x; y)$  die Gleichung  $|x + y| + |x - y| = 4$  erfüllen.

**Aufgabe 6 - 310936**

Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$  von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:

Es soll  $A$  links von  $B$ ,  $A$  links von  $C$ ,  $A$  links von  $D$ ,  $E$  links von  $F$ ,  $E$  links von  $G$ ,  $E$  links von  $H$ ,  $E$  links von  $J$  stehen.

Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?

Hinweise:

In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.

Die Formulierung " $X$  links von  $Y$ " schließt nicht aus, dass zwischen  $X$  und  $Y$  noch andere der Buchstaben stehen.

## 1.34 XXXII. Olympiade 1992

### 1.34.1 I. Runde 1992, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 320911

Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe  $1 : 13$  erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: "Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z.B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen."

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

#### Aufgabe 2 - 320912

Drei natürliche Zahlen  $a, b, c$  mit  $0 < a \leq b < c$ , für die die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel  $a, b, c$  muss  $a \neq 1$  sein.

#### Aufgabe 3 - 320913

6						
5		■			■	
4						
3						
2		■			■	
1						
	a	b	c	d	e	f

Auf einem  $6 \times 6$ -Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, dass er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

- Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!
- Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, dass es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, daß es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

#### Aufgabe 4 - 320914

Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks  $ABC$  werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von  $ABC$  ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck  $ABC$  der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

*Hinweis:* Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks  $ABC$  noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks  $ABC$ .

### 1.34.2 II. Runde 1992, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 320921

Ein pythagoreisches Zahlentripel  $(a; b; c)$  besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen  $a, b, c$ , für die  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.

- Geben Sie drei verschiedene Tripel  $(a; b; c)$  mit  $a \leq b$  an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!
- Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit  $a = b$ ?

#### Aufgabe 2 - 320922

In der Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.

- Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?
- Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

#### Aufgabe 3 - 320923

Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.

Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?

Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

#### Aufgabe 4 - 320924

Auf einer Geraden  $g$  seien  $A, B, C$  drei Punkte;  $B$  liege zwischen  $A$  und  $C$ .

Über der Strecke  $AC$  sei nach einer Seite von  $g$  das gleichseitige Dreieck  $ACP$  errichtet, über die Strecken  $AB$  und  $BC$  nach der anderen Seite von  $g$  die gleichseitigen Dreiecke  $ABQ$  und  $BCR$ .

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen  $AB = a$  und  $BC = b$ ) die Mittelpunkte  $L, M$  bzw.  $N$  der Dreiecke  $ACP, ABQ$  und  $BCR$  stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

## 1.34.3 III. Runde 1992, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 320931**

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.

Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner  $A$ ,  $B$  und  $C$  dieses Landes gehört:

$A$  sagt zu  $B$ : "Wenn  $C$  ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."

$C$  sagt zu  $A$ : "Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?

Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann  $A$ ,  $B$  und  $C$ ?

**Aufgabe 2 - 320932**

Wieviele Paare  $(x, y)$  natürlicher Zahlen für die  $10x + y < 1993$  gilt, gibt es insgesamt?

**Aufgabe 3 - 320933**

Gegeben ist eine Gerade  $g$  und auf ihr drei Punkte  $A, B, C$ , in dieser Reihenfolge angeordnet.

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen  $a = AB$ ,  $b = BC$  den Radius eines Kreises  $k$ , der durch  $A$  und  $B$  geht und eine durch  $C$  gehende Tangente besitzt, die auf  $g$  senkrecht steht!

b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis  $c$  um  $C$  gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von  $C$  an alle diejenigen Kreise  $k$  gelegt werden, die durch  $A$  und  $B$  gehen!

**Aufgabe 4 - 320934**

Ist  $p$  eine Primzahl, so sei  $M_p$  die Menge aller derjenigen Zahlen  $z$ , die sich mit positiven ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  in der Gestalt  $z = x^2 + p \cdot y^2$  darstellen lassen.

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl  $p$  die folgende Aussage (\*) gilt!

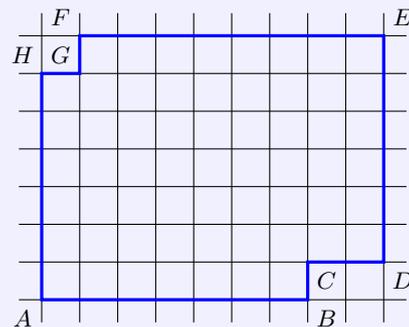
Wenn eine Zahl  $z$  der Menge  $M_p$  angehört, dann gehört auch die Zahl  $z^2$  der Menge  $M_p$  an. (\*)

**Aufgabe 5 - 320935**

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck  $ABCDEFGH$  wie in der Abbildung gezeichnet.

Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei  $A$  mit  $E$  zur Deckung kommt.

Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.



Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

**Aufgabe 6 - 320936**

a) Geben Sie drei ganze Zahlen  $x, y$  und  $z$  an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \quad (1)$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel  $(x, y, z)$  ganzer Zahlen  $x, y, z$ , die die Gleichung (1) erfüllen!

**1.35 XXXIII. Olympiade 1993****1.35.1 I. Runde 1993, Klasse 9**

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

**Aufgabe 1 - 330911 = 331011**

Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

**Aufgabe 2 - 330912 = 331012**

Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

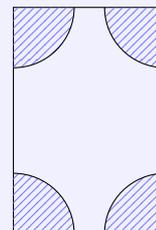
**Aufgabe 3 - 330913 = 331013**

Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen  $t$  ist  $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$  eine rationale Zahl, für welche nicht?

**Aufgabe 4 - 330914 = 331014**

Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen  $a$ ,  $b$  sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius  $r$  haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

- Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , zu denen es Längen  $a$ ,  $b$ ,  $r$  der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau  $x$  Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!
- Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte  $k = \frac{b}{a} \geq 1$ , für die es möglich ist, einen Radius  $r$  der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

**Aufgabe 5 - 330915 = 331015**

Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszyinders mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$  seien  $A$  und  $B$  die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege  $A$  außerhalb und  $B$  innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von  $A$  nach  $B$

- nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,
- auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von  $A$  nach  $B$  gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses  $h : r$ , für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

**Aufgabe 6 - 330916 = 331016**

Bekanntlich gilt  $2^{10} = 1024$ .

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent  $p > 10$  ermitteln kann, für den die Zahl  $2^p$  ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

*Hinweis:* Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

**1.35.2 II. Runde 1993, Klasse 9****Aufgabe 1 - 330921**

Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.

Wie heißt die dreistellige Zahl?

**Aufgabe 2 - 330922**

Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke  $A$  und  $B$  eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk  $A$  mahlen würde und anschließend nur mit  $B$ , so würde  $B$  noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist. Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit  $A$  gemahlen und anschließend nur mit  $B$ , so würde  $B$  noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn  $A$  und  $B$  von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

**Aufgabe 3 - 330923**

$$\begin{array}{rcccccc} & & & M & O & R & D \\ + & & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I & \end{array}$$

Das "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für  $M$ ,  $R$  und  $K$ ) nicht die Ziffer Null auftreten darf.

Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:

1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens  $O$  mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe  $O$  darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

**Aufgabe 4 - 330924**

Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck  $ABC$  die folgende Aussage gilt! Ist  $X$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $BC$  mit der Winkelhalbierenden durch  $A$  und ist  $Y$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $AC$  mit der Winkelhalbierenden durch  $B$ , so liegen die vier Punkte  $A, B, X, Y$  auf einem gemeinsamen Kreis.

**1.35.3 III. Runde 1993, Klasse 9****Aufgabe 1 - 330931**

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

**Aufgabe 2 - 330932**

Für jede positive ganze Zahl  $n$  denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl  $n'$  gebildet: Aus der Zifferndarstellung von  $n$  im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.

Dann sei  $n'$  die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen  $n$  gibt, für die  $n' = n : 7$  gilt!

**Aufgabe 3 - 330933 = 331033**

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge  $s$  gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  mit der Seitenlänge  $s$ . Dann konstruiere man den Mittelpunkt  $D$  von  $AB$  und verlängere die Strecke  $DC$  über  $C$  hinaus.

Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge  $\frac{s}{6}$  ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit  $M_7, M_8, M_9, \dots$  bezeichnet.

Für  $n > 6$  ist dann jeweils der durch  $A$  und  $B$  gehende Kreis um  $M_n$  näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen  $n$ -Ecks der Seitenlänge  $s$ .

Beate behauptet, speziell für  $n = 12$  gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.

Beweisen Sie diese Behauptung!

**Aufgabe 4 - 330934**

$$\begin{array}{rcccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline = & F & Ü & N & F \end{array}$$

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für  $Z$ ,  $D$  und  $F$ ) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:

Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

**Aufgabe 5 - 330935**

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen  $n$  mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen  $n + 1$ ,  $n + 10$  und  $n + 55$  einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

**Aufgabe 6 - 330936**

Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck  $ABCD$  die folgende Aussage gilt:

Sind  $M_1, M_2, M_3, M_4$  die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CD, DA$  und  $M_5, M_6$  die Mittelpunkte der Diagonalen  $AC, BD$  so gehen die drei Strecken  $M_1M_3, M_2M_4$  und  $M_5M_6$  durch einen gemeinsamen Punkt.

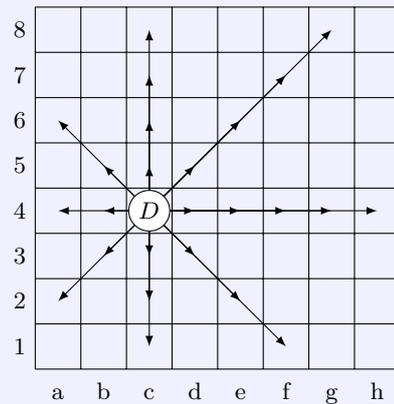
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  sind.

## 1.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 330941 = 331041**

Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)

Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:



(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

**Aufgabe 2 - 330942**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a, b, c)$  positiver ganzer Zahlen  $a, b, c$  von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen  $a + b \geq 101$ ,  $a + c \leq 101$ ,  $a + b + c \geq 201$  gelten!

**Aufgabe 3 - 330943 = 331043**

Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge  $a$  des Achtecks und der Seitenlänge  $b$  des Quadrats die Ungleichung  $b \geq \frac{4}{3}a$  gilt.

Dann bezeichne  $f$  den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.

Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen,  $f$  denselben Wert hat.

**Aufgabe 4 - 330944**

Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch \* angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von  $22!$  entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl  $n$  wird  $n!$  definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis  $n$ .

**Aufgabe 5 - 330945 = 331045**

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

- a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?  
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!
- b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?  
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
- c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

**Aufgabe 6 - 330946**

Ist  $P$  ein Punkt im Innern eines Dreiecks  $ABC$ , so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch  $P$  zu  $CB$  schneidet  $AB$  in  $S_1$ , die Parallele durch  $S_1$  zu  $AC$  schneidet  $BC$  in  $S_2$ , die Parallele durch  $S_2$  zu  $BA$  schneidet  $CA$  in  $S_3$ . In dieser Weise kann man für  $k = 1, 2, 3, \dots$  fortsetzen:

Die Parallele durch  $S_{3k}$  zu  $CB$  schneidet  $AB$  in  $S_{3k+1}$ , die Parallele durch  $S_{3k+1}$  zu  $AC$  schneidet  $BC$  in  $S_{3k+2}$ , die Parallele durch  $S_{3k+2}$  zu  $BA$  schneidet  $CA$  in  $S_{3k+3}$ .

Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck  $ABC$  und jeden Punkt  $P$  im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch  $P$  gehen muss!

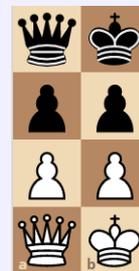
**1.36 XXXIV. Olympiade 1994****1.36.1 I. Runde 1994, Klasse 9**

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

**Aufgabe 1 - 340911 = 341011**

Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:

- Das Spielfeld hat  $2 \times 4$  Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)



Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass

- a) das Spiel unentschieden endet,
- b) Weiß gewinnt,
- c) Schwarz gewinnt.

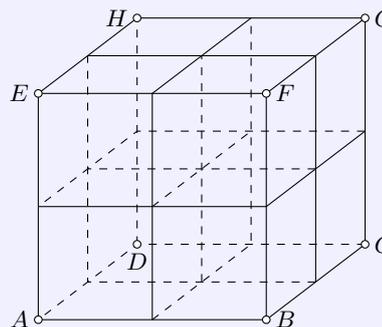
Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

**Aufgabe 2 - 340912 = 341012**

Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels  $ABCDEFGH$  in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.

Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von  $A$  nach  $G$  gelangen. Wie viele verschiedene Wege gibt es hierfür insgesamt,

- a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.
- b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels  $ABCDEFGH$  angehören?

**Aufgabe 3 - 340913 = 341013**

Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein*.

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

**Aufgabe 4 - 340914 = 341014**

Arne zeichnet ein Dreieck  $ABC$  und einen Kreis  $k_1$ , der so gewählt ist, dass er durch  $B$  geht, die Strecke  $AB$  in einem von  $B$  verschiedenen Punkt  $X$  schneidet und dass er die Strecke  $BC$  in einem von  $B$  verschiedenen Punkt  $Y$  schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis  $k_2$  des Dreiecks  $ACX$  und den Umkreis  $k_3$  des Dreiecks  $ACY$ .

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Kreise  $k_1, k_2, k_3$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck  $ABC$  gibt es für den Kreis  $k_1$  unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für  $k_1$  auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

**Aufgabe 5 - 340915 = 341015**

Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten  $x$  so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen  $x$  definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

**Aufgabe 6 - 340916 = 341016**

Es seien Funktionen  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  für alle reellen Zahlen  $x$  definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x| - 2|, \\ f_2(x) &= |||x| - 2| - 2|, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein:  $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$  für alle ganzen Zahlen  $k \geq 1$ .

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $f_0, f_1$  und  $f_2$ ! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion  $f_k$ !

**1.36.2 II. Runde 1994, Klasse 9****Aufgabe 1 - 340921**

Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.

Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.

Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

**Aufgabe 2 - 340922**

Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{rcccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.

Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden.

Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.

Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

**Aufgabe 3 - 340923**

Ausgehend von einem Quadrat  $ABCD$  kann man für je zwei positive ganze Zahlen  $x$  und  $y$  die folgenden Konstruktionen ausführen:

Die Seite  $AB$  wird über  $B$  hinaus um die Länge  $x \cdot AB$  bis zum Punkt  $S$  verlängert,

die Seite  $BC$  wird über  $C$  hinaus um die Länge  $y \cdot BC$  bis zum Punkt  $T$  verlängert,

die Seite  $CD$  wird über  $D$  hinaus um die Länge  $x \cdot CD$  bis zum Punkt  $U$  verlängert,

die Seite  $DA$  wird über  $A$  hinaus um die Länge  $y \cdot DA$  bis zum Punkt  $V$  verlängert.

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare  $(x; y)$  positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck  $STUV$  einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat  $ABCD$  hat!

**Aufgabe 4 - 340924**

Über der Seite  $AB$  des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  mit gegebener Seitenlänge  $a$  werde nach außen das Quadrat  $ABPQ$  errichtet.

Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck  $ABC$  herum "rollen, ohne zu gleiten".

(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt  $B$  fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke  $BP$  in die Lage von  $BC$  kommt; dann bleibt  $C$  fest u.s.w.).

a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit  $AB$  zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang  $AB$  war).

Wie lang ist dabei der Weg, den

- der Punkt  $A$ ,

- der Mittelpunkt  $M$  des Quadrates  $ABCD$ ,

- der Mittelpunkt  $H$  der Seite  $AB$  des Quadrates

zurücklegt?

b) Ausgehend von dem Anfangszustand  $ABPQ$  wurde nicht nur eine in a) beschriebene "volle Umrundung des Dreiecks  $ABC$ " durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.

Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte  $A, B, P, Q$  seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.

- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks  $ABC$  fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?

- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seinen eigenen Mittelpunkt  $M$  wurden dabei insgesamt ausgeführt?

## 1.36.3 III. Runde 1994, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 340931**

Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte  $A, B, C$  so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke  $AB$  eine andere Länge hat als die Strecke  $BC$ .

Dann versucht er, einen Punkt  $X$  zu konstruieren, der weder auf der durch  $A$  und  $B$  gelegten Geraden  $g$  noch auf der durch  $B$  und  $C$  gelegten Geraden  $h$  liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Der Punkt  $X$  hat von  $g$  den gleichen Abstand wie von  $h$ .

(2) Die Strecken  $AB$  und  $BC$  erscheinen von  $X$  aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel  $\angle AXB$  ist ebenso groß wie der Winkel  $\angle BXC$ .

Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt  $X$ ; gleichgültig welche Wahl von  $A, B, C$  (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.

Hat Christa recht?

**Aufgabe 2 - 340932 = 341031**

Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl  $n$  gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl  $9^n + 1$  auf mehr als eine Null enden würde!

**Aufgabe 3 - 340933 = 341032**

Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

**Aufgabe 4 - 340934 = 341034**

Ein Quadrat  $ABCD$  sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.

Ist  $n$  eine positive ganze Zahl mit  $n \leq 25$ , so seien  $n$  verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.

Von diesen  $n \cdot 25$  Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat  $ABCD$  gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.

Eine Zahl  $n$  werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:

Bei jeder Auswahl von 25 der  $n \cdot 25$  Blättchen, bei der jede der  $n$  Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat  $ABCD$  als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $C$  ist.

Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen  $n \leq 25$  alle "freundlichen" Zahlen!

**Aufgabe 5 - 340935**

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen  $n$ , für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n + 2, \quad n + 6, \quad n + 8, \quad n + 12, \quad n + 14$$

eine Primzahl ist.

**Aufgabe 6 - 340936**

Es sei  $ABCD$  ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  und  $BCD$  alle einander kongruent sind.

Ferner sei  $h$  die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und  $P$  sei ein Punkt im Innern des Tetraeders  $ABCD$ .

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:

Die Summe der Abstände von  $P$  zu den vier Tetraederflächen beträgt  $h$ .

Hinweis:

Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt. In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

**1.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 9****Aufgabe 1 - 340941 = 340841**

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.

Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

**Aufgabe 2 - 340942 = 341041**

Zeigen Sie, dass die Zahl  $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + \dots + 7^{93} + 7^{95}$  durch 336 teilbar ist!

**Aufgabe 3 - 340943 = 341042**

Auf der Seite  $AB$  des Quadrates  $ABCD$  werde ein Punkt  $X \neq A$  gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken  $AC$  und  $XD$  in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von  $X$  so zu treffen, dass es natürliche Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis  $1 : p : q : r$  stehen!

**Aufgabe 4 - 340944 = 340844**

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte		7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert		7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.

Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.

Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.

2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

**Aufgabe 5 - 340945 = 341045**

Einem regelmäßigen Tetraeder  $ABCD$  wird die Inkugel  $K$  einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$  berührt).

Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder  $PQRS$  einbeschrieben (d.h., seine Ecken  $P, Q, R, S$  liegen alle auf der Oberfläche der Kugel  $K$ ).

Welches Verhältnis  $V_2 : V_1$  bildet das Volumen  $V_2$  eines solchen Tetraeders  $PQRS$  mit dem Volumen  $V_1$  von  $ABCD$ ?

**Aufgabe 6 - 340946 = 340846**

Wie viele Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen  $x, y$ , die die Ungleichung  $|x - 30| + |y - 10| < 100$  erfüllen, gibt es insgesamt?

## 2 Lösungen 9

### 2.1 Vorolympiade 1960

#### 2.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

##### Aufgabe 1 - V00901

Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

$x$  und  $y$  seien die zwei gesuchten Zahlen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 20 \quad (1) \quad ; \quad x^2 + y^2 = 202 \quad (2)$$

Umstellen von (1) nach  $y$  und Einsetzen in (2) ergibt

$$x^2 + (20 - x)^2 = 202 \Rightarrow 2x^2 - 40x + 198 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 99 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung  $x_1 = 9$  und  $x_2 = 11$  mit  $y_1 = 11$  und  $y_2 = 9$ .

Die gesuchten Zahlen sind 9 und 11. Sie erfüllen die Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt.

##### Aufgabe 2 - V00902

Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung mit den Parametern  $p$  und  $q$ :

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q \\ 0 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

##### Aufgabe 3 - V00903

Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):

Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.

Wie tief war der Teich?

$x$  sei die Länge der Lotosblume. Dann gilt  $x^2 = (x - 4)^2 + 16^2$  mit  $x = 34$ . Da die Lotosblume 4 m aus dem Teich hervorragt, ist der Teich 30 m tief.

##### Aufgabe 4 - V00904

Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!

Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{rcccccccccc} 270 = & 1 \cdot 2^8 & +0 \cdot 2^7 & +0 \cdot 2^6 & +0 \cdot 2^5 & +0 \cdot 2^4 & +1 \cdot 2^3 & +1 \cdot 2^2 & +1 \cdot 2^1 & +0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & L & 0 & 0 & 0 & 0 & L & L & L & 0 \end{array}$$

Lösung:  $413 = [110011101]_2$

#### Aufgabe 5 - V00905

An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.  
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Es sei  $x$  der Werte Stromstärke  $I$  und  $y$  der Wert des Widerstandes. Dann wird mit der Gleichung zum Ohmschen Gesetz  $U = R \cdot I$

$$xy = 120 \quad (\text{I})$$

$$(y + 10)(x - 1) = 120 \quad (\text{II})$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung  $x = 4$  und  $y = 30$ , d.h. die Stromstärke beträgt 4 Ampere und der Widerstand 30 Ohm.

#### Aufgabe 6 - V00906

Wie tief taucht ein Würfel ( $a = 30$  mm) aus Eisen ( $\gamma_{\text{Fe}} = 7,5 \text{ p}\cdot\text{cm}^{-3}$ ) in Quecksilber ( $\gamma_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ p}\cdot\text{cm}^{-3}$ ) ein?

Es gilt für die Eintauchtiefe  $h$  des Körpers

$$\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$$

Einsetzen der Werte ergibt  $h_{\text{Eintauchtiefe}} \approx 16,54$ , d.h. der Würfel taucht etwa 165 mm ein.

#### Aufgabe 7 - V00907

Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

Die gesuchte Zahl  $z$  sei  $z = 10a + b$ . Dann wird für die Ziffern  $a$  und  $b$

$$a + b = 12 \quad (\text{I})$$

$$(10a + b) - (10b + a) = 54 \quad (\text{II})$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung  $a = 9$  und  $b = 3$ . Da  $93 - 39 = 54$  die Probe besteht, ist 93 die gesuchte Zahl.

#### Aufgabe 8 - V00908

Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Die Gleichung wird, da  $c > 0$  sein muss, zu

$$(10a + c) \cdot a \cdot c = 100c + 10c + c$$

$$(10a + c) \cdot a = 111 = 3 \cdot 37$$

Da  $a < 10$  ist, muss somit  $a = 3$  sein. Damit ergibt sich  $c = 7$ . Es ergibt sich somit  $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$ .

#### Aufgabe 9 - V00909

Wie viel verschiedene Würfe lassen sich mit

- a) zwei Würfeln,
- b) drei Würfeln

machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?

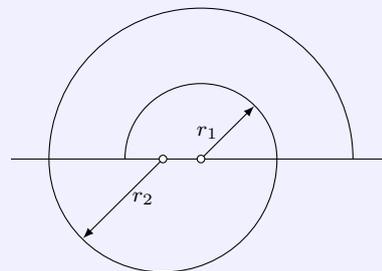
Wie wurde die Lösung gefunden?

Zeigt der 1. Würfel eine "1", so kann der zweite 6 Werte anzeigen, zeigt der 1. Würfel eine "2" verbleiben für den zweiten noch 5 Werte, usw. Damit gibt es bei 2 Würfeln genau 21 verschiedene Würfe. Bei drei Würfeln ergeben sich analog 56 verschiedene Würfe.

### Aufgabe 10 - V00910

Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.

- a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn  $r_1 = 1$  cm,  $r_2 = 1,5$  cm usw. ist?  
 b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?



a) Es wird  $r_{10} = 1 + 9 \cdot 0,5 = 5,5$ . Der 10. Radius ist 5,5 cm groß.

b)  $(r_1 + r_2 + \dots + r_{10}) \cdot \pi \approx 102,1$  cm.

### Aufgabe 11 - V00911

Einer Kugel mit dem Radius  $r_u = 1$  ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante  $a$ ? Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius  $r_i$ ?

Die Kugel ist für den Würfel die sogenannte Umkugel, bei der die Würfelpunkte auf der Kugel liegen. Damit ist der Radius  $r_u$  gleich der halben Länge der Raumdiagonale des Würfels, d.h.

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = r_u = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Durchmesser der Inkugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels, d.h.

$$r_i = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

### Aufgabe 12 - V00912

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:

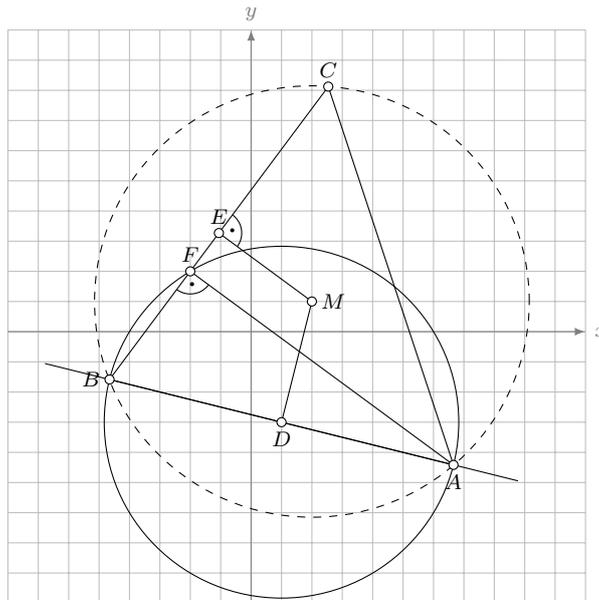
- a) Fußpunkt  $F$  der Höhe  $h_a(-2; +2)$   
 b) Mittelpunkt  $D$  der Seite  $AB = c(+1; -3)$   
 c) Mittelpunkt  $M$  des Umkreises  $(+2; +1)$

Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm  $\cong$  1 Einheit im Koordinatensystem)

Konstruktion:

- (1) Zeichne die Punkte  $D, F, M$  in ein Koordinatensystem ein.
- (2) Der Höhenfußpunkt  $F$  liegt dann auf dem Thaleskreis über  $AB$ , d.h. einem Kreis mit dem Mittelpunkt  $D$  und dem Radius gleich  $DF$ . Zeichne diesen Kreis.
- (3) Der Umkreismittelpunkt  $M$  liegt auf der Mittelsenkrechten von  $AB$ . Zeichne  $DM$  und konstruiere dazu eine Senkrechte  $s$ .
- (4) Diese Senkrechte  $s$  schneidet den Thaleskreis über  $AB$  in den Punkten  $A$  und  $B$ . Konstruiere  $A$  und  $B$ .
- (5) Verbinde  $A$  mit dem Höhenfußpunkt  $F$  und konstruiere zu  $AF$  eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke  $BC$ . Da  $M$  auf der Mittelsenkrechten von  $BC$  liegt, erhält man den Mittelpunkt  $E$  der Strecke  $BC$  indem man das Lot von  $M$  auf die Senkrechte durch  $F$  fällt. Der Lotfußpunkt ist  $E$ .
- (6) Der Punkt  $C$  ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von  $B$  an  $E$ .

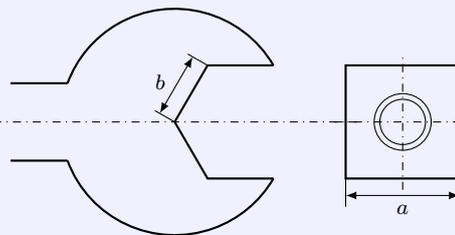
Dreiecksseiten:  $c = 11,7$  cm,  $a = 12,3$  cm,  $b = 13,3$  cm.



**Aufgabe 13 - V00913**

Eine Vierkantsmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei  $b$ ) gelöst werden.

Welche Abmessungen muss  $b$  haben, damit der Schlüssel passt?



$b$  ist die Länge der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich  $a$  ist und dessen Basiswinkel  $30^\circ$  sind (Sechseck!). Damit wird

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{3}\sqrt{3} \approx 4,62$$

Aufgaben 1 bis 13 gelöst von Steffen Polster

**Aufgabe 14 - V00914**

Es sei  $r$  der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises,  $h$  die kleinste Höhe des Dreiecks.

Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen  $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$  gelten!

Die kleinste Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$ch = ab \quad ; \quad h = \frac{ab}{c}$$

Für den Inkreisradius gilt

$$(a + b + c)r = ab \quad ; \quad r = \frac{ab}{a + b + c}$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a + b + c}$$

Wir untersuchen zunächst die "rechte" Ungleichung der Aufgabenstellung. Es soll gelten:

$$\frac{c}{a + b + c} < \frac{1}{2}; \quad c < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c; \quad 2c < a + b + c; \quad c < a + b$$

Dies ist die Dreiecksungleichung, womit diese Ungleichung erfüllt ist. Die "linke" Ungleichung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &< \frac{c}{a+b+c} \\ \frac{2}{5}(a+b) &< \frac{3}{5}c \\ 2(a+b) &< 3\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

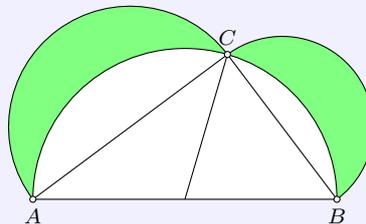
Beide Seiten quadrieren:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 8ab + 4b^2 &< 9a^2 + 9b^2 \\ 0 &< 5a^2 - 8ab + 5b^2 \\ 0 &< a^2 + 4(a-b)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Da rechts nur positive Terme stehen, ist auch diese Ungleichung immer gültig. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

### Aufgabe 15 - V00915



Beweisen Sie folgenden Satz:

"Die Summe der beiden Mondsicheln  $AC$  und  $BC$  über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks  $ABC$ ." (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &: \text{Flächeninhalt des Dreiecks } ABC, \\ A_{\text{Halbkreis}, \overline{AC}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } b = |\overline{AC}|, \\ A_{\text{Halbkreis}, \overline{BC}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } a = |\overline{BC}|, \\ A_{\text{Halbkreis}, \overline{AB}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse } c = |\overline{AB}|, \\ A_{\text{grün}} &: \text{Flächeninhalt der grün markierten Mondsichel.} \end{aligned}$$

Es gilt

$$A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Halbkreis}, \overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis}, \overline{BC}} = A_{\text{Halbkreis}, \overline{AB}} + A_{\text{grün}}. \quad (1)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und somit

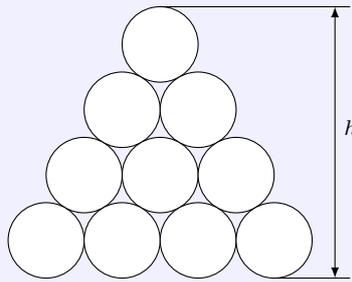
$$A_{\text{Halbkreis}, \overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis}, \overline{BC}} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = A_{\text{Halbkreis}, \overline{AB}}.$$

Damit folgt aus (1)

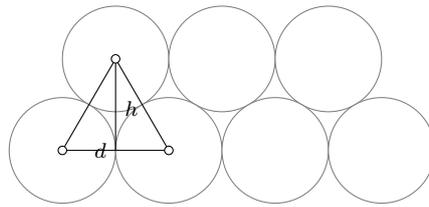
$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{grün}},$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe gelöst von svrc

**Aufgabe 16 - V00916**

Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?



Die Mittelpunkte der Grundkreise der untersten Lage liegen  $\frac{d}{2}$  über der Grundfläche. Die zweite Lage Kreise befinden sich  $\frac{d}{2} + h$  über dem Boden, wobei die Höhe  $h$  die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge  $d$  ist. Damit ergibt sich für die Gesamthöhe

$$\frac{d}{2} + 3 \cdot h + \frac{d}{2} = d + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 187 \text{ cm}$$

Allgemein gilt für  $n$  Schichten Fässer mit einem Durchmesser  $d$  für die Gesamthöhe  $H$

$$H = d + \left( \frac{n-1}{2} \right) \cdot d \cdot \sqrt{3}$$

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 17 - V00917**

In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.

Wie lang sind die gezogenen Rohre?

Es seien  $d_a = 32$  mm,  $d_i = 29$  mm,  $l = 3$  m die Maße der ursprünglichen Rohre und  $d'_a = 27$  mm,  $d'_i = 25$  mm,  $l' = x$  m der gezogenen Rohre. Da das Volumen der Rohre konstant bleibt, gilt

$$\begin{aligned} \left( \frac{\pi}{4} d_a^2 - \frac{\pi}{4} d_i^2 \right) \cdot l &= V = \left( \frac{\pi}{4} d'_a{}^2 - \frac{\pi}{4} d'_i{}^2 \right) \cdot x \\ (d_a^2 - d_i^2) \cdot l &= (d'_a{}^2 - d'_i{}^2) \cdot x \\ x &= \frac{d_a^2 - d_i^2}{d'_a{}^2 - d'_i{}^2} \cdot l \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte ergibt  $x \approx 5,28$  m.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 2.2 Vorolympiade 1961

### 2.2.1 I. Runde V1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - V10911

Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).

- Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
- Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?

Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Berechnung der Flugzeiten:  $2\frac{11}{12}$  bzw.  $2\frac{1}{4}$  h.

Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km·h<sup>-1</sup>.

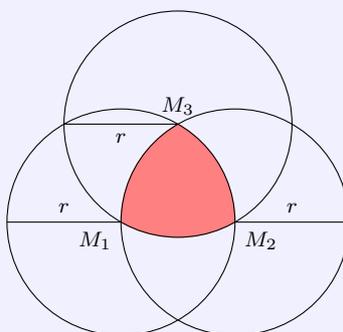
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km·h<sup>-1</sup>.

#### Aufgabe 2 - V10912

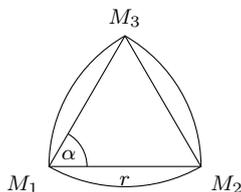
Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es  $63 \cdot 64 = 4032$  zueinander verschiedene Stellungen.

#### Aufgabe 3 - V10913



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius  $r$  beträgt 20 mm,  $\gamma = 7,8 \text{ p}\cdot\text{cm}^{-3}$ .



$$F = F_{\Delta M_1 M_2 M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin \alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0,845 \text{ cm}^3$$

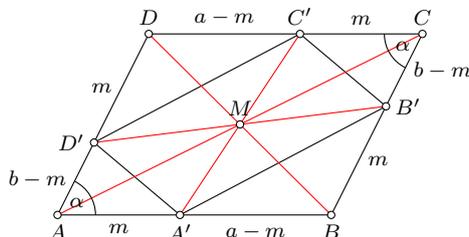
$$G \approx 6,6 \text{ p}$$

**Aufgabe 4 - V10914**

Zeichnen Sie ein Parallelogramm  $ABCD$ !

Tragen Sie von  $A$  aus auf  $AB$  die Strecke  $m$  ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt  $A'$ . Tragen Sie von  $B$  aus auf  $BC$ , von  $C$  aus auf  $CD$  und von  $D$  aus auf  $DA$  dieselbe Strecke  $m$  ab! Sie erhalten die Punkte  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$ !

Was für eine Figur stellt  $A'B'C'D'$  dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!



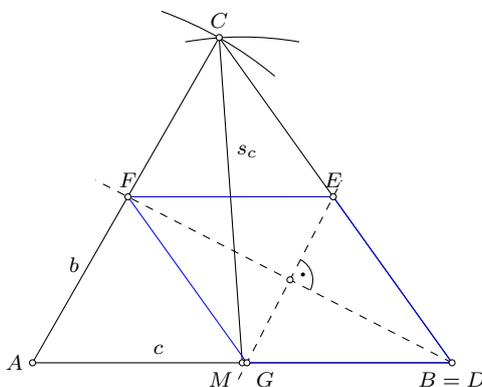
$A'B'C'D'$  ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm  $ABCD$  bezüglich des Mittelpunktes  $M$  und die Konstruktion der Punkte  $A', B', C'$  und  $D'$  sind die Dreiecke  $AA'D'$  und  $B'CC'$  sowie  $A'BB'$  und  $C'DD'$  paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf  $M$ .

Damit sind  $A'D'$  und  $B'C'$  sowie  $A'B'$  und  $C'D'$  jeweils gleichlang und zueinander parallel.  $A'B'C'D'$  ist somit ein Parallelogramm.

**Aufgabe 5 - V10915**

Konstruieren Sie ein Dreieck aus:  $s_c = 5,4$  cm,  $c = 6,9$  cm,  $b = 6,2$  cm.

In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel  $\beta$  gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite  $b$  liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)



Konstruktion des Dreiecks  $ABC$ :

- (1) Zeichne die Strecke  $AB = c$ . Konstruiere den Mittelpunkt  $M$  von  $AB$ .
- (2) Zeichne einen Kreisbogen um  $M$  mit dem Radius  $s_c$ . Zeichne einen Kreisbogen um  $A$  mit dem Radius  $b$ . Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt  $C$ . Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von  $AB$ ) erzeugt ein kongruentes Dreieck  $ABC_2$ .

Konstruktion des Rhombus  $DEFG$ :

- (1) Der  $D$  gegenüberliegende Punkt  $F$  muss auf der Winkelhalbierenden von  $\beta$  liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit  $AC$  ist der Punkt  $F$ .
- (2) Konstruiere den Mittelpunkt von  $DF$  und errichte in ihm die Senkrechte zu  $DF$ . Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten  $BC$  und  $AC$  sind die gesuchten Punkte  $E$  und  $G$ .  $DEFG$  ist der gesuchte Rhombus.

*Aufgaben der I. Runde der Vorolympiade 1961 gelöst von Steffen Polster*

## 2.2.2 II. Runde V1961, Klasse 9

**Aufgabe 1 - V10921**

Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.

- a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ?  
 b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von  $\pm 0,5$  s behaftet war?

a1) Umrechnung von  $t$ :  $170\text{s} = \frac{170}{3600}\text{h}$

a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117,6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ .

b1) zeitliche Abweichung nach oben:  $v = \frac{100 \cdot 3600}{170,5} = 2111,4 \approx 2111$ .

b2) zeitliche Abweichung nach unten:  $v = \frac{100 \cdot 3600}{169,5} = 2123,9 \approx 2124$ . Bei einem Zweitfehler von  $\pm 0,5$  s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa  $\pm 6$   $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$  behaftet.

**Aufgabe 2 - V10922**

Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.

Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	$x$	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	$y$	$\frac{177}{100}y$

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \quad (1) \quad 100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \quad (2)$$

Aus (I)+(II) folgt:  $195x + 177(100 - x) = 18800$ , d.h.  $x = 61,1$ .

Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:

Sei  $p$  der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61,1 : p \Rightarrow p = 63,4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

**Aufgabe 3 - V10923**

Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ( $r_1 = 2$  cm).

Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Radius des kleinsten Kreises ist  $r_1 = 2$  cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien  $r_2, r_3, r_4$  und  $r_5$ . Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r_1^2 = F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) = F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) = F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2)$$

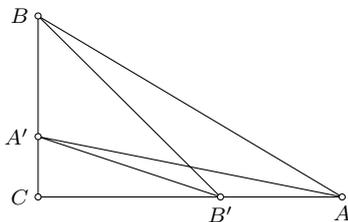
sein soll. Das heißt aber  $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ; bei Division durch  $\pi$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2} \\ r_2^2 - r_1^2 &= r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3} \\ r_3^2 - r_2^2 &= r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4} \\ r_4^2 - r_3^2 &= r_5^2 - r_4^2 \Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5} \end{aligned}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen:  $r_1 = 2$  cm,  $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2,8$  cm,  $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3,5$  cm,  $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$  cm und  $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4,5$  cm.

#### Aufgabe 4 - V10924

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ . Auf der Kathete  $a$  wird  $A'$ , auf  $b$  wird  $B'$  beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck  $ABA'B'$ . Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Vierecksseiten. Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} \text{I im Dreieck } A'B'C' & \quad A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2 \\ \text{II im Dreieck } BB'C & \quad BC^2 + B'C^2 = BB'^2 \\ \text{III im Dreieck } AA'C & \quad A'C^2 + AC^2 = AA'^2 \\ \text{IV im Dreieck } ABC & \quad BC^2 + AC^2 = AB^2 \end{aligned}$$

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Vierecksseitenquadrat zusammenzufassen.

Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Vierecksseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

#### Aufgabe 5 - V10925

Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
  - bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
  - bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d.h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
  - bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln. Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
  - Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d.h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

Lösungen der II. Runde der Vorrunde 1961 übernommen von [6]

## 2.2.3 III. Runde V1961, Klasse 9

**Aufgabe 1 - V10931**

Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre  $x^2$  gerade  $x$  Jahre alt. Wann ist er geboren?

Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind  $1936 = 44^2$  und  $1849 = 43^2$ .

Für  $x = 44$  wäre Banach  $1936 - 44 = 1892$  geboren worden, für  $x = 43$  ergäbe sich  $1849 - 43 = 1806$ . Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d.h. diese Lösung entfällt. Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

**Aufgabe 2 - V10932**

Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafentelegraphenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind  $h$  die Höhe,  $d_1$  der untere Durchmesser und  $d_2$  der obere Durchmesser. In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei  $d$  der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:

$h = 10$  m,  $d_1 = 20$  cm,  $d_2 = 14$  cm!

b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?

c) Stellen Sie eine Formel für  $\frac{V-V'}{V}$  an, indem Sie  $d_1 = d + \delta$  und  $d_2 = d - \delta$  setzen! Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

a) Die Volumina betragen  $V = 229,336\text{cm}^3$  und  $V' = 226,980\text{cm}^3$ .

b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für  $d_1$  und  $d_2$  in die Gleichung für  $V$  ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12} ((d + \delta)^2 + (d + \delta)(d - \delta) + (d - \delta)^2)$$

$$V = \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2)$$

$$V = \frac{\pi h}{12} (3d^2 + \delta^2) = \frac{\pi h}{4} d^2 + \frac{\pi h}{12} \delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12} \delta^2}{\frac{\pi h}{12} (3d^2 + \delta^2)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall  $\frac{3}{292}$ , was den 1,03% von oben entspricht.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 3 - V10933**

Für alle ungeraden Zahlen  $n$  ist die Differenz  $n^2 - 1$  durch 8 teilbar. Beweisen Sie diese Aussage!

Da  $n$  eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl  $k$  so, dass  $n = 2k + 1$  ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1).$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen  $k$  und  $k + 1$  auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist  $n^2 - 1$  für alle ungeraden ganzen Zahlen  $n$  durch 8 teilbar.

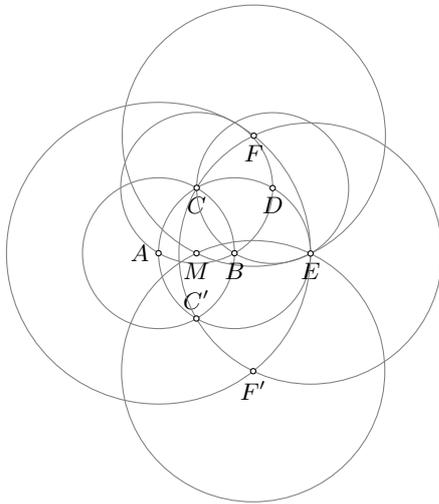
Aufgabe gelöst von svrc

**Aufgabe 4 - V10934**

Man kann den Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $AB$  auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie  $AB$ ! Schlagen Sie um  $B$  mit  $AB$  einen Kreis und um  $A$  mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in  $C$  bzw.  $C'$  schneidet! Um  $C$  schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um  $B$  in  $D$  schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um  $D$ !

Sie erhalten Punkt  $E$  als Schnittpunkt mit dem Kreis um  $B$ . Jetzt schlagen Sie um  $E$  mit  $CE$  und um  $A$  mit  $AE$  Kreise, die einander in  $F$  und  $F'$  schneiden!

Schlagen Sie schließlich noch um  $F$  und  $F'$  Kreise mit  $FE$ , dann erhalten Sie den Punkt  $M$ ! Beweisen Sie, dass  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$  ist!



Es sei  $AB = r$  der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege  $A$  im Koordinatenursprung und  $B$  bei  $(r, 0)$ .

Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

$$A(0, 0) \quad ; \quad B(r, 0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r, 0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte  $C$  und  $E$ :  $CE = \sqrt{3}r$ , sowie  $AE = 2r$ . Für die Punkte  $F$  und  $F'$  wird mit der Konstruktion für das Dreieck  $AFE$

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt  $M$  der Kreise um  $F$  und  $F'$  mit dem Radius  $EF$  liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke  $AE$  (1).

Für den Punkt  $M(m; 0)$  ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken  $AHF$  und  $MFH$  für die Höhe  $h$ :

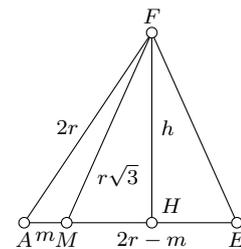
$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r - m}{2}\right)^2 \quad ; \quad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r - m}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen und Auflösen nach  $m$  ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1)  $M$  Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . w.z.b.w.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster



**Aufgabe 5 - V10935**

Mit welcher Ziffer endet die Zahl  $2^{100}$ ? Begründen Sie das!

Es ist  $2^{10} \pmod{10} = 1024 \pmod{10} = 4 \pmod{10}$ . Damit ist  $2^{20} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$ .

Dann gilt  $(2^{25} \pmod{10} = ((2^5 \pmod{10}) \cdot (2^{20} \pmod{10}))) \pmod{10} = 2 \pmod{10}$ .

Damit folgt  $2^{50} \pmod{10} = 4 \pmod{10}$  und somit  $2^{100} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$ .

Das bedeutet, dass die Zahl  $2^{100}$  auf der Ziffer 6 endet.

Aufgabe gelöst von svrc

## 2.3 I. Olympiade 1961

### 2.3.1 I. Runde 1961, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 010911

Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{r} \left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right) = \frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{3}{4}. \\ - \left(\frac{9}{10}m^4 + m^3 - 3\frac{3}{5}m^2\right) \\ \hline -m^3 + \frac{1}{72}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\ - \left(-m^3 - 1\frac{1}{9}m^2 + 4m\right) \\ \hline 1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\ - \left(1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) \\ \hline 0 \end{array}$$

#### Aufgabe 2 - 010912

In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision"  $p_m$ . Nimmt man  $p_m$  als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa  $4\frac{1}{2}$ mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von  $p_m = 0,5$  Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von  $p_m = 0,1$  Prozent und in ferner Zukunft sogar  $p_m = 0,05$  Prozent erreichen.

- Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?
- Welche mittlere Präzision  $p_m$  wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

- Der Wert  $p_m$  gibt den Prozentwert des Verhältnisses des Radius  $r_{20}$  des 20%-Kreises zur Schussweite an. Da für den Radius  $r_{100}$  des Kreises, in dem alle Treffer landen,  $r_{100} = 4\frac{1}{2}r_{20}$  gilt, haben die Kreise für die angegebenen  $p_m$  die folgenden Radien:

$p_m$	0,5%	0,1%	0,05%
$r_{20}$	62,5 km	12,5 km	6,25 km
$r_{100}$	281,25 km	56,25 km	28,125 km

- Ist  $r_{100} < 1\text{km}$ , so ist  $r_{20} = \frac{2}{9}r_{100} < \frac{2}{9}\text{km} = 0,222\text{km}$ . Somit ist das Verhältnis von  $r_{20}$  zur Schussweite kleiner als  $\frac{0,222\text{km}}{12500\text{km}} \approx 0,000018$ , also  $p_m < 0,0018\%$ .

#### Aufgabe 3 - 010913

Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte  $0,98\text{ g/cm}^3$ ) und möglichst weichem Wasser (Dichte  $1,0\text{ g/cm}^3$ ) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte  $0,996\text{ g/cm}^3$ , bei Schleifarbeiten die Dichte  $0,992\text{ g/cm}^3$  haben. Wie viel Liter gefettetes Mineralöl und wie viel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Die Dichte  $\rho$  eines Stoffes ist der Quotient aus Masse  $m$  und Volumen  $V$  einer bestimmten Menge dieses Stoffes. Da man es hier mit einer Mischung zweier Stoffe zu tun hat, muss die *Mischungsregel* beachtet werden. Danach gilt für die Dichte  $\rho_E$  der Emulsion

$$\rho_E = \frac{\rho_{\text{Öl}} \cdot V_{\text{Öl}} + \rho_W \cdot V_W}{V_{\text{Öl}} + V_W},$$

wobei  $\rho_{\text{Öl}}$ ,  $V_{\text{Öl}}$  Dichte und Volumen des verwendeten Öls sowie  $\rho_W$ ,  $V_W$  Dichte und Volumen des verwendeten Wassers sind. Da nach Aufgabenstellung das Gesamtvolumen  $V = V_{\text{Öl}} + V_W = 10\text{l} = 10000\text{cm}^3$  gegeben ist, können wir in (1)  $V_{\text{Öl}} = V - V_W$  einsetzen und erhalten nach Umstellen

$$V_W = \frac{\rho_E - \rho_{\text{Öl}}}{\rho_W - \rho_{\text{Öl}}} V.$$

Soll die Emulsion eine Dichte von  $0,996\text{ g/cm}^3$  haben, braucht man also 8 l Wasser und 2 l Öl. Für eine Emulsion mit einer Dichte von  $0,992\text{ g/cm}^3$  braucht man 6 l Wasser und 4 l Öl.

#### Aufgabe 4 - 010914

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} \text{OTTO} \quad \text{MAIS} \quad \text{OTTO} \quad \text{MAIS} \quad \text{OTTO} \\ \hline \text{-ROSE} \quad \text{-SALZ} \quad \text{-SALZ} \quad \text{-ROSE} \quad \text{-MAIS} \\ \hline 4709 \quad 2963 \quad 3497 \quad 4175 \quad 534 \end{array}$$

In der letzten Gleichung muss es beim Übergang von der 2. zur 1. Stelle einen Übertrag geben, da  $M \neq 0$ . Also ist  $M + 1 = O$ . Da die Subtraktion in der letzten Stelle der ersten Gleichung eine 9 ergibt, gilt  $O + 1 = E$ . Die Betrachtung der nachfolgenden Stelle ergibt  $S + 1 = T$ . Wegen  $L \neq T$  gibt es in der 3. Gleichung beim Übergang von der 4. zur 3. Stelle keinen Übertrag, also gilt  $T + 1 = L$  und  $7 + Z \leq 9$ . Also ist  $Z \in \{0, 1, 2\}$ . Wäre  $Z = 2$ , so ist  $O = 7 + Z = 9$  und  $E = O + 1 = 10$ , was nicht möglich ist. Wäre  $Z = 1$ , so wäre  $O = 7 + Z = 8$ , wegen der 2. Gleichung  $S = 4$  und mit obigen Betrachtungen  $T = 5$  und  $L = 6$ . Die 3. Gleichung hätte dann die Form

$$8558 - 4A61 = 3497$$

Dann gäbe es keine Möglichkeit für A. Damit bleibt für den Wert von Z nur 0 übrig. Dies führt zunächst zu  $O = 7$ ,  $S = 3$ ,  $M = 6$ ,  $E = 8$ ,  $T = 4$  und  $L = 5$  und die Gleichungen erhalten die Form

$$\begin{array}{r} 7447 \quad 6913 \quad 7447 \quad 6913 \quad 7447 \\ \hline \text{-2738} \quad \text{-3950} \quad \text{-3950} \quad \text{-2738} \quad \text{-6913} \\ \hline 4709 \quad 2963 \quad 3497 \quad 4175 \quad 534 \end{array}$$

Also gilt weiterhin  $R = 2$ ,  $I = 1$  und  $A = 9$ .

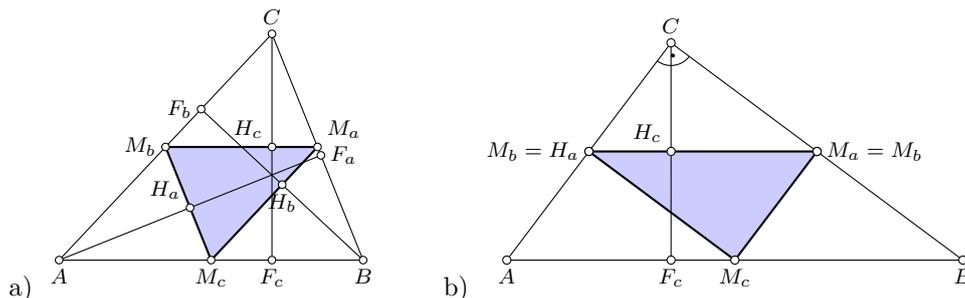
Aufgabe, 010911 bis 010914 gelöst von Christiane Czech

#### Aufgabe 5 - 010915

Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Das ist genau bei den rechtwinkligen Dreiecken der Fall (Bild b). In diesem Fall sind die beiden Katheten auch Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinie zwischen den Mitten der Katheten ist parallel zur Hypotenuse. Nach Strahlensatz wird die dritte Höhe auch in der Mitte geteilt.



Aufwändiger ist es zu zeigen, dass die Behauptung für andere Dreiecke nicht zutrifft. Betrachten wir zuerst spitzwinklige Dreiecke (Bild a); die Bezeichnung sei so gewählt, dass  $h_a$  die längste Höhe ist. Die Fußpunkte der Höhen seien  $F_a, F_b$  und  $F_c$ , deren Mittelpunkte  $H_a, H_b$  und  $H_c$ . Die Seiten haben die Mittelpunkte  $M_a, M_b$  und  $M_c$ .

Dann ist der senkrechte Abstand von  $M_b, M_c$  und  $H_a$  zur Seite  $a$  gleich.

Weiterhin gilt  $h_c < b$  und  $h_b < c$  (Kathete kürzer als Hypotenuse), woraus  $\overline{BH_b} < \overline{BM_c}$  und  $\overline{CH_c} < \overline{CM_b}$  folgen. Damit ist der senkrechte Abstand von  $H_b$  und  $H_c$  zu  $a$  geringer als der von  $H_a$ . Weil  $h_a$  aber zwischen  $H_b$  und  $H_c$  liegt, kann  $H_a$  nicht auf der Geraden  $H_bH_c$  liegen.

Für stumpfwinklige Dreiecke gilt Ähnliches, allerdings ist dann der senkrechte Abstand von  $H_b$  und  $H_c$  zu  $a$  größer als der von  $H_a$ .

*Aufgabe gelöst von Carsten Balleier*

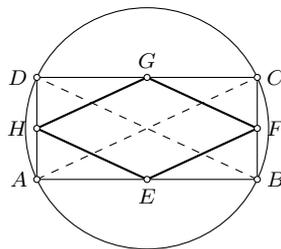
### Aufgabe 6 - 010916

Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius  $r = 3\text{cm}$ ! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

Ein Parallelogramm kann man sich als zwei kongruente Dreiecke vorstellen, die an einer Seite zusammengefügt sind. Es geht bei Drehung um  $180^\circ$  in sich selbst über. Dies muss auch dann so sein, wenn seine Eckpunkte auf einer Kreisperipherie liegen.

Damit die Diagonalen des Parallelogramms aber in sich selbst übergehen, müssen sie Durchmesser des Kreises sein. Daher kann ein zulässiges Parallelogramm nur ein Rechteck  $ABCD$  sein. Die dem Rechteck einbeschriebene Figur ist dann ein Rhombus  $EFGH$ .



Nach dem zweiten Strahlensatz ist dessen Seitenlänge  $\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{BD} = r$ , sein Umfang also  $4r = 12\text{cm}$ .

*Aufgabe gelöst von Carsten Balleier*

## 2.3.2 II. Runde 1961, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 010921**

Von den gesamten Kohlevorräten der Welt liegen etwa  $\frac{3}{5}$  in der Sowjetunion,  $\frac{2}{9}$  der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlevorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.

- Wie groß sind die Kohlevorräte der Sowjetunion und die der USA?
- Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Ist  $x$  die Menge der Kohlevorräte der ganzen Welt in Billionen Tonnen, so lagern in der Sowjetunion  $\frac{3}{5}x$  und in den USA  $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{2}{15}x$ . Die Kohlevorräte der übrigen Länder betragen dann

$$\left(1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)x = \frac{3}{5}x - 5$$

Umstellen der Gleichung ergibt, dass auf der ganzen Welt  $x = 15$  Billionen Tonnen lagern, davon in der Sowjetunion 9 Billionen Tonnen und in den USA 2 Billionen Tonnen Kohle.

**Aufgabe 2 - 010922**

- Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen. Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je  $\text{mm}^2$  Querschnitt 1 p wiegt?
- Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp. Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je  $\text{mm}^2$  Querschnitt 0,8 p wiegt?

a) Das Hanfseil hat eine Querschnittsfläche von  $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 176,7 \text{ mm}^2$ , es wiegt also pro Meter 176,7 p. Somit kann es maximal

$$l_{max} = \frac{175000p}{176,7 \frac{p}{m}} = 990,3m$$

lang sein, ohne unter seinem Eigengewicht zu reißen.

b) Für die maximale Länge des Dederonseils gilt hingegen:  $l_{max} = 2829,4 \text{ m}$ .

**Aufgabe 3 - 010923**

Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.

Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so auch das Produkt. Lassen die beiden Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest, dann ist die Differenz durch 3 teilbar.

Lässt eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, dann ist die Summe der beiden Zahlen ein Vielfaches von 3. Andere Möglichkeiten für die Reste gibt es nicht.

**Aufgabe 4 - 010924**

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.

Wie heißen die Zahlen?

Sei  $n$  die kleinste der vier Zahlen. Wegen  $10^4 = 10000 < 93024$  und  $20^4 = 160000 > 93024$  gilt  $7 < n < 20$ . Da 5 kein Teiler von 93024 ist, darf  $n$  bei Division durch 5 nur den Rest 1 lassen. Es kommt also nur  $n = \{11, 16\}$  in Frage.

Wegen  $93024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$  müssen 17 und 19 unter den Zahlen  $n, n+1, n+2$  und  $n+3$  vorkommen. Damit ist  $n = 16$ .

Probe:  $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$ .

*Aufgaben 010921 bis 010924 gelöst von Christiane Behns*

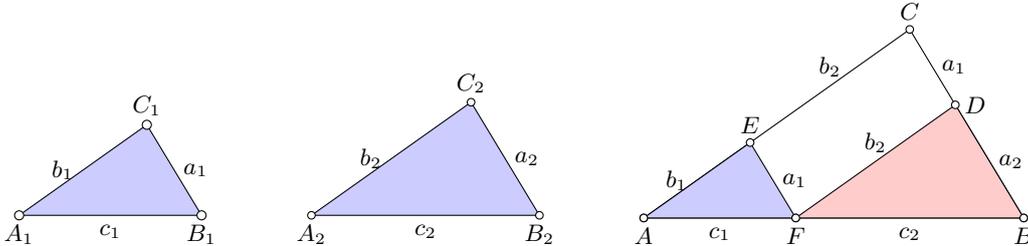
**Aufgabe 5 - 010925**

Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten  $a_1, b_1, c_1$  bzw.  $a_2, b_2, c_2$ ! Bilden Sie  $a_1 + a_2, b_1 + b_2$  und  $c_1 + c_2$ !

Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich?

Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

Das Dreieck aus den Seiten  $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$  ist zu den beiden ursprünglichen Dreiecken ähnlich.



a) Geometrischer Beweis:

In linken Bild sind beide Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  zu sehen, die, wenn sie ähnlich zueinander sein sollen, untereinander jeweils gleiche Innenwinkel haben müssen.

Im rechten Bild werden sie als  $\triangle AFE$  und  $\triangle FBD$  so aneinander gesetzt, dass  $A, F$  und  $B$  auf einer Geraden zu liegen kommen.

Werden nun die Strecken  $DF$  entlang  $FE$  und  $EF$  entlang  $FD$  parallel verschoben, so ist das entstehende Viereck  $EFDC$  offenbar ein Parallelogramm, die Punkte  $A, E, C$  bzw.  $B, D, C$  liegen wegen gleicher Innenwinkel der Dreiecke  $AFE$  und  $FBD$  jeweils auf einer Geraden und es gilt:

$$\angle ACB = \angle ECD = \angle AEF = \angle FDB$$

Damit hat das Dreieck  $ABC$  die geforderten Seitenlängen  $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$  und dieselben Innenwinkel wie die gegebenen Dreiecke.

b) Arithmetischer Beweis:

Nach Voraussetzung sind beide Dreiecke ähnlich, also gilt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Nach Addition von 1 folgt daraus

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass auch das aus den Summen der Seitenlängen gebildete Dreieck diesen ähnlich ist.

*Aufgabe gelöst von Carsten Balleier*

## 2.3.3 III. Runde 1961, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 010931**

In den ersten  $2\frac{1}{2}$  Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus.

Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.

Wie viel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?

Wie viel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Ist  $x$  die italienische Stahlproduktion von 1959 in Tonnen, so wurden in der Sowjetunion in den  $2\frac{1}{2}$  Jahren  $1,13x$  Tonnen Stahl über den Plan produziert. Im einem Jahr beträgt die Überproduktion in der Sowjetunion dann  $\frac{1}{2}x - 310000$  Tonnen. Also ist

$$\frac{5}{2} \left( \frac{1}{2}x - 310000 \right) = \frac{113}{100}x$$

also  $x \approx 6500000$ . Damit wurden 1959 in Italien ca. 6,5 Millionen Tonnen Stahl produziert und in den  $2\frac{1}{2}$  Jahren in der Sowjetunion  $1,13x = 7,3$  Millionen Tonnen Stahl über den Plan.

*Aufgabe gelöst von Christiane Behns*

**Aufgabe 2 - 010932**

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.

Nach wie viel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Seien  $v_F$ ,  $v_S$  und  $v_K$  die Geschwindigkeiten des Freundes, der Straßenbahn bzw. von Kurt. Zunächst bewegen sich Freund und Straßenbahn mit der Relativgeschwindigkeit  $v_S + v_F$  auseinander.

Zum Zeitpunkt des Aussteigens nach  $t = 1$  min sind beide die Strecke  $s = \frac{v_S + v_F}{t}$  voneinander entfernt.

Anschließend holt Kurt seinen Freund mit der Relativgeschwindigkeit  $v_K - v_F$  wieder ein.

Laut Aufgabenstellung ist ferner  $v_K = 2v_F = \frac{1}{4}v_S$ . Somit gilt für die zum Einholen benötigte Zeit:

$$t' = \frac{s}{v_K - v_F} = \frac{v_S + v_F}{v_K - v_F} t = \frac{8v_F + v_F}{2v_F - v_F} t = 9t = 9 \text{ min}$$

*Aufgabe gelöst von Eckard Specht*

**Aufgabe 3 - 010933**

Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!

Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, hat die Form  $\frac{2n}{5n}$ .

Die Summe  $2n + 5n = 7n$  ist nur für  $n = 7$  eine zweistellige Quadratzahl. Also ist der gesuchte Zähler gleich 14, der Nenner gleich 35.

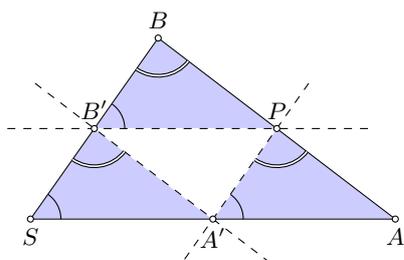
*Aufgabe gelöst von Christiane Behns*

**Aufgabe 4 - 010934**

Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.

Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, dass  $PA = PB$  wird!

Die Konstruktion ist zu begründen!



Konstruktion: Man ziehe die Parallelen zu beiden Schenkeln durch den Punkt  $P$ . Dadurch erhält man die Punkte  $A'$  und  $B'$  als Schnittpunkte mit den Schenkeln. Verlängert man  $SA'$  und  $SB'$  über  $A'$  bzw.  $B'$  hinaus um ihre jeweilige eigene Länge, dann erhält man die Punkte  $A$  und  $B$  und damit die gesuchte Gerade.

Beweis:

Dass  $PA = PB$  tatsächlich erfüllt ist, sieht man beim Vergleichen der Dreiecke  $SA'B'$ ,  $A'AP$  und  $B'PB$ .

Es gilt nämlich

$\angle A'SB' = \angle AA'P = \angle PB'B$  (Stufenwinkel an den Parallelen  $SA \parallel B'P$ ),

$\angle A'B'S = \angle APA' = \angle PBB'$  (Stufenwinkel an den Parallelen  $SB \parallel A'P$ ) und

$\overline{SA'} = \overline{AA'}$  bzw.  $\overline{SB'} = \overline{B'B}$  (per Konstruktion).

Damit sind die drei genannten Dreiecke kongruent, die Seiten  $PA$  und  $PB$  also gleich.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

### Aufgabe 5 - 010935

In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

- (a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
- (b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
- (c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
- (d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
- (e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
- (f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbuser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

a-c)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>					
Rostock	<input type="checkbox"/>					
Schwerin	<input type="checkbox"/>					
Cottbus	<input type="checkbox"/>					
Suhl	<input type="checkbox"/>					
Erfurt	<input type="checkbox"/>					

a-f)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>					
Rostock	<input type="checkbox"/>					
Schwerin	<input type="checkbox"/>					
Cottbus	<input type="checkbox"/>					
Suhl	<input type="checkbox"/>					
Erfurt	<input type="checkbox"/>					

	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rostock	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Schwerin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Cottbus	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Suhl	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Erfurt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Wegen d) und f) kommt B weder aus Schwerin noch aus Berlin. Da er aber einen der drei Berufe aus a)–c) haben muss, kommt er aus Rostock.

Wegen b) und c) kommt C weder aus Rostock, noch aus Berlin oder Schwerin, wegen e) nicht aus Suhl und wegen f) nicht aus Cottbus. Also muss er aus Erfurt kommen.

A kommt wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Rostock oder Schwerin. Wegen e) kommt er nicht aus Cottbus und aus Erfurt kommt bereits C. Also kommt A aus Suhl.

Da E wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Schwerin kommt und alle übrigen Städte bereits zugeordnet sind, kommt er aus Cottbus.

Da alle 6 Personen in verschiedenen Städten wohnen, ergibt sich nun leicht die folgende Aufstellung: A ist Ingenieur aus Suhl, B ist Dreher aus Rostock, C ist Kranführer aus Erfurt, D ist Kranführer aus Schwerin, E ist Dreher aus Cottbus und F ist Ingenieur aus Berlin.

Aufgabe gelöst von Christiane Behns

## 2.4 II. Olympiade 1962

## 2.4.1 I. Runde 1962, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 020911**

Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser  $d = 23\text{m}$  und der Höhe  $h = 21\text{m}$ .

- Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!
- Wie viel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa  $0,85\text{ g/cm}^3$ )?
- Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von  $10200\text{ t}$  Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je  $250\text{ t/h}$ . In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?
- Wie viel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

$$\text{a) } V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h \approx 8725\text{ m}^3$$

$$\text{b) } m = \rho \cdot V = 0,85\text{ g/cm}^3 \cdot 8725 \cdot 10^6\text{ cm}^3 \approx 7416\text{ t}$$

$$\text{c) } t = \frac{10200\text{ t}}{4 \cdot 250\text{ t/h}} = 10,2\text{ h} = 10\text{ h } 12\text{ min}$$

$$\text{d) } t = \frac{7416\text{ t}}{4 \cdot 250\text{ t/h}} \approx 7,4\text{ h} = 7\text{ h } 24\text{ min}$$

**Aufgabe 2 - 020912**

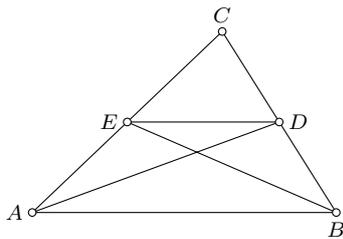
Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik "Klement Gottwald" senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch  $\frac{2}{5}$  ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,- M.

- Wie viel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?
- Wie viel Prozent beträgt er jetzt?
- Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

- Aus der Gleichung  $x - 6\% = \frac{2}{5}x$  erhalten wir  $\frac{3}{5}x = 6\%$ . Also betrug die Ausschussquote vorher 10 %.
- Demzufolge hat der Ausschuss jetzt einen Anteil von 4 % an der Produktionsmenge.
- Die eingesparten 3351,- M entsprechen 6 %. Also hat der jetzt noch produzierte Ausschuss einen Wert von 2234,- M.

**Aufgabe 3 - 020913**

Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenkelig ist!



Sei  $\triangle ABC$  ein solches Dreieck und seien o.B.d.A.  $A$  und  $B$  die beiden Punkte, von denen zwei gleichlange Seitenhalbierende ausgehen. Die Seitenhalbierende von  $A$  aus schneide die Strecke  $\overline{BC}$  in  $D$  und die Seitenhalbierende von  $B$  aus schneide die Strecke  $\overline{AC}$  in  $E$ .

Dann sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle EDC$  ähnlich zueinander (SWS).

Mithin ist nach Strahlensatz  $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ . Das Viereck  $ABDE$  ist daher ein Trapez.

Ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist gleichschenkelig. Daher ist  $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$  und damit wegen Seitenhalbierenden  $|\overline{AC}| = 2|\overline{AE}| = 2|\overline{DB}| = |\overline{CB}|$ . Das Dreieck ist also gleichschenkelig.  $\square$

**Aufgabe 4 - 020914**

Welche zweistelligen Zahlen  $xy$  haben ein Quadrat von der Form  $zxy$  ( $x, y$  und  $z$  sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

Die Ziffer  $y$  muss eine der Ziffern 1, 5 oder 6 sein, denn nur bei diesen Ziffern endet ihr Quadrat auf sich selbst ( $1 \cdot 1 = 1, 5 \cdot 5 = 25$  und  $6 \cdot 6 = 36$ ).

Ferner gilt als Obergrenze  $xy \leq 31$ , da  $32^2 = 1024$  und damit vierstellig statt wie gefordert dreistellig.

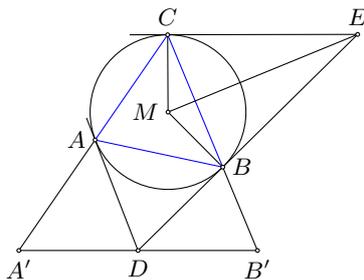
Als Lösungen für die Aufgabe kommen daher nur die Zahlen 11, 15, 16, 21, 25, 26 und 31 in Frage.  $zxy$  muss als Quadrat auch durch  $xy$  teilbar sein, d.h.  $z00$  muss ebenfalls durch  $xy$  teilbar sein. Damit entfallen 11, 21, 26 und 31. Durch Ausprobieren der drei verbleibenden Zahlen 15, 16 und 25 erhält man die einzige Lösung: 25.

**Aufgabe 5 - 020915**

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in  $A$  und  $B$ . Ihr Schnittpunkt sei  $D$ . Nun ziehe man durch  $D$  die Parallele zu der Tangente in  $C$ . Die Verlängerungen der Seiten  $CA$  und  $CB$  schneiden diese Parallelen in  $A'$  bzw.  $B'$ .

Es ist zu beweisen, dass

- a) die Dreiecke  $AA'D$  und  $DB'B$  gleichschenkelig sind und
- b) es einen Kreis gibt, der durch  $A, A', B, B'$  geht!



- a) Der Schnittpunkt der Tangenten durch  $B$  und  $C$  sei  $E$ . Es gilt, dass die Dreiecke  $\triangle MCE$  und  $\triangle MBE$  kongruent sind nach SSW:

- (1) gemeinsame Seite  $\overline{ME}$ ,
- (2)  $\overline{MB} = \overline{MC} = r$  und
- (3)  $\angle MCE = \angle MBE = 90^\circ$ .

Mithin ist  $\overline{CE} = \overline{BE}$  und daher ist das Dreieck  $\triangle CBE$  gleichschenkelig.

Es gilt  $\angle CBE = \angle B'BD$ , da dies Scheitelwinkel sind.

Ferner gilt:  $\angle BDB' = \angle BEC$  wegen Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen.

Analog gilt  $\angle ECB = \angle DB'B$ .

Daraus resultiert, dass die beiden Winkel  $\angle B'BD$  und  $\angle DB'B$  gleichgroße Basiswinkel sind und das Dreieck  $\triangle B'BD$  gleichschenkelig ist.

Analog kann man den Beweis auf das Dreieck  $\triangle DAA'$  übertragen.

- b) Mit der gleichen Überlegung wie zu Beginn von a) kann man sehen, dass die Strecken  $\overline{AD}$  und  $\overline{DB}$  gleichlang sind.

Die Punkte  $A, A', B$  und  $B'$  haben so alle den gleichen Abstand vom Punkt  $D$ . Es existiert ein Kreis mit Mittelpunkt  $D$  und Radius  $|\overline{AD}|$ , der alle vier Punkte enthält.

**Aufgabe 6 - 020916**

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * * * = * * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 8 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * * * = * * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 \rightarrow * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 8 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Aus der markierten Zeile und den beiden nächsten können wir schlussfolgern:

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * * * = * * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 1 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 8 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Und daraus wiederum:

$$\begin{array}{r}
 1 0 0 0 * * * * : * * * = * * * * * \\
 9 9 9 \\
 \hline
 1 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 8 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Für den Teiler kommen sind nur noch 333, 666 und 999 möglich. Wegen der eingetragenen 8 fallen die ersten beiden Möglichkeiten heraus.

$$\begin{array}{r}
 1 0 0 0 * * * * : 9 9 9 = 1 0 0 * 9 \\
 9 9 9 \\
 \hline
 1 * * * \\
 9 9 9 \\
 \hline
 * * * * \\
 8 9 9 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Und schließlich:

$$\begin{array}{r}
 1 0 0 0 8 9 8 1 : 9 9 9 = 1 0 0 1 9 \\
 9 9 9 \\
 \hline
 1 8 9 8 \\
 9 9 9 \\
 \hline
 8 9 9 1 \\
 8 9 9 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

*Aufgabe der I. Runde 1962 gelöst von André Lanka*

## 2.4.2 II. Runde 1962, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 020921**

Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.

Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Die beiden Raumschiffe haben eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{41000 \text{ km}}{88 \text{ min}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \approx 27955 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

was einen Zeitabstand von

$$t_{\Delta} = \frac{6,5 \text{ km}}{27955 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0,0002325 \text{ h}$$

ergibt. Bei einer Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  entspricht das einer Entfernung von  $0,0002325 \text{ h} \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0,02325 \text{ km} = 23,25 \text{ m}$ .

**Aufgabe 2 - 020922**

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Es wird gebremst.

a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  abnimmt?

b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

a) Aus der Formel  $v = at$  erhält man

$$t = \frac{v}{a} = \frac{100 \frac{\text{m}}{3,5 \frac{\text{s}}{\text{s}}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 5,56 \text{ s}$$

b) Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von  $s = \frac{a}{2} t^2 \approx 77,3 \text{ m}$  zurück.

**Aufgabe 3 - 020923**

Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.

Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.

Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Peter gewinnt. Er muss  $2 \cdot 10000 = 20000$  Schritte gehen.

Jürgen dagegen muss  $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 150) = 2 \cdot 75 \cdot 150 = 22650$  Schritte gehen.

**Aufgabe 4 - 020924**

Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.

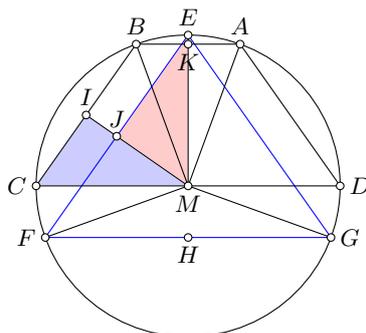
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

$J$  sei der Höhenfußpunkt im Dreieck  $\triangle MFE$  von Punkt  $M$  auf der Seite  $EF$ . Dann gilt  $\triangle MFJ \cong \triangle MEJ$  nach SSW:

(1)  $MF = ME = r$

(2)  $MJ$  in beiden Dreiecken enthalten

(3)  $\angle MJF = \angle MJE = 90^\circ$



Analog sei  $I$  der Höhenfußpunkt im Dreieck  $\triangle MBC$  von Punkt  $M$  auf der Seite  $BC$ . Die Punkte  $M, I$  und  $J$  liegen auf einer Geraden, da die Winkel  $\angle MJF$  und  $\angle MIC$  gleich groß und die Strecken  $EF \parallel BC$  sind.

Sei Winkel  $\angle BCD := \alpha$ . Dann gilt auch  $\angle EFG = \alpha$  (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Nach Innenwinkelsatz im Dreieck  $\triangle EFH$  gilt dann für Winkel  $\angle FEH = 90^\circ - \alpha$  und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck  $\triangle MEJ$ :  $\angle JME = \alpha$ . Demzufolge gilt  $\triangle MEJ \cong \triangle MCI$  nach WWS:

- (1)  $ME = MC = r$
- (2)  $\angle JME = \angle MCB = \alpha$
- (3)  $\angle MJE = \angle MIC = 90^\circ$

Damit hat man sogar 4 kongruente Dreiecke:

$$\triangle FMJ \cong \triangle MEJ \cong \triangle MCI \cong \triangle MBI$$

Nun bleibt zu zeigen, dass gilt:  $\triangle FHM \cong \triangle MBK$ , wobei  $H$  und  $K$  die Höhenfußpunkte in den Dreiecken  $\triangle FGM$  und  $\triangle MAB$  wie in der Zeichnung ersichtlich sind.

Dazu betrachte man zuerst Winkel

$$\angle MFG = 180^\circ - \angle FHM - \angle MFE - \angle FEM = 180^\circ - 90^\circ - 2 \cdot \angle MFE$$

wobei  $\angle MFE = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$  im Dreieck  $\triangle JFM$  gilt.

Damit ergibt sich  $\angle MFG = 90^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90^\circ$ .

Als nächstes wird Winkel  $\angle BMK$  betrachtet:

$$\angle BMK = 90^\circ - \angle CMI - \angle CMI = 90^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 90^\circ - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90^\circ$$

Beide Dreiecke  $\triangle FHM$  und  $\triangle MBK$  sind nach WWS kongruent:

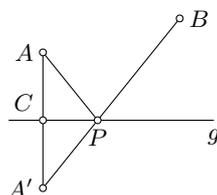
- (1)  $MF = MB = r$
- (2)  $\angle MFG = \angle BMK = 2 \cdot \alpha - 90^\circ$
- (3)  $\angle MHF = \angle BKM = 90^\circ$

Mithin ist eine Hälfte des Dreiecks aus den Teilflächen  $\triangle FHM, \triangle MFJ$  und  $\triangle JME$  flächengleich zu einer Trapezhälfte, die aus den Teilflächen  $\triangle MBK, \triangle BMI$  und  $\triangle CMI$  besteht.

### Aufgabe 5 - 020925

Zeichnen Sie eine Gerade  $g$  und auf derselben Seite von  $g$  zwei Punkte  $A$  und  $B$ , die verschiedenen Abstand von  $g$  haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade  $g$  nicht unter einem rechten Winkel schneidet!

Konstruieren Sie auf  $g$  einen Punkt  $P$ , für den der Winkel zwischen  $AP$  und  $g$  gleich dem Winkel zwischen  $BP$  und  $g$  ist! Begründen Sie die Konstruktion!

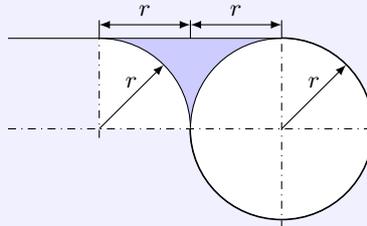


Man spiegelt zuerst den Punkt  $A$  an der Geraden  $g$  und erhält den Punkt  $A'$ . Der Schnittpunkt von  $g$  mit  $AA'$  sei  $C$ . Der Schnittpunkt von  $g$  mit  $A'B$  sei  $P$ .

Dann sind die beiden Dreiecke  $\triangle ACP$  und  $\triangle A'CP$  wegen SWS kongruent zueinander. Demnach ist  $\angle A'PC = \angle CPA$ . Außerdem ist auch  $\angle A'PC$  genauso groß wie der Winkel zwischen  $g$  und  $PB$ , weil es sich um Wechselwinkel handelt.

Der gefundene Punkt  $P$  erfüllt also die Anforderungen.

### Aufgabe 6 - 020926



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.

- Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
- Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

a) Die Gleislänge ist  $2r + 2\pi r$ .

b) Das Flächenstück beinhaltet einen Kreis mit der Fläche  $\pi r^2$  und die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen  $2r$  und  $r$  abzüglich der Fläche der beiden Viertelkreise. Als eingeschlossene Fläche erhält man

$$\pi r^2 + 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

*Aufgaben der II. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka*

## 2.4.3 III. Runde 1962, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 020931**

Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Sei  $n$  eine beliebige ganze, positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^3 + 1)(n^3 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) = (n^3 + 1)(n - 1)(n^3 + n^2 + n) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren bilden ganze Zahlen. Daher ist  $n^7 - n$  ohne Rest durch  $n^3 + n^2 + n$  teilbar.

**Aufgabe 2 - 020932**

Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag  $\frac{1}{2}$  Elle herunter und in der Nacht wieder  $\frac{1}{6}$  Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht  $\frac{1}{4}$  Elle hinunter.

Nach wie viel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Sei  $x$  die Anzahl der Tage. Im Verlauf eines Tages (mit der Nacht) geht die Maus auf die Katze  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  Ellen zu.

Gleichzeitig nähert sich die Katze  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  Ellen. Insgesamt kommen sich Katze und Maus  $\frac{13}{12}$  Ellen näher. Das ist aber nur bei den ersten  $x-1$  Tagen so. Am letzten Tag darf die Nacht nicht mit eingerechnet werden.

An diesem letzten Tag geht die Maus auf die Katze  $\frac{1}{2}$  Elle zu und die Katze auf die Maus 1 Elle. Daher muss gelten

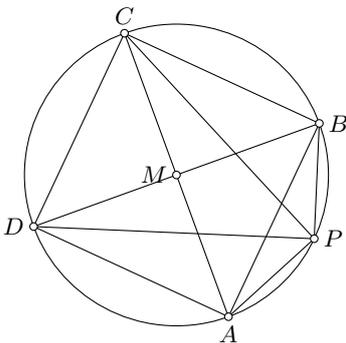
$$\frac{13}{12}(x-1) + \frac{3}{2} \geq 60$$

was für  $x \geq 55$  wahr ist. Am 55. Tag erreicht die Katze die Maus.

**Aufgabe 3 - 020933**

Von einem Punkt  $P$  auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von  $135^\circ$  miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von  $P$  ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je  $45^\circ$ .

Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer  $P$ ) die Eckpunkte eines Quadrates sind!



Der Peripheriewinkel  $\angle CPA$  über der Strecke  $AC$  ist  $90^\circ$ . Damit ist nach Umkehrung des Thalesatzes  $AC$  ein Durchmesser des Kreises. Genauso ist  $BD$  ein Durchmesser. Beide Durchmesser schneiden sich im Punkt  $M$ , dem Mittelpunkt des Kreises. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind also gleich lang.

Der Peripheriewinkel  $\angle CPD = 45^\circ$ . Der Zentriwinkel über  $BC$  ist also  $\angle CMD = 90^\circ$ . Die beiden Diagonalen sind nicht nur gleich lang, sondern stehen auch senkrecht aufeinander.

Das Viereck  $ABCD$  muss ein Quadrat sein.

**Aufgabe 4 - 020934**

Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf  $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  erhöht.

Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Wir benutzen die Gleichung  $s = v \cdot t$  und erhalten für die erste Weghälfte

$$t_1 = \frac{60 \text{ km}}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

Für die zweite Weghälfte braucht der Zug

$$t_2 = \frac{60 \text{ km}}{70 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6}{7} \text{ h}$$

Insgesamt ergibt das eine Fahrzeit von  $\frac{6}{5} \text{ h} + \frac{6}{7} \text{ h} = \frac{72}{35} \text{ h}$ . Da  $\frac{72}{35} > 2$  größer als 2 ist, kommt der Zug nicht pünktlich an.

**Aufgabe 5 - 020935**

Über den Seiten  $a, b, c$  und  $d$  eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten  $F_1, F_2, F_3$  und  $F_4$  in dieser Reihenfolge errichtet.

Beweisen Sie, dass  $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$  ist!

Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt als gegeben:  $e$  (bestehend aus den Abschnitten  $e_1$  und  $e_2$ ) steht senkrecht auf  $f$  (bestehend aus den Abschnitten  $f_1$  und  $f_2$ ). Jedes der Dreiecke mit den Flächeninhalten  $F_1, F_2, F_3, F_4$  ist gleichschenkelig-rechtwinklig.

Damit teilt die Höhe in den Punkten  $G, H, I, J$  die Grundseite in zwei längengleiche Stücke, die zudem der Länge der Höhe entsprechen (Radius des jeweiligen Thaleskreises). Damit sind die Angaben  $r_1, r_2, r_3, r_4$  in der Abbildung erklärt.

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ergibt sich dann als  $F_i = r^2$  ( $i \in 1, 2, 3, 4$ ).

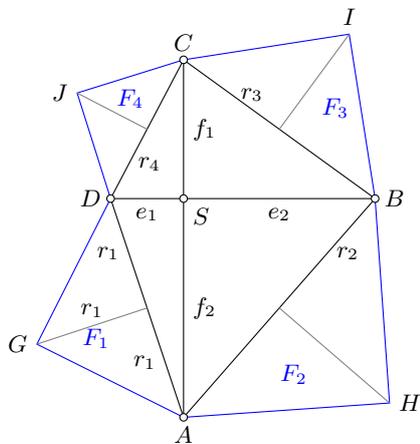
Gleichzeitig sind die Dreiecke  $\triangle DAS, \triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS$  rechtwinklig, so dass hier der Satz des Pythagoras angewandt werden kann:

$$4r_1^2 = e_1^2 + f_1^2 \quad ; \quad 4r_2^2 = e_2^2 + f_2^2 \quad ; \quad 4r_3^2 = e_3^2 + f_3^2 \quad ; \quad 4r_4^2 = e_4^2 + f_4^2$$

Dies kann nun zur Berechnung der Flächeninhaltssumme herangezogen werden:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 &= r_1^2 + r_3^2 = \frac{1}{4}(e_1^2 + f_1^2) + \frac{1}{4}(e_3^2 + f_3^2) \\ &= \frac{1}{4}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_4^2 + f_4^2) \\ &= r_2^2 + r_4^2 = F_2 + F_4 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.



**Aufgabe 6 - 020936**

In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.

Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.

Wie viel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wie viel in der ganzen Pyramide?

- |  |  |
|--|--|
| 1. Schicht: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ | 2. Schicht: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ |
| 3. Schicht: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$         | 4. Schicht: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$         |
| 6. Schicht: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$                 | 7. Schicht: $3 + 2 + 1 = 6$                  |
| 8. Schicht: $2 + 1 = 3$                          | 9. Schicht: $1 = 1$                          |

Insgesamt liegen in der Pyramide 120 Bälle.

Lösungen der III. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka

## 2.5 III. Olympiade 1963

### 2.5.1 I. Runde 1963, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 030911

Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius  $R = 6370$  km.)

- Wie viel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmen und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)
- Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

a) Gegeben sind der mittlere Erdradius  $R = 6370$  km, die durchschnittliche Flughöhe  $h = 200$  km und die Anzahl  $n$  der Erdumkreisungen,  $n = 48$ . Die Umlaufbahn soll als kreisförmig angenommen werden, Start- und Landepunkt seien identisch.

Die zu ermittelnde Gesamtflugstrecke  $s$  setzt sich aus drei Teilstrecken zusammen: Der Startflugstrecke  $s_S$  zum Erreichen der Flughöhe nach dem Start, der Flugstrecke  $s_U$ , die während der Erdumkreisungen zurückgelegt wird, sowie der Landeflugstrecke  $s_L$  zum Verlassen der Flughöhe vor der Landung.

Wir wollen im folgenden vereinfachend annehmen, dass die Flughöhe bei Start und Landung senkrecht über dem Start- bzw. Landepunkt erreicht bzw. verlassen werde. Wie man schnell erkennt, gilt dann  $s_S = s_L = h$ .

Zur Berechnung der Strecke  $s_U$  ist es notwendig, den Umfang  $u$  des Umlaufkreises zu kennen – gilt doch offensichtlich  $s_U = nu$ . Der Umfang eines Kreises lässt sich aus seinem Radius  $r$  bestimmen; der Radius der Umlaufbahn ist natürlich die Summe aus Erdradius und Flughöhe,  $r = R + h$ .

Somit berechnet sich die Gesamtflugstrecke  $s$  wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= s_S + s_U + s_L = h + nu + h \\ &= 2h + 2n\pi r = 2h + 2n\pi(R + h) \\ &= 2 \cdot 200 \text{ km} + 2 \cdot 48\pi(6370 \text{ km} + 200 \text{ km}) = 1982000 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Der Flug begann am 16. Juni um 10:30 Uhr und endete am 19. Juni um 9:20 Uhr; er dauerte also 2 Tage, 22 Stunden und 50 Minuten. Die Flugzeit  $t$  beträgt somit 4250 Minuten.

Mit  $s = 1982000$  km gemäß (a) ergibt sich die durchschnittliche Fluggeschwindigkeit  $v$ :

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1982000 \text{ km}}{4250 \text{ min}} = 466 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 27980 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7,77 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

*Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler*

#### Aufgabe 2 - 030912

Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Die beiden Züge bewegen sich aufeinander zu. Insbesondere bewegen sich dabei der Punkt, an dem Wolfgang seine Messungen durchführt, und das Ende des Gegenzuges aufeinander zu und reduzieren ihren Abstand in der Zeit  $t = 3,0$  s um  $s = s_W + s_G = 120$  m, wobei  $s_W$  den Anteil der Strecke beschreibt, den Wolfgangs Zug zurücklegt, und  $s_G$  für die vom Gegenzug bewältigte Strecke steht.

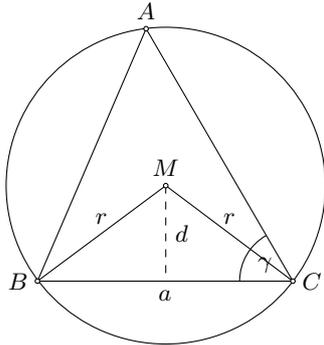
Weiterhin ist die Geschwindigkeit  $v_W$  bekannt, mit der Wolfgangs Zug fährt:  $v_W = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Die gesuchte Geschwindigkeit  $v_G$  des Gegenzuges berechnet sich damit wie folgt:

$$v_G = \frac{s_G}{t} = \frac{s - s_W}{t} = \frac{s - v_W t}{t} = \frac{s}{t} - v_W = \frac{120 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} - 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 84 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler

### Aufgabe 3 - 030913

- Konstruieren Sie ein Dreieck aus  $a = 5,6$  cm,  $r = 3,5$  cm (Radius des Umkreises) und  $\gamma = 60^\circ$ !
- Beschreiben Sie die Konstruktion!
- Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite  $a$ !
- Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit  $a = 5,6$  cm und  $\gamma = 60^\circ$  nicht möglich ist!



a) s. Bild.

b) Man beginne mit der Seite  $a$  und bezeichne ihre Endpunkte mit  $B$  und  $C$ . Dann zeichne man Kreisbögen mit Radius  $r$  um die beiden Endpunkte von  $a$ , so dass ein Schnittpunkt entsteht. Dieser ist dann der Umkreismittelpunkt des gesuchten Dreiecks; er heiße  $M$ .

Dann konstruiere man den Kreis um  $M$  mit Radius  $r$ , auf ihm muss der Punkt  $A$  liegen. Letzterer entsteht, wenn der Winkel  $\gamma$  an  $a$  in  $C$  so angetragen wird, dass  $\gamma$  ein Innenwinkel des erhaltenen Dreiecks  $ABC$  ist.

- Das Dreieck  $BCM$  ist gleichschenkelig. Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann für die Höhe auf  $a$ , die gleichzeitig der gesuchte Abstand  $d$  ist:  $d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} = 2,1$ cm.
- Das Dreieck  $BCM$  muss existieren, d.h. seine Dreiecksungleichung muss erfüllt sein:  $2r \geq a$  oder  $r \geq 2,8$ cm.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

### Aufgabe 4 - 030914

Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei  $k$ . Dann erhält man folgende Summe:  $k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + 999)$ . Sie besteht aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen, ist also gerade.

Aufgabe gelöst von Burkhard Thiele

### Aufgabe 5 - 030915

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Es ist zu beweisen:  $a + b = d_U + d_I$

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreis berührt jede Seite des Dreiecks. Damit ist jede Seite des Dreiecks eine Tangente an den Inkreis, die Strecke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt steht somit senkrecht auf der jeweiligen Seite.

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann über das ganze Dreieck oder 3 Teildreiecke berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \frac{b}{2} = a \cdot \frac{r_I}{2} + b \cdot \frac{r_I}{2} + c \cdot \frac{r_I}{2} \\ a \cdot b &= (a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot r_I \\ r_I &= \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Umkreis geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Die Katheten  $a$  und  $b$  bilden zusammen mit den Mittelsenkrechten ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a/2$  und  $b/2$ . Die Diagonale des Rechtecks beträgt  $r_U$ . Es gilt also:

$$r_U^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r_U = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Und ferner:

$$\begin{aligned} a + b &= d_U + d_I = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + 2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + (a + b)^2}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot (\sqrt{a^2 + b^2} + a + b)}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= a + b \quad \square \end{aligned}$$

*Aufgabe gelöst von Korinna Grabski*

#### Aufgabe 6 - 030916

- a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wie viel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?
- b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?
- c) Die Anzahl der Punkte sei  $n$ . Wie viel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)
- c) Es seien  $P_i, i \in \{1, \dots, n\}$  die  $n$  Punkte auf dem Kreisumfang. Jeder Punkt  $P_i$  kann mit  $n-1$  Punkten  $P_j, j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  verbunden werden. Somit ergibt sich  $n(n-1)$  als Gesamtzahl möglicher gerichteter Punkt-zu-Punkt-Verbindungen.
- Strecken sind keine gerichteten Verbindungen zweier Punkte. Daher besitzt ein Paar  $(\overrightarrow{P_i P_j}, \overrightarrow{P_j P_i})$  entgegengesetzt gerichteter Verbindungen zweier Punkte nur eine zugehörige Strecke,  $\overline{P_i P_j}$ . Die Gesamtzahl möglicher Strecken ist somit die Hälfte der Gesamtzahl möglicher gerichteter Verbindungen, also  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- a) Mit c) ergibt sich für  $n = 5$  eine Anzahl von  $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  möglichen Strecken.
- b) Mit c) ergibt sich für  $n = 10$  eine Anzahl von  $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$  möglichen Strecken.

*Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler*

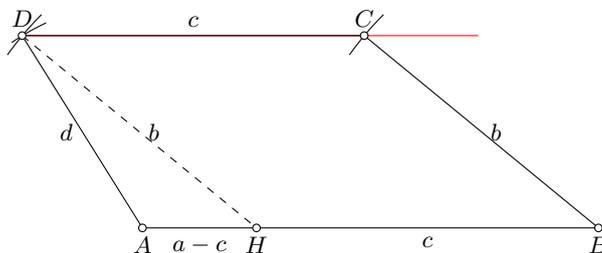
## 2.5.2 II. Runde 1963, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 030921**

Von einem Trapez  $ABCD$  mit den parallelen Seiten  $AB$  und  $CD$  sind gegeben:

$AB = 6$  cm,  $BC = 4$  cm,  $CD = 4,5$  cm,  $DA = 3$  cm.

Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!



Planfigur: Sei  $a > c$ . Wählt man auf der Seite  $|AB| = a$  einen Punkt  $H$  so, dass  $|HB| = c$ , erhält man durch die Verbindung  $|HD|$  das Parallelogramm  $HBCD$ .

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

1. Lege durch die Strecke  $|AB| := a$  die Punkte  $A$  und  $B$  fest.
2. Trage auf  $|AB|$  vom Startpunkt  $B$  die Strecke  $c$  ab; Endpunkt sei  $H$ .
3. Beschreibe einen Kreis  $(H, b)$  um  $H$  vom Radius  $b$ . Beschreibe einen Kreis  $(A, d)$  um  $A$  vom Radius  $d$ . Schnittpunkt beider Kreise ist die Ecke  $D$  so dass,  $A, H, D$  im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.
4. Lege durch  $D$  eine Parallele zu  $|AB|$ .
5. Beschreibe einen Kreis  $(B, b)$  um  $B$  vom Radius  $b$ . Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen ist die Ecke  $C$ .
6. Erhalte durch entsprechende Verbindung der Punkte  $A, B, C, D$  das Trapez  $ABCD$ .

**Aufgabe 2 - 030922**

Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. 7, 7, 7, 9, 10 ; 2. 7, 7, 8, 8, 10 ; 3. 7, 7, 8, 9, 9 ; 4. 7, 8, 8, 8, 9
5. 8, 8, 8, 8, 8

und nur diese.

Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen  $3 \cdot 2 \cdot 1$  Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$  Möglichkeiten übrig bleiben.

2. und 3. analoge Überlegungen führen zu  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30$  Möglichkeiten.

4. wie 1.

5. 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es  $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$  Möglichkeiten.

**Aufgabe 3 - 030923**

Einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite  $BC$  verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks  $ABC$  liegen.

Begründen Sie die Konstruktion!

**I. Analyse**

Angenommen,  $D, E, F$  genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet  $E'$  den auf der anderen Seite von  $g_{BC}$  wie  $A$  gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $BC$ , dann ist  $E$  der Schnittpunkt von  $AE'$  mit  $g_{BC}$ .

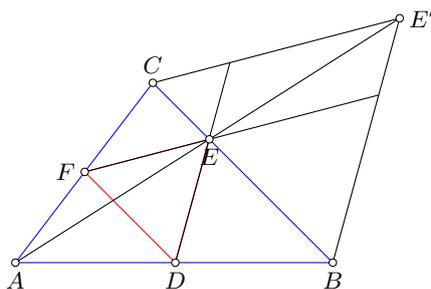
Beweis: Nach Voraussetzung ist  $FD \parallel CB$  und  $|\angle DFE| = 60^\circ$ , und nach Definition  $|\angle BCE'| = 60^\circ$ . Da  $E$  und  $E'$  auf derselben Seite von  $g_{FD}$  liegen wie  $g_{CB}$ , folgt  $CD' \parallel FE$  und entsprechend  $FE \parallel BE'$ .

Die Gerade  $g_{AE}$  schneidet  $g_{CE'}$  in einem Punkt, der  $P$  genannt sei, und die Gerade  $g_{BE'}$  in einem Punkt, der  $Q$  genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|, \quad |AD| : |AB| = |AE| : |AQ'|, \quad |AF| : |AC| = |AE| : |AF|$$

Aus diesen Gleichungen folgt  $|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|$ , also  $|AP| = |AQ|$  und damit  $P = Q = E'$ . Daher ist  $\triangle CPB$  gleichseitig; denn jeder der Winkel  $\angle BCP, \angle CBP$  hat entweder die Größe  $60^\circ$  oder  $120^\circ$ , und  $120^\circ$  kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck  $180^\circ$  beträgt.

Daher können  $E, F, D$  nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

**II. Konstruktion:**

Man konstruiere über  $CB$  das gleichseitige Dreieck  $CBE'$ , dessen Ecke  $E'$  nicht auf derselben Seite von  $g_{BC}$  wie  $A$  liegt. Dann schneidet die Strecke  $AE'$  die Gerade  $g_{BC}$  in einem Punkt  $E$ .

$F$  sei der Schnittpunkt von  $g_{AC}$  mit der Parallelen zu  $CE'$  durch  $E$ ;  $D$  der Schnittpunkt von  $g_{AB}$  mit der Parallelen zu  $BE'$  durch  $E$ .

**III. Satz:**

Wenn  $E, F, D$  gemäß II. konstruiert sind, genügt  $\triangle EFD$  allen Bedingungen der Aufgabe.

**Beweis:**

a) Man überzeugt sich zunächst davon, dass  $E$  auf  $BC$  liegt: Da nach Voraussetzung  $\triangle ABC$  spitz ist und  $A$  und  $E'$  auf verschiedenen Seiten von  $g_{BC}$  liegen, gilt

$$|\angle ABE'| = |\angle ABC| + |\angle CBE'| \leq 90^\circ + 60^\circ < 180^\circ$$

und entsprechend  $|\angle ACE'| < 180^\circ$ . Daher kann  $E$  nicht mit  $B$  oder  $C$  zusammenfallen.

Läge  $E$  nicht auf  $BC$ , so läge  $BC$  auf ein und derselben Seite von  $g_{AE'}$ . Dann wäre einer der beiden Winkel  $\angle EBE'$  oder  $\angle ECE'$  Außenwinkel zum Dreieck  $BCE'$ .

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass dies der Winkel  $\angle EBE'$  ist. Da  $A$  und  $E'$  auf verschiedenen Seiten von  $g_{EC}$  liegen, läge  $B$  im Innern des Dreiecks  $AE'C$  und es wäre

$$360^\circ = |\angle ABE'| + |\angle E'BC| + |\angle CBA| \quad \text{also}$$

$$|\angle CBA| = 360^\circ - |\angle ABE'| - |\angle E'BC| > 360^\circ - 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

d.h.  $\triangle ABC$  wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge  $F$  nicht auf  $AC$ , so lägen  $A$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g_{EF}$ , und zwar wegen  $g_{EF} \parallel g_{CE'}$  auf derselben Seite wie  $E'$ , so dass  $AE'$  keinen Punkt mit  $g_{EF}$  gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil  $E$  auf  $AE'$  und  $g_{EF}$  liegt.

c) Entsprechend zeigt man, dass  $D$  auf  $AB$  liegt.

d) Wegen  $g_{EF} \parallel g_{E'C}$  und  $g_{ED} \parallel g_{E'B}$  folgt nun nach dem 1. Strahlensatz  $|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$  und aus  $|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$  nach Umkehrung des 1. Strahlensatzes  $DF \parallel BC$ .

e) Da  $EE'$  die Gerade  $g_{AC}$  nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von  $g_{EE'}$  mit  $g_{AC}$  ist  $A$ , und  $A$  liegt nicht auf  $EE'$ , weil  $E$  auf  $AE'$  liegt), liegen  $E$  und  $E'$  auf derselben Seite von  $g_{AC}$ .

Daher gilt  $\angle AFE \cong \angle ACE'$ , wegen  $FE \parallel CE'$ .

Entsprechend ergibt sich, da  $DB$  auf derselben Seite von  $g_{AC}$  liegt wie  $EE'$ ,  $\angle AFD \cong \angle ACB$  und weiter  $|\angle DFE| = |\angle BCE'| = 60^\circ$ .

Analog folgt, dass auch die anderen Innenwinkel von  $\triangle DEF$  je die Größe  $60^\circ$  haben, so dass  $\triangle DEF$  gleichseitig ist.

IV. Determination:

Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck  $DEF$ , das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

#### Aufgabe 4 - 030924

Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Ist  $(a, b)$  ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = a \cdot b \quad (1) \quad a \cdot b = \frac{a}{b} \quad (2)$$

gilt, so folgt aus (2), dass  $b \neq 0$  ist, und danach aus (1), dass  $a \neq 0$ , und aus (2), dass  $b^2 = 1$  ist. Also gilt  $b_1 = +1$  oder  $b_2 = -1$ .

Der 1. Fall führt zu  $a + 1 = a$  und damit zu einem Widerspruch.

Der 2. Fall ergibt  $a - 1 = -a$  und damit  $a = \frac{1}{2}$  als einzig mögliche Lösung.

Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, dass  $(\frac{1}{2}, -1)$  Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

#### Aufgabe 5 - 030925

a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.

b) Wie viel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

a) Bei der Verteilung der Kugeln auf die Säckchen kann man sich am Binärsystem orientieren, da man für jeden Sack nur 2 Möglichkeiten bei der Zusammenstellung einer Anzahl hat, man nimmt ihn, oder man nimmt ihn nicht.

Die Säckchen müssen damit den Zweierpotenzen entsprechen.

Das ergibt folgende Kugelverteilung:

$$1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$$

b) Um nach demselben Verfahren Anzahlen bis 3000 darstellen zu können, müssen 2 weitere Säckchen hinzugenommen werden, gefüllt mit 1024 und 2048 Kugeln.

Lösungen der II. Runde 1963 übernommen von [5]

## 2.5.3 III. Runde 1963, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 030931**

Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Die gesuchte Zahl  $z$  kann man aus ihren Ziffern wie folgt schreiben:

$$z = 100a + 10b + c \quad (\text{mit } 0 \leq a, b, c \leq 9 \text{ sowie } a \neq 0)$$

Jede zweistellige Zahl aus den Ziffern von  $z$  ergibt sich als  $10x + y$  mit  $x \in a, b, c, y \in a, b, c$  und  $x \neq y$ . Die Gleichung lautet nun mit den 6 zweistelligen Zahlen aus den Ziffern von  $z$ :

$$2 \cdot z = 2 \cdot (100a + 10b + c) = (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)$$

Zusammengefasst ergibt sich:  $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$  und weiter:  $178a = 2b + 20c$  bzw. nach dem Kürzen:  $89a = b + 10c$ .

Schätzt man den rechten Term nach oben ab, d.h. setzt man  $b = 9$  und  $c = 9$ , so kommt man auf die Ungleichung  $89a \leq 99$  und mithin  $a \leq 1$ . Dies impliziert  $a = 1$  und ergibt für die beiden restlichen Ziffern  $b = 9$  sowie  $c = 8$ .

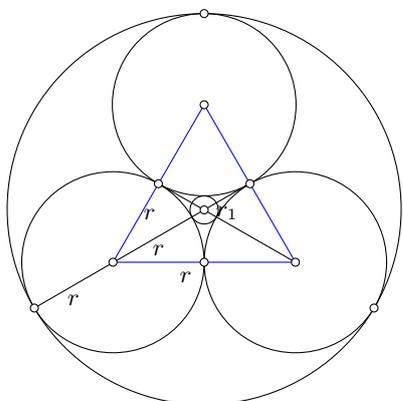
Die gesuchte Zahl lautet also  $z = 198$  und ist die einzige Zahl, die den geforderten Bedingungen genügt.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

**Aufgabe 2 - 030932**

Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius  $r$ .

- Führen Sie die Konstruktion durch ( $r = 3$  cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
- Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!



Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man der Abbildung.

- Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien  $r$  bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.

Daraus ergibt sich die Konstruktion.

- Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis  $1 : 2$  teilen, ergibt sich:

$$r + r_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad r_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} - r$$

$$\text{oder } r_1 = r \left( \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 \right) \approx 0,15r.$$

$$r_2 = 2r + r_1 \quad \text{oder} \quad r_2 = r \left( \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \right) \approx 2,15r.$$

**Aufgabe 3 - 030933**

Welche Punkte  $P(x; 0)$  sind von dem Punkt  $P_1(a; 0)$  doppelt so weit entfernt wie von  $P_2(b; 0)$ ? Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ( $b > a$ )

Es gilt:  $|P_1P| = 2 \cdot |P_2P|$  sowie  $|x - a| = 2 \cdot |x - b|$

- Fall:  $x \leq a < b$  tritt nicht auf, da  $P$  weiter von  $P_1$  entfernt sein soll als von  $P_2$ .
- Fall:  $a \leq x \leq b$ :  $x - a = 2 \cdot (b - x) \Rightarrow x = a + (b - a) \cdot \frac{2}{3}$
- Fall:  $a < b \leq x$ :  $x - a = 2 \cdot (x - b) \Rightarrow x = 2 \cdot b - a$

Die Punkte  $(a + \frac{2}{3}(b - a); 0)$  und  $(2 \cdot b - a; 0)$  sind von dem Punkt  $P_1(a; 0)$  doppelt so weit entfernt wie von  $P_2(b; 0)$ .

*Aufgabe gelöst von Korinna Grabski*

**Aufgabe 4 - 030934**

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.

Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Die natürlichen Zahlen seien  $n, n + 1, n + 2, n + 3$ .

Laut Voraussetzung ist  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 110355024$ . Daraus folgt  $n^4 < 111000000$ , also  $n < 104$ . Andererseits gilt  $(n + 3)^4 > n(n + 1)(n + 2)(n + 3) > 100000000$ , somit  $n + 3 > 100$ , also  $n > 97$ . Damit gilt  $97 < n < 104$ .

110355024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.

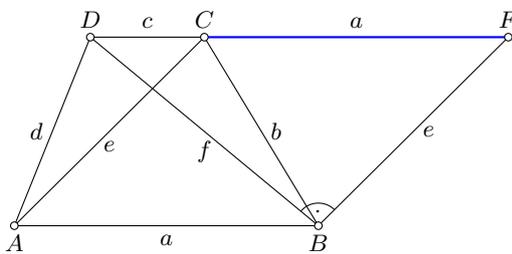
Dies trifft nur für  $n = 101$  zu. Die gesuchten Zahlen lauten also 101, 102, 103, 104.

Übernommen aus [5]

**Aufgabe 5 - 030935**

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).



Beweis: In einem Trapez  $ABCD$  seien die einander parallelen Grundseiten  $AB = a$  und  $CD = c$  und die Diagonalen  $AC = e$  und  $BD = f$ . Die Parallele zu  $AC$  durch  $B$  schneidet die Gerade  $CD$  in  $F$ . Dann ist  $CF = a$ , also  $DF = a + c$  und  $BF = e$ .

Da das Dreieck  $\triangle BFD$  rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras  $e^2 + f^2 = (a + c)^2$ .

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

**Aufgabe 6 - 030936**

Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

- (1) Anna hat den Ball.
- (2) Brigitte hat den Ball nicht.
- (3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

1. Fall: Die 1. Aussage ist richtig, dann hat Anna den Ball. Brigitte kann also den Ball nicht haben, womit die 2. Aussage ebenfalls wahr ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Verabredung.

Somit ist die Annahme, dass die 1. Aussage wahr ist, falsch.

2. Fall: Die 2. Aussage ist richtig, dann hat Brigitte den Ball nicht. Laut Verabredung sind die anderen beiden Aussagen falsch, also gilt deren Umkehrung: Anna hat den Ball nicht, sowie: Claudia hat die Schere.

Wenn nun Anna und Brigitte den Ball nicht haben, muss ihn Claudia haben, was allerdings im Widerspruch zur Aussage, dass Claudia die Schere hat, steht. Damit ist auch die 2. Annahme falsch.

3. Fall: Die 3. Aussage ist richtig, dann hat Claudia die Schere nicht. Nun müssen die 1. und 2. Aussage umgekehrt werden, damit sie richtig sind: Anna hat den Ball nicht. Brigitte hat den Ball.

Dies bedeutet, dass Anna die Schere und Claudia den Bleistift hat. Hierin steckt kein Widerspruch, weshalb dieser Fall die Lösung ist.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

## 2.6 IV. Olympiade 1964

### 2.6.1 I. Runde 1964, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 040911

Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

”Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt.”

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

$a$  seien die verflossene Tage,  $b$  die noch übrigen Tage, wobei  $a+b = 365$  gilt, da kein Schaltjahr angenommen wird. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = a \quad \Rightarrow \quad b = 1,5a$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt  $2,5a = 365$ , also  $a = 146$ . Der 146. Tag des Jahres ist der 26. Mai.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

#### Aufgabe 2 - 040912

Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge  $CBAD$ . Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge  $ADBC$ . Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Es gibt 6 Fälle zu untersuchen, wenn man die Erwartung des Sportlehrers zugrunde legt, da 2 Plätze stimmen. Die restlichen beiden Plätze entstehen nämlich, indem man die Erwartung des Sportlehrers dieser beiden Plätze vertauscht.

Fallunterscheidung:

1. ADCB - entfällt, da laut allgemeiner Erwartung die Reihenfolge AD nicht vorkommen kann.
2. ACBD - entfällt, da D dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
3. ABDC - entfällt, da B dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
4. CDBA - entfällt, da C dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
5. BDAC - entfällt, da A dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
6. DABC - einzige Lösung.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

#### Aufgabe 3 - 040913

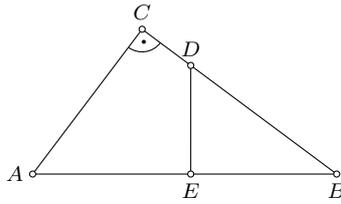
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ , dessen Hypotenuse  $\overline{AB}$  25 mm und dessen Kathete  $\overline{BC}$  20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke  $\overline{BD}$  von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt  $D$  aus wird das Lot  $\overline{DE}$  auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks  $BDE$ !

Es gilt  $u = \overline{EB} + \overline{BD} + \overline{DE}$  mit  $\overline{BD} = 15$ .

Die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle DBE$  sind einander ähnlich mit 2 gleichen Winkeln:

$$\angle ABC = \angle DBE \text{ sowie } \angle ACB = \angle DEB = 90^\circ.$$



Damit gilt nun:

$$\overline{EB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} : \overline{AB} = 20 \cdot 15 : 25 = 12$$

sowie nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Dadurch ergibt sich in obiger Gleichung:  $u = 12 + 15 + 9 = 36$ . Der Umfang des Dreiecks  $\triangle BDE$  beträgt also 36 mm.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

#### Aufgabe 4 - 040914

Von den natürlichen Zahlen  $p$  und  $q$  ist bekannt, dass  $0 < p < q$  gilt.

- Ordnen Sie die Zahlen  $1$ ,  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{q}{p}$  der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!
- Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{q}{p}$  näher an 1 liegt!

- a) Es ist  $p < q$ . Teilt man durch  $q$  (erlaubt, weil  $q > 0$  ist) ergibt sich  $\frac{p}{q} < 1$ . Teilt man durch  $p$  wird  $1 < \frac{q}{p}$  also

$$\Rightarrow \frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$$

- b) Aus  $p < q$  wird  $p(q - p) < q(q - p)$ . Teilt man durch  $pq$  ergibt sich

$$1 - \frac{p}{q} < \frac{q}{p} - 1$$

Dies bedeutet, dass der Abstand von  $\frac{p}{q}$  zu Eins kleiner als der Abstand von  $\frac{q}{p}$  zu Eins ist.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

#### Aufgabe 5 - 040915

In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

- Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!
- Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

- a) Die Diagonalen des Rechtecks sind Durchmesser des Kreises und müssen sich somit im Mittelpunkt  $M$  des Kreises schneiden (Umkehrung des Satzes von Thales).

Die Dreiecke  $AMD$  und  $MBC$  sind gleichschenkelig und kongruent (SSS:  $AD=BC$ , weil gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich groß sind und  $AM = MD = BM = MC$ , weil sich die Diagonalen (gleich lang) im Rechteck halbieren). Daraus folgt, dass die Winkel  $MAD$ ,  $ADM$ ,  $CBM$  und  $MCB$  gleich groß sind (Größe sei mit  $\alpha$  bezeichnet).

Daraus wiederum folgt, da die Tangente jeweils senkrecht zu der Strecke zu  $M$  ist, dass die Winkel  $DAE$ ,  $EDA$ ,  $GBC$  und  $BCG$   $90^\circ - \alpha$  betragen und somit gleich groß sind. Also sind die Dreiecke  $EAD$  und  $BGC$  gleichschenkelig und kongruent (WSW). Daraus folgt, dass  $DE = EA = BG = GC$  ist.

Wenn man analog die Dreiecke  $ABM$  und  $DMC$  bzw.  $AFB$  und  $DCH$  betrachtet, folgt, dass  $HD = AF = FB = CH$  ist.

Beide Gleichungen addiert ergibt:  $DE + HD = EA + AF = BG + FB = GC + CH$  und somit:  $HE = EF = FG = GH$ .

Damit sind also die Seiten des Tangentenvierecks gleich lang - es ist also ein Rhombus.

- b) Da in einem Rhombus, die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, gilt, dass die Winkel  $AED$  und  $CGB$  gleich groß sind.

Betrachtet man nun die Vierecke  $AMDE$  und  $BGCM$ , so fällt auf, dass sie kongruent zueinander sind (Drei Winkel gemeinsam: zwei rechte Winkel und  $AED = CGB$ ).

Somit sind also jeweils die vierten Winkel der Vierecke gleich groß, was bedeutet, dass sie gleichzeitig Scheitelwinkel sind und somit die Strecken  $AC$  und  $BD$  keine Dreiecke und gleichzeitig die Durchmesser des Kreises sind.

Durch den Satz des Thales folgt, dass die Winkel des Vierecks  $ABCD$  alle rechtwinklig sind und es somit ein Rechteck ist.

*Aufgabe gelöst von Kristin Steinberg*

## 2.6.2 II. Runde 1964, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 040921**

In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.

Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

- Wie viel Arbeiter hat die Abteilung?
- Auf wie viel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

a) Wenn  $p$  die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um  $0,2 p$ . 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um  $1,5 p$ .

Daraus folgen:  $60\% = 30$  Arbeiter und  $100\% = 50$  Arbeiter. In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, lässt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern.

**Aufgabe 2 - 040922**

Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt  $95 \cdot 97$  auf folgende Weise:

- Er addiert die Faktoren.  $95 + 97 = 192$
- Er streicht die erste Stelle der Summe. 92
- Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander.  $5 \cdot 3 = 15$
- Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Die beiden Faktoren seien  $100 - a$  und  $100 - b$ , wobei gilt  $0 < a < 10$  und  $0 < b < 10$ . Dann erhält man als Produkt

$$(100 - a)(100 - b) = 10000 - 100a - 100b + ab$$

Nach der Methode von Pataki erhält man schrittweise

$$100 - a + 100 - b = 200 - a - b \quad (1)$$

Wegen der Einschränkung für  $a$  und  $b$  hat diese Zahl an der Hunderterstelle eine Eins.

$$200 - a - b - 100 = 100 - a - b \quad (2)$$

$$ab \quad (3)$$

$$100(100 - a - b) + ab = 10000 - 100a - 100b + ab.$$

Also ist das Verfahren für derartige Faktoren gültig.

**Aufgabe 3 - 040923**

Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Man bezeichnet die drei Punkte mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  und fasst sie als die Ecken eines Dreiecks mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  auf. Die Radien der drei Kreise um  $A$ ,  $B$  und  $C$  seien (in dieser Reihenfolge)  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Dann gilt:

$$x + y = c; \quad y + z = a; \quad z + x = b$$

Daraus folgen:

$$x = \frac{-a + b + c}{2}; \quad y = \frac{a - b + c}{2}; \quad z = \frac{a + b - c}{2}$$

#### Aufgabe 4 - 040924

Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

- (1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.
- (2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.
- (3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.
- (4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.
- (5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.
- (6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.
- (7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.
- (8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

- (9) Herr Drossel führt Aufsicht in Raum 48. (wegen (1) und (5))
- (10) Jutta arbeitet in Raum 49. (wegen (1), (2) und (7))
- (11) Günter arbeitet in Raum 50, Klaus in 48. (wegen (1), (10) und (6))
- (12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel. (wegen (8), (9) und (11))
- (13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär. (wegen (12) und (4))
- (14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler. (wegen (12) und (13))
- (15) Herr Adler führt Aufsicht in Raum 50. (wegen (3), (9), (10), (14))
- (16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht in Raum 49. (wegen (4), (13) und (9) und (15)).

*Lösungen der II. Runde 1964 übernommen von [5]*

## 2.6.3 III. Runde 1964, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 040931**

Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.

In wie viel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität  $66\frac{2}{3}\%$  von der des Werkes A beträgt.

Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seien  $a$  und  $b$ , die herzustellende Gesamtmenge sei  $p$ . Dann gilt  $12(a + b) = p$ .

Die restlichen fünf Sechstel soll das Werk B in  $x$  Tagen schaffen. Da  $a = 1,5b$  ist, gilt  $12 \cdot 1,5b + 12b = p$ . Daraus folgt  $30b = p$ .

Das heißt: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung.

**Aufgabe 2 - 040932**

Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.

Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie  $x$  möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 9} + \frac{6}{9 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{6}{31 \cdot 33}$$

Man klammert zunächst 3 aus. Jeder der Summanden von der Form  $\frac{2}{a(a+2)}$  lässt sich als Differenz zweier Brüche schreiben:

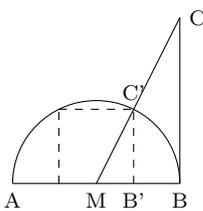
$$\frac{2}{a(a+2)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}$$

Daher lautet die zu berechnende Summe

$$x = 3 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \pm \dots - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{33} \right) = 3 \cdot \frac{28}{165} = \frac{28}{55}$$

**Aufgabe 3 - 040933**

Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius  $r$  das einbeschriebene Quadrat!



$ABCD$  sei das geforderte Quadrat,  $M$  der Mittelpunkt des Halbkreises und  $E$  ein Endpunkt des Durchmessers. Es gilt  $MB : BC = 1 : 2$ .

Die Senkrechte zu  $AE$  in  $E$  schneidet die Verlängerung von  $MC$  im Punkt  $F$ . Dann gilt  $\triangle MBC \sim \triangle MEF$ . Daraus folgt:

$$ME : EF = MB : BC = 1 : 2$$

Also gilt  $EF = 2ME$ .

Konstruktion:

Man errichtet auf dem Durchmesser in  $E$  die Senkrechte und trägt auf ihr  $EF = 2ME$  ab.

Man verbindet  $M$  mit  $F$  und erhält  $C$  als Schnittpunkt von  $MF$  mit dem Halbkreis. Danach ist das Quadrat leicht zu konstruieren.

2.Lösung:

Seien  $A, B$  die Ecken des Halbkreises und  $M$  der Mittelpunkt, konstruiere in  $B$  eine Strecke der Länge  $|AB| = 2r$  senkrecht zur Gerade  $AB$  mit Endpunkt  $C$ .

Der Schnittpunkt der Gerade  $MC$  und des Halbkreises ist eine Ecke des gesuchten Quadrats. Mittels Spiegelung und Lot erhalten wir die anderen 3 Ecken.

Wenn  $C'$  der so konstruierte Schnittpunkt der Gerade  $MC$  mit dem Halbkreis ist und  $B'$  der Fußpunkt des Lots durch  $C'$  auf der Strecke  $AB$  ist, dann ist  $MB'$  genau halb so groß wie  $B'C'$  nach Strahlensatz und es entsteht das gesuchte Quadrat.

**Aufgabe 4 - 040934**

Ist die folgende Aussage richtig?

Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Bezeichnet man die erste Zahl mit  $n$ , so erhält man

$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

D.h., das Produkt vier beliebiger aufeinander folgender Zahlen vermehrt um eins ist ein Produkt, also ist die Aussage wahr.

**Aufgabe 5 - 040935**

Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: "Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."

Inge: "Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."

Günter: "Die Zahl ist kleiner als 3."

Monika: "Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."

Bärbel: "Die Zahl ist irrational."

Peter: "Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."

Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.

Wie heißt die Zahl?

Wenn Peter die Wahrheit gesagt hätte, müsste Bärbels Feststellung falsch sein, da von beiden genau einer die Wahrheit gesagt haben soll.

Diese Annahme führt zum Widerspruch, da auch Peter die Zahl als irrational charakterisiert hat. Also hat Bärbel die Wahrheit gesagt.

Demnach ist die Aussage von Klaus falsch und Inges Angabe stimmt. Aus ihr folgt:  $x = \frac{1}{\pi}$

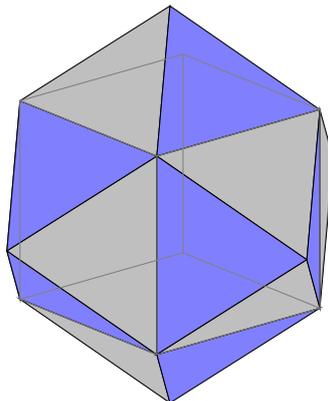
Die Aussagen von Günter und Monika sind überflüssig.

**Aufgabe 6 - 040936**

Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von  $45^\circ$  bilden.

1. Wie viel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante  $a$  an!

Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge  $a$  handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge  $a$ , und die Dreiecke sind alle untereinander kongruent.



Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.
2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfel und
3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.  
Seine Größe ist mithin  $45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ .

Die beiden benachbarten Dreiecke liegen in also derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenkelig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eine Rhombus. Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in einer Ebene. Die Rhomben sind untereinander kongruent.

Wir zeigen noch, dass die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben; wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe  $45^\circ$ ; die Länge  $\frac{a}{2}$ . Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben nach dem Satz des Pythagoras die Länge  $\sqrt{2(\frac{a}{2})^2}$ , d.h.  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ .

Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich  $a$  und  $a\sqrt{2}$ .

Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen  $\frac{1}{3}(a^2\frac{a}{2})$ , d.h.  $\frac{a^3}{6}$ .

Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen  $2a^3$ .

*Lösungen der III. Runde 1964 übernommen aus [5] und bearbeitet*

## 2.7 V. Olympiade 1965

### 2.7.1 I. Runde 1965, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 050911

Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Für den Bau ohne Vorrichtung werden für  $x$  Werkstücke 30 min benötigt. Für den Bau mit Vorrichtung 20 min plus der 240 min für den Bau der Vorrichtung.

Ab welcher Werkstückanzahl lohnt sich der Bau der Vorrichtung?

$$30x > 20x + 240 \rightarrow x > 24$$

Werden mehr als 24 Werkstücke hergestellt, bringt der vorherige Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

#### Aufgabe 2 - 050912

Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, dass jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müssten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also  $77 \cdot 15$ .

Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung von Telefon B zu Telefon A ist, müsste die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.

Das ist jedoch unmöglich, da  $77 \cdot 15$  eine ungerade Zahl ergibt.

#### Aufgabe 3 - 050913

Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

Setzt man den Zähler von  $A$  gleich  $x$  und den Nenner von  $A$  gleich  $y$ , so erhält man

$$A = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad B = \frac{x+1}{y+2}$$

und weiter

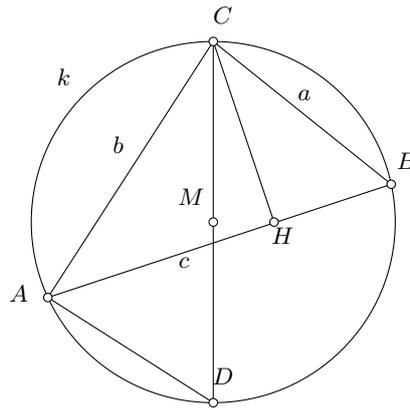
$$A - B = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}$$

Da  $2x > y$  ist, folgt  $2x - y > 0$  und wegen  $y > 0$  weiter  $A - B > 0$ . Es gilt also  $A > B$ .

#### Aufgabe 4 - 050914

Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.



Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit  $A$ ,  $B$  und  $C$ , dass keiner der Dreieckswinkel größer als der bei  $C$  ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  (siehe Bild). Dann ist  $AC$  nicht Durchmesser des Umkreises  $k$ , weil sonst der Winkel bei  $B$  ein rechter und daher größer als der bei  $C$  wäre. Ist  $CD$  Durchmesser des Umkreises  $k$ , so ist  $D \notin g_{AC}$ .

$H$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $C$  auf  $g_{AB}$ . Dann gilt, wenn  $r$  der Umkreisradius ist,  $|CD| = 2r$  und für den Flächeninhalt  $I$  des Dreiecks  $ABC$ , wenn noch  $|HC| = h_c$  gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \quad (1)$$

Nach Definition von  $H$  ist  $|\angle BHC| = 90^\circ$ , und nach dem Satz von Thales gilt

$$|\angle DAC| = 90^\circ. \quad (2)$$

Der Punkt  $B$  liegt auf derselben Seite von  $g_{AC}$  wie  $D$ , denn andernfalls lägen  $B$  und  $D$  nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von  $g_{AC}$ . Dann wäre  $ABCD$  ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach folgendem Satz:

$ABCD$  ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel  $180^\circ$  beträgt, wenn also  $|\angle ABC| + |\angle CDA| = 180^\circ$  ist.

$$|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ. \quad (3)$$

Wegen (2) ist  $|\angle ADC| < 90^\circ$  und folglich wäre wegen (3)  $|\angle ABC| > 90^\circ$  im Widerspruch dazu, dass  $\angle ACB$  größter Winkel im Dreieck  $ABC$  ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz  $\angle CBA \simeq \angle CDA$ . Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz  $\triangle BCH \sim \triangle DCA$ . Daraus folgt

$$a : h = 2r : b, \quad \text{d.h.} \quad h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

$$I = \frac{abc}{4r}.$$

*Aufgaben der I. Runde 1965 gelöst von Manuela Kugel*

## 2.7.2 II. Runde 1965, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 050921**

Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen  $a$  und  $b$ , für die  $(a + b)^3 = a^3 + b^3$  gilt.

Die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3$$

ist wegen

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \cdot (a + b) = 0$$

$$ab \cdot (a + b) = 0$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

- a)  $a = 0$ ,  $b$  beliebig rational,
- b)  $b = 0$ ,  $a$  beliebig rational,
- c)  $a = -b$ ,  $b$  beliebig rational.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

**Aufgabe 2 - 050922**

28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.

Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.

Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.

Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.

Wie viel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit  $y$ , und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit  $x$ , so müssen  $x$  und  $y$  der folgenden Gleichung genügen:

$$2x + 5y + 6 = 28, \quad \text{also} \quad 2x + 5y = 22 \quad (1)$$

Daher muss  $y$  gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung  $y \neq 0$  und  $x > 1$  gilt, ist (1) nur für  $y = 2$  und  $x = 6$  erfüllt. Die Anzahl der Teilnehmer betrug also:

Beim Kugelstoßen  $2 \cdot 6 + 2 + 6 = 20$  Schüler, beim Weitsprung  $5 \cdot 2 + 6 = 16$  Schüler und beim 100-m-Lauf  $5 \cdot 2 + 6 = 16$  Schüler.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

**Aufgabe 3 - 050923**

Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:

„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du...“

- a) Wie alt war da die Schwester?
- b) Wie viel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Größen:  $b$  = jetziges Alter des Bruders,  $s$  = jetziges Alter der Schwester,  $t$  = jetziges Alter der Tante.  
 "Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin" bedeutet

$$s - (t - (b + s)) = b \Rightarrow t = 2s$$

"Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ." ergibt

$$s - (t - s) = s - (2s - s) = s - s = 0$$

- a) Die Schwester wurde gerade geboren.  
 b) Die Tante ist jetzt doppelt so alt wie die Schwester.

*Aufgabe gelöst von Matthias Lösche*

#### Aufgabe 4 - 050924

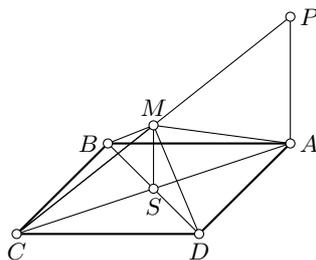
In einer Ebene  $\epsilon$  ist ein Rechteck  $ABCD$  gegeben.  $P$  sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene  $\epsilon$  durch  $A$ .

Es ist zu beweisen, dass die Punkte  $A, B, D$  auf der Kugel mit dem Durchmesser  $PC$  liegen.

Der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $PC$  ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser  $PC$ . Die Punkte  $A, B$  und  $D$  liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

ist (siehe Bild).



Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von  $M$  auf  $\epsilon$ . Sein Fußpunkt  $S$  liegt wegen  $MS \parallel PA$  auf  $AC$ .

Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen  $|CM| = |MP|$

$$|CS| = |SA|$$

Also ist  $S$  der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks  $ABCD$ . Die Dreiecke  $CSM$ ,  $ASM$ ,  $BSM$  und  $DSM$  sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent. Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

Die Punkte  $A, B, C, D$  und  $P$  liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $\frac{1}{2}|PC|$ , also mit dem Durchmesser  $PC$ .

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

## 2.7.3 III. Runde 1965, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 050931**

Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Sei  $n^2$  eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist  $n$  nicht durch 3 teilbar (sonst wäre  $n^2$  durch 9 teilbar).

$n$  lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als

$$n = 3m + 1 \quad \text{oder} \quad n = 3m + 2$$

mit passend gewähltem ganzzahligem  $m$ . Dann ist

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \quad \text{oder}$$

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt  $n^2$  bei Division durch 3 den Rest 1.

*Aufgabe gelöst von Kitaktus*

**Aufgabe 2 - 050932**

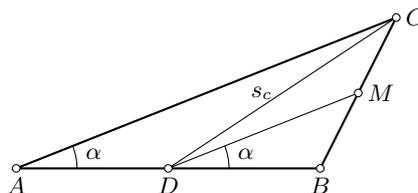
a) Konstruieren Sie das Dreieck  $\triangle ABC$ , wenn  $\alpha$ ,  $a$  und  $s_c$  gegeben sind. Dabei bedeutet  $\alpha$  das Maß des Winkels  $\angle CAB$ ,  $a$  die Länge der Seite  $BC$  und  $s_c$  die Länge der Seitenhalbierenden  $CD$ , wobei  $D$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$  ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

I. Analyse:

Angenommen,  $ABC$  sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen. Bezeichnet  $M$  den Mittelpunkt von  $BC$  und  $D$  der Mittelpunkt von  $AB$ , dann liegt  $D$

- 1) auf dem Kreis  $k$  um  $C$  mit dem Radius  $s_c$ .
- 2) auf einem zu  $\alpha$  gehörigen Ortskreisbogen  $\widehat{b}$  über  $BM$ .



Beweis:

- 1) gilt auf Grund der Definition des Kreises
- 2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt  $DM \parallel AC$  und somit  $\angle BDM \cong \angle BAC$  (als Stufenwinkel an Parallelen), so dass nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes  $D$  auf  $\widehat{b}$  liegt.

Der Punkt  $A$  liegt

- 1) auf dem von  $B$  ausgehenden Strahl durch  $D$  (ausschließlich  $B$ )
- 2) auf dem Kreis um  $D$  mit dem Radius  $|BD|$ .

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass  $D$  Mittelpunkt von  $AB$  ist. Daher können  $A, B, C$  nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion

Man zeichne die Strecke  $BC$  der gegebenen Länge  $a$ . Danach konstruiere man den Mittelpunkt  $M$  von  $BC$ . Um  $C$  schlage man den Kreis  $k$  mit dem gegebenen Radius  $s_c$ , und über  $BM$  errichte man einen zu  $\alpha$  gehörigen Ortskreisbogen  $\widehat{b}$ .

Ist  $D$  ein gemeinsamer Punkt von  $k$  und  $\widehat{b}$ , so trage man auf dem von  $B$  ausgehenden Strahl durch  $D$  von  $D$  aus nach der  $B$  nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge  $|BD|$  ab, deren zweiter Endpunkt  $A$  sei.

III. Satz:

Sind  $A, B, C$  gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:

Nach Konstruktion ist  $|BC| = a$ ,  $D$  Mittelpunkt von  $AB$  und  $|CD| = s_c$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt  $|\angle BDM| = \alpha$  und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen  $\angle BDM \cong \angle CAB$ , so dass  $|\angle CAB| = \alpha$  ist.

IV. Determination:

Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls  $D$  existiert, ausführbar.

Der Punkt  $D$  existiert, wenn

- 1)  $\alpha \geq 90^\circ$ ;  $\frac{a}{2} < s_c < a$
- 2)  $\alpha < 90^\circ$ ;  $d - r \leq s_c < d + r$

In allen anderen Fällen existiert  $D$  nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [5]

### Aufgabe 3 - 050933

Die positive ganze Zahl  $x$  ende auf die Ziffern  $a$  und  $b$  (in dieser Reihenfolge).

Man ermittle alle geordneten Paare  $(a, b)$ , für die  $x^2$  auf dieselben Ziffern  $a$  und  $b$  (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

Es sei

$$x = 100c + d, \quad d = 10a + b$$

und  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $0 \leq a \leq 9$ ,  $0 \leq b \leq 9$ . Dann gilt

$$(100c + d)^2 = 100e + d, \quad e \text{ natürliche Zahl}$$

$$10000c^2 + 200cd + d^3 = 100e + d$$

$$100e = 10000c^2 + 200cd + d^2 - d$$

$$e = 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100}$$

Es ist  $e$  genau dann ganzzahlig, wenn  $d(d-1)$  durch 100 teilbar ist. Da  $d$  und  $d-1$  nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muss einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen  $d < 100$  ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür

$d$	$d-1$	$100 (d^3-d)$	$d$	$d-1$	$100 (d^3-d)$
0	-1	ja	1	0	ja
25	24	ja	26	25	nein
50	49	nein	51	50	nein
75	74	nein	76	75	ja

Folgende geordnete Paare  $(a, b)$  und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung:  $(0; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(2; 5)$  und  $(7; 6)$ .

Übernommen aus [5]

### Aufgabe 4 - 050934

Man ermittle für die reellen Zahlen  $a$  und  $b$ ,  $a \neq 0$ , die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2}$$

Daraus folgt  $|x_2| > |x_1|$  für  $a > 0$  und  $|x_1| > |x_2|$  für  $a < 0$ .

Übernommen aus [5]

**Aufgabe 5 - 050935**

In dem Parallelogramm  $ABCD$  sei  $AB = CD = a$ ,  $BC = AD = b$ , ( $a > b$ ) und  $AE = h_a$ , wobei  $E$  der Fußpunkt des vom Punkt  $A$  des auf die Seite  $CD$  bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.

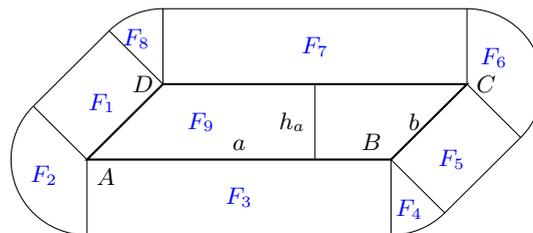
Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge  $r$  gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche  $F$ , die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Für  $2r \geq h_a$  wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen.
2. Für  $2r < h_a$  wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn  $h_b$  die zur Seite  $BC$  gehörige Höhenlänge des Parallelogramms  $ABCD$  bezeichnet,  $ah_a = bh_b$ , und somit, weil  $a > b$  vorausgesetzt ist,  $h_a < h_b$ , und daher auch  $2r < h_b$ .

Im Fall 1) lässt sich überstrichene Fläche  $F$  in die Teilflächen  $F_1$  bis  $F_9$  zerlegen.



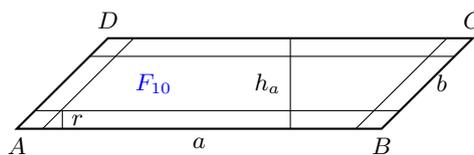
Dabei sind

- $F_1$  und  $F_5$  Rechtecke mit den Seitenlängen  $a$  und  $r$ ,
- $F_3$  und  $F_7$  Rechtecke mit den Seitenlängen  $b$  und  $r$ ,
- $F_2, F_4, F_6$  und  $F_8$  Kreissektoren, die im Radius  $r$  übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe  $360^\circ$  ergänzen. Daher kann man die vier Kreissektoren zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

Also gilt für den Flächeninhalt  $I(F)$  der überstrichenen Fläche

$$I(F) = 2(I(F_1) + I(F_3)) + I(F_9) + \pi r^2 = 2(ar + br) + \pi r^2 + ah_a$$

Im Fall 2) entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Fall 1. Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche  $F_{10}$  frei.



$F_{10}$  ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge  $(a - 2x)$  und der zugehörigen Höhe  $(h_a - 2r)$ , wobei  $x$  die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt  $x : r = b : h_a$  und damit  $x = \frac{br}{h_a}$ .

Also gilt für den Inhalt  $I(F')$  der überstrichenen Fläche im Fall 2

$$I(F') = I(F) - I(F_{10}) = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left( ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a} \right) =$$

$$= 4 \left( ar + br - \frac{br^2}{h_a} \right) + \pi r^2$$

Übernommen aus [5]

### Aufgabe 6 - 050936

Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerkung, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.

Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.

Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.

Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.

Die Mutter stellt danach fest, dass insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.

Wie viel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit  $x$ , so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Renate nimmt

$$2 + \left( \frac{2x-2}{3} - 2 \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{2x+10}{9} = \frac{4x-16}{9}$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x-16}{27}$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9} - \frac{4x-16}{27} = \frac{8x-32}{27}$$

Laut Aufgabe gilt

$$x - \frac{8x-32}{27} = 42$$

und somit  $x = 58$ . Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

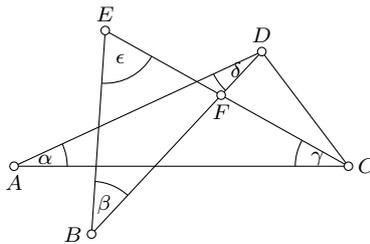
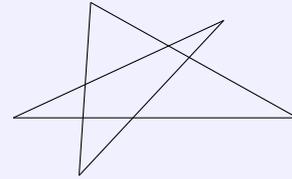
Übernommen aus [5]

## 2.8 VI. Olympiade 1966

## 2.8.1 I. Runde 1966, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 060911

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.



Es seien:  $\alpha = \angle CAD$ ;  $\beta = \angle EBD$ ;  $\gamma = \angle ACE$ ;  $\delta = \angle BDA$ ;  $\epsilon = \angle BEC$ .  
Im Dreieck  $\triangle ACD$  gilt dann nach Innenwinkelsummensatz:

$$180^\circ = \alpha + \gamma + \angle ECD + \angle CDB + \delta$$

Unter Nutzung des Innenwinkelsummensatzes in Dreieck  $\triangle CDF$ :

$$= \alpha + \gamma + \delta + (180^\circ - \angle CFD)$$

Ferner gilt:  $\angle BFE = \angle CFD$ , weil sie zueinander Scheitelwinkel sind. Ferner gilt der Innenwinkelsummensatz im Dreieck  $\triangle BFE$ :

$$= \alpha + \gamma + \delta + 180^\circ - \angle BFE = \alpha + \gamma + \delta + 180^\circ - (180^\circ - \beta - \epsilon) = \alpha + \gamma + \delta + \beta + \epsilon$$

Dies ist die Summe aller 5 Innenwinkel der Spitzen des fünfzackigen Sternes und beträgt somit  $180^\circ$ .

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

## Aufgabe 2 - 060912

Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

Die erste Quersumme  $Q_n$  einer ein-, zwei- oder dreistelligen Zahl  $n$  kann maximal 27 sei, nämlich für eine Zahl ausschließlich bestehend aus der größten Ziffer 9  $\Rightarrow Q_{999} = 9 + 9 + 9 = 27$ . Dies ist gleichzeitig die einzige Zahl, die diese Quersumme hat und ist eine der gesuchten Zahlen, da  $Q_{27} = 9$ .

Die nächstkleinere erste Quersumme, deren letzte Quersumme 9 ist, ist 18. Danach folgt nur noch die Quersumme 9, deren letzte Quersumme natürlich auch 9 ist. Wir müssen nun also noch alle Zahlen finden, deren Quersumme 9 oder 18 ist.

Im Bereich der ein- und zweistelligen Zahlen sind 9, 18, 27, ..., 81, 90 die einzigen Zahlen mit Quersumme 9 und 99 die einzige Zahl mit Quersumme 18. Dies sind in Summe 11 Zahlen.

Im Bereich 100 bis 199 kommen wir ebenfalls auf 11 solche Zahlen: 108, 117, 126, ..., 171, 180 mit Quersumme 9 sowie 189 und 198 mit Quersumme 18.

Diese Bildungsvorschrift setzt sich in jedem Hunderterbereich mit 11 Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, fort.

Damit ergeben sich  $10 \cdot 11 + 1$  Zahlen, deren Quersumme 9, 18 oder 27 und damit deren letzte Quersumme 9 ist.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

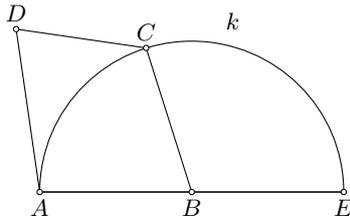
## Aufgabe 3 - 060913

In einem Viereck  $ABCD$  wird die Seite  $AB$  über  $B$  hinaus bis zum Punkt  $E$  so verlängert, dass  $\overline{BE} = \overline{AB}$  ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel  $\angle ACE$  ein rechter Winkel ist.

Das Viereck  $ABCD$  hat

- vier kongruente Winkel,
- vier kongruente Seiten,
- zwei Paare kongruenter Seiten,
- zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
- zwei kongruente Winkel.



Aufgrund der Lage von  $A$ ,  $B$  und  $E$  kann man feststellen, dass der Winkel  $\angle ACE$  immer genau dann ein rechter Winkel ist, wenn sich  $C$  auf dem Kreis um  $B$  mit dem Radius  $\overline{AB}$  befindet. Die Lage von  $C$  ist daher definiert, aber nicht eindeutig. Gleichzeitig kann man sagen, dass die Lage von  $D$  unabhängig zu den anderen Viereckecken ist.

- vier kongruente Winkel  $\Rightarrow$  falsch, da  $D$  beliebig
- vier kongruente Seiten  $\Rightarrow$  falsch, da  $D$  beliebig
- zwei Paare kongruenter Seiten  $\Rightarrow$  falsch, da  $D$  beliebig
- zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt  $\Rightarrow$  korrekt: gemeinsamer Punkt  $B$  und kongruente Seiten  $\overline{AB} = \overline{BC}$  mit  $A$  und  $C$  auf dem Kreisbogen und  $B$  als Kreismittelpunkt
- zwei kongruente Winkel  $\Rightarrow$  falsch, da  $D$  beliebig.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

#### Aufgabe 4 - 060914

Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden  $\frac{1}{2}$  Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann).

Die vier Schachspieler, die die letzten 4 Plätze belegten, mussten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf.

Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl.

Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d.h. sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechsten Spieler besiegt.

Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z.B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

*Übernommen aus [5]*

## 2.8.2 II. Runde 1966, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 060921**

Geben Sie vier verschiedene Paare  $(a, b)$  positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!  
(Je zwei Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$105 = a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \quad \text{3. Binomische Formel}$$

Nun wird substituiert:  $x := a + b$  und  $y := a - b$ .

Damit gilt:  $a = x - b = y + b$ . Also ergibt sich:

$$b = \frac{x - y}{2} \quad (1)$$

sowie

$$a = \frac{x + y}{2} \quad (2)$$

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare  $(x, y)$  mit  $x \geq y$ , da  $a + b \geq a - b$ , wenn  $a, b \in \mathbb{N}$ :  $(105, 1)$ ,  $(35, 3)$ ,  $(21, 5)$ ,  $(15, 7)$ .

Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\text{Fall 1: } x = 105, y = 1 \Rightarrow a = 53, b = 52$$

$$\text{Fall 2: } x = 35, y = 3 \Rightarrow a = 19, b = 16$$

$$\text{Fall 3: } x = 21, y = 5 \Rightarrow a = 13, b = 8$$

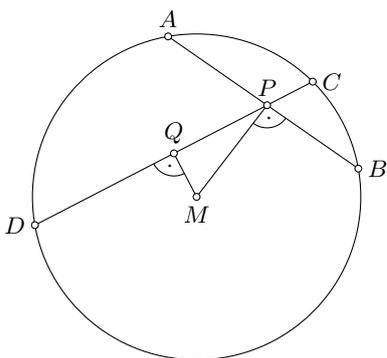
$$\text{Fall 4: } x = 15, y = 7 \Rightarrow a = 11, b = 4$$

*Aufgabe gelöst von Felix Kaschura*

**Aufgabe 2 - 060922**

Innerhalb eines Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius von der Länge  $r$  liege der von  $M$  verschiedene Punkt  $P$ .

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch  $P$  die kürzeste!



**Konstruktion:**

Man verbindet  $P$  mit dem Mittelpunkt  $M$  des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu  $MP$  in  $P$ . Sie schneide die Kreislinie in den Punkten  $A$  und  $B$ .  $AB$  ist die gesuchte Sehne.

**Beweis:**

Zum Nachweis, dass  $AB$  die kürzeste durch  $P$  verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch  $P$ . Sie schneide die Kreislinie in den Punkten  $C$  und  $D$ . Dann ist der Abstand der Sehne  $CD$  von  $M$  kleiner als  $MP$ . Enthält  $CD$  den Punkt  $M$ , dann ist der Abstand der Strecke  $CD$  von  $M$  gleich Null. Enthält aber  $CD$  den Punkt  $M$  nicht, dann fallen wir das Lot von  $M$  auf  $CD$  und nennen seinen Fußpunkt  $Q$ .

Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle MQP$  ist  $MP$  die Hypotenuse, und daher gilt  $\overline{MQ} < \overline{MP}$ . Nach dem Satz, dass von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt  $\overline{AB} < \overline{CD}$ .

Da  $CD$  (durch  $P$ ) beliebig angenommen wurde, muss  $AB$  die kürzeste durch  $P$  verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch  $M$  und  $P$  gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig.  $\square$

*Übernommen aus [5]*

**Aufgabe 3 - 060923**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks  $ABCD$  schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei  $a, b, c$  und  $d$  die Seitenlängen des Vierecks sind.Es ist zu beweisen, dass die Bedingung  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  notwendig und hinreichend ist. Also müsste gelten:

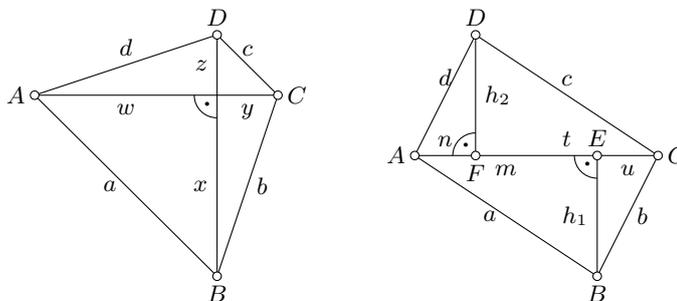
- (1) Wenn
- $AC \perp DB$
- ist, so ist
- $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$
- . In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = x^2 + w^2 \quad , \quad b^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad c^2 = z^2 + y^2 \quad , \quad d^2 = w^2 + z^2$$

wobei  $x, w, z$  und  $y$  die Längen der Diagonalenabschnitte sind. Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$$

Also gilt (1). Ferner müsste gelten:



- (2) Wenn
- $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$
- ist, so ist
- $AC \perp DB$
- . Man betrachtet das Viereck
- $ABCD$
- , in dem die Diagonale
- $AC$
- eingezeichnet ist. Von den Punkten
- $B$
- und
- $D$
- werden die Lote auf
- $AC$
- gefällt, ihre Fußpunkte seien
- $E$
- und
- $F$
- .

Ferner sei  $\overline{BE} = h_1$ ,  $\overline{DF} = h_2$ ,  $\overline{AF} = n$ ,  $\overline{FC} = t$ ,  $\overline{AE} = m$ ,  $\overline{EC} = u$  (rechte Figur).Dann gilt: (3)  $m + u = n + t$ . Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = m^2 + h_1^2 \quad , \quad c^2 = t^2 + h_2^2 \quad , \quad b^2 = u^2 + h_1^2 \quad , \quad d^2 = n^2 + h_2^2$$

also nach Voraussetzung

$$a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$$

Daraus folgt: (4)  $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$  bzw.  $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$ , oder

$$(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$$

Wegen (3) folgt (5)  $m - u = n - t$ .Aus (3) und (5) erhält man schließlich  $m = n$ , das heißt, die Punkte  $E$  und  $F$  sind identisch,  $D, E (= F)$  und  $B$  liegen auf derselben Gerade  $DB$ , die senkrecht zu  $AC$  verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig.  $\square$ 

Übernommen aus [5]

**Aufgabe 4 - 060924**

Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanz.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

Da  $\text{Fred} < \text{Anton}$ , und  $\text{Anton} < \text{Eva}$ , ist  $\text{Fred} < \text{Eva}$ . Daraus folgt das Paar Fred mit Monika. und Jürgen mit Dorothea. Aus  $\text{Anton} < \text{Brigitte}$  und  $\text{Anton} < \text{Eva}$  folgt, dass Christina mit Anton kein Paar bildet, d.h. Anton mit Inge.

Da  $\text{Helmut} < \text{Anton} < \text{Eva}$  und  $\text{Helmut} < \text{Anton} < \text{Brigitte}$  bildet Helmut mit Christina ein Paar. Es verbleiben genau zwei Möglichkeiten für Günter, Kurt und Brigitte, Eva, und zwar die folgenden:

1. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.
2. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**2.8.3 III. Runde 1966, Klasse 9****Aufgabe 1 - 060931**

Zwei Primzahlen  $p_1$  und  $p_2$  (mit  $p_1 > p_2$ ) heißen Primzahlzwillinge, wenn  $p_1 - p_2 = 2$  gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge  $p_1$  und  $p_2$ , für die  $p_2 > 3$  ist, stets die Summe  $p_1 + p_2$  durch 12 teilbar ist!

Laut Aufgabe gilt  $p_1 = p_2 + 2$ . Also gilt

$$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$$

Da jede Primzahl  $> 3$  eine ungerade Zahl ist, ist  $p_2 + 1$  gerade und  $p_1 + p_2$  mithin durch 4 teilbar. Ferner sind  $p_2$ ,  $p_2 + 1$  und  $p_2 + 2 (= p_1)$  drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist.

Da aber  $p_1$  und  $p_2$  Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist  $p_2 + 1$  durch 3 teilbar und damit  $p_1 + p_2 = 2(p_2 + 1)$  durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

*Lösung übernommen von [5]*

**Aufgabe 2 - 060932**

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder  $ABCD$  die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Der Umfang sei  $u$ , die Seitenlängen seien  $a, b, c, d, e, f$ , so dass

$$u = a + b + c = a + e + f = b + d + f = c + d + e$$

Addiere die ersten beiden Umfänge und ziehe die anderen beiden Umfänge ab, und wir erhalten:

$$0 = u + u - u - u = a + b + c + a + e + f - b - d - f - c - d - e = 2a - 2d$$

also  $a = d$ . Analog erhält man  $b = e$  und  $c = f$ . Also haben alle vier Dreiecke Seiten mit Längen  $a, b$  und  $c$ . Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind bekanntlich kongruent.

*Aufgabe gelöst von philippw*

**Aufgabe 3 - 060933**

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fache der Summe der Kathetenlängen.

Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit  $a, b$  bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit  $c$ . Dann ist  $(a - b)^2$  als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$$

Wegen  $c > 0$  und  $a + b > 0$  folgt hieraus die Behauptung  $c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$ .

*Lösung übernommen von [5]*

**Aufgabe 4 - 060934**

Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form  $2p + 1$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Sei  $2p + 1 = a^3$ . Dann ist  $a$  ungerade und es gilt

$$p = \frac{a^3 - 1}{2} = \frac{a - 1}{2}(a^2 + a + 1)$$

Da  $p$  prim, muss  $\frac{a-1}{2} = 1$  oder  $a^2 + a + 1 = 1$  gelten.

Da  $a^2 + a + 1 > 1$  folgt  $a = 3$  und somit  $p = 13$ . In der Tat ist 13 prim und es gilt  $2 \cdot 13 + 1 = 3^3$ .

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

#### Aufgabe 5 - 060935

Auf dem Kreis  $k$  bewegen sich der Punkt  $A$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_1$  und der Punkt  $B$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_2$ , wobei  $v_1 \neq v_2$  ist.

Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt  $A$  den Punkt  $B$  jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  (in m/min)?

a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt  $v_1 > v_2$ . Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von  $B$  bezüglich  $A$  durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also

$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24} \text{ m} = 280 \text{ m}$$

Das ist die Länge des Kreisumfangs.

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14 \text{ m}}{24 \text{ s}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von  $B$  bezüglich  $A$  durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit  $v_2$  von  $v_1$ . Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{280 \text{ m}}{56 \text{ min}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also  $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$  und  $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ .

Übernommen aus [5]

#### Aufgabe 6 - 060936

In einer Ebene sind ein Kreis  $k$ , eine Gerade  $g$  sowie ein Punkt  $A$  auf  $g$  gegeben.

Man konstruiere einen Kreis  $k'$ , der erstens  $k$  berührt und zweitens  $g$  in  $A$  berührt.

Man untersuche, wie viele solcher Kreise  $k'$  es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von  $k$ ,  $g$  und  $A$  geben kann.

Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für den Mittelpunkt  $M$  von  $k'$  an falls  $A$  nicht auf  $g$  liegt und untersuchen dann, wie viele Möglichkeiten es gibt.

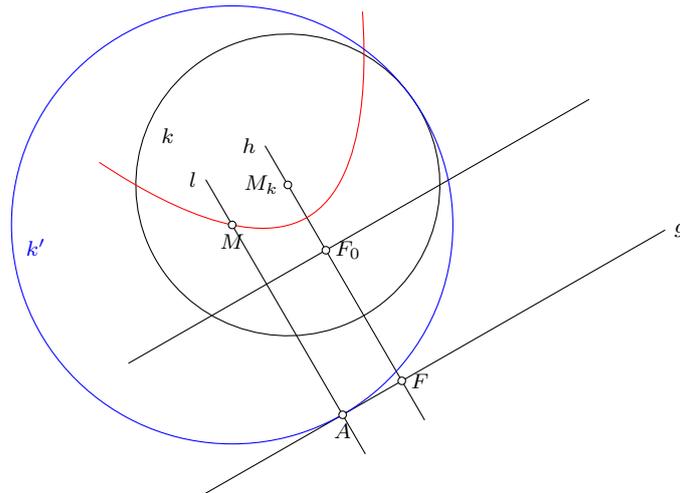
Wir konstruieren zunächst die zu  $g$  senkrechte Gerade  $h$  durch den Mittelpunkt von  $k$ .

Wir verschieben nun  $g$  entlang dieser Senkrechten um den Radius von  $k$ . Wir konstruieren nun die Ortslinie aller Punkte, die von der verschobenen Gerade und dem Mittelpunkt denselben Abstand haben. Dies ist eine Parabel, die symmetrisch bzgl.  $h$  ist.

Damit  $k'$  nicht nur  $g$  berührt, sondern dies auch in  $A$  tut, konstruieren wir die zu  $g$  senkrechte Gerade  $l$  durch  $A$ .

Weil  $l$  zu  $h$  parallel ist, hat diese genau einen Schnittpunkt mit der oben konstruierten Parabel. Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines gewünschten Kreises (denn der Abstand von  $M$  zum Mittelpunkt von  $k$  ist gleich dem Abstand von  $M$  zu  $A$  plus dem Radius des Kreises  $k$ ).

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:



1.  $g$  ist Passante von  $k$ . Dann kann  $k'$  sowohl  $g$  als auch  $k$  nur dann berühren, wenn  $k'$  in derselben Halbebene bzgl.  $g$  liegt wie  $k$ .

Der Mittelpunkt  $M$  von  $k'$  muss außerdem auf einer zu  $g$  senkrechten Geraden durch  $A$  liegen, damit  $k'$  die Gerade  $g$  in  $A$  berührt. Es gibt nun zwei prinzipielle Möglichkeiten, wie sich  $k$  und  $k'$  berühren können:

Äußerlich (dann muss der Abstand von  $M$  zum Mittelpunkt von  $k$  gleich dem Abstand von  $M$  zu  $A$  plus dem Radius des Kreises  $k$  sein) oder innerlich (dann muss der Abstand von  $M$  zum Mittelpunkt von  $k$  gleich dem Abstand von  $M$  zu  $A$  minus dem Radius des Kreises  $k$  sein). Beide Fälle treten genau je einmal auf (für das äußerliche Berühren zeigt das die Konstruktion von oben, dass innerliche Berühren lässt sich analog begründen, hier muss nur  $g$  zu Beginn anders verschoben werden), es gibt also genau zwei Möglichkeiten für  $k'$ .

2.  $g$  ist Tangente an  $k$ . Ist  $A$  der Berührungspunkt von  $k$  und  $g$ , so gibt es unendliche viele Möglichkeiten für  $k'$  (jeder Kreis der  $g$  in  $A$  berührt, berührt auch  $k$ ).

Ist  $A$  nicht der Berührungspunkt von  $k$  und  $g$ , so gibt es genau eine Möglichkeit für  $k$ :

Es gibt nämlich theoretisch wieder die Fälle des inneren und äußeren Berührens wie oben, das äußere Berühren tritt genau einmal auf, das innere Berühren jedoch nicht, denn hier liegt  $A$  auf der verschobenen Gerade, die konstruierte Ortslinie ist hier eine Senkrechte durch den Mittelpunkt von  $k$  und diese hat mit der Senkrechten zu  $g$  durch  $A$  keinen Schnittpunkt.

3.  $g$  ist Sekante an  $k$ . Ist  $A$  einer der Schnittpunkte von  $k$  und  $g$  so gibt es keine Möglichkeit für  $k'$  (denn jeder Kreis, der  $g$  in  $A$  berührt schneidet  $k$  in  $A$ ).

Liegt  $A$  außerhalb von  $k$ , so gibt es genau zwei Möglichkeiten (hier kann nämlich, anders als in Fall 1, der Kreis  $k'$  in einer beliebigen Halbebene bzgl.  $g$  liegen, da  $A$  außerhalb von  $k$  liegt ist aber nur äußeres Berühren möglich).

Analog dazu gibt es im Fall, dass  $A$  in  $k$  liegt auch genau zwei Möglichkeiten.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

Rechnerische Lösung:

Sei  $h$  der Abstand des Kreismittelpunkts von  $k$  zur Gerade  $g$  und  $d$  der Abstand vom Fußpunkt der Strecke  $h$  auf  $g$  zum Punkt  $A$ .  $r, r'$  bezeichnen die Radien. Dann erhalten wir mittels Pythagoras:

$$(h - r')^2 + d^2 = (r + r')^2 \iff h^2 + d^2 - r^2 = 2(r + h)r'$$

Nun können wir über ein rechtwinkliges Dreieck ein Quadrat mit der Fläche  $h^2 + d^2 - r^2$  konstruieren und dazu ein Rechteck mit gleicher Fläche, wobei die eine Seite  $2(r + h)$  bekannt ist und die andere dann den gesuchten Radius ergibt.

Falls  $k \cap g \neq \emptyset \iff h \leq r$ , gibt es eine zweite Lösung über die Gleichung

$$(h + r')^2 + d^2 = (r + r')^2$$

## 2.9 VII. Olympiade 1967

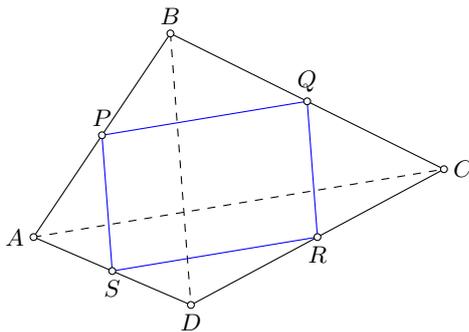
## 2.9.1 I. Runde 1967, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 070911**

Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

- (1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.
- (2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.



Sei das konvexe Viereck  $ABCD$  gegeben. Die Diagonalen sind demnach  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$ .

Durch die Angabe, dass 2 Seiten des (vermeintlichen) Parallelogramms parallel zu  $\overline{AC}$  und auch halb so groß wie  $\overline{AC}$  sind, sind die 4 Eckpunkte des (vermeintlichen) Parallelogramms schon bestimmt. Denn es existiert genau eine solche Strecke im Dreieck  $ABC$  und eine im Dreieck  $ACD$ .

Die eine Strecke sei  $\overline{PQ}$  mit  $P$  auf  $\overline{AB}$  und  $Q$  auf  $\overline{BC}$ , die andere  $\overline{RS}$  mit  $R$  auf  $\overline{CD}$  und  $S$  auf  $\overline{AD}$ .

Wir wissen nach Voraussetzung, dass  $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AC}$  gilt und dass diese Strecken parallel sind. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass  $\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$  gilt und dass auch diese Strecken parallel sind, dann sind wir fertig.

Nach Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Daraus folgt  $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ . Der Punkt  $P$  halbiert also die Seite auf der er liegt. Gleiches lässt sich für  $Q$ ,  $R$  und  $S$  schließen.

Es gilt also  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$ . Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit, dass  $\overline{PS}$ ,  $\overline{QR}$  und  $\overline{BD}$  zueinander parallel sind. Mit dem 2. Strahlensatz folgt direkt  $\frac{\overline{PS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$ .

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

**Aufgabe 2 - 070912**

Es ist  $x$  eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie  $x$ .

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Sei  $y$  ein fünfstellige Zahl ( $f$  gesuchte Ziffern). Es ist  $x = 10y + 5$  Dann gilt:

$$4 \cdot (10y + 5) = 50000 + y \quad \rightarrow \quad 39y = 499980 \quad \rightarrow \quad y = 12820$$

Damit lautet die Zahl im Dezimalsystem 128205.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 3 - 070913**

Für jede ganze Zahl  $n \geq 3$  ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes  $n$ -Eck haben kann.

In einem konvexen Polygon sind alle Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$ . Ein konvexes  $n$ -Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme  $180^\circ \cdot (n - 2)$ . Es habe  $k$  rechte Winkel.

(1) Sei  $k = n$ . Dann wird  $90^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot (n - 2)$ , also  $n = 2n - 4$  und  $n = 4$ .

Dies ist also nur dann möglich, wenn  $n = 4$  ist.  $k = n = 4$  ist bei einem Rechteck erfüllt.

(2) Sei  $k < n \Rightarrow n - k > 0$

Die restlichen  $n - k$  Innenwinkel (die ja existieren, weil  $n - k > 0$ ) sind alle kleiner als  $180^\circ$  (konvexes Polygon!). Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot (n - 2) &< 90^\circ \cdot k + 180^\circ \cdot (n - k) \\ -360^\circ &< -90^\circ \cdot k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

Folglich kann in diesem Fall die natürliche Zahl  $k$ , die echt kleiner als 4 sein soll, höchstens 3 sein. Bei jedem  $n > 4$  ist dies auch möglich. Zum Beispiel kann ein Polygon drei rechte Winkel und  $n - 3$  Winkel der Größe  $(180^\circ \cdot (n - 2) - 270^\circ)/(n - 3)$  haben, die Winkel haben dann die Summe  $180^\circ(n - 2)$ .

$$\frac{180^\circ \cdot (n - 2) - 270^\circ}{n - 3} = 180^\circ - \frac{90^\circ}{n - 3}$$

Das heißt: jeder dieser Winkel wäre kleiner als  $180^\circ$  und größer als  $90^\circ$ . Wäre ein weiterer Winkel  $90^\circ$ , so würde mindestens ein Winkel größer als  $180^\circ$  sein oder alle nicht- $90^\circ$ -Winkel wären gleich  $180^\circ$ :

$$\frac{180^\circ \cdot (n - 2) - 360^\circ}{n - 4} = 180^\circ$$

Für  $n = 3$  kann es maximal einen rechten Winkel geben, da sonst das Dreieck entartet.

*Antwort:*

Für  $n = 3$  gibt es maximal einen rechten Winkel.

Für  $n = 4$  gibt es maximal 4 rechte Winkel.

Für  $n > 4$  gibt es maximal 3 rechte Winkel.

*Aufgabe gelöst von Annika Heckel*

#### **Aufgabe 4 - 070914**

Vier Mannschaften  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.

Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft  $D$ . Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel  $A$  gegen  $B$  endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Platzierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln. Wie ist das möglich?

Da  $A$  gegen  $B$  das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben  $A$  und  $B$  je eine ungerade,  $C$  und  $D$  je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst  $D$  als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte  $D$  jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.

Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da  $D$  die letzte Mannschaft ist, hat  $D$  Null Punkte. Folglich errang  $C$ , Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

## 2.9.2 II. Runde 1967, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 070921**

Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen  $(m, n)$ , für die  $m + n = 111$  gilt.

Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Gruppen aufteilen:

1. Gruppe: Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11.

Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit  $(a; b)$ ,  $(c; d)$ , dann erfüllen auch die Paare  $(a; d)$ ,  $(c; b)$ ;  $(e; b)$ ,  $(a; d)$  und  $(c; d)$ ,  $(a; b)$  die gleiche Bedingung. Wegen  $0 + 1 = 1$  und  $9 + 2 = 11$ ;  $8 + 3 = 11$ ;  $7 + 4 = 11$ ;  $6 + 5 = 11$  gibt es genau 6 derartige Paare.

2. Gruppe: Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10.

Das ergibt wegen  $9 + 1 = 10$ ;  $8 + 2 = 10$ ;  $7 + 3 = 10$ ;  $6 + 4 = 10$  und  $5 + 5 = 10$  aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.

Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

*Lösung übernommen von [5]*

**Aufgabe 2 - 070922**

Für zwei rationale Zahlen  $a$  und  $b$  gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18,75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$  und  $a : b$  überein.

Ermitteln Sie die Zahlen  $a$  und  $b$ !

Da mit  $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} > 0$  auch  $b = \frac{a \cdot b}{a}$  positiv ist, gilt  $a - b < a + b$ .

Insbesondere kann also  $a - b$  nicht den größten der vier Werte annehmen. Es verbleiben zwei Fälle:  $a - b = 5$  oder  $a - b = 3$ .

In beiden Fällen ist  $a - b \in \mathbb{N}$ . Wäre  $a + b = 18,75$ , so würde  $a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \notin \mathbb{N}$  folgen, da im Zähler dieses Bruchs von einer nicht ganzen eine ganze Zahl subtrahiert wird, also noch nicht einmal der Zähler eine ganze Zahl ist. Aber  $a \cdot b \notin \mathbb{N}$  wäre ein Widerspruch, da die übrigen drei Ergebnisse alle natürlich sind. Also folgt in beiden Fällen  $a + b \neq 18,75$ .

1. Fall:  $a - b = 5$ .

Dann verbleibt für  $a + b$  als einziger Wert die 10, was zu  $a = \frac{15}{2}$ ,  $b = \frac{5}{2}$ ,  $a \cdot b = \frac{75}{4} = 18,75$  und  $a : b = 3$ , also einer Lösung, führt.

2. Fall:  $a - b = 3$ .

Wäre  $a + b = 10$ , so  $a = \frac{13}{2}$ ,  $b = \frac{7}{2}$  und  $a \cdot b = \frac{91}{4}$ , was nicht in der Liste vorkommt. Also verbleibt hier noch die Möglichkeit  $a + b = 5$  zu prüfen, die aber auf  $a = 4$ ,  $b = 1$  und  $a \cdot b = 4$ , also auch keine Lösung, führt.

Es gibt also genau ein Lösungspaar, nämlich  $(a, b) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

2. Lösung:

Ausgehend von der Gleichung

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \quad (*)$$

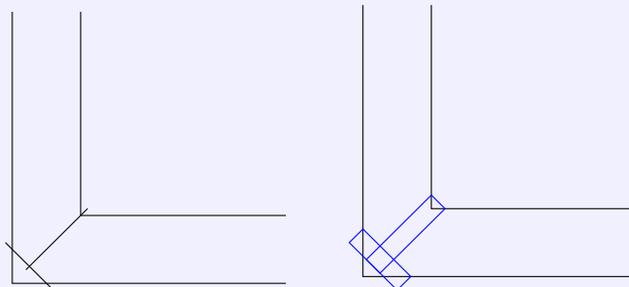
bleibt aufgrund der Tatsachen, dass 18,75 gemäß der Angabe unter den 3 Werten  $a + b, a - b, ab$  vorkommen muss, aber  $a \pm b = 18,75$  auf den Widerspruch führt, dass die linke Seite von (\*) im Gegensatz zur rechten nicht ganzzahlig ist, nur mehr die Möglichkeit  $ab = 18,75 = \frac{75}{4}$  übrig.

Insbesondere ist also dann  $a + b > \sqrt{4 \cdot \frac{75}{4}} > 8$ , womit von allen dann ganzzahligen Möglichkeiten für  $a + b$  nur mehr  $a + b = 10$  übrigbleibt, was dann wegen (\*) auch sofort  $a - b = 5$  zur Folge hat.

Die Auflösung von  $a + b = 10$ ,  $a - b = 5$  führt dann wieder auf die einzige Möglichkeit  $a = \frac{15}{2}$ ,  $b = \frac{5}{2}$ , welche auch tatsächlich alle Vorgaben hier erfüllt.

Aufgabe gelöst von weird

### Aufgabe 3 - 070923



In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.

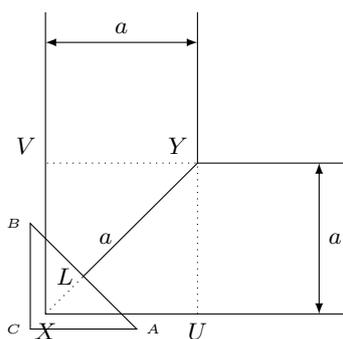
Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

- Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
  - Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei  $a$ , die Breite der Bohlen sei  $b$ . Welchen Wert hat das Verhältnis  $b : a$ , wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?
- Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

Zunächst ermitteln wir die maximale Entfernung, die durch die beiden Bretter mit der Länge  $a$  überbrückt werden kann.

Dazu setzen wir laut Aufgabenstellung voraus, dass die Breite der Bretter unberücksichtigt bleibt und dass diese so wie auf der Abbildung dargestellt, im rechten Winkel zueinander liegen (rote durchgehenden Linien in der Planfigur). Mithin gilt:

$$AB = LY = a \quad (1) \quad AL = BL = \frac{a}{2} \quad (2)$$



Demnach ist das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig mit der Strecke  $CL$  als Höhe. Nach dem Höhensatz gilt:

$$(CL)^2 = AL \cdot BL \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt somit:

$$(CL)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad AL = BL = \frac{a}{2} \Rightarrow CL = \frac{a}{2} \quad (6)$$

Wegen (2) und (6) ist damit aber auch  $AL = BL = CL = \frac{a}{2}$ . Damit beträgt die Länge der maximal überbrückbaren Strecke mit 2 Brettern:

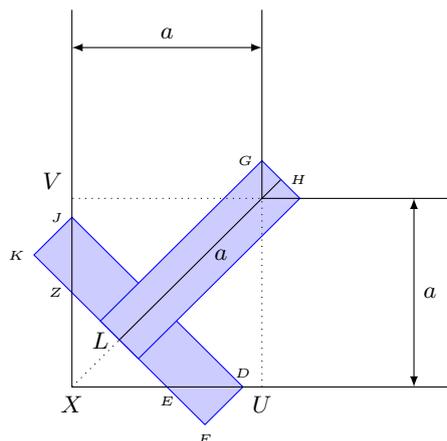
$$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a \quad (8)$$

Berechnen wir nun die Entfernung der beiden Grabenecken (Punkte  $X$  und  $Y$ ). Laut Aufgabenstellung stellt das Viereck  $XUYV$  ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$  dar, die Strecke  $XY$  entspricht genau der Diagonalen dieses Quadrates. Für die Diagonale  $XY$  des Quadrates wird  $XY = a\sqrt{2}$  (10).

Vergleichen wir nun die maximal überbrückbare Strecke (8) mit der Entfernung der beiden Grabenecken (10). Es gilt  $\frac{3}{2}a > a\sqrt{2}$ , daher kann der Graben mit Hilfe der beiden Bretter überquert werden.

Aufgabenteil b)

Wie bereits im Aufgabenteil a) gezeigt, beträgt die Länge der Strecke  $XY = a\sqrt{2}$ . Weiterhin ist laut den Bedingungen der Aufgabenstellung das Dreieck  $ZEX$  rechtwinklig und gleichschenkelig. In einem solchen Dreieck beträgt die Winkelgröße eines Basiswinkels genau  $45^\circ$ , so natürlich auch der Basiswinkel  $ZEX$  im Dreieck  $ZEX$ .



Die Winkel  $ZEX$  und  $DEF$  sind Scheitelwinkel, daher haben diese die gleiche Größe. Außerdem handelt es sich bei den verwendeten Bohlen um rechteckige Bretter, daher ist das Dreieck  $DEF$  ebenfalls gleichschenkelig und rechtwinklig.

Mithin ist die Dreiecksseite  $DF$  eben dieses Dreieckes die Breite  $b$  der verwendeten Bretter, daher gilt:  $DF = EF = b$ . Ein weiteres gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ist das Dreieck  $XEL$ , somit ist:  $XL = EL$

Die Strecke  $FL$  besteht aus den Teilabschnitten  $EF$  und  $EL$ , entsprechend den gestellten Voraussetzungen beträgt ihre Länge  $\frac{a}{2}$ . Demnach ist:

$$\frac{a}{2} = FL = EF + EL$$

Daraus ergibt sich durch Substitution von  $EF$  und  $EL$ :  $XL = \frac{a}{2} - b$ .

Das Dreieck  $GYH$  ist ebenfalls gleichschenkelig und rechtwinklig (rechter Winkel bei Punkt  $H$ ). Außerdem entspricht, wie aus der Planfigur ersichtlich, die Länge der Kathete  $GH$  der halben Breite eines Brettes, d.h.  $GH = YH = \frac{b}{2}$ .

Die Länge der Strecke  $LY$  ergibt sich nun aus der Differenz der Strecken  $LH$  und  $YH$ , wobei  $LH$  der Gesamtlänge eines Brettes  $a$  entspricht:  $LY = LH - YH = a - YH$ .  $YH$  ersetzen wir noch erhalten somit für  $LY$ :  $LY = a - \frac{b}{2}$ .

Betrachten wir wieder die Strecke  $XY$ . Diese setzt sich aus den Teilstrecken  $XL$  und  $LY$  zusammen, somit ist:  $XY = XL + LY$ .

Die Substitution der Teilstrecken  $XL$  und  $LY$  ergibt:  $XY = \frac{3}{2}(a - b)$ .

Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten erhalten, die Länge der Strecke  $XY$  zu berechnen. Um schließlich das gesuchte Verhältnis  $b : a$  zu ermitteln, setzen wir wie folgt fort:  $XY = \frac{3}{2}(a - b) = a\sqrt{2}$ .

Auflösen nach  $b : a$  ergibt

$$b : a = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Das Verhältnis  $b : a$  hat den Wert von  $1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben.

*Aufgabe gelöst von Stefan Knott*

**Aufgabe 4 - 070924**

Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.  
Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Um das Verhältnis der Oberflächeninhalte der beiden Figuren zu bestimmen, müssen diese Flächen bekannt sein. Für den Oberflächeninhalt einer Kugel gilt

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

Die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes eines regelmäßigen Oktaeders lautet:

$$A_{\text{Okta}} = 2a^2\sqrt{3}$$

Nun müssen wir den Zusammenhang zwischen dem Radius  $r$  der Kugel und der Kantenlänge  $a$  des Oktaeders herstellen. Halbiert man den Oktaeder genau zwischen den beiden Spitzen, so erhält man als Schnittfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ , die ja auch gleichzeitig der Kantenlänge des vorgegebenen Oktaeders entspricht.

Der Radius  $r$  der umschreibenden Kugel entspricht nun genau der Hälfte der Länge der Diagonalen dieses Schnittflächenquadrates, d.h.  $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Wir ersetzen zur Bestimmung des Oberflächeninhaltes der Kugel den Radius  $r$  und erhalten somit für die Oberfläche der Kugel:

$$A_{\text{Kugel}} = 2\pi a^2$$

Das gesuchte Verhältnis wird zu

$$\frac{A_{\text{Okta}}}{A_{\text{Kugel}}} = \sqrt{3} : \pi$$

Der Oberflächeninhalt des regelmäßigen Oktaeders verhält sich zum Oberflächeninhalt der umschreibenden Kugel wie  $\sqrt{3}$  zu  $\pi$ .

*Aufgabe gelöst von Stefan Knott*

## 2.9.3 III. Runde 1967, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 070931**

Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Es sei  $x$  die erste und  $y$  die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl  $z$ . Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y)$$

mit  $1 \leq x \leq 9$  und  $0 \leq y \leq 9$ .

Daraus folgt  $11|z$  und, da  $z$  Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar  $11^2|z$ . Somit muss gelten  $11|100x + y$ . Nun ist aber  $100x + y = 99x + x + y$ , und somit  $11|x + y$ .

Wegen der Einschränkungen für  $x$  und  $y$  kommt nur  $1 \leq x + y \leq 18$  und damit  $x + y = 11$  in Frage.

Daraus folgt  $100x + y = 99x + x + y = 11(9x + 1)$  und somit  $z = 11^2(9x + 1)$ .

Da  $z$  Quadratzahl ist, muss auch  $9x + 1$  Quadratzahl sein. Wegen  $1 \leq x \leq 9$  ist dies (wie man z.B. durch Berechnung der Zahlen  $9x + 1$  für  $x = 1, \dots, 9$  feststellen kann) nur für  $x = 7$  der Fall.

Umgekehrt führt  $x = 7$  in der Tat wegen  $9 \cdot 7 + 1 = 64$  auf die Quadratzahl  $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$ . Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

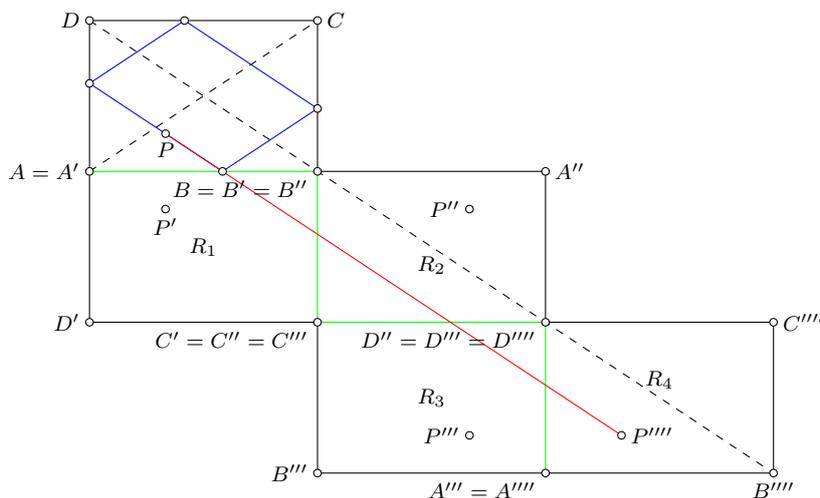
Lösung übernommen von [5]

**Aufgabe 2 - 070932**

Auf einem rechtwinkligen Billardtisch  $ABCD$  befindet sich im Punkt  $P$  eine Kugel.

Nach welchem Punkt von  $AB$  muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten  $AB, BC, CD$  und  $DA$  des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt  $P$  eintrifft?

Man muss auf den Schnittpunkt von  $AB$  mit der Parallelen zu  $BD$  durch  $P$  zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch  $P$  eine zur Diagonalen  $BD$  parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn  $P$  im Dreieck  $ABD$  liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu malen:



Man spiegele  $ABCD$  an  $AB$ . Das dadurch erhaltene neue Rechteck  $R_1$  spiegele man an der Seite, die  $BC$  entspricht und erhalte  $R_2$ .

$R_2$  wiederum spiegele man an der Seite von  $R_2$ , die  $CD$  entspricht. Das Spiegelrechteck sei  $R_3$ .

$R_3$  spiegelt man an der Seite, die  $DC$  entspricht und erhalte  $R_4$ .

Sei  $P'$  der Punkt in  $R_4$ , der  $P$  entspricht. (Man beobachte, dass  $R_4$  durch Verschiebung von  $ABCD$  parallel zur Diagonalen  $BD$  entsteht.)

Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass wenn man die Kugel im Punkt  $P$  in die Richtung von  $P'$  stößt, man die Seiten in der gewünschten Reihenfolge trifft und anschließend wieder bei  $P$  landet.

Analog zeigt man, dass man auch zu Punkt  $P$  zurückkehrt, wenn man die Kugel parallel zur Diagonalen  $AC$  anstößt.

*Lösung von Nuramon*

### Aufgabe 3 - 070933

Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.

Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314\dots979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.

Wie lautet diese?

Zunächst beobachten wir, dass das Ergebnis immer die gleiche Anzahl an Ziffern hat, egal welche Ziffern man streicht.

Damit die Ergebniszahl mit mindestens fünf Neunen beginnt, muss man auf jeden Fall die Zahlen

$$1, 2, \dots, 8, 10, 11, \dots, 18, 20, 21, \dots, 28, 30, \dots, 38, 40, 41, \dots, 48$$

und die Ziffer 4 von 49 streichen. Das sind  $8 + 4 \cdot 19 = 84$  Ziffern.

Es ist nicht möglich, dass das Ergebnis mit sechs Neunen startet, denn dazu müsste man auch noch die Zahlen  $50, 51, \dots, 58$  und die Ziffer 5 von 59 streichen, das wären dann aber schon  $84 + 19 > 100$  Ziffern.

Es ist auch nicht möglich, dass das Ergebnis mit den Ziffern 999998 beginnt, denn dazu müsste man zusätzlich noch  $50, 51, \dots, 57$  und die 5 von 58 streichen, also insgesamt  $84 + 17 > 100$  Ziffern.

Durch zusätzliche Streichung der Zahlen  $50, 51, \dots, 56$  und der Ziffer 5 von 57 erhält man eine Zahl, die mit 999997 beginnt und hat bisher  $84 + 15 = 99$  Ziffern gestrichen.

Streicht man danach auch noch die Ziffer 5 von 58, hat man 100 Ziffern gestrichen und erhält

$$\epsilon := 999997859606162\dots99100$$

als Ergebnis.

Streicht man die Ziffer 5 von 58 nicht, so bekommt man eine Zahl, die mit 9999975 beginnt, also kleiner als  $\epsilon$  ist.

Also ist  $\epsilon$  die größtmögliche Zahl.

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

### Aufgabe 4 - 070934

Man ermittle alle geordneten Tripel  $(a, b, c)$  natürlicher Zahlen  $a, b$  und  $c$ , für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1)$$

gilt. Zwei Tripel  $(a_1, b_1, c_1)$  und  $(a_2, b_2, c_2)$  heißen dabei genau dann gleich, wenn  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$  und  $c_1 = c_2$  ist.

Diese Aufgabe lässt sich mit Fallunterscheidung lösen.

Es seien  $0 < a \leq b \leq c$  drei natürliche Zahlen mit  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$  (1).

1. Fall:  $a = 1$ .

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = 1$  im Widerspruch zu (1). In diesem Fall gibt es keine Lösung.

2. Fall:  $a \geq 3$

Wenn  $c > 3$  ist, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

im Widerspruch zu (1)

Wenn  $c \leq 3$  ist, dann folgt wegen  $3 \leq a \leq b \leq c \leq 3$ , dass  $a = b = c = 3$  gilt. In diesem Fall ist tatsächlich  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ .

3. Fall:  $a = 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(c+b) = bc \quad (\text{Multiplikation mit } 2bc > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4 = bc - 2(b+c) + 4 = (b-2)(c-2) \quad (2)$$

Wegen  $b \geq a$  muss  $b \geq 2$  sein und  $b = 2$  ist nicht möglich, weil  $4 \neq (2-2)(c-2) = 0$ .  $5 \leq b \leq c$  ist auch nicht möglich, da dann  $(b-2)(c-2) \geq (5-2)(5-2) = 9 > 4$  gilt, im Widerspruch zu (2).

Es kommen also nur die Fälle  $b = 3$  und  $b = 4$  in Betracht.

3.1. Fall:  $b = 3$

(2)  $\Leftrightarrow 4 = c - 2$ , also  $c = 6$ . Tatsächlich ist  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ .

3.2. Fall:  $b = 4$

(2)  $\Leftrightarrow 4 = 2(c - 2)$ , also  $c = 4$ . Tatsächlich ist  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ .

Es gibt also genau zehn Lösungstripletts:  $(3,3,3)$ ,  $(2,3,6)$  und  $(2,4,4)$  sowie die Permutationen des 2. und 3. Tripletts.

*Lösung von Kitaktus*

#### Aufgabe 5 - 070935

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  bekannt. Berechnen Sie die Länge  $s_c$  der Seitenhalbierenden der Seite  $AB$ !

Sei  $S$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Mittels Kosinussatz in den Dreiecken  $ABC$  und  $ASC$  erhalten wir:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos(\alpha) = \frac{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2}{2b \frac{c}{2}}$$

und somit

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - s_c^2 \iff s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

#### Aufgabe 6 - 070936

Man ermittle alle reellen Zahlen  $x$ , die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

Die Ungleichung ist wegen  $\frac{2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2x-1}$  äquivalent zu  $-\frac{1}{2x-1} > -\frac{1}{3}$ , also nach Multiplikation mit  $(-1)$  und Reziprokenbildung auch zu  $2x-1 > 3$  oder  $2x-1 < 0$ , d.h.  $x > 2$  oder  $x < \frac{1}{2}$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.10 VIII. Olympiade 1968

### 2.10.1 I. Runde 1968, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 080911

Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

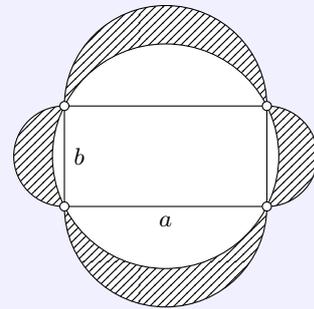
Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Nach der Aufgabenstellung ist  $0,25 \cdot x + 5 = 150$ . Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

#### Aufgabe 2 - 080912

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ . Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!



Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi \left( \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} \right)^2 = \pi \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks  $A$  ist also  $A_3 = ab$ . Der gesuchte Flächeninhalt  $A$  ist also

$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) + ab - \pi \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

#### Aufgabe 3 - 080913

Konstruieren Sie ein Trapez aus  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ !

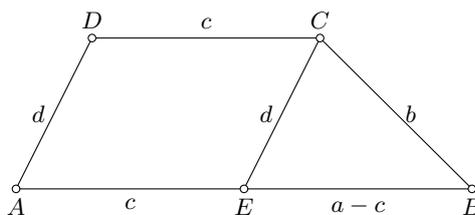
Dabei seien  $a$  die Länge der Seite  $AB$ ,  $b$  die Länge der Seite  $BC$ ,  $c$  die Länge der Seite  $CD$  und  $d$  die Länge der Seite  $DA$ . Weiterhin soll  $AB \parallel CD$  und  $a > c$  gelten.

- a) Angenommen,  $ABCD$  sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch  $C$  die Parallele zu  $DA$ , dann schneidet diese  $AB$ , da  $a > c$  ist. Der Schnittpunkt sei  $E$ . Es entstehen das Dreieck  $\triangle EBC$  mit  $EB = a - c$  und das Parallelogramm  $AECD$  mit  $|CE| = d$ .

$\triangle EBC$  ist konstruierbar aus  $a - c$ ,  $b$ ,  $d$  nach Kongruenzsatz (sss).

$\triangle ABC$  ist konstruierbar aus  $|CB|$ ,  $\angle CBE$ ,  $a$  nach Kongruenzsatz (sws).

$\triangle ACD$  ist konstruierbar aus  $|AC|$ ,  $c$ ,  $d$  nach Kongruenzsatz (sss).



b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man zeichne die Strecke  $EB$  der Länge  $a - c$ .
- Punkt  $C$  liegt dann auf dem Kreis um  $B$  mit dem Radius  $b$  und auf dem Kreis um  $E$  mit dem Radius  $d$ .
- Punkt  $A$  liegt auf der Verlängerung von  $BE$  über  $E$  hinaus und auf dem Kreis um  $B$  mit dem Radius  $a$ .
- Punkt  $D$  liegt auf dem Kreis um  $C$  mit dem Radius  $c$  und auf dem Kreis um  $A$  mit dem Radius  $d$ , und zwar ist  $D$  derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden  $AC$  wie  $E$  liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = |AE| = c$ ,  $|DA| = |CE| = d$ . Also ist  $AECD$  ein Parallelogramm, und es gilt  $AE \parallel CD$  und damit auch  $AB \parallel CD$ . Weiterhin gilt nach Voraussetzung  $a > c$ .

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn  $\triangle EBC$  konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von  $\triangle EBC$  ist notwendig und hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$a - c < b + d, \quad b < a - c + d, \quad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Lösung übernommen von [5]

**Aufgabe 4 - 080914**

In	1	*	*	.	*	*
	*	*	*	1		
		*	*	*	1	
	*	*	*	1	*	

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Ansatz:

```

1ab.cd
-----
  efg1
  hij1
-----
klm1n
    
```

$a..n$  sind jeweils Ziffern 0..9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann  $n = 1$  und  $g = 0$  gelten, d.h. eine Teilaufgabe lautet  $1ab \cdot d = ef01$ . Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

$b$  und  $d$  müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade

ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen  $\leq 9$  endet auf 1 in genau den Fällen:  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $3 \cdot 7 = 21$ ,  $7 \cdot 3 = 21$ ,  $9 \cdot 9 = 81$ .

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1.  $b = 1, d = 1$   
 $1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$   
 $101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
2.  $b = 3, d = 7$   
 $1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$   
 $143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
3.  $b = 7, d = 3$   
 $1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$   
 $167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
4.  $b = 9, d = 9$   
 $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$   
 $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

$101 \cdot 11$	$143 \cdot 77$	$189 \cdot 99$	$167 \cdot 33$
-----	-----	-----	-----
0101	1001	1701	0501
0101	1001	1701	0501
-----	-----	-----	-----
01111	11011	18711	05511

*Aufgabe gelöst von Manuela Kugel*

## 2.10.2 II. Runde 1968, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 080921**

Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

- Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
- Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

a) Ein Beispiel ist 2,3,4,5,6.

b) Nennen wir die erste Zahl  $n$ .  $n$  muss durch 2 teilbar, also gerade sein.

$n + 1$  muss durch 3 teilbar sein, also muss  $n$  bei Division durch 3 den Rest 2 lassen.  $n + 2$  muss durch 4 teilbar sein. Da  $n$  gerade ist, ist  $n + 2$  auch gerade und genau dann durch 4 teilbar, wenn  $n$  nicht durch 4 teilbar ist.

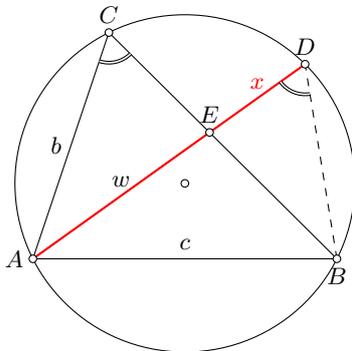
$n + 3$  muss durch 5 teilbar sein, also muss  $n$  bei Division durch 5 den Rest 2 lassen.  $n + 4$  muss durch 6 teilbar sein. Durch 2 teilbar ist es auf jeden Fall, da  $n$  gerade ist. Da  $n$  bei Division durch 3 den Rest 2 lässt ist  $n + 4$  auch durch 6 teilbar. Also muss  $n$  die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

$n$  muss gerade aber nicht durch 4 teilbar sein, bei Division durch 3 den Rest 2 lassen und bei Division durch 5 ebenfalls den Rest 2 lassen.

*Lösung von ZePhoCa*

**Aufgabe 2 - 080922**

Von einem Dreieck  $\triangle ABC$  seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!



Es seien die Seitenlängen  $c$  von  $AB$  und  $b$  von  $AC$ , so wie die Länge  $w$  der Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle BAC$  bekannt. Es sei  $E$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite  $BC$  und es sei  $D$  der Schnittpunkt der Verlängerung von  $w$  mit dem Umkreis. Gesucht ist die Länge  $x$  der Sehne  $AD$ .

Nach Umfangswinkelsatz gilt  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$ .

Per Definition der Winkelhalbierenden  $w$  gilt außerdem  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$ . Also stimmen die Dreiecke  $ABD$  und  $AEC$  in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Insbesondere gilt also  $\frac{x}{c} = \frac{b}{w}$ , d.h.  $x = \frac{bc}{w}$ .

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

**Aufgabe 3 - 080923**

Geben Sie alle Paare  $(x, y)$  natürlicher Zahlen an, für die  $x^3 - y^3 = 999$  ist!

Offenbar erfüllt jede Lösung  $x > y$ . Es gibt also ein positives  $z \in \mathbb{N}$  mit  $x = y + z$ . Das führt zur äquivalenten Gleichung  $z(z^2 + 3yz + 3y^2) = 999$ .

Es muss also  $z$  ein Teiler von  $999 = 3^3 \cdot 37$  sein. Da  $z(z^2 + 3yz + 3y^2)$  genau dann durch 3 teilbar ist, wenn  $z$  durch drei teilbar ist und weil  $z \leq z^2 + 3yz + 3y^2$  gilt, bleiben nur noch die Möglichkeiten  $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$  und  $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$  übrig.

1. Fall:  $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$

Dann gilt  $9 + 9z + 9y^2 = 333$ , also  $y^2 + 3y = 108$ . Die einzige natürliche Lösung dieser Gleichung ist  $y = 9$ . Das führt zur Lösung  $(x, y) = (12, 9)$ .

2. Fall:  $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$

Dann ist  $81 + 27y + 3y^2 = 111$ , also  $y^2 + 9y = 10$ , also  $y = 1$ . Somit ist  $(x, y) = (10, 1)$  eine Lösung. Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungspaare, nämlich  $(12, 9)$  und  $(10, 1)$ .

*Lösung von Nuramon*

**Aufgabe 4 - 080924**

Vier Personen  $A, B, C$  und  $D$  machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl  $x$ . Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

$A$  sagt:

- (1) Das Reziproke von  $x$  ist nicht kleiner als 1.
- (2)  $x$  enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
- (3) Die 3. Potenz von  $x$  ist kleiner als 221.

$B$  sagt:

- (1)  $x$  ist eine gerade Zahl.
- (2)  $x$  ist eine Primzahl.
- (3)  $x$  ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

$C$  sagt:

- (1)  $x$  ist irrational.
- (2)  $x$  ist kleiner als 6.
- (3)  $x$  ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

$D$  sagt:

- (1)  $x$  ist größer als 20.
- (2)  $x$  ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
- (3)  $x$  ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie  $x$ .

Da eine der Aussagen von  $B$  wahr ist, muss  $x$  eine ganze Zahl sein.

Wäre Aussage  $D2$  wahr, so wären es auch  $D1$  und  $D3$ . Also ist  $D2$  falsch, d.h. es muss  $x < 100$  sein.

Da  $D1$  die Aussage  $D3$  impliziert und mindestens eine der Aussagen  $D1$  bzw.  $D3$  wahr sein muss, ist  $D3$  wahr. Also ist  $x$  eine ganze Zahl mit  $x \geq 10$ .

$C1$  ist falsch, da  $x$  ganz ist.  $C2$  ist falsch, da  $x \geq 10$  ist.

Also muss  $C3$  wahr sein, d.h.  $x$  ist eine Quadratzahl.

Aussage  $A1$  ist falsch, denn  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} < 1$ . Aussage  $A3$  ist falsch, denn  $x^3 \geq 10^3 > 221$ .

Also ist  $A2$  wahr. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten 25, 49 oder 81 für  $x$  übrig. Da  $x$  Quadratzahl ist, ist  $B2$  falsch. Also muss  $x$  gerade oder durch 5 teilbar sein. Somit bleibt als einzige Option  $x = 25$  übrig. Tatsächlich erfüllt  $x = 25$  die Anforderungen der Aufgabe:  $A1, B1, C1, D2$  sind falsch und  $A2, B3, C3, D1$  sind wahr.

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

## 2.10.3 III. Runde 1968, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 080931**

Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.

”Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.

Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.

Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.”

Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Wir betrachten drei Fälle. Sei immer  $x$  die betrachtete Zahl.

1. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist einstellig (d.h.  $x \in \{47, \dots, 50\}$ ). Da  $(50 - x)^2$  einstellig ist, ist die gebildete Zahl dann  $10(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2 - 90x + 2250$ .  
Das ist genau dann gleich  $x^2$  wenn  $x = 25$ , dies liegt aber nicht im betrachteten Bereich. Für diese Zahlen funktioniert das Verfahren also nicht.
2. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist zweistellig (d.h.  $x \in \{41, \dots, 46\}$ ). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl  $100(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2$ , hier funktioniert das Verfahren also.
3. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist dreistellig (d.h.  $x \in \{26, \dots, 40\}$ ). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl  $1000(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2 + 900x - 22500$  und dies ist genau dann gleich  $x^2$  wenn  $x = 25$ , was nicht im betrachteten Bereich liegt.

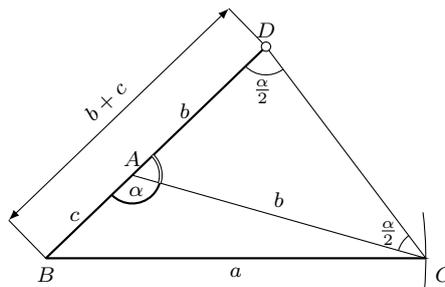
Also geht das Verfahren genau dann, wenn  $x$  zwischen 41 und 46 liegt.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

**Aufgabe 2 - 080932**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $a, b + c$  und  $\alpha$ !

Dabei sind  $a, b, c$  die Längen der Dreiecksseiten und  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle BAC$ .



Wird die Seite  $c$  eines Dreieck  $ABC$  um die Strecke  $b$  verlängert, Endpunkt sei  $D$ , erhält man die gegebene Strecke  $b + c$ .

Durch die Verbindung von  $D$  und  $C$  entsteht das gleichschenklige Dreieck  $ACD$  mit dem Winkel  $180^\circ - \alpha$  an der Spitze  $A$  und zufolge mit dem Basiswinkel  $\frac{\alpha}{2}$  und Schenkeln der Länge  $b$ .

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

(1) Ziehe die Strecke  $b + c = BD$ , womit die Punkte  $B$  und  $D$  festgelegt werden.

(2) Lege eine Gerade  $h$  durch  $D$ , die mit  $BD$  den Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  einschließt.

(3) Beschreibe einen Kreis  $(B, a)$  um  $B$  vom Radius  $a$ .

Hier hängt es von der Größe des Winkels  $\alpha$  ab, ob es zwischen  $h$  und  $(B, a)$  keinen oder zwei Schnittpunkte ( $C_1$  und  $C_2$ ) oder einen Berührungspunkt ( $C_1$ ) gibt.

(4) Lege durch die Schnittpunkte aus (3) jeweils eine Gerade, die mit  $h$  den Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  einschließt; welche die Strecke  $BD$  im Punkt  $A_1$  bzw. in den Punkten  $A_1$  und  $A_2$  schneidet.

(5) Durch Verbindung  $A_1BC_1$  bzw.  $A_1BC_1$  und  $A_2BC_2$  erhält man eine bzw. zwei Lösungen für das gesuchte Dreieck.

**Aufgabe 3 - 080933**

Geben Sie alle Zahlentripel  $(a, b, c)$  an, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b + c &= s_1 & a - b + c &= s_3 \\ a + b - c &= s_2 & a - b - c &= s_4 \end{aligned}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Addition der ersten und vierten Gleichung ergibt  $2a = s_1 + s_4$ .

Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt  $2a = s_2 + s_3$ .

Das geht nur, wenn  $s_1 = 1$  und  $s_4 = 4$  oder umgekehrt und  $s_2 = 2, s_3 = 3$  oder umgekehrt. Daraus folgt  $2a = 5$ , also  $a = \frac{5}{2}$ .

Für  $s_1 = 1, s_4 = 4$  folgt dann  $b + c = -\frac{3}{2}$ . Auflösen nach  $b$  und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt  $\frac{5}{2} + c + \frac{3}{2} + c = s_3$ . Falls  $s_3 = 2$  folgt  $c = -1$ , falls  $s_3 = 3$  folgt  $c = -\frac{1}{2}$ . Einsetzen in die erste Gleichung ergibt  $b = -\frac{1}{2}$  bzw.  $b = -1$ .

Für  $s_1 = 4, s_4 = 1$  folgt  $b + c = \frac{3}{2}$ . Auflösen nach  $b$  und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt  $\frac{5}{2} + c - \frac{3}{2} + c = s_3$ . Falls  $s_3 = 2$  folgt  $c = \frac{1}{2}$ , falls  $s_3 = 3$  folgt  $c = 1$ . Einsetzen in die erste Gleichung ergibt  $b = 1$  bzw.  $b = \frac{1}{2}$ .

Es gibt also insgesamt die Möglichkeiten

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 1, 3, 2, 4\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 1, 2, 3, 4\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 4, 3, 2, 1\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 4, 2, 3, 1\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 2, 4, 1, 3\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 2, 1, 4, 3\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 3, 4, 1, 2\text{)}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \text{ (wenn } (s_1, s_2, s_3, s_4) = 3, 1, 4, 2\text{)}$$

und eine Probe ergibt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

**Aufgabe 4 - 080934**

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle ABC$ . Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammen, insbesondere also auch ihre Mittelpunkte. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, wobei der längere Abschnitt in Richtung der Eckpunkte liegt.

Demzufolge ist der Umkreisradius genau doppelt so groß wie der Inkreisradius und es ergibt sich ein Verhältnis von 4 zwischen Umkreisfläche und Inkreisfläche.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 5 - 080935**

Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl  $n$  die Zahl  $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$  durch 512 teilbar ist.

Sei  $m = n^4$ . Dann ist die Zahl  $m^3 - m^2 - m + 1$  zu untersuchen.

Es gilt  $m^3 - m^2 - m + 1 = (m - 1)^2(m + 1)$ .

Da  $n$  ungerade ist, gilt  $n = 2k + 1$  und damit

$$m = (2k + 1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1$$

Damit ist  $m + 1$  durch 2 teilbar und es gilt

$$m - 1 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k = 16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8(k^2 + k)$$

Da  $k^2 + k = k(k + 1)$  gerade ist, ist also  $m - 1$  durch 16 teilbar. Also ist  $m^3 - m^2 - m + 1$  durch  $16 \cdot 16 \cdot 2 = 512$  teilbar.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

Zweite Lösung:

Die zu untersuchende Zahl ist

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = (n^8 - 1)(n^4 - 1) \\ &= (n + 1)^2(n - 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) \\ &= ((n + 1)(n - 1))^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) \end{aligned}$$

Da  $n$  ungerade ist, sind die zu  $n$  benachbarten Zahlen  $n + 1$  und  $n - 1$  beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar. Demnach ist  $(n + 1)(n - 1)$  durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar. Die Zahlen  $n^2$  und  $n^4$  sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist  $n^2 + 1$  durch 2,  $(n^2 + 1)^2$  durch 4 und  $n^4 + 1$  durch 2 teilbar. Damit ist die gegebene Zahl teilbar durch

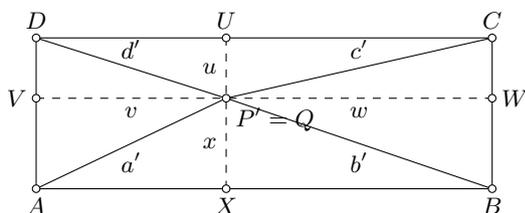
$$2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

Übernommen aus [2]

#### Aufgabe 6 - 080936

Es sei  $ABCD$  ein Rechteck, und es sei  $P$  ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht.  $P$  habe vom Eckpunkt  $A$  den Abstand  $a$ , vom Punkt  $B$  den Abstand  $b$  und vom Punkt  $C$  den Abstand  $c$ .

Man berechne den Abstand  $d$  des Punktes  $P$  vom Eckpunkt  $D$  und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes  $d$  die Kenntnis der drei Abstände  $a, b, c$  ausreicht.



Der Abstand des Punktes  $P$  von  $D$  sei  $d$ . Es sei  $PQ$  das Lot von  $P$  auf die Ebene des Rechtecks.

Die Parallele durch  $Q$  zu  $(AD)$  bzw.  $(AB)$  schneide die Gerade  $(AB)$  bzw.  $(AD)$  in  $(X)$  bzw.  $(V)$ , die Gerade  $(DC)$  bzw.  $(BC)$  in  $(U)$  bzw.  $(W)$ . Es sei  $PQ = h$ ,  $QX = x$ ,  $QU = u$ ,  $QV = v$ ,  $QW = w$ .

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a^2 &= v^2 + x^2 + h^2 & ; & & b^2 &= w^2 + x^2 + h^2 \\ c^2 &= u^2 + w^2 + h^2 & ; & & d^2 &= u^2 + v^2 + h^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt (nach Addition)

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$$

Somit gilt  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  und damit  $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$  (also insbesondere  $a^2 + c^2 \geq b^2$ ). Der Abstand des Punktes  $P$  von  $D$  beträgt folglich

$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

Lösung übernommen von [5]

## 2.11 IX. Olympiade 1969

### 2.11.1 I. Runde 1969, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 090911

Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

$T$  sei die Anzahl aller Teilnehmer der Kreisolympiade. Nach Aufgabenstellung sind  $\frac{1}{9}$  der Teilnehmer Preisträger sowie 75%, also  $\frac{3}{4}$ , der Preisträger Klubmitglieder.

Einen Preis erhalten damit  $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot T$  der Klubmitglieder, d.h. ein Zwölftel der Teilnehmer sind folglich sowohl Preisträger als auch Klubmitglieder.

Die Anzahl der Klubmitglieder die einen Preis erhalten ( $\frac{1}{12} \cdot T$ ) und derer die keinen Preis erhalten (6) ist gleich  $\frac{1}{10}$  der Teilnehmer. Damit wird

$$\frac{1}{12} \cdot T + 6 = \frac{1}{10} \cdot T \quad \text{und somit} \quad T = 360$$

Die Anzahl der Teilnehmer an der Kreisolympiade war 360.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

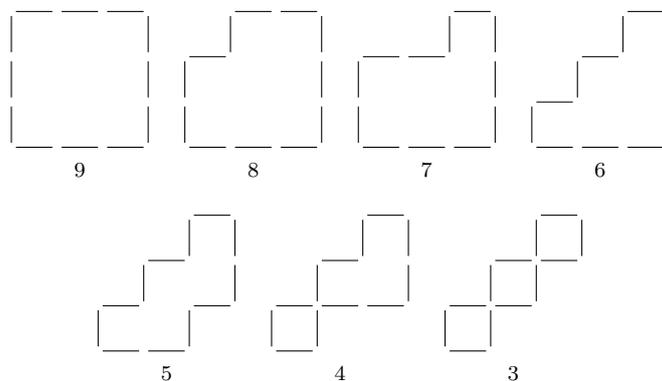
#### Aufgabe 2 - 090912

Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9 \text{ dm}^2, \quad I_2 = 8 \text{ dm}^2, \quad I_3 = 7 \text{ dm}^2, \quad I_4 = 6 \text{ dm}^2, \quad I_5 = 5 \text{ dm}^2, \quad I_6 = 4 \text{ dm}^2, \quad I_7 = 3 \text{ dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!



Für eine mögliche Lösungen, von denen es unendlich viele gibt, beginnt man mit einem  $3 \cdot 3$  Quadrat mit der Fläche 9 welches sich mit  $4 \cdot 3$  Hölzern beranden lässt. Danach klappt man schrittweise jeweils 2 Hölzchen nach innen.

Ab der Fläche 6 kann man auch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 nutzen.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

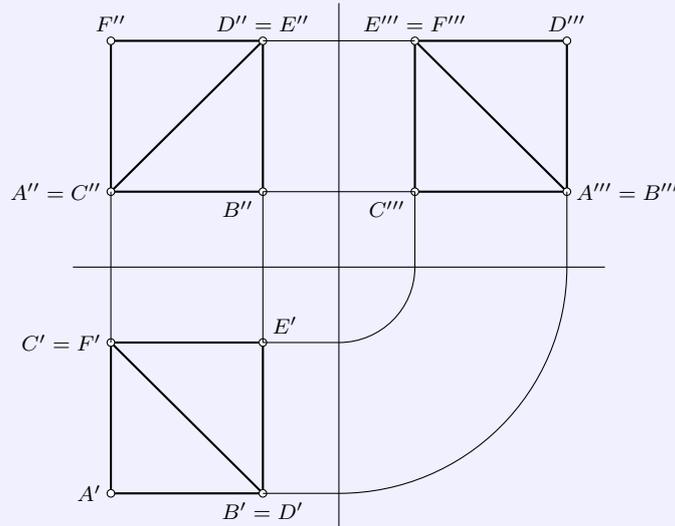
**Aufgabe 3 - 090913**

In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper  $K$  heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen  $F$  gilt: Ist  $\varepsilon$  die Ebene, in der  $F$  liegt, so befindet sich  $K$  ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch  $\varepsilon$  zerlegt wird.

Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge  $a$ .

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!



Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen. Des weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Das Volumen des nichtregulären Oktaeders ist das zweier vierseitiger Pyramiden über der Fläche  $a \cdot \sqrt{2} \cdot a$  mit den Höhen der halben Flächendiagonalen also  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{2}{3} \cdot a^3$ .

*Aufgabe gelöst von Rainer Sattler*

**Aufgabe 4 - 090914**

Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl  $z$  sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von  $z$  eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von  $z$  bezeichnet.

*Beispiele:* Die erste Quersumme von 98 ist  $9 + 8 = 17$ , die zweite Quersumme von 98 ist  $1 + 7 = 8$ . Die erste Quersumme von 43 ist  $4 + 3 = 7$ , eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von  $z$  eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von  $z$ . In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

- Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!
- Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!
- Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

- a) Damit die 2. Quersumme nicht erklärt ist, muss die 1. Quersumme kleiner als 10 sein. Betrachtet man nun alle Zahlen, die aus 3 Ziffern gebildet werden können (jeweils alle Ziffern von 0 bis 9), so sind damit auch alle ein- und zweistelligen Zahlen enthalten. Die folgenden Ziffern führen zu einer Quersumme von 0 bis 9:

$\{0,0,0\}, \dots \{0,0,9\} \Rightarrow 10$  Möglichkeiten  $\{0,1,1\}, \dots \{0,1,8\} \Rightarrow 8$  Möglichkeiten  
 $\{0,2,2\}, \dots \{0,2,7\} \Rightarrow 6$  Möglichkeiten  $\{0,3,3\}, \dots \{0,3,6\} \Rightarrow 4$  Möglichkeiten  
 $\{0,4,4\}, \dots \{0,4,5\} \Rightarrow 2$  Möglichkeiten  $\{1,1,1\}, \dots \{1,1,7\} \Rightarrow 7$  Möglichkeiten  
 $\{1,2,2\}, \dots \{1,2,6\} \Rightarrow 5$  Möglichkeiten  $\{1,3,3\}, \dots \{1,3,5\} \Rightarrow 3$  Möglichkeiten  
 $\{1,4,4\} \Rightarrow 1$  Möglichkeit  $\{2,2,2\}, \dots \{2,2,5\} \Rightarrow 4$  Möglichkeiten  
 $\{2,3,3\}, \dots \{2,3,4\} \Rightarrow 2$  Möglichkeiten  $\{3,3,3\} \Rightarrow 1$  Möglichkeit

Von diesen 53 Möglichkeiten gibt es 4 Varianten mit 3 gleichen Ziffern, 26 Varianten mit einem gleichen Ziffern paar und 23 Varianten mit sämtlich unterschiedlichen Ziffern. Die Kombination aus unterschiedlichen Ziffern ergibt jeweils  $6 = 3!$ , also  $23 \cdot 6 = 138$  verschiedene Zahlen; bei einem gleichen Zahlen paar gibt es je  $3 = 3!/2!$ , also  $26 \cdot 3 = 78$  Zahlen. Insgesamt erhält man somit (da 0 bis 9 nicht, 1000 dafür aber auch noch gezählt wird) die folgende Anzahl gesuchter Zahlen:  
 $4 + 78 + 138 - 10 + 1 = 211$

- b) 991 Zahlen werden überhaupt nur betrachtet. 211 bilden nur eine Quersumme. Also gibt es  $991 - 211 = 780$  Zahlen, die eine zweite Quersumme bilden. Es müssen nur noch die ausgeschlossen werden, die eine dritte Quersumme bilden. Die erste Quersumme kann maximal  $27 = 9 + 9 + 9$  sein, d.h. die 2. Quersumme ist maximal 10 (genau dann, wenn die 1. Quersumme 19 ist). Und auch nur genau in diesen Fällen ist die 3. Quersumme erklärt. Wir müssen also alle die Zahlen ausschließen, deren 1. Quersumme 19 ist.

Keine zweistellige Zahl hat als Quersumme 19. Die gesuchten Zahlen sind also sämtlich dreistellig. Die Ziffern der gesuchten Zahlen bestehen aus folgenden Kombinationen und deren Vertauschungen:  $\{9,9,1\}, \{9,8,2\}, \{9,7,3\}, \{9,6,4\}, \{9,5,5\}, \{8,8,3\}, \{8,7,4\}, \{8,6,5\}, \{7,7,5\}, \{7,6,6\}$ . Unter diesen 10 Möglichkeiten gibt es je 5 mit verschiedenen Ziffern und mit einem gleichen Ziffern paar. Damit ergeben sich analog zu a) die daraus zu bildenden Zahlen:  $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$  verschiedene Zahlen mit 3. Quersumme.

Die Summe der Zahlen, die eine 2. aber keine 3. Quersumme bilden ist also  $780 - 45 = 735$

- c) Die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist, lautet:

19.999.999.999.999.999.999.999

Es gibt keine kleinere, da die Quersumme möglichst gering gehalten werden muss, damit auch die Zahl möglichst klein bleibt. Die kleinste 2. Quersumme kann nur 19 sein, da sie die kleinste 2-stellige Zahl ist, die wieder eine 2-stellige Quersumme hat. Also muss die 1. Quersumme selbst eine Quersumme von 19 haben, wobei wiederum keine kleinere Zahl als 199 dies erfüllen kann. Die 1. Quersumme wird durch Addition aller Ziffern der Zahl gebildet. Die kleinste Zahl, die diese Quersumme bilden kann hat also möglichst wenig Stellen, d.h. von rechts her sind möglichst viele 9er aufzufüllen. Dies führt zu einer Zahl mit 1 beginnend und 22 Neunen.

*Aufgabe gelöst von Julia Erhard*

## 2.11.2 II. Runde 1969, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 090921**

Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.

Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

- Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
- Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

a) Eine Frage genügt nicht, da damit nur zwei Fälle ("ja"- vs. "nein"Antwort) unterschieden werden können, es aber drei Gruppen gibt. Dass es mit zwei Fragen geht, zeigt Teil b).

b) Man stelle zwei mal die gleiche Frage "Bist du ein 'Unbeständiger'?".

Ein "Wahrer" wird darauf zwei mal mit "nein" antworten, ein "Unwahrer" zwei mal mit "ja" und ein "Unbeständiger" einmal mit "ja" und einmal mit "nein" (in irgendeiner Reihenfolge).

Übernommen aus [2]

**Aufgabe 2 - 090922**

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge  $a_1$  und dem Volumen  $V_1$  sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge  $a_2$  und dem Volumen  $V_2$ . Für die Kantenlängen gelte  $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$ .

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_1 : V_2$ !

Es ist

$$V_1 = a_1^3 \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot a_2^3 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a_1)^3 = \frac{1}{3}a_1^3 = \frac{1}{3}V_1$$

sodass das Verhältnis  $V_1 : V_2$  genau 3 : 1 beträgt.

Bemerkung:

Das Volumen  $V$  eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge  $a$  ergibt sich (wie für jede Pyramide) zu  $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$ , wobei  $A_G$  der Flächeninhalt der Grundfläche und  $h$  die Länge der zugehörigen Höhe ist. Als Grundfläche ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $a$ . Dessen Fläche lässt sich (wie in jedem Dreieck) via  $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_g$  berechnen, wobei  $h_g$  die Länge einer Höhe im Dreieck ist.

Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt eine solche das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige, wobei eine der Katheten eines solchen Dreiecks die Höhe  $h_g$ , die zweite eine halbe Grundseite und die Hypotenuse die ungeteilte Dreiecksseite ist.

Es ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras  $h_g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ , also  $h_g = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  und damit  $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ .

Für die Höhe im regulären Tetraeder beachte man, dass sie mit der entsprechenden Schwerlinie (Verbindung eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) zusammenfällt. So ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit "Spitze des Tetraeders", "Schwerpunkt der Grundfläche" und einem Eckpunkt der Grundfläche als Eckpunkte.

Dessen Hypotenuse ist eine Kante des regulären Tetraeders, eine Kathete die Höhe  $h$  und die zweite Kathete der Abschnitt der Seitenhalbierenden in der Grundfläche zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt, wobei der Abschnitt zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt die längere ist, und da im gleichseitigen Dreieck die Höhen und Seitenhalbierenden zusammenfallen, ist dieser Abschnitt hier also  $\frac{2}{3} \cdot h_g = \frac{\sqrt{3}}{3}a$  lang.

Es ergibt sich für das betrachtete rechtwinklige Dreieck zwischen Spitze, Schwerpunkt und Eckpunkt nach dem Satz von Pythagoras nun also  $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2$ , also  $h^2 + \frac{3}{9}a^2 = a^2$  bzw.  $h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}a$ .

Zusammen mit der zuvor berechneten Grundfläche ergibt sich nun

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 4}a^3$$

was wir oben verwendet haben.

### Aufgabe 3 - 090923

Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.

Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Wir nehmen indirekt an, es gäbe zwei solche Zahlen  $a > b$ , die sich so bilden lassen und für die  $a$  Vielfaches von  $b$  ist. Dann gäbe es eine natürliche Zahl  $n > 1$  mit  $a = n \cdot b$ .

Da  $a$  und  $b$  aus den gleichen Ziffern gebildet werden, besitzen sie die gleiche Quersumme  $1+2+\dots+7 = 28$ , lassen also wegen  $28 - 3 \cdot 9 = 1$  jeweils den Rest 1 bei der Division durch 9.

Demnach muss auch  $n$  den Rest 1 bei der Teilung durch 9 lassen, damit dies auch für das Produkt  $a = b \cdot n$  gilt. Also ist  $n \geq 10$ , sodass  $a$  mindestens eine Stelle mehr besitzen müsste als  $b$ , was ein Widerspruch ist.

Kurz:  $a \equiv b \equiv 28 \equiv 1 \pmod{9}$ , also auch  $n \equiv b \cdot n = a \equiv 1 \pmod{9}$  und damit  $n \geq 10$ , Widerspruch.

### Aufgabe 4 - 090924

Es ist zu beweisen:

Verbindet man in einem Parallelogramm  $ABCD$  den Eckpunkt  $C$  mit den Mittelpunkten der Seiten  $AB$  und  $AD$ , so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale  $BD$  in drei gleich lange Teilstrecken.

Sei mit  $S$  der Diagonalschnittpunkt des Parallelogramms,  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$  und  $N$  der von  $AD$  bezeichnet.

Die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  halbieren sich gegenseitig. Also ist  $BS$  Seitenhalbierende im Dreieck  $\triangle ABC$ , genauso wie  $CM$ . Damit schneiden diese sich im Schwerpunkt  $S_B$  des Dreiecks, sodass  $|BS_B| = \frac{2}{3}|SB| = \frac{1}{3}|DB|$  gilt, da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede seiner Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt. Analog ist  $DS$  Seitenhalbierende im Dreieck  $\triangle ACD$ , genauso wie  $CN$ . Damit schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt  $S_D$  des Dreiecks, sodass wieder  $|DS_D| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DB|$  gilt, was zu beweisen war.

*Aufgaben der II. Runde 1969 gelöst von cyrix*

## 2.11.3 III. Runde 1969, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 090931**

Es sei  $ABCDEFGH$  ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte  $A, B, C, D, E, F, G, H$  sind.

Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

Es gibt nur fünf verschiedene Sorten von Dreiecken, d.h. jedes mögliche Dreieck gehört zu genau einer dieser Sorten.

Begründung: Für ein Dreieck mit den Ecken  $X, Y, Z \in \{A, \dots, H\}$  seien  $x, y$  und  $z$  die Abstände zwischen jeweils zwei Ecken. (Bei dem Dreieck mit den Ecken  $B, C, H$  wäre etwa  $x = 1, y = 5, z = 2$ .)

Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn die Tripel der zugehörigen Abstände gleich sind. Dabei spielt es aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Abstände stehen. (Etwa für das Dreieck  $E, G, D$  ist  $x = 2, y = 5, z = 1$ , und die Dreiecke  $E, G, D$  und  $B, C, H$  sind kongruent.)

Die Summe  $x + y + z$  ist stets gleich 8. Folglich ist die Fragestellung dazu äquivalent, auf wie viele Weisen sich 8 als Summe dreier natürlicher Zahlen darstellen lässt, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt.

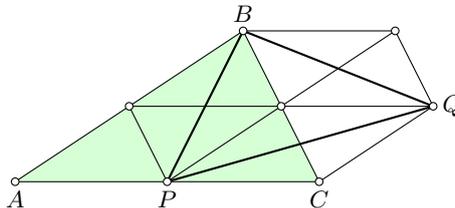
Hierfür gibt es nur die fünf Möglichkeiten  $1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

**Aufgabe 2 - 090932**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $s_a = 9,6$  cm,  $s_b = 12,6$  cm und  $s_c = 11,1$  cm! Dabei sind  $s_a, s_b$  und  $s_c$  die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!



Die Seitenmittelpunkte unterteilen das Dreieck  $ABC$  in 4 kongruente Teildreiecke. Durch hinzufügen weiterer Kopien erhalten wir das Dreieck  $BPQ$ , dessen Seiten gerade die Längen  $s_a, s_b, s_c$  haben - dieses ist an geeigneten Parallelogrammen einsehbar.

$BPQ$  kann wie üblich konstruiert werden. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks  $BPQ$  sind parallel zu den Seiten des gesuchten Dreiecks  $ABC$ . Daher erhalten wir dieses mittels parallele Geraden durch  $B$  und  $P$ . Insbesondere ist das Dreieck konstruierbar, falls  $s_a, s_b, s_c$  die Dreiecksgleichungen erfüllen.

**Aufgabe 3 - 090933**

Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau  $m$ -mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau  $n$ -mal so lange wie C und A zusammen und C genau  $p$ -mal so lange wie A und B zusammen. Berechnen Sie  $p$  in Abhängigkeit von  $m$  und  $n$ !

Wir betrachten die Leistungen  $a, b$  und  $c$  von A, B und C. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$a = \frac{1}{m}(b + c); \quad b = \frac{1}{n}(a + c); \quad c = \frac{1}{p}(a + b)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu  $c = am - b$ , die zweite zu  $c = bn - a$ . Insbesondere ist also  $am - b = bn - a$  bzw.  $(m + 1)a = (n + 1)b$ , also

$$b = \frac{m + 1}{n + 1} \cdot a \quad \text{und} \quad c = am - b = \frac{mn - 1}{n + 1} \cdot a$$

Ist  $mn - 1 = 0$ , also  $c = 0$ , dann leistet  $C$  keine Arbeit und also ist  $p$  nicht definiert. Andernfalls können wir im Folgenden durch  $c \neq 0$  dividieren.

Mit der dritten Gleichung erhalten wir schließlich durch Einsetzen

$$p = \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{n+1+m+1}{n+1} \cdot a}{\frac{mn-1}{n+1} \cdot a} = \frac{m+n+2}{mn-1}$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 4 - 090934

Man beweise:

Wenn zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  die Bedingung erfüllen, dass die Zahl  $11a + 2b$  durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl  $18a + 5b$  durch 19 teilbar.

Mit  $11a + 2b$  ist auch

$$12 \cdot (11a + 2b) - 19 \cdot (6a + b) = 132a + 24b - 114a - 19b = 18a + 5b$$

durch 19 teilbar.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

Zweite Lösung:

Ist  $11a + 2b$  durch 19 teilbar, so ist  $2b = 19k - 11a$  mit einer ganzen Zahl  $k$ ; also ist

$$2(18a + 5b) = 36a + 5(19k - 11a) = 19(5k - a) \quad (1)$$

Daher ist einerseits  $5k - a$  gerade, d.h.  $5k - a = 2n$  mit einer ganzen Zahl  $n$ , andererseits folgt dann aus (1) weiter  $18a + 5b = 19n$ , w. z. b. w.

*Übernommen aus [2]*

#### Aufgabe 5 - 090935

Die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$  werde durch eine Parallele zur Seite  $AB$  in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite  $AB$  gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Es seien  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten  $AC$  bzw.  $BC$ . Darüber hinaus seien  $h_{AB}$  und  $h_{PQ}$  die Längen der Höhen des Punktes  $C$  auf  $AB$  bzw. die Parallele  $PQ$ .

Nach Aufgabenstellung ist der Flächeninhalt  $A_{PQC}$  des Dreiecks  $\triangle PQC$  genau halb so groß wie der Flächeninhalt  $A_{ABC}$  des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

Also ist

$$\frac{1}{2}|PQ| \cdot h_{PQ} = A_{PQC} = \frac{1}{2}A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot |AB| \cdot h_{AB}$$

bzw.

$$2 = \frac{|AB|}{|PQ|} \cdot \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$$

Nach den Strahlensätzen ist  $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$ , also  $h_{AB} = \sqrt{2} \cdot h_{PQ}$ . Damit wird die Höhe  $h_{AB}$  im Verhältnis  $1 : (\sqrt{2} - 1)$  durch die Parallele  $PQ$  zu  $AB$  geteilt.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 6 - 090936

Es sei  $f(x)$  die für alle reellen  $x$  definierte Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$$

Ferner sei  $x_0$  eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion  $f(x)$  an den Stellen  $x_0 + 1$  und  $x_0 + 2$  mit  $f(x_0 + 1)$  bzw.  $f(x_0 + 2)$  bezeichnet.

Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0}$$

Es ist

$$\frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0} = \frac{(x_0 + 2) \cdot \frac{x_0(x_0+1)}{2}}{x_0} = \frac{(x_0 + 2)(x_0 + 1)}{2} = f(x_0 + 2)$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.12 X. Olympiade 1970

## 2.12.1 I. Runde 1970, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 100911**

Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr  $X$ :

”Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre.”

Können die Angaben von Herrn  $X$  zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr  $X$ ? (Angaben in vollen Lebensjahren)

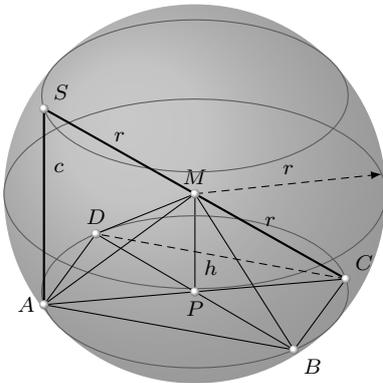
- a) Wenn die Angaben von Herrn  $X$  zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, dass 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn  $X$  ist.
- b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn  $X$ , so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn  $X$ . Daher treffen die Angaben von Herrn  $X$  zu.

Aus b) folgt, dass die Angaben von Herrn  $X$  zutreffen können. Hierzu und aus a) folgt: Herr  $X$  ist 27 Jahre alt.

**Aufgabe 2 - 100912**

Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. In einer Ebene  $\varepsilon$  liege ein Rechteck  $ABCD$  mit den Seitenlängen  $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ . Ferner sei  $S$  ein Punkt der in  $A$  auf  $\varepsilon$  errichteten Senkrechten, wobei  $\overline{AS} = c$  gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte  $A, B, C, D, S$  liegen, und berechne aus den gegebenen Längen  $a, b, c$  die Länge des Durchmessers dieser Kugel!



- a) Angenommen,  $k$  sei eine Kugel der verlangten Art, und  $M$  sei ihr Mittelpunkt. Dann haben sie Strecken  $MA, BM, MC, MD, MS$  alle die gleiche Länge, die mit  $r$  bezeichnet sei. Ist  $P$  der Fußpunkt und  $h$  die Länge des Lotes von  $M$  auf  $\varepsilon$ , so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2,$$

- also  $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$ . Daher ist  $P$  der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks  $ABCD$ . Der Punkt  $M$ , der somit auf der in  $P$  auf  $\varepsilon$  errichteten Senkrechten  $s$  liegt, muss demnach in der Ebene  $\varepsilon_1$  liegen, die durch die Punkte  $A, C$  und  $S$  geht; denn diese Ebene enthält die auf  $\varepsilon$  senkrechte Strecke  $AS$ , steht also auf  $\varepsilon$  senkrecht und geht durch  $P$ , sie enthält also die Gerade  $s$ .

Daher und wegen  $|MA| = |MC| = |MS|$  ist  $M$  der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $\triangle ACS$ . Da dieses wegen  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ , also  $AS \perp AC$  bei  $A$  rechtwinklig ist, ist  $M$  der Mittelpunkt seiner Hypotenuse  $CS$ .

- b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel  $k$ , deren Mittelpunkt der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $CS$  ist und die durch  $C$  geht, die verlangte Eigenschaft. Zunächst geht  $k$  nämlich außer durch  $C$  wegen  $|MC| = |MS|$  auch durch  $S$ . Ist ferner  $P$  der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks  $ABCD$ , so ist

$$\triangle MPA \simeq \triangle MPB \simeq \triangle MPC \simeq \triangle MPD.$$

Also ist  $|MA| = |MB| = |MD|$ , und daher geht die Kugel  $k$  auch durch  $A, B$  und  $D$ .

- c) Die Länge des Durchmessers der Kugel  $k$  beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**Aufgabe 3 - 100913**

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

12345678910111213...9989991000.

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

Es gilt  $9|1971$ . Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme lässt sich folgendermaßen ermitteln: Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100 mal an der Einerstelle, 100mal an der Zehnerstelle und 100 mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vorkommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 = 300 \cdot 45 + 1.$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

**Aufgabe 4 - 100914**

In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

- |            |  |     |
|------------|--|-----|
| Aphrodite: | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (1) |
| Athene:    | <i>Aphrodite ist nicht die Schönste.</i> | (2) |
| Hera:      | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (3) |
| Aphrodite: | <i>Hera ist nicht die Schönste.</i>      | (4) |
| Athene:    | <i>Ich bin die Schönste.</i>             | (5) |

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Die Aussagen 1., 3. und 5. bringen Paris nicht weiter, denn sie lauten gleich, sind wahr, wenn von der Schönsten ausgesprochen und falsch, wenn von einer anderen Göttin ausgesprochen.

Nun Fallunterscheidung und Prüfung der Aussagen 2. und 4.:

1. Fall: Aphrodite ist die Schönste. Wenn Athene dies leugnet (2.) und Aphrodite Hera wahrheitsgemäß als nicht die Schönste bezeichnet, so ergibt sich kein Widerspruch.  $\Rightarrow$  Aphrodite kann die Schönste sein.

2. Fall: Athene ist die Schönste. Die 4. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Hera die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

3. Fall: Hera ist die Schönste. Die 2. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Aphrodite die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit ergibt sich die eindeutige Lösung, dass Aphrodite die Schönste ist, wenn die von Paris getroffenen Voraussetzungen genutzt werden.

*Aufgaben der I. Runde 1970 gelöst von Manuela Kugel*

## 2.12.2 II. Runde 1970, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 100921**

Vier Freunde  $A, B, C$  und  $D$  verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

- $A$  (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn  $C$ ."  
 (2) "Ich habe den Brief nicht."  
 (3) "Mein Freund hat den Brief."  
 $B$  (1) "Entweder  $A$  oder  $C$  hat den Brief."  
 (2) "Alle Aussagen von  $A$  sind wahr."  
 (3) " $D$  hat den Brief nicht."  
 $C$  (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn  $B$ ."  
 (2) "Ich habe den Brief."  
 (3) " $B$  macht keine falschen Aussagen."  
 $D$  (1) "Ich habe den Brief nicht."  
 (2) "Entweder hat  $A$  den Brief, oder er hat ihn nicht."  
 (3) " $B$  hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Angenommen,  $C$  hätte den Brief nicht. Dann wäre  $C$  b) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die  $C$  gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, dass  $C$  c) wahr sein müsste.

Daher wären alle Aussagen, von  $B$  und wegen  $B$  b) auch alle Aussagen von  $A$  wahr. Wegen  $B$  a) und  $A$  b) müsste mithin doch  $C$  den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme,  $C$  hätte den Brief nicht, falsch war.

Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme:  $C$  hat den Brief.

Übernommen aus [5]

2. Lösung:

$A$  kann den Brief nicht haben, da sonst seine Aussagen  $A_2$  und  $A_3$  falsch wären. (Er wird sich nicht als sein eigener Freund bezeichnen.) Auch  $B$  kann den Brief nicht haben, da sonst die Aussage  $A_1$  und damit neben  $B_1$  auch  $B_2$  falsch wären. Gleiches gilt, wenn  $D$  den Brief hätte.

Es verbleibt die Frage, ob  $C$  den Brief haben kann. In dem Fall sind die Aussagen  $A_1$  bis  $A_3$  richtig, da  $C$  ein Freund von  $A$  ist. Damit sind auch alle Aussagen  $B_1$  bis  $B_3$  von  $B$  wahr sowie alle drei Aussagen von  $C$ . (Man beachte dazu bei  $C_1$ , dass die Voraussetzung der Implikation, dass  $C$  den Brief nicht selbst hätte, in diesem Fall nicht erfüllt ist, die Implikation also wahr ist.) Schließlich sind die Aussagen  $D_1$  und  $D_2$  (letzteres, da es eine Tautologie ist) wahr; über  $D_3$  können wir keine Aussage treffen. Also trifft jeder der vier Freunde in diesem Fall mindestens zwei korrekte Aussagen, sodass tatsächlich  $C$  den Brief haben muss.

Aufgabe gelöst von *cyril*

**Aufgabe 2 - 100922**

Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von  $a$  und  $b$  diese Eigenschaft.

- a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!  
 b) Beweisen Sie diesen Satz!

a)  $5 \cdot 25 = (1 + 4)(9 + 16) = 125 = 25 + 100 = 5^2 + 10^2$ .

b) Seien  $a_1, a_2, b_1, b_2$  natürliche Zahlen mit  $a = a_1^2 + a_2^2$  und  $b = b_1^2 + b_2^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} ab &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 = \\ &= (a_1 b_1)^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + (a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2)^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Man erhält diese Identität, indem man  $a$ ,  $b$  und  $ab$  als Betragsquadrate der komplexen Zahlen  $z_1 := a_1 + i \cdot a_2$ ,  $z_2 := b_1 + i \cdot b_2$  bzw.  $z_1 \cdot z_2$  interpretiert.

Aufgabe gelöst von *cyrrix*

Zweite Lösung:

a) Es gilt z.B. für  $a = 5$  und  $b = 13$

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 5 \cdot 13 = 65 = 1^2 + 8^2$$

b) Angenommen,  $a$  und  $b$  seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt mit natürlichen Zahlen  $u, v, x, y$

$$a = u^2 + v^2, \quad b = x^2 + y^2$$

also

$$\begin{aligned} ab &= (u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = u^2x^2 + u^2y^2 + v^2x^2 + v^2y^2 \\ &= (u^2x^2 + v^2y^2) + (u^2y^2 + v^2x^2) \\ &= (u^2x^2 + 2uvxy + v^2y^2) + (u^2y^2 - 2uvxy + v^2x^2) = (ux + vy)^2 + (uy - vx)^2 \quad (1) \\ &= (ux + vy)^2 + (vx - uy)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Da entweder  $(uy - vx)$  oder  $(vx - uy)$  und sämtliche der Zahlen  $u, v, x, y$  natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1) bzw. (2) natürliche Zahlen, d. h.,  $ab$  ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.

Übernommen aus [2]

### Aufgabe 3 - 100923

Gegeben seien zwei reelle Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$ . Ferner sei  $f$  die durch  $f(x) = mx + n$  für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

- a) Ermitteln Sie für  $m = 1$  und  $n = 0$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle  $x_0 + 2$  doppelt so groß ist wie der an der Stelle  $x_0$ )!
- b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt!

- a) Durch die Wahl von  $m$  und  $n$  ist  $f(x) = x$  für alle reellen Zahlen  $x$ , d.h., es sind die Lösungen der Gleichung  $2 \cdot x_0 = x_0 + 2$  gesucht, was genau für  $x_0 = 2$  erfüllt wird.
- b) Hier ist die Gleichung  $2m \cdot x_0 + 2n = m \cdot x_0 + 2m + n$  zu lösen, was äquivalent ist zu  $m \cdot x_0 = 2m - n$ , also  $x_0 = 2 - \frac{n}{m}$ .

Aufgabe gelöst von *cyrrix*

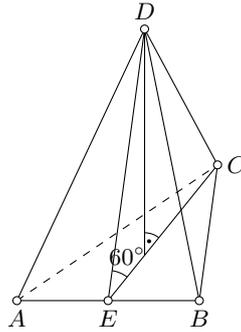
### Aufgabe 4 - 100924

Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt. In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken  $A, B, C, D$  und der Spitze  $D$  sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche  $60^\circ$  groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge  $a$ .

Berechnen Sie das Volumen  $V$  dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist  $P$  ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in  $P$  auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

Für das Volumen  $V$  der Pyramide mit den Ecken  $A, B, C, D$  gilt  $V = \frac{1}{3}Gh$ , wobei  $G$  der Inhalt der Grundfläche und  $h$  die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks  $\triangle ABC$ . Für den Flächeninhalt  $G$  dieses Dreiecks gilt  $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ .



Es sei  $F$  der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da  $F$  nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$  zusammenfällt, schneidet der von  $C$  ausgehende Strahl durch  $F$  die Seite  $AB$  in deren Mittelpunkt, der mit  $E$  bezeichnet sei. Damit ist  $CE$  Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von  $\triangle ABC$  auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \quad (1) \text{ sowie} \quad |FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Da  $\triangle DFA \cong \triangle DFB$  (sws) ist, gilt  $|AD| = |BD|$ , also ist  $\triangle ABD$  gleichschenkelig. Wegen (1) ist folglich  $DE$  Höhe in diesem Dreieck.

Der Winkel  $\angle FED$  ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe  $60^\circ$ . Da  $\angle EFD$  ein rechter Winkel ist, lässt sich die Fläche des Dreiecks  $\triangle EFD$  als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$$

Damit ergibt sich für das Volumen  $V$  der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$$

Übernommen aus [5]

## 2. Lösung:

Es sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Dann ist das Dreieck  $\triangle CAM$  rechtwinklig mit Hypotenuse  $CA$  und es gilt

$$|CM| = \sqrt{|CA|^2 - |AM|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Damit ist  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ .

Sei  $S$  der Schwerpunkt der Grundfläche. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt und  $CM$  eine Seitenhalbierende in der Grundfläche ist, gilt  $|SM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{1}{2\sqrt{3}}a$ .

Die drei Punkte  $D$ ,  $S$  und  $M$  bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei  $S$  und  $\angle SMD = 60^\circ$ , da sowohl  $SM = CM$  als auch  $DM$  senkrecht auf  $AB$  stehen. (Es ist das Dreieck  $\triangle ABD$  gleichschenkelig mit  $|AD| = |BD|$ , also die Seitenhalbierende  $DM$  auf  $AB$  gleich der Höhe von  $D$  auf  $AB$ , also  $DM$  orthogonal zu  $AB$ .)

Nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle DMS$  ist  $\tan \angle SMD = \frac{|SD|}{|SM|}$ , also  $|SD| = \tan 60^\circ \cdot |SM| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{a}{2}$ .

Damit ergibt sich für das Volumen  $V$  der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot |SD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3$$

Aufgabe gelöst von cyrix

## 2.12.3 III. Runde 1970, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 100931**

Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.

Ferner ist folgendes bekannt:

- (1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
- (2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
- (3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
- (4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.

Aus wie viel Schülern bestand Günters Gruppe?

Nach (3) und (4) hatte er genau zwei mal öfter vormittags als nachmittags Tischdienst, und da er nach (2) niemals sowohl vormittags als auch nachmittags Tischdienst hatte, war er mit (1) an genau vier Tagen vormittags, an zweien nachmittags und an  $13-4=11-2=9$  gar nicht beschäftigt.

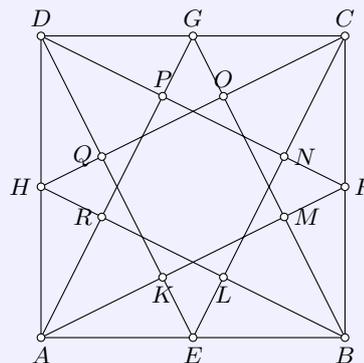
Das Lager dauerte damit  $9+4+2=15$  Tage, sodass  $15 \cdot 4 = 60$  Schüler-Tischdienst-Einsätze notwendig waren. Günther war zu 6 davon eingeteilt, sodass also insgesamt seine Gruppe aus  $\frac{60}{6} = 10$  Schülern bestand.

**Aufgabe 2 - 100932**

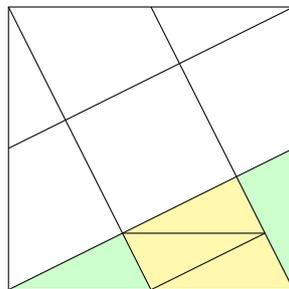
In einem Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a$  seien die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CD, DA$  mit  $E, F, G, H$  bezeichnet.

In dem Streckenzug  $AFDECHBGA$  auftretenden Schnittpunkte seien so mit  $K, L, M, N, O, P, R$  bezeichnet, dass  $AKELBMFNCOGPDQHR$  ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Bild).

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



Der Flächeninhalt des Sechzehnecks ergibt sich als Differenz der Fläche des Quadrats und der der acht (aus Symmetriegründen – Spiegelung an den Diagonalen bzw. den Mittelparallelen des Quadrats bzw. Hintereinanderausführungen davon überführt je zwei solche ineinander – kongruenten) Dreiecke  $AKL, ELB, BMF, FNC, COG, GPD, DQH$  und  $HRA$ .



Der Flächeninhalt des Dreiecks  $AED$  beträgt  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ . Dieses lässt sich zerlegen in das Dreieck  $AKE$  und das Dreieck  $DAK$ . Aufgrund der Parallelität der Geraden  $AK = AF$  und  $HQ = HC$  geht das Dreieck  $DAK$  durch Streckung mit Zentrum  $D$  um den Faktor 2 aus dem Dreieck  $DHQ$  hervor, da  $|DA| = 2|DH|$  ist.

Sei mit  $x$  der Flächeninhalt des Dreiecks  $AKE$  bezeichnet. Dann hat also auch das Dreieck  $DHQ$  den Flächeninhalt  $x$  und das Dreieck  $DAK$  demnach den Flächeninhalt  $2^2 \cdot x = 4x$ .

Nach der Vorüberlegung ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $AED$  gleich  $4x + x = \frac{1}{4}a^2$ , sodass jedes einzelne der betrachteten "kleinen Dreiecke" den Flächeninhalt von  $x = \frac{1}{20}a^2$  besitzt. Der Flächeninhalt des Sechzehnecks beträgt demnach  $a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$ .

**Aufgabe 3 - 100933**

Wenn  $x$  eine reelle Zahl ist, so bedeute  $[x]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $x$  ist. (So ist z.B.  $[3,7] = 3$ ,  $[-3,7] = -4$ ,  $[4] = 4$ .)

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$\left[ \frac{10 + 3x}{6} \right] = \frac{5x + 3}{7}$$

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl  $x$ , die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist  $\frac{5x+3}{7}$  ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl  $a$  mit  $0 \leq a < 1$ , für die

$$\frac{10 + 3x}{6} = \frac{5x + 3}{7} + a$$

gilt. Daraus folgt  $70 + 21x = 30x + 18 + 42a$ , woraus man

$$x = \frac{52 - 42a}{9}$$

erhält. Wegen  $0 \leq a < 1$  ergibt sich daraus

$$\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$$

und weiter

$$\frac{\frac{50}{9} + 3}{7} < \frac{5x + 3}{7} \leq \frac{\frac{260}{9} + 3}{7} \quad \text{bzw.} \quad \frac{11}{9} < \frac{5x + 3}{7} \leq \frac{41}{9}$$

also kann der Ausdruck  $\frac{5x+3}{7}$  (da er ganzzahlig ist) nur gleich einer der Zahlen 2, 3, 4 sein.

Aus  $\frac{5x+3}{7} = 2$  folgt  $x = \frac{11}{5}$ ,

aus  $\frac{5x+3}{7} = 3$  folgt  $x = \frac{18}{5}$ ,

Aus  $\frac{5x+3}{7} = 4$  folgt  $x = 5$ .

Also können höchstens  $x = \frac{11}{5}$ ,  $x = \frac{18}{5}$ ,  $x = 5$  Lösungen von (\*) sein. Tatsächlich sind dies Lösungen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left[ \frac{10 + \frac{33}{5}}{6} \right] &= 2 & , & & \frac{\frac{55}{5} + 3}{7} &= 2 \\ \left[ \frac{10 + \frac{54}{5}}{6} \right] &= 3 & , & & \frac{\frac{90}{5} + 3}{7} &= 3 \\ \left[ \frac{10 + 15}{6} \right] &= 4 & , & & \frac{25 + 3}{7} &= 4 \end{aligned}$$

Übernommen aus [2]

**Aufgabe 4 - 100934**

Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen  $(x, y, z)$ , welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x + y = 2 \quad ; \quad (2) \quad xy - z^2 = 1$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man  $xy = 1 + z^2 \geq 1$  und damit

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 2^2 - 4xy \leq 4 - 4 = 0$$

Also muss in dieser Ungleichungskette an jeder Stelle Gleichheit gegolten haben, sodass  $x - y = 0$  und  $xy = 1$ , also  $x = y = \pm 1$ , und mit Gleichung (2) auch  $z = 0$  folgt.

Es kann also nur zwei Lösungstriplets  $(x, y, z)$  geben, nämlich  $(-1, -1, 0)$  und  $(1, 1, 0)$ . Die Probe bestätigt aber nur das zweite, sodass  $(1, 1, 0)$  die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Zweite Lösung:

Angenommen, ein Tripel  $(x_0, y_0, z_0)$  sei Lösung von (\*), (\*\*). Dann ergibt sich, indem man z.B.  $x_0 = 2 - y_0$  in (\*\*) einsetzt,  $y_0^2 - 2y_0 + z_0^2 + 1 = 0$ , also

$$(y_0 - 1)^2 + z_0^2 = 0 \quad (1)$$

Wäre nun  $y_0 \neq 1$  oder  $z_0 \neq 0$ , so folgte  $(y_0 - 1)^2 > 0$  bzw.  $z_0^2 > 0$ , also, da stets  $(y_0 - 1)^2 \geq 0$  und  $z_0^2 \geq 0$  ist, in jedem Fall  $(y_0 - 1)^2 + z_0^2 > 0$ , im Widerspruch zu (1). Daher ergibt sich aus (1), dass  $y_0 = 1$  und  $z_0 = 0$  sein muss.

Aus (\*) folgt dann  $x_0 = 1$ . Also kann höchstens das Tripel  $(1, 1, 0)$  Lösung des Gleichungssystems (\*), (\*\*) sein.

Tatsächlich ist dies Lösung, denn für  $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$  wird

$$x_0 + y_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{oder} \quad x_0 y_0 - z_0^2 = 1 - 0 = 1$$

Übernommen aus [2]

#### Aufgabe 5 - 100935

Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken  $A, B, C, D$  und der Spitze  $D$  habe die Kantenlängen  $AB = 4$  cm,  $AC = 3$  cm,  $BC = 5$  cm,  $BD = 12$  cm,  $CD = 13$  cm, und  $\angle ABD$  sei ein rechter Winkel. Man berechne das Volumen  $V$  dieser Pyramide.

Da  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  gilt, ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck  $\triangle ABC$  rechtwinklig, wobei  $AB$  und  $AC$  seine Katheten sind.

Also beträgt sein Flächeninhalt  $A = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6 \text{ cm}^2$ . Da  $\angle ABD = 90^\circ$  beträgt, ist die Strecke  $BD$  auch gleichzeitig die Höhe der Spitze  $D$  über der Grundfläche  $ABC$ . Also beträgt das Volumen  $V$  der Pyramide genau  $V = \frac{1}{3} A \cdot BD = 24 \text{ cm}^3$ .

#### Aufgabe 6 - 100936

Es sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $a + b + c, \alpha, \gamma$  zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich  $a, b, c$  die Längen der Seiten  $BC, AC, AB$  und  $\alpha, \gamma$  die Größen der Winkel  $\angle CAB, \angle ACB$ . Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

- 1) Man zeichne zuerst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln  $\alpha$  und  $\gamma$ , indem man ausgehend von zwei Punkten  $A$  und  $C'$  an die Strecke  $AC'$  in  $A$  den Winkel  $\alpha$  und in  $C'$  den Winkel  $\gamma$  in entsprechender Orientierung, dass sich ein Dreieck  $AB'C'$  mit  $B'$  als Schnittpunkt der freien Schenkel der gezeichneten Winkel ergibt.
- 2) Auf einer Geraden durch  $A$ , welche weder  $B'$  noch  $C'$  enthält, konstruiere man einen Punkt  $S'$  mit  $AS' = AC' + AB' + B'C'$ , indem man zuerst die Strecke  $AC'$  an  $A$ , dann  $AB'$  an den so erhaltenen ersten Zwischenpunkt und schließlich die Strecke  $B'C'$  an den gerade erhaltenen zweiten Zwischenpunkt auf der Geraden anträgt.
- 3) Auf dem von  $A$  ausgehenden Strahl, der  $S$  enthält, konstruiere man auch den Punkt  $S$  mit  $AS = a + b + c$ .
- 4) Man konstruiere nun die Parallele zu  $B'S'$  durch  $S$ . Diese schneide die Gerade  $AB'$  in  $B$ .
- 5) Analog sei der Schnittpunkt der Parallelen zu  $C'S'$  durch  $S$  mit der Geraden  $AC'$  mit  $C$  bezeichnet.

Dann ist  $\triangle ABC$  das gesuchte Dreieck.

Beweis: Das Dreieck  $\triangle AB'C'$  ist ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck, da es nach Konstruktion in zwei Innenwinkeln mit diesem übereinstimmt. Also gibt es einen Streckungsfaktor  $k$ , sodass alle Seitenlängen des Dreiecks  $\triangle AB'C'$  um den gleichen Faktor  $k$  gestreckt werden müssen, um die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks zu erhalten.

Demzufolge ist auch der Umfang des Dreiecks  $\triangle AB'C'$  um den Faktor  $k$  zu klein. Dieser Umfang ist durch die Strecke  $AS'$  gegeben; der Umfang des zu konstruierenden Dreiecks mit  $AS$ , der Streckungsfaktor also durch  $\frac{AS}{AS'}$ .

Nach den Strahlensätzen ist aber nach Konstruktion  $\frac{AB}{AB'} = \frac{AS}{AS'}$  und analog  $\frac{AC}{AC'} = \frac{AS}{AS'}$ , da die von  $A$  ausgehenden Strahlen  $AB$ ,  $AC$  und  $AS$  von den Parallelen  $BS$  und  $B'S'$  bzw.  $CS$  und  $C'S'$  geschnitten werden. Damit ist  $\triangle ABC$  das gesuchte Dreieck.

*Aufgaben der III. Runde 1970 gelöst von cyrix*

## 2.13 XI. Olympiade 1971

### 2.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 110911

Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)} \quad (1)$$

Michael meint, dass sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" lässt, wählt für die Variablen  $a, b, c$  und  $d$  Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen  $-1, 0, 1$  für  $a, b, c$  und  $d$  je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird!

Addiert man die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so folgt, dass die Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, wenn  $a+b+c+d=1$  und  $a \neq -b$  sowie  $c \neq -d$  gelten. Wählt man für  $a$  eine der Zahlen  $-1, 0$  oder  $1$ , so verbleiben für  $b$  wegen  $a \neq -b$  je genau zwei Zahlen, nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit  $a+b=-2$  und die mit  $a+b=1$  auszuschließen, da sich aus  $a+b+c+d=1$  für sie  $c+d=3$  bzw.  $c+d=0$  ergibt, was durch Wahl von  $c$  und  $d$  aus den Zahlen  $-1, 0, 1$  nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu  $c \neq -d$  steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für  $c+d$ , die durch Wahl von  $c$  und  $d$  aus den Zahlen  $-1, 0, 1$  durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
a+b	-2	-1	-1	1	1	2	1
c+d	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

#### Aufgabe 2 - 110912

Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Im Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $CM$  die Seitenhalbierende der Seite  $AB$  und  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2. \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass nicht jede Gerade durch  $S$  die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$  in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele  $g$  zu  $AB$  durch  $S$  schneide  $AC$  und  $BC$  in  $D$  bzw.  $E$ . Diese Punkte existieren stets, da  $AC$  und  $BC$  nicht parallel zu  $AB$  und damit auch nicht parallel zu  $g$  sind. Das Lot

$CG$  von  $C$  auf die Gerade durch  $A$  und  $B$  schneide  $g$  in  $F$ . Dieser Punkt existiert stets, da  $CG \perp g$  gilt.

Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3, \text{ d.h.} \quad (2)$$

$$|DE| = \frac{2}{3}|AB| \text{ und} \quad (3)$$

$$|CF| : |CG| = 2 : 3, \text{ d.h.} \quad (4)$$

$$|CF| = \frac{2}{3}|CG| \quad (5)$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle CDE$  nur  $\frac{4}{9}$  von dem des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

Damit ist gezeigt, dass nicht alle Geraden durch  $S$  die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

### Aufgabe 3 - 110913

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen  $a$ , für die der Term

$$t = \frac{a + 11}{a - 9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Für natürliche Zahlen  $a < 9$  ist  $t < 0$ . Für  $a = 9$  ist  $t$  nicht definiert. Ist  $a > 9$  und setzt man  $h = a - 9$ , so ist  $h$  stets eine natürliche Zahl, ferner  $a = h + 9$  und

$$t = \frac{h + 20}{h} = 1 + \frac{20}{h}.$$

Somit ist  $t$  genau dann eine natürliche Zahl, wenn  $h$  Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

$h$	$a = h + 9$	$t$
1	10	21
2	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 20 alle gestellten Bedingungen.

Übernommen aus [2]

### Aufgabe 4 - 110914

In einer Ebene  $\varepsilon$  liege ein Rechteck  $ABCD$ .  $S$  sei ein Punkt der Senkrechten in  $A$  auf  $\varepsilon$ .

Ermitteln Sie die Größe des Winkels  $\angle CDS$ !

Die Punkte  $A, D, S$  liegen in einer Ebene  $\varepsilon'$ , die auf der Ebene  $\varepsilon$  durch  $A, B, C$  und  $D$  senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist  $AD \perp AB$  und, falls  $S \neq A$  ist, auch  $SA \perp AB$ .

Im Fall  $S = A$  sei  $\varepsilon'$  die zu  $\varepsilon$  senkrechte Ebene durch  $A$  und  $D$ . Daher ist in jedem Fall  $CD \perp \varepsilon'$  und somit  $|\angle CDS| = 90^\circ$ .

Aufgaben der I. Stufe 1971 gelöst von Manuela Kugel

## 2.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 110921**

Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in  $\text{cm}^2$ ) und seines Volumens (in  $\text{cm}^3$ ) untereinander gleich sein. Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit  $r$  sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit  $h$  die Maßzahl seiner Höhenlänge bezeichnet.

Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm):  $2\pi r$ , die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche:  $2\pi r \cdot h$  und die Maßzahl seines Volumens (in  $\text{cm}^3$ ):  $\pi r^2 \cdot h$ , und es gilt:  $2\pi r = 2\pi r \cdot h$ , woraus wegen  $r > 0$   $h = 1$  folgt.

Ferner gilt:  $2\pi r \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ , woraus wegen  $r = 2$  folgt.

Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Tatsächlich ist in diesem Falle der Umfang der Grundfläche  $4\pi$  cm, der Mantelflächeninhalt  $4\pi \text{cm}^2$  und das Volumen  $4\pi \text{cm}^3$ .

*Lösung übernommen aus [5]*

**Aufgabe 2 - 110922**

Ermitteln Sie alle geordneten Paare  $(a, b)$  ganzer Zahlen  $a$  und  $b$  ( $b \neq 0$ ) mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man den Zähler  $a$  des Bruches  $\frac{a}{b}$  durch die Summe aus  $a$  und einer geeigneten natürlichen Zahl  $n$  ( $n \neq 0$ ) und ersetzt man zugleich den Nenner  $b$  dieses Bruches durch das Produkt aus  $b$  und der gleichen Zahl  $n$ , so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch  $\frac{a}{b}$  gleich ist.

Gesucht sind Zahlentripel  $(a, b, n)$ , die die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a+n}{bn}$$

erfüllen.  $b$  kann gekürzt werden und ist somit beliebig wählbar. Nach Umformung erhalten wir  $(a-1)(n-1) = 1$ .

Da Lösungen in  $\mathbb{Z}$  gesucht sind, folgt daraus  $a-1 = n-1 = \pm 1$ . Also sind wegen  $n \neq 0$  die Tripel durch  $(2, b, 2)$ ,  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gegeben.

Zweite Lösung:

Angenommen,  $(a, b)$  sei ein Zahlenpaar, das zusammen mit einer geeigneten Zahl  $n$  der gestellten Bedingung genügt, dann gilt

$$\frac{a+n}{bn} = \frac{a}{b}$$

Daraus erhält man  $ab + bn = abn$ . Wegen  $b \neq 0$  folgt  $a+n = an$ , also

$$a = n(a-1) \tag{1}$$

Aus (1) folgt  $a \neq 1$  und daher

$$n = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$$

Da  $n$  ganzzahlig ist, ergibt sich weiter

$$a-1 = \pm 1, \quad \text{also } a = 2 \quad \text{oder} \quad a = 0$$

und wegen  $n > 0$  schließlich  $a = 2$ . Daher können nur Zahlenpaare der Form  $(2, b)$  und zu jedem dieser Paare nur  $n = 2$  die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich ist  $\frac{2+2}{b \cdot 2} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$ .

Die Lösungsmenge besteht also aus allen Zahlenpaaren der Form  $(2, b)$  ( $b \neq 0$ , ganz).

*Übernommen aus [2]*

**Aufgabe 3 - 110923**

Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit  $P_1$  bis  $P_{30}$  bezeichnet.

Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken  $P_7P_{18}$  und  $P_{12}P_{21}$  schneiden!

Wir ergänzen das 30-Eck zu einem 60-Eck mit Ecken  $Q_1, \dots, Q_{60}$ . Sei  $M$  der Mittelpunkt.

Dann ist  $P_7P_{18} = Q_{14}Q_{36}$  orthogonal zu  $MQ_{25}$ ,  $25 = \frac{1}{2}(14 + 36)$  und  $P_{12}P_{21} = Q_{24}Q_{42}$  orthogonal zu  $MQ_{33}$ ,  $33 = \frac{1}{2}(24 + 42)$ .

Der Schnittwinkel der Geraden entspricht daher dem Winkel  $\sphericalangle Q_{25}MQ_{33} = \frac{360^\circ}{60}(33 - 25) = 48^\circ$ .

**Aufgabe 4 - 110924**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind  $p_1$  und  $p_2$  Primzahlen, für die  $3 < p_1 < p_2$  gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , so dass die Gleichungen

$$(1) \quad a + b = p_2 \quad \text{und} \quad (2) \quad a - b = p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt  $a \cdot b$  durch 6 teilbar ist.

Addition von (1) und (2) ergibt  $2a = p_1 + p_2$ , Subtraktion ergibt  $2b = p_2 - p_1$ .

Setze also  $a = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$  und  $b = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$ .

Weil  $p_1, p_2$  Primzahlen größer als 2 mit  $p_2 > p_1$  sind, gilt  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Außerdem ist  $ab = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$ . Da  $p_i$  Primzahlen mit  $p_i > 3$  sind, sind die  $p_i$  nicht durch 2 teilbar. Dann ist aber entweder  $p_1 + p_2$  oder  $p_2 - p_1$  durch 3 teilbar. Außerdem ist einer der Faktoren  $(p_2 \pm p_1)$  durch 4 und einer durch 2 teilbar.

Damit ist  $(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$  durch 24 teilbar, also  $ab$  durch  $24/4 = 6$ .

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

Zweite Lösung:

Zu  $p_1$  und  $p_2$  kann man zunächst stets rationale Zahlen  $a$  und  $b$  eindeutig so bestimmen, dass (\*) und (\*\*) erfüllt sind, nämlich

$$a = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad b = \frac{p_2 - p_1}{2}$$

Der verlangte Beweis ist geführt, wenn noch gezeigt wird, dass  $a, b$  natürliche Zahlen sind, deren Produkt durch 6 teilbar ist.

Da  $p_1, p_2$  nach Voraussetzung zwei von der Primzahl 2 verschiedene Primzahlen sind, sind sie beide ungerade. Folglich sind  $p_1 + p_2$  und  $p_2 - p_1$  gerade, also  $a$  und  $b$  ganze Zahlen. Ferner ist  $p_1 + p_2 \geq$  und wegen  $p_1 < p_2$  auch  $p_2 - p_1 > 0$ , also sind  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen.

Da ihre Summe  $a + b = p_2$  ungerade ist, ist eine der Zahlen  $a, b$  gerade. Also ist  $ab$  gerade.

Nach Voraussetzung sind  $p_1$  und  $p_2$  von der Primzahl 3 verschiedene Primzahlen. Daher sind sie nicht durch 3 teilbar, d. h., jede von ihnen lässt bei Division durch 3 einen der Reste 1 oder 2. Lassen beide den gleichen Rest, dann ist  $2b = p_2 - p_1$  durch 3 teilbar, also auch  $b$ .

Lassen beide verschiedene Reste, so ist  $2a = p_1 + p_2$  durch 3 teilbar. Daher ist  $ab$  in jedem Fall durch 3 teilbar. Aus  $2 \mid ab$  und  $3 \mid ab$  folgt, da 2 und 3 teilerfremd sind, schließlich  $6 \mid ab$ , w.z.b.w.

*Übernommen aus [2]*

## 2.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 110931**

Günter erzählt:

”Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:

Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.”

Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Wenn die Quersumme der ersten beiden Zahlen zweistellig wäre, dann wäre sie höchstens 18 und damit enthielte die Telefonnummer eine 1, was nicht sein kann. Also ist die Quersumme einstellig. Da auch die Hausnummer keine 1 enthalten darf, bleiben für die Hausnummer noch die Möglichkeiten:

24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 72, 90 mit den Quersummen 6, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 9, 6, 9, 9, 9 übrig.

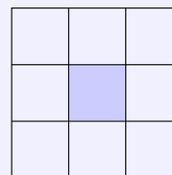
In allen Fällen außer bei 30, 33, 60 und 90 ist die erste Ziffer der nächsten Summe eine 1, was nicht geht. Bei 33 ergibt sich 336915, bei 60 ergibt sich 606612 und bei 90 ergibt sich 909918 was nicht geht. Also ist die Hausnummer 30 und die Telefonnummer 303369.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

**Aufgabe 2 - 110932**

In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei ”Zeilensummen”, die drei ”Spaltensummen” und die zwei ”Diagonalsummen” sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).

Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit  $n, n + 1, \dots, n + 8$  bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann  $9n + 36$ .

Da die drei ”Zeilensumme” gleich sein sollen, muss jede von ihnen  $3n + 12$  betragen. Lauf Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen.

Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen lässt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

$$\begin{array}{lll} n + (n + 4) + (n + 8) & n + (n + 5) + (n + 7) & (n + 1) + (n + 3) + (n + 8) \\ (n + 1) + (n + 4) + (n + 7) & (n + 1) + (n + 5) + (n + 6) & (n + 2) + (n + 3) + (n + 7) \\ (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) & (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) & \end{array}$$

In den Summen kommen die Summanden  $n, n + 2, n + 6$  und  $n + 8$  genau zweimal, die Summanden  $n + 1, n + 3, n + 5$  und  $n + 7$  genau je dreimal und es kommt nur der Summand  $n + 4$  genau viermal vor. Bei dem Bilden der Zeilen- Spalten- und Diagonalsummen wird nur das farbige Feld genau viermal belegt. Daher muss im farbigen Feld die Zahl  $n + 4$ , das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen  $n, \dots, n + 8$ , stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

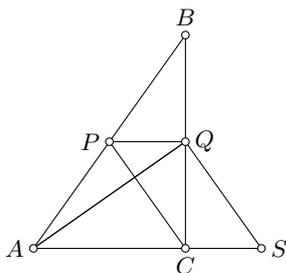
*Übernommen aus [5]*

**Aufgabe 3 - 110933**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks  $\triangle ABC$  wie  $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ , dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Wegen  $\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$  ist das Dreieck rechtwinklig. Im folgenden betrachten wir ein Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = \sqrt{3}$ ,  $|AC| = 1$  und  $|BC| = \sqrt{2}$ .



Wir verschieben die Seitenhalbierende  $CP$  parallel zu  $QS$  ( $PQ$  ist parallel zu  $AC$ ). Das Dreieck  $AQS$  hat die Seitenlängen

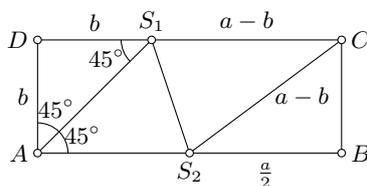
$$|AS| = \frac{3}{2}, \quad |AQ|^2 = |AC|^2 + |CQ|^2 = \frac{3}{2}, \quad |QS|^2 = |QC|^2 + |CS|^2 = \frac{3}{4}$$

Diese erfüllen die Gleichung  $|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2$ . Daher sind die beiden Seitenhalbierenden  $AQ$ ,  $CP$  orthogonal.

#### Aufgabe 4 - 110934

In einem Rechteck  $ABCD$  mit  $AB = CD = a$  und  $BC = DA = b$ , ( $a > b$ ) schneide die Halbierende des Winkels  $\angle BAD$  die Seite  $CD$  in  $S_1$ . Weiter sei  $S_2$  der Mittelpunkt von  $AB$ .

Ermitteln Sie das Verhältnis  $a : b$  der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels  $\angle AS_2C$  die Seite  $CD$  in  $S_1$  schneidet!



Ein Rechteck  $ABCD$  genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn  $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_1S_2C$  gilt. Da ferner in jedem Rechteck  $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_2S_1C$  (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreiecke  $\triangle S_1S_2C$  gleichschenkelig mit  $S_1C = S_2C$  ist.

Nun ist das rechtwinklige Dreieck  $\triangle ADS_1$  stets gleichschenkelig, da  $\angle DAS_1$  eine Größe von  $45^\circ$  hat und somit  $\angle DAS_1 \cong \angle AS_1D$  gilt. Daher gilt:

$DS_1 = DA = b$ , und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn  $S_2C = S_1C = a - b$  gilt. Da  $\triangle S_2BC$  rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a - b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit  $a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}$ , d.h.  $\frac{3}{4}a^2 = 2ab$  gilt.

Wegen  $a \neq 0$  trifft dies genau für  $a : b = 8 : 3$  zu.

Übernommen aus [5]

#### Aufgabe 5 - 110935

Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Durch Multiplikation mit  $abc > 0$  geht die zu zeigende Ungleichung in die äquivalente

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc + ac - ab) \quad \text{bzw.} \quad a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also  $(a + b - c)^2 \geq 0$ , was offensichtlich wahr ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Es gilt  $(a + b - c)^2 \geq 0$ , und das Gleichheitszeichen gilt genau für  $a + b = c$ . Daraus folgt

$$(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 \geq 0$$

also

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc + ac - ab)$$

Nach Division durch die positive reelle Zahl  $abc$  ergibt dies

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für  $a + b = c$ .

Übernommen aus [2]

### Aufgabe 6 - 110936

Ermitteln Sie alle geordneten Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen  $x, y$ , die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

Mittels der Substitution  $y = z - 3$  mit  $z \in \mathbb{Z}$  geht die Gleichung über in

$$2x^2 - 2xz + 6x - 5x - z + 3 + 19 = 0 \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2xz + x - z = -22$$

bzw.  $(2x + 1)(x - z) = -22$ .

Damit ist  $2x + 1$  ein ganzzahliger Teiler von  $-22$ . Da dieser Term auch ungerade ist, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Fall:  $2x + 1 = 1$  und  $x - z = -22$ . Dann ist  $x = 0$ ,  $z = 22$  und  $y = 19$ .
2. Fall:  $2x + 1 = -1$  und  $x - z = 22$ . Dann ist  $x = -1$ ,  $z = -23$  und  $y = -26$ .
3. Fall:  $2x + 1 = 11$  und  $x - z = -2$ . Dann ist  $x = 5$ ,  $z = 7$  und  $y = 4$ .
4. Fall:  $2x + 1 = -11$  und  $x - z = 2$ . Dann ist  $x = -6$ ,  $z = -8$  und  $y = -11$ .

Die Probe bestätigt alle Ergebnisse. Die Gleichung wird demnach genau von den ganzzahligen Paaren  $(x, y) \in \{(-6, -11), (-1, -26), (0, 19), (5, 4)\}$  gelöst.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

Zweite Lösung:

Angenommen, die Gleichung hätte eine Lösung  $(x, y)$ . Dann gilt

$$y(2x + 1) = 2x^2 - 5x + 19 \quad \text{also}$$

$$y = x - 3 + \frac{22}{2x + 1} \quad \text{mit} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

Da  $x, y$  ganzzahlig sein sollen, muss auch  $\frac{22}{2x+1}$  eine ganze Zahl sein. Das ist genau dann der Fall, wenn  $2x + 1$  ein Teiler von  $22$ , d.h. eine der Zahlen  $-22, -11, -1, 1, 11, 22$  ist.

Für  $2x + 1 = +22$  ist  $x$  nicht ganzzahlig. In den übrigen Fällen erhält man für  $x$  der Reihe nach die Werte  $-6, -1, 0, 5$  und daraus für  $y$  die Werte  $-11, -26, 19, 4$ .

Also können höchstens die Zahlenpaare  $(-6, -11), (-1, -26), (0, 19), (5, 4)$  Lösung sein.

Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung findet man, dass sie es tatsächlich sind.

Übernommen aus [2]

## 2.14 XII. Olympiade 1972

## 2.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 120911**

Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl  $n \geq 4$  einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau  $n$  Ecken und genau  $n$  Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Jede Pyramide, deren Grundfläche ein  $(n - 1)$ -Eck ist, hat genau  $n$  Ecken (nämlich die  $n - 1$  Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau  $n$  Flächen (nämlich die  $n - 1$  Mantelflächen und die Grundfläche).

**Aufgabe 2 - 120912**

Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

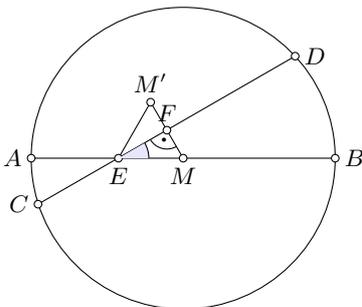
Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Die genaue Länge der Strecke  $S$  liegt nach Andreas Schätzung  $A$  um 10% unter seinem Wert; also bei  $\frac{9}{10}A = S$ . Franks Schätzung  $F$  muss um 10% erhöht werden, um den genauen Wert  $S$  zu erhalten; also  $\frac{11}{10}F = S$ . Andreas Wert ist somit  $A = \frac{10}{9}S$  und der Betrag des absoluten Fehlers  $A = |\frac{10}{9}S - S| = \frac{1}{9}S$ . Franks Wert ist  $F = \frac{10}{11}S$  und der Betrag des absoluten Fehlers  $F = |\frac{10}{11}S - S| = \frac{1}{11}S$ . Bei Franks Schätzwert ist der Betrag des absoluten Fehlers kleiner als bei Andreas Schätzwert ( $\frac{1}{11}S < \frac{1}{9}S$ ).

**Aufgabe 3 - 120913**

Ein Durchmesser  $AB$  eines Kreises werde von einer Sehne  $CD$  in einem Punkt  $E$  geschnitten, der  $AB$  innen im Verhältnis 2 : 5 teilt. Dabei schneide die Sehne  $CD$  den Durchmesser  $AB$  unter einem Winkel von  $30^\circ$ .

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt  $M$  des Kreises, wenn die Länge  $d$  des Durchmessers gegeben ist!



Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen  $A, B$  gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \quad \text{und} \quad (1)$$

$$|EB| = \frac{5}{7}d, \quad \text{also} \quad (2)$$

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{3}{14}d. \quad (3)$$

$F$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $M$  auf  $CD$ . Dann ist  $\triangle EMF$  rechtwinklig mit  $|\angle MEF| = 30^\circ$  (nach Voraussetzung), also

$$|\angle FME| = 60^\circ. \quad (4)$$

Man spiegele nun  $\triangle MEF$  an  $CD$ . Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck  $\triangle EFM'$  gilt dann

$$|\angle FEM'| = 30^\circ \quad \text{und} \quad |\angle EM'F| = 60^\circ \quad (5)$$

Nach (4) und (5) ist das Dreieck  $\triangle EMM'$  gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt  $F$  auch der Mittelpunkt von  $MM'$ . Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus  $|MF| = \frac{3}{28}d$ . Der Abstand der Sehne  $CD$  vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also  $\frac{3}{28}d$ , wenn  $d$  die Durchmesserlänge des Kreises ist.

**Aufgabe 4 - 120914**

Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Es gilt:

- a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede *nicht* mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt *entweder* nicht mit 9  
*oder* zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,  
*oder* zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,  
*oder* zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879
- b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 8 und 9 teilbar ist.
- c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.
- d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei in diesem Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind). Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, dass d) gilt und
- e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0,1,5), (0,2,4) und (1,2,3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

*Anderer Lösungsweg*

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (u.s.w. wie oben in a)).

Wegen  $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$  ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 = 9876528.$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 = 9876456, \quad 9876456 - 72 = 9876384, \quad 9876384 - 72 = 9876312, \dots$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

*Übernommen aus [2]*

## 2.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 120921**

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= n^3 + (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 4) \\ &= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3 \cdot (n^3 + 3n^2 + 5n + 3). \end{aligned}$$

Somit ist die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar.

*Aufgabe gelöst von Conny42*

2. Lösung: Es ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3(n^3 + 2n)$$

durch 3 teilbar.

Bemerkung: Wegen

$$n^3 + 2n = (n^3 - 4n) + 6n = n(n^2 - 4) + 6n = (n-2)n(n+2) + 6n$$

folgt sogar, dass die Summe von 3 Kuben immer durch  $3^2 = 9$  teilbar sein muss, einer der drei Faktoren  $n-2$ ,  $n$  oder  $n+2$  durch 3 teilbar ist und damit auch  $n^3 + 2n$ .*Aufgabe gelöst von cyrix***Aufgabe 2 - 120922**Ermitteln Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für die der Quotient  $\frac{8-3x}{7x-2}$  negativ ist!Es ist  $\frac{8-3x}{7x-2} < 0$  genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

- i) Es ist  $8-3x < 0$  und  $7x-2 > 0$ .
- ii) Es ist  $7x-2 < 0$  und  $8-3x > 0$ .

Zu i): Aus  $8-3x < 0$  folgt  $x > \frac{8}{3}$  und aus  $7x-2 > 0$  folgt  $x > \frac{2}{7}$ . Wegen  $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$  ist  $x > \frac{2}{7}$  automatisch erfüllt, wenn  $x > \frac{8}{3}$  erfüllt ist. Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn  $x \in (\frac{8}{3}, \infty)$ .Zu ii): Aus  $7x-2 < 0$  folgt  $x < \frac{2}{7}$  und aus  $8-3x > 0$  folgt  $x < \frac{8}{3}$ . Wegen  $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$  ist  $x < \frac{8}{3}$  automatisch erfüllt, wenn  $x < \frac{2}{7}$  erfüllt ist. Der zweite Fall tritt also genau dann ein, wenn  $x \in (-\infty, \frac{2}{7})$ .Insgesamt folgt, dass der Quotient  $\frac{8-3x}{7x-2}$  genau dann negativ ist, wenn  $x \in (-\infty, \frac{2}{7}) \cup (\frac{8}{3}, \infty)$ .*Aufgabe gelöst von Conny42***Aufgabe 3 - 120923**

Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
- (2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
- (3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
- (4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
- (5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
- (6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Die kleinste Anzahl von Büchsen ist 36. Je 12 Büchsen der Sorten A, B und C können wie folgt zu einer Pyramide gestapelt werden:

A  
 B B  
 A A A  
 B B B B  
 C C C C C  
 B B B B B B  
 C C C C C C C  
 A A A A A A A A

Begründung, warum es mit weniger als 36 Büchsen nicht funktioniert:

Die Anzahl  $k$  der Büchsen muss eine Dreieckszahl, also von der Form  $k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  sein.  $k$  muss den Teiler 3 enthalten.

Also kommen für  $k < 36$  höchstens die Zahlen  $3 = 1 + 2$ ,  $6 = 1 + 2 + 3$ ,  $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$  und  $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$  infrage.

Die Summanden  $1, 2, \dots, n$  müssen dann auf drei Teilsummen aufgeteilt werden, die jeweils  $\frac{k}{3}$  ergeben.

Bei  $k = 3 = 1 + 2$  oder  $k = 6 = 1 + 2 + 3$  ist solch eine Aufteilung nicht möglich, da der größte Summand (2 bzw. 3) bereits größer als  $\frac{k}{3}$  ist, also in keine Teilsumme passt.

Bei  $k = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$  können die Summanden nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme  $\frac{k}{3} = 5$  ergibt:  $1 + 4 = 2 + 3 = 5$ . Diese Aufteilung widerspricht aber der Bedingung (6), da dann die zweite und die dritte Reihe dieselben Büchsenarten enthalten würden.

Bei  $k = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$  können die Summanden ebenfalls nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme  $\frac{k}{3} = 7$  ergibt:  $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ . Und auch hier erhalten wir zwei benachbarte Zahlen in einer der Teilsummen, nämlich 3 und 4.

Mit  $k = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$  schließlich funktioniert es:

$$\frac{k}{3} = 12 = 1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7.$$

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

#### Aufgabe 4 - 120924

Ein konvexes Tangentenviereck  $ABCD$  (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang  $u$ , der Radius seines Inkreises sei  $r$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $F$  dieses Tangentenvierecks!

Sei  $M$  der Mittelpunkt und  $r$  der Radius des Inkreises. Dann zerfällt das Tangentenviereck in vier Dreiecke  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$ ,  $ADM$ , so dass die Höhe der Dreiecke auf der äußeren Kante gerade der Inkreisradius ist. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{ur}{2}.$$

## 2.14.3 III. Stufe 1972, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 120931**

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Zahl  $n^6 - n^2$  durch 10 teilbar ist.

Es gilt  $n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ . Von den aufeinanderfolgenden Zahlen  $n$  und  $n + 1$  ist eine gerade, also ist  $n^6 - n^2$  durch 2 teilbar.

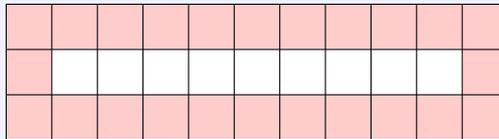
Wenn  $n$  bei Division durch 5 den Rest 0, 1 oder 4 lässt, dann ist  $n$  bzw.  $n - 1$  bzw.  $n + 1$  durch 5 teilbar und das Produkt damit auch.

Lasse  $n$  nun bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3, also  $n = 5k + 2$  oder  $n = 5k + 3$ . Dann ist  $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$  oder  $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$  durch 5 teilbar. Also ist  $n^6 - n^2$  in jedem Fall durch 5 teilbar.

Da 2 und 5 teilerfremd sind ist damit  $n^6 - n^2$  auch durch 10 teilbar.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

Bemerkung:  $n^6 - n^2$  ist für jedes ganze  $n$  sogar durch 60 teilbar.

**Aufgabe 2 - 120932**

Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Sei  $m > 0$  die Anzahl der Quadratflächen, die in einer Zeile liegen und  $n > 0$  die, derer sich in einer Spalte befindlichen. O.B.d.A. können wir  $m \geq n$  annehmen.

Weiterhin sei  $r$  die Anzahl der roten und  $w$  die Anzahl der weißen Quadratflächen. Wäre  $n \leq 2$ , bestände das Rechteck nur aus Randquadraten, sodass  $r > 0 = w$  folgen und damit die Bedingung der Aufgabenstellung nicht erfüllen würde. Sei also ab jetzt  $m \geq n \geq 3$ .

Es folgt  $r = 2(m + n) - 4$  und  $w = (m - 1)(n - 1)$ , zusammen mit  $r = w$  also  $2m + 2n - 4 = mn - m - n + 1$  bzw.  $-5 = mn - 3m - 3n = (m - 3)(n - 3) - 9$ , also  $(m - 3)(n - 3) = 4$ . Da beide Faktoren nicht negativ sind und  $m \geq n$  gilt, kann nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

1. Fall:  $m - 3 = 4$  und  $n - 3 = 1$ , also  $m = 7$  und  $n = 4$ , oder
2. Fall:  $m - 3 = n - 3 = 2$ , also  $m = n = 5$ . In beiden Fällen bestätigt die Probe, dass dies wirklich Lösungen sind.

Karlheinz kann also ein  $5 \times 5$ -Quadrat, ein  $7 \times 4$ -Rechteck oder ein  $4 \times 7$ -Rechteck legen, was den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

Zweite Lösung:

Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus  $a$  und jede Spalte aus  $b$  Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist  $a \geq 3$  und  $b \geq 3$ , da sonst keine weißen Quadratflächen aufträten, und die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt  $2a + 2b - 4$ , die Anzahl der weißen Quadratflächen beträgt  $(a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4$ . Somit gilt

$$2a + 2b - 4 = ab - 2a - 2b + 4 \quad \text{also} \quad a(b - 4) = 4b - 8 \quad (1)$$

Wäre  $b = 3$ , so folgte  $-a = 4$ ; wäre  $b = 4$ , so folgte  $0 = 8$ , was beides einen Widerspruch darstellt. Also gilt  $b > 4$ , d.h.,

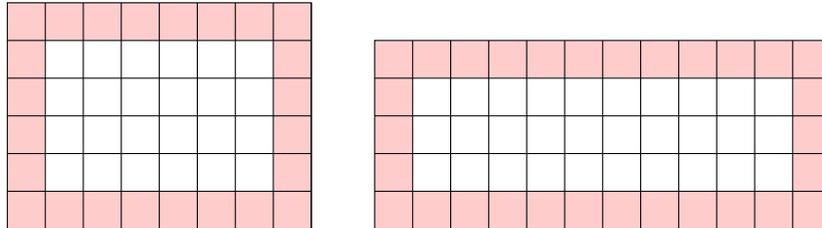
$$b - 4 > 0 \tag{2}$$

Wegen (1) und  $4b - 8 = 4(b - 4) + 8$  ist daher 8 durch  $b - 4$  teilbar. (3)

Nach (2), (3) kann  $b - 4$  nur eine der Zahlen 1, 2, 4, 8 sein. Hieraus und aus (1) ergibt sich, dass für das Paar  $(a, b)$  nur die Möglichkeiten

$a$	12	8	6	5
$b$	5	6	8	12

bestehen. Wie die Abbildung zeigt, erfüllen in der Tat diese Paare die Bedingungen der Aufgabe (Fall 1 und 4 bzw. Fall 2 und 3 gehen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten auseinander hervor).



Der vorstehende Lösungsweg untersucht, wann sich aus (1) eine natürliche Zahl  $a$  ergibt. Einfacher wird die Darstellung bei folgendem zweitem Lösungsweg:

Die (durch positive ganze  $a, b$  zu erfüllende) Bedingung ist äquivalent mit  $ab - 4a - 4b + 8 = 0$  und dies mit

$$(a - 4)(b - 4) = 8 \tag{4}$$

Also hat man für alle ganzzahligen Faktorenzerlegungen von 8 zu prüfen, ob für sie  $a$  und  $b$  positiv (ganzzahlig) sind. Ist nun eine der Zahlen  $a - 4, b - 4$  ein solcher Faktor -8 oder -4 (dann ist der andere -1 oder -2), so hat die betreffende Zahl  $a$  bzw.  $b$  den Wert -4 oder 0.

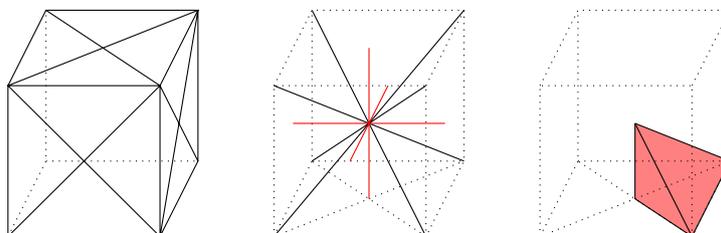
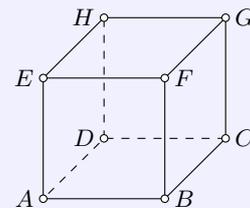
Daher lösen genau die Zerlegungen  $8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$  und somit die oben angegebenen Paare  $(a, b)$  die Aufgabe.

Übernommen aus [2]

**Aufgabe 3 - 120933**

Ein Würfel mit der Kantenlänge  $a$  und den Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte  $A, B, G, H$ ;  $D, C, F, E$ ;  $A, D, G, F$ ;  $B, C, H, E$ ;  $A, E, G, C$  und  $B, H, F, D$  gehen.

Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.



Jede der Ebenen wird von zwei Raumdiagonalen des Würfels aufgespannt. Da es  $\binom{4}{2} = 6$  ungeordnete Paare von Raumdiagonalen gibt, entsprechen diese genau den Ebenen. Der Mittelpunkt des Würfels ist gemeinsamer Schnitt aller Raumdiagonalen und liegt somit in allen Ebenen. Eine Ebene schneidet die Oberfläche des Würfels in zwei diagonal gegenüberliegenden Kanten und den dazugehörigen Flächendiagonalen. Daher ergibt die linke Skizze den Schnitt aller Ebenen mit der Würfeloberfläche.

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist diese bereits die Schnittgerade. Falls zwei Ebenen keine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist die Schnittgerade durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen gegeben (rote Strecken). Somit stellt die mittlere Skizze sämtliche Schnitte zwischen den Ebenen dar.

Die linke und mittlere Zeichnung ergeben daher alle möglichen Kanten, der gesuchten Teilkörper an. Daher ist ein Teilkörper eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche und dem Mittelpunkt der Würfels als Spitze. Insgesamt zerfällt der Würfel in  $6 \cdot 4 = 24$  Teilkörper. Da eine Seitenfläche in 4 kongruente Teildreiecke unterteilt wird und alle Pyramiden dieselbe Höhe besitzen, haben diese alle das gleiche Volumen  $V = \frac{a^3}{24}$ .

#### Aufgabe 4 - 120934

Zwei Fußgänger  $A$  und  $B$  legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

$A$  ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , den Rest mit  $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .  $B$  ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , während der übrigen Zeit mit  $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Wir nutzen die Beziehung  $\text{Geschwindigkeit} = \text{Strecke}/\text{Zeit}$  bzw.  $\text{Zeit} = \text{Strecke}/\text{Geschwindigkeit}$ .  $d$  sei die Länge der gesamten Strecke.

$A$  benötigt für die Strecke  $d$  die Zeit  $t_A = \frac{d/2}{4} + \frac{d/2}{5} = \frac{9}{40}d$ .

$d_1, d_2$  seien die Strecken, bei denen sich  $B$  mit  $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bzw.  $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bewegt. Dann ist  $d_1 + d_2 = d$ . Für die Strecken benötigt  $B$  die Zeiten  $t_1 = \frac{d_1}{4}$  bzw.  $t_2 = \frac{d_2}{5}$ .

Nach Voraussetzung ist  $t_1 = t_2$ , also  $\frac{d_1}{4} = \frac{d_2}{5}$ . Zusammen mit  $d_1 + d_2 = d$  folgt hieraus  $d_1 = \frac{4}{9}d$ ,  $d_2 = \frac{5}{9}d$  und somit  $t_1 = t_2 = \frac{1}{9}d$ . Also benötigt  $B$  die Gesamtzeit  $t_B = t_1 + t_2 = \frac{2}{9}d$ .

Da  $\frac{9}{40} > \frac{2}{9}$ , ist  $B$  zuerst am Ziel.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

Zweite Lösung:

Mit den üblichen Bezeichnungen  $s$  für die Weglänge,  $v$  für die Geschwindigkeit und  $t$  für die aufgewandte Zeit gilt  $s = vt$  bzw.  $t = \frac{s}{v}$ . Wird nun die von  $A$  aufgewandte Zeit mit  $t_A$  und die von  $B$  aufgewandte Zeit mit  $t_B$  bezeichnet, dann gilt einerseits für  $A$ :

$$t_A = t_1 + t_2 \quad \text{mit} \quad t_1 = \frac{s}{2 \cdot 4} = \frac{s}{8} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{s}{2 \cdot 5} = \frac{s}{10}$$

also  $t_A = \frac{9}{40}s$ ; andererseits für  $B$ :

$$s_B = s_1 + s_2 \quad \text{mit} \quad s_1 = \frac{t_B}{2} \cdot 4 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{t_B}{2} \cdot 5$$

also  $s = \frac{t_B}{2} \cdot 9$  bzw.  $t_B = \frac{2}{9}s$ .

Wegen  $9 \cdot 9 > 2 \cdot 40$  gilt nun  $t_A > t_B$ , d. h.,  $B$  war eher am Ziel als  $A$ .

Ein anderer Lösungsweg:

Man kann sich die Gesamtstrecke in neun gleichlange Teilstrecken geteilt denken. Dann ging  $A$  genau  $4\frac{1}{2}$ , dieser Teilstrecken mit  $4 \text{ km/h}$ , den Rest mit  $5 \text{ km/h}$ .  $B$  dagegen ging genau vier dieser Teilstrecken mit  $4 \text{ km/h}$ , die restlichen fünf Teilstrecken mit  $5 \text{ km/h}$ ; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleich (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam  $B$  zuerst am Ziel an.

Oder:

Wäre die Teilstrecke  $s$ , die  $B$  mit  $5 \text{ km/h}$  durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte  $B$  für  $s$  weniger Zeit als für die andere langsamer durchlaufene und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit  $5 \text{ km/h}$  durchlaufene Teilstrecke für  $B$  länger als die für  $A$ . Folglich kam  $B$  zuerst am Ziel an.

*Übernommen aus [2]*

**Aufgabe 5 - 120935**

Es sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck,  $k$  sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von  $k$ , auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$$

Man beweise, dass dann  $AC \perp BD$  gilt!

Da die Bogenlänge proportional zum entsprechenden Zentriwinkel ist, folgt aus der Bedingung auch  $\angle AMB + \angle CMD = \angle BMC + \angle DMA = 180^\circ$ , wobei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  sei und die vier Zentriwinkel den Vollwinkel bei  $M$  bilden.

Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz sind die Peripheriewinkel über einem Bogen genau halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel, also

$$\angle ADB + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Sei  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $AC$  und  $BD$ . Dann gilt für das Dreieck  $\triangle ASD$  aufgrund der Innenwinkelsumme

$$\angle DSA = 180^\circ - \angle SAD - \angle ADS = 180^\circ - (\angle CAD + \angle ADB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Damit stehen die beiden Geraden  $AC$  und  $BD$  in  $s$  senkrecht aufeinander,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 6 - 120936**

a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel  $(k, n, m)$  natürlicher Zahlen  $k, n, m$ , für die  $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$  gilt.

b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt  $knm$  den kleinsten Wert annimmt.

a) Es gilt  $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$ . Da  $2m + 1$  ein ungerader Teiler von 3808 sein muss kann dies nur 7, 17 oder  $119 = 7 \cdot 17$  sein. Damit gilt  $m \in \{3, 8, 59\}$ .

Für  $n^2$  gibt es die Möglichkeiten  $n^2 = 4^2 = 2^4$  oder  $n^2 = 2^2$  oder  $n^2 = 1^2$  (unabhängig davon, wie  $m$  gewählt wurde). Jede dieser Wahlen legt  $k$  eindeutig fest, also gibt es  $3 \cdot 3 = 9$  Möglichkeiten.

b) Wählt man  $n = 1$  oder  $n = 2$  so enthält  $k$  den zu 4 fehlenden Faktor quadratisch, um ein möglichst kleines Produkt zu erhalten muss also  $n = 4$  gewählt werden. Von den verbleibenden Möglichkeiten  $(k, m, n) \in \{(34, 4, 3), (14, 4, 8), (2, 4, 59)\}$  hat das Produkt  $34 \cdot 4 \cdot 3 = 408$  den kleinsten Wert.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

## 2.15 XIII. Olympiade 1973

### 2.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 130911

Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte  $A$  und  $B$  befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke  $AB$  ist 51 m lang. Ein in  $A$  erzeugter Schall trifft in  $B$  auf direktem Wege um genau  $\frac{1}{10}$ s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte  $A$  und  $B$  von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Es sei  $C$  der Punkt an der Wand, in dem der von  $A$  kommende Schall nach  $B$  reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte  $A$  und  $B$  von der Wand das Dreieck  $\triangle ABC$  gleichschenkelig mit  $|AB| = |CB|$ . Da der Schall auf dem Wege von  $A$  über  $C$  nach  $B$  genau  $\frac{1}{10}$ s länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34 m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| = |AB| + 34m = 51m + 34m = 85m,$$

also  $|AC| = |CB| = 42,5$  m.

Der Abstand des Punktes  $A$  von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42,5^2 - 25,5^2}m = 34m.$$

#### Aufgabe 2 - 130912

Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wie viel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

Die ursprüngliche Mischung besteht am Anfang aus Wasser ( $w_1$ ) und einem anderen Stoff ( $y$ ). Die Gesamtmenge sei  $m_1$ , so dass sich folgende Gleichung aufstellen lässt:  $m_1 = y + w_1$  (1), wobei der 99-prozentige Wasseranteil wie folgt einfließt:  $w_1 = 0,99 \cdot m_1$  (2).

Für den Zustand nach dem Wasserentzug gilt für die veränderte Gesamtmenge  $m_2$  bei konstantem Stoff  $y$ :  $m_2 = y + w_2$  (3), wobei auch hier eine Aussage zum Wasseranteil getroffen wird:  $w_2 = 0,98 \cdot m_2$  (4).

Gesucht wird der Anteil der entzogenen Wassermenge ( $x_1 - x_2$ ) an der ursprünglichen Wassermenge ( $x_1$ ) in Prozent. Dazu werden nun die Gleichungen (1) bis (4) genutzt. Zunächst werden (1) und (3) nach  $y$  umgestellt und gleichgesetzt und anschließend (2) und (4) genutzt:  $y = m_1 - w_1 = m_2 - w_2 \Rightarrow m_1 - 0,99 \cdot m_1 = m_2 - 0,98 \cdot m_2 \Rightarrow 0,01 \cdot m_1 = 0,02 \cdot m_2$  bzw.  $m_1 = 2 \cdot m_2$ . Nun kann der gesuchte Anteil errechnet werden:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{0,99 \cdot m_1 - 0,98 \cdot m_2}{0,99 \cdot m_1} = \frac{1,98 \cdot m_2 - 0,98 \cdot m_2}{1,98 \cdot m_2} = \frac{m_2}{1,98 \cdot m_2} = \frac{1}{1,98} \approx 0,51$$

Der entzogene Anteil Wasser an der ursprünglichen Wassermenge beträgt also etwa 51%.

#### Aufgabe 3 - 130913

In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen.

Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Für die Zahl 2 kommt in Reihe  $a$  nur das Feld  $Ba$  in Frage, da  $Ca$  wegen Spalte und  $Da$  wegen Diagonale nicht 2 sein kann. Dann muss die Zahl 3 in das Kästchen  $Ca$ , weil sie nicht in  $Ba = 2$  und  $Da$  (Spalte) stehen kann. Die 4 kommt dann in  $Da$ . Das sieht so aus:

$a$	1	2	3	4
$b$	0	0	2	0
$c$	0	0	0	3
$d$	0	0	0	0
	$A$	$B$	$C$	$D$

Es folgt (eindeutig)  $Dd = 2$  ( $Dd$  kann nicht 1 wegen Diagonale und 3 bzw. 4 wegen Spalte sein).  $Db$  wird 1 (Spalte). Außerdem folgt  $Ad = 3$  ( $Ad \neq 1$  wegen Spalte,  $Ad \neq 2$  wegen Zeile,  $Ad \neq 4$  wegen Diagonale) und  $Bc = 1$  (Diagonale). Das sieht dann so aus:

$a$	1	2	3	4
$b$	0	0	2	1
$c$	0	1	0	3
$d$	3	0	0	2
	$A$	$B$	$C$	$D$

Weiterhin muss  $Ab = 4$  ( $Ab \neq 1$ ,  $Ab \neq 3$  wegen Spalte;  $Ab \neq 2$  wegen Zeile) und  $Ac = 2$  (Spalte) gelten. Entsprechend folgt  $Bb = 3$  (Zeile) und  $Bd = 4$  (Spalte). Dann gilt aber auch  $Cc = 4$  (Zeile) und  $Cd = 1$  (Spalte). Die vollständige und eindeutige Lösung sieht dann so aus:

$a$	1	2	3	4
$b$	4	3	2	1
$c$	2	1	4	3
$d$	3	4	1	2
	$A$	$B$	$C$	$D$

Es existieren übrigens ganze 48 Möglichkeiten, ein  $4 \times 4$  Quadrat mit den genannten Eigenschaften (ohne die Vorbelegung) zu konstruieren.

#### Aufgabe 4 - 130914

Unter  $n!$  (gelesen  $n$ -Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ ; d.h., es gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für  $n = 1000$  die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl  $n!$  endigt (Endnullen).

Es sei  $x$  die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl  $1000!$ . Dann gilt  $1000! = z \cdot 10^x$ , wobei  $z$  eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen  $10^x = 2^x \cdot 5^x$  ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl  $1000!$  enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl  $1000!$  mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die  $1000!$  enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch  $625 = 5^4$  teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau 8-1 durch  $125 = 5^3$  teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen  $n \cdot 125$  mit  $1 \leq n \leq 8$  und  $n \neq 5$ ; unter den übrigen 992 Zahlen genau 40-8 durch  $25 = 5^2$  teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen  $n \cdot 25$  mit  $1 \leq n \leq 40$  mit  $n \neq 5, 10, 15, \dots, 40$ , d.h.  $n \neq k \cdot 5$  ( $k = 1, \dots, 8$ ); schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau 200-40 durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen  $n \cdot 5$  mit  $1 \leq n \leq 200$  und  $n \neq k \cdot 5$  ( $k = 1, \dots, 40$ ). Daher enthält die Zahl  $1000!$  wegen

$$4 + 3(8-1) + 2(40-8) + (200-40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

*Aufgaben der I. Runde 1973 gelöst von Manuela Kugel*

## 2.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 130921**

Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet.

Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

Übernommen aus [5]

**Aufgabe 2 - 130922**

In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$ , in dem die Winkel  $ABC$  und  $BAC$  die Größe  $90^\circ$  bzw.  $60^\circ$  haben, schneide die Halbierende des Winkels  $BAC$  die Gegenseite im Punkt  $D$ .

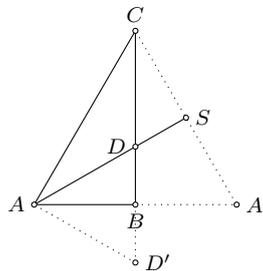
Beweisen Sie, dass  $D$  die Seite  $BC$  im Verhältnis  $1 : 2$  teilt!

Spiegelt man das Dreieck  $ABC$  an  $BC$ , wobei das Bild von  $A$  der Punkt  $A'$  sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck  $AA'C$ . Darin ist  $BC$  Halbierende der Seite  $AA'$ .

Verlängert man  $AD$  über  $D$  hinaus bis zum Schnittpunkt  $S$  mit der Seite  $A'C'$ , dann ist  $AS$  Seitenhalbierende von  $A'C'$ , da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt.

Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis  $1 : 2$  schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Übernommen aus [5]



Zweite Lösung:

Spiegelt man  $D$  an  $AB$  und wird der Bildpunkt mit  $D'$  bezeichnet, so ist das Dreieck  $D'AD$  gleichseitig. Ist nun  $|BD| = x$ , so gilt  $|AD| = 2x$ . Ferner ist das Dreieck  $\triangle ADC$  wegen der Kongruenz der Winkel bei  $A$  bzw.  $C$  (je  $30^\circ$ ) gleichschenkelig, also gilt  $|AD| = |CD|$  und somit  $|CD| = 2x$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Übernommen aus [2]

**Aufgabe 3 - 130923**

Ein konvexes gleichschenkliges Trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ;  $AD = BC$ ;  $AB > CD$ ) soll folgende Eigenschaften haben:

Es soll sich einem Kreis mit dem Radius  $r = 12$  cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll  $u = 100$  cm betragen.

Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Da das Trapez einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass die Summe der Längen jedes Paares seiner gegenüberliegenden Seiten gleich ist. Also gilt  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = \frac{u}{2} = 50$  cm. Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist dann sogar schon  $|AD| = |BC| = 25$  cm bekannt.

Die Berührradien des Inkreises an  $AB$  sowie  $CD$  stehen jeweils senkrecht auf den Seiten, sodass sie aufgrund der Parallelität der beiden Seiten selbst parallel zueinander liegen.

Da beide Berührradien durch den Mittelpunkt des Inkreises verlaufen, ergänzen sie sich also zu einem Durchmesser, der senkrecht auf  $AB$  und  $CD$  steht, sodass diese beiden Parallelen den Abstand  $2r = 24$  cm haben. Insbesondere sind sie damit auch kürzer als  $|AD| = |BC| = 25$  cm.

Seien  $L_C$  und  $L_D$  die Fußpunkte der Lote von  $C$  bzw.  $D$  auf  $AB$ . dann sind diese Lote  $|CL_C|$  und  $|DL_D|$  jeweils auch gleich 24 cm, also gleich lang. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle BL_C C$  und  $\triangle AL_D D$  zueinander nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da die beiden entsprechenden Seiten  $CL_C$  und  $DL_D$  zueinander parallel sind sowie die entsprechenden Seiten  $BL_C$  und  $AL_D$  beide auf der Geraden  $AB$  liegen, gibt es also nur zwei mögliche Lagebeziehungen:

Entweder sind auch die dritten Seiten  $AD$  und  $BC$  dieser beiden Dreiecke zueinander parallel, oder aber sie gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke  $AB$  ineinander über, zeigen also in verschiedene Richtungen.

Im ersten dieser beiden Fälle sind aber im Viereck  $ABCD$  jeweils gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt. Damit folgt dann auch  $|AB| = |CD|$ , was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Im zweiten Fall müssen die Lotfußpunkte  $L_C$  und  $L_D$  also beide außerhalb oder beide innerhalb der Strecke  $AB$  liegen, wobei ersteres auf  $|CD| > |AB|$  führen würde, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also befinden sich beide Lotfußpunkte im Inneren der Strecke  $AB$ . Es gilt damit  $|AB| = |AL_D| + |L_D L_C| + |L_C B| = |L_D L_C| + 2|L_C B|$ , letzteres aufgrund der Kongruenz der Dreiecke  $\triangle BL_C C$  und  $\triangle AL_D D$ .

Im Viereck  $L_D L_C C D$  sind aber nun gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt und  $|L_D L_C| = |CD|$  folgt.

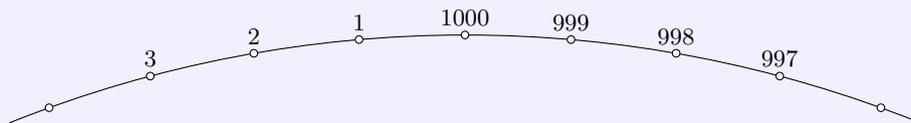
Es verbleibt,  $|L_C B|$  zu berechnen. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BL_C C$  gilt  $|L_C C|^2 + |BL_C|^2 = |BC|^2$ , also  $|L_C B| = \sqrt{25^2 - 24^2}$  cm =  $\sqrt{49}$  cm = 7 cm.

Setzt man dies ein, erhält man  $|AB| = |CD| + 2 \cdot 7$  cm und zusammen mit  $|AB| + |CD| = 50$  cm schließlich  $|AB| = 32$  cm und  $|CD| = 18$  cm. Für ein solches Trapez gilt damit, dass seine Kantenlängen  $|AB| = 32$  cm,  $|BC| = 25$  cm,  $|CD| = 18$  cm und  $|AD| = 25$  cm betragen.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 4 - 130924

Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Damit eine Zahl  $1 \leq n \leq 1000$  gestrichen wird, muss es nicht-negative ganze Zahlen  $u$  und  $q$  geben, sodass  $n + 1000 \cdot u = 1 + 15 \cdot q$  ist. Dabei beschreibt  $u$  die Anzahl der bisher vollständigen Umläufe um den Kreis und  $1 + 15 \cdot q$  beschreibt jede 15. Zahl, beginnend mit 1, wenn einfach immer weiter gezählt wird.

Betrachtet man, welchen Rest beide Seiten dieser Gleichung bei der Teilung durch 5 lassen, so muss dies 1 sein, da  $15q$  durch 5 teilbar ist. Da aber auch  $1000u$  durch 5 teilbar ist, muss auch  $n$  den Rest 1 bei der Teilung durch 5 lassen. Es gibt also eine ganze Zahl  $k$  mit  $0 \leq k < 200$ , sodass  $n = 5k + 1$  gilt. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man, dass die Zahl  $5k + 1$  genau dann gestrichen wird, wenn es nicht-negative ganze Zahlen  $q$  und  $u$  gibt, sodass  $5k + 1 + 1000u = 1 + 15q$  bzw. nach Subtraktion von 1 und Division durch 5 die äquivalente Gleichung  $k + 200u = 3q$  erfüllt ist.

Diese nicht-negativen ganzen Zahlen  $q$  und  $u$  existieren aber für jedes nicht-negative  $k$ : Ist  $k$  durch 3

teilbar, wähle man  $u = 0$  und  $q = \frac{k}{3}$ . Lässt  $k$  den Rest 1 bei der Division durch 3, so ist  $k + 200$  durch 3 teilbar und man kann  $u = 1$  sowie  $q = \frac{k+200}{3}$  wählen. Und lässt abschließend  $k$  den Rest 2 bei der Division durch 3, ist  $k + 400$  durch 3 teilbar, sodass man  $u = 2$  und  $q = \frac{k+2 \cdot 200}{3}$  wählen kann.

Zusammen erhält man also, dass genau die Zahlen  $1 \leq n \leq 1000$  gestrichen werden, die sich als  $n = 5k + 1$  mit einer nicht-negativen ganzen Zahl  $k$  mit  $0 \leq k < 200$  darstellen lassen. Das sind aber genau 200 Stück, sodass von den 1000 Zahlen genau 800 nicht gestrichen werden.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

Zweite Lösung:

Beim ersten Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991.

Beim zweiten Umlauf werden wegen  $991 + 15 - 1000 = 6$  die Zahl 6 als erste gestrichen und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.

Beim dritten Umlauf streicht man wegen  $996 + 15 - 1000 = 11$  als erste Zahl die 11 und anschließend alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41, 56, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.

Beim vierten Umlauf müsste man wegen  $986 + 15 - 1000 = 1$  als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim ersten Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991, 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form  $5n + 1$  geschrieben werden können.

Da hierbei alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.

*Übernommen aus [2]*

## 2.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 130931**

Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare  $(x, y)$ , worin  $x$  und  $y$  je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:

Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B.  $(25; 61)$ , denn es gilt  $52+9 = 61$  und  $16+9 = 25$ .)

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen  $x, y$  eines solchen Paares  $(x; y)$  einander zugeordnet.

- a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!  
 b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

a) Sind  $10a + b$  und  $10c + d$  mit  $a, b, c, d \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$  und  $a \neq 0, c \neq 0$  (sonst würde es sich nicht um zweistellige Zahlen handeln) die beiden Zahlen eines solchen Paares, so gilt  $10c + d = 10b + a + 9$ . Wegen  $1 \leq a < 10$  ist  $10 \leq a + 9 < 19$ , sodass die Zehnerziffer von  $10b + a + 9$  also  $b + 1$  und die Einerziffer  $a + 9 - 10 = a - 1$  ist. Wir erhalten also  $c = b + 1$  und  $d = a - 1$ . Da  $a \geq 1$  ist, ist  $d$  auf jeden Fall eine Ziffer, sodass hier keine Zusatzbedingungen entstehen. Jedoch erhalten wir wegen  $c = b + 1$ , dass  $b \leq 8$  sein muss, denn für  $b = 9$  erhielte man  $c = 10$ , was keine Ziffer mehr ist.

Tatsächlich sind diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern sogar schon hinreichend: Wendet man das Verfahren auf  $10c + d$  an, so erhält man die Zahl  $10d + c + 9 = 10(a - 1) + (b + 1) + 9 = 10a - 10 + b + 9 + 1 = 10a + b$ ; also die Ausgangszahl.

Es können also genau diejenigen zweistelligen Zahlen Elemente eines solchen Paares sein, die als Einerziffer keine 9 besitzen.

b) Mit obigen Bezeichnungen muss dann  $a = c = b + 1$  und  $b = d = a - 1$  gelten, sodass dies nur für die Zahlen 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87 und 98 der Fall sein kann. Die Probe bestätigt jeweils, dass diese Zahlen sich auch jeweils selbst zugeordnet werden.

**Aufgabe 2 - 130932**

Man gebe alle natürlichen Zahlen  $n$  an, für die  $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$  durch 10 teilbar ist!

Es ist  $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$ . Weiterhin ist  $n^2 + 2$  gerade genau dann, wenn auch  $n$  gerade ist. Wegen  $(5k \pm 1)^2 + 2 = 25k^2 \pm 10k + 1 + 2 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 3$  und  $(5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k + 1)$  ist  $n^2 + 2$  genau dann durch 5 teilbar, wenn  $n$  den Rest 2 oder 3 bei der Teilung durch 5 lässt.

Damit ist  $3n(n^2 + 2)$  genau dann durch 5 teilbar, wenn  $n$  den Rest 0 (dann ist  $n$  durch 5 teilbar), 2 oder 3 (dann ist  $n^2 + 2$  durch 5 teilbar) bei der Teilung durch 5 lässt.

Außerdem ist  $3n(n^2 + 2)$  genau dann durch 2 teilbar, wenn es  $n$  auch ist.

Zusammen folgt (wegen  $\text{ggT}(2,5)=1$ ), dass  $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$  genau dann durch 10 teilbar ist, wenn es durch 2 und 5 teilbar ist, also  $n$  die Endziffer 0, 2 oder 8 besitzt.

*Lösung von cyrix*

Zweite Lösung:

Genau dann ist

$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$10 \mid n \tag{1}$$

$$10 \mid (n^2 + 2) \tag{2}$$

$$5 \mid n \text{ und } 2 \mid (n^2 + 2) \tag{3}$$

$$2 \mid n \text{ und } 5 \mid (n^2 + 2) \tag{4}$$

Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen  $n$  erfüllt. Die Bedingung (2)

könnte nur von solchen natürlichen Zahlen  $n$  erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet. Derartige Zahlen gibt es nicht, da für eine Zahl  $10k + r$  mit  $0 \leq r < 10$  das Quadrat  $(10k + r)^2$  gleich  $10l' + r'$  mit  $r' \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$  ist.

Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen  $n$ , die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müsste entweder wegen (3) auf 5 oder ihr Quadrat wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht.

Endet  $n$  auf 5, so ist  $n^2$  und damit auch  $n^2 + 2$  ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

### Aufgabe 3 - 130933

Auf einer Geraden  $g$  seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F$  gelegen. Ein Punkt  $P$  außerhalb von  $g$  sei so gelegen, dass  $PC$  das Lot von  $P$  auf  $g$  ist. Dabei gelte  $PC = AB = BC = CD = DE = EF$ .

Man beweise, dass dann  $\angle APF = 135^\circ$  gilt.

Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Um die folgende Notation zu vereinfachen, setzen wir  $|PC| = 1$ . Durch den Satz von Pythagoras erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ACP$  die Kantenlänge  $|AP| = \sqrt{|AC|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5}$  und analog im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle CFP$  die Kantenlänge  $|FP| = \sqrt{|CF|^2 + |PC|^2} = \sqrt{10}$ .

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle AFP$  kann einerseits ermittelt werden zu  $\frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |PC| = \frac{5}{2}$  und andererseits auch als  $\frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |FP| \cdot \sin(\angle AFP) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\angle AFP)$ , sodass man  $\sin(\angle AFP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  erhält.

Es ist  $|AF| = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{10} = |FP| > \sqrt{5} = |AP|$ , sodass  $AF$  die längste Seite im Dreieck  $\triangle AFP$  ist. Ihr gegenüber liegt damit auch der größte Innenwinkel dieses Dreiecks, sodass  $\angle AFP > 60^\circ > 45^\circ$  gilt, also muss  $\angle AFP = 135^\circ$  gelten, da dies der einzige weitere Wert im Intervall  $[0, 180^\circ]$  ist, an welchem der Sinus den Wert  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  annimmt,  $\square$ .

### Aufgabe 4 - 130934

In einer Ebene sollen regelmäßige  $n$ -Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel  $360^\circ$  beträgt.

Geben Sie alle natürlichen Zahlen  $n$  an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten  $n$ -Ecke an!

Sei  $n \geq 3$ . Dann betragen die Innenwinkel im regelmäßigen  $n$ -Eck jeweils  $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ . Für  $n = 3; 4; 5$  und  $6$  ergeben sich so Innenwinkel von  $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ$  und  $120^\circ$ .

Offensichtlich ist wegen  $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$  die Größe der Innenwinkel eine in  $n$  streng monoton steigende Funktion, sodass für alle  $n > 6$  gilt, dass die Innenwinkel eines regelmäßigen  $n$ -Ecks größer als  $120^\circ = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ$ , aber wegen  $\frac{n-2}{n} < 1$  auch kleiner als  $180^\circ = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ$  sind.

Damit kann für diese  $n$  (also  $n > 6$ ) keine Anzahl von regelmäßigen  $n$ -Ecken überschneidungsfrei an einer Ecke zusammengesetzt werden. Ähnlich sieht es für  $n = 5$  aus, da  $\frac{360^\circ}{108^\circ} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$  ist. Es verbleiben  $n = 3; 4$  und  $6$ , wo jeweils 6; 4 bzw. 3 regelmäßige  $n$ -Ecke überschneidungsfrei in einer Ecke aneinandergesetzt werden können.

### Aufgabe 5 - 130935

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn für rationale Zahlen  $a, b, c$  mit  $a, b, c \neq 0$  und  $a + b + c \neq 0$  die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen  $a, b, c$  zueinander entgegengesetzt.

(Rationale Zahlen  $x, y$  heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn  $x = -y$  gilt.)

Durch Multiplikation mit  $abc(a+b+c)$  geht die Gleichung äquivalent über in

$$abc = (a+b+c) \cdot (bc+ac+ab) = abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc$$

bzw. nach Subtraktion von  $abc$  in

$$0 = a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 = (a+b) \cdot (ab+ac+bc+c^2) = (a+b)(a+c)(b+c)$$

Dieses Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also  $a = -b$ ,  $a = -c$  oder  $b = -c$  gilt, sodass auf jeden Fall mindestens zwei der drei Zahlen  $a, b, c$  einander entgegengesetzt sind.

### Aufgabe 6 - 130936

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  und der Kantenlänge  $a$ . Ein Punkt  $D'$  soll folgende Eigenschaften haben:

- Das Tetraeder mit den Eckpunkten  $A, B, C, D'$  ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
- $BD' = CD' = a$ ,  $c) AD' \neq a$ .

Man untersuche, ob es solche Punkte  $D'$  gibt, und ermittle für jedes solche  $D'$  die Länge der Kante  $AD'$ .

Ist  $h$  die Höhe des Tetraeders  $ABCD$ , so folgt aus Eigenschaft a), dass  $D'$  in einer zur Grundfläche  $ABC$  parallelen Ebene  $\epsilon$  mit Abstand  $h$  liegt. Prinzipiell sind dabei zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder es liegt  $\epsilon$  im gleichen von der Grundfläche erzeugten Halbraum wie  $D$  (dann liegt  $D$  auf  $\epsilon$ ), oder die Ebene  $\epsilon$  liegt im entsprechend anderen Halbraum. Da aber die weiteren Bedingungen nicht davon abhängen, welche der beiden Fälle eintritt, ergeben sich symmetrische Strukturen, sodass wir o.B.d.A. annehmen können, dass  $\epsilon$  im oberen Halbraum zusammen mit  $D$  liegt, sodass  $D$  und  $D'$  beides Punkte auf  $\epsilon$  sind.

Nach Bedingung b) liegt  $D'$  auf der Oberfläche der beiden Kugeln um die Punkte  $B$  und  $C$  mit Radius  $a$ . Da  $h < a$  gilt, werden diese beiden Kugeln durch  $\epsilon$  geschnitten (und nicht nur berührt), sodass sich zwei Kreise  $k_B; k_C$  als Schnittfiguren in der Ebene  $\epsilon$  ergeben. Diese beiden Kreise schneiden sich nun in bis zu zwei Punkten, wovon einer  $D$  ist (da auch  $|BD| = |CD| = a$  gilt) und der andere (falls existent)  $D'$ .

Einen zweiten Schnittpunkt gäbe es nur dann nicht, wenn sich die Kreise in  $D$  nur berühren würden. Da die Mittelpunkte  $M_B$  und  $M_C$  der beiden Kreise wie die Kugelmittelpunkte  $B$  und  $C$  den Abstand  $a$  haben (da  $\epsilon$  parallel zur Grundfläche ist), müssten deren gleich große Radien sich also zu  $a$  addieren und so würde im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BM_B D$  nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung  $|BM_B|^2 + |M_B D|^2 = |BD|^2$  bzw.  $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ , also  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  folgen. Im regelmäßigen Tetraeder ist aber  $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ , sodass sich die Kreise also nicht nur berühren und es also neben  $D$  noch einen zweiten Punkt  $D'$  gibt, der die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Da  $|AD| = a$  ist, kommt nach Bedingung c) auch nicht  $D = D'$  Frage. Berechnen wir nun für den zweiten Schnittpunkt  $D'$  der beiden Kreise den Abstand zu  $A$ :

Die beiden Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte. Da die Ebene  $\epsilon_1$ , die senkrecht zur Grundfläche und durch die Gerade  $BC$  verläuft, auch senkrecht auf  $\epsilon$  steht sowie dort durch die Gerade  $M_B M_C$  verläuft, geht also  $D$  durch Spiegelung an  $\epsilon_1$  in  $D'$  über. Aufgrund der Orthogonalität von  $\epsilon_1$  sowohl zu  $\epsilon$  wie auch zur Grundfläche geht damit aber auch der Lotfußpunkt  $L_D$  von  $D$  auf die Grundfläche durch Spiegelung an  $\epsilon_1$  in den Lotfußpunkt  $L_{D'}$  von  $D'$  auf die Grundfläche über: Die Lote sind jeweils parallel zur Spiegelungsebene. Bei Betrachtung nur in der Grundfläche geht also  $L_D$  durch Spiegelung an der Geraden  $BC$  in  $L_{D'}$  über.

Da im gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABC$  die Seitenhalbierenden und Höhen zusammenfallen und  $L_D$  der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist, steht die Gerade  $AL_D$  als Seitenhalbierende und zugleich Höhe senkrecht auf  $BC$  und verläuft durch deren Mittelpunkt  $M$ . Insbesondere liegt also auch der Spiegelungspunkt  $L_{D'}$  auch auf dieser Geraden und es gilt

$$|AL_{D'}| = |AL_D| + 2 \cdot |L_D M| = \frac{2}{3}s + 2 \cdot \frac{1}{3}s = \frac{4}{3}s$$

wobei  $s$  die Länge der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge  $a$  sei. Für diese gilt im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABM$  die Beziehung  $s^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$  und damit  $s^2 = \frac{3}{4}a^2$ . Einsetzen liefert

$$|AL_{D'}|^2 = \frac{16}{9}s^2 = \frac{4}{3}a^2.$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle AL_{D'}D'$  gilt abschließend nun

$$|AD'|^2 = |AL_{D'}|^2 + |L_{D'}D'|^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$$

also  $|AD'| = \sqrt{2}a$ .

*Aufgaben der III. Runde 1973 gelöst von cyrix*

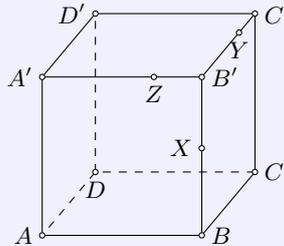
## 2.16 XIV. Olympiade 1974

## 2.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 140911**

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  und der Kantenlänge  $a$  (siehe Abbildung). Auf  $BB'$  liege ein Punkt  $X$ , auf  $B'C'$  ein Punkt  $Y$  und auf  $A'B'$  ein Punkt  $Z$ , wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von  $B'$  verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von  $X, Y, Z$  den geschlossenen Streckenzug  $XYZX$ . Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen  $\overline{XY}$ ,  $\overline{YZ}$  und  $\overline{ZX}$ .



- Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!
- Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!
- Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

- I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte  $X, Y, Z$  gilt: Setzt man  $|B'X| = x$ ,  $|B'Y| = y$ ,  $|B'Z| = z$ , so ist  $0 < x, y, z \leq a$ . Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |YZ| = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad |ZX| = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Daraus folgt

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2a^2}.$$

- II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl  $X = B$ ,  $Y = C'$ ,  $Z = A'$  ergibt sich  $x = y = z = a$ , also

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2a^2}.$$

- III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten  $X, Y, Z$  einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt  $X^*$  zwischen  $B'$  und  $X$  und setzt man  $|B'X^*| = x^*$ , so ist  $0 < x^* < x$ , also

$$|X^*Y| + |YZ| + |ZX^*| = \sqrt{x^{*2} + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^{*2}} < |XY| + |YZ| + |ZX|.$$

Aus I. und II. folgt:

- Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für  $X = B$ ,  $Y = C'$ ,  $Z = A'$  entstehenden.
- Seine Länge beträgt  $3a\sqrt{2}$ .

Aus III folgt:

- Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d.h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

**Aufgabe 2 - 140912**

Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck  $ABC$ , in dem  $D$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$  ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden  $CD$  und der halben Seite  $AD$  feststellen, ob das Dreieck bei  $C$  einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Die Größen der Innenwinkel von  $\triangle ABC$  bei  $A, B, C$  seien  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ist  $|AD| = |DB| < |CD|$ , so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt,  $|\angle ACD| < |\angle CAD|$  und  $|\angle DCB| < |\angle CBD|$ , also

$$\gamma = |\angle ACD| + |\angle DCB| < \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

und daher  $2\gamma < 180^\circ$ , woraus  $\gamma < 90^\circ$  folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: das Dreieck  $ABC$  hat bei  $C$  einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob  $|AB|$  kleiner, gleich oder größer als  $2|CD|$  ist.

**Aufgabe 3 - 140913**

An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl  $z$  werden folgende Forderungen gestellt:

- (1) Die Quersumme von  $z$  soll 11 betragen.
- (2) Die Ziffern von  $z$  sollen paarweise verschieden sein.
- (3) Die Zahl  $z$  soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen  $z$ , die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

Die Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 besagt: eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da die Quersumme der Zahl genau 11 sein muss, folgt daraus, dass die alternierende Quersumme 0 oder 11 ist.

Damit kann die gesuchte Zahl nicht zweistellig sein, denn wäre die alternierende Quersumme Null, so müssten beide Ziffern gleich sein, was (2) widerspricht; und die alternierende Quersumme 11 kann bei einer zweistelligen Zahl nicht erreicht werden.

Die gesuchten Zahlen können aber dreistellig sein: genau dann, wenn die mittlere Ziffer Null ist, erhält man für die alternierende Quersumme den Wert der Quersumme  $\Rightarrow$  Regel: die erste und dritte Ziffer müssen zusammen 11 ergeben. Dies gilt für 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Nach einer anderen Regel kann bei einer dreistelligen Zahl keine alternierende Quersumme von 11 bei einer Quersumme von 11 erreicht werden.

Die alternierende Quersumme Null bei einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 11 kann nicht auftreten, da folgendes gelten muss:  $a_1 + a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2$  bzw.  $a_1 + a_3 = a_2$ . Dies ergibt zusammengefasst:  $11 - a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 5,5$ .

Bei einer vier- und mehrstelligen Zahl mit Quersumme 11 kann eine alternierende Quersumme 11 nicht auftreten, da mindestens eine Ziffer ungleich Null mit einem negativen Vorzeichen behaftet wird.

Für eine vierstellige Zahl gilt allgemein für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null wieder:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2 - a_4$  bzw.  $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ . Und zusammengefasst:  $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5,5$ , was nicht auftreten kann.

Für eine fünfstellige Zahl gilt nun für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = 11 - a_2 - a_4$  bzw.  $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$ . Und zusammengefasst:  $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5,5$ , was nicht auftreten kann.

Die gesuchte Zahl kann nicht sechs- und mehrstellig sein, da bei 6 verschiedenen Ziffern die minimale Quersumme  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  den Wert 11 übersteigt.

Damit sind die einzigen Lösungen die der dreistelligen Zahlen wie oben angegeben.

**Aufgabe 4 - 140914**

Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen. Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende 3 Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder 3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel und Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

*Aufgaben der I. Runde 1974 gelöst von Manuela Kugel*

## 2.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 140921**

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.

Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$  die Anzahlen der Spiele, die die 14 Mannschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt absolviert haben. Für die Gesamtzahl  $K$  der Spiele aller 14 Mannschaften gilt dann  $K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{14})$ . (Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ergibt sich daraus, dass bei der Summe jedes Spiel doppelt gezählt wird.)

Wir nehmen nun an, dass keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl von Spielen ausgetragen haben, dass also alle Werte  $a_i$  verschieden sind. Da alle Werte  $a_i$  der Menge  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$  angehören und diese Menge 14 Elemente hat, muss jeder Wert aus  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$  von genau einem der Werte  $a_i$  angenommen werden. Folglich ist

$$K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{14}) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + \dots + 13) = \frac{13 \cdot 14}{4} = \frac{91}{2}$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da  $\frac{91}{2}$  keine ganze Zahl ist. Somit war unsere obige Annahme falsch, und es gibt zwei Mannschaften, die exakt gleich viele Spiele ausgetragen haben.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

## 2. Lösung:

Da zu jedem Zeitpunkt der betrachteten Halbserie jede Mannschaft gegen jede andere höchstens einmal gespielt hat, ist die Anzahl der Partien, an der eine Mannschaft beteiligt war, immer durch  $14 - 1 = 13$  nach oben beschränkt. Damit gibt es aber nur 14 verschiedene mögliche Anzahlen an Spielen, die eine Mannschaft gespielt haben kann.

Hätten zu einem Zeitpunkt keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl an Spielen, ginge das also nur, wenn jede der 14 möglichen Anzahlen auch vorkommt. Dann müsste es aber sowohl eine Mannschaft geben, die gegen keine andere gespielt hat, wie auch eine, die gegen alle 13 anderen gespielt hat. Beides zugleich kann aber nicht eintreten, was den gewünschten Widerspruch erzeugt und die Behauptung beweist.

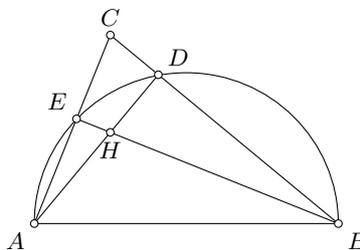
Bemerkung: Dieser Ansatz nutzt nicht die konkrete Anzahl beteiligter Mannschaften und lässt sich auf beliebige Anzahlen  $> 1$  verallgemeinern.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 2 - 140922**

Es sei  $\triangle ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck,  $H$  sei der Schnittpunkt seiner Höhen und  $D, E, F$  deren Fußpunkte, wobei  $D$  auf  $BC$ ,  $E$  auf  $CA$  und  $F$  auf  $AB$  liegen mögen.

Man beweise, dass dann  $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$  gilt.



Da  $\sphericalangle AEB = 90^\circ = \sphericalangle ADB$  gilt, ist das Viereck  $ABDE$  nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck. Nach Sehensatz gilt daher  $AH \cdot HD = BH \cdot HE$ . Die andere Gleichung folgt analog.

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

**Aufgabe 3 - 140923**

Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Die Primfaktorzerlegung von 588 ist:  $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$ . Ist  $z^3$  die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl  $z$ , so muss  $z^3$  jeden Primfaktor von  $z$  mindestens dreimal enthalten.

Das kleinste Vielfache mit je drei Primfaktoren der Zerlegung von 588 ist  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$ . Dessen dritte Wurzel ist  $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ .  $z = 42$  ist die gesuchte Zahl.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

Zweite Lösung:

Hat eine ganze Zahl  $z$  ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, so gibt es eine ganze Zahl  $a$  mit  $z^3 = 588a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 a$ . Daraus folgt, dass  $z^3$  und folglich auch  $z$  durch jede der Primzahlen 2, 3, 7 teilbar ist; hiernach gibt es eine ganze Zahl  $x$ , mit der  $z$  von der Form  $z = 2 \cdot 3 \cdot 7x$  ist.

Hat umgekehrt  $z$  diese Form, so ist

$$z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7x^3$$

ein ganzzahliges Vielfaches von 588. Daher hat eine ganze Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von  $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$  ist. Unter allen positiven ganzzahligen Vielfachen von 42 ist 42 die kleinste und somit die gesuchte Zahl.

*Übernommen aus [2]*

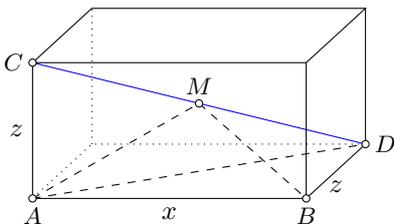
**Aufgabe 4 - 140924**

$AB$  sei eine in der Ebene  $\epsilon$  gegebene Strecke der Länge  $a$ . In  $\epsilon$  sei  $g$  die Gerade durch  $A$ , die senkrecht zu  $AB$  ist.

In  $B$  sei die Senkrechte  $s$  auf die Ebene  $\epsilon$  errichtet. Schließlich seien  $C$  ein von  $A$  verschiedener Punkt auf  $g$  und  $D$  ein von  $B$  verschiedener Punkt auf  $s$ .

a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  geht.

b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass  $CA = a\sqrt{2}$  und  $BD = a\sqrt{3}$  gilt.



a) Behauptung: Der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $CD$  hat von den Punkten  $A, B, C, D$  jeweils den gleichen Abstand und kann somit als Mittelpunkt der gesuchten Kugel gewählt werden.

Die Strecken  $x, y$  und  $z$  stehen nach Aufgabenstellung paarweise aufeinander senkrecht. Damit spannen sie einen Quader mit den Kantenlängen  $x, y$  und  $z$  auf.

Die Strecke  $CD$  ist dann die Raumbiagonale des Quaders mit der Länge  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Der Mittelpunkt von  $CD$  hat per Definition von  $C$  und  $D$  den gleichen Abstand. Als Symmetriezentrum des Quaders liegt  $M$  aber auch auf den Raumbiagonalen durch  $A$  bzw.  $B$ . Alle Raumbiagonalen eines Quaders haben die gleiche Länge, so dass  $MA = MB = MC = MD$  folgt.

Damit ist  $M$  der Mittelpunkt einer Kugel auf deren Peripherie  $A, B, C$  und  $D$  liegen.

b) Setzt man  $x = a, y = a\sqrt{2}$  und  $z = a\sqrt{3}$  in die Gleichung des Radius  $r$  der Kugel ein, so wird

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2a^2 + 3a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{6}$$

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 2.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 140931**

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl  $x$  (wobei  $x$  nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:

Die Zahl  $83 \cdot x$  (das Produkt aus 83 und  $x$ ) hat als Darstellung die Ziffernfolge  $3x8$  (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl  $x$  ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Genau dann ist  $x$  die gesuchte Zahl, wenn 1 die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl  $n \geq 2$  mit

$$83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$$

oder, äquivalent hierzu, mit  $73x = 3 \cdot 10^n + 8$  existiert.

Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, dass von ihnen nur die Zahl  $3000008 = 73 \cdot 41096$  teilbar ist.

Daher ist  $x = 41096$  die gesuchte Zahl, und es gilt  $83 \cdot 41096 = 3410968$ .

*Lösung übernommen von [5]*

**Aufgabe 2 - 140932**

Man gebe alle geordneten Quadrupel  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen  $a_1, a_2, a_3, a_4$  mit  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Wir können für eine ganze Zahl  $n$  die Elemente des Quadrupels schreiben als  $a_1 = n-1$ ,  $a_2 = n$ ,  $a_3 = n+1$  und  $a_4 = n+2$ . Damit geht die Bedingung über in die Gleichung

$$(n-1)^3 + n^3 = (n+2)^3 - (n+1)^3 \quad \text{bzw.}$$

$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 + 9n + 7$$

also  $2n^3 - 6n^2 - 6n - 8 = 0$  und damit  $n^3 - 3n^2 - 3n - 4 = 0$ .

Es ist 4 eine Lösung dieser Gleichung, sodass wir (3,4,5,6) als Lösungsquadrupel erhalten.

Für den Fall  $n \neq 4$  können wir die Gleichung durch  $n-4$  teilen und erhalten  $n^2 + n + 1 = 0$ . Diese Gleichung hat aber keine ganzzahligen Lösungen, sodass auch keine weiteren Lösungsquadrupel existieren.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

Zweite Lösung:

Genau dann ist  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl  $n$  mit  $a_1 = n$ ,  $a_2 = n+1$ ,  $a_3 = n+2$ ,  $a_4 = n+3$  gibt, für die

$$n^3 + (n+1)^3 = (n+3)^2 - (n+2)^3 \quad (1)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit

$$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

und dies mit  $n^3 - 6n = 9$ , d. h. mit

$$n(n^2 - 6) = 9 \quad (2)$$

Da für ganzzahliges  $n$  die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn  $n$  eine der Zahlen 1, -1, 3, -3, 9, -9 ist.

Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl  $n = 3$  die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1):

$n$	$n^2$	$n^2 - 6$	$n(n^2 - 6)$
1	1	-5	-5
-1	1	-5	5
3	9	3	9
-3	9	3	-9
9	81	75	675
-9	81	75	-675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

### Aufgabe 3 - 140933

Von einem beliebigen Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$  seien die Längen  $a = AB$ ,  $c = CD$  seiner Parallelseiten sowie der Abstand  $h$  der diese beide Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sei  $S$ .

Man berechne aus den gegebenen Längen  $a, c, h$  die Flächeninhalte  $F_1, F_2, F_3, F_4$  der Dreiecke  $ABS, BCS, CDS$  bzw.  $ADS$ .

Es ist  $F_{ABC} = F_{ABD} = \frac{1}{2}ah$ , also  $F_1 + F_2 = F_1 + F_4 = \frac{1}{2}ah$  und damit insbesondere  $F_2 = F_4$ . Analog ist  $F_{ACD} = F_{BCD} = \frac{1}{2}ch$ , also  $F_3 + F_4 = F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ch$ .

Die Winkel  $\angle ASB$  und  $\angle CSD$  sind Scheitelwinkel, also gleich groß. Genauso stimmen die Winkel  $\angle BAS$  und  $\angle DCS$  überein, da sie Wechselwinkel sind. Demnach stimmen die Dreiecke  $\triangle ABS$  und  $\triangle CDS$  in zwei Innenwinkeln überein, sind also ähnlich zueinander und es gilt  $\frac{F_3}{F_1} = \left(\frac{|SC|}{|AS|}\right)^2$ .

Es ist nach Strahlensatz  $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{h}{h_S}$ , wobei  $h_S$  die Länge der Höhe von  $S$  auf  $AB$  sei. Insbesondere ist damit

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|AC| - |AS|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AS|} - 1 = \frac{h}{h_S} - 1 = \frac{F_{ABC}}{F_1} - 1 = \frac{F_2}{F_1}$$

Damit ergibt sich  $\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_2^2}{F_1^2}$  bzw.  $\frac{F_3}{F_2} = \frac{F_2}{F_1}$ .

Sei  $x := \frac{F_3}{F_2}$ . Dann gilt einerseits  $F_2 + F_3 = (1+x)F_2 = \frac{1}{2}ch$  und andererseits  $F_1 + F_2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot F_2 = \frac{1}{2}ah$ . Stellt man die erste dieser beiden Gleichungen nach  $F_2$  um und setzt sie in die zweite ein, erhält man

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{2}ch \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}ah$$

bzw.  $x = \frac{c}{a}$ . Damit ergibt sich

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{ac}{a+c}, \quad F_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{c^2}{a+c} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a^2}{a+c}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

### Aufgabe 4 - 140934

Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen  $x, y, z$  die folgende Beziehung gilt:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ .

Ferner gebe man für  $x, y, z$  Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Die genannte Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) = \\ &= (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \end{aligned}$$

was offensichtlich erfüllt ist. Gleichheit tritt dabei nur genau dann ein, wenn alle drei Quadrate Null sind, also  $x = y = z$  gilt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Wegen  $(x-y)^2 \geq 0$  gilt  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ , wobei Gleichheit genau für  $x = y$  eintritt, und entsprechend  $x^2 + z^2 \geq 2xz$ , wobei Gleichheit genau für  $x = z$  eintritt, sowie  $y^2 + z^2 \geq 2yz$ , wobei Gleichheit genau für  $y = z$  eintritt. Nach Addition und Division durch 2 folgt: Es gilt stets

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $x = y = z$  ist.

Übernommen aus [2]

**Aufgabe 5 - 140935**

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Auf dem Umkreis  $k$  des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen  $\widehat{AB}$ , der  $C$  nicht enthält, ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt  $P$ .

Symmetrisch zu  $P$  bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $C$  bzw. der durch  $B$  und  $C$  mögen die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  liegen.

a) Man beweise, dass  $C$  auf der Geraden  $g$  durch  $P_1$  und  $P_2$  liegt.

b) Man beweise, dass  $g$  genau dann die Tangente im Punkt  $C$  an den Umkreis  $k$  ist, wenn  $CP \perp AB$  gilt.

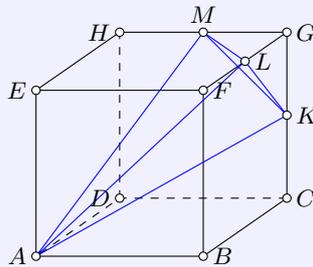
a) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen zu sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung um ihren Schnittpunkt um einen Drehwinkel, der dem Doppelten des Winkels zwischen den Spiegelachsen entspricht.

Da  $P_1$  durch Spiegelung an  $AC$  auf  $P$  abgebildet wird und dieser Punkt durch Spiegelung an  $BC$  auf  $P_2$ , gilt  $\angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180^\circ$ , sodass  $P_1, C$  und  $P_2$  auf einer Geraden liegen.

b) Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$ . Nach dem Satz des Thales ist  $M$  damit auch gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Weiterhin sei  $M_1$  der Bildpunkt von  $M$  bei der Spiegelung an  $AC$ . Dann ist  $|CM| = |CM_1| = |AM| = |AM_1|$ , sodass es sich beim Viereck  $AMCM_1$  um eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm handelt. Damit gilt  $CM_1 \parallel AM = AB$ .

Es ist die Gerade  $P_1C$  gleich  $g$  eine Tangente an  $k$  genau dann, wenn  $P_1C \perp CM$  gilt. Bei Spiegelung an  $AC$  geht  $P_1C$  in  $PC$  und  $CM$  in  $CM_1$  über, sodass  $g$  eine Tangente an  $k$  genau dann ist, wenn auch  $PC \perp CM_1$  gilt. Letztere Gerade ist aber parallel zu  $AB$ , sodass diese Bedingung äquivalent zu  $PC \perp AB$  ist,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 6 - 140936**

In einem Würfel mit den Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  (siehe Abbildung) und der Kantenlänge  $a$  seien  $K, L, M$  die Mittelpunkte der Seiten  $CG, FG$  bzw.  $HG$ . Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten  $A, K, L, M$ .

Eine Rotation des Würfels um die Raumdiagonale  $AG$  um den Winkel  $120^\circ$  bildet den Würfel wieder auf sich selbst ab, wobei die Punkte  $K, L$  und  $M$  zyklisch vertauscht werden. Demnach geht die Ebene, die durch diese drei Punkte definiert wird, durch die Drehung in sich selbst über und steht also senkrecht auf der Raumdiagonalen  $AG$ .

Sei  $S$  der Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Ebene durch  $K, L$  und  $M$ . Dann ist also  $SG$  die Höhe von  $G$  auf diese Ebene.

Sei  $V$  das Volumen des Tetraeders  $KLMG$ . Dann gilt einerseits  $V = \frac{1}{3} A_{\triangle KLM} \cdot |SG|$  und andererseits

$$V = \frac{1}{3} A_{\triangle MGL} \cdot |GK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |MG| \cdot |LG| \cdot |KG| = \frac{1}{48} a^3$$

Da

$$A_{\triangle KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |KL| = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$

gilt, da  $\triangle KLM$  ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$  ist, folgt

$$|SG| = \frac{1}{48}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Volumen  $V_P$  des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten  $A, K, L, M$ :

$$V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a = \frac{5\sqrt{3}}{36}a^3$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.17 XV. Olympiade 1975

### 2.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 150911

Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

- (1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.
- (2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

I. Wenn eine Zahl die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:

Wegen (1) wird die Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7 oder 5, 6, 7, 8, oder 6, 7, 8, 9 (in irgendeiner Reihenfolge geschrieben).

Wegen (2) muss die Zahl durch 9 teilbar sein, nach der Teilbarkeitsregel für die 9 muss also ihre Quersumme durch 9 teilbar sein.

Wegen  $0 + 1 + 2 + 3 = 5$ ;  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ;  $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ ;  $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ ;  $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ ;  $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ ;  $6 + 7 + 8 + 9 = 30$  trifft das nur zu, wenn die Zahlen die Ziffern 3, 4, 5, 6 (in irgendeiner Reihenfolge enthält).

Nun gilt es genau 24 solche Zahlen, nämlich:

3456, 3465, 3546, 3564, 3645, 3654, 4356, 4365, 4536, 4563, 4635, 4653, 5346, 5364, 5436, 5463, 5634, 5643, 6345, 6354, 6435, 6453, 6534, 6543.

Von ihnen sind nur die 8 Zahlen

3465, 3564, 4356, 4653, 5346, 5643, 6435, 6534, durch 11 teilbar.

II. Diese 8 Zahlen erfüllen die Bedingung (1).

Sie sind ferner durch 9 und 11 und damit da 9 und 11 teilerfremd sind, durch 99 teilbar, erfüllen also auch die Bedingung (2).

#### Aufgabe 2 - 150912

In	H	A	U	S
	H	A	U	S
	S	T	A	D T

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung.

Dann gilt für diese Ersetzung  $S = 1$ ; denn die fünfstellige natürliche Zahl "STADT" kann nicht mit 0 beginnen, und die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000.

Ferner gilt  $S + S = T$ , also  $T = 2$ . Somit muss  $H + H = 12$  gelten; denn würde dazu noch ein Übertrag von der Hunderterspalte treten, denn könnte dieser nur 1 sein, was stets auf eine ungerade, also von 12 verschiedene Summe  $H + H + 1$  führen würde.

Also gilt  $H = 6$ . Damit gilt  $A \leq 4$ , da sonst ein Übertrag in die Tausenderspalte auftreten würde.

Wäre nun mit Übertrag aus der Zehnerspalte  $A + A + 1 = A$ , so würde  $A = -1$  folgen. Also kann kein solcher Übertrag auftreten, und man erhält  $A + A = A$ , also  $A = 0$  sowie  $U \leq 4$ .

Da verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern entsprechen und von den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 bereits 0, 1, 2 vergeben sind, kann nur  $U = 3$  oder  $U = 4$  sein. Für  $U = 3$  erhielte man  $D = 6$ , was wegen  $H = 6$  den Regeln der Aufgabe widerspricht. Also gilt  $U = 4$  und  $D = 8$ .

Somit kann nur die Ersetzung  $A = 0, D = 8, H = 6, S = 1, T = 2, U = 4$  zu einer Lösung führen.

II. In der Tut sind bei dieser Ersetzung verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehende Additionsaufgabe

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 0 & 4 & 1 \\ & 6 & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

richtig gelöst ist, erfüllt diese Ersetzung alle gestellten Forderungen.

### Aufgabe 3 - 150913

Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden  $g$  und  $h$ . Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke  $AB$  in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von  $A$  zu  $g$  kleiner ist als der Abstand von  $A$  zu  $h$ . Für jeden Punkt  $P$  auf  $h$  bezeichne  $A'$  bzw.  $B'$  den Schnittpunkt von  $g$  mit  $PA$  bzw.  $PB$ .

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte  $P$  auf  $h$ , für die mit diesen Bezeichnungen  $\overline{A'P} = \overline{B'P}$  gilt!

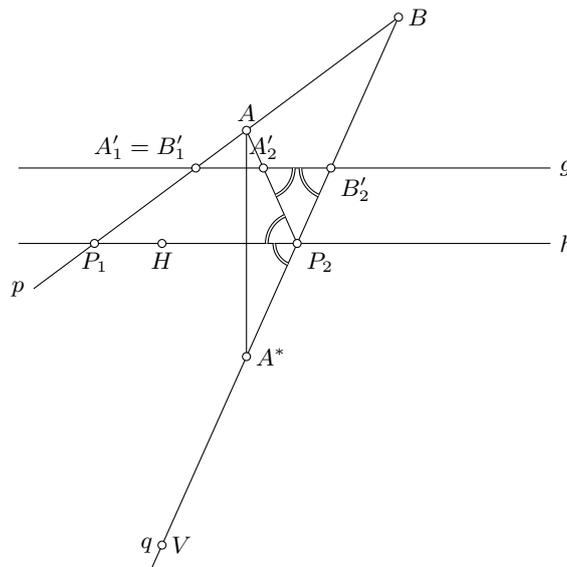
Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte  $P$  mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen  $g, h, A, B$  geben kann!

I. Angenommen, ein Punkt  $P$  auf  $h$  habe die Eigenschaft  $A'P = B'P$ . Dann folgt:

1. Ist  $A' = B'$ , so geht die durch  $P$  und  $A$  gelegte Gerade  $p$  auch durch  $(A' =)B'$ , also auch durch  $B$ .
2. Ist  $A' \neq B'$ , so gilt, wenn  $H$  einen näher an  $A$  als an  $B'$  gelegenen Punkt auf  $h$  und  $V$  einen Punkt der Verlängerung von  $BP$  über  $P$  hinaus bezeichnet,

$$\begin{aligned} \angle APH &= \angle PA'B' \text{ (Wechselwinkel an Parallelen)} \\ &= \angle PB'A' \text{ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)} \\ &= \angle VPH \text{ (Stufenwinkel an Parallelen)} \end{aligned}$$

Daher liegt der durch Spiegelung von  $A$  an  $h$  entstandene Punkt  $A^*$  auf der Geraden  $q$  durch  $P$  und  $B$ .



II. Hiernach hat ein Punkt  $P$  nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn er als einer der Punkte  $P_1, P_2$  durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiere die Gerade  $p$  durch  $A$  und  $B$ .
2. Schneiden sich  $p$  und  $h$ , so sei  $P_1$  ihr Schnittpunkt.

3. Man konstruiere den durch Spiegelung von  $A$  an  $h$  entstehenden Punkt  $A^*$ .
4. Man konstruiere die Gerade  $q$  durch  $A^*$  und  $B$ .
5. Schneiden sich  $q$  und  $h$ , so sei  $P_2$  ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt  $P$  hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis:

1. Ist  $P = P_1$  nach II.1.2 konstruiert, so gilt:

Die Strecken  $PA$  und  $PB$  liegen beide auf  $p$ . Daher schneiden beide die Gerade  $q$  im demselben Punkt, d.h. es gilt  $A' = B'$  und somit  $A'P = B'P$ .

2. Ist  $P = P_2$  nach II.3.4.5. konstruiert, so gilt:

a) Ist  $A' = B'$ , so gilt  $A'P = B'P$ .

b) Ist  $A' \neq B'$ , so gilt, wenn  $H$  einen näher an  $A'$  als an  $B'$  gelegenen Punkt auf  $h$  bezeichnet,

$\angle PA'B = \angle ABH$  (Wechselwinkel an Parallelen)

$= \angle A^*PH$  (da  $A^*$  Spiegelpunkt von  $A$  an  $h$  ist)

$= \angle PB'A'$  (Stufenwinkel an Parallelen)

also ist  $\triangle PA'B'$  gleichschenkelig mit  $A'P = B'P$ .

V. Konstruktionsschritt II.1. ist eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt II.2. führt genau dann auf keinen Punkt  $P_1$ , wenn  $p \parallel h$  ist, anderenfalls auf genau einen Punkt  $P_1$ .

Konstruktionsschritt II.3. und 4. sind stets eindeutig ausführbar, ebenfalls Konstruktionsschritt II.5., da  $A^*$  auf  $B$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $h$  liegen.

Es gilt genau dann  $P = P_2$ , wenn der Spiegelpunkt  $A^*$  auf der Geraden  $p$  durch  $A, B$  liegt. Da die Gerade durch  $A, A^*$  stets auf  $h$  senkrecht steht, gilt somit  $P_1 = P_2$  genau im Falle  $p \perp h$ .

Damit ist gezeigt:

1. Ist die Gerade durch  $A, B$  parallel zu  $h$ , so existiert genau ein gesuchter Punkt  $P$ , und er kann durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
2. Ist die Gerade durch  $A, B$  senkrecht zu  $h$ , so existiert genau ein gesuchter Punkt  $P$ , und er kann durch die Konstruktion II.1.2. oder durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
3. Ist die Gerade durch  $A, B$  weder parallel noch senkrecht zu  $h$ , so existieren genau zwei gesuchte Punkte  $P_1, P_2$ ; sie können durch die Konstruktion II.1.2. bzw. II.3. bis 5. gefunden werden.

#### Aufgabe 4 - 150914

Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

I. Angenommen, für ein Geburtsdatum des Sohnes seien alle Angaben zutreffend.

Dann gilt:

Ist  $x$  das in vollen (vollendeten) Lebensjahren ausgedrückte Alter des Sohnes am 30. 12. 1973, so kann es im Jahre 1974 nur die Werte  $x, x + 1, x + 2$  annehmen, und davon den letzten nur dann, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat.

Ferner ist  $8x$  das in vollen Lebensjahren ausgedrückte Alter des Vaters am 30. 12. 1973, und dies kann im Jahre 1974 nur die Werte  $8x, 8x + 1$  annehmen.

Daher gilt für eine der Zahlen  $a = 0, 1, 2$  und eine der Zahlen  $b = 0, 1$  die Gleichung  $5 \cdot (x + a) = 8x + b$ , also  $5a - b = 3x$ .

Nun zeigt die folgende Tabelle der Werte  $5a - b$ ,

$b$	$a = 0$	$1$	$2$
$0$	$0$	$5$	$10$
$1$	$-1$	$4$	$9$

dass  $5a - b$  nur für  $a = 2, b = 1$  durch 3 teilbar ist, was dann auf  $x = 3$  führt. Also können die Angaben in der Aufgabe nur dann zutreffen, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat, am 30. 12. 73 noch 3 Jahre alt war, am 31. 12. 1973 also 4 Jahre alt wurde und folglich am 31. 12. 1969 geboren war.

II. Dieses Geburtsdatum des Sohnes, zusammen mit dem daraus folgenden Alter des Vaters von 24 Jahren am 30. 12. 1973, erfüllt in der Tat alle Angaben; denn bei diesen Daten war am 30. 12. 1973 der Vater 8 mal so alt wie sein Sohn; am 31. 12. 1974 aber, als der Sohn 5 Jahre alt wurde, war der Vater 25 Jahre alt, also 5 mal so alt wie sein Sohn.

Daher treffen die Angaben genau für den 31. 12. 1969 als Geburtsdatum des Sohnes zu.

*Lösungen der I. Stufe 1975 übernommen von [5]*

## 2.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 150921**

Klaus hat bei einer Hausaufgabe  $4^2 - 3^2$  auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier  $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$  ist.

Ermitteln Sie alle Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen mit  $a > b$ , für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Laut Aufgabenstellung sind alle Paare  $(a, b)$  mit  $a, b$  natürlich und  $a > b$  zu ermitteln, für die  $a^2 - b^2 = a + b$  gilt.

Nun ist nach einer binomischen Formel  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit  $(a + b)(a - b) = a + b$ .

Wegen  $a, b$  natürlich und  $a > b$ , ist  $a + b \neq 0$ . Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit  $a - b = 1$ , d.h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren  $(a, b)$  natürlicher Zahlen erfüllt, für die  $a$  um 1 größer ist als  $b$ .

Lösung übernommen von [5]

**Aufgabe 2 - 150922**

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!

b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!

Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z.B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

aD:4 (Zeile a, Spalten ABC besetzt; dE:4)

aE:5 (Zeile a, Spalten ABCD besetzt)

bB:5 (Hauptdiagonale: aA:1, cC: $\neq$  5 wegen cD:5, dd: $\neq$  5 wegen cD:5, eE: $\neq$  5 wegen aE:5)

eC:5 (Zeile e, eA: $\neq$  5 wegen aE:5, eB: $\neq$  5 wegen bB:5, eD: $\neq$  5 wegen cD:5, eE: $\neq$  5 wegen aE:5)

dA:5 (Zeile d; in allen Spalten BCDE gibt es schon Fünfen).

cC:4 (Hauptdiagonale: aA, bB besetzt, dD: $\neq$  4 wegen aD:4, eE: $\neq$  4 wegen dE:4)

eB:4 (Spalte B, Zeilen ab besetzt, cB: $\neq$  4 wegen cC:4, cd: $\neq$  4 wegen dE:4)

bA:4 (Spalte A, in allen anderen Zeilen schon Vieren vorhanden)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5			
c			4	5	
d	5				4
e		4	5		

Wäre bD:1, dann eA: $\neq$  1 (Hauptdiagonale) und eD: $\neq$  1, also eE:1 (da eB und eC schon besetzt). Dies ist aber ein Widerspruch zu aA:1 auf der Hauptdiagonalen. Also ist bD: $\neq$  1.

eD:1 (Spalte D, bD: $\neq$  1, aD, cD besetzt, dD: $\neq$  1 wegen aA:1)

dB:1 (Nebendiagonale, aE, cc besetzt, bD: $\neq$  1 wegen eD:1, eA: $\neq$  1 wegen aA:1)

cE:1 (Zeile c, Spalten CD besetzt, Spalten AB verboten, da dort schon Einsen)

bC:1 (Zeile b, in allen anderen Spalten schon Einsen)

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1		
c			4	5	1
d	5	1			4
e		4	5	1	

dC:2 (Spalte C, Zeilen abcde besetzt) ; dD:3 (Zeile d, Spalten ABCE besetzt)  
 bD:2 (Spalte D, Zeilen acde besetzt) ; bE:3 (Zeile b, Spalten ABCD besetzt)  
 eE:2 (Spalte E, Zeilen abcd besetzt) ; eA:3 (Zeile e, Spalten BCDE besetzt)  
 cA:2 (Spalte A, Zeilen abde besetzt) ; cB:3 (Zeile c, Spalten ACDE besetzt)

Damit ergibt sich notwendigerweise folgende Tabelle:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Dass diese auch alle Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, zeigt die Probe. Es existiert also nur genau diese eine Variante, die Tabelle gemäß den Vorgaben auszufüllen.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

### Aufgabe 3 - 150923

Gegeben seien die Seitenlänge  $a$  eines Quadrates  $ABCD$  sowie eine Länge  $m$ , für die  $m \leq a$  gilt. Es sei  $M$  derjenige Punkt auf der Seite  $CD$ , für den  $MD = m$  gilt.

Gesucht ist ein Punkt  $N$  auf der Seite  $AD$  so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks  $NMD$  zu dem des Quadrates  $ABCD$  wie  $1 : 7$  verhält.

Man ermittle alle diejenigen Werte von  $m$ , für die ein solcher Punkt  $N$  auf  $AD$  existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke  $DN$ .

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle NMD$  beträgt

$$\frac{1}{2}|MD| \cdot |DN| = \frac{m}{2} \cdot |DN|$$

Damit dieser den von der Aufgabenstellung verlangten Wert von  $\frac{1}{7}a^2$  annimmt, muss  $|DN| = \frac{2a}{7m} \cdot a$  gelten. Damit der Punkt  $D$  auf der Seite  $AD$  des Quadrats liegt (und nicht nur auf der Gerade durch diese Seite), muss der Vorfaktor  $\frac{2a}{7m}$  zwischen 0 und 1 liegen.

Wegen  $a > 0$  und  $m \geq 0$  ist auch immer  $\frac{2a}{7m} > 0$ . Schließlich ist die Ungleichung  $\frac{2a}{7m} \leq 1$  äquivalent zu  $m \geq \frac{2}{7}a$ , sodass genau für solche Werte von  $m$  ein entsprechender Punkt  $N$  auf der Strecke  $AD$  existiert.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

### Aufgabe 4 - 150924

Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck  $ABC$  aus  $AB = c$ ,  $BC = a$  und  $\angle BAC = \alpha$  zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$  entstanden, die den Bedingungen genügen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels  $\angle AC_1B$ , wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel  $\angle AC_2B$ !

Es ist das Dreieck  $BC_1C_2$  gleichschenkelig mit Basis  $C_1C_2$ . Damit ist

$$\angle BC_1C_2 = \angle C_1C_2B = \angle AC_2B$$

Da die Winkel  $\angle AC_1B$  und  $\angle BC_1C_2$  Nebenwinkel sind, ergänzen sie sich zu  $180^\circ$ . Zusammen mit  $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$  folgt  $5\angle AC_2B = 180^\circ$ , also  $\angle AC_2B = 36^\circ$  und damit schließlich  $\angle AC_1B = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 150931**

Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Es seien  $2n - 1$ ,  $2n + 1$  und  $2n + 3$  die drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen. Dann ist die Summe  $S$  ihrer Quadrate gleich

$$\begin{aligned} S &= (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 = \\ &= 12n^2 + 12n + 11 = 12(n^2 + n + 1) - 1 \end{aligned}$$

Diese Summe soll eine vierstellige Zahl sein, die aus vier gleichen Ziffern  $z$  besteht. Also gilt  $S = 1111 \cdot z$ . Es ist  $S$  ungerade, sodass auch  $z$  ungerade sein muss. Weiterhin lässt wegen  $S = 1110z + z = 3 \cdot 370z + z$  die Summe  $S$  den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 wie  $z$  selbst. Da aber  $S$  um 1 kleiner als ein Vielfaches von 12 (und damit auch von 3) ist, muss dieser Rest bei der Teilung durch 3 genau 2 betragen. Als einzige Ziffer  $1 \leq z \leq 9$  erfüllt  $z = 5$  beide Bedingungen.

Demnach muss  $S = 5555$  sein, woraus man  $n^2 + n + 1 = \frac{5556}{12} = 463$  und  $n = 21$  (bzw.  $n = -22$ , was aber wegen  $2n - 1 \in \mathbb{N}$  entfällt) erhält, sodass die drei gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 lauten.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 2 - 150932**

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $BC = a$  und die Höhenlänge  $AD = h_a$  bekannt. Eine Gerade  $g$  verläuft so, dass  $BC$  auf  $g$  liegt.

Berechnen Sie das Volumen  $V$  des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade  $g$  beschrieben wird!

Durch den ebenen Schnitt mit der Ebene, die senkrecht zu  $g$  durch  $A$  verläuft (und in der dann nach Konstruktion auch der Höhenfußpunkt  $D$  liegt), zerlegt den Rotationskörper in zwei gerade Kreiskegel: Beide besitzen den aus der Rotation der Strecke  $AD$  gebildeten Kreis als gemeinsame Grundfläche sowie  $B$  bzw.  $C$  als Spitze. Damit ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot (|BD| + |DC|) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 3 - 150933**

Über eine Zahl  $x$  werden die folgenden vier Paare  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$ ,  $(C_1, C_2)$ ,  $(D_1, D_2)$  von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl  $x$  gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl  $x$ !

A1) Es gibt außer  $x$  keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.

A2)  $x$  ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B1)  $x - 5$  ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.

B2)  $x + 1$  ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.

C1)  $x$  ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.

C2)  $x$  ist die Zahl 389.

D1)  $x$  ist eine dreistellige Primzahl mit  $300 < x < 399$ , also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.

D2)  $x$  ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Da aus  $C_2$  direkt  $C_1$  folgt, aber nicht beide Aussagen wahr sein dürfen, muss  $C_2$  falsch und  $C_1$  wahr sein. Es ist also  $x$ , sofern es existiert, eine natürliche Zahl, die mit der Ziffer 3 beginnt, nicht aber die 389.

Wäre die Aussage  $D_2$  nun wahr, müsste es sich um die Zahl 333 handeln. Dies widerspricht aber beiden

Aussagen  $B_1$  und  $B_2$ , da weder 328 durch 6 noch 334 durch 12 teilbar sind. Also muss  $D_2$  falsch und  $D_1$  wahr sein, sodass  $x$  eine der von 389 verschiedenen Primzahlen in der angegebenen Liste sein muss.

Wäre die Aussage  $B_2$  wahr, dann wäre  $x + 1$  insbesondere auch durch 6 teilbar, also auch  $x + 1 - 6 = x - 5$ , sodass die Aussage  $B_1$  auch erfüllt wäre. Demnach muss also  $x - 5$  durch 6 teilbar sein, während  $x + 1 = (x - 5) + 6$  nicht durch 12 teilbar sein darf. Das geht aber nur, wenn schon  $x - 5$  durch 12 teilbar war. In der Liste erfüllen das nur 317 und 353, sodass  $x$  eine dieser beiden Zahlen sein muss.

Wäre  $A_2$  wahr, dann wäre es eindeutig als 353 identifiziert, da nur in dieser noch möglichen Zahl zwei gleiche Ziffern vorkommen. Dann wäre aber auch aufgrund der nun gezeigten Eindeutigkeit auch die Aussage  $A_1$  wahr, was ein Widerspruch zur Bedingung der Aufgabenstellung darstellt.

Ist dagegen  $A_2$  falsch, dann darf in der Darstellung von  $x$  keine Ziffer zwei mal auftreten. Dies schließt die 353 aus, sodass 317 die eindeutige Lösung ist, sodass Aussage  $A_1$  wahr ist.

Damit erfüllt  $x = 317$  genau die jeweils ersten Aussagen, während die jeweils zweiten falsch sind; und es ist auch die einzige Zahl, die der Aufgabenstellung genügt.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 4 - 150934

Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

1. Fall:

Die Anzahl der Summanden ist ungerade, d.h.  $2k + 1$  für eine positive ganze Zahl  $k$ . Ist  $n$  der dann existierende mittlere Summand, so lässt sich die Summe schreiben als

$$(n - k) + (n - (k - 1)) + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) + \cdots + (n + (k - 1)) + (n + k) = n \cdot (2k + 1)$$

Dabei muss  $n \geq k$  gelten, damit auch der kleinste Summand  $n - k$  eine nicht-negative ganze Zahl ist. Soll diese Summe den Wert 60 ergeben, muss also  $2k + 1$  ein ungerader Teiler von 60 sein und  $n = \frac{60}{2k+1} > k$  gelten.

Damit ergeben sich folgende Lösungen:

Für  $2k + 1 = 3$  ist  $n = 20 > 1$ , also  $60 = 19 + 20 + 21$  und

für  $2k + 1 = 5$  ist  $n = 12 > 2$ , also  $60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$ .

Für den einzigen weiteren ungeraden Teiler  $2k + 1 = 15$  von 60 erhält man  $n = 4$ , was aber kleiner ist als  $k = 7$ . Auf diese Weise erhielt man nur die Summe

$$60 = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

welche auch negative Summanden enthält, also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung ist.

2. Fall:

Die Anzahl der Summanden ist gerade, d.h.  $2k$  für eine positive ganze Zahl  $k$ . Insbesondere enthält die Summe dann  $k$  ungerade Summanden, ist also nur dann – wie 60 – gerade, wenn  $k$  auch gerade ist, sich also als  $2m$  mit einer positiven ganzen Zahl  $m$  schreiben lässt. Die Summe besteht demnach aus  $4m$  Summanden.

Sei der kleinste dieser Summanden mit  $n - (2m - 1)$  bezeichnet, wobei  $n \geq 2m - 1$  eine natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$60 = (n - (2m - 1)) + \cdots + (n + (2m - 1)) + (n + (2m)) = 4mn + 2m = 2m(2n + 1)$$

Insbesondere ist  $2n + 1$  ein ungerader Teiler von 60, sodass  $2m = \frac{60}{2n+1} \leq n + 1$  gilt. Dies liefert die folgende Lösung:

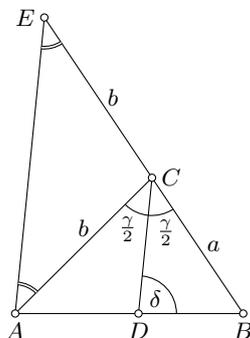
Für  $2n + 1 = 15$  ist  $2m = 4 \leq 8$  und wir erhalten  $60 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ .

Sonst ist  $2n + 1 \leq 5$ , also  $n \leq 2$ , aber  $2m = \frac{60}{2n+1} \geq 12$ , sodass man wieder nur ganzzahlige, aber keine natürlichen Lösungen erhält.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 5 - 150935**

Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.



Es sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck. Dabei seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten  $BC$ ,  $AC$  bzw.  $AB$  und  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Größen der Innenwinkel bei  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Ferner schneide die Halbierende des Winkels  $\angle ACB$  die Seite  $AB$  in  $D$ . Da Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt  $D$  zwischen  $A$  und  $B$ .

Es wird nun (o.B.d.A.) behauptet:  $AD : BC = AC = BC$ .

Beweis: Man verlängert  $BC$  über  $C$  hinaus um  $b$  bis zum Punkt  $E$ . Wegen  $AC = EC$  ist das Dreieck  $ACE$  gleichschenkelig.

Also gilt  $\angle CAE = \angle CEA$  (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und ferner  $\angle CAE + \angle CEA = \gamma$  (nach dem Außenwinkelsatz). Daraus folgt  $\angle CAE = \frac{\gamma}{2}$ .

Die Winkel  $\angle CAE$  und  $\angle ACD$  sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß. Folglich sind die Geraden  $CD$  und  $AE$  parallel.

Daher gilt nach einem der Strahlensätze und wegen  $AC = EC = b$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

Lösung übernommen von [5]

**Aufgabe 6 - 150936**

Beweisen Sie, dass für alle Tripel  $(a, b, c)$  positiver reeller Zahlen mit  $abc = 1$  die Ungleichung

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel ist  $1 = \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ , also  $3 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Daraus erhält man durch Multiplikation mit  $abc = 1$  die Ungleichung  $3 \leq bc + ac + ab$ . Weiterhin ist aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auch  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$ , also  $a + b + c \geq 3$ .

Zusammen ergibt sich

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

wobei Gleichheit nur genau dann eintritt, wenn  $a = b = c (= 1)$  gilt, da nur genau dann in den Mittelungleichungen der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe gelöst von cyrix

## 2.18 XVI. Olympiade 1976

## 2.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 160911**

Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug  $ABCDEFGA$  eingeschlossen, wobei  $A, B, C, D, E, F, G$  Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie"  $AG$  zur "Ziellinie"  $DE$  oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug  $P_0P_1P_2\dots P_n$  bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die  $P_0, P_1, \dots, P_n$  Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$  des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt  $P_k$  zu dem nächsten Punkt  $P_{k+1}$  verstanden. Die Spielregeln lauten:

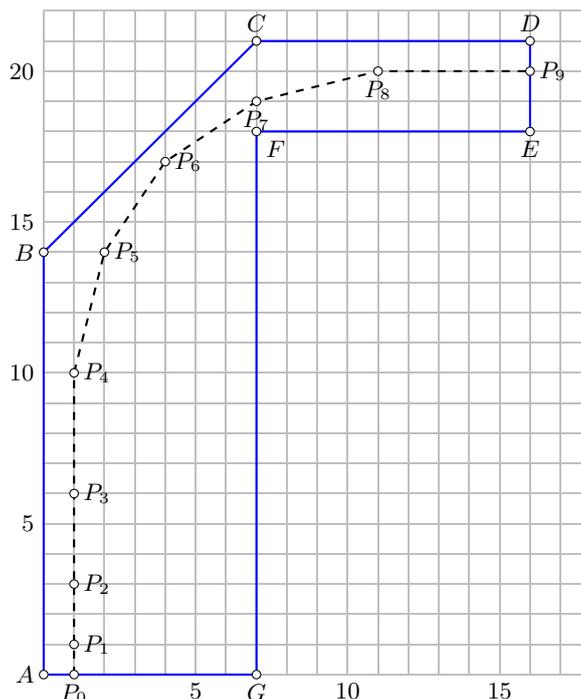
- (1)  $P_0$  liegt auf  $AB$
- (2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke  $P_0P_1$ , wobei  $\overline{P_0P_1} = 1$  (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.
- (3) Wenn bereits ein "Zug"  $P_{k-1}P_k$  ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug"  $P_kP_{k+1}$  folgendermaßen:
  - a) Man verlängert die Strecke  $P_{k-1}P_k$  über  $P_k$  hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der  $Q_k$  genannt sei.
  - b) Man wählt entweder den Punkt  $Q_k$  oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt  $P_{k+1}$ .

*Hinweis:*  $P_{k+1}$  muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig  $Q_k$ .

Geben Sie für ein Spielfeld mit  $A(0;0)$ ,  $B(0;14)$ ,  $C(7;21)$ ,  $D(16;21)$ ,  $E(16;18)$ ,  $F(7;18)$ ,  $G(7;0)$  einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug  $P_0P_1P_2\dots P_9$  an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke  $P_8P_9$  erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte  $P_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ ) ohne Begründung.

Es gibt verschiedene Lösungen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.



**Aufgabe 2 - 160912**

Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w.

Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Angenommen es wäre möglich, auf diese Weise genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Da bei jeder Teilung 6 Papierstücke hinzukommen würden, müsste sich die Zahl 1976 in der Form

$$1976 = 6k + 7 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen, d.h. 1976 müsste bei Division durch 6 den gleichen Rest haben wie 7, nämlich 1. Das ist nicht der Fall, also ist es nicht möglich, auf diese Weise aus 7 Papierstücken genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Oder: Bei der ersten Teilung kommen zu der ursprünglichen Anzahl von 7 Papierstücken 6 weitere hinzu. Da auch bei jeder weiteren Teilung genau 6 Papierstücke hinzukommen, ergibt sich als Summe aller Papierstücke stets eine ungerade Zahl, also niemals die gerade Zahl 1976. Die Behauptung ist somit falsch.

**Aufgabe 3 - 160913**

Es sei  $\triangle ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis  $AB$ , der Länge  $\overline{AB} = b$  und der Schenkellänge  $2b$ . Die Punkte  $D$  bzw.  $E$  seien die inneren Punkte von  $AC$  bzw.  $BC$ , in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser  $AB$  schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks  $ABED$ .

Der Mittelpunkt von  $AB$  sei  $M$ . Dann ist Dreieck  $DAM$  gleichschenkelig mit  $DM = AM = \frac{b}{2}$

Daher ist  $\angle MDA = \angle MAD = \angle BAC = \angle ABC$ , also  $\triangle DAM \sim \triangle ABC$ .

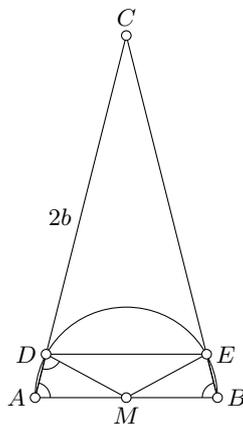
Folglich gilt  $DA : AM = AB : BC = 1 : 2$ , also  $DA = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$  und daher

$$CD = AC - DA = 2b - \frac{b}{4} = \frac{7b}{4}$$

Ebenso erhält man  $EB = \frac{b}{4}$  und  $CA = \frac{7b}{4}$ .

Also ist  $DE \parallel AB$  und folglich  $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ . Daraus ergibt sich  $DE : AB = CD : AC = 8 : 7$ , also  $DE = \frac{7b}{8}$ . Somit beträgt der gesuchte Umfang

$$AB + BE + ED + DA = b + \frac{b}{4} + \frac{7b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{19b}{8}$$



**Aufgabe 4 - 160914**

Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm <sup>2</sup>	Volumen in cm <sup>3</sup>
Würfel	$a$	$b$	$b$
Kugel	$c$	$d$	$d$
reguläres Tetraeder	$e$	$f$	$f$

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen  $a$ ,  $c$ ,  $e$ , die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Angenommen, es gibt solche Körper, dann muss gelten 1) für den Würfel

$$\begin{aligned} b &= 6a^2 \\ b &= a^3 \quad \text{und damit} \quad a^3 = 6a^2 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Tatsächlich hat ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm den Oberflächeninhalt 216 cm<sup>2</sup> und das Volumen 216 cm<sup>3</sup>.

2) für die Kugel

$$\begin{aligned} d &= \frac{\pi}{6}c^3 \\ d &= \pi c^2 \quad \text{und damit} \quad \frac{\pi}{6}c^3 = \pi c^2 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

Tatsächlich hat eine Kugel mit dem Durchmesser 6 cm einen Oberflächeninhalt von 36 cm<sup>2</sup> und ein Volumen von 36 cm<sup>3</sup>.

3) für das reguläre Tetraeder

$$\begin{aligned} f &= e^2\sqrt{3} \\ f &= \frac{e^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad \frac{e^3}{12}\sqrt{2} = e^2\sqrt{3} \\ e &= \frac{12\sqrt{3}}{2} \\ e &= 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Tatsächlich hat ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge  $6\sqrt{6}$  cm einen Oberflächeninhalt von  $216\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> und ein Volumen von  $216\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>.

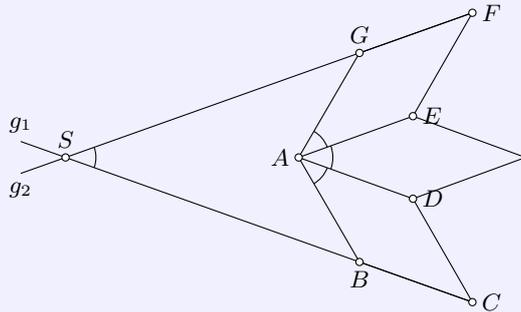
Also erfüllen genau die folgenden Zahlen die gestellten Bedingungen:

$$a = 6, \quad c = 6 \quad \text{und} \quad e = 6\sqrt{6}$$

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen von [5]

## 2.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 160921

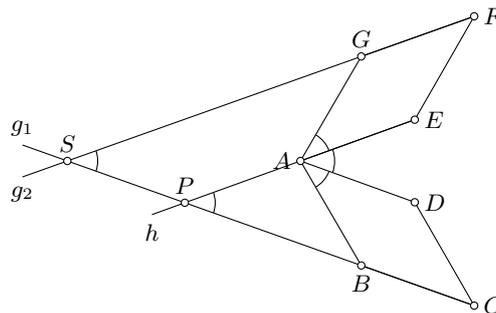


Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel  $\angle BSG$  genau so groß ist wie jeder der Winkel  $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$ .

Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:

„Sind zwei Parallelogramme  $ABCD$  und  $AEFG$ , die genau den Punkt  $A$  gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel  $\angle BAD, \angle DAE$  und  $\angle EAG$  gleich groß und kleiner als  $120^\circ$  sind, dann hat auch der Winkel  $\angle BSG$ , den die Gerade  $g_1$  durch  $B$  und  $C$  mit der Geraden  $g_2$  durch  $F$  und  $G$  einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel.“

Beweisen Sie diesen Satz!



Es sei  $h$  die Gerade durch  $A$  und  $E$ . Dann gilt  $h \parallel g_2$ , da  $AEFG$  ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu  $g_2$  nicht parallele Gerade  $g_1$  die Geraden  $g_2$  und  $h$  in  $S$  bzw.  $P$ . (siehe Abbildung)

Nun sind  $\angle BPA$  und  $\angle BSG$  Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleich groß. Ebenso sind  $\angle DAE$  und  $\angle BPA$  Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und mithin gleich groß. Folglich ist der Winkel  $\angle BSG$ , den  $g_1$  mit  $g_2$  einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel  $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$ .

## Aufgabe 2 - 160922

Die Zahl  $\frac{20}{21}$  soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass

a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

a) Die Zerlegung  $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$  beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

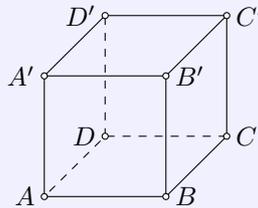
Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.

In  $\frac{11}{42}$  sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in  $\frac{29}{42}$  die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung  $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$  beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In  $\frac{2}{3}$  sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in  $\frac{2}{7}$  die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

**Aufgabe 3 - 160923**



Gegeben sei ein Würfel  $ABCD A' B' C' D'$  (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge  $XYZTX$ , wobei  $X, Y, Z$  und  $T$  in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten  $AA', BB', CC'$  bzw.  $DD'$  seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte  $X, Y, Z, T$  so gibt, dass der Streckenzug  $XYZTX$  unter allen betrachteten Streckenzügen

- a) minimale,
  - b) maximale
- Gesamtlänge besitzt!

Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den "Mantel" aus den vier zu  $AA'$  parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:

Für den dabei zweimal (als  $X$  und  $X_0$ ) auftretenden Punkt  $X$  gilt  $XX_0 \parallel AA_0$ .

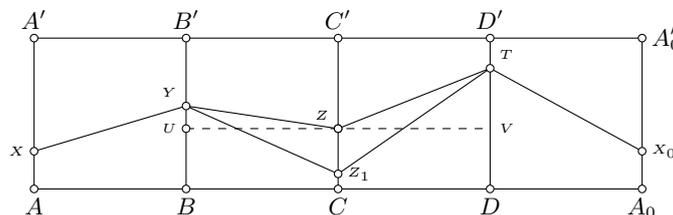
a) Zu jedem solchen  $X$  ergibt sich als Möglichkeit für  $Y, Z, T$  mit minimaler Gesamtlänge von  $XYTZX_0$  die Wahl von  $Y, Z, T$  auf der Strecke  $XX_0$ , da diese die kürzeste Verbindung zwischen  $X$  und  $X_0$  ist und da sie so bestimmten Punkte  $Y, Z, T$  wegen  $AX = BY = CZ = DT = A_0X_0$  im Innern von  $BB', CC'$  bzw.  $DD'$  liegen.

Die so zu je einem  $X$  gehörende minimale Gesamtlänge von  $XYZTX_0$  ist  $XX_0 = AA_0$ , also für alle  $X$  dieselbe Länge.

Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei  $XYZTX$  ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug.

Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen  $A, B, C, D$  sowie gleichzeitig  $A', B', C', D'$  und  $X, Y, Z, T$  erreicht, dass  $CZ \leq BY$  und  $CZ \leq DT$  gilt.



Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu  $AA_0$  durch  $Z$  dann  $BB'$  und  $CC'$  in Punkten  $U$  bzw.  $V$  auf  $BY$  bzw.  $DT$ . Daher ist  $\angle CZY \geq \angle CZU = 90^\circ$  und  $\angle CZT \geq \angle CZV = 90^\circ$ .

Wählt man nun einen Punkt  $Z_1$  zwischen  $C$  und  $Z$ , so gehört auch  $XYZ_1TX$  zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck  $Z_1ZY$  der Innenwinkel bei  $Z$  größer als der bei  $Z_1$ , also gilt  $YZ_1 > YZ$ .

Ebenso folgt  $Z_1T > ZT$ . Daher hat  $XYZ_1TX$  eine größere Gesamtlänge als  $XYZTX$ . Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

**Aufgabe 4 - 160924**

In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{rcccc} ab & X & ab & = & cad \\ Y & & Y & & Z \\ ae & X & ae & = & ffe \\ \hline ff & Y & ff & = & gg \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben  $b, d, e$  die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für  $a, c, f, g$  die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben  $X, Y, Z$  ist die Menge der Operationszeichen "+", "-", "·" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann  $X$  nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muss deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$$abXab = cad \quad \text{und} \quad aeXae = ffe$$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.

Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, muss  $X$  für das Zeichen  $\cdot$  stehen.

Aus  $ffYff = gg$  folgt wegen  $ff - ff = 0$  und  $ff : ff = 1$ , dass  $Y$  weder das Zeichen  $-$  noch das Zeichen  $:$  bedeuten kann.  $Y$  steht für das Zeichen  $+$ .

Aus  $cadZffe=gg$  folgt, dass  $Z$  nicht für das Zeichen  $:$  stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann.  $Z$  steht für das Zeichen  $-$ . Damit ergibt sich bisher

$$\begin{array}{rcccc} ab & \cdot & ab & = & cad \\ + & & + & & - \\ ae & \cdot & ae & = & ffe \\ \hline ff & + & ff & = & gg \end{array}$$

Wegen  $32^2 > 1000$  ergibt sich aus  $ae \cdot ae = ffe$ , dass die durch  $ae$  dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann  $e$  nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.

Aus  $ab+ae=ff$  folgt, dass  $e$  nicht 0 sein kann, weil sonst  $b$  und  $f$  die gleichen Zahlen darstellen müssten. Von den somit für  $ae$  in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, dass an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrates die gleiche Ziffer steht.

Wäre nun  $a = 1$  und  $e = 5$ , dass müsste wegen  $ab+ae=ff$  mithin  $f = 3$  und  $b = 8$  sein. Wegen  $18^2 = 324$  folgt dann auf  $ab \cdot ab=cad$  der Widerspruch  $a = 2$ .

Für  $a = 2$  und  $e = 1$  folgt  $f = 4$  und  $b = 3$ , Also kann nur die Ersetzung

$$\begin{array}{rcccc} 23 & \cdot & 23 & = & 529 \\ + & & + & & - \\ 21 & \cdot & 21 & = & 441 \\ \hline 44 & + & 44 & = & 88 \end{array}$$

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

*Lösungen der 2. Runde 1976 übernommen aus [5]*

## 2.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 160931**

Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes  $n$ -Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um  $180^\circ$  um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt  $P$  gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl  $n$  die Summe  $s$  der Quadrate der Abstände des Punktes  $P$  zu allen Punkten des  $n$ -Ecks!

Aufgrund der Punktsymmetrie ist  $n = 2m$  gerade.

Seien die Eckpunkte des  $n$ -Ecks in mathematisch positiver Richtung mit  $P_1, P_2, \dots, P_{2m}$  durchnummeriert, sodass sich jeweils  $P_k$  und  $P_{m+k}$  gegenüberliegen. Diese bilden also jeweils einen Durchmesser des Einheitskreises und es gilt  $|P_k P_{m+k}|^2 = 2^2 = 4$ .

Nach dem Satz von Thales ist jedes Dreieck  $P_k P_{k+m} P$  rechtwinklig bei  $P$  (oder  $P$  fällt mit einem der beiden Endpunkte des betrachteten Durchmessers zusammen).

In jedem Fall gilt aber nach Pythagoras (bzw. sofort durch Einsetzen)

$$|PP_k|^2 + |PP_{k+m}|^2 = |P_k P_{k+m}|^2 = 4$$

sodass sich für die gesuchte Summe  $s$  als Wert die Anzahl dieser Durchmesser ergibt, die  $4m = 2n$  beträgt, da jeder der Eckpunkte des  $n$ -Ecks an genau einem Durchmesser des Einheitskreises beteiligt ist, und auf jedem solchen genau zwei der Eckpunkte des  $n$ -Ecks liegen.

**Aufgabe 2 - 160932**

Man beweise folgenden Satz:

Sind  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen, für die  $ab = 1$  gilt, dann gilt

$$(a + 1) \cdot (b + 1) \geq 4 \quad (1)$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$ , also

$$(a + 1) \cdot (b + 1) = ab + (a + b) + 1 \geq 1 + 2 + 1 = 4$$

Dabei gilt Gleichheit genau für  $a = b$ , da nur dann die Mittelungleichung den Gleichheitsfall liefert.

**Aufgabe 3 - 160933**

Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

- (1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
- (2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge  $a$  und drei die Länge  $a\sqrt{2}$ .
  - a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
  - b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

a)  $T_1$  entsteht, indem die drei Kanten der Länge  $a$  die Grundfläche  $\triangle ABC$  bilden und die drei Kanten  $AD, BD, CD$  zur Spitze  $D$  jeweils die Länge  $a\sqrt{2}$  besitzen. Dann sind beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge  $a$  sind die anderen drei Seitenflächen von  $T_1$  gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge  $a$  und Schenkellänge  $a\sqrt{2}$ .

Der Tetraeder  $T_2$  entsteht analog, nur dass diesmal die Kanten mit Länge  $\sqrt{2}a$  die Grundfläche bilden, während die Kanten zur Spitze die Länge  $a$  erhalten. Dann sind wieder beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge  $a\sqrt{2}$  sind die drei anderen Seitenflächen von  $T_2$  gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge  $a\sqrt{2}$  sowie Schenkellänge  $a$ .

Insbesondere sind die Seitenflächen von  $T_1$  und  $T_2$  nicht kongruent, also auch nicht die Tetraeder selbst.

b) Für ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge  $g$  und Schenkellänge  $s$  gilt, dass die Höhe auf die Basis gleichzeitig eine Seitenhalbierende ist. Insbesondere gilt also für deren Länge  $h$  aufgrund des rechten Winkels am Höhenfußpunkt  $h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = s^2$  bzw.  $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4s^2 - g^2}$  und damit  $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{4} \cdot g\sqrt{4s^2 - g^2}$ .

Für ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $s$  folgt damit insbesondere

$$A = \frac{1}{4} \cdot s \sqrt{4s^2 - s^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

Damit beträgt der Oberflächeninhalt von  $T_1$

$$O_{T_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a \sqrt{4(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = \frac{1}{4} a^2 \cdot (\sqrt{3} + 3\sqrt{8-1}) = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{4} \cdot a^2$$

und der von  $T_2$

$$O_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{4a^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4} a^2 \cdot (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2}) = \frac{2\sqrt{3} + 6}{4} a^2$$

#### Aufgabe 4 - 160934

Beweisen Sie, dass für keine Primzahl  $p \neq 3$  und für keine natürliche Zahl  $n \geq 1$  die Zahl  $(3n-1) \cdot p^2 + 1$  Primzahl ist!

Da  $p$  eine von 3 verschiedene Primzahl ist, ist es nicht durch 3 teilbar und lässt sich schreiben als  $3m + 1$  oder  $3m - 1$  mit einer natürlichen Zahl  $m$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} (3n-1) \cdot p^2 + 1 &= (3n-1)(3m \pm 1)^2 + 1 = (3n-1)(9m^2 \pm 6m + 1) + 1 = \\ &= 3(9m^2n \pm 6mn + n - 3m^2 \mp 2m) - 1 + 1 \end{aligned}$$

also durch 3 teilbar, aber sicher größer als 3 (da  $3n - 1 > 1$  und  $p^2 \geq 4$ ), also sicher keine Primzahl,  $\square$ .

#### Aufgabe 5 - 160935

Es sei  $\triangle ABC$  ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks  $ABC$  in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.

Untersuchen Sie, ob es einen Punkt  $P$  gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Nein, einen solchen Punkt gibt es nicht.

Da jede Seitenhalbierende das Dreieck in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt, sich diese aber allein im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, wäre der einzig in Frage kommende Punkt  $P$  eben der Schwerpunkt des Dreiecks.

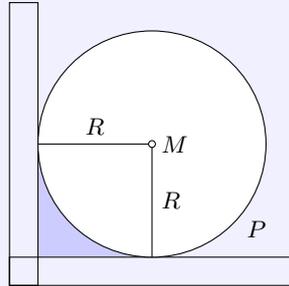
Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Die Parallele zur Seite  $AB$  durch den Schwerpunkt schneide die Seiten  $AC$  und  $BC$  in  $D$  bzw.  $E$ .

Dann ist das Dreieck  $DEC$  ähnlich zum Dreieck  $ABC$  und es gilt nach dem Strahlensatz, dass der Streckungsfaktor  $\frac{2}{3}$  ist.

Damit hat aber das Dreieck  $DEC$  nur  $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$  des Flächeninhalts vom Dreieck  $ABC$ . Demzufolge gibt es eine Parallele zur Seite  $AB$ , die näher an dieser liegt als die gerade betrachtete Parallele durch den Schwerpunkt, welche das Dreieck in zwei flächengleiche Stücke zerlegt. Diese neue Parallele verläuft dann aber nicht mehr durch den Schwerpunkt, sodass wir mit den drei Seitenhalbierenden und dieser Parallele vier Geraden, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen, gefunden haben, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

**Aufgabe 6 - 160936**

Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe  $P$  gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius  $R$  dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe  $P$  soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe  $P$  berührt.

- Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
- Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

a) Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden des rechten Winkels gehen die beiden Schenkel ineinander über. Da die Pappscheibe beide Schenkel nur in je einem Punkt  $P$  bzw.  $Q$  berührt, müssen auch diese Berührungspunkte zueinander Spiegelpunkte sein.

Da der Mittelpunkt  $N$  der kleinen Kreisscheibe mit Radius  $r$  in gleicher Entfernung zu beiden Berührungspunkten liegt, muss dieser sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $PQ$  befinden. Dies ist aber genau die Spiegelachse, also die Winkelhalbierende des rechten Winkels. Also liegt  $N$  (und analog auch  $M$ ) auf dieser Geraden.

Lässt man (beginnend beim Scheitelpunkt des Winkels)  $N$  auf der Winkelhalbierenden in Richtung  $M$  wandern, so vergrößert sich streng monoton seine Entfernung zu beiden Schenkeln (beginnend bei 0). Umgekehrt sinkt seine Entfernung zu  $M$  (beginnend bei einem positiven Wert, bis sie 0 erreicht, wenn  $N$  auf  $M$  liegt). Demzufolge gibt es genau eine Stelle dazwischen, wo die Entfernungen  $r$  von  $N$  zu den Schenkeln des Winkels und  $|MN| - R$  identisch sind. In dem Fall berührt der Kreis um  $N$  mit Radius  $r$  beide Schenkel und den Kreis um  $M$  mit Radius  $R$ , also die Pappscheibe  $P$ .

b) Sei  $S$  der Scheitelpunkt des Winkels. Es stehen die Berührungsradien  $NP$  und  $NQ$  senkrecht auf den Schenkeln, sodass das Viereck  $SPNQ$  drei (und damit auch vier) rechte Innenwinkel besitzt, also ein Rechteck ist. Da  $|NP| = |NQ| = r$  gilt, ist es sogar ein Quadrat.

Dessen Diagonale  $SN$  hat damit die Länge  $|SN| = \sqrt{2}r$ . Auf analoge Weise erhält man  $|SM| = \sqrt{2}R$ , also  $r + R = |NM| = |SM| - |SN| = \sqrt{2}(R - r)$ , also  $r \cdot (1 + \sqrt{2}) = R \cdot (\sqrt{2} - 1)$  bzw.

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot R = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} \cdot R = (3 - 2\sqrt{2})R$$

*Aufgaben der III. Runde 1976 gelöst von cyrix*

## 2.19 XVII. Olympiade 1977

## 2.19.1 I. Runde 1977, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 170911**

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen ( $\geq 1$ ) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Die beiden Zahlen seien  $a$  und  $b$ , und es gelte o.B.d.A.  $b < a$ . Dann gilt für die positive Differenz  $d$  ihrer Quadrate

$$d = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a + b) \cdot 1977 = (a + b) \cdot 3 \cdot 659$$

Daher hat  $d$  mindestens die natürlichen Zahlen

$$1; 3; 659; 1977; a + b; (a + b) \cdot 3; (a + b) \cdot 659; d$$

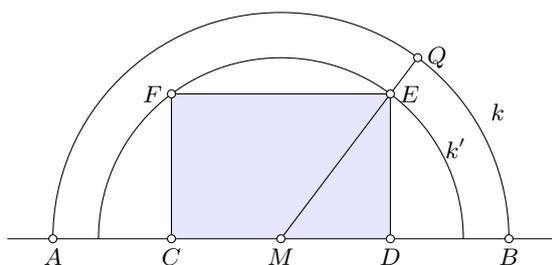
als Teiler. Wegen  $a + b > a - b$  (was aus  $b > 0$  folgt), d.h.  $a + b > 1977$ , sind diese acht Teiler sämtlich voneinander verschieden.

**Aufgabe 2 - 170912**

Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

*Hinweis:* Unter dem Abstand eines Punktes  $P$  im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke  $PQ$ , wobei  $Q$  folgendermaßen definiert ist: Man lege durch  $P$  einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis  $k$  mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  erscheint. Ist  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ , so sei  $Q$  der Schnittpunkt von  $k$  mit der Geraden durch  $M$  und  $P$ .



Es sei  $k$  ein halbkreisförmiger Querschnitt des Tunnels, das Halbkreisbogen  $k$  habe die Endpunkte  $A$  und  $B$ . Ferner sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ .

Ein Punkt  $P$  im Innern des Querschnitts erfüllt genau dann die Forderung, mindestens einen halben Meter Abstand zur Tunnelwand zu besitzen, wenn  $MP \leq 2,5$  m gilt, d.h. genau dann, wenn  $P$  der Fläche des Halbkreises  $k'$  angehört, der den Mittelpunkt  $M$ , den Radius 2,5 m hat und in der Fläche des Halbkreises  $k$  liegt.

Angenommen nun, alle Punkte eines rechteckigen Fahrzeugquerschnitts  $CDEF$  erfüllen diese Forderung, wobei  $C$  und  $D$  auf der Strecke  $AB$  liegen.

Dann gilt  $ME \leq 2,5$  m und  $MF \leq 2,5$  m. Ferner gilt  $MC \geq 1,5$  m oder  $MD \geq 1,5$  m; denn wäre  $MC < 1,5$ , und  $MD < 1,5$  m, so ergäbe sich  $CD < 3$  m. Es sei o.B.d.A.  $MD \geq 1,5$  m. Dann folgt

$$DE = \sqrt{ME^2 - MD^2} \leq \sqrt{2,5^2 - 1,4^2} m = 2m$$

Daher kann ein Fahrzeug nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn es nicht höher als 2 m ist.

Umgekehrt lassen sich die Bedingungen der Aufgabe mit einem Fahrzeug (der Breite 3 m und) der Höhe 2 m erfüllen. Wählt man nämlich im Tunnelquerschnitt ein Rechteck  $CDEF$  mit  $C$  und  $D$  auf  $AB$  und mit  $CD = 3$  m,  $DE = DF = 2$  m so, dass  $MC = MD = 1,5$  m ist, so liegen  $E$  und  $F$  wegen  $ME = MF = \sqrt{1,5^2 + 2^2} m = 2,5m$  auf  $k'$ , also gehört das gesamte Rechteck  $CDEF$  der Fläche des Halbkreises  $k'$  an.

Die gesuchte größtmögliche Fahrzeughöhe beträgt somit 2 m.

**Aufgabe 3 - 170913**

Herr  $A$  kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr  $B$ , ein Bekannter von Herrn  $A$ , hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn  $A$  einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr  $A$  denjenigen Teilbetrag für Herrn  $B$  mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr  $A$  für Herrn  $B$  damit ausgelegt?

Angenommen, Herr  $A$  habe  $a$  Bücher gekauft. Dann betrug der ursprüngliche Preis eines Buches  $a$  Mark, nach dem Preisnachlass  $(a - 1)$  Mark. Herr  $A$  hatte demnach  $a(a - 1)$  Mark zu zahlen.

Nun enden die Produkte zweier aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen stets auf eine der Ziffern 0, 2, oder 6, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Endziffer $a - 1$	Endziffer $a$	Endziffer $a(a - 1)$	Endziffer $a - 1$	Endziffer $a$	Endziffer $a(a - 1)$
0	1	0	1	2	2
2	3	6	3	4	2
4	5	0	5	6	0
6	7	2	7	8	6
8	9	2	9	0	0

Da der Betrag mit 10-Mark-Scheinen allein nicht beglichen werden konnte, entstand ein Restbetrag von 2 oder 6 Mark.

Herr  $B$  hatte, wenn er  $b$  Bücher kaufte, insgesamt  $b^2$  Mark zu zahlen. Da der von ihm zu zahlende Betrag zusammen mit dem von Herrn  $A$  ein Vielfaches von 10 M ergab, musste dieser Betrag mit der Ziffer 8 oder 4 enden.

Es gibt jedoch keine Quadratzahl mit der Endziffer 8, dagegen gibt es Quadratzahlen mit der Endziffer 4. Demnach hatte Herr  $B$  einen Betrag zu zahlen, dessen letzte Ziffer 4 war. Herr  $A$  hatte also 4 Mark für Herrn  $B$  ausgelegt.

**Aufgabe 4 - 170914**

Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen  $A, B, S, a, b$  in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

- (1)  $S$  wird ersetzt durch  $A$ .
- (2)  $A$  wird ersetzt durch  $aAB$ .
- (3)  $A$  wird ersetzt durch  $a$ .
- (4)  $B$  wird ersetzt durch  $b$ .

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen  $S$  ein.

- Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!
- Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?
- Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

a) Eine solche Möglichkeit besteht z.B. darin, erst (1) und dann nur noch Schritte der Art (2) ausführen zu lassen. Dies ist nämlich stets fortsetzbar, da im Ergebnis von (2) stets wieder ein Zeichen  $A$  auftritt. Hierbei wird also (1) einmal und (2) neunmal angewendet.

Möglichkeiten sind z.B.:

Anzahl der Anwendungen der Regel				Anzahl der Anwendungen der Regel			
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	8	0	1	1	8	1	0
1	7	0	2	1	7	1	1
1	6	0	3	1	6	1	2
1	5	0	4	1	5	1	3

b) Bei den Schritten (1), (3), (4) bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, bei (2) vergrößert sie sich um genau 2. Daher kann nur dann die Anzahl 5 entstehen, wenn nach dem zwangsläufigen Anfangsschritt (1), der  $S$  durch  $A$  ersetzt, unter den dann noch möglichen Schritten (2), (3), (4) genau 2 Schritte der Art (2) vorkommen. Die Anzahl der großen Buchstaben wird bei (2) um genau 1 größer, bei (3) und (4) um je genau 1 kleiner.

Da eine Zeichenreihe genau dann vom Automaten ausgegeben wird, wenn sie keinen großen Buchstaben enthält, folgt daraus:

Wenn der Automat eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt, so ist dies nur möglich nach Umformungsserien, in denen die Anzahl der Schritte (3) oder (4) genau 3 und somit die Anzahl der insgesamt ausgeführten Schritte genau 6 beträgt.

c) Die in b) genannten Umformungen sind nur in folgender Weise möglich: Da die Anzahl der Zeichen  $A$  bei Schritten der Art (2) und (4) gleich bleibt und sich bei (3) um 1 verringert, tritt der Schritt (3) genau einmal auf, und zwar erst, nachdem beide Schritte der Art (2) ausgeführt sind.

Da ferner die Anzahl der Zeichen  $B$  bei Schritten der Art (2) jeweils um 1 zunimmt, bei (3) gleich bleibt und bei (4) um je 1 abnimmt, können zu jedem Zeitpunkt höchstens so viele Schritte (4) ausgeführt werden, wie bereits Schritte (2) vorangegangen waren. Daher verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten, die Schritte anzuordnen:

$$\begin{aligned}
 I &: (1), (2), (2), (3), (4), (4) \\
 II &: (1), (2), (2), (4), (3), (4) \\
 III &: (1), (2), (2), (4), (4), (3) \\
 IV &: (1), (2), (4), (2), (3), (4) \\
 V &: (1), (2), (4), (2), (4), (3)
 \end{aligned}$$

Bei den Möglichkeiten I, II, III entsteht in den ersten drei Schritten die Zeichenreihe  $aaABB$ , danach wird die Teilreihe  $ABB$  durch  $abb$  ersetzt.

Bei den Möglichkeiten IV und V entsteht in den ersten vier Schritten die Zeichenreihe  $aaABb$ , danach wird die Teilreihe  $AB$  durch  $ab$  ersetzt. Somit gibt es genau eine Zeichenreihe aus 5 Zeichen, die vom Automaten ausgegeben werden kann, nämlich die Reihe  $aaabb$ .

Lösungen der I. Runde 1977 übernommen von [5]

**2.19.2 II. Runde 1977, Klasse 9****Aufgabe 1 - 170921**

Für jede reelle Zahl  $m$  und jede reelle Zahl  $n$  wird durch  $y = f(x) = mx + n$  ( $x$  reell) eine Funktion  $f$  definiert, deren Graph eine Gerade  $g$  ist.

a) Es sei  $m = \frac{1}{2}$  und  $n$  beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf  $g$ , deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!

b) Es seien  $m$  und  $n$  beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf  $g$ , deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche  $m$  und  $n$  überhaupt ein solcher Punkt auf  $g$  existiert!)

a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten  $x, y$  sowohl die Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + n$  als auch die Gleichung  $y = 2x$  gilt.

Ist dies der Fall, so folgt

$$2x = \frac{1}{2}x + n \quad , \quad x = \frac{2}{3}n \quad , \quad y = \frac{4}{3}n$$

Daher können nur diese Werte  $x, y$  die genannten Gleichungen erfüllen.

Wegen  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n + n = \frac{4}{3}n$  und  $2 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$  erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen.

Also hat (jeweils für ein  $n$ ) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar  $(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n)$  die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten  $x, y$  sowohl die Gleichung  $y = mx + n$  als auch die Gleichung  $y = 2x$  gilt.

Ist  $m = 2$  und  $n = 0$ , so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die  $y = 2x$  als Gleichung hat.

Ist  $m = 2$  und  $n \neq 0$ , so gelten für kein Zahlenpaar  $(x, y)$  beide Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.

Ist  $m \neq 2$ , so gilt: Wenn  $x, y$  die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt  $2x = mx + n$ ,  $x = \frac{n}{2-m}$ ,  $y = \frac{2n}{2-m}$ . Daher können im Fall  $m \neq 2$  nur diese Werte  $x, y$  die Gleichungen erfüllen.

Die Probe zeigt, dass jeweils für ein Paar  $(m, n)$  mit  $m \neq 2$  genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar  $(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{2-m})$  die verlangten Eigenschaften hat.

Lösung übernommen aus [5]

**Aufgabe 2 - 170922**

Jens sagt zu Christa: "Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält."

Nach kurzem Besinnen sagt Christa: "Man kann sogar für jede natürliche Zahl  $n > 2$  die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau  $n$ -mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."

Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

Für  $n = 3$  wählen wir  $5 \cdot 5 + 5 = 30$ , für  $n = 4$  die Darstellung  $5 \cdot (5 + 5 : 5) = 30$  und für jedes größere  $n$  ergänzen wir die Darstellung für  $n - 2$  um "+(5 - 5)",  $\square$ .

Aufgabe gelöst von cyrix

**Aufgabe 3 - 170923**

Gegeben seien ein Kreis  $k$  und ein Durchmesser  $AB$  von  $k$ . Der Mittelpunkt von  $k$  sei  $M$ . Sind  $C$  und  $D$  so auf  $k$  gelegen, dass  $ABCD$  ein konvexes Viereck mit  $AB \parallel DC$  ist, so sei  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle CMB$  und  $\beta$  die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne  $DC$  mit der Tangente  $t$  an  $k$  in  $D$  einschließt.

Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen  $AB$  und  $CD$ , für die

a)  $2\alpha = \beta$  und b)  $\alpha = \beta$  gilt.

Wegen  $|MB| = |MC|$  ist das Dreieck  $\triangle MBC$  gleichschenkelig und es gilt

$$\angle CBM = \angle MCB = \frac{180^\circ - \angle BMC}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Da  $|DM| = |CM|$  ist, liegt  $M$  auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $CD$ , welche wegen  $AB \parallel DC$  und  $|AM| = |MB|$  gleich der Mittelsenkrechten der Strecke  $AB$  ist. Demzufolge geht bei Spiegelung an dieser  $A$  in  $B$ ,  $M$  in sich selbst und  $C$  in  $D$  über. Also ist  $\angle MAD = \angle CBM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne  $BC$ , ist

$$\angle MAC = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BMC = \frac{\alpha}{2} \quad \text{also}$$

$$\angle CAD = \angle MAD - \angle MAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

Und nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne  $CD$ , ist dies gleich  $\beta$ .

Es gilt also allgemein  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Weiterhin ist aufgrund der Definition des Sinus im Einheitskreis der Abstand  $h$  der beiden Parallelen gleich  $h = \sin \alpha \cdot |MB|$ .

a) Aus  $2\alpha = \beta$  folgt dann  $\alpha = 30^\circ$  und also  $h = \frac{1}{2}|MB|$ .

b) Aus  $\alpha = \beta$  folgt dann  $\alpha = 45^\circ$  und also  $h = \frac{\sqrt{2}}{2}|MB|$ .

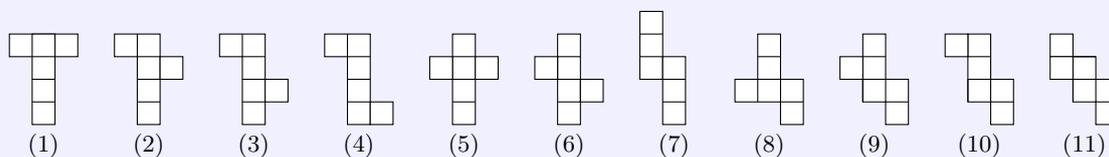
*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 4 - 170924

Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze

a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d.h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!

b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



Ein solcher Streckenzug lässt sich genau dann zeichnen, wenn es entweder genau null oder genau zwei Punkte in dem Netz gibt, an dem eine ungerade Anzahl von Strecken zusammenstoßen.

(An einem solchen Punkt kann man nur starten oder enden, da man an jedem zwischen Knoten für jede Strecke, auf den man ihn erreicht, auch wieder eine benötigt, auf dem man ihn wieder verlässt. Die Anzahl der Strecken, die sich in einem Punkt, der weder Start- noch Endpunkt des Streckenzugs ist, treffen, muss also gerade sein. Andererseits kann eine zusammenhängende Struktur, wo sich – bis auf ggf. an genau zwei Stellen – in allen Punkten jeweils eine gerade Anzahl an Strecken treffen, auch immer als durchgehender Streckenzug gezeichnet werden.)

In Netz (1) gibt es 6 Punkte, in denen sich je 3 Strecken treffen, in Netz (2) sind es 4, in Netz (3) auch, in Netz (4) sind es 6, in Netz (5) und 6 jeweils genau 2, in Netz (7) sind es 6, in Netz (8) sind es 4, in Netz (9) genau 2, in Netz (10) sind es 4 und in Netz (11) wieder genau 2. Damit lassen sich genau die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Streckenzug zeichnen.

Dabei sind jeweils die beiden Punkte, an denen sich in diesen Netzen je drei Strecken treffen, Anfangs- bzw. Endpunkt des entsprechenden Streckenzugs.

Bemerkung: Im Kontext der Graphentheorie fasst man die Strecken als Kanten und deren Endpunkte als Knoten auf. Die Fragestellung, ob sich alle Kanten in einem Weg zusammenfügen lassen, der jede Kante genau einmal enthält, wird auch als Frage bezeichnet, ob der Graph einen Euler-Weg enthält. (Vgl. Königsberger-Brücken-Problem.)

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.19.3 III. Runde 1977, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 170931**

Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Es ist  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ , sodass sich alle 30 Zahlen das Schema, welche Reste sie bei der Teilung durch 2, 3 bzw. 5 lassen, wiederholt. Von je 30 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind genau 15 ungerade. Von diesen 15 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen sind genau fünf durch 3, genau drei durch 5 und genau eine durch 15 teilbar, sodass genau  $15 - 5 - 3 + 1 = 8$  Zahlen eines solchen 30er-Blocks weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind.

Also finden sich in den 33 30er-Blöcken von 1 bis  $33 \cdot 30 = 990$  genau  $33 \cdot 8 = 264$  weder durch 2, 3 noch 5 teilbare Zahlen. Hinzukommen noch die 991 und 997, da die übrigen ungeraden Zahlen von 991 bis 1000 durch 3 teilbar (993, 999) oder durch 5 teilbar (995) sind.

Es gibt also insgesamt 266 solche Zahlen im zu betrachtenden Intervall.

**Aufgabe 2 - 170932**

Es sei  $ABCD$  ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen  $AB = 9$  cm,  $BC = 6$  cm,  $CD = 11$  cm,  $AD = 8$  cm hat und in dem der Innenwinkel bei  $B$  die Größe  $110^\circ$  hat.

Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von  $ABCD$  eindeutig bestimmt ist!

Von einem Rechteck  $EFGH$  werden nun folgende Eigenschaften gefordert:

- (1) Das Rechteck  $EFGH$  ist flächengleich dem Viereck  $ABCD$ .
- (2)  $A$  liegt auf der Rechteckseite  $EH$  zwischen  $E$  und  $H$ , und  $C$  liegt auf der Rechteckseite  $FG$ .
- (3) Die Rechteckseite  $EH$  steht auf  $AC$  senkrecht.

Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt  $E$  eines Rechtecks  $EFGH$  mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Nach dem Kongruenzsatz sws ist das Dreieck  $\triangle ABC$  und damit nach Kongruenzsatz sss das Dreieck  $\triangle ACD$ , also auch das Viereck  $ABCD$  und schließlich genauso sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Man kann das Viereck  $ABCD$ , wie folgt, konstruieren:

An die Strecke  $AB$  trage man in  $B$  den gegebenen Winkel und auf dem zweiten Schenkel die Strecke  $BC$  ab, sodass man den Punkt  $C$  erhält. Um diesen schlage man einen Kreis mit Radius  $|CD|$  und um  $A$  einen mit Radius  $|DA|$ . Diese beiden Kreise liefern zwei Schnittpunkte, wobei aber nur einer ein – in dieser Reihenfolge der Punkte – nicht überschlagenes Viereck  $ABCD$  liefert.

Für die Gerade  $EH$  gilt nach (3), dass sie orthogonal zu  $AC$ , und nach (2) auch durch  $A$  verläuft, sodass es das eindeutig bestimmte Lot von  $A$  auf  $AC$  ist. Da im Rechteck  $EFGH$  die Gerade  $FG$  parallel zur Geraden  $EH$  ist, muss nach (2) die Gerade  $FG$  das eindeutig bestimmte Lot von  $C$  auf  $AC$  sein, da auch  $C$  auf  $FG$  liegt. Damit legt ein Punkt  $E$  auf  $EH$  eindeutig den Punkt  $F$  auf  $FG$  wegen  $EH \perp EF$  fest und es gilt in jedem Fall  $|EF| = |AC|$ .

Es seien  $L_B$  und  $L_D$  die Lotfußpunkte von  $B$  bzw.  $D$  auf  $AC$ . Dann gilt für den Flächeninhalt  $I$  vom Viereck  $ABCD$ :

$$I = I_{\triangle ABC} + I_{\triangle ACD} = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2}$$

Konstruiert man also die beiden Lote von  $B$  und  $D$  auf  $AC$ , trägt deren Längen auf einer Strecke hintereinander ab und halbiert die so entstandene Summe, hat man die zweite Kantenlänge  $|EH| := \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2}$  des Rechtecks  $EFGH$  konstruiert.

Damit  $A$  nach (2) zwischen  $E$  und  $H$  liegt, muss  $|EA| < |EH|$  gelten. Jeder dieser Punkte erfüllt dann aber die gewünschte Eigenschaft. Man findet alle diese Punkte  $E$  dann auf dem Lot zu  $AC$  durch  $A$ , welche innerhalb des Kreises um  $A$  mit Radius  $|EH|$  liegen.

(Der Punkt  $H$  ist dann der eindeutig bestimmte Punkt auf diesem Lot, der die Entfernung  $|EH|$  von  $E$  hat und auf der gleichen Seite wie  $A$  von  $E$  liegt. Die Punkte  $F$  und  $G$  ergeben sich als Schnitte der Parallelen zu  $AC$  durch  $E$  bzw.  $H$  mit dem Lot zu  $AC$  durch  $C$ . Der Flächeninhalt eines solchen

Rechtecks  $EGH$  berechnet sich dann nach Konstruktion zu

$$|EF| \cdot |EH| = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2} = I$$

### Aufgabe 3 - 170933

In einem Dreieck  $ABC$  sei  $AC = b = 13$  cm und  $BC = a = 15$  cm. Das Lot von  $C$  auf die Gerade durch  $A$  und  $B$  sei  $CD$ , und es gelte  $CD = h_c = 12$  cm.

Ermitteln Sie für alle Dreiecke  $ABC$ , die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt  $I$ !

Das Dreieck  $\triangle ACD$  ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei  $D$ . Nach dem Satz von Pythagoras gilt also  $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$ , also wegen  $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$  ist  $|AD| = 5$  cm.

Auf analoge Weise im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BCD$  erhält man wegen  $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ , dass  $|BD| = 9$  cm.

Liegen  $A$  und  $B$  auf der gleichen Seite von  $D$  auf der Geraden durch  $A$  und  $B$  (handelt es sich also beim Dreieck  $\triangle ABC$  um ein stumpfwinkliges, sodass der Höhenfußpunkt  $D$  außerhalb liegt), so gilt  $c = |AB| = |BD| - |AD| = 4$  cm und somit  $I = \frac{1}{2}c \cdot h_c = 24$  cm<sup>2</sup>.

Liegen dagegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $D$  auf der Geraden durch  $A$  und  $B$  (also  $D$  zwischen ihnen), dann ist  $c = |AB| = |AD| + |BD| = 14$  cm und damit  $I = 84$  cm<sup>2</sup>.

### Aufgabe 4 - 170934

Für ein gleichschenkliges Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$  gelte  $BC = CD = DA = a$  sowie  $AB > a$ .

- Beweisen Sie, dass die Diagonale  $AC$  den Innenwinkel  $\angle DAB$  des Trapezes halbiert!
- Berechnen Sie die Länge von  $AB$  für den Fall, dass  $\angle DAB = 60^\circ$  gilt!

Bemerkung: Bei kanonischer Anordnung und Bezeichnung der Eckpunkte des Trapezes in mathematisch positiver Orientierung, ist der Innenwinkel bei  $A$  "falsch" bezeichnet und müsste eigentlich  $\angle BAD$  heißen, damit nicht der zugehörige Gegenwinkel gemeint ist. In der Lösung wird diese "korrekte" Bezeichnung verwendet.

a) Es ist  $|DA| = |DC|$ , also das Dreieck  $\triangle ACD$  gleichschenklige und es gilt  $\angle CAD = \angle DCA$ . Es sind nun aber  $\angle DCA$  und  $\angle BAC$  Wechselwinkel an den von  $AC$  geschnittenen Parallelen  $AB$  bzw.  $CD$ , also gleich groß, sodass sich direkt  $\angle CAD = \angle BAC$  ergibt, also  $AC$  die Winkelhalbierende von  $\angle BAD$  ist,  $\square$ .

b) Aufgrund von  $\angle CAD = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ$  folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle ACD$ , dass  $\angle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$  ist.

Sei  $M$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\angle ADC$  mit der Strecke  $AB$ . Dann besitzt das Dreieck  $\triangle AMD$  zwei Innenwinkel der Größe  $60^\circ$ , ist also gleichseitig mit Kantenlänge  $|AD| = a$ .

Für das Dreieck  $\triangle MCD$  gilt  $|DM| = |DC| = a$ , sodass es gleichschenklige ist und  $\angle DCM = \angle CMD$  folgt. Da dessen dritter Innenwinkel  $\angle MDC = \angle ADC - \angle ADM = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$  beträgt, ist auch dieses Dreieck gleichseitig mit Kantenlänge  $a$ .

Schließlich betrachten wir das Dreieck  $\triangle MBC$ . Auch hier sind nun zwei Seiten gleich lang:  $|MC| = |BC| = a$ , sodass die gegenüberliegenden Innenwinkel  $\angle CBM$  und  $\angle BMC$  gleich groß sind, wobei sich letzterer als Differenz des gestreckten Winkels  $\angle BMA = 180^\circ$  und den beiden Winkeln  $\angle CMD = \angle DMA = 60^\circ$ , also zu  $180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$  ergibt, sodass auch das Dreieck  $\triangle MBC$  gleichseitig mit Kantenlänge  $a$  ist.

Damit ergibt sich abschließend  $|AB| = |AM| + |MB| = 2a$ .

### Aufgabe 5 - 170935

Beweisen Sie folgende Aussage!

Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Für eine natürliche Zahl  $n$  gilt:

$$\begin{aligned}
 n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= (n+1)(n+2)(n^2 + 3n) + 1 \\
 &= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2) - 2] + 1 \\
 &= [(n+1)(n+2)]^2 - 2(n+1)(n+2) + 1 \\
 &= [(n+1)(n+2) - 1]^2 .
 \end{aligned}$$

#### Aufgabe 6 - 170936

Für jedes  $i = 1, 2, 3$  seien  $x_i$  und  $y_i$  zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit  $d_i$  die größere der beiden Zahlen  $x_i$  und  $y_i$  bezeichnet.

a) Beweisen Sie:

Wenn  $x_1 \leq x_2 + x_3$  und  $y_1 \leq y_2 + y_3$  gilt, dann gilt  $d_1 \leq d_2 + d_3$ .

b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.

Wenn  $d_1 \leq d_2 + d_3$  gilt, dann gilt auch  $x_1 \leq x_2 + x_3$ .

a) Es sind für alle  $i$  die Ungleichungen  $x_i \leq d_i$  und  $y_i \leq d_i$  nach Definition erfüllt. Also gilt sowohl  $x_1 \leq x_2 + x_3 \leq d_2 + d_3$  als auch  $y_1 \leq y_2 + y_3 \leq d_2 + d_3$ . Da  $d_1$  eine der beiden Zahlen  $x_1$  oder  $y_1$  ist, beide aber  $\leq d_2 + d_3$  sind, gilt dies auch für  $d_1$ ,  $\square$ .

b) Dies ist offensichtlich nicht der Fall, wie etwa  $x_1 = 1 = y_2 = y_3$  und  $y_1 = 0 = x_2 = x_3$  zeigt. Dann ist nämlich  $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ , also  $d_1 \leq d_2 + d_3$ , aber  $x_1 > x_2 + x_3$ .

*Aufgaben der III. Runde 1977 gelöst von cyrix*

## 2.20 XVIII. Olympiade 1978

## 2.20.1 I. Runde 1978, Klasse 9

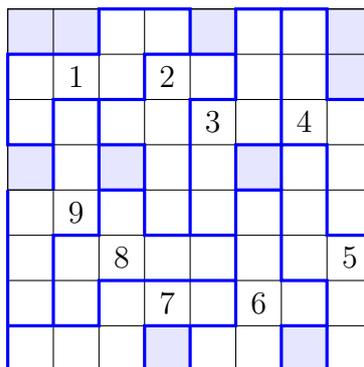
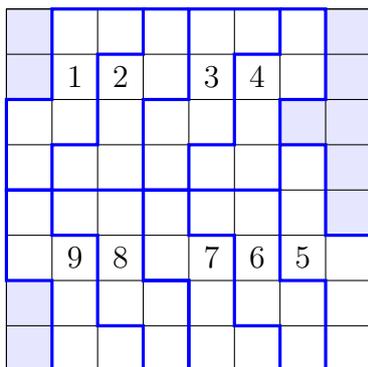
**Aufgabe 1 - 180911**

Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von  $1 \text{ dm}^3$  Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Angaben von zwei verschiedenen Möglichkeiten:

**Aufgabe 2 - 180912**

Es seien  $a$  und  $b$  rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

Vermindert man  $a$  um 10%, so erhält man 297.

Vergrößert man  $b$  um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von  $a$  beträgt dann  $b$ ? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Da 10 % von  $a$  gleich  $\frac{a}{10}$  ist, gilt:  $a - \frac{a}{10} = 297$ , also  $\frac{9}{10}a = 297$ . Entsprechend gilt:

$$b + \frac{b}{10} = 297 \quad \text{also} \quad \frac{11}{20}b = 297 = \frac{9}{10}a$$

Daraus folgt  $b = \frac{9}{11}a = 0,8182a$  (Dezimalbruch auf 4 Dezimalstellen gerundet);  $b$  beträgt also 81,82% von  $a$  (Prozentsatz auf 2 Dezimalstellen gerundet).

**Aufgabe 3 - 180913**

In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Es gilt:

$$30 = (1 + 1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1$$

$$30 = 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3$$

$$30 = 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5$$

$$30 = (2 + 2 + 2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2$$

$$30 = 4 \cdot 4 \left( \frac{4+4}{4} \right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$30 = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6$$

$$30 = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7$$

$$30 = 9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}$$

$$30 = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8$$

**Aufgabe 4 - 180914**

Gegeben seien zwei Punkte  $A_0$  und  $A_1$ . Ihr Abstand voneinander werde mit  $a$  bezeichnet.

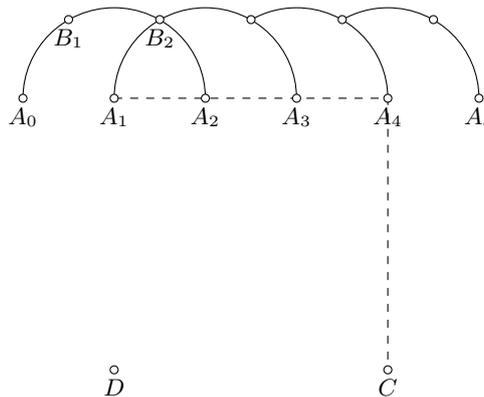
Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge  $3a$  unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Man schlägt um  $A_0$  und  $A_1$  Kreise mit dem Radius  $a$ . Einer ihrer Schnittpunkte sei  $B_1$  genannt. Man schlägt um  $A_1$  und  $B_1$  Kreise mit dem Radius  $a$ . Ihr von  $A_0$  verschiedener Schnittpunkt sei  $B_2$  genannt. Man schlägt um  $A_1$  und  $B_2$  Kreise mit dem Radius  $a$ . Ihr von  $B_1$  verschiedener Schnittpunkt sei  $A_2$  genannt.

Da die Dreiecke  $A_0A_1B_1$ ,  $B_1A_1B_2$  gleichseitig sind, haben die Winkel  $\angle A_0A_1B_1$ ,  $\angle B_1A_1B_2$  und  $\angle B_2A_1A_2$  jeweils eine Größe von  $60^\circ$  und bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Damit liegen die Punkte  $A_0, A_1$  und  $A_2$  auf derselben Geraden, und es ist  $A_0A_1 = A_1A_2 = a$ .

Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich eine beliebig große Menge von Punkten  $A_n$  konstruieren, die alle auf derselben Geraden liegen und von denen je zwei benachbarte den Abstand  $a$  haben.



Man konstruiert auf diese Weise eine Folge von Punkten  $A_0, A_1, \dots, A_5$ . Dann ist  $A_0A_5 = 5a$ ,  $A_1A_4 = 3a$  und  $A_0A_4 = 4a$ .

Man schlägt nun den Kreis um  $A_4$  mit dem Radius  $3a$  und um  $A_0$  den Kreis mit dem Radius  $5a$ . Beide Kreise schneiden einander, einer der beiden Schnittpunkte sei  $C$ .

Wegen  $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$  ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das durch die Punkte  $A_0, A_4, C$  bestimmte Dreieck rechtwinklig, und  $A_4$  ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels.

Man schlägt nun den Kreis um  $C$  mit dem Radius  $3a$  und um  $A_1$  den Kreis mit dem gleichen Radius. Ihr von  $A_4$  verschiedener Schnittpunkt sei  $D$  genannt. Wegen  $A_1A_4 = A_4C = CD = DA_1 = 3a$  und der Tatsache, dass der Innenwinkel bei  $A_4$  ein rechter ist, sind  $A_1, A_4, C$  und  $D$  Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge  $3a$ .

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen von [5]

## 2.20.2 II. Runde 1978, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 180921**

Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.

Der jüngste Sohn meint: "Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben."

Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Wer von beiden hat recht?

Es kommt z.B. unter den sechsstelligen Zahlen

$$1000008, \quad 100009, \quad 100010 \quad \text{und} \quad 10011$$

keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

**Aufgabe 2 - 180922**

In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:

- (1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
- (2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
- (3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Zu (1): Die Zahlen  $\sqrt{2}$  und die von ihr verschiedene Zahl  $\sqrt{8}$  sind irrational, ihr Produkt  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$  ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.

Zu (2):  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$  sind verschiedene irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.

Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl  $r$  und eine irrationale Zahl  $x$ , deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $b \neq 0, d \neq 0$  und

$$r = \frac{a}{b}, \quad r + x = \frac{c}{d}$$

Daraus ergäbe sich

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

also der Widerspruch, dass  $x$  rational wäre; Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist.

Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von  $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$  als Satz zitiert werden, dass die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist.

**Aufgabe 3 - 180923**

Von einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $B$  und  $\angle BAC = 60^\circ$  ist die Länge  $r$  des Umkreisradius gegeben.

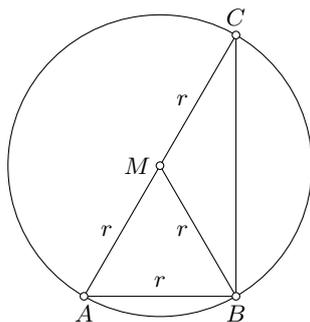
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt  $B$  auf dem Halbkreis über  $AC$ . Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AC$ , dann ist der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $MA = MB = MC = r$  der Umkreis des Dreiecks  $ABC$ : Damit gilt  $AC = 2r$ .

Das gleichschenklige Dreieck  $ABM$  hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe  $60^\circ$ , ist also gleichseitig. Daraus folgt  $AB = r$ .

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man  $CB = r\sqrt{3}$ . Damit gilt für den Umfang  $u = 3r + r\sqrt{3} = r(3 + \sqrt{3})$  und für den Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$$



Da der Flächeninhalt auch nach der Formel  $I = \frac{1}{2}AC \cdot h = r \cdot h$ , mit  $h$  als Länge der Höhe auf der Hypotenuse  $AC$  berechnet werden kann, folgt

$$h = \frac{I}{r} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$$

#### Aufgabe 4 - 180924

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen  $z$ , die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:

- (1)  $z$  ist eine Primzahl.
- (2) Jede Ziffer von  $z$  stellt eine Primzahl dar.
- (3) Die Quersumme  $z'$  von  $z$  ist eine zweistellige Primzahl.
- (4) Die Quersumme  $z''$  von  $z'$  ist eine Primzahl.

Angenommen, eine dreistellige Zahl  $z$  hat die Eigenschaften (1) bis (4).

Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7.

Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet  $z$  auf eine Ziffer 3 oder 7.

Da die Quersumme  $z'$  eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann  $z'$  nur eine der Zahlen 11; 13 oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur  $z' = 11$  eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.

Also gilt  $z' = 11$ .

Sei nun die letzte Ziffer von  $z$  die Zahl 7. Dann muss die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich  $0 + 4$ ;  $1 + 3$ ;  $2 + 2$ ;  $3 + 1$  und  $4 + 0$ ) erfüllt nur  $2 + 2$  die Bedingung (2). Damit erhält man  $z = 227$ .

Sei nun 3 die letzte Ziffer von  $z$ . Dann muss die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von  $z$  dargestellten Zahlen 8 betragen.

Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich  $0 + 8$ ;  $1 + 7$ ;  $2 + 6$ ;  $3 + 5$ ;  $4 + 4$ ;  $5 + 3$ ;  $6 + 2$ ;  $7 + 1$ ;  $8 + 0$ ) erfüllen nur  $3 + 5$  und  $5 + 3$  die Bedingung (2).

Das führt auf die Zahlen  $z = 353$  und  $z = 533$ .

Wegen  $533 = 13 \cdot 41$  erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).

Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl  $p < 17$  teilbar, und es gilt  $17^2 > 227$ , 353 ist durch keine Primzahl  $p < 19$  teilbar, und es gilt  $19^2 > 353$ .)

Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

## 2.20.3 III. Runde 1978, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 180931**

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn  $a, b, c$  und  $d$  reelle Zahlen sind, für die  $ab - cd \neq 0$  gilt, dann gilt  $a^2 + b^2 > 0$  oder  $c^2 + d^2 > 0$ .

Wäre  $a^2 + b^2 = 0 = c^2 + d^2$ , so wegen  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  für alle reellen Zahlen  $x$  auch  $a = b = c = d = 0$  und damit auch  $ab - cd = 0$  im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also muss  $a^2 + b^2 > 0$  oder  $c^2 + d^2 > 0$  gelten,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 180932**

In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Man ermittle die größte natürliche Zahl  $n$ , für die die folgende Aussage wahr ist:

„Es gibt  $n$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.“

Die gesuchte Zahl  $n$  ist 6. Dazu zeigen wir zuerst, dass es 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, deren Quersummen allesamt keine durch 4 teilbaren Zahlen sind, und dann, dass für je 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen (mindestens) eine dieser eine durch 4 teilbare Quersumme besitzt.

Wir betrachten die natürlichen Zahlen 4997, 4998, 4999, 5000, 5001 und 5002. Diese 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besitzen die Quersummen 29, 30, 31, 5, 6 und 7, welche alle nicht durch 4 teilbar sind.

Es können sich 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf nur maximal zwei „Zehner“, also Intervalle der Form  $[k \cdot 10 + 0; k \cdot 10 + 9]$  mit nicht-negativem ganzem  $k$ , aufteilen. Dann müssen aber in mindestens einem solchen Intervall 4 aufeinanderfolgende dieser Zahlen befinden, deren Quersummen 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wovon eine durch 4 teilbar ist.

**Aufgabe 3 - 180933**

Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit  $V_1$  bezeichnet sei.

Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei  $V_2$  genannt.

Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei  $V_3$  genannt.

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_1 : V_2 : V_3$ !

Es habe der Ausgangswürfel die Kantenlänge  $a$ , der Oktaeder die Kantenlänge  $b$  und der innere Würfel die Kantenlänge  $c$ . Dann gilt  $V_1 = a^3$ .

Der Oktaeder lässt sich als Vereinigung zweier gerader Pyramiden mit identischer quadratischer Grundfläche auffassen. Deren Spitzen bilden die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen des Ausgangswürfels, sodass sich als Höhe  $h$  einer dieser Pyramiden der Wert  $h = \frac{1}{2}a$  ergibt. Diese quadratische Grundfläche beider Pyramiden liegt in der Ebene durch die Mittelpunkte der vier übrigen Seiten des Ausgangswürfels. Jede die Kanten dieser Grundfläche entsteht in dieser Schnittfigur als Hypotenuse eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Länge  $\frac{1}{2}a$  haben. Also gilt  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  und  $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}b^2 \cdot h = \frac{1}{6}a^3$ .

Verbindet man die Mittelpunkte zweier benachbarter Kanten der quadratischen Grundfläche der beiden Pyramiden miteinander, entsteht eine Strecke der Länge  $\frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}a$ . Der Schwerpunkt der von der Spitze der Pyramide ausgehenden und in einer solchen Seitenfläche des Oktaeders verlaufenden Seitenhalbierenden teilt diese im Verhältnis 2 : 1, sodass sich nach dem Strahlensatz für die Länge  $c$  der Strecke zwischen den Schwerpunkten benachbarter Oktaederflächen  $\frac{c}{\frac{1}{2}a} = \frac{2}{3}$  bzw.  $c = \frac{a}{3}$  und damit  $V_3 = \frac{1}{27}a^3$  ergibt. Damit gilt

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2$$

**Aufgabe 4 - 180934**

In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$  teile die von  $C$  auf die Hypotenuse  $AB$  gefällte Höhe diese im Verhältnis  $1 : 3$ .

Berechnen Sie die Größe der bei  $A$  bzw.  $B$  liegenden Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$ !

Es sei  $H$  der Fußpunkt der Höhe von  $C$  auf  $AB$  und es gelte  $|HB| = 3 \cdot |AH|$ . Weiterhin seien  $\alpha := \angle BAC$  und  $\beta := \angle ABC$ .

Dann ist  $|AB| = 4 \cdot |AH|$  und nach dem Kathetensatz  $|BC| = \sqrt{|AH| \cdot |AB|} = 2 \cdot |AH|$ .

Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist  $\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ , also  $\alpha = 30^\circ$ , da  $0 < \alpha < 90^\circ$  gilt.

Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck erhält man schließlich  $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

**Aufgabe 5 - 180935**

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl  $p$  der Rest, den  $p$  bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Ist  $p$  gleich 2, 3 oder 5, so ist der Rest von  $p$  bei der Division durch 30 offensichtlich  $p$  selbst und damit eine Primzahl. Andernfalls ist  $p$  weder durch 2, 3 noch 5 teilbar.

Sei nun  $p > 5$  eine solche Primzahl und  $0 \leq r < 30$  sein Rest bei der Teilung durch 30. Also gibt es eine ganze Zahl  $q$  mit  $p = 30 \cdot q + r$ . Dann kann wegen  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  auch  $r$  nicht durch 2, 3 bzw. 5 teilbar sein, denn sonst wäre es  $30 \cdot q + r$ , und damit  $p$ , auch.

Es verbleiben als mögliche Reste also nur diejenigen Zahlen  $0 \leq r < 30$ , die selbst weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind. Dies sind aber (wegen  $7^2 = 49 > 30$ ) genau die Primzahlen und 1,  $\square$ .

**Aufgabe 6 - 180936**

Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  sowie zwei Punkte  $A_1$  und  $B_2$  im Innern dieses Dreiecks.

Bei der Verschiebung, die  $A$  in  $A_1$  überführt, habe  $\triangle ABC$  das Bilddreieck  $A_1B_1C_1$ .

Bei der Verschiebung, die  $B$  in  $B_2$  überführt, habe  $\triangle ABC$  das Bilddreieck  $A_2B_2C_2$ .

Der Durchschnitt der Dreiecksflächen  $(ABC)$  und  $(A_1B_1C_1)$  sei die Fläche  $F_1$ . Der Durchschnitt der Dreiecksflächen  $(ABC)$  und  $(A_2B_2C_2)$  sei die Fläche  $F_2$ .

Man beweise, dass  $F_1$  entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in  $F_2$  überführt werden kann.

Hinweis: Ist  $XYZ$  ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche  $(XYZ)$  die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks  $XYZ$ .

Durch Verschiebungen bleiben Richtungen erhalten, sodass Bildgeraden parallel zu ihren Urbildern sind. Insbesondere sind also die Geraden  $A_1C_1$  und  $AC$  zueinander parallel und schneiden sich, da  $A_1$  nicht auf  $AC$  liegt, nicht.

Es liegt  $A_1$  in der bezüglich  $AB$  gleichen Halbebene wie der Punkt  $C$ , sodass der von  $A_1$  ausgehende und durch  $C_1$  verlaufende Strahl die Gerade  $AB$  nicht schneidet. Also muss die Strecke  $A_1C_1$  wegen  $A_1C_1 \parallel AC$  und  $|A_1C_1| = |AC|$  die dritte Dreiecksseite  $BC$  schneiden.

Es sei  $S_C$  dieser Schnittpunkt. Analog erhält man, dass auch  $A_1B_1$  nur genau die Seite  $BC$  schneidet und sei  $S_B$  dieser Schnittpunkt.

Dann ist  $F_1 = (A_1S_BS_C)$ . Aufgrund der Parallelitäten  $A_1S_B = A_1B_1 \parallel AB$ ,  $A_1S_C = A_1C_1 \parallel AC$  und  $S_BS_C = BC$  ist dabei  $\triangle A_1S_BS_C \sim \triangle ABC$ .

Analog erhält man  $F_2 = (T_A B_2 T_C)$  und  $\triangle T_A B_2 T_C \sim \triangle ABC$ , wobei  $T_A$  und  $T_C$  die Schnittpunkte von  $A_2B_2$  bzw.  $C_2B_2$  mit  $AC$  seien. Auch hier gilt, dass entsprechende Seiten parallel sind.

Insbesondere sind die beiden  $F_1$  und  $F_2$  definierenden Dreiecke  $\triangle A_1S_BS_C$  und  $\triangle T_A B_2 T_C$  zueinander ähnlich und entsprechende Seiten beider Dreiecke liegen jeweils parallel zueinander.

Wir betrachten nun die Geraden  $T_A A_1$  und  $B_2 S_B$ . Sind diese Geraden nicht parallel, so sei  $Z$  ihr Schnittpunkt und es gilt nach dem Strahlensatz mit Scheitelpunkt  $Z$  und geschnittenen Parallelen  $A_1S_B \parallel T_A B_2$  die Beziehung  $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZB_2|}{|ZS_B|} =: f$ . Die zentrische Streckung mit Zentrum  $Z$  und Faktor  $f$  bildet also  $A_1$  auf  $T_A$  und  $S_B$  auf  $B_2$  ab.

Da zentrische Streckungen Richtungen erhalten, muss durch diese Streckung auch  $S_C$  als Schnitt von

Parallelen zu  $AB$  und  $BC$  durch  $S_B$  auch auf den Schnittpunkt der Parallelen zu diesen beiden Geraden durch  $B_2$ , also  $T_C$  abgebildet werden. Also bildet diese zentrische Streckung das Dreieck  $\triangle A_1S_B S_C$  auf das Dreieck  $\triangle T_A B_2 T_C$  und damit auch  $F_1$  auf  $F_2$  ab.

Schneiden sich die Geraden  $T_A A_1$  und  $B_2 S_B$  dagegen nicht, sind aber verschieden, so bildet das Viereck  $A_1 S_B B_2 T_A$  ein Parallelogramm. Insbesondere sind dann die beiden Strecken  $|A_1 S_B|$  und  $|T_A B_2|$  kongruent und parallel, sodass auch die Figuren  $F_1$  und  $F_2$  kongruent sind und man  $F_2$  aus  $F_1$  durch die Verschiebung, die  $A_1$  auf  $T_A$  abbildet, erhält.

Liegen abschließend  $T_A, A_1, B_2$  und  $S_B$  auf einer Geraden  $g$ , dann unterscheiden wir die beiden Fälle, ob die Gerade  $T_C S_C$  diese schneidet, oder parallel dazu ist. (Identisch kann sie nicht sein, da sonst  $A_1, S_B$  und  $S_C$  auf einer Geraden lägen, was aufgrund der Definition der beiden letzteren als Schnittpunkte von verschiedenen von  $A_1$  ausgehenden Strahlen mit der gleichen Gerade  $BC$  zum Widerspruch führen würde.)

Schneidet  $T_C S_C$  die Gerade  $g$ , so sei  $Z$  ihr Schnittpunkt und wegen  $A_1 S_C \parallel T_A T_C$  folgt aufgrund des Strahlensatzes  $\frac{|Z T_A|}{|Z A_1|} = \frac{|Z T_C|}{|Z S_C|} =: f$ , sodass durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum  $Z$  um den Faktor  $f$  die Punkte  $A_1$  und  $S_C$  auf  $T_A$  bzw.  $T_C$  abgebildet werden. Analog oben schlussfolgert man nun, dass durch diese zentrische Streckung auch  $S_B$  auf  $B_2$  und damit  $F_1$  auf  $F_2$  abgebildet wird.

Sind dagegen  $g$  und  $T_C S_C$  parallel und verschieden, so bilden  $T_A A_1 S_C T_C$  und  $B_2 S_B S_C T_C$  Parallelogramme, sodass  $|T_A A_1| = |T_C S_C| = |B_2 S_B|$  gilt und die zugehörigen Geraden alle parallel zueinander sind, sodass  $F_2$  aus  $F_1$  durch die Verschiebung hervorgeht, die  $A_1$  auf  $T_A$  abbildet.

Damit wurde in jedem Fall gezeigt, dass man  $F_2$  aus  $F_1$  durch eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung erhalten kann. Beides zugleich ist aber nicht möglich, da eine Verschiebung die Kongruenz der Figuren voraussetzt, während jede zentrische Streckung um einen Faktor verschieden von  $\pm 1$  die Kongruenz zerstört und nur Ähnlichkeit erhält.

Eine Streckung um den Faktor  $-1$  würde aber die Orientierung ändern, während der Umlaufsinn der entsprechenden Punkte  $A_1 S_B S_C$  bzw.  $T_A B_2 T_C$  identisch ist. Und eine Streckung um den Faktor  $1$  entspricht der Identitätsabbildung. Jedoch kann nicht  $F_1 = F_2$  gelten, da  $B_2$  im Innern des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegt, während der entsprechende Punkt  $S_B$  von  $F_2$  sich auf dem Rand von  $\triangle ABC$  befindet, also von  $B_2$  verschieden ist.

Demnach gibt es für jeden Fall entweder eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung, die  $F_2$  auf  $F_1$  abbildet,  $\square$ .

*Aufgaben der III. Runde 1978 gelöst cyrix*

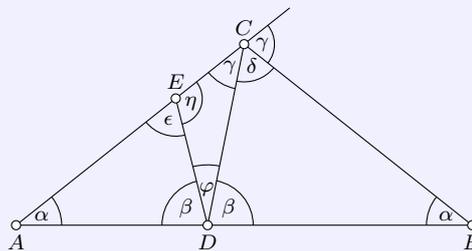
## 2.21 XIX. Olympiade 1979

## 2.21.1 I. Runde 1979, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 190911

In der dargestellten Figur sei die Größe  $\delta$  des Winkels  $\angle DCB$  bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\delta$ !



- (1) Wegen  $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$  (Winkelsumme im Dreieck  $\triangle DBC$ ) und  $\alpha + \beta + \varepsilon = 180^\circ$  (Winkelsumme im Dreieck  $\triangle ADE$ ) gilt

$$\varepsilon = \delta$$

- (2) Wegen  $\delta + 2\gamma = 180^\circ$  (gestreckter Winkelsumme bei  $C$ ) gilt

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$$

- (3) Wegen  $\gamma = 2\alpha$  (Außenwinkel der Dreieck  $ABC$ ) gilt  $\alpha = \frac{\beta}{2}$  und wegen (2) gilt dann

$$\alpha = 45^\circ - \frac{1}{4}\delta$$

- (4) Wegen  $\eta + \varepsilon = 180^\circ$  (Nebenwinkel) und wegen (1) gilt dann

$$\eta = 180^\circ - \varepsilon \quad ; \quad \eta = 180^\circ - \delta$$

- (5) Wegen  $\gamma + \eta + \varphi = 180^\circ$  (Winkelsumme im Dreieck  $\triangle EDC$ ) gilt  $\varphi = 180^\circ - \gamma - \eta$ , und unter Berücksichtigung von (2) und (4) gilt dann

$$\varphi = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) - (180^\circ - \delta) = \frac{3}{2}\delta - 90^\circ$$

- (6) Wegen  $2\beta + \varphi = 180^\circ$  (gestreckter Winkel bei  $D$ ) gilt  $\beta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ , und unter Berücksichtigung von (4) gilt dann

$$\beta = 90^\circ - \left(\frac{3}{4}\delta - 45^\circ\right) = 135^\circ - \frac{3}{4}\delta$$

## Aufgabe 2 - 190912

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

		3	1	0	1	2	4	2	
3									a
3									b
1									c
2									d
2									e
0									f
2									g
		A	B	C	D	E	F	G	

Hinweis: In den Abbildungen 1 und 2 sind diejenigen Felder, von denen gesichert ist, dass die frei bleiben mit einem Kreis gekennzeichnet.

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○		○	×	○	<i>a</i>
3			○	○		○		<i>b</i>
1	○	○	○	○	○	×	○	<i>c</i>
2			○			○		<i>d</i>
2			○		○	×	○	<i>e</i>
0	○	○	○	○	○	○	○	<i>f</i>
2			○		○	×	○	<i>g</i>
1)	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○	×	○	×	○	<i>a</i>
3			○	○	×	○	×	<i>b</i>
1	○	○	○	○	○	×	○	<i>c</i>
2	○	○	○	○	×	○	×	<i>d</i>
2	×	○	○	○	○	×	○	<i>e</i>
0	○	○	○	○	○	○	○	<i>f</i>
2	×	○	○	○	○	×	○	<i>g</i>
2)	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	

- (1) Da in Spalte F genau 4 Felder anzukreuzen sind, können das nur folgende Felder sein:  $aF, cF, eF, gF$ .
- (2) Als Nachbarfelder bleiben somit frei:  $aE, aG, cE, cG, eE, eG, gE, gG, bF, dF$  und  $fF$ .
- (3) Da in Spalte C und in Zeile f keine Felder anzukreuzen sind, bleiben frei:  $aC, bC, cC, dC, eC, fC, gC, fA, fB, fD, fE$  und  $fG$ .
- (4) Da in Zeile c bereit ein Feld angekreuzt ist, bleiben die übrigen frei, also (siehe Abbildung 1):  $cA, cB$  und  $cD$ .
- (5) In Spalte E sind nur noch zwei Felder frei; demnach sind anzukreuzen:  $bE$  und  $dE$ .
- (6) Als Nachbarfelder dazu bleiben frei:  $bD$  und  $dD$ .
- (7) In Spalte G sind nur noch zwei Felder frei, es sind demnach anzukreuzen:  $bG$  und  $dG$ .
- (8) In Zeile a sind nicht zwei Felder anzukreuzen, eines davon muss sein:  $ad$ .
- (9) In Spalte D ist bereits ein Feld angekreuzt, also bleiben frei:  $eD$  und  $gD$ .
- (10) In Zeile d sind zwei Felder angekreuzt, die restlichen bleiben frei, d.h.:  $dA$  und  $dB$ .
- (11) In Spalte A sind anzukreuzen:  $gA$  und  $eA$  damit bleiben als Nachbarfelder frei (siehe Abbildung 2):  $gB$  und  $eB$ .
- (12) Für die übriggebliebenen Felder bestehen genau zwei Möglichkeiten:  
Es werden angekreuzt  $aA$  und  $bB$  oder  $bA$  und  $aB$ . Damit gibt es genau zwei Verteilungen der geforderten Art.

	3	1	0	1	2	4	2	
3	×			×		×		<i>a</i>
3		×			×		×	<i>b</i>
1						×		<i>c</i>
2					×		×	<i>d</i>
2	×					×		<i>e</i>
0								<i>f</i>
2	×					×		<i>g</i>
1)	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	

	3	1	0	1	2	4	2	
3		×		×		×		<i>a</i>
3	×				×		×	<i>b</i>
1						×		<i>c</i>
2					×		×	<i>d</i>
2	×					×		<i>e</i>
0								<i>f</i>
2	×					×		<i>g</i>
2)	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	

**Aufgabe 3 - 190913**

Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist  $n$  die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen  $1, \dots, n$  zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

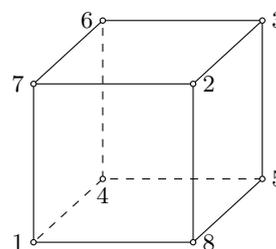
Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Bei Tetraeder gehört jede Ecke genau drei Seitenflächen an, beim Oktaeder genau vier. Wenn es für diese Körper eine Zuordnung der genannten Art gäbe, so müsste folglich beim Tetraeder das Dreifache, beim Oktaeder das Vierfache der Summe aller vorkommenden Zahlen  $1, \dots, n$  durch die Anzahl der Seitenflächen teilbar sein.

Für das Tetraeder ist diese Bedingung nicht erfüllt; denn die Anzahl der Ecken ist  $n = 4$ , die Summe der Zahlen von 1 bis 4 ist 10, und das Dreifache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 4 der Seitenflächen teilbar.

Auch für das Oktaeder ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Anzahl der Ecken ist  $n = 6$ , die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, und das Vierfache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 8 der Seitenflächen teilbar.

Damit sind die für das Tetraeder und Oktaeder verlangten Beweise geführt. Die Aussage, dass für den Würfel eine Zuordnung der genannten Art möglich ist, kann durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden, wie es etwa die Abbildung zeigt.

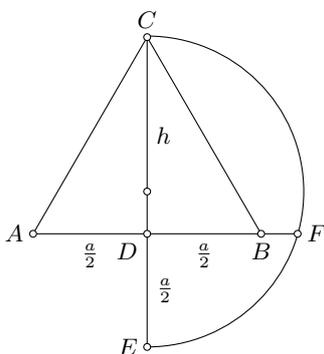


#### Aufgabe 4 - 190914

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$ .

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck  $ABC$  hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck  $ABC$  flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.



I. Konstruktionsbeschreibung:

- (1) Man fällt das Lot  $CD$  von  $C$  auf  $AB$ .
- (2) Man verlängert dieses Lot über  $D$  hinaus bis zu einem Punkt  $E$ , für den  $DE = AD$  gilt.
- (3) Man konstruiert einen Halbkreis über  $CD$ . Er schneidet die Gerade durch  $A$  und  $B$  in einem Punkt  $F$ . Die Strecke  $DF$  hat die verlangte Eigenschaft.

II. Beweis, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge  $DF$  denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck  $ABC$  (1):

Es sei  $AB = a$ ,  $CD = h$ . Nach Konstruktionsschritt (1) ist  $CD$  eine Höhe und folglich auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck  $ABC$ , also gilt  $AD = \frac{a}{2}$ . Nach (2) gilt daher ebenfalls  $DE = \frac{a}{2}$ .

Nach (3) und nach dem Satz von Thales ist das Dreieck  $DEF$  bei  $F$  rechtwinklig; in diesem Dreieck ist  $FD$  nach (1) und (2) die Höhe auf der Hypotenuse. Folglich gilt nach dem Höhensatz

$$DF^2 = \frac{a}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge  $DF$  ist mithin gleich dem Flächeninhalt  $\frac{a}{2} \cdot h$  des Dreiecks  $ABC$ , w.z.b.w.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen von [5]

**2.21.2 II. Runde 1979, Klasse 9****Aufgabe 1 - 190921**

An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:

- (1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
- (2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
- (3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
- (4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Wir kürzen LKW mit "L" und PKW mit "P" ab, sodass z.B. "PPLP" einer Reihenfolge von zwei PKW, einem LKW und einem PKW entspricht.

Nach (2) muss LPL Teil der Fahrzeugkolonne sein. Wäre der vordere L nicht das erste Fahrzeug, so müsste nach (1) ein P vor ihm gestanden haben, analog hinter dem zweiten L, falls dieser nicht das letzte Fahrzeug ist. Dann erhielte man die Wagenfolge PLPLP, welche (3) widerspricht. Also muss der erste L der erste Wagen oder der zweite L der letzte Wagen sein, wobei nicht beides zugleich geht.

1. Fall: Sei der erste L das erste Fahrzeug, sodass die Fahrzeugkolonne mit LPLP beginnt. Da nach (4) die Wagenfolge PPP vorkommen muss, kann diese nur noch an den Positionen 4-6 oder 5-7 liegen. Letzteres ist aber unmöglich, da sonst 4 P an den Positionen 4-7 hintereinander stünden, was (4) widerspricht. Also lautet die Wagenfolge LPLPPP; wobei aus analogem Grund auf Position 7 kein P stehen kann.

2. Fall: Sei der zweite L das letzte Fahrzeug. Dann folgt auf analoge Weise zum 1. Fall (diesmal von hinten nach vorn argumentiert), dass die Wagenfolge LPPPPLPL lauten muss.

Beide Reihenfolgen erfüllen offenbar alle Kriterien, sind also genau die gesuchten Lösungen.

**Aufgabe 2 - 190922**

Die Zahlen in einem Zahlentripel  $(p, q, r)$  seien genau dann "Primzahltrillinge" genannt, wenn jede der drei Zahlen  $p, q, r$  eine Primzahl ist und wenn  $p, q, r$  in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.

Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel  $(p, q, r)$  gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Es ist von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer genau eine durch 3 teilbar. Da es alles Primzahlen sein sollen, muss also eine der drei Zahlen 3 sein. Da  $3 - 2 = 1$  keine Primzahl ist, muss der kleinste Wert  $p$  gleich 3 sein, sodass sich das Tripel  $(3, 5, 7)$  ergibt, was offenbar alle Voraussetzungen erfüllt, also der einzige "Primzahltrilling" nach Definition der Aufgabenstellung ist,  $\square$ .

Bemerkung: So wenig sinnvoll es wäre, "Primzahlzwilling" als "direkt aufeinanderfolgende Primzahlen" zu definieren (weil es dann nur den einen "Primzahlzwilling"  $(2, 3)$  gäbe), so ist es auch nicht sinnvoll, den Begriff "Primzahltrilling" wie in der Aufgabenstellung zu definieren.

Im allgemeinen fordert man, dass  $p < q < r$  alle Primzahlen mit  $r = p + 6$  sind. Dabei wählt man den Wert 6 analog wie den Wert 2 bei der Definition von Primzahlzwillingen  $(p, q)$  mit  $q = p + 2$ , weil dies der kleinste Wert ist, für den nicht per se aufgrund Teilbarkeit durch kleine Zahlen ausgeschlossen ist, dass es mehr als ein solches Tupel gibt.

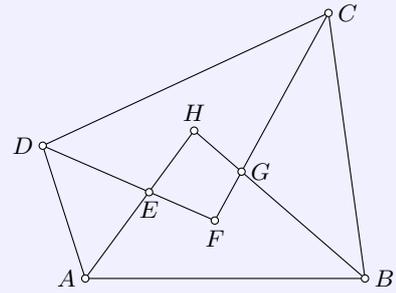
Ob es unendlich viele Primzahltrillinge nach dieser geeigneteren Definition gibt, ist bisher genauso unklar wie die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

**Aufgabe 3 - 190923**

Von einem konvexen Viereck  $ABCD$  werde folgendes vorausgesetzt:

Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte  $E, F, G, H$ , die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck  $EFGH$  die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel  $180^\circ$  beträgt!



Es seien die Innenwinkel des Vierecks  $ABCD$  wie üblich mit  $\alpha$  bei  $A$  bis  $\delta$  bei  $D$  bezeichnet. Es ist  $\angle FEH = \angle DEA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$  und analog  $\angle HGF = \angle BGC = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ , also

$$\angle FEH + \angle HGF = 360^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ \quad \square.$$

**Aufgabe 4 - 190924**

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $x$ , für die folgendes gilt!

- (1)  $x$  ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (2) Vergrößert man  $x$  um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
- (3) Vermindert man  $x$  um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Es sei nach (1)  $x = n^2$  und nach (2)  $x + 24 = n^2 + 24 = (n + s)^2 = n^2 + 2sn + s^2$  mit positiven ganzen Zahlen  $n$  und  $s$ . Es folgt  $24 = 2sn + s^2$  und  $s^2 = 24 - 2sn = 2(12 - sn)$ , sodass  $s^2$  und damit  $s$  gerade sowie  $s \geq 2$  ist.

Weiterhin ist nach (3)  $x \geq 24$ , also  $n \geq 5$  und damit  $s^2 \leq 24 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4$ , also auch  $s \leq 2$ . Man erhält, dass  $s = 2$  und damit  $n = \frac{24 - s^2}{2s} = \frac{20}{4} = 5$  sein muss. Es ist  $x = n^2 = 25$  also die einzig mögliche Lösung.

Tatsächlich ist nicht nur  $x = 25 = 5^2$  das Quadrat einer natürlichen Zahl (1), sondern auch  $x^2 + 24 = 59 = 7^2$  (2) und  $x^2 - 24 = 1 = 1^2$  (3), sodass  $x = 25$  tatsächlich auch Lösung (und damit die einzige) ist.

*Aufgaben der II. Runde 1979 gelöst von cyrix*

**2.21.3 III. Runde 1979, Klasse 9****Aufgabe 1 - 190931**

Beim Lösen einer Gleichung der Form  $ax - 6 = bx - 4$  mit gegebenen natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  stellt Matthias fest:

- (1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl  $x$  als Lösung.
- (2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung  $x$  einsetzt.

Ermitteln Sie alle Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Die Gleichung ist äquivalent zu  $(a - b)x = 2$ . Weiterhin ist nach (1)  $x \in \mathbb{N}$ , also  $x \geq 0$ , sodass auch  $a - b \geq 0$  und also  $a - b \in \mathbb{N}$  gilt. Insbesondere ist also  $x$  ein Teiler von 2, d.h.,  $x = 1$  oder  $x = 2$ .

1. Fall:  $x = 1$ . Dann ist nach (2)  $a - 6 = b - 4 = 1$ , also  $a = 7$  und  $b = 5$ . Die Probe bestätigt, dass das Paar  $(a, b) = (7, 5)$  beide Eigenschaften erfüllt.

2. Fall:  $x = 2$ . Dann ist nach (2)  $2a - 6 = 2b - 4 = 2$ , also  $a = 4$  und  $b = 3$ , was wieder durch die Probe bestätigt wird. Das zweite Paar  $(a, b)$ , was die Aufgabenstellung erfüllt, lautet also  $(4, 3)$ , und weitere gibt es nicht.

**Aufgabe 2 - 190932**

Gegeben sei ein Rechteck  $ABCD$ , für das  $AB = a\sqrt{2}$  und  $BC = a$  gilt. Es sei  $F$  der Mittelpunkt der Seite  $CD$ .

Beweisen Sie, dass die Strecken  $AC$  und  $BF$  senkrecht zueinander verlaufen!

2 Geraden verlaufen orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen  $-1$  ergibt. Sei  $A$  der Ursprung  $(0, 0)$ . Dann ist  $B(a\sqrt{2}, 0)$ ,  $C(a\sqrt{2}, a)$  und  $F(\frac{a}{2}\sqrt{2}, a)$ .

Sei nun  $g$  die proportionale Funktion durch  $A$  und  $C$ . Diese hat offensichtlich die Steigung  $m_1 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sei  $f$  die Gerade durch  $B$  und  $F$ . Für die Steigung gilt

$$m_2 = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2} - a\sqrt{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Es gilt somit  $m_1 \cdot m_2 = -1$ . qed.

**Aufgabe 3 - 190933**

Von  $n$  Kartons ( $n$  eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:

Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls  $n \geq 2$  ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls  $n \geq 3$  ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls  $n \geq 4$  ist); ...; die ersten  $n - 1$  Kartons können nebeneinander in den  $n$ -ten gelegt werden.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige  $n$  Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).

(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.

(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  sind die Forderungen leicht erfüllbar: Man stelle den einen bzw. die zwei Kartons leer nebeneinander. Sei ab nun  $n > 2$  und es existiere eine Anordnung der ersten  $n - 2$  Kartons, die den Anforderungen genügt. Wir unterscheiden, ob in dieser Anordnung ein oder zwei äußere Kartons, die in keinem anderen enthalten sind, existieren.

1. Fall: Die ersten  $n - 2$  Kartons sind so verpackt, dass nur ein äußerer Karton existiert. Dann packe man den  $n - 2$ -ten und den  $n - 1$ -ten Karton nebeneinander in den  $n$ -ten. Im  $n - 1$ -ten sind dann 0 und im  $n - 2$ -ten eine gerade Anzahl an Kartons, also auch im  $n$ -ten. Die Forderungen (2) und (3) sind offensichtlich erfüllt.

2. Fall: Die ersten  $n - 2$  Kartons sind so verpackt, dass zwei äußere Kartons existieren. Dann packe man diese beiden in den  $n - 1$ -ten Karton und lege daneben den leeren  $n$ -ten Karton. Im  $n - 1$ -ten Karton sind dann die gerade Anzahl an Kartons in den beiden äußeren Kartons der Anordnung der ersten  $n - 2$  sowie diese beiden äußeren Kartons, also auch eine gerade Zahl; im  $n$ -ten Karton ist keiner. Die Bedingungen (2) und (3) sind nach Konstruktion offensichtlich auch erfüllt.

Damit gibt es in jedem Fall auch mit  $n$  Kartons eine Anordnung, die der Aufgabenstellung genügt,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 190934

a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl  $n \geq 3$  im Zahlensystem mit der Basis  $n$  eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

a) Es seien  $a - 1, a, a + 1$  die drei aufeinanderfolgenden Ziffern der dreistelligen Zahl  $p$  in irgendeiner Reihenfolge. Dann ist die Quersumme von  $p$  gleich  $(a - 1) + a + (a + 1) = 3a$  durch 3 teilbar, also auch  $p$ , sodass  $p$  keine Primzahl sein kann.

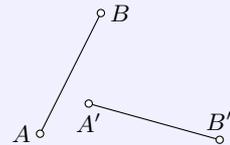
b) Es ist mit  $n = 8$  die Zahl  $123_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 3 = 83$  eine Primzahl.

#### Aufgabe 5 - 190935

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken  $AB$  und  $A'B'$  gegeben. Gesucht ist ein Punkt  $Z$  der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Drehung um  $Z$ , die  $A$  in  $A'$  und  $B$  in  $B'$  überführt.

Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes  $Z$  (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt  $Z$  existiert!



Fallen die beiden Punkte  $A$  und  $A'$  zusammen, so gilt offenbar  $Z = A$ , da bei einer Drehung (um einen von Vielfachen von  $360^\circ$  verschiedenen Drehwinkel) das Zentrum der einzige Fixpunkt ist. (Ansonsten bleiben alle Punkte fix, was genau dann der Fall wäre, wenn auch  $B = B'$  gilt. Dann kann man jeden Punkt der Ebene als  $Z$  und den Drehwinkel  $0^\circ$  wählen.) Analog gilt für  $B = B'$  und  $A \neq A'$ , dass man ausschließlich  $Z = B$  als Drehzentrum wählen kann. In beiden Fällen (die nicht beide Punkte auf sich selbst abbilden) ist dann nicht nur das Drehzentrum  $Z$ , sondern auch der Drehwinkel zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  eindeutig bestimmt.

Sei ab nun  $A \neq A'$  und  $B \neq B'$ , sodass die jeweiligen Geraden  $AA'$  und  $BB'$  auch existieren.

Wenn es einen solchen Punkt  $Z$  gibt, dann muss  $|AZ| = |A'Z|$  und  $|BZ| = |B'Z|$  gelten, sodass  $Z$  auf den Mittelsenkrechten von  $AA'$  und  $BB'$  liegen muss. Sind diese Mittelsenkrechten nicht parallel (was genau dann der Fall ist, wenn die Geraden  $AA'$  und  $BB'$  nicht parallel sind), dann ist dieser Punkt  $Z$  also eindeutig bestimmt.

In dem Fall sind die Dreiecke  $\triangle ABZ$  und  $\triangle A'B'Z$  nach dem Kongruenzsatz sss zueinander kongruent. Es ist also  $\angle AZB = \angle A'ZB'$ , also (ggf. mit vorzeichenbehafteten Winkeln zu lesen)  $\angle AZA' = \angle AZB + \angle BZA' = \angle A'ZB' + \angle BZA' = \angle BZB'$ , sodass bei einer Drehung um  $Z$  mit Drehwinkel  $\angle AZA'$  nicht nur  $A$  auf  $A'$ , sondern auch  $B$  auf  $B'$  abgebildet wird. Auch hier sind wieder Drehzentrum und Drehwinkel eindeutig bestimmt.

Sind dagegen die Mittelsenkrechten von  $AA'$  und  $BB'$  parallel, so kann es einen solchen Punkt  $Z$  nur dann geben, wenn diese beiden Mittelsenkrechten die gleiche Gerade bilden. Andernfalls gibt es keinen Punkt  $Z$ , der  $|AZ| = |A'Z|$  und  $|BZ| = |B'Z|$  erfüllt, was für die Eigenschaft, Drehzentrum zu sein, notwendig ist.

Seien also nun diese Mittelsenkrechten von  $AA'$  und  $BB'$  identisch und mit  $m$  bezeichnet. Dann muss jedes Drehzentrum  $Z$  auf  $m$  liegen. Sei  $Z$  ein solches Drehzentrum. Dann gilt  $\angle AZA' = \angle BZB'$ , sodass die gleichschenkligen Dreiecke  $\triangle AA'Z$  und  $\triangle BB'Z$  in ihren Nicht-Basiswinkeln übereinstimmen, also zueinander ähnlich sind. Demzufolge stimmen auch die zugehörigen Winkel  $\angle ZAA'$  und  $\angle ZBB'$  überein.

Da die beiden Schenkel  $AA'$  und  $BB'$  zueinander parallel sind, müssen es die entsprechend zweiten Schenkel der Winkel  $\angle ZAA' = \angle ZBB'$  auch sein, was  $ZA \parallel ZB$  nach sich zieht, sodass  $Z$  auch auf der Geraden  $AB$  liegen muss. Ist aber  $AB$  parallel zu und verschieden von  $m$ , gibt es keinen solchen Schnittpunkt und damit auch kein Drehzentrum.

Andernfalls ist  $Z$  nun als Schnitt zweier Geraden  $m$  und  $AB$  eindeutig bestimmt, da  $A$  nicht auf  $m$ , der Mittelsenkrechten von  $AA'$  liegen kann, da wir  $A \neq A'$  vorausgesetzt haben. Da die Spiegelung an  $M$   $A$  in  $A'$  und  $B$  in  $B'$  überführt, ist der Schnittpunkt  $Z$  von  $m$  und  $AB$  auch der von  $m$  und  $A'B'$ , sodass auch  $Z$  auf der Geraden  $A'B'$  liegt und damit  $\angle AZA' = \angle BZB'$  gilt, sodass tatsächlich eine Drehung um  $Z$  mit diesem Winkel existiert, welche  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  abbildet.

### Aufgabe 6 - 190936

Für geeignete natürliche Zahlen  $n$  gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit  $n$  Ecken und weniger als  $n$  Flächen. Zum Beispiel ist für  $n = 8$  ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.

Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl  $N$  die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl  $n \geq N$  einen ebenflächig begrenzten Körper mit  $n$  Ecken gibt, der von weniger als  $n$  ebenen Flächen begrenzt wird!

Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $N$  mit dieser Eigenschaft!

Sei  $m \geq 3$  eine natürliche Zahl. Dann hat das gerade Prisma, dessen Grund- und Deckfläche ein regelmäßiges  $m$ -Eck ist, genau  $n = 2m$  Eckpunkte und besitzt  $m + 2 < m + m = n$  Seitenflächen. Für gerade Zahlen  $n \geq 6$  gibt es also solche Körper.

Setzt man auf eine der rechteckigen Seitenflächen eines solchen Prismas eine vierseitige Pyramide mit entsprechender Grundfläche auf, so erhöht sich die Eckenanzahl des nun neuen Körpers auf  $2m + 1$  (die Spitze der Pyramide ist hinzugekommen) und die Anzahl der Seitenflächenanzahl auf  $(m + 2) - 1 + 4 = m + 5$  (die eine Seitenfläche liegt als Grundfläche der Pyramide nun im Inneren des neuen Körpers, verschwindet also, während durch die Pyramide 4 neue Seitenflächen hinzukommen), was für  $m \geq 5$  noch immer kleiner ist als die Eckpunktzahl  $n = 2n + 1$ . Damit gibt es also auch für ungerade  $n \geq 11$  jeweils solche Körper.

Für  $n = 9$  betrachte man einen geraden dreiseitigen Pyramidenstumpf. Dieser besitzt sowohl in Grund- als auch Deckfläche je 3 Punkte, insgesamt also 6, und neben Grund- und Deckfläche noch 3 weitere Seitenflächen, insgesamt also 5. Verklebt man nun zwei kongruente solche Pyramidenstümpfe an ihren Grundflächen, erhöht sich die Eckpunktzahl des neuen Körpers auf  $6 + 3 = 9$  und die Anzahl der Seitenflächen auf  $5 - 1 + 3 + 1 = 8$ . Also existiert auch für  $n = 9$  ein solcher Körper.

Für  $n = 7$  betrachte man ein regelmäßiges Fünfeck  $ABCDE$  sowie die durch Verschiebung der Höhe von  $A$  auf die gegenüberliegende Seite  $CD$  senkrecht zur Ebene des Fünfecks entstehenden Strecke  $PQ$ . Verbindet man die Punkte  $C$  und  $D$  mit  $Q$  sowie  $A, B$  und  $E$  mit  $P$ , entsteht ein ebenflächig begrenzter Körper mit den 7 Eckpunkten  $A, B, C, D, E, P$  und  $Q$  sowie den Flächen  $ABCDE, CDQ, BCQP, EDQP, ABP$  und  $AEP$ ; also mit 6 Seitenflächen. Damit existiert auch für  $n = 7$  ein solcher Körper.

Also kann  $N = 6$  gewählt werden, da für jedes  $n \geq 6$  ein entsprechender Körper mit  $n$  Eckpunkten und weniger Seitenflächen existiert.

Man kann aber nicht  $N < 6$  wählen, da kein solcher Körper mit  $e := n = 5$  Eckpunkten existiert:

Da von jedem dieser Eckpunkte mindestens 3 Kanten ausgehen, muss die Summe dieser Anzahlen also mindestens 15 betragen. Da dabei jede Kante doppelt gezählt wird (sie verbindet ja genau zwei Eckpunkte), muss es also mindestens  $k \geq \frac{15}{2}$ , und damit auch  $k \geq 8$ , Kanten in dem Körper geben.

Sei  $f$  die Anzahl von dessen Flächen. Dann gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz  $e - k + f = 2$ . Mit  $e = 5$  und  $k \geq 8$  folgt somit  $f = 2 - e + k \geq 2 - 5 + 8 = 5$ , sodass es keinen solchen Körper mit 5 Eckpunkten aber weniger als 5 Flächen geben kann.

Also ist tatsächlich  $N = 6$  der kleinste solche Wert.

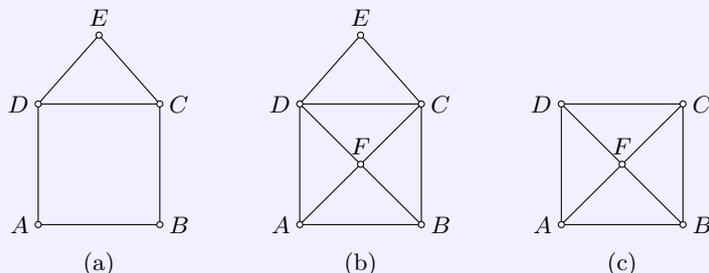
*Aufgaben der III. Runde 1979 gelöst von cyrix*

## 2.22 XX. Olympiade 1980

## 2.22.1 I. Runde 1980, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 200911**

Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



„In einem Zuge“ soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Die Figur in Abbildung (a) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B.  $D, A, B, C, D, E, C$ .

Die Figur in Abbildung (b) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B.  $A, F, C, B, F, D, E, C, D, A, B$

Die Figur in Abbildung (c) kann nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Begründung: Um die Bedingung zu erfüllen, müsste es für jeden mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt zu jeder Strecke, die zu ihm hinführt auch eine solche geben, die von ihm wegführt, damit man diesen Punkt, den man erreicht hat, auch wieder verlassen kann. Ausgenommen davon wäre lediglich Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung.

Das heißt mit Ausnahme höchstens zweier Punkte müsste für jeden bezeichneten Punkt gelten, dass die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Linien gerade ist. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, da in den Punkten  $A, B, C$  und  $D$  jeweils 3 Linien zusammentreffen.

**Aufgabe 2 - 200912**

Zwei Personen,  $A$  und  $B$ , spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl  $Z$  vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl  $Z$  zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl  $Z = 12$  lautete, ergab sich:

Die von  $A$  gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von  $B$  gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler  $A$  als auch der Spieler  $B$  einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

$A$  hatte einen der Würfe  $1, 2, 3, 4$ ;  $2, 3, 4, 5$ ;  $3, 4, 5, 6$ ;

$B$  hatte einen der Würfe 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2; ...; 6, 6, 6, 6 erhalten. Die Zahl  $Z = 12$  kann aus diesen Würfeln in der verlangten Weise z.B. folgendermaßen gebildet werden:

$$\begin{array}{l|l|l} 1 \cdot 2^3 + 4 = 12 & 2 \cdot (4 + 5 - 3) = 12 & 6 \cdot (3 + 4 - 5) = 12 \\ 1 \cdot 11 + 1 = 12 & 2 \cdot (2 + 2 + 2) = 12 & 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \\ 4 \cdot (4 - 4 : 4) = 12 & (55 + 5) : 5 = 12 & 6 + 6 + 6 - 6 = 12 \end{array}$$

### Aufgabe 3 - 200913

- a) Kann der Bruch  $\frac{1711}{3421}$  durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?  
 b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  der Zähler und der Nenner des Bruches  $\frac{14n+1}{28n+5}$  zueinander teilerfremd sind!

*Hinweis:* Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

a) Wenn der Bruch  $\frac{1711}{3421}$  durch eine natürliche Zahl  $t$  gekürzt werden kann, dann sind die Zahlen 1711 und 3421 durch  $t$  teilbar.

Mithin ist ebenfalls  $2 \cdot 1711 = 3422$  durch  $t$  teilbar und daher auch die Differenz  $3422 - 3421 = 1$ . Die einzige natürliche Zahl, durch die 1 teilbar ist, ist aber  $t = 1$ .

Daher kann der Bruch  $\frac{1711}{3421}$  durch keine natürliche Zahl gekürzt werden, die von 1 verschieden ist.

b) Ist eine natürliche Zahl  $t$  ein gemeinsamer Teiler von  $14n + 3$  und  $28n + 5$ , so ist  $t$  ebenfalls ein Teiler von  $2 \cdot (14n + 3) = 28n + 6$  und daher auch ein Teiler der Differenz  $(28n + 6) - (28n + 5) = 1$ . Also folgt wieder, dass  $t = 1$  sein muss

Somit haben der Zähler und der Nenner des Bruches  $\frac{14n+3}{28n+5}$  den größten gemeinsamen Teiler 1, d.h. sie sind teilerfremd zueinander, w.z.b.w.

### Aufgabe 4 - 200914

Gegeben seien ein Kreis  $k_1$  mit dem Mittelpunkt  $M_1$  und dem Radius  $r_1 = 4,5$  cm sowie ein Kreis  $k_2$  mit dem Mittelpunkt  $M_2$  und dem Radius  $r_2 = 2,5$  cm. Es sei  $\overline{M_1M_2} = 7$  cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise  $k_1$  und  $k_2$ ! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

a) Da laut Aufgabe  $M_1M_2 = r_1 + r_2$  gilt, berühren sich beide Kreise von außen. Daher haben sie genau eine innere gemeinsame Tangente  $s$ . Diese geht durch den Berührungspunkt  $A$  der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  und steht senkrecht auf  $M_1M_2$ . Daraus ergibt sich ihre Konstruktion.

- (I) Es sei nun  $t$  eine gemeinsame äußere Tangente der Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen seien  $T_1$  bzw.  $T_2$ . Die Parallele zu  $t$  durch  $M_2$  schneidet  $M_1T_1$  in einem Punkt, der  $F$  genannt sei. Dann ist  $T_1T_2M_2F$  ein Rechteck, es gilt  $M_1T_1 = r_1$  sowie  $M_2T_2 = r_2$ , also  $M_1F = r_1 - r_2$ .

Der Punkt  $F$  liegt daher erstens auf dem Kreise um  $M_1$  mit  $r_1 - r_2$  als Radius und wegen  $\angle M_1FM_2 = 90^\circ$  zweitens auf einem der Halbkreise über  $M_1M_2$ .

- (II) Daraus ergibt sich folgende Konstruktion für eine äußere gemeinsame Tangente der Kreise  $k_1$  und  $k_2$ :

- (1) Man konstruiere den Kreis um  $M_1$  mit  $r_1 - r_2$  als Radius.
- (2) Man konstruiert einen Halbkreis über  $M_1M_2$ . Sein Schnittpunkt mit dem in (1) konstruierten Kreis sei  $F$  genannt.
- (3) Man zieht den Strahl aus  $M_1$  durch  $F$ . Sein Schnittpunkt mit dem Kreis  $k_1$  sei  $T_1$  genannt.
- (4) Man zieht die Parallele  $t$  zu  $M_2$  durch  $T_1$ .

- (III) Beweis, dass jede so konstruierte Gerade  $t$  Tangente an  $k_1$  und  $k_2$  ist:

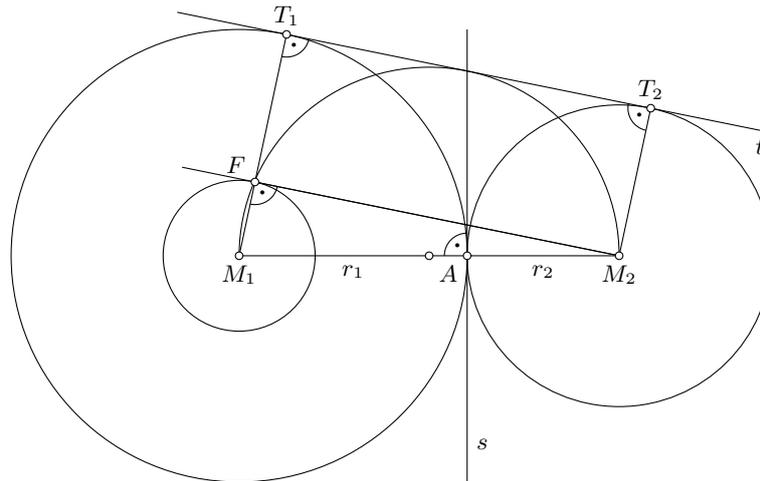
Es sei  $T_2$  der Schnittpunkt der Parallelen zu  $FT_1$  durch  $M_2$  mit  $t$ . Laut Konstruktion ist  $t$  parallel

zu  $FM_2$ . Folglich gilt  $\angle M_1FM_2 = \angle FT_1T_2 = 90^\circ$  (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Ferner gilt  $\angle FT_1T_2 + \angle M_2T_2T_1 = 180^\circ$  (als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen), also  $\angle M_2T_2T_1 = 180^\circ - \angle FT_1T_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Mithin ist  $FT_1T_2M_2$  eine Rechteck, und es folgt  $FT_1 = M_2T_2 = r_2$ .

Daher ist  $t$  Tangente an  $k_1$  und  $k_2$ .

- (IV) In Konstruktionsschritt (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten für die Konstruktion des Halbkreises. Alle anderen Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar. Also gibt es für jeden der beiden Halbkreise über  $M_1M_2$  genau eine Tangente  $t$ , insgesamt also genau zwei gemeinsame äußere Tangenten von  $k_1$  und  $k_2$ .



Lösungen der I. Runde 1980 übernommen von [5]

## 2.22.2 II. Runde 1980, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 200921**

Ermitteln Sie die größte Primzahl  $p$ , für die ein Tripel  $(a, b, c)$  von natürlichen Zahlen  $a, b$  und  $c$  so existiert, dass  $(a+p)(b+p)(c+p) = 1980$  gilt!

Ermitteln Sie zu dieser Primzahl  $p$  alle verschiedenen zugehörigen Tripel  $(a, b, c)$  mit der genannten Eigenschaft!

Bemerkung: In dieser Lösung wird die Menge der natürlichen Zahlen mit  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  angenommen, wie es die Aufgabe vermutlich voraussetzt.

Es sei o.B.d.A.  $a \leq b \leq c$  und damit auch  $a+p \leq b+p \leq c+p$ .

Es wird  $p$  maximal, wenn auch  $a+p$  seinen größtmöglichen Wert annimmt. Wegen  $13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 > 1980$  muss dann  $a+p < 13$ , also  $a+p \leq 12$  gelten. Es ist  $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ , sodass für  $a+p = 12 = 2^2 \cdot 3$  auch  $(b+p)(c+p) = 3 \cdot 5 \cdot 11$ . Eine Zerlegung dieses Produkts in zwei Faktoren besitzt aber immer mindestens einen Faktor, der höchstens 11 beträgt, was im Widerspruch dazu steht, dass  $a+p$  den kleinsten Wert der drei Faktoren  $a+p, b+p, c+p$  annimmt. Also muss sogar  $a+p \leq 11$  sein.

Ist  $a+p = 11$ , so verbleibt  $(b+p)(c+p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ , was sich etwa in  $b+p = 2^2 \cdot 3 = 12 \geq a+p$  und  $c+p = 3 \cdot 5 = 15 \geq a+p$  zerlegen lässt, sodass  $p$  maximal 11 gewählt werden kann.

Wählt man das  $p$  maximal, also  $p = 11$ , so ist also – unter der weiterhin angenommenen Sortierung der Variablen  $a, b$  und  $c - a = 0$  und  $(b+p)(c+p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Dann ist genau einer der beiden Faktoren  $b+p$  bzw.  $c+p$  durch 5 teilbar.

Ist dieser auch durch 3 teilbar, so verbleiben für den anderen Faktor höchstens die Faktoren  $2^2 \cdot 3 = 12$ . Also darf der durch 5 teilbare Faktor neben dem einen Faktor 3 keinen weiteren (und auch keinen Faktor 2) enthalten, da sonst der andere Faktor ein echter Teiler von 12, also höchstens 6, wäre, was im Widerspruch zu  $a+p \leq b+p \leq c+p$  steht.

Demzufolge gibt es in diesem Fall nur die eine Zerlegung in  $12 \cdot 15$ , sodass aufgrund der Anordnung  $b+p = 12$  und  $c+p = 15$ , also  $(a, b, c) = (0, 1, 4)$  gilt.

Ist der durch 5 teilbare Faktor nicht durch 3, aber durch 2 teilbar, so muss er wegen  $5 \cdot 2 = 10 < 11$  auch durch den zweiten Faktor 2 teilbar sein. Dann ergibt sich aber für den zweiten Faktor, dass dieser höchstens  $3^2 = 9$ , also kleiner als  $a+p = 11$  ist, was einen Widerspruch darstellt. Ein solcher ergibt sich auch, wenn der durch 5 teilbare Faktor weder durch 2 noch 3 teilbar ist, da er dann genau 5 beträgt und  $5 < 11$  ist.

Also gibt es unter der Zusatzannahme  $a \leq b \leq c$  genau ein Tripel  $(a, b, c)$  für das maximal mögliche  $p = 11$ . Lässt man die Zusatzannahme fallen, ergeben sich alle 6 möglichen Anordnungen dieses einen Tripels als Lösungen:

$$(a, b, c) \in \{(0, 1, 4); (0, 4, 1); (1, 0, 4); (1, 4, 0); (4, 0, 1); (4, 1, 0)\}$$

**Aufgabe 2 - 200922**

a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen  $x$ , die die Ungleichung  $\frac{x+3}{x-1} < 0$  erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!

b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen  $x$ , die diese Ungleichung erfüllen!

a) Setzen wir  $x = 0$  in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage  $\frac{3}{-1} = -3 < 0$ . Setzen wir  $x = -1$  in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage  $\frac{2}{-2} = -1 < 0$ .

b) Es ist  $\frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$ , die Ungleichung also äquivalent zu  $\frac{4}{x-1} < -1$ . Also muss  $x-1$  negativ sein, sodass die Multiplikation mit diesem Term das Relationszeichen dreht und die Ungleichung unter der Einschränkung  $x-1 < 0$ , d.h.,  $x < 1$ , äquivalent ist zu  $4 > -(x-1)$  bzw.  $-4 < x-1$ , d.h.  $x > -3$ . Die Ungleichung wird also genau von allen reellen Zahlen  $x$  mit  $-3 < x < 1$  erfüllt.

**Aufgabe 3 - 200923**

Von zwei Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  seien die Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  gegeben, wobei  $r_1 > r_2$  gelte.

Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in  $P$  und die andere gemeinsame Tangente in  $Q$ .

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus  $r_1$  und  $r_2$  die Länge  $PQ$ !

Es sei  $S$  der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten,  $M_1$  der Mittelpunkt von  $k_1$ ,  $M_2$  der Mittelpunkt von  $k_2$ ,  $B$  ihr Berührungspunkt,  $B_1$  der Berührungspunkt von  $k_1$  mit der Tangenten  $t$ , auf der  $P$  liegt, und  $B_2$  der von  $k_2$  mit der gleichen Tangenten  $t$ .

Dann sind  $M_1B_1$  und  $M_2B_2$  parallel, da sie als Berührungsradien beide senkrecht auf der Tangenten  $t$  stehen. Nach dem Strahlensatz gilt dann  $\frac{|SM_1|}{|SM_2|} = \frac{|M_1B_1|}{|M_2B_2|} = \frac{r_1}{r_2}$ .

Insbesondere ist  $|SM_1| > |SM_2|$ , also, da  $S$ ,  $M_2$ ,  $B$  und  $M_1$  aus Symmetriegründen auf einer Geraden liegen,  $|SM_1| = |SM_2| + |M_2B| + |BM_1| = |SM_2| + r_1 + r_2$ . Setzt man dies in die eben erhaltene Verhältnisgleichung ein, erhält man

$$\frac{|SM_2| + r_1 + r_2}{|SM_2|} = 1 + \frac{r_1 + r_2}{|SM_2|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{also}$$

$$|SM_2| = r_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad |SM_1| = r_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$$

Es ist  $\triangle M_1SB_1$  rechtwinklig bei  $B_1$ , sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|SB_1| = \sqrt{|SM_1|^2 - |M_1B_1|^2} = \sqrt{r_1^2 \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2} - r_1^2} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \sqrt{4r_1r_2} = r_1 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$$

und analog  $|SB_2| = r_2 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$  ergibt. Damit ist

$$|B_1B_2| = |SB_1| - |SB_2| = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2) = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Der Punkt  $P$  liegt auf zwei Tangenten an  $k_1$ , sodass die Tangentenabschnitte  $|PB_1|$  und  $|PB|$  gleich lang sind. Aus gleichem Grund (Tangenten an  $k_2$ ) ist auch  $|PB| = |PB_2|$  und damit  $P$  der Mittelpunkt der Strecke  $B_1B_2$ . Insbesondere ist also  $|PB| = \frac{1}{2}|B_1B_2| = \sqrt{r_1r_2}$ .

Aus Symmetriegründen ist  $|QB| = |PB|$ , und da  $Q$ ,  $B$  und  $P$  nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, ist

$$|PQ| = 2|PB| = 2\sqrt{r_1r_2}$$

**Aufgabe 4 - 200924**

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n \geq 3$ , für die die folgende Aussage gilt!

”Jedes Prisma, das ein konvexes  $n$ -Eck als Grundfläche hat, hat genau  $20n$  Diagonalen.”

b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!

Hinweis: Ein  $n$ -Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  ist.

Als ”Diagonalen” eines Prismas werden alle Strecken zwischen je zwei seiner Eckpunkte bezeichnet, die keine Kante des Prismas sind.

a) Für jeden der  $2n$  Eckpunkte eines Prismas mit konvexem  $n$ -Eck als Grundfläche gilt, dass von ihm Kanten zu genau drei anderen Eckpunkten des Prismas ausgehen. Es ist also Endpunkt von genau  $2n - 3 - 1 = 2n - 4$  Diagonalen. (Von diesem Eckpunkt geht nur keine Diagonale zu den drei Eckpunkten, durch die es mit einer Kante verbunden ist, sowie zu sich selbst, aus.)

Da jede Diagonale genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet, gibt es also in einem solchen Prisma mit einem konvexen  $n$ -Eck als Prisma genau  $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n - 4) = n \cdot (2n - 4)$  Diagonalen. Damit dies genau  $20n$  sind, muss also  $2n - 4 = 20$ , d.h.  $n = 12$  gelten.

Da keine Voraussetzungen über die Form des Prismas gemacht wurde, erfüllen genau alle Prismen, deren Grundfläche ein konvexes 12-Eck ist, die Aussage.

b) Raumdiagonalen seien unter den Diagonalen genau jene, die nicht in einer Seitenfläche des Prismas verlaufen. Das bedeutet, dass diese durch je einen Eckpunkt der Grund- und Deckfläche begrenzt sind, welche aber nicht gemeinsam in einer Seitenfläche des Prismas liegen.

Für jeden der  $n$  Eckpunkte der Grundfläche gilt, dass er mit genau einem der Eckpunkte der Deckfläche durch eine Kante verbunden ist und mit genau zwei weiteren jeweils in einer gemeinsamen Seitenfläche liegt. Also gibt es von diesem Eckpunkt der Grundfläche genau  $n - 3$  ausgehende Raumdiagonalen, sodass es insgesamt  $n \cdot (n - 3)$  Raumdiagonalen gibt, was im konkreten Fall mit  $n = 12$  auf genau  $12 \cdot 9 = 108$  Raumdiagonalen bedeutet.

Die übrigen der  $20n = 240$ , also 132 (bzw. allgemein  $n \cdot (2n - 4) - n \cdot (n - 3) = n \cdot (n - 1)$ ), sind dann die Flächendiagonalen.

*Aufgaben der II. Runde 1980 gelöst von cyrix*

## 2.22.3 III. Runde 1980, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 200931**

In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad 5 \quad 5 \quad : \quad 5 \quad d \quad e \quad = \quad f \quad 5 \quad g \\
 \hline
 h \quad i \quad 5 \\
 \hline
 j \quad k \quad m \quad n \\
 \hline
 p \quad 5 \quad q \quad r \\
 \hline
 s \quad t \quad u \quad v \\
 \hline
 w \quad x \quad y \quad z
 \end{array}$$

Wegen  $5de \geq 500$  und damit  $2 \cdot 5de \geq 1000$ , aber  $0 < hi5 < 1000$  ist  $f = 1$  und  $hi5 = 5de$ , also  $h = 5$ ,  $d = i$  und  $e = 5$ .

Wegen  $500 < 5d5 < 600$  ist  $2500 < 5 \cdot 5d5 < 3000$ , also  $p = 2$ . Damit ist  $5 \cdot 5d5 < 2600$ , d.h.  $5d5 < 520$ , also  $d \in \{0,1\}$ . Außerdem endet  $5 \cdot 5d5$  in der Einerziffer 5, sodass auch  $r = 5$  gilt. Damit ergibt sich insbesondere als Einerziffer der Differenz  $u = 0$ .

Aufgrund des Vorgehens bei der schriftlichen Division muss  $v = 5$  gelten. Damit kein Rest bleibt, muss  $wxyz = stuv$  sein.

Trägt man alle bisher gefundenen Informationen ein, erhält man

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad 5 \quad 5 \quad : \quad 5 \quad d \quad 5 \quad = \quad 1 \quad 5 \quad g \\
 \hline
 5 \quad d \quad 5 \\
 \hline
 j \quad k \quad m \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 5 \quad q \quad 5 \\
 \hline
 s \quad t \quad 0 \quad 5 \\
 \hline
 s \quad t \quad 0 \quad 5
 \end{array}$$

Wäre  $d = 0$ , dann müsste  $st05 = g \cdot 505$  gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu  $s \neq 0$ , da die Zehnerziffer von  $g \cdot 505$  nur für die positive Ziffer  $g = 1$  den Wert 0 hat.

Also muss  $d = 1$  sein. Dann ist  $st05 = g \cdot 515$ , was genau für die Ziffer  $g = 7$  erfüllt ist, denn dann ist  $7 \cdot 515 = 3605$ . Auch ergibt sich  $25q5 = 5 \cdot 515 = 2575$ , also  $q = 7$  und damit  $jkm5 = 2575 + 360 = 2935$  sowie abschließend  $abc = 515 + 293 = 808$ , sodass man die korrekt berechnete und eindeutig bestimmte Divisionsaufgabe

$$\begin{array}{r}
 8 \quad 0 \quad 8 \quad 5 \quad 5 \quad : \quad 5 \quad 1 \quad 5 \quad = \quad 1 \quad 5 \quad 7 \\
 \hline
 5 \quad 1 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 5 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 6 \quad 0 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 6 \quad 0 \quad 5
 \end{array}$$

erhält, wie man leicht nachrechnet,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 2 - 200932**

Es seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen, für die  $a > b > c > d$  sowie  $a + d = b + c$  vorausgesetzt wird. Beweisen Sie, dass dann stets  $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$  gilt!

Wegen  $a > b$  existiert ein  $x > 0$  mit  $a = b + x$ . Aufgrund  $a + d = b + c$  ist dann  $d = c - x$ . Insbesondere ist

$$ad = (b+x)(c-x) = bc - (b-c)x - x^2 < bc \quad \text{also} \quad 2ad < 2bc$$

Wegen  $a + d = b + c$  ist auch  $(a + d)^2 = (b + c)^2$ , also  $a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$ .

Zieht man von dieser Gleichung nun links den kleineren Term  $2ad$  und rechts den größeren  $2bc$  ab, erhält man die Ungleichung  $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ ,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

### Aufgabe 3 - 200933

Von einem Rechteck  $ABCD$  und einem Punkt  $P$  in seinem Innern wird  $PA = \sqrt{2}$  cm,  $PB = \sqrt{3}$  cm,  $PC = \sqrt{5}$  cm vorausgesetzt.

Beweisen Sie, dass die Länge  $PD$  durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Es sei  $a$  die Länge des Lots von  $P$  auf die Seite  $AB$ ,  $b$  die des Lots von  $P$  auf  $BC$ ,  $c$  die des Lots von  $P$  auf  $CD$  und  $d$  die des Lots von  $P$  auf  $DA$ .

Damit bilden jeweils ein Eckpunkt, die Lotfußpunkte auf den von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des Rechtecks und  $P$  ein Quadrat, dessen Diagonalen "Eckpunkt- $P$ " die Längen

$$|AP| = \sqrt{a^2 + b^2}, |BP| = \sqrt{b^2 + c^2}, |CP| = \sqrt{c^2 + d^2}, |DP| = \sqrt{d^2 + a^2}$$

besitzen. Da nach Aufgabenstellung  $|AP|^2 + |BP|^2 = |CP|^2$  gilt, folgt  $a^2 + b^2 + b^2 + c^2 = c^2 + d^2$ , also  $a^2 + 2b^2 = d^2$  und damit

$$|DP| = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2b^2} = \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2)} = \sqrt{2} \cdot |AP| = 2\text{cm}$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

### Aufgabe 4 - 200934

Ermitteln Sie alle Paare  $(a; b)$  natürlicher Zahlen  $a, b$  mit  $a > b$ , für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

- (1) Die Zahl  $a$  ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl  $b$  ebenfalls.
- (2) Vertauscht man die Ziffern von  $a$  miteinander, so erhält man  $b$ .
- (3) Subtrahiert man  $b^2$  von  $a^2$ , so erhält man eine Quadratzahl.

Nach (1) und (2) existieren positive Ziffern  $c > d$  mit  $c, d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ , sodass  $a = 10c + d$  und  $b = 10d + c$  gilt. Dann ist

$$a^2 - b^2 = (100c^2 + 20cd + d^2) - (100d^2 + 20dc + c^2) = 99(c^2 - d^2)$$

eine Quadratzahl, also wegen  $9 = 3^2$  auch  $11(c^2 - d^2) = 11(c - d)(c + d)$ . Da 11 eine Primzahl ist, muss mindestens einer der Faktoren  $(c - d)$  bzw.  $(c + d)$  auch durch 11 teilbar sein, damit in der Primfaktorzerlegung des Produkts die Primzahl 11 nicht nur einmal vorkommt.

Da aber  $0 < c - d \leq 9 - 1 = 8 < 11$  ist, muss  $c + d$  durch 11 teilbar sein. Wegen  $0 < c + d < 10 + 10 = 20 < 22$  muss damit  $c + d = 11$  gelten. Dann ist  $11 \cdot (c - d) \cdot 11 = 11^2 \cdot (c - d)$ , sodass auch  $c - d$  eine Quadratzahl sein muss. Wegen  $0 < c - d \leq 9 - 1 = 8$  kommen also nur 1 und 4 als Quadratzahlen in Frage, sodass sich folgende zwei Fälle ergeben:

1. Fall:  $c - d = 1$ . Dann ist wegen  $c + d = 11$  also  $c = 6$  und  $d = 5$ . Es ergeben sich  $a = 65$  und  $b = 56$ . Tatsächlich ist  $a^2 - b^2 = 65^2 - 56^2 = 4225 - 3136 = 1089 = 33^2$  eine Quadratzahl, sodass  $(a, b) = (65, 56)$  eine Lösung ist.

2. Fall:  $c - d = 4$ . Dann wäre aber wegen  $c + d = 11$  also  $2c = (c + d) + (c - d) = 15$  die Ziffer  $c$  keine natürliche Zahl, was ein Widerspruch ist.

Demzufolge gibt es keine weitere neben der einen angegebenen Lösung.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 5 - 200935**

Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders  $ABCD$  so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge  $a$  des Tetraeders  $ABCD$  den Flächeninhalt  $I$  eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders  $ABCD$  versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  und  $BCD$  begrenzt wird, wobei  $AB = AC = AD = BC = BD = CD$  gilt.

Bei einem regulären Tetraeder sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke gleicher Kantenlänge. Insbesondere betragen alle Innenwinkel auf den Seitenflächen jeweils  $60^\circ$ .

Es seien  $M_{AB}$ ,  $M_{AC}$ ,  $M_{DB}$  und  $M_{DC}$  die Mittelpunkte der Strecken  $AB$ ,  $AC$ ,  $DB$  und  $DC$ . Dann sind die Dreiecke  $\triangle M_{AB}M_{AC}A$ ,  $\triangle M_{DB}M_{DC}D$ ,  $\triangle M_{AB}M_{DB}B$  und  $\triangle M_{AC}M_{DC}C$  allesamt gleichschenkelig, wobei die beiden Schenkel einen Innenwinkel von  $60^\circ$  einschließen, sodass diese Dreiecke sogar alle gleichseitig mit Kantenlänge  $\frac{a}{2}$  sind. Insbesondere ist also

$$|M_{AB}M_{AC}| = |M_{DB}M_{DC}| = |M_{AB}M_{DB}| = |M_{AC}M_{DC}| = \frac{a}{2}$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes mit Zentrum  $A$  ist  $M_{AB}M_{AC} \parallel BC$  und analog bei Betrachtung mit Zentrum  $D$  ist  $M_{DB}M_{DC} \parallel BC$ , sodass diese beiden Geraden und damit die vier Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Damit ist das Viereck  $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$  eine Raute.

In den gleichseitigen Dreiecken  $\triangle ABC$  und  $\triangle DBC$  fallen die Mittelsenkrechten der Strecke  $BC$  mit den Höhen von  $A$  bzw.  $D$  auf diese zusammen. Damit steht die Gerade  $BC$  senkrecht auf der Ebene  $\epsilon$ , die durch  $A$ ,  $D$  und den Mittelpunkt  $M_{BC}$  von  $BC$  verlaufe, sodass bei der Spiegelung an  $\epsilon$  wegen  $|BM_{BC}| = |CM_{BC}|$  die Punkte  $B$  und  $C$  jeweils aufeinander abgebildet werden, während  $A$  und  $D$  fix bleiben. Das bedeutet, dass bei dieser Spiegelung die Strecken  $M_{AB}M_{DC}$  und  $M_{AC}M_{DB}$  aufeinander abgebildet werden, also gleich lang sind.

Das bedeutet aber, dass in der Raute  $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$  die Diagonalen gleich lang sind, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Dieses Quadrat hat die Kantenlänge  $\frac{a}{2}$  und also den Flächeninhalt  $I = \frac{1}{4}a^2$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 6 - 200936**

Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $b = 7$  cm,  $\beta = 40^\circ$  und  $h_b = 5$  cm!

Dabei sollen  $b$  die Länge der Seite  $AC$ ,  $\beta$  die Größe des Winkels  $\angle CBA$  und  $h_b$  die Länge der von  $B$  ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck  $ABC$  gibt, das die geforderten Größen  $b$ ,  $\beta$  und  $h_b$  aufweist!

(I) Angenommen, ein Dreieck  $ABC$  erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann liegt der Punkt  $B$  erstens auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  und zweitens auf einer Parallelen zu  $AC$  im Abstand  $h_b$ .

Der Mittelpunkt  $M$  des Umkreises liegt erstens auf der Mittelsenkrechten von  $AC$  und zweitens auf der Senkrechten, die in  $C$  auf der in  $C$  an den Umkreis gelegten Tangente errichtet wird. Auf dieser Tangente bildet derjenige von  $C$  ausgehende Strahl, der nach der Seite von  $AC$  hin verläuft, in der  $B$  nicht liegt, mit dem Strahl aus  $C$  durch  $A$  einen Winkel der Größe  $\beta$ .

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck  $ABC$  nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- (1) Man zeichnet einen Winkel der Größe  $\beta$ , der Scheitelpunkt sei  $C$  genannt.
- (2) Auf dem einen Schenkel des Winkels trägt man von  $C$  aus eine Strecke der Länge  $b$  ab. Der andere Endpunkt der Strecke sei  $A$  genannt.
- (3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels errichtet man in  $C$  die Senkrechte  $s$ .
- (4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte zu  $AC$ . Schneidet sie die Senkrechte  $s$ , so sei  $M$  dieser Schnittpunkt.



## 2.23 XXI. Olympiade 1981

### 2.23.1 I. Runde 1981, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 210911

Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ . Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

- (1) Das Endspiel wird lauten:  $B$  gegen  $C$ .
- (2) Das Endspiel wird nicht lauten:  $A$  gegen  $B$ .
- (3) Das Endspiel wird lauten:  $C$  gegen  $D$ .
- (4) Wenn  $A$  das Endspiel erreicht, dann erreicht  $B$  nicht das Endspiel.
- (5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften  $B$ ,  $C$ ,  $D$  bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Wäre (2) falsch, so hätte das Endspiel  $A$  gegen  $B$  gelautet, und dann wären auch alle Aussagen (1), (3), (4), (5) falsch, in Widerspruch dazu, dass nur zwei falsche Aussagen auftreten.

Daher ist (2) wahr. Daraus folgt, dass auch (4) wahr ist; denn aus der Voraussetzung,  $A$  werde das Endspiel erreichen, ergibt sich wegen der Wahrheit von (2) die Schlussfolgerung, dass  $B$  nicht das Endspiel erreichte.

Wäre (5) falsch, so wäre auch (1) und (3) falsch, im Widerspruch dazu, dass genau zwei Aussagen (1) bis (5) falsch sind. Also ist (5) wahr.

Da (2), (4) und (5) wahr sind, sind genau die beiden Aussagen (1) und (3) falsch. Hiernach verbleibt von den Möglichkeiten, (5) zu erfüllen, genau die, dass das Endspiel  $B$  gegen  $D$  lautete.

#### Aufgabe 2 - 210912

Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	<b>6</b>	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	<b>6</b>	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	<b>2</b>	3	3

Herrn Lehrmanns Aussage "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln" trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt. Die nächste Aussage von Herrn Schulze trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind.

Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.

Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

### Aufgabe 3 - 210913

Elsa behauptet:

”Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl  $n$  der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ . Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981.”

Ist Elsas Behauptung wahr?

Elsas Behauptung ist wahr. Um das zu beweisen, genügt ein Beispiel. Derartige Beispiele lassen sich etwa durch folgende Überlegung zu finden:

Es gibt eine Zahl  $m$  so, dass die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis  $m$  die Zahl 1981 gerade übersteigt. Das ist bei  $m = 63$  der Fall; denn er gilt

$$1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Wegen  $2016 - 1981 = 35$  muss diese Summe um 35 verringert werden, um 1981 zu erreichen. Das kann z.B. dadurch geschehen, dass man die auf 63 folgenden 70 natürlichen Zahlen wechselweise addiert und subtrahiert, also

$$1 + 2 + 3 + \dots + 63 + 64 - 65 + 66 - 67 + \dots + 132 - 133 = 1981$$

bildet.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man statt  $+17$  die Zahl  $-17$  einfügt, womit sich die Summe um 34 vermindert. Man erhält auf diese Weise

$$1 + 2 + 3 + \dots + 17 - 17 + 18 + \dots + 64 = 1982$$

und gelangt durch Hinzufügen von  $+64$  und  $-65$  auf die gewünschte Zahl.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 : 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 : 12 - 13 \cdot 14 \cdot 15 - 16 \cdot 17 + 18 \cdot 19 = 1 + 20 + 4620 - 2870 - 272 + 342 = 1981$$

### Aufgabe 4 - 210914

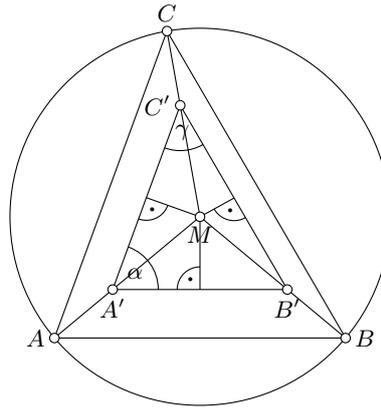
Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70^\circ$ ,  $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50^\circ$  und  $r = 5$  cm, wobei  $r$  der Radius des Umkreises des Dreiecks  $ABC$  ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck  $ABC$  bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

I. Angenommen, ein Dreieck  $ABC$  erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Mittelpunkt seines Umkreises sei  $M$ ; dann gilt  $MA = MB = MC = r$ .

Ist  $A'B'C'$  ein Dreieck mit  $\angle B'A'C' = \alpha$  und  $\angle A'C'B' = \gamma$ , so ist es zu  $\triangle ABC$  ähnlich, kann also durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus dem Dreieck  $ABC$  durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum  $M$  und einem Streckungsfaktor  $k > 0$  hervorgeht.

Dann gilt  $MA' = MB' = MC' = kr$ . Also ist  $M$  auch der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks  $A'B'C'$ , d.h. der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten.



II. Daher entspricht ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- (1) Man konstruiert ein Dreieck  $A'B'C'$ , in dem  $\angle B'A'C' = \alpha$  und  $\angle A'C'B' = \gamma$  gilt.
- (2) Man konstruiert den Schnittpunkt  $M$  seiner Mittelsenkrechten.
- (3) Man trägt auf den von  $M$  durch  $A', B'$  und  $C'$  gehenden Strahlen von  $M$  aus jeweils die Strecke der Länge  $r$  ab. Die erhaltenen Endpunkte bezeichnet man mit  $A, B$  bzw.  $C$  und verbindet sich untereinander.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck  $ABC$  den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach (3) gilt  $MA = MB = MC = r$ , also ist  $r$  der Umkreisradius des Dreiecks  $ABC$ . Nach (2) folgt weiter, dass  $M$  der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks  $A'B'C'$  ist, demnach gilt  $MA' = MB' = MC'$ . Also gelten mit einer Zahl  $k > 0$  die Gleichungen  $MA' = MB' = MC' = kr$ ; folglich geht  $\triangle ABC$  aus  $\triangle A'B'C'$  durch eine zentrische Streckung hervor. Somit sind beide Dreiecke einander ähnlich und es gilt

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha \quad ; \quad \angle ACB = \angle A'C'B' = \gamma$$

IV. Konstruktionsschritt (1) ist (bei den gegebenen Werten von  $\alpha$  und  $\gamma$ ) ausführbar, aber nicht eindeutig; jedoch sind je zwei nach (1) zu erhaltende Dreiecke  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  zueinander ähnlich. Also kann stets  $A_2B_2C_2$  durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus  $A_1B_1C_1$  durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum  $M$  hervorgeht.

Hiernach ist die Figur aus den drei in (3) konstruierten Strahlen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Somit ist auch das in (3) anschließend konstruierte Dreieck  $ABC$  durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

*Lösungen der I. Runde 1981 übernommen von [5]*

## 2.23.2 II. Runde 1981, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 210921**

In der Divisionsaufgabe  $a : b = c$  sind  $a, b, c$ , so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.

Ermitteln Sie alle Tripel  $(a; b; c)$  natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Da für drei Zahlen 5 Ziffern zur Verfügung stehen, muss mindestens eine einstellig sein. Da der Dividend  $a$  bei einer Divisionsaufgabe (im Bereich der natürlichen Zahlen) der größte Wert ist, muss  $a$  mindestens zweistellig sein. Wären  $b$  und  $c$  einstellig, so würde ihr Produkt  $a$  höchstens  $5 \cdot 4 = 20$  betragen, sodass nicht alle fünf Ziffern verwendet werden würden. Also muss  $a$  zweistellig und noch genau einer der beiden Werte  $b$  bzw.  $c$  zweistellig sein, während der andere einstellig ist.

Da die Ziffer 5 nur genau einmal verwendet werden darf, kann sie nicht als Einerziffer verwendet werden, da dann auch die entsprechende Zahl durch 5 teilbar wäre, was die Teilbarkeit durch 5 mindestens einer weiteren der drei Zahlen nach sich ziehen würde. Dies ist aber aufgrund der nicht weiter zur Verfügung stehenden Endziffern 0 bzw. einer weiteren 5 nicht möglich.

Also muss die Ziffer 5 als Zehnerziffer verwendet werden. Dies kann aber nicht die Zehnerziffer des Quotienten oder Divisors sein, weil sonst dieser Wert mindesten 51 wäre, während für den notwendigerweise größeren Dividenten nur noch maximal die Zahl 43 möglich wäre. Also muss die 5 der Zehner von  $a$  sein.

Es kann weder  $b$  noch  $c$  gleich 1 sein, da sonst der andere Wert gleich  $a$  sein müsste, was eine doppelte Nutzung von Ziffern nach sich ziehen würde.

Da 53 eine Primzahl ist und  $51 = 3 \cdot 17$  als einzige nicht-triviale Zerlegung die nicht vorhandene Ziffer 7 verwendet, scheiden diese beiden Möglichkeiten für  $a$  aus. Es verbleiben zwei Fälle:

1. Fall:  $a = 52$ . Dann gibt es wegen  $52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$  genau die beiden Möglichkeiten  $b = 4$  und  $c = 13$  bzw. umgekehrt  $b = 13$  und  $c = 4$ . Andere Zerlegungen gibt es in diesem Fall nicht.

2. Fall:  $a = 54$ . Dann gibt es wegen  $54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$  als einzig möglichen, nicht-trivialen Zerlegungen keine den Anforderungen der Aufgabenstellung genügenden Divisionsaufgaben.

Es gibt also genau zwei solche Tripel, nämlich  $(a, b, c) \in \{(52, 4, 13), (52, 13, 4)\}$ .

**Aufgabe 2 - 210922**

Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen  $a, b$  und  $c$  die Beziehung  $a < b < c$  gilt. Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Ja, dies ist möglich.

Es sei  $ABCD A' B' C' D'$  der Quader mit Grundfläche  $ABCD$ , Deckfläche  $A' B' C' D'$ , sodass jeder Eckpunkt  $P$  der Grundfläche mit seinem entsprechenden Eckpunkt  $P'$  der Deckfläche durch eine Kante verbunden sei. Weiterhin gelte  $|AB| = b$ ,  $|AA'| = a$  und  $|AD| = |A'D'| = c$ .

Auf den Kanten  $A'D'$  sowie  $B'C'$  seien so die Punkte  $K$  bzw.  $L$  markiert, dass  $|A'K| = |B'L| = \sqrt{a^2 - b^2}$  gilt. Dies ist wegen  $\sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a < c = |A'D'|$  immer möglich. Dann ist die Strecke  $KL$  parallel zur Strecke  $A'B'$ , also auch zu  $AB$ , sodass die vier Punkte  $ABLK$  in einer Ebene liegen. Weiterhin gilt damit  $|KL| = |AB| = a$  und aufgrund der Symmetrie  $|AK| = |BL|$ .

Das Dreieck  $\triangle AK A'$  ist rechtwinklig in  $A'$ , sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|AK| = \sqrt{|AA'|^2 + |A'K|^2} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)} = a$$

ergibt. Damit ist das Viereck  $ABLK$  eine Raute.

Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an der zur Seitenfläche  $ADD' A'$  parallelen Ebene durch den Mittelpunkt von  $AB$  überführt sowohl den Quader in sich selbst und bildet  $K$  auf  $L$  sowie  $A$  auf  $B$  ab) sind aber dessen Diagonalen gleich lang, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Der Schnitt des Quaders durch  $ABKL$  liefert also das Gewünschte,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 210923**

Beweisen Sie, dass reelle Zahlen  $x, y, z$  genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned}x + y + z &> 0, \\x \cdot y \cdot z &> 0, \\xy + xz + yz &> 0\end{aligned}$$

erfüllen, wenn  $x, y$  und  $z$  positiv sind!

Sind  $x, y$  und  $z <$  allesamt positiv, so erfüllen sie offensichtlich alle drei Ungleichungen.

Gelten nun ab jetzt für die drei Variablen die drei Ungleichungen. Dann sind aufgrund der zweiten Ungleichung alle drei verschieden von 0 und entweder genau 0 oder genau 2 negativ. (Bei genau einer oder genau drei negativen Zahlen wäre ihr Produkt auch negativ, im Widerspruch zur zweiten Ungleichung.)

Nehmen wir nun an, dass genau zwei der drei Variablen negativ wären, d.h., wir nehmen o.B.d.A.  $x > 0$  und  $y < 0$  sowie  $z < 0$  an. Dann ist aufgrund der ersten Ungleichung  $x > x + z > -y > 0$  und analog  $x > x + z > 0$ . Damit gilt  $0 < (x + y)(x + z) < x^2$ .

Es ist aber wegen  $0 < x^2$  und der dritten Ungleichung

$$x^2 < x^2 + xy + xz + yz = x^2 + x(y + z) + yz = (x + y)(x + z)$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.

Damit müssen alle drei Variablen  $x, y$  und  $z$  positiv sein, wenn sie die drei Ungleichungen gleichzeitig erfüllen, sodass die beiden Aussagen äquivalent sind,  $\square$ .

**Aufgabe 4 - 210924**

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$ .

Konstruieren Sie eine Parallele zu  $BC$  so, dass sie die Dreieckseiten  $AB$  und  $AC$  in Punkten  $D$  bzw.  $E$  schneidet, für die  $ED = DB + EC$  gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck  $ABC$ ) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Konstruktion:

- 1) Man konstruiere die Winkelhalbierende  $w$  des Winkels  $\angle BAC$  und deren Schnittpunkt  $W$  mit der Seite  $BC$ .
- 2) Der Kreis um  $C$  durch  $W$  schneide die Gerade  $AC$  in zwei Punkten, wobei genau einer nicht auf der gleichen Seite von  $C$  wie  $A$  liegt. Dieser Schnittpunkt heiße  $X$ .
- 3) Die Parallele zur Geraden  $XW$  durch  $C$  schneide  $w$  in  $S$ .
- 4) Die Parallele zur Geraden  $BC$  durch  $S$  schneide die Geraden  $AB$  in  $D$  und  $AC$  in  $E$ .

Begründung:

Da  $A, E$  und  $C$  in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, gilt  $|AE| + |EC| = |AC|$ , also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES}$$

Da die Geraden  $ES$  und  $CW$  nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz  $\frac{|ES|}{|AS|} = \frac{|CW|}{|AW|}$ , also  $|ES| = |CW| \cdot \frac{|AS|}{|AW|}$ . Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|}$$

Da die Geraden  $CS$  und  $XW$  nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz  $\frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AX|}{|AC|}$ . Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AX|}{|CW|}$$

Nach Konstruktion ist  $|AX| = |AC| + |CW|$ , also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AX|}{|CW|} = \frac{|AC| + |CW|}{|CW|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|}$$

Da die Geraden  $ES$  und  $CW$  parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz  $\frac{|AC|}{|CW|} = \frac{|AE|}{|ES|}$ . Setzt man das ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|} = 1 + \frac{|AE|}{|ES|} = \frac{|AE| + |ES|}{|ES|} \quad \text{also} \quad |EC| = |ES|$$

Da die Geraden  $ED$  und  $CB$  parallel sind, gilt  $\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|WB|}{|WC|}$ . Da  $W$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\angle BAC$  mit der gegenüberliegenden Seite ist, gilt  $\frac{|WB|}{|WC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ , da eine Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der angrenzenden Seiten teilt. Zusammen gilt also

$$\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{bzw.} \quad |SD| = |ES| \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$$

Setzt man hierin  $|ES| = |EC|$  und  $|EC| = |AC| - |AE|$  ein, erhält man

$$|SD| = (|AC| - |AE|) \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|}$$

Da die Geraden  $ED$  und  $CB$  parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz  $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$ . Setzt man dies ein, erhält man

$$|SD| = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = |AB| - |AD| = |DB|$$

Damit gilt  $|ED| = |ES| + |SD| = |EC| + |DB|$ , wie gefordert.

Zur Eindeutigkeit:

Für eine Parallele  $p$  zu  $BC$  bezeichne  $E'$  und  $D'$  deren Schnittpunkte mit den Geraden  $AC$  bzw.  $AB$ . Bewegt man diese Parallele  $p$  beginnend mit  $p = BC$  kontinuierlich soweit, bis sie durch  $A$  verläuft, dann ist die Länge der zugehörigen Strecke  $E'D'$  beginnend mit dem Wert  $|BC|$  streng monoton auf 0 gesunken.

Umgedreht wachsen in diesem Prozess die Streckenlängen  $|D'B|$  und  $|E'C|$  von 0 beginnend bis  $|AB|$  bzw.  $|AC|$ , sodass für deren Summe  $|D'B| + |E'C|$  gilt, dass sie streng monoton von 0 bis  $|AB| + |AC| > |AB|$  wächst, wobei die letzte Ungleichung die Dreiecksungleichung ist.

Also gibt es genau eine Position der Parallelen  $p$  in diesem Bereich, an dem Gleichheit zwischen den beiden Werten  $|E'D'|$  und  $|D'B| + |E'C|$  Gleichheit herrscht. Damit ist die Position der Parallelen eindeutig bestimmt. (Außerhalb des betrachteten Bereichs schneidet  $p$  nicht mehr die Dreiecksseiten, was nach Aufgabenstellung gefordert war.)

*Aufgaben der II. Runde 1981 gelöst von cyrix*

## 2.23.3 III. Runde 1981, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 210931**

Über eine natürliche Zahl  $x$  werden vier Paare von Aussagen gemacht:

- Paar A: (1)  $x$  ist eine zweistellige Zahl.  
 (2)  $x$  ist kleiner als 1000.
- Paar B: (1) Die zweite Ziffer der Zahl  $x$  ist eine 0.  
 (2) Die Quersumme der Zahl  $x$  ist 11.
- Paar C: (1)  $x$  wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.  
 (2)  $x$  ist durch 37 teilbar.
- Paar D: (1) Die Quersumme der Zahl  $x$  ist 27.  
 (2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von  $x$  dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen  $x$  mit  $x \neq 0$  gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!

Gibt es solche Zahlen  $x$ , so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Da jede zweistellige Zahl auch kleiner ist als 1000, kann nicht A(1) wahr sein, da sonst auch A(2) wahr wäre. Demzufolge ist  $x$  nicht zweistellig, aber kleiner als 1000, also ein- oder dreistellig.

Sie kann aber nicht einstellig sein, da sonst sowohl C(1) ( $x$  wird mit drei gleichen Ziffern geschrieben) als auch C(2) ( $x$  ist durch 37 teilbar) wegen  $x > 0$  falsch wären. Also ist  $x$  eine dreistellige natürliche Zahl.

Wäre C(1) wahr, so gäbe es eine Ziffer  $n$  mit  $x = n \cdot 111 = n \cdot 3 \cdot 37$ , sodass auch C(2) wahr wäre, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung ist. Also ist  $x$  durch 37, nicht aber durch 3 teilbar. Damit ist auch die Quersumme von  $x$  nicht durch 3 teilbar, also nicht 27, sodass D(1) falsch ist und D(2) wahr sein muss. Demzufolge ist eine der Ziffern von  $x$  gleich Null. Dies kann nicht die führende Ziffer sein, da sonst die Zahl nicht dreistellig wäre.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, welche Ziffer von  $x$  gleich Null ist.

1. Fall: Die zweite Ziffer (Zehnerziffer) von  $x$  ist Null. Dann ist B(1) wahr und B(2) muss falsch sein, sodass  $x$  eine dreistellige, durch 37 aber nicht 3 teilbare Zahl mit 0 an zweiter Stelle und Quersumme verschieden von 11 ist. Die dreistelligen Vielfachen von 37 lauten

$$111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814, \\ 851, 888, 925, 962 \text{ und } 999$$

Von diesen haben genau die Zahlen 407 und 703 die Zehnerziffer 0, aber 407 die Quersumme 11, sodass nur  $x = 703$  eine Lösung für diesen Fall ist.

2. Fall: Die zweite Ziffer von  $x$  ist verschieden von Null. Dann muss die Einerziffer von  $x$  Null sein und, da B(1) falsch ist, muss B(2) wahr sein und die Zahl eine Quersumme von 11 besitzen. Da die Einerziffer von  $x$  gleich 0 ist, ist  $x$  also nicht nur durch 37, sondern auch durch 10, also wegen  $\text{ggT}(37,10)=1$  auch durch 370, teilbar.

Damit gibt es nur die beiden Möglichkeiten 370 oder 740 für  $x$  im zu betrachtenden Intervall, wobei die erste Möglichkeit wegen ihrer Quersumme 10 ausgeschlossen ist. Es verbleibt die einzige Lösung  $x = 740$  für diesen Fall.

Man bestätigt leicht durch die Probe, dass tatsächlich beide Werte 703 und 740 jeweils genau eine der Aussagen eines jeden Paares A, B, C und D erfüllen.

**Aufgabe 2 - 210932**

Ist  $ABCD$  ein Rechteck, für dessen Seitenlängen  $b = AD = 6$  cm und  $a = AB > b$  gilt, so seien  $E, G$  diejenigen Punkte auf  $CD$  und  $F, H$  diejenigen Punkte auf  $AB$ , für die  $AFED$  und  $HBCG$  Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge  $a$  gibt, für die  $EH \perp AC$  gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Offensichtlich ist die genaue Länge von  $b$  irrelevant. Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass  $A$  im Koordinatenursprung,  $B$  im Punkt  $(a,0)$  und  $D$  im Punkt  $(0,b)$  zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen:  $C(a,b)$ ,  $F(b,0)$ ,  $E(b,b)$ ,  $H(a-b,0)$  und  $G(a-b,b)$ .

Die Gerade  $AC$  hat den Anstieg  $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$ , die Gerade  $EH$  den Anstieg  $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$ , sofern  $a \neq 2b$  ist. (Wäre aber  $a = 2b$ , so würde  $H$  mit  $F$  zusammenfallen, die Gerade  $EH$  wäre senkrecht zu  $AB$ , also insbesondere nicht senkrecht zu  $AC$ , sodass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Deshalb können wir ab sofort  $a \neq 2b$  annehmen.)

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu  $-1$  multiplizieren, d.h., es ist

$$\begin{aligned} EH \perp AC &\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a} \cdot \frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot (a-2b) = a^2 - 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 2b^2 \\ &\Leftrightarrow a-b = \sqrt{2}b \Leftrightarrow a = (1 + \sqrt{2})b \end{aligned}$$

sodass für festes  $b$  genau ein  $a$  existiert, sodass die beiden Geraden  $EH$  und  $AC$  senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit  $b = 6$  cm ist dafür dann  $a = (1 + \sqrt{2}) \cdot 6$  cm.

### Aufgabe 3 - 210933

Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

Es ist  $300^2 = 90.000 < 10^5$  und damit  $300 < 1000^{\frac{5}{6}}$ , also gilt

$$\begin{aligned} 1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 300^{300} &< 300^1 \cdot 300^2 \cdot \dots \cdot 300^{300} = 300^{1+2+\dots+300} = 300^{\frac{300 \cdot 301}{2}} < 300^{300 \cdot 151} < \\ &< 1000^{\frac{5}{6} \cdot 300 \cdot 151} = 1000^{37.750} < 1000^{40.000} \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} 301^{301} \cdot \dots \cdot 1000^{1000} &< 1000^{301} \cdot \dots \cdot 1000^{1000} = 1000^{301+\dots+1000} = 1000^{\frac{1000 \cdot 1001}{2} - \frac{300 \cdot 301}{2}} = \\ &= 1000^{500 \cdot 500 - 150 \cdot 301} < 1000^{500 \cdot 500 - 45.000} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 1^1 \cdot \dots \cdot 300^{300} \cdot 301^{301} \cdot \dots \cdot 1000^{1000} &< 1000^{40.000} \cdot 1000^{500 \cdot 500 - 45.000} = \\ &= 1000^{50 \cdot 500 + 40.000 - 45.000} < 1000^{500.000}, \square \end{aligned}$$

### Aufgabe 4 - 210934

Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  aus  $\alpha = 50^\circ$ ,  $r = 4$  cm und  $h_a = 6$  cm!

Dabei bezeichne  $\alpha$  die Größe des Winkels  $\angle BAC$ ,  $r$  den Umkreisradius und  $h_a$  die Länge der auf  $BC$  senkrechten Höhe des Dreiecks  $ABC$ .

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck  $ABC$  durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

1) Man zeichne einen Kreis um einen Punkt  $M$  mit Radius  $r$ . Auf dessen Rand markiere man einen beliebigen Punkt  $B$  und zeichne den zugehörigen Radius  $BM$  ein.

2) An diesen Radius trage man den Winkel  $2\alpha$  ab und bestimme den Schnittpunkt des zweiten Schenkels dieses Winkels mit dem Kreis. Der Schnittpunkt heiße  $C$ .

3) Man zeichne eine Parallele zu  $BC$  im Abstand  $h_a$  in der Halbebene von  $BC$ , in der auch  $M$  liegt. Diese Parallele schneidet den Kreis in zwei Punkten, wovon man einen  $A$  und den anderen  $A'$  nennt.

Dann sind das Dreieck  $\triangle ABC$  und das dazu kongruente Dreieck  $A'BC$  das Gesuchte.

Begründung:

Es müssen alle Punkte auf einem Kreis mit Radius  $r$  liegen, da dies der Umkreisradius des gesuchten Dreiecks ist. Über der Sehne  $BC$  ist  $\angle BAC$  ein Peripheriewinkel, sodass der zugehörige Zentriwinkel  $\angle BMC$  genau doppelt so groß sein muss. Schließlich liegen  $A$  und  $M$  in der gleichen Halbebene bezogen auf die Gerade  $BC$ , da  $\alpha < 90^\circ$  ist. Da  $h_a$  senkrecht auf  $BC$  steht, muss also  $A$  auf einer Parallelen zu  $BC$  in diesem Abstand liegen.

Die entstehenden beiden Schnittpunkte  $A$  und  $A'$  erfüllen dabei gleichermaßen die Bedingungen, was man auch daran sieht, dass sie durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke  $BC$  ineinander übergehen (sowie  $B$  in  $C$  und umgekehrt), sodass die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'BC$  zueinander kongruent sind.

#### Aufgabe 5 - 210935

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen der Zahlen  $\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$  und  $0$ , dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein.

Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind,  $\square$ .

#### Aufgabe 6 - 210936

Bei einem Tetraeder  $ABCD$  seien die Kantenlängen  $AB = 10$  cm,  $BC = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $AD = 13$  cm,  $BD = 13$  cm geben, das Lot von  $D$  auf die Fläche des Dreiecks  $ABC$  sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante  $CD$  eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Es sei  $L$  der Fußpunkt des Lots von  $D$  auf die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$ . Dann sind die Dreiecke  $\triangle ADL$  und  $\triangle BDL$  rechtwinklig in  $L$  und es gilt

$$|AL| = \sqrt{|AD|^2 - |DL|^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

sowie analog  $|BL| = 5$  cm. Da  $|AB| = 10$  cm die Summe dieser beiden Strecken ist, liegt  $L$  auf der Strecke  $AB$  und bildet dessen Mittelpunkt.

Da  $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$  gilt, ist das Dreieck  $\triangle ABC$  rechtwinklig in  $C$ . Damit gilt nach der Umkehrung des Satzes von Thales  $|AL| = |BL| = |CL| = 5$  cm.

Das Dreieck  $\triangle CDL$  ist rechtwinklig in  $L$ . Also gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|CD| = \sqrt{|CL|^2 + |DL|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

*Aufgaben der III. Runde 1981 gelöst von cyrix*

## 2.24 XXII. Olympiade 1982

## 2.24.1 I. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220911**

Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl  $z$ , deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von  $z$  setze, dann erhalte ich das Quadrat von  $z$ ."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl  $z$ , die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl  $z$  ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie  $z$  an!

Die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl  $z$  mit den geforderten Eigenschaften seien  $a$  bzw.  $b$ . Dann hat die Quersumme  $a + b$  dieselbe Einerziffer wie die Zahl  $z^2$  und daher auch wie die  $b^2$ . Somit muss  $a$  die Einerziffer von  $b^2 - b$  sein.

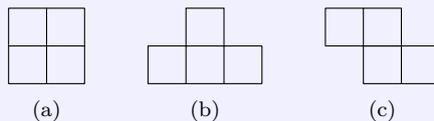
Außer  $b = 0$  scheiden damit auch  $b = 1, 5, 6$  aus, da sie auf  $a = 0$  führen würden. Für die übrigen Möglichkeiten wird in der folgenden Tabelle geprüft, ob  $z^2$  die durch Hintereinanderschreiben von  $b, a$  und  $a + b$  erhaltene Zahl  $z'$  ist:

$b$	$b^2$	$b^2 - b$	$a$	$z$	$z^2$	$z'$
2	4	2	2	22	484	224
3	9	6	6	63	3969	369
4	16	12	2	24	576	426
7	49	42	2	27	729	729
8	64	56	6	68	4624	8614
9	81	72	2	29	841	9211

Damit ist  $z = 27$  als einzige Lösung ermittelt.

**Aufgabe 2 - 220912**

Ist  $n$  eine natürliche Zahl mit  $n \geq 2$ , so bezeichne  $F_n$  eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in  $n$  gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den  $n^2$  Feldern von  $F_n$  kongruent ist.)

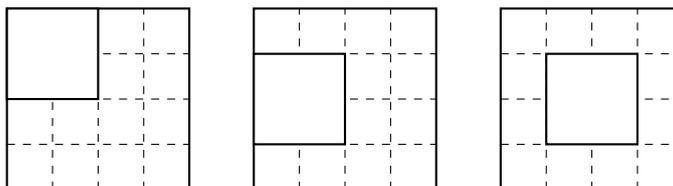
Die Fläche  $F_n$  soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von  $F_n$  mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über  $F_n$  hinausragen.

- Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden  $n$  und für alle  $n \leq 4$  nicht erfüllbar sind!
- Zeigen Sie, dass die Bedingungen für  $n = 6$  erfüllbar sind!
- Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen  $n \geq 8$  die Bedingungen erfüllbar sind!

a) Für ungerades  $n$  ist die Anzahl  $n^2$  der Felder von  $F_n$  ungerade, während bei beliebiger Zusammenstellung von Täfelchen stets eine durch 4 teilbare, also gerade Anzahl von Feldern entsteht. Daher sind die Bedingungen für ungerades  $n$  nicht erfüllbar.

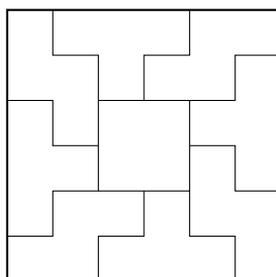
Kommt in einer Fläche  $F_n$  von jeder Sorte (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen vor, so muss  $n^2 \geq 12$  sein. Also sind die Bedingungen für  $n \leq 3$  nicht erfüllbar.

Für  $n = 4$  gilt: Wären die Bedingungen erfüllbar, so käme auch ein Täfelchen der Form (a) vor. Hierfür gäbe es o.B.d.A. nur die drei angegebenen Möglichkeiten in der Abbildung:

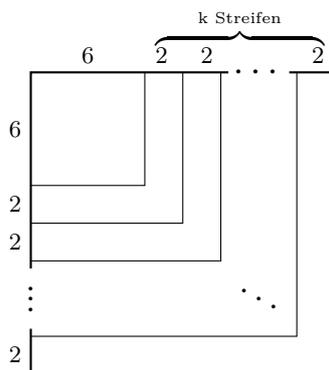


In allen drei Fällen kann die verbleibende Restfläche nicht so in Täfelchen der Formen (a), (b) oder (c) zerlegt werden, dass dabei die Formen (b) und (c) auch vorkommen. Daher sind die Bedingungen für  $n = 4$  ebenfalls nicht erfüllbar.

b) Die Abbildung zeigt eine Belegung von  $F_6$  die alle Bedingungen erfüllt.



c) Jede gerade Zahl  $n \geq 8$  lässt sich in der Gestalt  $n = 6 + 2k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) darstellen. Hiernach kann die Fläche  $F_n$  in eine  $6 \times 6$  Feld und  $k$  Streifen der Breite 2 aufgeteilt werden. (siehe Abbildung)



Diese lassen sich durch Täfelchen der Form (a) überdecken. Daher und nach b) kann insgesamt  $F_n$  in der geforderten Weise überdeckt werden.

**Aufgabe 3 - 220913**

- a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die der Term  $\frac{4x-4}{2x-3}$  definiert ist.
- b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen  $x$  alle diejenigen, für die  $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$  gilt!

a) Der Term ist genau dann nicht definiert, wenn  $2x - 3 = 0$  ist. Dies ist äquivalent mit  $x = \frac{3}{2}$ . Somit ist der Term genau für alle reellen  $x$  mit  $x \neq \frac{3}{2}$  definiert.

Im Fall  $x > \frac{3}{2}$  gilt also  $2x - 3 > 0$ . Daher führt das Multiplizieren einer Ungleichung mit  $2x - 3$  zu einer jeweils äquivalenten Ungleichung. Somit sind die Ungleichungen

$$0 < \frac{4x - 4}{2x - 3} \quad \text{und} \quad \frac{4x - 4}{2x - 3} < 1$$

äquivalent mit

$$0 < 4x - 4 \quad \text{und} \quad 4x - 4 < 2x - 3$$

diese mit  $4 < 4x$  und  $2x < 1$  und diese mit  $x > 1$  und  $x < \frac{1}{2}$ .

Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander. Also gibt es kein  $x > \frac{3}{2}$ , das die in b) geforderte Ungleichung erfüllt.

Im Fall  $x < \frac{3}{2}$  gilt  $2x - 3 < 0$ . Daher entsteht jeweils aus einer Ungleichung durch Multiplikation mit  $2x - 3$  und Umkehrung des Ungleichheitszeichens eine äquivalente Ungleichung.

Somit sind die gegebenen Ungleichungen äquivalent mit

$$0 > 4x - 4 \quad \text{und} \quad 4x - 4 > 2x - 3 \quad \text{d.h.} \quad x < 1 \quad \text{und} \quad x > \frac{1}{2}$$

Diese beiden Ungleichungen werden genau von allen  $x$  mit  $\frac{1}{2} < x < 1$  erfüllt. Für alle diese  $x$  gleich auch  $x < \frac{3}{2}$ .

Damit ist bewiesen: Die in b) geforderte Ungleichung gilt genau für alle reellen  $x$  mit  $\frac{1}{2} < x < 1$ .

**Aufgabe 4 - 220914**

In einer Ebene  $\varepsilon$  befinde sich ein  $n$ -Eck mit den Eckpunkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $S$ . Das Volumen der Pyramide sei  $V_P$ . Die Mittelpunkte der Kanten  $A_1S, A_2S, \dots, A_nS$  seien  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Ferner sei  $B_1$  ein beliebiger Punkt in der Ebene  $\varepsilon$ .

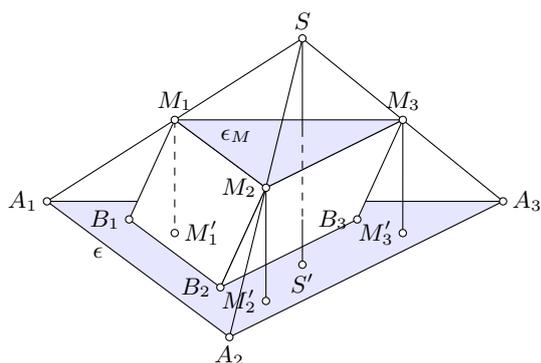
Die zu  $M_1B_1$  parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte  $M_2, M_3, \dots, M_n$  schneide  $\varepsilon$  in  $B_2, B_3, \dots, B_n$ . Der Körper  $K$  mit den Eckpunkten  $B_1, B_2, \dots, B_n, M_1, M_2, \dots, M_n$  habe das Volumen  $V_K$ .

- a) Beweisen Sie, dass alle Punkte  $M_1, M_2, \dots, M_n$  in einer gemeinsamen zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene liegen und  $K$  daher ein Prisma ist!
- b) Beweisen Sie, dass  $V_K$  durch  $V_P$  eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie  $V_K$  in Abhängigkeit von  $V_P$ !

Die Fußpunkte der Lote von  $S, M_1, M_2, \dots, M_n$  auf  $\varepsilon$  seien  $S', M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ . Für alle  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt wegen  $M_iM'_i \parallel SS'$ : Die Ebene durch  $A_i, S, S'$  geht auch durch  $M_i$  und  $M'_i$ . Auf ihrer Schnittgeraden mit  $\varepsilon$  liegen folglich  $A_i, M'_i$  und  $S'$ . Somit gilt nach einem der Strahlensätze

$$M_iM'_i : SS' = A_iM_i : A_iS = 1 : 2$$

Also haben alle Punkte  $M_i$  denselben Abstand  $M_iM'_i = \frac{1}{2}SS'$  von  $\varepsilon$ . Folglich liegen sie in einer gemeinsamen zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene  $\varepsilon_M$ .



b) Hiernach schneiden die von dem gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehenden Geraden jeweils durch  $A_i$  und  $M_i$  die beiden zueinander parallelen Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_M$  in zwei ähnlichen Vielecken  $A_1A_2\dots A_n$  bzw.  $M_1M_2\dots M_n$ .

Für jeweils entsprechende Seiten  $A_iA_j, M_iM_j$  gilt  $A_iA_j \parallel M_iM_j$ , also nach einem der Strahlensätze

$$A_iA_j : M_iM_j = SA_i : SM_i = 2 : 1$$

Also stehen die Flächeninhalte  $F_P$  und  $F_L$  der Vielecke  $A_1A_2\dots A_n$  bzw.  $M_1M_2\dots M_n$  im Verhältnis

$$F_P : F_K = 4 : 1$$

Nach a) gilt für die Höhenlängen  $h_P = SS'$  und  $h_K = M_1M'_1$  der Pyramide bzw. des Prismas  $h_K = \frac{1}{2}h_P$ .

Daher und wegen der Volumenformel  $V_K = F_K \cdot h_K, V_P = \frac{1}{3}F_P \cdot h_P$  für Pyramide bzw. Pyramide ergibt sich

$$V_K = \frac{1}{4}F_P \cdot \frac{1}{2}h_P = \frac{1}{8}F_P \cdot h_P = \frac{3}{8}V_P$$

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen von [5]

## 2.24.2 II. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220921**

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$ , die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

- (1)  $n - 9$  ist eine Primzahl.
- (2)  $n^2 - 1$  ist durch 10 teilbar.

Wegen (2) ist  $n^2 - 1$  gerade, also  $n^2$  ungerade, also  $n$  ungerade, also  $n - 9$  gerade, also wegen (1)  $n - 9 = 2$  und damit  $n = 11$ . Tatsächlich ist auch  $11^2 - 1 = 120$  durch 10 teilbar.

**Aufgabe 2 - 220922**

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn  $x, y$  und  $z$  von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2}$$

$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$

$$c = a^2 - (x^2 - y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und  $b$  ist ein Teiler von  $c$ .

Es ist

$$a = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2xy\sqrt{z} + y^2z + x^2 - 2xy\sqrt{z} + y^2z) = x^2 + y^2z \in \mathbb{N}$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (x^2 + 2xy\sqrt{z} + y^2z - x^2 + 2xy\sqrt{z} - y^2z) = 2xy \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$c = (a - x^2 + y^2z) \cdot (a + x^2 - y^2z) = 2y^2z \cdot 2x^2 = 4x^2y^2z = b \cdot 2xyz \in \mathbb{N}$$

und es gilt offensichtlich  $b|c$ ,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 220923**

Von einem Quadrat  $ABCD$  und vier Punkten  $P, Q, R, S$  wird folgendes vorausgesetzt:

- (1)  $P$  liegt auf der Strecke  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$ ,
- (2)  $Q$  liegt auf der Strecke  $BC$  zwischen  $B$  und  $C$ ,
- (3)  $R$  liegt auf der Strecke  $CD$  zwischen  $C$  und  $D$ ,
- (4)  $S$  liegt auf der Strecke  $DA$  zwischen  $D$  und  $A$ ,
- (5) es gilt  $PR \perp QS$ .

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen  $PR < QS$ ,  $PR = QS$ ,  $PR > QS$  gilt!

Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass  $A$  im Koordinatenursprung,  $B$  im Punkt  $(1,0)$  und  $D$  im Punkt  $(0,1)$  zu liegen kommt. Dann liegt  $C$  im Punkt  $(1,1)$ . Weiterhin existieren reelle Zahlen  $p, q, r, s$ , sodass  $P$  die Koordinaten  $(p,0)$ ,  $Q$  die Koordinaten  $(1,q)$ ,  $R$  die Koordinaten  $(r,1)$  und  $S$  die Koordinaten  $(0,s)$  besitzt.

Gilt dabei  $p = r$ , so liegt die Gerade  $PR$  parallel zur  $y$ -Achse und damit parallel zur  $y$ -Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke  $QS$  parallel zur  $x$ -Achse liegen, sodass  $q = s$  gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

Sonst hat die Gerade  $PR$  den Anstieg  $m_1 = \frac{1-0}{r-p} = \frac{1}{r-p}$  und die Gerade  $QS$  den Anstieg  $m_2 = \frac{s-q}{1-0} = s-q$ . Nach (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, sodass sich ihre Anstiege zu  $(-1)$  multiplizieren.

Es gilt also  $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$  bzw.  $s-q = -(r-p)$ , also  $(s-q)^2 = (r-p)^2$ . Für die Längen der Strecken  $PR$  und  $QS$  erhalten wir damit wieder

$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

sodass in jedem Fall  $|PR| = |QS|$  gilt.

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte  $P$  bis  $S$  auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

#### Aufgabe 4 - 220924

5					
4					
3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ , zerlegt ist.

Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Wir konstruieren alle zulässigen Färbungen schrittweise durch eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Mindestens eines der vier Eckfelder  $a_1, e_1, e_5$  oder  $a_5$  ist markiert.

Dann können wir ggf. durch Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats erzwingen, dass das Feld  $a_1$  markiert ist. Nun können die Felder  $b_1$  und  $b_2$  sowie  $a_2$  jeweils nicht markiert sein, da sonst in Zeile 1, der Diagonalen durch  $a_1$  bzw. der Spalte  $b$  zwei Felder markiert wären.

Durch ggf. erfolgreiche Spiegelung an der Diagonalen durch  $a_1$  kann man erzwingen, dass die Zeilennummer des in Spalte  $b$  markierten Feldes höchstens so groß ist wie die "Spaltennummer" des in Zeile 2 markierten Feldes. Dabei sei unter der "Spaltennummer" die Zahl gemeint, die bei der Übersetzung  $b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$  aus der Spalte entsteht. Es ergeben sich nun für das in Spalte  $b$  markierte Feld folgende Unterfälle:

Fall 1.1: In Spalte  $b$  ist das Feld  $b_3$  markiert.

Dann können folgende Felder alle nicht markiert sein:  $a_5$  und  $e_1$  wegen gleicher Spalte/ Zeile mit  $a_1$  sowie  $b_4$  und  $c_3$  wegen gleicher Spalte/ Zeile mit  $b_3$ . Dann sind von der Diagonalen durch  $a_5$  aber vier Felder schon unmarkiert, sodass das fünfte Feld  $d_2$  markiert werden muss. In der 5. Zeile dürfen aber die Felder  $a_5$  und  $e_5$  wegen gleicher Spalte/ Diagonale mit  $a_1$  sowie  $b_5$  und  $d_5$  wegen gleicher Spalte mit  $b_3$  bzw.  $d_2$  nicht markiert werden, sodass nur  $c_5$  verbleibt und damit abschließend aufgrund des einzig freien Feldes in Zeile 4 auch das Feld  $e_4$  markiert werden muss. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_3, c_5, d_2, e_4)$$

Fall 1.2: In Spalte  $b$  ist das Feld  $b_4$  markiert.

Da die Spaltennummer des in Zeile 2 markierten Felds nun mindestens 4 beträgt, muss es in Spalte  $d$  oder  $e$  liegen. Das Feld  $d_2$  liegt aber wie  $b_4$  in der Diagonalen durch  $a_5$ , sodass es unmarkiert bleiben muss. Es folgt, dass  $e_2$  markiert ist. In Zeile 3 sind folgende Felder sicher unmarkiert:  $a_3$  und  $c_3$  wegen gleicher Spalte/ Diagonale wie  $a_1$  sowie  $b_3$  und  $e_3$  wegen gleicher Spalte mit  $b_4$  bzw.  $e_2$ . Also muss  $d_3$  markiert sein und damit auch  $c_5$  als letztes freies Feld der Zeile 5. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_4, c_5, d_3, e_2)$$

Fall 1.3: In Spalte  $b$  ist das Feld  $b_5$  markiert.

Dann muss aufgrund der Bedingung an die Spaltennummer des in Zeile 2 markierten Felds dieses  $e_2$  sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da dann alle Felder der Diagonale durch  $a_5$  unmarkiert sein müssen:  $a_5$ ,  $e_1$  und  $c_3$  wegen gleicher Spalte/ Zeile/ Diagonale mit  $a_1$  sowie  $b_4$  wegen gleicher Spalte mit  $b_5$  und  $d_2$  wegen gleicher Zeile mit  $e_2$ . In diesem Unterfall gibt es also keine Lösung.

Fall 2: Alle Eckfelder sind unmarkiert.

Es kann nicht sowohl in Spalte  $a$  als auch in Spalte  $e$  die dritte Zeile markiert sein. Also kann man durch ggf. erfolgreiche Spiegelung an Spalte  $e$  erzwingen, dass das Feld  $a_3$  unmarkiert ist. Da auch  $a_1$  und  $a_5$  (sowie  $e_1$  und  $e_5$ ) unmarkiert sind, verbleiben in Spalte  $a$  nur die beiden Felder  $a_2$  und  $a_4$ , die markiert sein können.

Durch ggf. erfolgreiche Spiegelung an Zeile 3 kann man erzwingen, dass dies  $a_2$  sein muss. Damit müssen die Felder  $b_2$  und  $d_2$  unmarkiert sein, sodass auf den beiden Diagonalen nur noch die Felder  $c_3$  und  $d_4$  für die eine bzw.  $b_4$  und  $c_3$  für die andere markiert werden können.

Wäre also  $c_3$  unmarkiert, müssten sowohl  $d_4$  als auch  $b_4$  markiert werden, die beide in der gleichen Zeile liegen, was zu einem Widerspruch führt. Also muss  $c_3$  markiert sein. Damit dürfen aber nun weder  $b_4$  noch  $d_4$  markiert sein, da sie beide auf den Diagonalen durch  $c_3$  liegen. Weiterhin ist auch  $a_4$  sowie  $c_4$  ausgeschlossen, da sie in den gleichen Spalten wie  $a_2$  und  $c_3$  liegen, sodass  $e_4$  in Zeile 4 das markierte Feld sein muss.

Es verbleiben in Zeilen 1 und 5 noch die freien Felder in den Spalten  $b$  und  $c$ , sodass sich zwei durch Rotation um den Mittelpunkt des Quadrats um  $180^\circ$  ineinander überführbare Lösungen

$$(a_2, b_1, c_3, d_5, e_4) \quad \text{und} \quad (a_2, b_5, c_3, d_1, e_4)$$

ergeben.

Tatsächlich sind diese drei Lösungen (wenn man in Fall 2 nur eine der beiden betrachtet) auch jeweils nicht durch Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen daraus ineinander überführbar: In der Lösung von Fall 2 ist kein Eckfeld markiert, in denen aus Fall 1 aber schon, sodass die Lösung aus Fall 2 nicht in eine aus Fall 1 überführt werden kann. Da bei diesen das markierte Eckfeld gleich ist, muss dieses Fixpunkt einer potentiell überführenden Abbildung sein.

Bei Drehungen kann dies aber nur der Mittelpunkt sein. Also müsste es eine Spiegelung durch dieses Eckfeld  $a_1$  geben, die die Lösung aus Fall 1.1 in die von Fall 1.2 überführt, was nur die Spiegelung entlang der Diagonalen durch  $a_1$  sein kann. Man sieht aber schnell, dass diese Spiegelung bei Anwendung auf die Lösung aus Fall 1.1 eine andere Lösung als die aus Fall 1.2 erzeugt, da das in der ersten Lösung markierte Feld  $b_3$  auf das in der zweiten Lösung unmarkierte Feld  $c_2$  abgebildet würde.

*Aufgaben der II. Runde 1982 gelöst von cyrix*

## 2.24.3 III. Runde 1982, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 220931**

Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen  $z$ , die die Gleichung  $z = (a + b)^c$  erfüllen, wobei  $a, b$  und  $c$  in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von  $z$  sind.

Es ist  $c > 0$ , da für alle  $a, b$  gilt, dass  $(a + b)^0 = 1$ , also nicht dreistellig ist. Es ist wegen  $a + b \leq 18$  auch  $c > 1$ , da sonst  $z = (a + b)^c$  nicht dreistellig wäre.

Ist  $c = 2$ , so folgt wegen  $10^2 = 100 \leq z = (a + b)^2$ , dass  $10 \leq a + b \leq 18$  ist. Die auftretenden Quadratzahlen lauten  $10^2 = 100$ ,  $11^2 = 121$ ,  $12^2 = 144$ ,  $13^2 = 169$ ,  $14^2 = 196$ ,  $15^2 = 225$ ,  $16^2 = 256$ ,  $17^2 = 289$  und  $18^2 = 324$ . Von diesen fallen 100, 144, 169 und 196 heraus, da sie keine Ziffer  $c = 2$  enthalten. Für die übrigen ist zu prüfen, ob die anderen beiden Ziffern neben der Zwei (bzw. einer der Zweien) als  $a$  und  $b$  gewählt werden können. Dies ist weder bei  $121 = 11^2$  (wegen  $1 + 1 \neq 2$ ),  $256 = 16^2$  (wegen  $5 + 6 \neq 16$ ) noch  $324 = 18^2$  (wegen  $3 + 4 \neq 18$ ) der Fall, wohl aber bei  $17^2 = 289$  (wegen  $8 + 9 = 17$ ). Also ist  $z = 289$  die einzige Lösung dieses Falls.

Ist  $c = 3$ , so folgt wegen  $4^3 = 64 < z < 1000 = 10^3$ , dass  $5 \leq a + b \leq 9$  ist. Die betreffenden Kubikzahlen  $5^3 = 125$ ,  $6^3 = 216$ ,  $7^3 = 343$ ,  $8^3 = 512$  und  $9^3 = 729$  enthalten bis auf  $343 = 7^3$  keine Ziffer  $c = 3$ , können also keine Lösungen sein. Dagegen ist wegen  $3 + 4 = 7$  tatsächlich  $z = 343$  damit die einzige Lösung für diesen Fall.

Ist  $c = 4$ , so folgt wegen  $3^4 = 81 < z < 6^4 = 1296$ , dass  $4 \leq a + b \leq 5$  ist. Die relevanten vierten Potenzen  $4^4 = 256$  und  $5^4 = 625$  enthalten keine Ziffer  $c = 4$ , sodass es hier keine Lösung gibt.

Ist  $c = 5$ , so folgt wegen  $2^5 = 32 < z < 4^5 = 1024$ , dass  $a + b = 3$  sein müsste. Jedoch enthält  $3^5 = 243$  keine Ziffer  $c = 5$ , sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Ist  $c = 6$ , so folgt wegen  $2^6 = 64 < z < 4^6 = 4096$ , dass  $a + b = 3$  sein müsste, was aber wegen  $3^6 = 729$ , was keine Ziffer  $c = 6$  enthält, zu keiner Lösung führt.

Ist  $c \geq 7$ , so folgt wegen  $z < 1000 < 2187 = 3^7 \leq 3^c$ , dass  $a + b \leq 2$  sein muss. Da aber  $1^c = 1 < 100 \leq z$  ist, muss immer auch  $1 < a + b$ , also in diesen Fällen zusammen immer  $a + b = 2$  gelten. Wegen  $2^{10} = 1024 > z$  muss also  $c \leq 9$  sein, sodass noch die Fälle  $2^7 = 128$ ,  $2^8 = 256$  und  $2^9 = 512$  zu betrachten, die jedoch keine Lösungen liefern, weil jeder der Potenzen jeweils nicht das zugehörige  $c$  als Ziffer enthält.

Also gibt es insgesamt genau zwei Lösungen, nämlich  $z_1 = 289 = (8 + 9)^2$  und  $z_2 = 343 = (3 + 4)^3$ .

**Aufgabe 2 - 220932**

Über zwei Kreise  $k_1, k_2$  und ihre Mittelpunkte  $M_1$  bzw.  $M_2$  wird vorausgesetzt, dass der Kreis  $k_2$  durch den Punkt  $M_1$  geht und den Kreis  $k_1$  in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von  $k_1$  mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt  $M_1$  hat und durch  $M_2$  geht,  $S$  genannt.

Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit diesen Kreisen hat, seien  $P_1$  und  $P_2$  genannt.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $P_2S$  auf  $M_1S$  senkrecht steht!

Es seien  $r_1$  sowie  $r_2$  die Längen der Radien von  $k_1$  und  $k_2$  sowie  $g$  die Gerade  $M_1M_2$ .

Da die Berührungspunkte senkrecht auf die Tangente stehen, sind sowohl  $M_1P_1$  als auch  $M_2P_2$  senkrecht auf  $P_1P_2$  und damit zueinander parallel.

Ist  $P_1P_2 \parallel M_1M_2$ , so ist das Viereck  $M_1M_2P_2P_1$  ein Parallelogramm, sodass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, also  $r_1 = |M_1P_2| = |M_2P_2| = r_2$  und damit  $S = M_2$  gilt. Insbesondere ist dann  $P_2S = P_2M_2 \perp P_1P_2 \parallel M_1M_2 = M_1S$ , also  $P_2S \perp M_1S$ .

Seien ab nun die Geraden  $P_1P_2$  und  $g = M_1M_2$  nicht parallel (was gleichbedeutend mit  $r_1 \neq r_2$  ist) und  $X$  ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Da  $M_1P_1 \parallel M_2P_2$  ist, gilt nach dem Strahlensatz  $\frac{|XM_1|}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|XP_1|}{|XP_2|}$ .

Ist  $r_1 < r_2$ , so folgt  $|XM_1| < |XM_2|$ , sodass  $X$  auf dem von  $M_1$  ausgehenden Strahl auf  $g$  liegt, der  $M_2$  nicht enthält. Insbesondere ist  $|XM_2| = |XM_1| + |M_1M_2| = |XM_1| + r_2$ , also  $\frac{r_2}{|XM_2|} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$ .

Für  $r_1 < r_2$  ist auch  $|XP_1| < |XP_2|$ , sodass  $P_1$  zwischen  $X$  und  $P_2$  liegt. Damit ist

$$|P_1P_2| = |XP_2| - |XP_1| = |XP_2| \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad \text{also} \quad |P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Ist dagegen  $r_1 > r_2$ , so ist  $|XM_1| > |XM_2|$  und  $M_2$  liegt zwischen  $X$  und  $M_1$ , sodass sich  $|XM_2| = |XM_1| - |M_1M_2| = |XM_1| - r_2$ , also  $\frac{r_2}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} - 1$  ergibt.

Für  $r_2 > r_1$  ist auch  $|XP_1| > |XP_2|$ , sodass  $P_2$  zwischen  $X$  und  $P_1$  liegt. Damit ist  $|P_1P_2| = |XP_1| - |XP_2| = |XP_2| \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)$ , also genauso wie im Fall  $r_1 < r_2$  wieder

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Das Dreieck  $\triangle XM_2P_2$  ist rechtwinklig in  $P_2$ , da der Berührungsradius  $M_2P_2$  senkrecht auf der Tangente  $XP_2$  steht. Den Flächeninhalt  $F$  dieses Dreiecks kann man damit einerseits als das halbe Produkt der Längen seiner Katheten bestimmen, sodass  $2F = |XP_2| \cdot |P_2M_2| = |XP_2| \cdot r_2$  gilt.

Andererseits kann man den Flächeninhalt dieses Dreiecks auch als halbes Produkt der Länge der Hypotenuse  $|XM_2|$  und der Länge  $h$  der zugehörigen Höhe von  $P_2$  auf  $XM_2$  bestimmen, sodass auch  $2F = |XM_2| \cdot h$  gilt. Insbesondere ist also  $1 = \frac{2F}{2F} = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2| \cdot h}$  und damit

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|} = h$$

Sei  $H$  der Fußpunkt der Höhe von  $P_2$  auf  $XM_2$ . Dann ist also  $|P_2P_1| = |P_2H|$ . Weiterhin ist  $XM_2 \perp HP_2$ , also gilt wegen nun  $XM_2 = M_1H$  nun  $\angle M_1HP_2 = 90^\circ = \angle P_2P_1M_1$ .

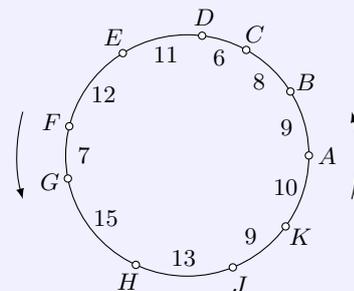
Und schließlich gilt  $|P_2M_1| = |P_2M_1|$ , sodass die beiden Dreiecke  $\triangle M_1P_1P_2$  und  $\triangle M_1HP_2$  in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen. Da zusätzlich noch die größere der beiden Seiten (es ist  $M_1P_2$  die Hypotenuse in beiden rechtwinkligen Dreiecken) dem (rechten) Winkel gegenüberliegt, sind diese beiden Dreiecke damit kongruent und insbesondere sind auch die dritten Seiten gleich, sodass  $|M_1P_1| = |M_1H| = r_1$  gilt und  $H$  auch auf dem Kreis  $k_1$  liegt.

Und da  $H$  nach Konstruktion innerhalb von  $k_2$  liegt, gilt schließlich  $H = S$ , sodass  $P_2S = P_2H \perp HM_1 = SM_1$ , also  $P_2S \perp SM_1$  gilt,  $\square$ .

### Aufgabe 3 - 220933

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$  und  $K$ . Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.

Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Äquivalent zur Aufgabenstellung können wir annehmen, dass jedes Auto mit einem Kraftstoffvorrat von 0 startet, dafür aber an jeder Station ein Kanister mit der angegebenen Menge an Litern Kraftstoff zur Verfügung steht. (Dies hebt die Asymmetrie der Startstation im Vergleich zu allen anderen Stationen auf.)

Ein Auto kann also genau dann den Rundkurs schaffen, wenn das Volumen seines aktuell zur Verfügung stehenden Kraftstoffs nie negativ wird, also an jeder Station (nach Auffüllen) mindestens so groß ist, wie bis zur nächsten Station benötigt wird.

Erreicht man eine der Stationen  $B, C, D, F, H$  oder  $K$ , so kann man immer mindestens eine Station weiterfahren, da man dort mindestens so viel Kraftstoff erhält, wie man bis zur nächsten Station benötigt.

An den Stationen  $A$ ,  $E$ ,  $G$  und  $J$  ist dies nicht der Fall, sodass die vier dort startenden Autos nicht einmal bis zur nächsten Station kommen können.

Hat man also Station  $B$  erreicht, so kann man bis  $E$  durchfahren und hat auf dieser Teilstrecke in  $B$ ,  $C$  und  $D$  insgesamt 29 Liter Kraftstoff auftanken können, während man von  $B$  bis  $E$  nur 25 Liter verbraucht hat, sodass man nun 4 Liter mehr zur Verfügung hat als zum Zeitpunkt, indem man in  $B$  war.

(Startete man in  $B$ ,  $C$  oder  $D$ , sind es nun also höchstens 4 Liter, weil man nicht notwendigerweise den Überschuss an noch nicht besuchten Stationen, da sie "vor" dem eigenen Start lagen, erhalten hat.)

Da aber an Station  $E$  nur 5 zusätzliche Liter zu erhalten sind, aber 12 benötigt werden, erreichen die in  $B$ ,  $C$  oder  $D$  gestarteten Autos die Station  $F$  nicht, während "vor"  $B$  gestartete dies nur tun, wenn sie in  $B$  noch mindestens einen Kraftstoffvorrat von 3 Litern hatten.

Dazu musste man in  $A$  noch mindestens  $3 + 9 - 8 = 4$  Liter (vor Nachtanken) und in  $K$  mindestens  $4 + 10 - 14 = 0$  Liter (vor Nachtanken) an Kraftstoffvorrat haben. Dies bedeutet, dass jedes Auto, das bis  $K$  kommt, dann bis Station  $F$  durchfahren kann, und danach (vor Nachtanken) genauso viel Kraftstoff noch besitzt, wie vor dem Nachtanken in  $K$ . (Da nur noch die Autos  $F$ ,  $H$  und  $K$  den Rundkurs ggf. absolvieren können, starten auch alle spätestens bei  $H$  und sind frühestens bei  $F$  am Ziel.)

Wer  $F$  erreicht hat (und noch nicht am Ziel ist), erhält man zusätzliche 13 Liter, benötigt aber bis  $G$  nur 7, sodass man auf jeden Fall noch mindestens 6 Liter Kraftstoffvorrat hat. Mit den zusätzlichen 9 Litern bei  $G$  kann man also in jedem Fall die Strecke bis  $H$  absolvieren und hat danach (vor Nachtanken) einen so hohen Kraftstoffvorrat wie in  $F$  (vor Nachtanken).

Analog gilt auch, dass für jedes der drei verbleibenden Autos, das aus dem Erreichen von  $H$  (sofern dies noch nicht das Ziel war) das Erreichen von  $K$  folgt, da man in  $H$  zusätzliche 16 Liter erhält, bis  $J$  aber nur 13 benötigt, also in  $J$  noch mindestens 3 Liter übrig hat, die mit den dort erhaltenen 6 gerade für die benötigten 9 nach  $K$  ausreichen.

Damit gilt, dass genau die drei Autos an den Stationen  $F$ ,  $H$  und  $K$  den Rundkurs absolvieren können, wobei ihnen an diesen drei Stationen auch immer gerade der Sprit ausgeht und sie sich mit dem letzten Tropfen in dieses (Zwischen-)Ziel schleppen.

#### Aufgabe 4 - 220934

Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

Dirk hat recht:

Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen  $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$  bei der Teilung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt der Rest der Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer den Rest  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$  oder  $1 + 1 = 2$ , nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form  $4k + 3$  sich nicht also Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

#### Aufgabe 5 - 220935

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien  $P$  und  $Q$ .

Beweisen Sie, dass für jeden Punkt  $S$  der Kugeloberfläche die Summe  $PS^2 + QS^2$  denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweis:

1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B.  $PS$ ,  $PQ$  seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Es seien  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die Ebenen, die die beiden Großkreise beinhalten. Da diese verschieden sind, sind auch die Ebenen verschieden, schneiden sich also in einer Geraden. Da beide Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten, ist dieser auch in der Schnittgeraden enthalten, sodass  $P$  und  $Q$  sowohl auf der Kugeloberfläche als auch einer Geraden durch den Kugelmittelpunkt liegen. Sie bilden also einen Durchmesser der Kugel und es gilt  $|PQ| = 2$ .

Ist  $S = P$  oder  $S = Q$ , so vereinfacht sich die Summe  $|PS|^2 + |QS|^2$  zu  $|PQ|^2 + 0^2 = 2^2 = 4$ .

Sei ab nun  $S$  verschieden von  $P$  und  $Q$  ein Punkt auf der Kugeloberfläche. Da  $PQ$  ein Durchmesser der Kugel ist, liegt  $S$  also nicht auf der Geraden durch  $P$  und  $Q$ , sodass genau eine Ebene  $\epsilon$  existiert, auf der die drei Punkte liegen. Mit  $P$  und  $Q$  liegt auch ihr Mittelpunkt, was der Kugelmittelpunkt ist, in dieser Ebene, sodass der Schnitt von  $\epsilon$  mit der Kugeloberfläche ein Großkreis ist, insbesondere also ein Kreis mit Durchmesser  $PQ$ , auf dem  $S$  liegt.

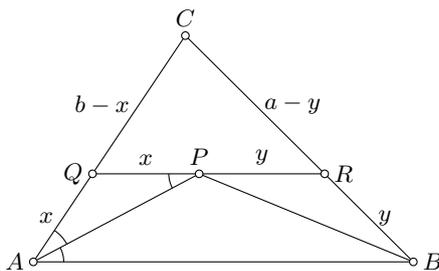
Nach dem Satz von Thales ist damit das Dreieck  $\triangle PQS$  rechtwinklig in  $S$  und nach dem Satz von Pythagoras gilt  $|PS|^2 + |QS|^2 = |PQ|^2 = 2^2 = 4$ , sodass diese Summe unabhängig von der Lage immer den Wert 4 annimmt,  $\square$ .

Aufgaben 1-5 der III. Runde 1982 gelöst von cyrix

### Aufgabe 6 - 220936

Von einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen  $AB = c$ ,  $AC = b$  und  $BC = a$  gegeben. Die Halbierenden der Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle ABC$  mögen einander in  $P$  schneiden. Durch  $P$  sei die Parallele zu  $AB$  gelegt. Sie schneide  $AC$  in  $Q$  und  $BC$  in  $R$ .

Ermitteln Sie die Länge  $QR$  in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!



Es sei  $x = PQ$ ,  $y = PR$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $\angle PAQ = \angle BAP = \angle QPA$  (Wechselwinkel an den Parallelen  $AB, PQ$ ), also ist das Dreieck  $APQ$  gleichschenkelig mit  $AQ = PQ = x$ . Entsprechend gilt  $BR = PR = y$ .

Wegen  $QR \parallel AB$  folgt aus dem Strahlensatz

$$CA : CB = QA : RB, \quad b : a = x : y, \quad by = ax \quad (1)$$

$$CA : CQ = AB : AR, \quad b : (b - x) = c : (x + y), \quad bx + by = bc - cx \quad (2)$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt  $bx + ax = bc - cx$  und

$$x = \frac{bc}{a + b + c}$$

hieraus und aus (1) folgt  $y = \frac{ax}{b} = \frac{ac}{a+b+c}$ . Damit ergibt sich

$$QR = x + y = \frac{(a + b)c}{a + b + c}$$

Lösung übernommen von [5]

## 2.25 XXIII. Olympiade 1983

### 2.25.1 I. Runde 1983, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 230911

Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $5 \leq a \leq 10$  und  $5 \leq b \leq 10$  gibt es folgende "Fingerregel":

Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl  $a$  größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl  $b$ . Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis  $a \cdot b$ .

Beweisen Sie, dass diese "Fingerregel" für alle genannten  $a$  und  $b$  gilt!

Nach der angegebenen Regel wird aus  $a$  und  $b$  die Zahl

$$z = ((a - 5) + (b + 5)) \cdot 10 + (10 - a)(10 - b)$$

berechnet. Man erhält

$$z = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab$$

Damit ist die Gültigkeit der "Fingerregel" für die genannten  $a$  und  $b$  bewiesen.

#### Aufgabe 2 - 230912

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen  $x$  und  $y$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Zahl  $y$  entsteht aus  $x$  durch Vertauschen der beiden Ziffern.
- (2) Es gilt  $x + y = 121$ .

Die Bedingung (1) wird genau dann erfüllt, wenn

$$x = 10a + b, \quad y = 10b + a \quad (3)$$

mit zwei natürlichen Zahlen  $a, b$  gilt, für die  $1 \leq a \leq 9$  und  $1 \leq b \leq 9$  (4) gilt. Hiermit wird (2) genau dann erfüllt, wenn  $a$  und  $b$  außer (4) auch

$$10a + b + 10b + a = 121 \quad \text{oder, gleichwertig hiermit} \quad 11 \cdot (a + b) = 121, \quad a + b = 11 \quad (5)$$

erfüllen.

Da (4) und (5) genau durch die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen  $a, b$  erfüllt werden, folgt nach (3), dass genau die anschließend angegebenen Zahlen  $x, y$  die geforderten Eigenschaften haben.

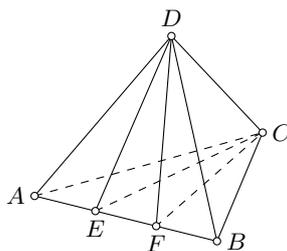
$a$	$b$	$x$	$y$	$a$	$b$	$x$	$y$
2	9	29	92	3	8	38	83
4	7	47	74	5	6	56	65
6	5	65	56	7	4	74	47
8	3	83	38	9	2	92	29

#### Aufgabe 3 - 230913

Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

- a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!
- b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder  $T_1, T_2, T_3$  verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als  $T'_1, T'_2, T'_3$  bezeichnen lassen, dass  $T_1 \cong T'_1$ ,  $T_2 \cong T'_2$  und  $T_3 \cong T'_3$  gilt.

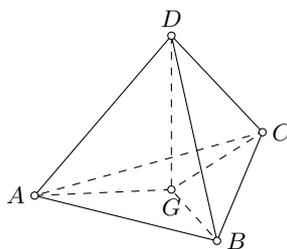
a) Zwei Möglichkeiten sind beispielsweise die folgenden:



- Die Kante  $AB$  eines regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$  werde durch  $E$  und  $F$  in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt (Abbildung 1). Dann wird  $ABCD$  in die Tetraeder

$$AECD, \quad EFCD, \quad FBCE \quad (1)$$

zerlegt, und diese sind volumengleich; denn die Grundflächen  $AEC$ ,  $EFC$ ,  $FBC$  sind flächeninhaltsgleich (gleichlange Grundlinien  $AE$ ,  $EF$ ,  $FB$ , gemeinsame Höhe; Lot von  $C$  auf  $AB$ ), und die zugehörige Höhe ist gemeinsam (Lot von  $D$  auf die Ebene durch  $A, B, C$ ).



- Es sei  $G$  der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  (Abbildung 2).

Dann wird  $ABCD$  in

$$ABGD, \quad BCGD, \quad CAGD \quad (2)$$

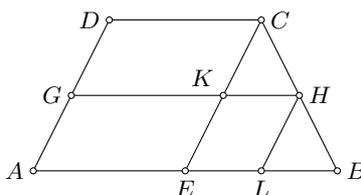
zerlegt, und auch diese Tetraeder sind volumengleich (übereinstimmende Höhe  $GD$  zu den Grundflächen  $ABG$ ,  $BCG$ ,  $CAG$  mit gleichlangen Grundlinien  $AB = BC = CA = a$  und gleichlangen Höhe  $\frac{a}{6}\sqrt{3}$ , wegen der Übereinstimmung von Höhe und Seitenhalbierenden ein Drittel der Höhenlänge  $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ ).

b) Im Tetraeder  $EFCD$  aus (1) gilt  $EF < a$ ,  $EC = ED = FC = FD < a$ , es hat also nur eine Kante der Länge  $a$ . In allen Tetraedern aus (2) kommen dagegen drei kanten der Länge  $a$  vor. Daher ist  $EFCD$  zu keinem Tetraeder aus (2) kongruent. Daraus folgt die Verschiedenheit der Zerlegungen (1), (2).

#### Aufgabe 4 - 230914

Ein Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel DC$  und  $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$  soll durch eine zu  $AB$  parallele Strecke  $GH$  in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke  $GH$  gibt und dass ihre Länge  $\overline{GH} = s$  eindeutig durch  $a$  und  $c$  bestimmt ist! Ermitteln Sie  $s$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $c$ !



(I) Wenn eine zu  $AB$  parallele Strecke  $GH$  ( $G$  auf  $AD$ ,  $H$  auf  $BC$ ) das Trapez in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt, so folgt:

Es sei  $E$  der Punkt auf  $AB$  mit  $AE = DC$ . Die Strecken  $EC$  und  $GH$  schneiden sich in einem Punkt  $K$ .

Im Viereck  $AEKG$  gilt somit außer  $AE \parallel GH$  auch  $AG \parallel EK$ , folglich ist es ebenfalls ein Parallelogramm. Hiernach gilt  $EB = a - c$  und  $KH = s - c$ .

Die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes  $ABCD$  seien  $h$  bzw.  $F$ , die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes  $GHCD$  seien  $h'$  bzw.  $F'$ . Dann sind  $h$  und  $h'$  auch Höhenlängen der Dreiecke  $EBC$  bzw.  $KHC$ ; diesen sind wegen  $EB \parallel KH$  zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h'} &= \frac{EB}{KH} = \frac{a-c}{s-c} \\ \frac{F}{F'} &= \frac{(a+c)h}{(a+c)h'} = \frac{a^2-c^2}{s^2-c^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Wegen  $F = 2F'$  gilt somit

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 2(s^2 - c^2) \\ a^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \end{aligned} \quad (2)$$

wegen  $s > 0$  also

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} \quad (3)$$

Wegen  $c < \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} < a$  liegt der Punkt  $L$  auf  $AB$  mit  $AL = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)}$  zwischen  $E$  und  $B$ . Für ihn ist  $ALHG$  wegen  $AL \parallel GH$  und  $AL = GH$  ein Parallelogramm. Daher kann nur die durch  $LH \parallel AD$  (und  $H$  auf  $BC$ ) sowie  $GH \parallel AB$  (und  $G$  auf  $AD$ ) bestimmte Strecke  $GH$  die geforderten Eigenschaft haben.

(II) Für diese Strecke ist  $ALHG$  ein Parallelogramm, also gilt für ihre Länge (3) und folglich (2). Ferner kann man für sie wie in (I) wieder (1) herleiten.

Daraus folgt  $F = 2F'$ ; also hat die Strecke  $GH$  die geforderte Eigenschaft.

Mit (I) und (II) ist bewiesen, dass es genau eine Strecke  $GH$  mit der geforderten Eigenschaft gibt. Ihre Länge ist in (3) angegeben; wie verlangt, eindeutig durch  $a$  und  $c$  bestimmt.

*Lösungen der I. Runde 1983 übernommen von [5]*

## 2.25.2 II. Runde 1983, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 230921**

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen  $x$ , für die die Summe aus  $x$  und der durch Vertauschen der Ziffern von  $x$  entstehenden Zahl  $y$  eine Quadratzahl ist!

Sind  $a$  und  $b$  die Ziffern einer zweistelligen Zahl  $x$ , so gilt

$$1 \leq a \leq 9; \quad 0 \leq b \leq 9; \quad \text{und} \quad x = 10a + b \quad (1)$$

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus  $y = 10b + a$ . Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in  $a + b$  enthalten sind. Wegen (1), also  $1 \leq a + b \leq 18$ , kann  $a + b$  außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist  $x + y$  genau dann eine Quadratzahl, wenn  $a + b = 11$  gilt. Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertetabelle  $(a; b)$  der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen  $x$  die verlangte Eigenschaft.

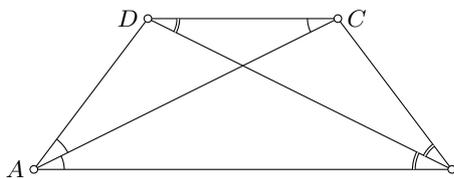
$a$	2	3	4	5	6	7	8	9
$b$	9	8	7	6	5	4	3	2
$x$	29	38	45	56	65	74	83	92

**Aufgabe 2 - 230922**

Von einem Trapez  $ABCD$  wird vorausgesetzt

- (1) Es gilt  $AB \parallel DC$ .
- (2) Es gilt  $AB > DC$ .
- (3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von  $110^\circ$ .
- (4) Die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sind die Halbierenden der Winkel  $\angle DAB$  bzw.  $\angle ABC$ .

Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!



Es gilt  $\angle BAC = \angle DCA$  und  $\angle ABD = \angle CD$  als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus (4) und (1) folgt daher

$$\angle DAC = \angle DCA \quad \text{bzw.} \quad \angle DBC = \angle CDB \quad (5)$$

Aus (5) folgt:  $AD = DC = CB$  (6).

Wegen (2) ist  $ABCD$  kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei  $D$  und  $C$ , also gilt  $\angle ADC = \angle DCB = 110^\circ$  (7).

Die Innenwinkel bei  $A$  und  $B$  ergänzen (7) jeweils zu  $180^\circ$ , d.h., es gilt  $\angle DAB = \angle ABC = 70^\circ$  (8).

Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

**Aufgabe 3 - 230923**

$$\begin{array}{r} \square \ \square \ \square \ \square \\ + \ \square \ \square \ \square \ \square \\ \hline \square \ \square \ \square \ \square \end{array}$$

In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.

Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

- (1) Die vorderste Ziffer der gesuchten Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleiner als 2000.

Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis  $\geq 10$  gefordert ist.

Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, dass die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muss, o.B.d.A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen:

0 wegen (3), 1 wegen (1), 9 wegen (2), 2, denn sonst erhält man in der Summe eine 1.

Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe ein 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:

Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbleibenden Ziffern so zu kombinieren, dass die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen \* und \*\* gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	möglich dritte Zeile des Schemas
3	2	0,4,5,6,7,8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0,2,5,6,7,8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0,2,3,6,7,8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0,2,3,4,7,8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0,2,3,4,5,8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0,2,3,4,5,6	4+5 oder 3+6	**

Damit ist gezeigt, dass nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z.B. die folgenden Eintragungen zeigen:

	7	4	9		4	7	9		8	2	9		2	9	9				
+	8	5	3	+	5	8	3	+	6	7	4	+	7	6	4				
	1	6	0	2		1	0	6	2		1	5	0	3		1	0	5	3
	4	2	9		2	4	9		3	4	9		4	3	9				
+	8	7	6	+	7	8	6	+	8	5	7	+	5	8	7				
	1	3	0	5		1	0	3	5		1	2	0	6		1	0	2	6

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

**Aufgabe 4 - 230924**

Beweisen Sie:

Ist  $p$  eine Primzahl, dann ist  $\sqrt{p}$  keine rationale Zahl.

Indirekter Beweis:

Angenommen,  $\sqrt{p}$  wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  mit  $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ .

Dabei könnte erreicht werden, dass  $m$  und  $n$  teilerfremd sind. Daraus würde  $pn^2 = m^2$  folgen, die Primzahl  $p$  müsste also  $m$  teilen, d.h., es würde  $m = px$  mit einer natürlichen Zahl  $x$  gelten.

Daraus ergäbe sich  $pn^2 = p^2 \cdot x^2$ , also  $n^2 = p \cdot x^2$ , und daher müsste  $p$  auch  $n$  teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $n$  und  $m$ .

Also war die Annahme, dass  $\sqrt{p}$  rational ist, falsch, d.h.,  $\sqrt{p}$  ist keine rationale Zahl.

Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

## 2.25.3 III. Runde 1983, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 230931**

Man ermittle alle Tripel  $(x, y, z)$  natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $x, y$  und  $z$  sind Primzahlen.
- (2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von  $x, y$  und  $z$  (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
- (3) Es gilt  $x < y$ .
- (4) Es gilt  $x + y = z$ .

Wegen (1) und (4) ist  $z \geq 2 + 2 > 2$ , also ungerade. Damit ist genau eine der beiden Summanden  $x$  bzw.  $y$  gerade, also wegen (1) gleich 2, sodass wegen (3)  $x = 2$  gilt, da dies die kleinste Primzahl ist. Damit sind  $y$  und  $z$  Primzahlzwillinge.

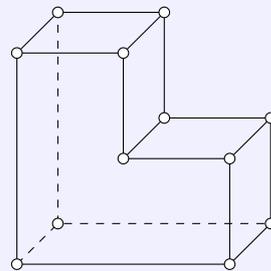
Mehrstellige Primzahlzwillinge besitzen aber die Endziffern (9 und 1), (1 und 3) oder (7 und 9), da die Endziffer 5 zur Teilbarkeit durch 5 und damit (und wegen der Mehrstelligkeit) zum Widerspruch zu (1) führen würde. Also ist  $y < z$  einstellig und es ergeben sich die Lösungstriple  $(2, 3, 5)$  und  $(2, 5, 7)$ .

**Aufgabe 2 - 230932**

In der Abbildung ist ein Körper  $K$  skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengesetzt sind.

Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt  $K$  soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel  $W$  (Kantenlänge  $n$  Zentimeter) zusammengesetzt werden.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n > 0$ , für die das möglich ist!



Da das Volumen von  $K$  3 ist, folgt direkt, dass nur für  $n = 3k$  ein Würfel der Kantenlänge  $n$  gefüllt werden kann. Ein Würfel der Kantenlänge  $3k$  zerfällt in  $k^3$  Würfel der Kantenlänge 3. Daher reicht es für  $n = 3$  eine Lösung anzugeben. Eine Möglichkeit ist

1	1	3	5	6	3	5	5	7
1	2	3	6	6	7	8	9	7
2	2	4	8	4	4	8	9	9

wobei hier die drei Ebenen angegeben sind und eine Ziffer einen K-Block beschreibt.

**Aufgabe 3 - 230933**

$$\begin{array}{r}
 \square \quad \square \quad \square \\
 + \quad \square \quad \square \quad \square \\
 \hline
 \square \quad \square \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Wir nehmen indirekt an, es gäbe eine solche Eintragung mit genau zwei Überträgen.

Die Tausenderstelle der Summe  $s$  kann nur durch einen Übertrag entstanden sein. Da nur zwei Summanden  $s_1$  und  $s_2$  addiert werden, kann wegen  $9 + 9 + 1 = 19 < 20$  ein Übertrag nur 1 lauten. Insbesondere ist die Tausenderstelle von  $s$  also eine 1.

Wir denken uns nun zur Vereinfachung der Notation die beiden Summanden um eine Tausenderstelle 0 ergänzt, sodass alle drei Zahlen die gleiche Stellenanzahl besitzen.

Es sei  $q_1$  die Quersumme des ersten Summanden,  $q_2$  die des zweiten und  $q$  die der Summe. Dann gilt offenbar  $q_1 + q_2 + q = 45$ , da jede der Ziffern 1 bis 9 insgesamt genau einmal (und die 0 nun genau dreimal) in diesen Zahlen vorkommt.

Weiterhin entsteht eine Ziffer in  $s$  durch die Addition der beiden entsprechenden Ziffern in  $s_1$  und  $s_2$ , sofern kein Übertrag in dieser oder der vorhergehenden Stelle auftritt. Entstand ein Übertrag in der vorhergehenden Stelle, erhöht sich der Wert der gerade betrachteten Ziffer von  $s$  gegenüber der Summe der entsprechenden Ziffern von  $s_1$  und  $s_2$  um den Übertrag von 1. Entsteht (ggf. dadurch) nun in der betrachteten Stelle ein Übertrag, ist die Ziffer in  $s$  um genau 10 kleiner als die Summe (und die nächste Ziffer in  $s$  erhöht sich um den Übertrag von 1).

Summiert man nun alle diese Summen der entsprechenden Ziffern von  $s_1$  und  $s_2$ , erhält man wieder  $q_1 + q_2$ , da jede Ziffer von  $s_1$  sowie  $s_2$  dabei genau einmal betrachtet wird. Andererseits ergibt dies nach der eben erfolgten Beobachtung  $q_3 + k \cdot (10 - 1)$ , wobei  $k$  die Anzahl der Überträge ist, da dann an genau  $k$  Stellen die Ziffer in  $s$  durch einen Übertrag um 1 erhöht und auch an genau  $k$  Stellen um genau 10 gegenüber dem Wert der Summe der entsprechenden Ziffern (+ ggf. Übertrag aus vorheriger Stelle) verringert wurde.

Laut Aufgabenstellung soll  $k = 2$  gelten, sodass man  $q_1 + q_2 = q_3 + 18$  erhält. Setzt man dies in  $q_1 + q_2 + q_3 = 45$  ein, erhält man  $2q_3 + 18 = 45$  bzw. den Widerspruch  $q_3 = \frac{27}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Also kann es keine solche Eintragung mit genau 2 Überträgen geben,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 230934

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$-5 \leq \frac{4x - 3}{2x + 1} < 6$$

Es ist  $\frac{4x-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$ , die Ungleichungskette also äquivalent zu  $-7 < -\frac{5}{2x+1} < 4$  bzw.  $-4 < \frac{5}{2x+1} < 7$  sowie  $-\frac{4}{5} < \frac{1}{2x+1} < \frac{7}{5}$ .

Wir unterscheiden danach, ob  $\frac{1}{2x+1}$  positiv oder negativ ist. (Verschwinden kann es aufgrund des positiven Zählers nicht.) Dabei ist  $x \neq -\frac{1}{2}$ , da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Der Bruch ist dabei genau dann positiv, wenn  $x > -\frac{1}{2}$  ist.

1. Fall:  $x > -\frac{1}{2}$ : Dann ist die erste Ungleichung automatisch erfüllt und die zweite nach Reziprokenbildung äquivalent zu  $2x + 1 > \frac{5}{7}$ , also  $x > -\frac{1}{7}$ . Wegen  $x > -\frac{1}{7} > -\frac{1}{2}$  erfüllen all jene  $x$  (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.

2. Fall:  $x < -\frac{1}{2}$ : Dann ist die zweite Ungleichung automatisch erfüllt und die erste nach Reziprokenbildung äquivalent zu  $-\frac{5}{4} > 2x + 1$ , also  $x < -\frac{9}{8}$ . Wegen  $x < -\frac{9}{8} < -\frac{1}{2}$  erfüllen all jene  $x$  (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.

Zusammenfassend wird also die Ungleichungskette der Aufgabenstellung genau von jenen reellen Zahlen  $x$  erfüllt, die kleiner als  $-\frac{9}{8}$  oder größer als  $-\frac{1}{7}$  sind.

#### Aufgabe 5 - 230935

In einem Dreieck  $ABC$  schneide eine Parallele zu  $AB$ , über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite  $AC$  in einem Punkt  $A_1$  zwischen  $A$  und  $C$ , und sie schneide die Seite  $BC$  in  $B_1$ . Ferner sei  $P$  auf  $AB$  ein Punkt zwischen  $A$  und  $B$ , über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  sei  $F_0$ , der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_1B_1C$  sei  $F_1$ .

Ermitteln Sie den Flächeninhalt  $F$  des Vierecks  $A_1PB_1C$  in Abhängigkeit von  $F_0$  und  $F_1$ !

Die Dreiecke  $\triangle A_1B_1C$  und  $\triangle ABC$  sind aufgrund der Parallelität von  $A_1B_1$  und  $AB$  zueinander ähnlich, da ihre entsprechenden Innenwinkel bei  $A_1$  und  $A$  bzw.  $B_1$  und  $B$  jeweils Stufenwinkel, also insbesondere gleich groß, sind. Damit gibt es eine reelle Zahl  $k > 0$ , sodass  $\triangle A_1B_1C$  aus  $\triangle ABC$  durch Streckung um den Faktor  $k$  mit Zentrum  $C$  hervorgeht.

Sei  $h$  die Länge der Höhe von  $C$  auf  $AB$  und  $h_1$  die von  $C$  auf  $A_1B_1$ . Insbesondere gilt dann  $h_1 = k \cdot h$  und  $|A_1B_1| = k \cdot |AB|$ , also  $F_1 = k^2 \cdot F_0$ , d.h.  $k = \sqrt{\frac{F_1}{F_0}}$ .

Die Diagonale  $A_1B_1$  zerlegt das Viereck  $A_1PB_1C$  in die zwei Dreiecke  $\triangle A_1B_1C$  und  $\triangle A_1B_1P$ , sodass sich sein Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte dieser beiden Teildreiecke ergibt.

Es sei  $h_2$  die Länge der Höhe von  $P$  auf  $A_1B_1$  und  $F$  der Fußpunkt von  $C$  auf  $AB$  sowie  $F_1$  der Fußpunkt der Höhe von  $C$  auf  $A_1B_1$ . Da  $A_1B_1 \parallel AB$  gilt, liegt  $F_1$  auf  $CF$  und es gilt

$$h = |CF| = |CF_1| + |F_1F| = h_1 + |F_1F|$$

Wiederum wegen  $A_1B_1 \parallel AB$  ist  $h_2 = |F_1F|$ , da  $F_1$  auch der Fußpunkt der Höhe von  $F$  auf  $A_1B_1$  ist. Insbesondere ist also  $h_2 = h - h_1 = (1 - k) \cdot h$ .

Für das Dreieck  $\triangle A_1B_1P$  ergibt sich also ein Flächeninhalt von

$$F_P := \frac{1}{2} |A_1B_1| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |AB| \cdot (1 - k) \cdot h = F_0 \cdot (k - k^2)$$

und damit für den Flächeninhalt  $F$  des Vierecks  $A_1PB_1C$

$$F = F_P + F_1 = F_0 \cdot (k - k^2 + k^2) = F_0 \cdot k = F_0 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_0}} = \sqrt{F_1 \cdot F_0}.$$

### Aufgabe 6 - 230936

Drei Schüler  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck  $D$  in drei flächengleiche Dreiecke  $D_1, D_2, D_3$  zu zerlegen.

$X$  behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.

$Y$  behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.

$Z$  behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Welcher der drei Schüler hat recht?

Hinweis: Zwei Zerlegungen von  $D$  (einmal in  $D_1, D_2, D_3$ , ein zweites Mal in  $D'_1, D'_2, D'_3$ ) werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen  $D'_1, D'_2, D'_3$  gibt, für die  $D_1 \cong D'_1, D_2 \cong D'_2, D_3 \cong D'_3$  gilt.

$Y$  hat recht: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen, wie im Folgenden bewiesen wird.

Es sei  $D$  das gleichseitige Dreieck  $\triangle ABC$  mit Kantenlänge  $|AB| = |BC| = |CA| = a$ . Dann muss jeder dieser drei Punkte  $A, B, C$  auch Eckpunkt mindestens eines der drei Teildreiecke  $D_1, D_2, D_3$  sein.

Für jeden weiteren Eckpunkt  $P$  eines dieser drei Teildreiecke gilt, dass er auch Eckpunkt mindestens eines weiteren Teildreiecks sein muss. Also kann es höchstens  $\frac{3 \cdot 3 - 3}{2} = 3$  verschiedene weitere Eckpunkte der Teildreiecke geben.

Nehmen wir an, es gäbe drei und seien dies  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Sie müssten dann Eckpunkte von je genau zwei der Teildreiecke sein, sodass  $A, B$  und  $C$  Eckpunkt von nur jeweils genau einem der Teildreiecke sind. Es sei  $A$  o.B.d.A. Eckpunkt von  $D_1$ . Da  $A$  nicht Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks ist, muss der gesamte Winkel  $\angle BAC$  durch  $D_1$  abgedeckt werden. Also müssen die beiden anderen Eckpunkte von  $D_1$  auf den Kanten  $AB$  und  $AC$  liegen.

Wäre auch  $B$  Eckpunkt von  $D_1$ , so müsste dessen dritter Eckpunkt analog auch auf  $BC$  liegen, also auf dem Schnittpunkt von  $AC$  und  $BC$ , sodass  $D_1 = \triangle ABC = D$  folgen würde, was ein Widerspruch ist. Also liegt auf jedem Teildreieck genau einer der Eckpunkt von  $D$  und zwei der Punkte  $P_1, P_2, P_3$ , welche auf den vom entsprechenden Eckpunkt von  $D$  ausgehenden Kanten von  $D$  liegen müssen. Damit verbliebe aber in der Zerlegung das Dreieck  $\triangle P_1P_2P_3$ , welches nicht durch die Teildreiecke  $D_1, D_2, D_3$  abgedeckt wird, sodass wieder ein Widerspruch entsteht.

Also können wir schlussfolgern, dass es höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte gibt und damit auch mindestens eine der Seiten des Dreiecks  $D$  nicht durch einen zusätzlichen Eckpunkt der Teildreiecke zerlegt wird. Wir führen im Folgenden eine Fallunterscheidung danach durch, wie viele der Kanten von  $D$  durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke zerlegt werden:

Fall 1: Keine der Kanten  $AB, BC, AC$  wird durch einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. Dann seien o.B.d.A.  $A, B$  Eckpunkte von  $D_1$ ;  $B, C$  von  $D_2$  und  $C, A$  von  $D_3$ . Da es nur höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte geben kann, müssen die dritten Eckpunkte von mindestens zwei der drei Teildreiecke zusammenfallen. O.B.d.A. haben  $D_1$  und  $D_2$  den gemeinsamen dritten Eckpunkt  $P$ . Dann jedoch muss auch

der dritte Eckpunkt von  $D_3$  gleich  $P$  sein, da dieser auch Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks sein muss.

Damit die drei Teildreiecke alle flächengleich sind, müssen sie, da sie  $D$  zerlegen, jeweils ein Drittel von dessen Flächeninhalt besitzen. Da  $D_1$  mit  $AB$  auch eine Seitenkante der Länge  $a$  besitzt, muss  $P$  auf einer Parallelen zu  $AB$  im Abstand  $\frac{1}{3}h$  liegen, wobei  $h$  die Länge der Höhe in  $D$  ist. Nach dem Strahlensatz und der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis  $2 : 1$  teilt, liegt auch  $S$  auf dieser Parallelen. Also muss  $P$  auf der Parallelen zu  $AB$  durch  $S$  liegen. Analog muss er wegen  $D_2$  auch auf der Parallelen zu  $BC$  durch  $S$  liegen, sodass  $P = S$  folgt. Abschließend ist dann aber auch die Höhe von  $P = S$  auf  $AC$  in  $D_3$  genau ein Drittel mal so lang wie die Höhe in  $D$ , sodass auch  $D_3$  flächengleich zu  $D_1$  und  $D_2$  ist und diese drei Teildreiecke  $D$  vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch die Verbindung des Schwerpunkts  $S$  von  $D$  mit seinen drei Eckpunkten entsteht. Die Teildreiecke  $D_1, D_2, D_3$  sind paarweise kongruent.

Fall 2: Genau eine der Kanten von  $D$ , o.B.d.A. sei dies  $BC$ , wird durch mindestens einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. O.B.d.A. sei damit die Kante  $AB$  vollständig in  $D_1$  und  $AC$  vollständig in  $D_3$  enthalten und seien deren dritte Eckpunkte mit  $P_1$  bzw.  $P_3$  bezeichnet. Mindestens einer von diesen beiden Punkte, o.B.d.A.  $P_1$ , muss auf  $BC$  liegen. Wir unterscheiden zwei Unterfälle, je nach dem, wo  $P_3$  liegt.

Fall 2.1: Auch  $P_3$  liegt auf  $BC$ . Da die Höhen von  $A$  auf die Gerade  $BC = BP_1 = P_2C$  identisch sind mit der Höhe von  $A$  auf  $BC$  in  $D$ , besitzen  $D_1$  und  $D_3$  genau dann jeweils ein Drittel des Flächeninhalts von  $D$ , wenn  $|BP_1| = |P_3C| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$  gilt. Dann ist jedoch auch  $|P_1P_3| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ , sodass auch das entstehende Dreieck  $D_2 = \triangle AP_1P_3$  flächengleich zu  $D_1$  und  $D_3$  ist, sowie diese drei Teildreiecke  $D$  vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Drittelung einer Seitenkante von  $D$  und Verbindung der dort entstehenden zwei Zwischenpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von  $D$  entsteht. Alle drei Teildreiecke besitzen eine Seite mit Länge  $\frac{1}{3}a$ , zwei dieser drei Teildreiecke ( $D_1$  und  $D_3$  in der obigen Bezeichnung) sind zueinander kongruent und besitzen als eine zweite Kantenlänge  $a$ , während das dritte gleichschenkelig ist.

Fall 2.2: Der dritte Eckpunkt  $P_3$  von  $D_3$  liegt nicht auf  $BC$  und damit echt im Innern des Dreiecks  $D$ . Wie im Fall 2.1 folgt, dass  $|BP_1| = \frac{1}{3}|BC|$  gelten muss. Das entstehende Dreieck  $\triangle AP_1C$  muss nun in zwei flächengleiche Teildreiecke  $D_2$  und  $D_3$  zerlegt werden. Dies ist nur möglich, indem es durch eine Seitenhalbierende zerlegt wird. Damit muss  $P_3$  Mittelpunkt einer der Seiten von  $\triangle AP_1C$  sein. Da aber  $P_3$  nach Fallannahme weder auf  $AC$  noch  $BC$  liegt, muss  $P_3$  der Mittelpunkt von  $AP_1$  sein.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Einzeichnen eines Punkts  $P_1$ , der eine Seitenkante  $CB$  von  $D$  im Verhältnis  $2:1$  teilt, der Verbindung dieses Punkts mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt  $A$  von  $D$  und dem Einzeichnen der Verbindung des Mittelpunkts  $P_3$  von  $AP_1$  mit dem dritten Eckpunkt  $C$  von  $D$  entsteht. Genau zwei der drei Teildreiecke besitzen eine Seite der Länge  $a$ , wobei genau eine davon eine zweite Kante der Länge  $\frac{1}{3}a$  besitzt.

Fall 3: Genau zwei der drei Kanten von  $D$  werden durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke geteilt, seien dies o.B.d.A.  $P_1$  auf  $BC$  und  $P_3$  auf  $AC$ , sodass  $AB$  ungeteilt verbleibt und vollständig o.B.d.A. in  $D_1$  enthalten ist. Dessen dritter Eckpunkt muss dann  $P_1$  oder  $P_3$  sein, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass  $P_1$  der dritte Eckpunkt von  $D_1$  ist. Dann folgt analog Fall 2.1, dass  $|BP_1| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$  gelten muss und analog Fall 2.2, dass  $P_3$  der Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks  $\triangle AP_1C$ , hier also von  $AC$  ist. Man überprüft leicht, dass alle entstehenden Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Wir erhalten hier also die eindeutige Zerlegung, die entsteht, wenn analog zu Fall 2.1 erst ein Punkt  $P_1$ , der eine Seite  $CB$  von  $D$  im Verhältnis  $2:1$  teilt, sowie die Verbindung zum gegenüberliegenden Eckpunkt  $A$  von  $D$  eingezeichnet wird, während dann das entstehende Dreieck  $\triangle AP_1C$  entlang der Seitenhalbierenden von  $AC$  halbiert wird. Es entstehen drei paarweise inkongruente Teildreiecke, wobei genau eines eine Seite mit Kantenlänge  $a$  und genau zwei je eine Seite mit Kantenlänge  $\frac{1}{2}a$  besitzen.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass keine weiteren Zerlegungen möglich sind. Auch liefern keine zwei dieser (Unter-)Fälle gleiche Zerlegungen, da niemals alle drei Paare von Teildreiecken zweier verschiedener solcher Zerlegungen untereinander kongruent sind. Also gibt es genau diese vier verschiedenen Zerlegungen,  $\square$ .

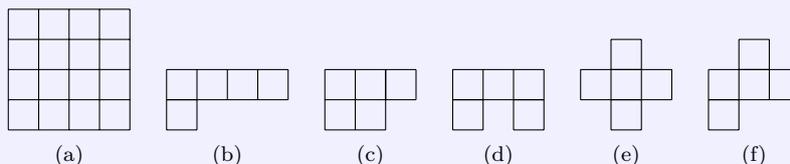
*Aufgaben der III. Runde 1983 gelöst von cyrix*

## 2.26 XXIV. Olympiade 1984

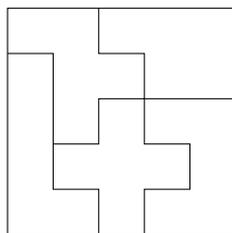
## 2.26.1 I. Runde 1984, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 240911

- a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!
- b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n > 0$ , für die eine solche Zerlegung eines  $n \times n$ -Feldes möglich ist!



- a) Ein Beispiel einer gesuchten Zerlegung zeigt die Abbildung.



- b) (I) Wenn für eine natürliche Zahl  $n > 0$  eine solche Zerlegung des quadratischen Feldes möglich ist und wenn dabei  $k$  die Anzahl der entstehenden Teilstücke ist, so besteht das Feld aus  $5k$  Einheitsquadraten, also gilt  $n^2 = 5k$ . Daher ist  $n^2$  durch 5 teilbar und folglich, weil 5 Primzahl ist, auch  $n$  durch 5 teilbar.
- (II) Wenn  $n$  durch 5 teilbar ist, so kann man die Seitenlänge des quadratischen Feldes in Teilstrecken zerlegen, deren jede eine Länge von 5 Einheitsstrecken hat; somit kann man das quadratische Feld in quadratische Teilfelder einer Seitenlänge von jeweils 5 Einheitsstrecken zerlegen.
- Jedes dieser Teilfelder lässt sich nach (a) auf die geforderte Weise zerlegen; damit existiert auch für das gesamte Feld eine derartige Zerlegung.

Mit (I) und (II) ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen  $n > 0$  sind genau alle diejenigen, die durch 5 teilbar sind.

## Aufgabe 2 - 240912

Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

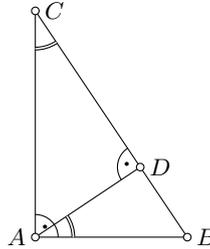
Wegen der Primfaktorzerlegung  $91 = 7 \cdot 13$  ist eine Darstellung der Zahl 91 als Produkt von möglichst vielen ganzzahligen Faktoren nur so zu erhalten, dass man erstens zwei Faktoren der Beträge 7 bzw. 13 (also einen Faktor 7 oder -7 und einen zweiten Faktor 13 oder -13) nimmt und dann noch die beiden einzigen den Betrag einer Zahl nicht ändernden Faktoren 1 und -1 hinzufügt.

Also enthält jede Darstellung von 91 als Produkt aus verschiedenen ganzen Zahlen höchstens vier Faktoren.

**Aufgabe 3 - 240913**

Es sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $A$ . Der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $BC$  sei  $D$ .

Beweisen Sie, dass dann stets  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$  gilt!



Nach Voraussetzung gilt

$$\angle ADB = \angle CDA = 90^\circ \quad (1)$$

und unter Berücksichtigung des Dreiecksinnenwinkelsatzes

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ACD$$

Aus (1) und (2) folgt  $\triangle ABD \sim \triangle CAD$  und damit

$$AB : BD = CA : CD \quad \text{also} \quad AB \cdot CD = AC \cdot AD \quad \text{w.z.b.w.}$$

**Aufgabe 4 - 240914**

Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und  $\frac{2}{x-10}$  für reelle Zahlen  $x \neq 10$  gilt. Sie stellen fest:

Für  $x = 11$  ist  $\frac{2}{x-10} = 2$ , also  $1 < \frac{2}{x-10}$ ;

für  $x = 12$  ist  $1 = \frac{2}{x-10}$ ;

für  $x = 13$  ist  $1 > \frac{2}{x-10}$ .

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung  $1 = \frac{2}{x-10}$  gilt genau für  $x = 12$ .

Norbert behauptet: Die Ungleichung  $1 < \frac{2}{x-10}$  gilt genau für alle  $x < 12$ .

Petra behauptet: Die Ungleichung  $1 > \frac{2}{x-10}$  gilt genau für alle  $x > 12$ .

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Marions Behauptung ist wahr. Beweis:

(I) Wenn für eine reelle Zahl  $x$  die Gleichung  $1 = \frac{2}{x-10}$  gilt, dann folgt  $x - 10 = 2$ , also  $x = 12$ .

(II) Für  $x = 12$  gilt  $\frac{2}{x-10} = \frac{2}{2} = 1$ .

Norberts Behauptung ist falsch, da es unter den von Norbert genannten Zahlen  $x$  mit  $x < 12$  auch solche gibt, für die  $1 < \frac{2}{x-10}$  nicht gilt.

Zum Beweis gebügt es, ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel ist  $x = 0$ ; denn diese Zahl erfüllt  $x < 12$ , und für sie gilt  $\frac{2}{x-10} = -\frac{2}{10}$ , also  $1 > \frac{2}{x-10}$ .

Petras Behauptung ist falsch, da es außer den von Petra genannten Zahlen  $x$  mit  $x > 12$  noch weitere gibt, für die  $1 > \frac{2}{x-10}$  gilt. Auch hierfür genügt ein Beispiel zum Beweis. Geeignet ist ebenfalls  $x = 0$ ; denn diese Zahl erfüllt nicht  $x > 12$ , und für sie gilt  $1 > \frac{2}{x-10}$ .

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen von [5]

## 2.26.2 II. Runde 1984, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 240921**

Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.

Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d.h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr.

Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w.z.b.w.

Bertolds Behauptung ist falsch.

Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, dass jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w.z.b.w.

**Aufgabe 2 - 240922**

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen  $x$  mit  $x \neq 5$ , für die gilt:

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

a) Für jedes reelle  $x < 5$  ist das Bestehen der Ungleichung  $\frac{x}{5-x} < 4$  äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl  $5-x$  bzw. für die umgekehrte Schlussweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit  $x < 20 - 4x$ , dies mit  $5x < 20$  und dies mit  $x < 4$ .

b) Für jedes reelle  $x > 5$  ist das Bestehen der Ungleichung  $\frac{x}{5-x} < 4$  äquivalent mit  $x > 20 - 4x$ , dies mit  $x > 4$ , was aber bereits für alle Zahlen  $x > 5$  gilt, d.h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung  $x > 5$  äquivalent ist.

Da für jedes reelle  $x \neq 5$  entweder  $x < 5$  oder  $x > 5$  gilt, ist mit a) und b) bewiesen:

Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen  $x$ , für die  $x < 4$  oder  $x > 5$  gilt.

**Aufgabe 3 - 240923**

Es sei  $ABCD$  ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte  $E$  und  $F$ , die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite  $BC$  zwischen  $B$  und  $C$  liegen, gelte  $BE = FC$  und  $BE : EF = 41 : 11$ .

Die Gerade durch  $A$  und  $E$  sei  $g$ , die Gerade durch  $D$  und  $F$  sei  $h$ , der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  sei  $S$ .

Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten  $A, B, C, D, E, F, S$ , die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck  $EFS$  gleichseitig ist!

Aus  $AB = AC$ ,  $\angle ABE = \angle DCF$  und  $BE = FC$  folgt  $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ , also  $\angle BAE = \angle CDF$ . Daher ist  $\triangle ADS$  gleichschenkelig mit  $\angle DAS = \angle ADS$ .

Wegen  $\angle FES = \angle DAS$  und  $\angle EFS = \angle ADS$  (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch  $\triangle EFS$  gleichschenkelig mit  $\angle FES = \angle EFS$ .

a) Liegen die Punkte  $B, E, F, C$  in dieser Reihenfolge auf  $BC$ , so gilt  $AS > AE$ . Da ferner  $AE$  im rechtwinkligen Dreieck  $ABE$  als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht  $AS > AB = AD$ . Somit ist das Dreieck  $ADS$  nicht gleichseitig; es gilt  $60^\circ = \angle ASD = \angle ESF$ ; also ist auch das Dreieck  $EFS$  nicht gleichseitig.

b) Liegen die Punkte  $B, F, E, C$  in dieser Reihenfolge auf  $BC$ , so gilt:

Wäre  $\triangle EFS$  gleichseitig, also  $\angle FES = \angle BEA = 60^\circ$ , so wäre für den Bildpunkt  $E'$  von  $E$  bei Spiegelung an  $AB$  (der wegen  $EB \perp AB$  auf der Verlängerung von  $EB$  liegt)  $\triangle AEE'$  gleichseitig. Daher wäre  $AE = E'E = 2 \cdot BE$ .

Zerlegt man  $BE$  in 41 gleich lange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf  $FE$ , also 30 auf  $BF$  kommen, so hätte  $AB = BC = BF + FC = BF + BE$  die Länge von 71 Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müsste dann  $AB^2 + BE^2 = AE^2$ , also  $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$  gelten.

Es ist aber  $71^2 + 41^2 = 6722$  und  $(2 \cdot 41)^2 = 6724$ .

Dieser Widerspruch beweist, dass  $\triangle EFS$  nicht gleichseitig sein kann.

#### Aufgabe 4 - 240924

Beweisen Sie: Sind  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen, wobei nur  $b \neq 0$  vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Es gilt

$$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b) \quad (1)$$

was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.

Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus  $a + nb = a + n'b$  ( $n, n'$  zwei verschiedene Zahlen  $-1, 1, -2, 2, 3$ ) folgte  $(n - n') \cdot b = 0$  und daraus wegen  $n \neq n'$ , also  $b = 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

*Lösungen der II. Runde 1984 übernommen aus [5]*

## 2.26.3 III. Runde 1984, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 240931**

Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl  $z$  mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

- (1) Die erste und die dritte Ziffer von  $z$  sind einander gleich.
- (2) Die zweite und die vierte Ziffer von  $z$  sind einander gleich.

Nehmen wir an, es gäbe eine solche Zahl  $z$  und bezeichnen ihre erste Ziffer mit  $a$  sowie ihre zweite mit  $b$ . Dann ist  $z = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101 \cdot (10a + b)$ .

Da  $z > 0$  eine Quadratzahl ist, aber 101 eine Primzahl, die  $z$  teilt, muss auch  $101^2 > 10000$  die Zahl  $z$  teilen, was ein Widerspruch zur Vierstelligkeit von  $z$  ist. Demnach gibt es keine vierstellige Quadratzahl  $z$ , die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 240932**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis  $k$  um den Ursprung mit dem Radius  $\sqrt{2}$  und die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -x + 10$  gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu  $g$  parallelen Tangenten an  $k$ !

Die zu  $g$  parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie  $g$ , also  $-1$ . Darüber hinaus stehen die Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg  $1$  und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung  $y_r = x$ , sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten  $(1,1)$  bzw.  $(-1,-1)$  befinden. (Man rechnet leicht nach, dass diese den Abstand  $\sqrt{2}$  vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf  $k$  liegen.)

Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t_1} = -(x - 1) + 1 = -x + 2 \quad \text{und} \quad y_{t_2} = -(x + 1) - 1 = -x - 2$$

**Aufgabe 3 - 240933**

Es sei  $ABCD$  ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge  $a$ . Der Mittelpunkt der Kante  $AB$  sei  $M$ , der Mittelpunkt der Kante  $CD$  sei  $N$ .

- a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch  $M$  und  $N$  sowohl auf der Geraden  $g$  durch  $A$  und  $B$  als auch auf der Geraden  $h$  durch  $C$  und  $D$  senkrecht steht!
- b) Ermitteln Sie den Abstand  $MN$  zwischen  $M$  und  $N$ !
- c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt  $X$  auf  $g$  und jeden Punkt  $Y$  auf  $h$  der Abstand  $XY$  zwischen  $X$  und  $Y$  die Ungleichung  $XY \geq MN$  erfüllt!

a) Es ist  $CM$  eine Höhe im gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABC$  und steht damit senkrecht auf  $g$ . Analog ist  $DM$  eine Höhe im gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABD$ , die damit auch senkrecht auf  $g$  ist. Da beide Geraden durch  $M$  verlaufen, liegen sie in der eindeutig bestimmten Ebene  $\epsilon$ , welche zu  $g$  senkrecht ist und durch  $M$  verläuft. Damit liegen auch  $C$  und  $D$ , also auch ihre Verbindungsgerade und damit auch  $N$  auf  $\epsilon$ . Da alle Geraden auf  $\epsilon$ , die  $g$  schneiden, senkrecht zu dieser verlaufen, gilt dies auch für die Gerade  $MN$ , die  $g$  in  $M$  schneidet.

Da im regulären Tetraeder keine Eckpunkte oder Seitenkanten voneinander ausgezeichnet sind, folgt aus Symmetriegründen völlig analog auch  $MN \perp h$ .

b) Wie gerade nachgewiesen, ist das Dreieck  $\triangle MND$  rechtwinklig in  $N$ . Dabei ist  $|ND| = \frac{1}{2}a$ , da  $N$  der Mittelpunkt der Kante  $CD$  mit Länge  $a$  ist. Weiterhin ist  $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , da dies die Länge einer Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABD$  mit Kantenlänge  $a$  ist. Also gilt nach dem Satz des Pythagoras  $|MN|^2 = |MD|^2 - |ND|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$ , also  $|MN| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

c) Die Geraden  $g$  und  $h$  sind windschief, denn lägen sie in einer Ebene, so auch die Punkte  $A, B, C$  und  $D$ , die auf ihnen liegen, sodass diese keinen Tetraeder bilden würden. Damit gibt es die zwei parallelen Ebenen  $\phi_g$  und  $\phi_h$  die  $g$  bzw.  $h$  beinhalten und jeweils parallel zur anderen Geraden sind. Nach Aufgabenteil b) haben diese beiden Ebenen wegen Teil a) den Abstand  $|MN|$ .

Sei für einen beliebigen Punkt  $X$  auf  $\phi_g$  der Bildpunkt bezüglich Projektion auf  $\phi_h$  mit  $P$  bezeichne. Dann ist also  $|XP| = |MN|$ . Ist  $Y$  nun ein beliebiger Punkt auf  $\phi_h$ , so kann entweder  $Y = P$  gelten, sodass dann  $|XY| = |XP| = |MN|$  gilt, oder aber es ist  $Y \neq P$ .

Dann ist das Dreieck  $\triangle XYP$  rechtwinklig in  $P$  und es gilt  $|XY|^2 = |XP|^2 + |YP|^2$ , also  $|XY| > |XP| = |MN|$ , sodass in jedem Fall, insbesondere auch für  $X$  auf  $g$  und  $Y$  auf  $h$  die Ungleichung  $|XY| \geq |MN|$  erfüllt ist,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 240934

Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl  $n^2 > 1$  als Summe von  $n$  natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.

Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen  $n^2 > 1$ , die jeweils als Summe von  $n$  natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."

Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen  $n^2 > 1$ , die sich als Summe von  $2n$  natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"

- Beweise Ankes Aussage!
- Beantworte Bernds Frage!

a) Die Aussage gilt für jede natürliche Zahl  $n > 1$ , da  $n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$  die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen ist. (Dies stimmt offensichtlich für  $n = 1$ ; und wenn es für  $n$  wahr ist, dann wegen

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + (2n + 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

auch für  $n + 1$ , also für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$ .)

b) Solche Quadratzahlen  $n^2 > 1$  kann es nicht geben, da die Summe von  $2n$  paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen mindestens so groß ist wie die Summe der kleinsten  $2n$  positiven ganzen Zahlen, also

$$0 + 1 + \dots + (2n - 1) = \frac{(2n - 1) \cdot 2n}{2} = n \cdot (2n - 1) > n^2$$

für  $2n - 1 > n$ , also  $n > 1$ .

#### Aufgabe 5 - 240935

Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen  $a, b$  und die Hypotenusenlänge  $c$  jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung  $a^5 + b^5 < c^5$  gilt!

Einerseits ist  $a < c$  und  $b < c$  und andererseits gilt nach dem Satz von Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$ . Also gilt

$$a^5 + b^5 = a^3 \cdot a^2 + b^3 \cdot b^2 < c^3 \cdot a^2 + c^3 \cdot b^2 = c^3 \cdot (a^2 + b^2) = c^3 \cdot c^2 = c^5, \square$$

#### Aufgabe 6 - 240936

Es sei  $AB$  eine Strecke und  $P$  ein Punkt auf der Verlängerung von  $BA$  über  $A$  hinaus. Von  $P$  werden an alle diejenigen Kreise, die  $AB$  als Sehne haben, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um  $P$  gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

Es sei  $B'$  einer dieser Berührungspunkte einer Tangente durch  $P$  mit einem Kreis durch  $A$  und  $B$ . Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz, dass  $|PB'|^2 = |PA| \cdot |PB|$  gilt. Insbesondere ist also  $|PB'|$  unabhängig von der Wahl des konkreten Punktes  $B'$ , sodass jeder Berührungspunkt auf dem Kreis um  $P$  mit Radius  $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$  liegen muss,  $\square$ .

*Aufgaben der III. Runde 1984 gelöst von cyrix*

## 2.27 XXV. Olympiade 1985

### 2.27.1 I. Runde 1985, Klasse 9

#### Aufgabe 1 - 250911

Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die

- a) durch 2,
- b) durch 3,
- c) durch 4,
- d) durch 5,
- e) durch 6

teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

a) Durch 2 sind von den genannten vierstelligen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf eine geradzahlige Ziffer, also auf 8 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden, also gibt es genau 6 derartige durch 2 teilbare Zahlen, nämlich 1598, 1958, 5198, 5918, 9158 und 9518.

b, e) Da die Quersumme von 1985 nicht durch 3 teilbar ist, und das auch für alle durch Umordnung zu bildenden Zahlen gilt, ist keine der Zahlen durch 3 und damit auch keine durch 7 teilbar.

c) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die von den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Aus den Ziffern 1, 5, 8 und 9 kann aber keine solche zweistellige Zahl gebildet werden; denn sie müsste gerade sein, also auf 8 enden, und die Zahlen 18, 58 und 98 sind nicht durch 4 teilbar. Folglich gibt es keine derartigen durch 4 teilbaren Zahlen.

d) Durch 5 sind von diesen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf 5 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden. Also sind genau 6 derartige Zahlen durch 5 teilbar, nämlich 1895, 1985, 8195, 8915, 9185 und 9815.

#### Aufgabe 2 - 250912

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare  $(a, b)$  einstelliger natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$ , für die

$$a < \overline{a,b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit  $\overline{a,b}$  sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer  $a$  vor dem Komma und die Ziffer  $b$  nach dem Komma hat.

I Wenn ein Paar  $(a, b)$  einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Es gilt

$$a < b \tag{1}$$

II Wenn ein Paar  $(a, b)$  einstelliger natürlicher Zahlen die Ungleichung (1) erfüllt, so folgt wegen der Ganzzahligkeit von  $a$  und  $b$ , dass

$$a + 1 \leq b \tag{2}$$

gilt. ferner ist  $a \geq 0$ , nach (2) also  $b \geq 1$ ; daher gilt für die einstelligen Zahlen  $b$

$$1 \leq b \leq 9 \quad \text{also} \quad a + \frac{1}{10} \leq a + \frac{b}{10} \leq a + \frac{9}{10}$$

und somit erst recht

$$a < a + \frac{b}{10} < a + 1 \tag{3}$$

Da  $a + \frac{b}{10}$  die mit  $\overline{a,b}$  bezeichnete Zahl ist, folgt aus (3) und (2) die geforderte Eigenschaft  $a < \overline{a,b} < b$ .

III Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau diejenigen Paare  $(a, b)$  einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft haben, die (1) erfüllen.

Ist  $a = 0$ , so wird (1) genau für die neun Zahlen  $b = 1, \dots, 9$  erfüllt;

Ist  $a = 1$ , so wird (1) genau für die acht Zahlen  $b = 2, \dots, 9$  erfüllt;

...

Ist  $a = 8$ , so wird (1) genau für die eine Zahl  $b = 9$  erfüllt;

Ist  $a = 9$ , so wird (1) genau für keine einstellige natürliche Zahl  $b$  erfüllt.

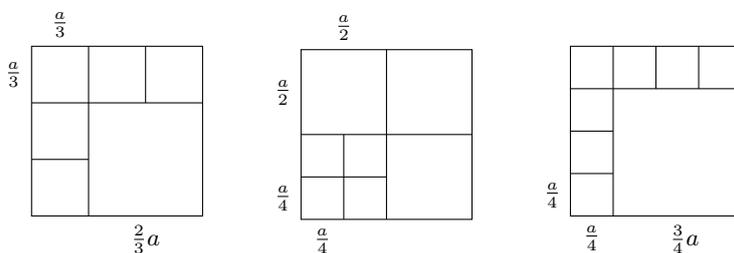
Folglich haben genau  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  Paare die geforderte Eigenschaft.

### Aufgabe 3 - 250913

Man beweise:

Für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $n \geq 6$  ist es möglich, eine Quadratfläche in  $n$  (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Eine Zerlegung einer Quadratfläche in 6, 7 bzw. 8 Teilquadratflächen ist möglich, wie die Abbildung zeigt.



Da man durch Weiterzerlegen einer Teilquadratfläche in 4 kongruente neue Teilquadratflächen die Anzahl der Teilquadratflächen jeweils um 3 erhöhen kann, erhält man so fortlaufend die Zerlegung einer Quadratfläche in  $n$  Teilquadratflächen mit

$$n = 6 + 3 = 9, \quad n = 7 + 3 = 10, \quad n = 8 + 3 = 11, \quad n = 9 + 3 = 12, \quad \text{usw.}$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

### Aufgabe 4 - 250914

Drei Kreise mit dem gegebenen Radius  $r$  mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsame Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von  $r$ !

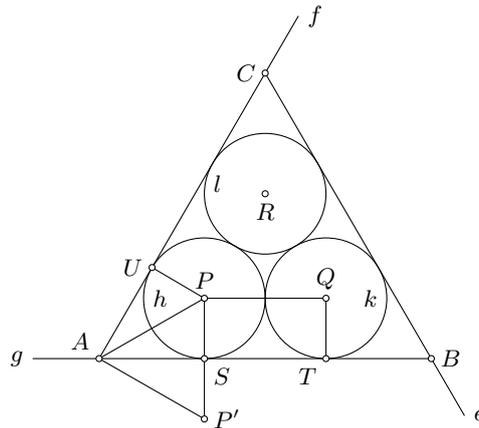
*Hinweis:* Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Die Kreise seien  $h, k, l$  ihre Mittelpunkte  $P, Q, R$ . Die genannte gemeinsame Tangente an  $k, l$  bzw. an  $l, h$  bzw. an  $h, k$  seien  $e$  bzw.  $f$  bzw.  $g$ . Der Schnittpunkt von  $f$  mit  $g$  bzw. von  $g$  mit  $e$  bzw. von  $e$  mit  $f$  sei  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$ . Das Dreieck mit dem zu berechnenden Flächeninhalt ist dann  $\triangle ABC$ .

Das Lot von  $P$  bzw.  $Q$  auf  $g$  hat als Fußpunkt  $S$  bzw.  $T$  den Berührungspunkt von  $g$  mit  $h$  bzw.  $k$ , das Lot von  $P$  auf  $f$  hat als Fußpunkt  $U$  den Berührungspunkt von  $f$  mit  $h$  (siehe Abbildung).

Daher ist  $STQP$  ein Rechteck mit  $PS = QT = r$ ,  $PQ = ST = 2r$ , und die Dreiecke  $APS$ ,  $APU$  sind nach dem Kongruenzsatz ssw (wobei der Winkel  $\angle ASP$  bzw.  $\angle AUP$  als rechter Winkel der größten Seite gegenüberliegt) zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, woraus  $\angle PAS = \angle PAU$  folgt.

Da die Summe dieser beiden Winkelgrößen die Innenwinkelgröße  $\angle BAC = 60^\circ$  des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  ergibt, folgt  $\angle PAS = \angle PAU = 30^\circ$  und damit nach dem Innenwinkelsatz  $\angle APS = 60^\circ$ .



Somit ist für den bei der Spiegelung an  $g$  aus  $P$  entstehenden Bildpunkt  $P'$  das Dreieck  $APP'$  gleichseitig. Die zur Seite  $PP'$  gehörende Höhe  $AS$  ist zugleich Seitenhalbierende; d.h., es folgt  $AP = PP' = 2PS = 2r$  und damit (nach dem Satz des Pythagoras oder nach der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck)  $AS = r\sqrt{3}$ . Entsprechend erhält man  $BT = r\sqrt{3}$ .

Daher hat das Dreieck  $ABC$  die Seitenlänge

$$a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{3})$$

und somit nach der Flächeninhaltsformel für gleichseitige Dreiecke der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 4r^2(1 + \sqrt{3})^2 = r^2 \cdot (4\sqrt{3} + 6)$$

Beispiel für die Verwendung von Näherungswerten:

Es gilt auf drei Dezimalen nach dem Komma genau  $\sqrt{3} \approx 1,732$ . Daraus folgt  $1,7315 < \sqrt{3} < 1,7325$  und hieraus  $12,296 < 4\sqrt{3} + 6 < 12,93$ . Somit ist  $F \approx 12,93r^2$ , und der hier angegebene Zahlenwert 12,93 ist auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau.

*Lösungen der I. Runde 1985 übernommen von [5]*

## 2.27.2 II. Runde 1985, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 250921**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a, b, c)$  von natürlichen Zahlen  $a, b, c$ , für die  $a \leq b \leq c$  und  $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$  gilt!

Die Primfaktorzerlegung von  $19 \cdot 85 = 1615$  lautet  $1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19$ . Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten.

1. Genau die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  sind gleich 1. Das führt auf das Tripel  $(1, 1, 1615)$ .
2. Genau die eine Zahl  $a$  ist gleich 1. Dann enthält  $b$  mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte  $b$  mehr als einen dieser Faktoren, so wäre  $b \geq 5 \cdot 17 = 85$ . Andererseits enthielte  $c$  dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre  $c \leq 19$ . Das widerspricht der Bedingung  $b \leq c$ .

Also enthält  $b$  genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19 und  $c$  enthält die beiden anderen. Das führt auf die Tripel  $(1, 5, 323)$ ,  $(1, 17, 135)$ ,  $(1, 19, 85)$ .

3. Keine der drei Zahlen  $a, b, c$  ist gleich 1, führt auf das Tripel  $(5, 17, 19)$ .

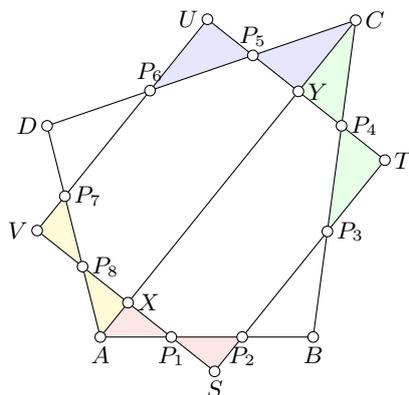
Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

**Aufgabe 2 - 250922**

Es sei  $ABCD$  ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks  $ABCD$  am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.

Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck  $STUV$  bilden.

Welches der beiden Vierecke  $ABCD$  bzw.  $STUV$  hat den größeren Flächeninhalt?



Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte  $P_1, P_2, \dots, P_8$  und Schnittpunkte  $S, T, U, V$  sowie die Schnittpunkte  $X, Y$  von  $AC$  mit  $VS$  bzw.  $TU$  seien wie im Bild bezeichnet.

Nach Voraussetzung gilt:  $BP_2 : BA = BP_3 : BC = 1 : 3$ .

Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus  $P_2P_3 \parallel AC$  und folglich  $AX \parallel P_2S$ . Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus  $\angle P_1AX = \angle P_1P_2S$ .

Da ferner  $\angle AP_1X = \angle P_2P_2S$  (Scheitelwinkel) und  $AP_1 = P_1P_2$  (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz wsw die Kongruenz der Dreiecke  $AP_1X$  und  $P_1P_2S$  und damit auch deren Flächengleichheit.

Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke  $AP_8X$  und  $P_7P_8V$ , der Dreiecke  $CP_4Y$  und  $P_3P_4T$  sowie der Dreiecke  $CP_5Y$  und  $P_6P_5U$ . Die Viereckflächen  $ABCD$  und  $STUV$  haben die Achteckfläche  $P_1P_2\dots P_9$  gemeinsam.

Vergleicht man die außerhalb dieser Achteckfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, dass der Inhalt des Vierecks  $ABCD$  um die Summe der Inhalte  $P_2BP_3$  und  $P_6DP_7$  größer ist als der Inhalt des Vierecks  $STUV$ .

**Aufgabe 3 - 250923**

Es seien  $a, b, x$  und  $y$  positive reelle Zahlen, und es gelte  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ .  
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

Aus  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$  folgt durch die Multiplikation mit der positiven Zahl  $by$ :  $ay < bx$  (1).

Addiert man  $a \cdot b$  folgt  $a(b+y) < b(a+x)$ . Dividiert man dies durch die positive Zahl  $b(b+y)$ , so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} \quad (2)$$

Addiert man zu (1)  $xy$  ergibt sich durch Umformung

$$\begin{aligned} ay + xy &< bx + xy \\ (a+x)y &< x(b+y) \\ \frac{a+x}{b+x} &< \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (3)$$

Mit (2) und (3) ist die geforderte Beziehung hergeleitet.

**Aufgabe 4 - 250924**

Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen  $a$  und  $b$  gibt, für die  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$  gilt!

Angenommen, es gäbe derartige Zahlen  $a$  und  $b$ . Aus dieser Annahme folgte dann

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \quad ; \quad 2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$$

(1) Im Fall  $a \neq 0, b \neq 0$  folgt weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass  $\sqrt{2}$  eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.

(2) Im Fall  $b = 0$  folgte aus  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$  der Widerspruch, dass  $\sqrt{3} = a$  eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.

(3) Im Fall  $a = 0$  folgt  $3 = 2b^2$  mit einer rationalen Zahl  $b$ , also mit  $b = \frac{m}{n}$ , wobei  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2} \quad ; \quad 3n^2 = 2m^2$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen  $n^2$  und  $m^2$  jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, dass der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müsste, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.

Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, dass es keine rationalen Zahlen  $a, b$  mit  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$  gibt.

*Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]*

## 2.27.3 III. Runde 1985, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 250931**

a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl  $N$  gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!

(1) Für jede natürliche Zahl  $n$  für die  $n \geq N$  ist, kann eine Quadratfläche  $F$  in genau  $n$  Teilquadrate  $T_1, \dots, T_n$  zerlegt werden.

(Dabei sollen die Flächen  $T_1, \dots, T_n$  die Fläche  $F$  vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $N$ , für die die Aussage (1) gilt!

Es sei die Kantenlänge der Quadratfläche  $F$  gleich  $a$ .

a) Wir geben zuerst Lösungen für  $n = 6$ ,  $n = 7$  und  $n = 8$  an:

Für  $n = 6$  zerlege man das Quadrat  $F$  in  $3 \times 3$  Quadrate der Kantenlänge  $\frac{1}{3} \cdot a$  und fasse davon  $2 \times 2$  Teilquadrate wieder zu einem der Kantenlänge  $\frac{2}{3}$  zusammen. Dieses sei mit  $T_1$  bezeichnet, die übrigen  $9 - 4 = 5$  Teilquadrate mit  $T_2$  bis  $T_6$ .

Für  $n = 7$  zerlege man das Quadrat  $F$  in  $2 \times 2$  Quadrate der Kantenlänge  $\frac{1}{2} \cdot a$  und bezeichne drei davon mit  $T_1$  bis  $T_3$ . Das vierte Teilquadrat zerlege man in  $2 \times 2$  Quadrate der Kantenlänge  $\frac{1}{4} \cdot a$  und bezeichne diese mit  $T_4$  bis  $T_7$ .

Für  $n = 8$  zerlege man das Quadrat  $F$  in  $4 \times 4$  Quadrate der Kantenlänge  $\frac{1}{4} \cdot a$  und fasse davon  $3 \times 3$  wieder zu einem Quadrat der Kantenlänge  $\frac{3}{4} \cdot a$  zusammen, welches mit  $T_1$  bezeichnet sei. Die übrigen  $16 - 9 = 7$  Teilquadrate seien mit  $T_2$  bis  $T_8$  bezeichnet.

Aus einer Zerlegung von  $F$  in  $n$  Teilquadrate  $T_1, \dots, T_n$  erhält man leicht eine in  $n + 3$  Teilquadrate, indem man das Teilquadrat  $T_n$  weiter unterteilt in  $2 \times 2$  Teilquadrate halber Kantenlänge. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Teilquadrate um  $4 - 1 = 3$ .

Also lässt sich für jedes  $n \geq 6 =: N$  die Quadratfläche  $F$  in genau  $n$  Teilquadrate zerlegen,  $\square$ .

b) Es bleibt noch zu zeigen, dass keine Unterteilung in genau 5 Teilquadrate möglich ist, damit  $N = 6$  der kleinste Wert ist, der die Aussage (1) der Aufgabenstellung erfüllt.

Nehmen wir also indirekt an, dass es eine Unterteilung von  $F$  in genau 5 Teilquadrate gäbe. Dann können keine zwei Eckpunkte von  $F$  im gleichen Teilquadrat liegen, da dieses sonst allein ganz  $F$  überdecken (oder darüber hinausragen) würde. Tatsächlich müssen alle Kanten von Teilquadraten senkrecht bzw. parallel zu Kanten von  $F$  verlaufen, da sich an allen Eckpunkten, also insbesondere denen von  $F$ , die Innenwinkel der dort zusammentreffenden Quadrate nur auf Vielfache von  $90^\circ$  addieren können.

Es seien  $T_1$  bis  $T_4$  die Teilquadrate, die je einen der vier Eckpunkte von  $F$  enthalten. Deren Kantenlängen seien mit  $a_1$  bis  $a_4$  gekennzeichnet. Dann kann nur höchstens eines dieser Teilquadrate eine größere Kantenlänge als  $\frac{1}{2} \cdot a$  besitzen, da sich sonst die beiden entsprechenden Teilquadrate mit größerer Kantenlänge überschneiden würden.

Gilt, dass an drei Kanten von  $F$  die entsprechenden Teilquadrate aus  $T_1$  bis  $T_4$  direkt benachbart sind, also z.B.  $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a$ , so auch  $a_4 + a_1 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) = a$ , d.h., auch an der vierten Kante von  $F$  sind die beiden zugehörigen Teilquadrate aus  $T_1$  bis  $T_4$  direkt benachbart. Dann folgt jedoch  $a_1 = a_3$  und  $a_2 = a_4$ , sodass für alle vier Kantenlängen gilt, dass sie kleiner oder gleich  $\frac{1}{2} \cdot a$  sein müssen, da sonst wenigstens zwei größer als dieser Wert wären, was gerade ausgeschlossen wurde. Wäre aber auch nur eine dieser Kantenlängen echt kleiner als  $\frac{1}{2} \cdot a$ , würden dann die Gleichungen nicht mehr gelten, sodass  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2} \cdot a$  folgt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass genau 5 Teilquadrate existieren, denn nun decken  $T_1$  bis  $T_4$  die Fläche  $F$  schon vollständig ab.

Also gibt es mindestens zwei Kanten von  $F$ , an denen die entsprechenden Teilquadrate aus  $T_1$  bis  $T_4$  nicht direkt benachbart sind, sodass zwischen ihnen bisher nicht abgedeckte Bereiche der Quadratfläche  $F$  existieren. Diese müsste aber  $T_5$  gemeinsam überdecken, sodass  $T_5$  Punkte von zwei verschiedenen Kanten von  $F$  beinhalten müsste. Liegen diese Kanten einander in  $F$  gegenüber, ergibt sich sofort ein Widerspruch, da  $T_5$  die Kantenlänge  $a$  haben müsste, und so allein  $F$  überdecken würde. Aber auch wenn die beiden Kanten von  $F$ , auf denen Punkte liegen, die  $T_5$  beinhalten soll, nicht parallel sind, sondern sich in einem Eckpunkt von  $F$  schneiden, folgt schnell der Widerspruch, da dann auch  $T_5$  diesen Eckpunkt enthalten müsste, sich damit aber mit dem Teilquadrat aus  $T_1$  bis  $T_4$  überschneiden würde, was diesen Eckpunkt von  $F$  bereits enthält.

Demnach führt jeder Fall zum Widerspruch und es gibt keine Zerlegung von  $F$  in genau 5 Teilquadrate, sodass  $N = 6$  der minimal mögliche Wert ist, der die Aussage (1) erfüllt.

### Aufgabe 2 - 250932

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare  $(a, b)$  von zweistelligen Zahlen  $a$  und  $b$ , für die folgendes gilt: Bildet man durch Hintereinanderschreiben von  $a$  und  $b$  in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl  $z$ , so ist  $z = (a + b)^2$ .

Es ist nach Aufgabenstellung  $z = 100a + b = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  bzw.  $a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) = 0$ . Für  $b \geq 26$  ist aber

$$0 = a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) \geq a^2 - 48a + 26 \cdot 25 = (a - 24)^2 - 24^2 + 650 = (a - 24) + 650 - 576 > 0$$

was ein Widerspruch darstellt. Also muss  $b \leq 25$  gelten.

Es ist  $b$  die aus den letzten zwei Stellen einer Quadratzahl gebildeten Zahl. Wegen  $(10n + m)^2 = 100n^2 + 20nm + m^2$  und  $0^2 = 00$ ,  $1^2 = 01$ ,  $2^2 = 04$ ,  $3^2 = 09$ ,  $4^2 = 16$ ,  $5^2 = 25$ ,  $6^2 = 36$ ,  $7^2 = 49$ ,  $8^2 = 64$  und  $9^2 = 81$  ist die vorletzte Stelle einer Quadratzahl nur dann ungerade, wenn die letzte Stelle eine 6 ist. Ist die vorletzte Stelle gerade, verbleiben als mögliche Endziffern 0, 1, 4 und 5.

Damit schränken sich die Möglichkeiten für  $b$  auf die Elemente der Menge  $\{16, 20, 21, 24, 25\}$  ein. Diese werden nun der Reihe nach untersucht:

Wäre  $b = 16$ , so müsste  $z = 100a + 16 = (a + 16)^2 = a^2 + 32a + 256$  gelten, was äquivalent ist zu  $a^2 - 68a + 240 = 0$  bzw.  $a = 34 \pm \sqrt{34^2 - 240}$ . Es ist  $34^2 - 240 = (30 + 4)^2 - 240 = 900 + 240 + 16 - 240 = 916$ , also  $30 < \sqrt{34^2 - 240} < 31$ , sodass es keine Lösung mit  $b = 16$  gibt.

Wäre  $b = 20$ , so wäre  $z = 100a + 20$  zwar durch 5, aber nicht 25 teilbar, was ein Widerspruch zu  $z = (a + b)^2$  ist.

Für  $b = 21$  müsste  $100a + 21 = (a + 21)^2 = a^2 + 42a + 441$ , also  $a^2 - 58a + 420 = 0$  und damit  $a = 29 \pm \sqrt{29^2 - 420} = 29 \pm \sqrt{841 - 420} = 29 \pm \sqrt{421}$  gelten, was wegen  $20 < \sqrt{421} < 21$  wieder keine Lösung besitzt.

Wäre  $b = 24$ , dann  $100a + 24 = (a + 24)^2 = a^2 + 48a + 576$  und  $a^2 - 52a + 552 = 0$ , also  $a = 26 \pm \sqrt{26^2 - 552}$ . Es ist  $26^2 - 552 = 900 - 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 - 552 = 900 - 240 + 16 - 552 = 124$ , also  $11 < \sqrt{26^2 - 552} < 12$ , sodass es auch in diesem Fall keine Lösung gibt.

Abschließend sei  $b = 25$ . Dann ist  $100a + 25 = (a + 25)^2 = a^2 + 50a + 625$  und damit  $a^2 - 50a + 600 = 0$ , was die Lösungen  $25 \pm \sqrt{25^2 - 600} = 25 \pm \sqrt{25} = 25 \pm 5$ , d.h.  $a_1 = 20$  und  $a_2 = 30$  besitzt.

Tatsächlich ist  $(20 + 25)^2 = 45^2 = 2025$  und  $(30 + 25)^2 = 55^2 = 3025$ , sodass  $(a, b) \in \{(20, 25), (30, 25)\}$  die gesuchte Lösungsmenge ist.

### Aufgabe 3 - 250933

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei  $V_T$ , das Volumen seiner Umkugel sei  $V_K$ .

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_K : V_T$  und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu  $V_K : V_T$  nächstgelegene ganze Zahl)!

Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte  $\sqrt{3} \approx 1,7$  und  $\pi \approx 3,14$  verwendet werden.

Im regulären Tetraeder mit Kantenlänge  $a$  sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge  $a$ . Die Seitenhalbierende  $s$  in einem solchen Dreieck verläuft durch den Mittelpunkt der entsprechenden Seite und steht orthogonal auf dieser, besitzt also die Länge  $s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  und die Seitenfläche einen Flächeninhalt von  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ .

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt dessen Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodass die Entfernung eines Eckpunkts zum Schwerpunkt der entsprechenden Seitenfläche genau  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$  beträgt.

In einem regulären Tetraeder steht die Schwerelinie (d.h. Verbindungsstrecke eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) senkrecht auf der entsprechenden Seitenfläche, sodass diese eine Länge von  $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ .

Damit hat der Tetraeder ein Volumen von

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4 \cdot 3} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Der Umkugelmittelpunkt des regulären Tetraeders fällt mit dessen Schwerpunkt zusammen. Dieser teilt die Schwerelinien im Verhältnis 3:1, sodass sich als Umkugelradius  $r$  der Wert  $r = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{4} a$  ergibt. Damit hat die Umkugel ein Volumen von

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 6\sqrt{6}}{3 \cdot 4^3} \cdot \pi \cdot a^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \pi \cdot a^3$$

sodass

$$V_K : V_T = \frac{\sqrt{6} \cdot 12}{8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot \pi \approx \frac{1,7 \cdot 3}{2} \cdot \pi = 2,55 \cdot \pi \approx 2,55 \cdot 3,14 = 8,007 \approx 8$$

ist.

#### Aufgabe 4 - 250934

Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
- (2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Die Eckpunkte des Würfels seien mit  $A$  bis  $H$  bezeichnet, wobei  $A, B, C$  und  $D$  in dieser Reihenfolge die Eckpunkte einer Fläche und  $E, F, G, H$  die Eckpunkte der dazu parallelen Seitenfläche seien, wobei  $A$  mit  $E$ ,  $B$  mit  $F$ ,  $C$  mit  $G$  und  $D$  mit  $H$  durch eine Kante verbunden seien. Weiterhin identifizieren wir einen Eckpunkt mit der Zahl, die an diesem Eckpunkt steht, schreiben also z.B.  $A = 1$ , wenn an Eckpunkt  $A$  die Zahl 1 steht. (Dies können wir, da nach Bedingung (1) jede der acht Zahlen an genau einem der Eckpunkte steht.)

Summiert man für alle sechs Seitenflächen jeweils deren Eckpunkt-Zahlen und bildet die Summe dieser sechs Summen, so erhält man eine Summe, die jede Eckpunktzahl genau dreimal enthält, nämlich je einmal pro Seitenfläche. Ist  $S$  die nach Bedingung (2) für alle Seitenfläche gleiche Summe ihrer Eckpunktzahlen, so gilt also  $6 \cdot s = 3 \cdot (A + B + \dots + H) = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 3 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 3 \cdot 36 = 108$ , also  $S = \frac{108}{6} = 18$ .

O.B.d.A. können wir durch ggf. erfolgende Drehung  $A = 1$  annehmen.

Dann kann  $B$  nicht 2 sein, denn sonst müssten sowohl  $C + D$  als auch  $E + F$  den Wert  $18 - 2 - 1 = 15$  haben. Diese Summe kann aber mit den Zahlen 1 bis 8 nur auf die eindeutige Weise  $7 + 8$  erhalten werden, sodass – im Widerspruch zu (1) –  $\{C, D\} = \{E, F\}$  folgen würde. Analog schließt man auch  $D = 2$  sowie  $E = 2$  aus: 1 und 2 können nicht benachbart sein.

Fall 1: Die 2 in einer Seitenfläche mit 1. Dies geht nur, wenn sie in dieser Seitenfläche der 1 diagonal gegenüberliegt. Also können wir hier durch ggf. erfolgende Drehung o.B.d.A.  $C = 2$  annehmen. Es muss dann  $B + D = 18 - 2 - 1 = 15 = 8 + 7$ , also durch ggf. erfolgende Spiegelung o.B.d.A.  $B = 8$  und  $D = 7$  gelten. Damit  $A + B + E + F = 18$  gilt, muss  $E + F = 9$  und analog  $G + H = 9$  gelten, was sich jeweils nur durch  $4 + 5 = 9$  bzw.  $3 + 6 = 9$  mit noch nicht verwendeten Zahlen realisieren lässt. Weiterhin ist auch  $B + C + F + G = 18$ , also  $F + G = 18 - 8 - 2 = 8$ , was sich nur als  $3 + 5$  noch realisieren lässt.

Fall 1.1: Es ist  $F = 3$ . Dann folgt  $G = 5$ ,  $E = 6$  und  $H = 4$ . Man überprüft schnell, dass diese Verteilung beide Bedingungen erfüllt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 6, 7 und 8.)

Fall 1.2: Es ist  $F = 5$ . Dann folgt  $G = 3$ ,  $E = 4$  und  $H = 6$ . Auch hier überprüft man schnell, dass es sich um eine Lösung handelt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 4, 7 und 8.)

Fall 2: Die 2 liegt nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche mit 1. Dann verbleibt aber nur noch als einziger Eckpunkt  $G$ , der damit gleich 2 sein muss. Damit folgt, dass 1 und 3 in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen müssen, o.B.d.A. nach ggf. erfolgreicher Drehung um die Raumdiagonale  $AG$  also  $3 \in \{B, C, D\}$ .

Fall 2.1: Es ist  $B = 3$  oder  $D = 3$ . Nach ggf. erfolgreicher Spiegelung an der Ebene, die durch  $A, C, E$  und  $G$  verläuft, können wir dann sogar o.B.d.A.  $B = 3$  fordern. Es folgt aber wie oben, dass  $C + D = E + F = 14$  gelten muss, was sich aber mit verschiedenen Summanden aus  $\{1, \dots, 8\}$  nur mit  $14 = 8 + 6$  realisieren lässt, sodass wieder im Widerspruch zu (1)  $\{E, F\} = \{C, D\}$  folgen würde. Also gibt es in diesem Fall keine gültige Verteilung.

Fall 2.2: Es ist  $C = 3$ . Dann muss analog zum Fall 1  $B + D = 14$ , also nach ggf. erfolgreicher Spiegelung  $B = 8$  und  $D = 6$  gelten. Wegen  $A + B + E + F = 18$  folgt  $E + F = 11$ , was sich mit noch nicht verwendeten Zahlen nur als  $11 = 4 + 7$  realisieren lässt, woraus  $F \in \{4, 7\}$  folgt. Andererseits ist auch  $B + C + F + G = 18$ , also  $F = 18 - 8 - 3 - 2 = 5$ , was ein Widerspruch ist, sodass es auch in diesem Fall keine gültige Lösung gibt.

Insgesamt gibt es also genau zwei verschiedene Anordnungen. Da in diesen die 1 verschiedene Nachbarn besitzt, können sie auch nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden.

### Aufgabe 5 - 250935

In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  sei  $A'$  der Fußpunkt der durch  $A$  gehenden Höhe,  $B'$  der Fußpunkt der durch  $B$  gehenden Höhe und  $S$  der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $AB : A'B' = AS : SB'$  gilt!

Nach dem Satz von Thales, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle ABA'$  und  $\triangle ABB'$ , liegen die Punkte  $A, B, B'$  und  $A'$  (in dieser Reihenfolge) auf dem Kreis mit Durchmesser  $AB$ .

In diesem Kreis sind die beiden Peripheriewinkel  $\angle BB'A'$  und  $\angle BAA'$  über der gleichen Sehne  $BA'$  nach dem Peripheriewinkelsatz gleich. Weiterhin sind die beiden Winkel  $\angle ASB$  und  $\angle A'SB'$  Scheitelwinkel, also auch gleich, sodass die beiden Dreiecke  $\triangle ABS$  und  $\triangle A'B'S$  in zwei Innenwinkeln übereinstimmen, also ähnlich zueinander sind. Demnach stehen die entsprechenden Seitenlängen im gleichen Verhältnis und es gilt  $|AB| : |A'B'| = |AS| : |SB'|$ ,  $\square$ .

### Aufgabe 6 - 250936

a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?

b) Wenn dies der Fall ist, ist  $z$  rational?

a) Es ist  $192 - 96\sqrt{3} = 96 \cdot (2 - \sqrt{3}) > 0$ , da  $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$ , sodass  $z$  eine reelle Zahl beschreibt.

b) Es ist

$$z = \sqrt{16 \cdot (12 + 6\sqrt{3})} + \sqrt{16 \cdot (12 - 6\sqrt{3})} = 4 \cdot (\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}})$$

genau dann rational, wenn es  $0 \leq x := \frac{z}{4} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$  auch ist. Es ist

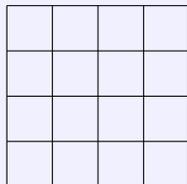
$$\begin{aligned} x^2 &= (12 + 6\sqrt{3}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3}) \cdot (12 - 6\sqrt{3})} + (12 - 6\sqrt{3}) = 24 + 2\sqrt{144 - 36 \cdot 3} = \\ &= 24 + 2\sqrt{36} = 24 + 2 \cdot 6 = 36 \quad \text{also} \quad x = 6 \text{ und } z = 24 \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

*Aufgaben der III. Runde 1985 gelöst von cyrix*

## 2.28 XXVI. Olympiade 1986

## 2.28.1 I. Runde 1986, Klasse 9

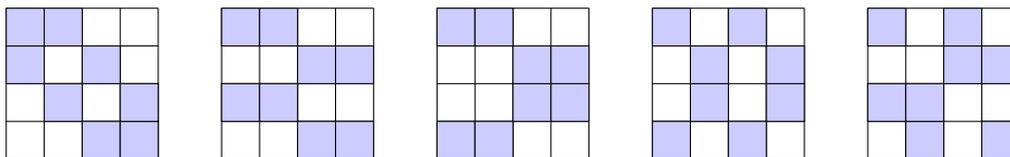
## Aufgabe 1 - 260911



In dem abgebildeten Quadrat mit  $4 \times 4$  Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die Abbildung zeigt fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. (Man kann auch beweisen, dass es keine von diesen verschiedene Lösung gibt)



## Aufgabe 2 - 260912

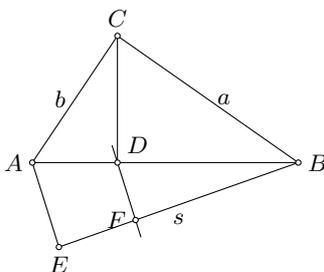
Es seien  $a, b, s$  drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge  $s$  im Verhältnis  $a^2 : b^2$  teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:

- (1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  und  $\angle ACB = 90^\circ$
- (2) Von  $C$  fällt man das Lot auf  $AB$ , sein Fußpunkt sei  $D$ .
- (3) In  $B$  trägt man an  $BA$  einen Winkel an, dessen Größe zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von  $B$  aus die Strecke der Länge  $s$  abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei  $E$ .
- (4) Die Parallele zu  $EA$  durch  $D$  schneide  $BE$  in einen Punkt, der  $F$  genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweisen Sie:

Wenn eine Strecke  $BE$  und ein Punkt  $F$  nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt  $F$  die Strecke  $BE$  in Verhältnis  $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$ .



a) Die Abbildung zeigt die geforderte Konstruktion.

b) Wenn  $A, B, C, D, E, F$  nach der Beschreibung konstruiert werden, so folgt:

Nach (1) und (2) ist  $\angle ACB = 90^\circ = \angle CDB$ . Ferner ist  $\angle ABC = \angle CBD$ . Daher gilt  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ , also

$$AB : BC = CB : BD \quad ; \quad BD \cdot AB = BC^2 = a^2$$

Nach (3) und (4) folgt damit aus dem Strahlensatz

$$BF : FE = BD : DA = a^2 : b^2$$

w.z.b.w.

### Aufgabe 3 - 260913

Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen  $(x, y, z)$ , für die

(1)  $x \leq y \leq z$  und

(2)  $xyz = 1986$  gilt!

*Hinweis:* Zwei Tripel  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  heißen genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen  $x_1 \neq x_2$ ;  $y_1 \neq y_2$ ;  $z_1 \neq z_2$  gilt.

Wegen der Primfaktorzerlegung  $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$  gibt es genau die folgenden fünf verschiedenen Tripel natürlicher Zahlen, die (1) und (2) erfüllen:

$$(1,1,1986), \quad (1,2,993), \quad (1,3,662), \quad (1,6,331), \quad (2,3,331)$$

Alle weiteren Tripel ganze Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, erhält man, indem man in jeweils einem der genannten Tripel jeweils genau zwei Zahlen durch ihre entgegengesetzten Zahlen ersetzt und die Reihenfolge der entstandenen Zahlen gemäß (1) wählt.

Ausgehend von  $(1,1,1986)$  führt dies auf genau zwei weitere Tripel

$$(-1986, -1, 1), \quad (-1, -1, 1986)$$

Ausgehend von jeweils einem Tripel  $(x,y,z)$  mit  $0 < x < y < z$  führt dies dagegen, unter Beachtung von  $-z < -y < -x < x < y < z$ , genau auf die drei weiteren Tripel

$$(-z, -y, x), \quad (-z, -x, y), \quad (-y, -x, z)$$

Daher ergibt sich als gesuchte Anzahl  $5 + 2 + 4 \cdot 3 = 19$ .

### Aufgabe 4 - 260914

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen  $n$  derart gibt, dass die Lösung  $x$  der Gleichung  $17x + n = 6x + 185$  ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl  $n$  und die zugehörige Lösung  $x$  der gegebenen Gleichung!

Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

Die Gleichung  $17x + n = 6x + 185$  lässt sich äquivalent umformen zu  $11x = 185 - n$ . Sie hat daher genau die Lösung

$$x = \frac{185 - n}{11} \tag{1}$$

Diese ist für genau diejenigen natürlichen Zahlen  $n$  selbst eine natürliche Zahl, für die  $n \leq 185$  gilt und 11 ein Teiler von  $185 - n$  ist.

Diese Bedingungen werden, da 185 bei Division durch 11 den Rest 9 lässt, genau von denjenigen natürlichen Zahlen  $n = 9 + 11m$  mit ganzzahligem  $m$  erfüllt, für die  $9 + 11m \leq 185$  gilt. Solche natürlichen Zahlen  $n$  gibt es; die kleinste von ihnen erhält man mit  $m = 0$ .

Die gesuchte kleinste Zahl  $n$  mit den genannten Eigenschaften ist also  $n = 9$ ; nach (1) ist die zugehörige Lösung der in der Aufgabe gegebenen Gleichung die Zahl  $x = 16$ .

*Lösungen der I. Runde 1986 übernommen von [5]*

## 2.28.2 II. Runde 1986, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 260921**

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2} \quad \text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Es ist

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2} = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n^2 - 8n + 4n + 8}{n + 2} = \frac{(n^2 - 4n + 4) \cdot (n + 2)}{n + 2} = n^2 - 4n + 4 \in \mathbb{N}, \square$$

**Aufgabe 2 - 260922**

Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9, \quad b = 5x + 8, \quad c = 4x + 1$$

hatten, wobei  $x$  eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl  $x$  gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen  $a, b, c$  seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl  $x$ , für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

a) Offensichtlich gilt für jede reelle Zahl  $x > 0$  (und damit auch für jede von Null verschiedene natürliche), dass  $a + b = 8x + 17 > 4x + 1 = c$  und  $a + c = 7x + 10 > 5x + 8 = b$  ist. Es gilt aber auch die dritte Dreiecksungleichung  $b + c = 9x + 9 > 3x + 9 = a$ , sodass sich für alle  $x > 0$  jeweils ein entsprechendes Dreieck mit Kantenlängen  $a, b$  und  $c$  bilden lässt. Anke hat also recht.

b) Mit  $x = 1$  ist  $a = 12, b = 13$  und  $c = 5$ , was  $a^2 + c^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2 = b^2$  erfüllt, sodass nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bedeutet, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen  $a$  und  $c$  sowie Hypotenusenlänge  $b$  gibt. Also hat auch Birgit recht.

**Aufgabe 3 - 260923**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a; b; c)$  natürlicher Zahlen  $a, b, c$ , die die folgenden Bedingungen

(1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt  $b < c$ .

(2)  $b$  und  $c$  sind zueinander teilerfremd.

(3)  $a$  ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.

(4)  $b$  und  $c$  sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge  $A = \{4; 9; 12; a\}$  ist, ist in der Menge  $B = \{13; 16; 21; b; c\}$  enthalten.

Nach (5) sind die Summen  $4 + 9 = 13, 4 + 12 = 16, 9 + 12 = 21, 4 + a, 9 + a$  und  $12 + a$  alle in  $B$  enthalten. Da nach (3)  $a$  verschieden von 4, 9 und 12 ist, ist in dieser Liste von sechs Additionsaufgaben doppelt. Da aber  $B$  nur höchstens fünf Elemente enthält, müssen mindestens zwei das gleiche Ergebnis besitzen. Nach (4) sind  $b$  und  $c$  von den sonstigen Elementen von  $B$  und nach (1) auch voneinander verschieden, sodass  $B$  tatsächlich genau fünf Elemente besitzt und damit von den drei obigen Summen, die  $a$  als Summand enthalten, genau eine einen schon vorhandenen Wert 13; 16 oder 21 annimmt.

Fall 1: Es ist  $4 + a \in \{13; 16; 21\}$ . Dann kann  $4 + a$  nicht 13 oder 16 sein, da sonst  $a = 9$  bzw.  $a = 12$  folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss  $a + 4 = 21$  und damit  $a = 17$  gelten. Dann ist  $a + 9 = 26 = b < a + 12 = 29 = c$ , was auch (2) erfüllt, sodass man ein erstes Lösungstripel  $(a, b, c) = (17, 26, 29)$  erhält.

Fall 2: Es ist  $9 + a \in \{13; 16; 21\}$ . Dann kann  $9 + a$  nicht 13 oder 21 sein, da sonst  $a = 4$  bzw.  $a = 12$  folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss  $a + 9 = 16$  und damit  $a = 7$  gelten. Dann ist  $a + 4 = 13 = b < a + 12 = 19 = c$ , was auch (2) erfüllt, sodass man ein zweites Lösungstripel  $(a, b, c) = (7, 13, 19)$  erhält.

Fall 3: Es ist  $12 + a \in \{13; 16; 21\}$ . Dann kann  $12 + a$  nicht 16 oder 21 sein, da sonst  $a = 4$  bzw.  $a = 9$  folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss  $a + 12 = 13$  und damit  $a = 1$  gelten. Dann ist  $a + 4 = 5 = b < a + 9 = 10 = c$ . Dies widerspricht aber (2), sodass es in diesem Fall kein Lösungstripel gibt.

Zusammenfassend gibt es also genau zwei Lösungstripel, die die Aufgabenstellung erfüllen, nämlich (7,13,19) und (17,26,29).

#### Aufgabe 4 - 260924

Von einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  mit dem rechten Winkel bei  $C$  wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite  $AB$ , die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ACB$  und die auf der Seite  $AB$  senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck  $ABC$  gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!

Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel  $\angle BAC$  und  $\angle ABC$ !

Es sei  $W$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit  $AB$ ,  $H$  der Fußpunkt der Höhe von  $C$  auf  $AB$  und  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ .

Da die Winkelhalbierende den rechten Winkel bei  $C$  in die beiden Winkel  $\angle ACW = \angle WCB = 45^\circ$  halbiert, müssen die Höhe und die Seitenhalbierende diese beiden Teilwinkel halbieren.

O.B.d.A. gelte, dass die Seitenhalbierende den Winkel  $\angle ACW$  und die Höhe den Winkel  $\angle WCB$  halbiert. (Den umgekehrten Fall erhält man durch Vertauschung der beiden Punkte  $A$  und  $B$ .)

Also gilt

$$\angle ACM = \angle MCW = \angle WCH = \angle HCB = 22,5^\circ$$

Nach Definition ist  $\angle BHC = 90^\circ$ , sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle BHC$  gilt, dass

$$\angle CBA = \angle CBH = 180^\circ - \angle HCB - \angle BHC = 67,5^\circ$$

gilt.

Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle ABC$  ist dann  $\angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle CBA = 22,5^\circ$ . Damit sind (bis auf Vertauschung) die beiden übrigen Innenwinkel des Dreiecks  $\triangle ABC$  eindeutig bestimmt, sollte es überhaupt ein solches geben.

Sei also nun umgekehrt ein solches Dreieck  $\triangle ABC$  mit  $\angle BAC = 22,5^\circ$ ,  $\angle CBA = 67,5^\circ$  und  $\angle ACB = 90^\circ$  gegeben und seien die Punkte  $H$ ,  $W$  und  $M$  wie oben definiert. Dann sind also aufgrund der Definition der Winkelhalbierenden  $\angle ACW = \angle WCB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ .

Nach dem Satz des Thales liegen  $C$ ,  $A$  und  $B$  auf dem Kreis um  $M$  durch  $A$ , sodass also  $|AM| = |BM| = |CM|$  gilt. Insbesondere ist das Dreieck  $\triangle AMC$  gleichschenkelig und es gilt

$$\angle ACM = \angle MAC = \angle BAC = 22,5^\circ = \frac{90^\circ}{4} \quad \text{sowie} \quad \angle MCW = \angle ACW - \angle ACM = 22,5^\circ = \frac{90^\circ}{4}$$

Im Dreieck  $\triangle HCB$  gilt wie oben nach der Definition der Höhe  $\angle BHC = 90^\circ$ , sodass sich aufgrund der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck und  $\angle CBH = \angle CBA$  wieder

$$\angle HCB = 180^\circ - \angle BHC - \angle CBH = 180^\circ - 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ = \frac{90^\circ}{4}$$

Da das Dreieck  $\triangle ABC$  keinen stumpfen Innenwinkel besitzt, liegt  $H$  auf der Strecke  $AB$  und es gilt abschließend auch

$$\angle WCH = \angle WCB - \angle HCB = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ = \frac{90^\circ}{4}$$

sodass tatsächlich, wie in der Aufgabenstellung gefordert, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe den rechten Winkel in vier gleich große Teile.

Es gibt also bis auf Vertauschung der Innenwinkel bei  $A$  und  $B$  (was natürlich die Ähnlichkeit erhält) genau eine Wahl der beiden weiteren Innenwinkel von  $\triangle ABC$ , nämlich die oben angegebene von  $22,5^\circ$  und  $67,5^\circ$ .

*Aufgaben der II. Runde 1986 gelöst von cyrix*

## 2.28.3 III. Runde 1986, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 260931**

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen, für die die Gleichung  $2(a + b) = ab$  gilt!

Es ist die Gleichung äquivalent zu  $4 = ab - 2a - 2b + 4 = (a - 2) \cdot (b - 2)$ , sodass  $a - 2$  und  $b - 2$  das gleiche Vorzeichen haben und Teiler sowie zugehöriger Gegenteiler von 4 sind. Da  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen sind, gilt dabei  $a - 2 \geq -2$  und  $b - 2 \geq -2$ , sodass keine ganzzahlige Zerlegung der 4 mit Faktor -4 in Frage kommt. Damit gilt  $(a - 2) \cdot (b - 2) = 4 \cdot 1 = (\pm 2) \cdot (\pm 2) = 1 \cdot 4$  und also

$$(a, b) \in \{(6, 3), (0, 0), (4, 4), (3, 6)\}$$

Dass dies auch alle Lösungen der Ausgangsgleichungen sind, zeigt die Probe.

**Aufgabe 2 - 260932**

In einer Ebene  $e$  sei ein Dreieck  $ABC$  fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  seien  $U$ ,  $V$  bzw.  $W$  in dieser Reihenfolge.

Weiter sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene  $e$ . Spiegelt man  $P$  sowohl an  $U$ ,  $V$  als auch an  $W$ , so erhält man die Bildpunkte  $P_U, P_V$  bzw.  $P_W$ .

(Unter dem Bildpunkt  $P_S$  von  $P$  bei der Spiegelung an einem Punkt  $S$  versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass  $S$  der Mittelpunkt der Strecke  $PP_S$  ist. Falls  $P = S$  ist, ist  $P_S = P$ .)

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $P_U P_V P_W$  unabhängig von der Lage des Punktes  $P$  ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks  $ABC$ !

Es ist für jeden Punkt  $P$  der Ebene  $e$  das Dreieck  $\triangle P_U P_V P_W$  kongruent zum Dreieck  $\triangle ABC$ . Insbesondere haben also die beiden Dreiecke auch den gleichen Flächeninhalt.

Zum Beweis der Kongruenz sei zuerst  $P \notin \{U, V, W\}$ . Dann sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes wegen  $\frac{|PP_U|}{|PU|} = 2 = \frac{|PP_V|}{|PV|}$  die Geraden  $P_U P_V$  und  $UV$  zueinander parallel und nach dem Strahlensatz gilt  $\frac{|P_U P_V|}{|UV|} = \frac{|PP_U|}{|PU|} = 2$ , also  $|P_U P_V| = 2 \cdot |UV|$ .

Weiterhin gilt analog nach der Umkehrung des Strahlensatzes (mit Scheitelpunkt bei  $C$ ), dass  $UV \parallel AB$  und mit dem Strahlensatz an gleicher Stelle dann, dass  $|AB| = 2 \cdot |UV|$  ist. Insgesamt ist also  $|P_U P_V| = |AB|$ . Analog folgt auch  $|P_U P_W| = |AC|$  und  $|P_V P_W| = |BC|$ , sodass die Dreiecke  $\triangle P_U P_V P_W$  und  $\triangle ABC$  nach Kongruenzsatz sss zueinander kongruent sind.

Andernfalls gilt o.B.d.A.  $P = W = P_W$ . Dann ist aber direkt nach Definition  $|P_U P_W| = 2 \cdot |UP| = 2 \cdot |UW| = |AC|$  und analog  $|P_V P_W| = |BC|$ .

Wie im ersten Fall können wir schließen, dass  $|P_U P_V| = |AC|$  gilt, sodass sich die gewünschte Dreiecks-Kongruenz auf die gleiche Art und Weise ergibt,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 260933**

Wenn eine reelle Zahl  $a$  gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl  $x$  eine Zahl  $y$ , nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$$

zugeordnet.

(A) Ermitteln Sie, wenn  $a = -3$  gegeben ist, zwei ganze Zahlen  $x$ , deren zugeordnete Zahlen  $y$  ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl  $a$ , für die die folgende Aussage (\*) gilt!

(\*) Wenn die Zahl  $a$  gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen  $x$ , deren jeweils zugeordnete Zahlen  $y$  ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl  $a$  noch eine andere reelle Zahl  $a$  gibt, für die die Aussage (\*) gilt!

Es ist für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^3 + x + x^2 + 1 + (a - 1)x}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{a - 1}{x^2 + 1}$$

(A): Für  $a = -3$  ist also  $y = x + 1 + \frac{-4}{x^2+1} = x + 1 - \frac{4}{x^2+1}$ . Damit ist für jede ganze Zahl  $x$  die Zahl  $y$  ganz, wenn auch  $x + 1 - y = \frac{4}{x^2+1}$  eine ganze Zahl, also  $x^2 + 1$  ein Teiler von 4 ist. Dies ist z.B. für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  der Fall. Tatsächlich ist  $y(0) = 1$  und  $y(1) = 0$ .

(B)/(C): Damit für ein  $a$  die Aussage (\*) gilt, muss also für unendlich viele ganze Zahlen  $x$  auch  $y - (x + 1) = \frac{a-1}{x^2+1}$  eine ganze Zahl sein. Da auch  $x^2 + 1$  eine ganze Zahl ist, ist damit auch  $a - 1 = (y - (x + 1)) \cdot (x^2 + 1) \in \mathbb{Z}$  und es gilt  $a - 1$  ist durch  $x^2 + 1$  teilbar.

Insbesondere ist also  $a - 1$  durch unendlich viele verschiedene ganze Zahlen teilbar, was nur die ganze Zahl 0 erfüllt, sodass  $a = 1$  sein muss. Für  $a = 1$  ist aber  $y = x + 1$  für jedes ganzzahlige  $x$  selbst ganzzahlig, insbesondere also auch für unendlich viele  $x$ . Damit ist  $a = 1$  die einzige reelle Zahl, die (\*) erfüllt.

#### Aufgabe 4 - 260934

Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn  $a$  und  $b$  zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die  $\frac{a}{b}$  ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  eine irrationale Zahl.

Wir nehmen indirekt an, dass  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  eine rationale Zahl ist. Dann existieren teilerfremde positive ganze Zahlen  $p$  und  $q$  mit  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$ , da  $a > 0$  und  $b > 0$  sind.

Nach Quadrieren und Beseitigen der Nenner folgt  $aq^2 = bp^2$ . Da  $p$  und  $q$  teilerfremd sind, ist auch  $ggT(p^2, q^2) = 1$ , also wegen  $p^2 | bp^2$  und damit  $p^2 | aq^2$  auch  $p^2 | a$ . Damit gibt es eine positive ganze Zahl  $c$  mit  $a = c \cdot p^2$ .

Analog folgert man auch die Existenz einer positiven ganzen Zahl  $d$  mit  $b = d \cdot q^2$ . Setzt man dies ein, so ergibt sich  $c \cdot p^2 q^2 = d \cdot p^2 q^2$ , also  $c = d$ . Dann jedoch sind  $a$  und  $b$  beide durch  $c$  teilbar, sodass der Bruch  $\frac{a}{b}$  mit diesem Zähler und Nenner nur genau dann schon so weit wie möglich gekürzt war, wenn  $c = 1$  ist. Dann jedoch sind sowohl  $a = p^2$  als auch  $b = q^2$  Quadratzahlen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung aus der Aufgabenstellung ist.

Demzufolge kann  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  nicht rational, muss also irrational sein,  $\square$ .

#### Aufgabe 5 - 260935

Von einem Viereck  $ABCD$  werde vorausgesetzt:

- (1)  $ABCD$  ist ein Trapez mit  $AB \parallel CD$ .
- (2) Es gilt  $AB > CD$ .
- (3) Die Summe der Größen der Innenwinkel  $\angle BAD$  und  $\angle CBA$  beträgt  $90^\circ$ .

Der Mittelpunkt von  $AB$  sei  $M$ , der Mittelpunkt von  $CD$  sei  $N$ .

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $MN = \frac{1}{2} \cdot (AB - CD)$  gilt!

Wegen (2) sind die Geraden  $AD$  und  $BC$  nicht parallel, schneiden sich also in einem Punkt  $S$ , der auf den Verlängerungen über  $D$  bzw.  $C$  hinaus liegt. Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle ABS$  und (3) gilt dann  $\angle ASB = 180^\circ - \angle BAS - \angle SBA = 180^\circ - (\angle BAD + \angle CBA) = 90^\circ$ , sodass das Dreieck  $\triangle ABS$  rechtwinklig bei  $S$  ist. Nach dem Satz von Thales gilt dann

$$|SM| = |AM| = |BM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Wegen (1) und der Umkehrung des Strahlensatzes liegen wegen  $\frac{|AM|}{|MB|} = 1 = \frac{|DN|}{|NC|}$  die drei Punkte  $S$ ,  $N$  und  $M$  auf einer Geraden, da auch  $S$ ,  $D$  und  $A$  sowie  $S$ ,  $C$  und  $B$  jeweils auf einer Geraden liegen. Insbesondere ist dann  $\frac{|SN|}{|SM|} = \frac{|CD|}{|AB|}$  und damit

$$|MN| = |SM| - |SN| = |SM| \cdot \left(1 - \frac{|CD|}{|AB|}\right) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{|AB| - |CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |CD|), \square$$

#### Aufgabe 6 - 260936

a) Ein regelmäßiges Tetraeder  $ABCD$  soll durch eine Ebene  $e$ , die durch den Punkt  $A$  geht, in zwei Tetraeder  $T_1, T_2$  zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage  $e$  in Bezug auf die drei Punkte  $B, C, D$  bei derartigen Zerlegungen haben muss!

b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen  $T_1$  volumengleich zu  $T_2$  wird!

a) Da die Schnittfläche von  $e$  mit dem Tetraeder Seitenfläche beider Teiltetraeder  $T_1$  und  $T_2$  wird, muss sie insbesondere selbst dreieckig sein. Da sie  $a$  enthält, muss die Ebene  $e$  noch genau zwei weitere Schnittpunkt mit Kanten von  $ABCD$  besitzen.

Da mit einem weiteren Punkt auf einer von  $A$  ausgehenden Kante gleich die gesamte weitere Gerade, auf der diese Kante liegt, in  $e$  liegen würde, also auch der Endpunkt der entsprechenden Kante, der  $B$ ,  $C$  oder  $D$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $e$  das Dreieck  $\triangle BCD$  in einer Strecke schneidet. (Die Endpunkte dieser Strecke sind dann genau die beiden weiteren Eckpunkte der Schnittfläche von  $e$  mit dem Tetraeder  $ABCD$ .)

Diese Strecke  $s$  kann aber keine der Seitenkanten des Dreiecks  $\triangle BCD$  sein, da sonst der gesamte Tetraeder  $ABCD$  in einem der beiden von  $e$  aufgespannten Halbräume läge, also diesen nicht in zwei Teiltetraeder zerlegen würde. Also muss  $s$  innere Punkte von  $\triangle BCD$  enthalten und dieses in zwei Teilfiguren zerlegen.

Die beiden Teilkörper vom Tetraeder  $ABCD$ , die beim Schnitt entlang  $e$  entstehen, besitzen die beiden Teilfiguren, in die  $s$  das Dreieck  $\triangle BCD$  zerlegt, als Grundfläche sowie  $A$  als Spitze. Da die Teilkörper Tetraeder sind, muss also deren Grundfläche jeweils ein Dreieck sein, sodass  $s$  das Dreieck  $\triangle BCD$  in zwei Teildreiecke zerlegt.

Dies ist aber durch eine Strecke  $s$  nur genau dann möglich, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks verläuft und die gegenüberliegende Seite in deren Innern schneidet.

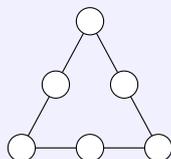
Also muss  $e$  durch  $A$  sowie genau einen der drei übrigen Eckpunkte  $B$ ,  $C$  oder  $D$  sowie das Innere der Strecke aus den übrigen beiden Punkten verlaufen. Dies beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $e$  den Tetraeder  $ABCD$  in zwei Teiltetraeder  $T_1$  und  $T_2$  zerlegt. Verläuft  $e$  o.B.d.A. durch  $B$  und  $S$ , wobei  $S$  ein innerer Punkt der Strecke  $CD$  ist, dann sind die beiden Tetraeder gegeben durch  $ABCS$  und  $ABDS$ .

b) Es verlaufe o.B.d.A. die Ebene  $e$  durch  $B$  und den inneren Punkt  $S$  der Strecke  $CD$ . Die beiden übrigen Fälle, dass  $e$  durch  $C$  bzw.  $D$  verlaufe, sind hierzu völlig analog.

Da in beiden Teiltetraedern  $ABCS$  und  $ABDS$  die Höhe der Spitze  $A$  auf die Grundflächenebene  $\epsilon_{BCS} = \epsilon_{BDS} = \epsilon_{BCD}$  identisch ist, genauso wie in der Grundfläche die Höhe von  $B$  auf die Gerade  $CD$  der gegenüberliegenden Dreiecksseiten  $CS$  bzw.  $DS$ , verhalten sich die Volumina der beiden Tetraeder wie die Längen der Grundseiten  $|CS|$  bzw.  $|DS|$  in ihren Grundflächen. Insbesondere sind sie genau dann volumengleich, wenn  $|CS| = |DS|$  gilt, also  $S$  der Mittelpunkt von  $CD$  ist.

Zusammenfassend erhält man also genau dann eine Zerlegung in zwei volumengleiche Tetraeder, wenn die Ebene  $e$  durch  $A$  verläuft sowie eine Seitenhalbierende des Dreiecks  $\triangle BCD$  enthält. (Damit ist  $e$  eindeutig bestimmt.) Da keine zwei der Seitenhalbierenden mit  $A$  in einer gemeinsamen Ebene liegen und das Dreieck  $\triangle BCD$  genau drei Seitenhalbierende besitzt (je eine durch jeden seiner Eckpunkte), gibt es also genau drei Ebenen, die  $A$  enthalten und das Tetraeder  $ABCD$  in zwei volumengleiche Teiltetraeder  $T_1$  und  $T_2$  zerlegt,  $\square$ .

*Aufgaben der III. Runde 1986 gelöst von cyrix*

**2.29 XXVII. Olympiade 1987****2.29.1 I. Runde 1987, Klasse 9****Aufgabe 1 - 270911**

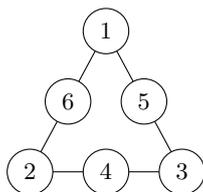
In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Die Abbildung zeigt z.B. eine solche Lösung, da jede Zahl genau einmal vorkommt und für die Summen gilt:

$$1 + 6 + 2 = 1 + 5 + 3 = 2 + 3 + 4$$

Es gibt weitere Lösungen.

**Aufgabe 2 - 270912**

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

- Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine!
- Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

a) Es gibt genau 7 Steine, bei denen auf den beiden Hälften des Steins dieselbe Zahl steht.

Um die anderen Steine zu beschreiben, kann man für ihr erstes Feld eine der 7 Zahlen wählen und für das zweite Feld jeweils eine der 6 anderen Zahlen. Dabei hat man jeden Stein der genannten Art genau 2 mal erfasst. Die Anzahl der Steine beträgt folglich  $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ .

Die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine beträgt somit  $7 + 21 = 28$ .

b) Man kann aus alle Steinen eines Dominospieles eine geschlossene Kette bilden, z.B.

00 / 01 / 11 / 12 / 22 / 23 / 33 / 34 / 44 / 45 / 55 / 56 / 66 / 61 / 13 / 35 / 51 / 14 / 46 / 62 / 24 / 40 / 02 / 25 / 50 / 03 / 36 / 60

Die gesuchte größte Zahl für eine geschlossene Kette beträgt folglich 28.

**Aufgabe 3 - 270913**

Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltafel; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

Wenn man zeigen kann, dass 1987 durch keine Primzahl  $p$  teilbar ist, für die  $p \leq \sqrt{1987}$  gilt, dann ist 1987 als Primzahl nachgewiesen.

Wegen  $\sqrt{1987} < 44$  genügt es hierzu also zu zeigen, dass 1987 durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 teilbar ist. Diese Aussagen lassen sich in der Tat durch Ausrechnen bestätigen (z.B. kann man mit Hilfe eines Taschenrechners feststellen, dass keine der 14 Zahlen  $1987 : 2$ ,  $1987 : 3$ , ...,  $1987 : 4$  eine ganze Zahl ist).

Damit ist die Antwort erbracht, dass 1987 eine Primzahl ist.

**Aufgabe 4 - 270914**

Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit  $a$ ,  $b$  bezeichnet, die Diagonalenlänge mit  $d$  und der Flächeninhalt mit  $A$ . Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt  $d = 2a - b$  genau dann, wenn  $A = \frac{3}{4}a^2$  gilt!

I. Wenn  $d = 2a - b$  gilt, so folgt (da nach dem Satz des Pythagoras  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  ist)  $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$ ,

$$a^2 + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 \quad (1)$$

$$4ab = 3a^2 \quad (2)$$

und hieraus (da nach der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks  $A = ab$  ist)

$$4A = 3a^2 \quad (3)$$

$$A = \frac{3}{4}a^2 \quad (4)$$

II. Wenn  $A = \frac{3}{4}a^2$  gilt, so folgt einerseits  $ab = \frac{3}{4}a^2$ , wegen  $a > 0$  als  $b = \frac{3}{4}a < 2a$ .

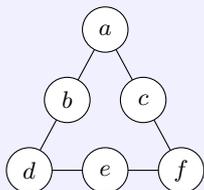
Andererseits folgt (da die Schlüsse von (1) auf (2), (3), (4) umgekehrt werden können)  $a^2 + b^2 = (2a - b)^2$ . Wegen  $b < 2a$ , also  $2a - b > 0$  kann man hieraus weiter auf  $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$ , d.h.  $d = 2a - b$  schließen.

Mit I. und II. ist der verlangte Beweis geführt.

*Lösungen der I. Runde 1987 übernommen von [5]*

## 2.29.2 II. Runde 1987, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 270921



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für  $a, b, c, d, e, f$  die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt, wenn man die genannte Summe mit  $s$  bezeichnet

$$a + b + d = s \quad (1); \quad a + c + f = s \quad (2); \quad d + e + f = s \quad (3)$$

$$\text{sowie} \quad a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21 + a + d + f = 3s \quad ; \quad 7 + \frac{a + d + f}{3} = s \quad (4)$$

Da  $s$  (nach (1)) ganzzahlig ist, muss  $a + d + f$  durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für  $a, d, f$  eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert  $a + d + f$ , den Wert  $s$  aus (4), die Werte

$$b = s - a - d \quad (5); \quad c = s - a - f \quad (6); \quad e = s - d - f \quad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

$a$	$d$	$f$	$a + d + f$	$s$	$b$	$c$	$e$	kommen 1 bis 6 vor ?
1	2	3	6	9	6	5	4	ja
1	2	6	9	10	7	3	2	nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	nein
2	3	4	9	10	5	4	3	nein
2	4	6	12	11	5	3	1	ja
3	4	5	12	11	4	3	2	nein
4	5	6	15	12	3	2	1	ja

Da (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit "ja" gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Da sie sich in den überhaupt als  $a, d, f$  auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten.

## Aufgabe 2 - 270922

Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.

In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

- a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!  
 b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

a) Wir fordern o.B.d.A., dass die erste Ziffer auf einem Dominostein größer oder gleich der zweiten Ziffer ist. Dann gibt es genau einen Dominostein mit erster Ziffer 0 (nämlich 0-0, genau zwei mit erster Ziffer 1 (nämlich 1-0 und 1-1), ... , genau zehn Dominosteine mit erster Ziffer 9 (nämlich 9-0, 9-1, ..., 9-9). Insgesamt gibt es also  $1 + 2 + \dots + 10 = 55$  verschiedene Dominosteine.

b) Jede Ziffer kommt auf diesen 55 Dominosteinen insgesamt elfmal vor, nämlich neunmal mit je einer anderen Ziffer und zweimal auf dem Dominostein, der auf beiden Seiten die betreffende Ziffer enthält. Jedoch ist jede Ziffer in einer geschlossenen Kette geradzahlig oft enthalten, nämlich jeweils paarweise auf aneinanderstoßenden Hälften zweier benachbarter Dominosteine. Damit kann also in einer geschlossenen Kette jede Ziffer nur maximal zehnmal vorkommen, sodass in der geschlossenen Kette maximal 50 Steine Verwendung finden können.

Eine Kette lässt sich auch wie folgt erhalten:

0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 3-3, 3-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-6, 6-6, 6-7, 7-7, 7-8, 8-8, 8-9, 9-9, 9-0, 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-1, 1-3, 3-5, 5-9, 9-7, 7-0, 0-3, 3-6, 6-9, 9-2, 2-5, 5-1, 1-7, 7-4, 4-8, 8-0, 0-4, 4-1, 1-9, 9-3, 3-7, 7-5, 5-8, 8-2, 2-6, 6-0

Dabei wurden die Dominosteine 0-5, 1-6, 2-7, 3-8 und 4-9 nicht und alle anderen genau einmal verwendet.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

### Aufgabe 3 - 270923

Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit  $a, b, c$  bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit  $d$  und der Oberflächeninhalt mit  $A$ .

Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt genau dann  $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$ , wenn  $A = 8 \cdot d^2$  gilt.

Es gilt genau dann  $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ , wenn  $3d = a + b + c$  gilt. Wegen  $d > 0$  und  $a + b + c > 0$  ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a + b + c)^2 \quad \rightarrow \quad 9d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

und dies wegen  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  und  $A = 2(ab + ac + bc)$  mit  $9d^2 = d^2 + A$ , also auch mit  $8d^2 = A$ , w.z.b.w.

*Lösung übernommen von [5]*

### Aufgabe 4 - 270924

Für je zwei natürliche Zahlen  $a, b$ , die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10 \quad (1) \quad ; \quad 3a + 8b \leq 25 \quad (2)$$

erfüllen, sei  $S = a + 2b$ .

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen  $S$ , die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von  $S$ !

Aus der zweiten Ungleichung folgt  $b \leq 3$ . Wir unterscheiden nun nach dem Wert, den  $b$  annimmt:

- Fall:  $b = 3$ . Dann ist nach (2)  $a \leq 0$ , also  $a = 0$  und  $S = 6$ .
- Fall:  $b = 2$ . Dann folgt aus (2)  $a \leq 3$ , welche jeweils auch (1) erfüllen, und  $S \leq 3 + 2 \cdot 2 = 7$ .
- Fall:  $b \leq 1$ . Dann folgt aus (1)  $a \leq 4$ , also  $S \leq 4 + 2 \cdot 1 = 6$ . Damit gilt in jedem Fall  $S \leq 7$ , welcher für das Paar  $(a, b) = (3, 2)$ , dass beide Ungleichungen erfüllt, auch angenommen wird.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.29.3 III. Runde 1987, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 270931**

a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \dots + x_{1987}^{11} = 1988 \quad (1)$$

keine reelle Lösung  $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$  besitzt, in der alle Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{1987}$  natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen  $(x_1, x_2, \dots, x_{1987})$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{1987})$  genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x'_1, x_2 \neq x'_2, \dots, x_{1987} \neq x'_{1987}$$

a) Angenommen, es gäbe eine solche Lösung für die Gleichung (1) der Aufgabenstellung.

Wegen  $x_i \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, 1987$  ist dann auch für alle diese Indizes  $i$  der Wert  $x_i^{11} \geq 0$ , sodass genauso für alle diese  $i$  die Abschätzung  $x_i^{11} \leq 1987 < 2048 = 2^{11}$ , also  $x_i < 2$  und damit wegen  $x_i \in \mathbb{N}$  schließlich  $x_i \leq 1$ , also auch  $x_i^{11} \leq 1$ , was dann aber wegen

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \dots + x_{1987}^{11} \leq 1987 < 1988$$

einen Widerspruch zu (1) erzeugen würde,  $\square$ .

b) Es sei  $k$  eine beliebige ganze Zahl. Setze  $x_1 := x_2 := \dots = x_{61} := -1$ ,  $x_{62} := 2$ ,  $x_{63} := k$ ,  $x_{64} := -k$  und für alle  $i \geq 65$   $x_i := 0$ . Dann ist

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \dots + x_{1987}^{11} = (-1)^{11} \cdot (61) + 2^{11} + k^{11} + (-k)^{11} + 0^{11} \cdot (1987 - 64) = -61 + 2048 + k^{11} - k^{11} = 1987$$

also eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Zahlen. Dabei unterscheiden sich je zwei solche Lösungen durch die verschiedenen Werte von  $k$ , sodass es unendlich viele verschiedene gibt.

**Aufgabe 2 - 270932**

(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn  $a, b, c, d$  reelle Zahlen sind, für die  $b \neq 0, b + c \neq 0$  und  $b + d \neq 0$  gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(I) Die Aussage ist falsch, wie  $a = 1, b = 2, c = 1$  und  $d = 0$  zeigt, da dann die Voraussetzung  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{a+c}{b+c}$  erfüllt ist, die Schlussfolgerung wegen  $\frac{a+d}{b+d} = \frac{1}{2}$  aber offensichtlich nicht.

(II) Die Aussage ist korrekt, da die Voraussetzung nach Multiplikation mit  $b(b+c) > 0$  äquivalent ist zu  $a(b+c) < b(a+c)$  bzw.  $ab + ac < ab + bc$ , also wegen  $c > 0$  auch äquivalent zu  $a < b$ .

Dann ist aber wegen  $d > 0$  auch  $ab + ad < ab + bd$ , also  $a(b+d) < b(a+d)$ , was nach Division durch  $b(b+d) > 0$  genau auf die Folgerung in der Aufgabenstellung führt,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 270933**

Es sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck, dessen Seiten  $AB$  und  $CD$  so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von  $AB$  über  $B$  hinaus und die Verlängerung von  $DC$  über  $C$  hinaus in einem Punkt  $T$  schneiden.

Die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ATD$  sei  $h$ . Der Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sei  $S$ ; die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ASD$  sei  $g$ .

Beweisen Sie:

Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass  $g$  und  $h$  zueinander parallel sind.

Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass  $g$  und  $h$  in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Wir berechnen die Winkel, in denen  $g$  sowie  $h$  die Gerade  $BC$  schneiden, und zeigen, dass sie gleich sind. Daraus folgt dann sofort die zu zeigende Parallelität von  $g$  und  $h$ . Dazu betreiben wir eine Winkeljagd:

Nach Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle ASD$  ist  $\angle ASD = 180^\circ - (\angle SDA + \angle DAS)$ . Da  $\angle ASD$  und  $\angle CSB$  Scheitelwinkel sind, sind sie auch gleich groß und besitzen die gleiche Winkelhalbierende. Sei  $S_1$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\angle ASD$ , also auch von  $\angle CSB$ , mit  $BC$ . Dann ist  $\angle S_1SB = \frac{1}{2} \cdot \angle CSB = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS)$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die beiden Peripheriewinkel  $\angle DBC = \angle SBS_1$  und  $\angle DAC = \angle DAS$  über der Sehne  $DC$  gleich groß, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle SS_1B$  folgendes gilt:

$$\angle BS_1S = 180^\circ - \angle SBS_1 - \angle S_1SB = 180^\circ - \angle DAS - 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)$$

Andererseits erhält man mit der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle ATD$ , dass  $\angle ATD = 180^\circ - \angle DAT - \angle TDA = 180^\circ - \angle DAB - \angle CDA$  ist. Sei  $S_2$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\angle ATD$  mit  $BC$ . Dann ist  $\angle BTS_2 = \angle ATS_2 = \frac{1}{2} \cdot \angle ATD = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA)$ .

Im Sehnenviereck  $ABCD$  addieren sich gegenüberliegende Innenwinkel zu  $180^\circ$ , sodass  $\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA$  gilt. Da  $\angle ABC$  und  $\angle CBT = \angle S_2BT$  Nebenwinkel sind, gilt  $\angle S_2BT = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA$ . Damit gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle BTS_2$

$$\begin{aligned} \angle TS_2B &= 180^\circ - \angle S_2BT - \angle BTS_2 = 180^\circ - \angle CDA - 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA) = \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA) \end{aligned}$$

Es ist  $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$ . Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes sind die beiden Peripheriewinkel  $\angle CAB$  und  $\angle CDB$  über der Sehne  $CB$  gleich. Also gilt auch  $\angle DAB = \angle DAC + \angle CDB$ . Weiterhin ist  $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA$ , sodass sich

$$\angle DAB - \angle CDA = (\angle DAC + \angle CDB) - (\angle CDB + \angle BDA) = \angle DAC - \angle BDA = \angle DAS - \angle SDA$$

und damit

$$\begin{aligned} \angle TS_2B &= 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAS - \angle SDA) = \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)) = 180^\circ - \angle BS_1S \end{aligned}$$

ergibt. Sei  $P$  ein Punkt auf dem von  $T$  ausgehenden Strahl durch  $S_2$ , nicht aber auf der Strecke  $TS_2$ , (also "nach  $S_2$ ") liegt. Dann sind  $\angle TS_2B$  und  $\angle BS_2P$  Nebenwinkel, sodass sich

$$\angle BS_2P = 180^\circ - \angle TS_2B = \angle BS_1S$$

ergibt und damit  $g$  sowie  $h$  die Gerade  $BC$  im gleichen Winkel schneiden, also nach Umkehrung des Stufenwinkelsatzes zueinander parallel sind,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 270934

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.

Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl  $A$  aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl  $A$  müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

Ja, dies trifft zu: Zählt man die von jedem Punkt ausgehenden Strecken, so muss dies die doppelte Anzahl aller Strecken sein, da jede Strecke an ihren beiden Endpunkten jeweils einen Summanden von 1 beiträgt. Insbesondere ist diese Anzahl also gerade. Damit ist die Summe, die entsteht, wenn man für alle Punkte  $P$  die Anzahl der von  $P$  ausgehenden Strecken addiert, gerade, muss also geradzahlig viele (ggf. auch null) ungerade Summanden besitzen.

Dabei ist  $A$  genau diese Anzahl ungerader Summanden, also selbst gerade,  $\square$ .

### Aufgabe 5 - 270935

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt, für die  $2^{n+2} + 3^{2n+1}$  eine Primzahl ist!

Da für  $n \geq 1$  die Zahl  $z := 2^{n+2} + 3^{2n+1} > 3^2 = 9 > 7$ , aber wegen

$$z = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7}$$

durch 7 teilbar und damit keine Primzahl ist, gibt es keine solche Zahl.

### Aufgabe 6 - 270936

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  eines Würfels  $ABCDEFGH$  bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche  $ABFE$  ohne Verzerrung in wahrer Größe  $A'B'F'E'$  erscheint.

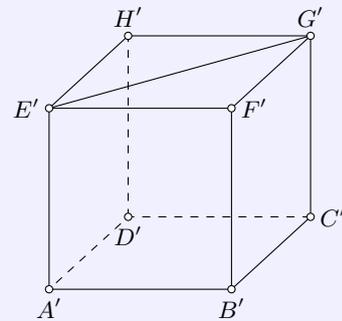
a) Beweisen Sie folgende Aussage:

Es gibt auf der Strecke  $EG$  genau einen Punkt  $P_0$  mit der Eigenschaft, dass die Summe  $CP_0 + P_0F$  kleiner ist als die Summe  $CP + PF$  für jeden anderen Punkt  $P$  auf  $EG$ .

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild  $P'_0$  dieses Punktes  $P_0$  bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!

Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!

Hinweis:  $CP_0, P_0F, CP, PF$  bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.



a) Dreht man das Quadrat  $EFGH$  um die Achse  $EG$  so um  $90^\circ$ , dass der Bildpunkt  $\tilde{F}$  von  $F$  nun senkrecht "über" dem Mittelpunkt von  $EG$  liegt, dann liegt  $\tilde{F}$  nun mit in der gleichen Ebene wie  $A, C, G$  und  $E$ . Da  $EG$  als Drehachse bei der Drehung fix blieb, gilt für jeden Punkt  $P$  auf dieser, dass  $|PF| = |P\tilde{F}|$  gilt.

Es ist also  $P_0$  derjenige Punkt auf  $EG$  (falls existent und eindeutig bestimmt), für den  $|CP_0| + |P_0\tilde{F}|$  minimal wird. Dies ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung genau dann der Fall, wenn  $P_0$  auf der Geraden  $\tilde{F}C$  liegt, denn dann ist diese Summe gleich  $|C\tilde{F}|$ , sonst größer. Da  $C$  und  $\tilde{F}$  auf verschiedenen Seiten von  $EG$  liegen, schneiden sich die beiden Geraden  $EG$  und  $C\tilde{F}$  in genau einem Punkt  $P_0$ , der die Aussage in der Aufgabenstellung erfüllt, sodass dieser existiert und eindeutig bestimmt ist,  $\square$ .

b) Zur Konstruktion von  $P'_0$  genügt es also  $\tilde{F}'$  zu konstruieren, da auch für die Bildgeraden  $E'G'$  und  $C'\tilde{F}'$  gilt, dass sie sich in  $P'_0$  schneiden.

Es liegt  $\tilde{F}$  senkrecht über dem Schnittpunkt  $M$  der Diagonalen des Quadrats  $EFGH$  in einer Höhe von  $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |EF|$ . Da  $|E'F'| = |EF|$  gilt, kann man  $h$  leicht durch eine Hilfskonstruktion erhalten, indem etwa in das schon gegebene Quadrat  $A'B'F'E'$  der Kantenlänge  $|EF|$  die beiden Diagonalen eingezeichnet und der Diagonalschnittpunkt  $N'$  ermittelt wird. Dann gilt  $|E'N'| = h$ .

Da die Strecke  $M\tilde{F}$  parallel zu  $AE$  ist, wird also auch diese unverzerrt dargestellt, sodass man zuerst  $M'$  als Schnittpunkt der Diagonalen  $E'G'$  und  $H'F'$  erhält und dann dort in  $M'$  die Streckenlänge  $h$  auf einer Geraden durch  $M'$ , die parallel zu  $A'E'$  ist, "nach oben" abträgt. Der damit erhaltene Punkt ist  $\tilde{F}'$  und der Schnittpunkt der Geraden  $E'G'$  und  $C'\tilde{F}'$  schließlich der gesuchte Punkt  $P'_0$ .

Aufgaben der III. Runde 1987 gelöst von cyrix

**2.30 XXVIII. Olympiade 1988****2.30.1 I. Runde 1988, Klasse 9****Aufgabe 1 - 280911**

In ein Quadrat mit  $4 \times 4$  Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Eine Lösung zeigt die Abbildung.

Bemerkung: Solche Quadrate nennt man magische Quadrate. Sie sind schon lange bekannt. Im Hintergrund des 1514 geschaffenen Kupferstichs "Die Melancholie" hat Albrecht Dürer z.B. dieses magische Quadrat eingetragen.

Schon im 17. Jahrhundert wusste man, dass es 880 verschiedene derartige Quadrate gibt.

**Aufgabe 2 - 280912**

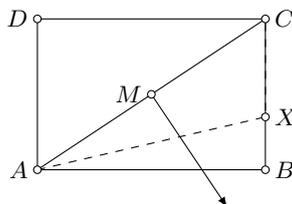
Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Es gibt keine solche rationale Zahl. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine solche Zahl  $x$ , so wäre für sie  $\frac{1}{x} \cdot 2 = x$ . Daraus würde  $x^2 = 2$  folgen. Diese Gleichung hat aber nur die beiden Lösungen  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ , die bekanntlich beide irrational sind.

**Aufgabe 3 - 280913**

Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck  $ABCD$  mit  $\overline{AB} > \overline{BC}$  die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen  $AC$  die Seite  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$  schneidet!



I. Es sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AC$ . Derjenige Strahl auf der Mittelsenkrechten von  $AC$ , der von  $M$  ausgeht und in das Dreieck  $ABC$  hineinführt (siehe Abbildung), muss dieses Dreieck wieder in einem Punkt verlassen, der auf einer der Strecken  $AB$ ,  $BC$  liegt (und von  $A$  sowie  $C$  verschieden ist; denn die Mittelsenkrechte schneidet  $AC$  nur in  $M$ ).

Für jeden (von  $C$  verschiedenen) Punkt  $X$  der Strecke  $BC$  kann man aber beweisen, dass  $X$  nicht auf der Mittelsenkrechten liegt. Ist dieser Beweis geführt (siehe II.), so folgt, wie verlangt, dass die Mittelsenkrechte die Strecke zwischen  $A$  und  $B$  schneiden muss.

II. Durchführung des angekündigten Beweises:

Für jeden Punkt  $X$  auf  $BC$  gilt: Entweder ist  $X = B$ , also  $AX = AB$ , oder  $\triangle ABC$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, das  $AX$  als Hypotenuse hat, womit  $AX > AB$  folgt.

Wegen der Voraussetzung  $AB > BC$  folgt somit in beiden Fällen  $AX > BC$  und daher erst recht  $AX > XC$ . Da aber jeder Punkt der Mittelsenkrechten dieselbe Entfernung von  $A$  wie von  $C$  hat, liegt  $X$  folglich nicht auf der Mittelsenkrechten, wie gezeigt werden sollte.

**Aufgabe 4 - 280914**

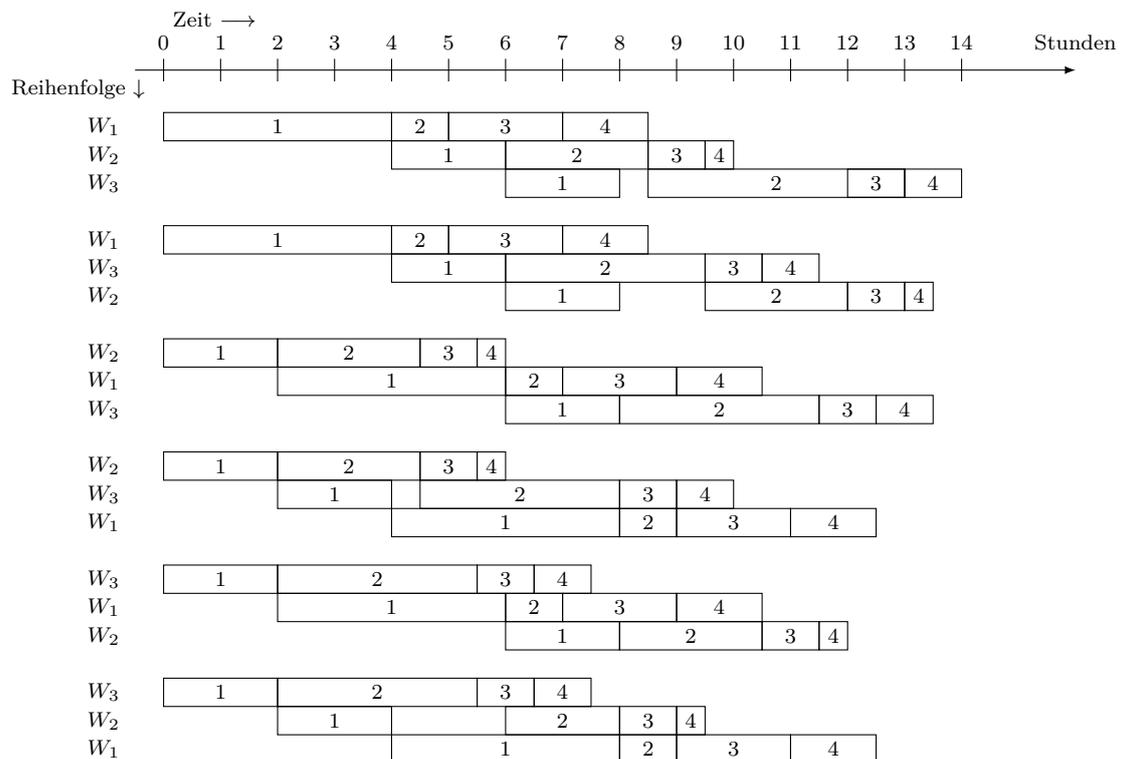
Drei Werkstücke  $W_1, W_2, W_3$  durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge  $M_1, M_2, M_3, M_4$  durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
$W_1$	4	1	2	1,5
$W_2$	2	2,5	1	0,5
$W_3$	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine  $M_1$  bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine  $M_4$ ) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!



(Maschinenbezeichnung kurz 1,2,3,4 statt  $M_1, M_2, M_3, M_4$ )

In den Darstellungen des zeitlichen Ablaufs wird für jede der sechs möglichen Reihenfolgen dreier Werkstücke die Gesamtzeit ermittelt, die sich ergibt, wenn man in jede Maschine das jeweils nächste Werkstück (der vorgesehenen Reihenfolge) möglichst bald einführt.

Beim Vergleich dieser Darstellungen ergibt sich:

Die Reihenfolge  $W_3, W_1, W_2$  unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge.

Hinweise:

Möglich ist auch ein sehr argumentierendes Vorgehen. Beispielsweise kann man zuerst feststellen, für welche Reihenfolge sich bei der Berechnung der

- Summe der Zeiten des ersten und des zweiten Werkstücks in  $M_1$  plus Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  (1)

ein möglichst kleiner Wert ergibt. Statt der Summe (1) kann man einfacher

- die Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in  $M_2, M_3$  und  $M_4$  (2)

heranziehen. Nach der Tabelle im Aufgabentext hat diese Summe genau für  $W_2$  als drittes Werkstück den kleinsten Wert (nämlich 4; dagegen für  $W_1$  den Wert 4,5 und für  $W_3$  den Wert 5,5). Dann kann man untersuchen, ob bei einer der Reihenfolgen mit  $W_2$  als drittem Werkstück gilt, dass

-  $W_2$  die Maschinen  $M_1, M_2, M_3, M_4$  ohne Wartezeiten durchlaufen kann. (3)

Ist das der Fall, so folgt: Diese Reihenfolge unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die Gesamtzeiten aller Reihenfolgen, die (1) bzw. (2) nicht so klein wie möglich machen.

(Man beachte: Ohne die Aussage (3) wäre ein solcher Schluss nicht gesichert!) Schließlich ist dann noch eine Reihenfolge, die (3) erfüllt, mit der anderen, in der auch  $W_2$  als drittes Werkstück läuft, zu vergleichen. Die Untersuchung auf (3) sowie der eben genannte Vergleich kann z.B. durch die zwei obenstehenden Darstellungen zu  $W_1, W_3, W_2$  und  $W_3, W_1, W_2$  erfolgen. Die Überlegung zu (1), (2) hat also vier solche Darstellungen eingespart.

*Lösungen der I. Runde 1988 übernommen von [5]*

## 2.30.2 II. Runde 1988, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 280921**

Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

I. Wenn eine Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl  $n$  und zugleich auch die dritte Potenz einer natürlichen Zahl  $m$  ist, so ist sie eine natürliche Zahl, bei deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor in einer durch 2 und zugleich auch durch 3 teilbaren Anzahl vorkommt.

Daher (und weil 2 und 3 zueinander teilerfremd sind) muss jeder Primfaktor in einer durch 6 teilbaren Anzahl vorkommen, die Zahl muss also die sechste Potenz einer natürlichen Zahl sein. Ist außerdem noch die Bedingung  $n \neq m$  zu erfüllen, so scheidet 0 und 1 aus, da diese Zahlen Quadrat und dritte Potenz nur von jeweils derselben Zahl sind.

II. Die Zahlen  $2^6, 3^6, 4^6$  und  $5^6$  erfüllen alle diese Bedingungen, wie aus

$$216 = 8^2 = 4^3, \quad 3^6 = 27^2 = 9^3, \quad 4^6 = 64^2 = 16^3, \quad 5^6 = 125^2 = 25^3$$

ersichtlich ist.

Mit I. und II. (und weil alle  $k^6$  mit  $k > 5$  größer als  $2^6, \dots, 5^6$  sind) ist gezeigt: Die vier gesuchten Zahlen sind  $2^6 = 64, 3^6 = 729, 4^6 = 4096, 5^6 = 15625$ .

**Aufgabe 2 - 280922**

In ein Quadrat mit  $4 \times 4$  Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe  $s$  ergibt ("Magisches Quadrat").

a) Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in  $4 \times 4$  Feldern) derselbe Wert für  $s$  auftreten muss!

b) Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von  $4 \times 4$  Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls  $s$  sein muss!

Für jedes magische Quadrat, dessen Zahlen mit

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$

bezeichnet sind, gilt:

a) Da die Summe aller Zahlen von 1 bis 16 der Wert 136 hat, muss in jeder der vier Zeilen die Summe  $s = 136 : 4 = 34$  auftreten.

b) Nach den Bedingungen für ein magisches Quadrat ist

$$\begin{array}{ll}
 a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s & \text{1. Zeile} \\
 -a_2 - b_2 - c_2 - d_2 = -s & \text{2. Spalte} \\
 a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = s & \text{Hauptdiagonale} \\
 d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = s & \text{4. Zeile} \\
 -a_3 - b_3 - c_3 - d_3 = -s & \text{3. Spalte} \\
 d_1 + c_2 + b_3 + a_4 = s & \text{Nebendiagonale}
 \end{array}$$

Die Addition dieser sechs Gleichungen ergibt  $2(a_1 + a_4 + d_1 + d_4) = 2s$  und damit die Behauptung.

**Aufgabe 3 - 280923**

In einem Dreieck  $ABC$  seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet.

Die Winkelhalbierende von  $\angle BAC$  schneide die Seite  $BC$  in einem Punkt  $D$ . Dabei sei  $AD = b$ .

Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$ !

I. Wenn die Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  eines Dreiecks  $ABC$  die Voraussetzungen erfüllen, so folgt:  
Wegen  $AD = b$  ergibt nach dem Basiswinkelsatz  $\angle ADC = \angle ACD = \gamma$ . Da  $AD$  den Winkel  $\angle BAC$  halbiert, folgt nach dem Innenwinkelsatz für  $\triangle ACD$

$$\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 2\gamma \quad ; \quad \alpha = 360^\circ - 4\gamma \quad (1)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für  $\triangle ABC$  folgt damit

$$\beta = 180^\circ - (360^\circ - 4\gamma) - \gamma = 3\gamma - 180^\circ \quad (2)$$

Für die Voraussetzung, dass eine der drei Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

1. Fall:  $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

Dies führt nach (1), (2) auf

$$360^\circ - 4\gamma = 2\gamma - 90^\circ; \quad \gamma = 75^\circ; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \beta = 45^\circ$$

2. Fall:  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$

Dies führt nach (1), (2) auf

$$3\gamma - 180^\circ = 180^\circ - \frac{3}{2}\gamma; \quad \gamma = 80^\circ; \quad \alpha = 40^\circ; \quad \beta = 60^\circ$$

3. Fall:  $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

Dies führt nach (1), (2) auf

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}; \quad \gamma = 60^\circ; \quad \beta = 0^\circ$$

Der 3. Fall scheidet also aus.

II. Die Winkelgrößen des 1. bzw. des 2. Falles, d.h.

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad \gamma = 75^\circ \quad (3) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 40^\circ; \quad \beta = 60^\circ; \quad \gamma = 80^\circ \quad (4)$$

sind Innenwinkelgrößen von Dreiecken  $ABC$  (denn sie sind positiv und erfüllen  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ). Sie erfüllen auch die Bedingung, dass  $AD = b$  für die Winkelhalbierende  $AD$  gilt; denn sie erfüllen die Gleichung  $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 2\gamma$ , woraus nach dem Innenwinkelsatz  $\angle ADC = \gamma$  und daher nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes  $AD = AC$  folgt.

Mit I., II. ist gezeigt, dass in (3), (4) alle gesuchten Möglichkeiten für  $\alpha, \beta, \gamma$  angegeben sind.

#### Aufgabe 4 - 280924

- a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!  
b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

a) Von je zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine ungerade, die andere gerade. Daher ist ihre Summe stets ungerade.

Also können höchstens die ungeraden, d.h. die von 2 verschiedenen Primzahlen eine Darstellung der genannten Art besitzen.

Für jede Primzahl  $p \geq 3$  gibt es die Darstellung

$$p = \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2}$$

und darin gilt: Da  $p$  ungerade ist, sind  $p-1$  und  $p+1$  gerade, also  $\frac{p-1}{2}$  und  $\frac{p+1}{2}$  ganze Zahlen. Wegen  $p \geq 3$  ist  $p-1 \geq 2$ , also  $\frac{p-1}{2} \geq 1$  eine von Null verschiedene natürliche Zahl.

Wegen  $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$  ist  $\frac{p+1}{2}$  die darauffolgende (und damit ebenfalls von Null verschiedene) natürliche Zahl.

Die gesuchten Primzahlen sind also genau alle Primzahlen  $p \geq 3$ .

b) Angenommen, es gäbe eine Primzahl  $p$  und für sie eine Darstellung  $p = a_1 + \dots + a_n$  (1) mit  $n \geq 3$  aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ .

Nach der bekannten Formel für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen wären dann

$$p = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$$

Daher müsste mindestens eine der Zahlen  $n$ ,  $(a_1 + a_n)$  gerade sein. Ferner wäre  $a_1 \geq 1$ ,  $a_n \geq n$ , also  $a_1 + a_n \geq 1 + n$ .

Wäre  $n$  gerade, so wäre wegen  $n \geq 3$  sogar  $n \geq 4$ , also  $p$  in die ganzzahligen Faktoren  $\frac{1}{2}n \geq 2$  und  $a_1 + a_n > n \geq 4$  zerlegt.

Wäre  $a_1 + a_n$  gerade, so wäre  $p$  in die ganzzahligen Faktoren  $n \geq 3$  und

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

zerlegt. Damit ist die Annahme über (1) widerlegt, d.h. der verlangte Beweis geführt.

*Lösungen der II. Runde 1988 übernommen von [5]*

## 2.30.3 III. Runde 1988, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 280931**

Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen  $a, b, c$  genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

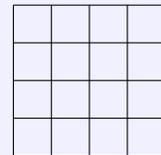
Sind  $a$  und  $b$  nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen  $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$  und  $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$  beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5.

Damit lässt  $a^2 + b^2$  also einen der Reste  $1 + 1 = 2$ ,  $1 + 4 = 4 + 1 = 5$  – also 0 – oder  $4 + 4 = 8$  – also 3 – bei der Division durch 5. Da aber auch  $c^2$  als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe  $a^2 + b^2$  weg und  $a^2 + b^2 = c^2$  muss durch 5 teilbar sein,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 280932**

In jedes der 16 Felder eines  $4 \times 4$ -Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.

Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.



Die Felder des Quadrats seien mit  $a_1$  bis  $d_4$  bezeichnet.

Dann kann nicht in drei Eckfelder des Quadrats die gleiche Zahl eingetragen werden. Andernfalls wären o.B.d.A.  $a_1 = a_4 = d_4 = 0$ . Dann folgt in Zeile  $a$ , dass  $a_2 = a_3 = 1$  und analog in Spalte 4, dass  $b_4 = c_4 = 1$  sein muss. In der Diagonale  $a_1-d_4$  gilt aber auch  $b_2 = c_3 = 1$ , sodass sich in Zeile  $b$  schließlich  $b_1 = b_3 = 0$  und in Zeile  $c$   $c_1 = c_2 = 0$  ergibt, womit man in Spalte 1 den Widerspruch  $a_1 = b_1 = c_1 = 0$  erhält.

Also müssen in je zwei der vier Eckfelder des Quadrats die Zahl 0 und in die zwei anderen die Zahl 1 eingetragen werden. Wir unterscheiden danach, ob sich die beiden Felder mit der 0 gegenüberliegen, oder ob sie benachbart sind:

Fall 1: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen einander diagonal gegenüber, d.h., nach ggf. erfolgter Spiegelung gilt o.B.d.A.  $a_1 = d_4 = 0$  und  $a_4 = d_1 = 1$ . Es folgt auf den Diagonalen automatisch  $b_2 = c_3 = 1$  und  $b_3 = c_2 = 0$ , man erhält also

0			1
	1	0	
	0	1	
1			0

Fall 1.1: Es ist  $a_2 = 0$ . Dann ist zwangsweise  $a_3 = 1$ ,  $d_2 = 1$  und  $d_3 = 0$ . Man erhält

0	0	1	1
	1	0	
	0	1	
1	1	0	0

Fall 1.1.1: Es ist  $b_1 = 0$ . Dann ist zwangsweise  $b_4 = 1$ ,  $c_1 = 1$  und  $c_4 = 0$ , sodass man die folgende (wie man leicht überprüft) Lösung erhält:

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Fall 1.1.2: Es ist  $b_1 = 1$ . Dann ist zwangsweise  $b_4 = 0$ ,  $c_1 = 0$  und  $c_4 = 1$ , sodass man die folgende Lösung erhält:

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

Fall 1.2: Es ist  $a_2 = 1$ . Dann ist zwangsweise  $a_3 = 0$ ,  $d_2 = 0$  und  $d_3 = 1$ . Wäre  $b_1 = 0$ , so könnte man dies durch Spiegelung auf den Fall 1.1.2 zurückführen. Also muss  $b_1 = 1$  sein, was auf  $b_4 = 0$ ,  $c_1 = 0$  und  $c_4 = 1$ , sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

Fall 2: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen auf einer gemeinsamen Kante, d.h., es gilt nach ggf. erfolgter Spiegelung o.B.d.A.  $a_1 = a_4 = 0$  und  $d_1 = d_4 = 1$ . Es folgt sofort  $a_2 = a_3 = 1$  und  $d_2 = d_3 = 0$ , sodass man folgende Situation erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.1: Es ist  $b_2 = 0$ . Dann ist zwangsweise  $b_3 = 1$  und aufgrund der Diagonalen  $a_1-d_4$  auch  $c_3 = 1$ , was sofort  $b_3 = 0$ , also in Zeile  $b$  auch  $b_1 = b_4 = 1$  sowie in Zeile  $c$  analog  $c_1 = c_4 = 0$  nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.2: Es ist  $b_1 = 1$ . Dann ist zwangsweise  $b_3 = 0$  und aufgrund der Diagonalen  $a_1-d_4$  auch  $c_3 = 0$ , was sofort  $b_3 = 1$ , also in Zeile  $b$  auch  $b_1 = b_4 = 0$  sowie in Zeile  $c$  analog  $c_1 = c_4 = 1$  nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Die Fallunterscheidung ist vollständig und die fünf erhaltenen Eintragungen (von denen man jeweils schnell überprüft, dass sie alle geforderten Eigenschaften erfüllen) gehen paarweise nicht durch Spiegelung auseinander hervor, bilden also die gesuchte Lösungsmenge.

### Aufgabe 3 - 280933

Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide  $P = ABCDS$  mit quadratischer Grundfläche  $ABCD$  eine Ebene  $e$  so gibt, dass die Schnittfigur von  $P$  mit  $e$  ein gleichseitiges Dreieck ist!

Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide  $P$  eine solche Ebene  $e$ , so ist für eine Pyramide  $P$  diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene  $e$ , so ist anzugeben, wie eine Ebene  $e$  gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene  $e$  die geforderte Bedingung erfüllt.

Es gibt zu jeder solcher Pyramide eine solche Ebene:

Da  $P$  eine gerade Pyramide ist, sind alle dreieckigen Seitenflächen von  $P$  zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke. Es sei  $a$  die Kantenlänge des Quadrats  $ABCD$  (und damit Basislänge in den gleichschenkligen Dreiecken  $\triangle ABS$  und  $\triangle DAS$ ) sowie  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$  die Größe des Basiswinkels in den Seitenflächen.

Damit ist die Länge  $h$  der Höhe von  $S$  in den "Seitendreiecken" nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck gleich  $h = \frac{a}{2} \cdot \tan \alpha > 0$ , da die Höhe mit der Seitenhalbierenden zusammenfällt, und die Länge  $s$  der von der Spitze  $S$  der Pyramide ausgehenden Kanten mit dem Satz des Pythagoras

gleich  $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > 0$ .

Es sei  $0 \leq \beta \leq 90^\circ$  der Winkel, der  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}$  erfüllt. Wegen  $0 < \alpha < 45^\circ$  ist  $0 < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , also  $0 < \sin \beta < \frac{1}{2}$  und damit sogar  $0 < \beta < 30^\circ$ . Insbesondere ist auch

$$180^\circ > \gamma := 180^\circ - \alpha - \beta > 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$$

sodass sich ein stumpfwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bilden lässt. Außerdem gilt wegen  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ , dass  $\cos \gamma$  negativ ist. Schließlich sei  $f$  eine reelle Zahl, die definiert ist als  $f := \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos \gamma}$ , was wegen  $\cos \gamma < 0$  eine wohldefinierte, positive reelle Zahl ist.

Es sei nun  $0 < x < a$  eine Länge mit  $f \cdot x < s$ . Wir betrachten die Punkte  $S_1$  auf der Strecke  $AB$  und  $S_2$  auf der Strecke  $DA$  mit  $|AS_1| = |AS_2| = x$ . (Wegen  $0 < x < a$  liegen diese Punkte im Innern der jeweils entsprechenden Strecke.) Dann gilt (wegen des rechten Winkels bei  $A$ ) offenbar  $|S_1S_2| = \sqrt{2}x$ .

Schließlich sei  $S_3$  der Schnittpunkt des Kreises in der Ebene der Seitenfläche  $SAB$  um  $S_1$  mit Radius  $\sqrt{2}x$  und dem von  $A$  ausgehenden und durch  $S$  verlaufenden Strahl. (Ein solcher Schnittpunkt muss wegen  $|AS_1| = x < 2\sqrt{x}$  existieren und ist dann auch aufgrund der nur einen betrachteten Richtung der von  $A$  ausgehenden Strahlen auch eindeutig bestimmt.)

Liegt  $S_3$  im Innern der Strecke  $AS$ , so erhält man mit einem ebenen Schnitt entlang der durch  $S_1, S_2, S_3$  definierten Ebene  $e$  genau das nach Konstruktion gleichseitige Dreieck  $\triangle S_1S_2S_3$  mit Kantenlänge  $\sqrt{2}x$ , da nicht nur  $|S_1S_2| = \sqrt{2}x = |S_3S_1|$ , sondern aus Symmetriegründen auch  $|S_3S_2| = |S_3S_1| = \sqrt{2}x$  gilt.

Wir zeigen nun, dass  $S_3$  im Innern der Strecke  $AS$  liegt, indem wir das Dreieck  $\triangle AS_1S_3$  betrachten und die Streckenlänge  $|AS_3|$  berechnen. Dazu berechnen wir erst dessen Innenwinkel:

Es ist  $\angle S_1AS_3 = \angle BAS = \alpha$  und nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin \angle AS_3S_1}{|AS_1|} = \frac{\sin \angle S_1AS_3}{|S_1S_3|}.$$

Setzt man hierin die schon bekannten Größen  $|AS_1| = x$ ,  $|S_1S_3| = \sqrt{2}x$  und  $\angle S_1AS_3 = \alpha$  ein, erhält man

$$\sin \angle S_1AS_3 = \frac{x}{\sqrt{2}x} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} = \sin \beta,$$

also wegen  $\beta < \alpha < 90^\circ$  (der kleineren Seite  $|AS_1| = x < \sqrt{2}x = |S_1S_3|$  liegt auch der kleinere Winkel gegenüber) auch  $\angle S_1AS_3 = \beta$ . Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle AS_1S_3$  ist damit schließlich auch  $\angle S_3S_1A = \gamma$ , sodass wir seine drei Innenwinkel schon kennen.

Nach dem Kosinussatz in diesem Dreieck gilt dann

$$\begin{aligned} |AS_3| &= \sqrt{|AS_1|^2 + |S_1S_3|^2 - 2 \cdot |AS_1| \cdot |S_1S_3| \cdot \cos \gamma} = \sqrt{x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}x \cdot \cos \gamma} = \\ &= x \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos \gamma} = f \cdot x < s = |AS|, \end{aligned}$$

sodass  $S_3$  tatsächlich im Innern der Strecke  $AS$  liegt und man durch  $S_1, S_2$  und  $S_3$  die Ebene  $e$  definieren kann, die beim Schnitt mit  $P$  die Schnittfläche des gleichseitigen Dreiecks  $\triangle S_1S_2S_3$  erzeugt,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 280934

Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen  $x$  und  $y$  stets die Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in  $x$  und  $y$ , sodass wir o.B.d.A.  $y \geq x$  annehmen können. Durch Multiplikation mit  $y^6 > 0$  geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

bzw. nach der Substitution  $t := \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$  in  $t^{-1} + t^{13} \geq t^{12} + 1$ . Da beide Seiten der Ungleichung offensichtlich positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, sodass die Ungleichung äquivalent ist zu  $t^{-2} + 2 \cdot t^{-1} \cdot t^{13} + t^{26} \geq t^{24} + 2t^{12} + 1$  bzw.  $t^{26} - t^{24} \geq 1 - t^{-2}$ , also nach Multiplikation mit  $t^2$  zu  $t^{28} - t^{26} = t^{26} \cdot (t^2 - 1) \geq t^2 - 1$ , was wegen  $t \geq 1$  und damit sowohl  $t^2 - 1 \geq 0$  auch  $t^{26} \geq 1$  wahr ist, sodass auch die Ausgangsgleichung wahr ist,  $\square$ .

**Aufgabe 5 - 280935**

Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck  $ABCD$  gibt, in dem die Winkelhalbierende von  $\angle ACB$  durch den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  geht!

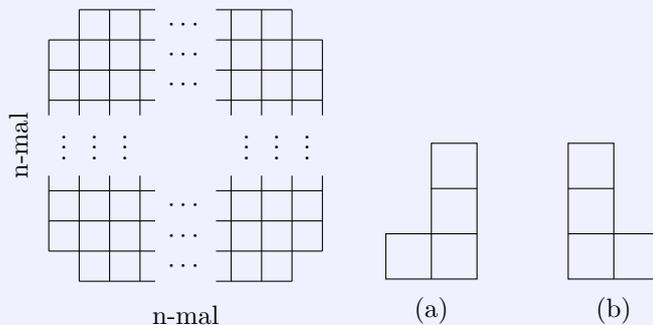
Es kann kein solches Rechteck geben:

Die Winkelhalbierende von  $\angle ACB$  im Dreieck  $\triangle ABC$  teilt die gegenüberliegende Seite  $AB$  im Verhältnis der anliegenden Seiten  $AC$  und  $BC$ . Verläuft sie durch den Mittelpunkt von  $AB$ , so gilt also  $|AC| = |BC|$ , was aber im Rechteck  $ABCD$  nicht sein kann, da das Dreieck  $\triangle ABC$  rechtwinklig in  $B$ , die Hypotenuse  $AC$  also länger als die Kathete  $BC$  ist. Also kann es kein solches Rechteck geben,  $\square$ .

**Aufgabe 6 - 280936**

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen  $n \geq 3$ , für die es möglich ist, ein  $n \times n$ -Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.



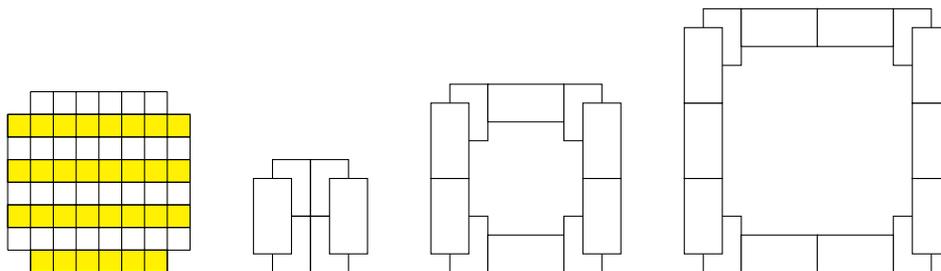
Da (a) und (b) beide Fläche 4 haben, muss damit so eine Lösung existiert notwendigerweise  $n^2 - 4$  durch 4 teilbar sein, d.h. es muss  $n$  gerade sein. Für gerades  $n$  können wir die Zeilen des Brettes abwechselnd mit weiß und grün einfärben (siehe Skizze unten). Diese Färbung hat die Eigenschaft, dass egal wie man die Teile (a) bzw. (b) auf dem Brett positioniert, genau 1 Feld des Teils grün und die anderen 3 weiß (Typ A) bzw. genau 1 Feld weiß und die anderen 3 grün (Typ B) sind.

Da die Anzahl der weißen Felder gleich der Anzahl der grünen Felder ist, folgt, dass in einer zulässigen Zerlegung die Anzahl der Teile vom Typ A gleich der Anzahl der Teile vom Typ B sein muss. Also muss  $n^2 - 4$  sogar durch 8 teilbar sein, also muss  $n$  von der Form  $n = 4k + 2$  mit  $k \in \mathbb{N}$  sein.

Diese Bedingung ist auch hinreichend: Für  $n = 2$  ist eine Zerlegung offensichtlich möglich (von einem  $2 \times 2$ -Brett wurden alle vier Felder entfernt.).

Außerdem ist klar, dass man  $2 \times 4$ -Rechtecke in genau zwei Teile zerlegen kann.

Hat man eine Zerlegung eines Brettes der Größe  $n = 4k + 2$  gefunden, dann kann man diese zu einer Zerlegung eines Brettes der Größe  $4k+6$  erweitern, indem man wie in der Skizze vier Teile in den Ecken des bereits zerlegten Brettes positioniert und die beiden horizontalen Seiten dann noch mit  $k$   $2 \times 4$ -Rechtecken auffüllt und die beiden vertikalen Seiten mit  $k + 1$   $2 \times 4$ -Rechtecken ergänzt:



Aufgabe gelöst von Nuramon

**2.31 XXIX. Olympiade 1989****2.31.1 I. Runde 1989, Klasse 9****Aufgabe 1 - 290911**

Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziert die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibt hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von  $25^2$  führt die Regel wegen  $2 \cdot 3 = 6$  auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Sind  $a$ , 5 die Ziffern der zu quadrierenden Zahl, so lautet diese  $10a + 5$ . Ihr Quadrat ist

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$$

also die nach der angegebenen Regel zu bildende Zahl.

**Aufgabe 2 - 290912**

Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Antwort: Ja, nämlich zum Beispiel 10243.

Es fehlt noch eine Begründung für diese Antwort. Außerdem seien einige hinführende Bemerkungen gegeben, die nicht notwendig zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe gehören:

Wenn eine Primzahl die genannten Eigenschaften hat, so kann jedenfalls keine der Ziffern 0, 2, 4 ihre Einerziffer sein. Der Aufwand beim Überprüfen, ob eine Primzahl vorliegt, ist um so kleiner, je kleiner die zu überprüfende Zahl ist. Daher beginnt man zweckmäßig mit der kleinsten fünfstelligen Zahl, die sich mit den genannten Ziffern schreiben lässt und 1 oder 3 als Einerziffer hat, d.h. mit der Zahl 10243.

Diese Zahl ist als Primzahl nachgewiesen, wenn sie durch keine Primzahl, die kleiner als 10243 ist, teilbar ist. Dabei genügt es wegen  $\sqrt{10243} < 102$ , nur die Primzahlen  $\leq 101$  als Teiler zu überprüfen. Denn falls 10243 einen Teiler  $\geq 102$  hat, so muss er bei der Zerlegung von 10243 zusammen mit einem Faktor auftreten, der kleiner als 102 ist, dessen Primfaktoren also bereits überprüft sind.

Mit einer Primzahlentabelle und dem SR 1 (oder anderen Rechenhilfsmitteln) stellt man schnell fest, dass keine der Primzahlen 2, 3, ..., 101 Teiler von 10243 ist. Damit ist die Antwort begründet.

Bemerkung: Sämtliche Primzahlen mit den genannten Eigenschaften sind: 10243, 12043, 20143, 20341, 20431, 23041, 24103, 30241, 32401, 40123, 40213, 40231, 41023, 41203, 42013, 43201.

**Aufgabe 3 - 290913**

Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.

a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, nummeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit  $k$  Kindern und einem Abzählvers aus  $s$  Silben lösen lässt.

a) I. Man kann zunächst zur Vereinfachung die Silbenzahl durch jeweils möglichst kleine positive Werte ersetzen. Wegen  $15 = 1 \cdot 11 + 4$  wird nämlich beim Anzählen die Runde der Kinder erst 1 mal ganz durchlaufen, und danach verbleiben nur noch 4 Silben. Auf diese Weise folgt: Wenn im Kreis jeweils nur noch

11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2

Kinder stehen, so kann wegen

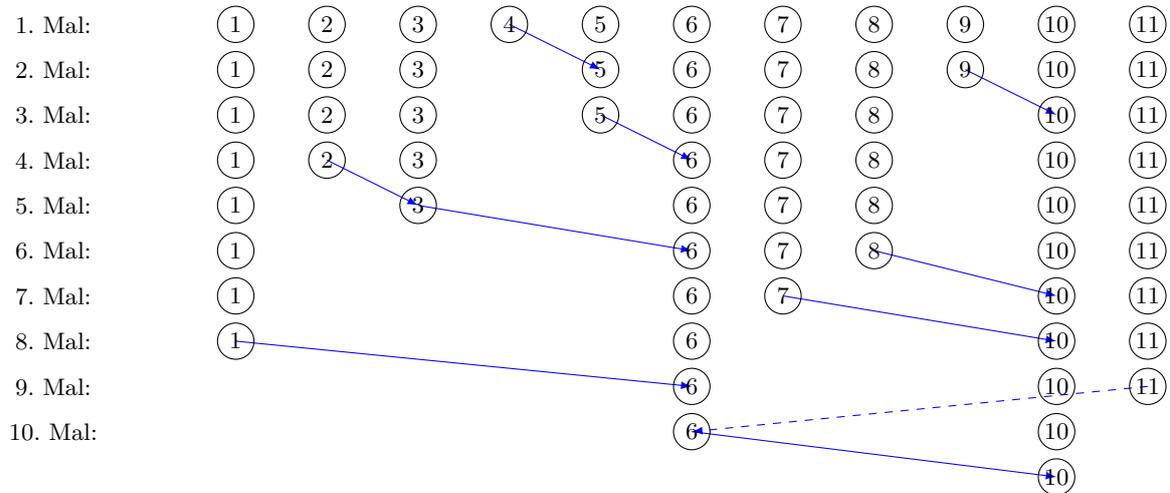
$15 = 1 \cdot 11 + 4 = 1 \cdot 10 + 5 = 1 \cdot 9 + 6 = 1 \cdot 8 + 7 = 2 \cdot 7 + 1 = 2 \cdot 6 + 3 = 2 \cdot 5 + 5 = 3 \cdot 4 + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 7 \cdot 2 + 1$

die Silbenzahl ersetzt werden durch

4, 5, 6, 7, 1, 3, 5, 3, 3, 1

II. Nun kann man (mit der Vereinfachung I. oder ohne sie) das Anzählen mit einem bei Kind 1 beginnenden "Probespiel" verfolgen:

Abzählvers



III. Es bleibt also dasjenige Kind übrig, das ausgehend von Kind 1 durch Weiterzählen um 9 (in der ursprünglichen Aufstellung) zu erreichen wäre. Der Spielbeginn, der zum gewünschten Übrigbleiben von Kind 1 führt, wird daher gefunden, indem man in der ursprünglichen Aufstellung von Kind 1 an um 9 zurückzählt. Damit findet man:

Wenn Kind 1 gewinnen soll, so muss das Auszählen bei Kind 3 beginnen.

b) Die Aufgabe wird z.B. durch folgendes BASIC-Programm gelöst:

```

100 INPUT "Kinderzahl"; K
110 INPUT "Silbenzahl"; S
120 DIM M(K)
130 FOR N=K TO 2 STEP -1
140   T = S - N * INT(S/N)
150   IF T = 0 THEN T = N
160   FOR I = 1 TO T
170     GOSUB 300
180   NEXT I
190   M(A) = 1
200 NEXT N
210 GOSUB 300
220 B = 2 - A
230 IF B < 1 THEN B = B+K
240 PRINT "Beginne bei Kind"; B; "!"
250 END
300 REM ABZAEHLEN
310 A = A+1
320 IF A > K THEN A = 1
330 IF M(A)= 1 THEN 310
340 RETURN

```

Bedeutung der Variablen: K Anzahl der Kinder, S Anzahl der Silben, A Nummer des beim Abzählen erreichten Kindes, M(A) Marke 0 oder 1: Kind A ist noch im Spiel oder ausgeschieden, N Anzahl der noch im Spiel befindlichen Kinder, T Ersatzwert für die Silbenzahl, I Zähler Schritt

Programmteile:

100 bis 120 Eingeben, Speicher reservieren,

300 bis 340 Unterprogramm "Weiterzählen zum nächsten noch im Spiel befindlichen Kind"

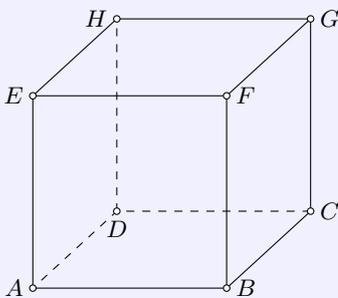
130 bis 210 "Probespiel":

140 bis 150 Division von S durch N mit Rest T ergibt die vereinfachte Silbenzahl T; nur ist 0 durch N zu ersetzen

160 bis 210 Nach T Zähler Schritten scheidet das erreichte Kind aus. Am Ende des "Probespieles" noch ein Zähler Schritt bis zum einzigen noch im Spiel befindlichen Kind.

220 bis 240 Ermittlung und Ausgabe der Antwort: Statt um A-1 vorwärts, ebenso viel zurückzählen bis  $1-(A-1)=2-A$ ; dies ggf. um K korrigieren.

#### Aufgabe 4 - 290914



Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen  $BHA$ ,  $BHC$ ,  $BHD$ ,  $BHE$ ,  $BHF$  und  $BHG$  (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

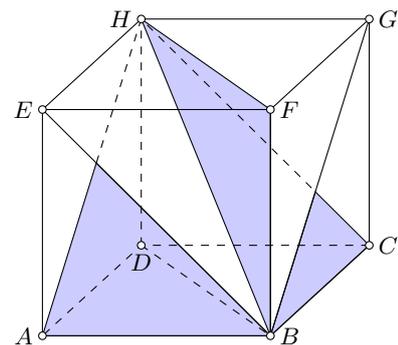
Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.

(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

Jedes dieser Dreiecke hat als Seitenlängen die Längen einer Seitenkante, einer Flächendiagonale und einer Raumdiagonale des Würfels. Da beim Würfel alle Seitenkanten bzw. Flächen- bzw. Raumdiagonalen jeweils untereinander gleichlang sind, sind somit die genannten Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sss sämtlich untereinander kongruent.

Lösungen der I. Runde 1989 übernommen von [5]



## 2.31.2 II. Runde 1989, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 290921**

Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Nein, kann man nicht:

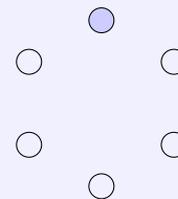
Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, sodass für jede der  $\frac{1989 \cdot 1988}{2} < 1000 \cdot 1989 < 2 \cdot 10^6$  Möglichkeiten, aus den 1989 Geraden zwei auszuwählen, höchstens ein Schnittpunkt in der Figur enthalten ist. Es gibt also in jedem Fall weniger als 2 Millionen Schnittpunkte.

**Aufgabe 2 - 290922**

Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl  $a \geq 1$  fest vorgegeben.

Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis  $a$ .

Der Stein, der dabei die Nummer  $a$  erhält, wird weggenommen.



Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer  $a$  erhält, weggenommen.

Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei  $a = 4$ . Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

b) Jemand vermutet: "Wenn man  $a$  durch  $a + 6$  ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für  $a = 4$  nachprüfen!

c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl  $z$  gibt, mit der für jedes  $a \geq 1$  die folgende Aussage wahr ist: "Wenn man  $a$  durch  $a + z$  ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

a) Weggenommen werden die Steine auf den Feldern, die bei der ursprünglichen Nummerierung vor der ersten Wegnahme die Nummern 4, 2 und 1 hatten. Dabei wurde allein im dritten Durchgang das schon leere Feld mit ursprünglicher Nummerierung 4 übersprungen. Also sind auf jenen die schwarzen und auf die anderen die weißen Steine zu legen, damit am Ende die weißen übrig bleiben.

b) Für  $a = 10$  wird zuerst auch der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer  $10 - 6 = 4$  entfernt, im zweiten Durchlauf aber der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3, da nun der zweite Umlauf durch die noch übrigen 5 Felder nach 10 Schritten mit dem letzten besetzten Feld vor Beginn dieses zweiten Durchlaufs (also dem mit ursprünglicher Nummer 3) abgeschlossen wird. Da für  $a = 4$  aber nicht der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3 entfernt wurde, unterscheiden sich also diese beiden Ergebnisse.

c) Die Aufgabenstellung schließt  $z = 0$  nicht aus, was eine Trivillösung wäre. Wir zeigen aber auch, dass es unendlich viele weitere positive natürliche Zahlen  $z$  gibt, die die Aussage der Aufgabenstellung erfüllen.

Damit die ersten Züge für  $a$  und  $a + z$  den gleichen Stein entfernen, müssen  $a$  und  $a + z$  den gleichen Rest bei der Teilung durch 6 lassen, also  $z$  durch 6 teilbar sein, da dann zwar ggf. verschieden viele Umläufe um die anfänglich 6 belegten Felder durchgeführt werden, aber an der gleichen Stelle die Zählung stoppt, sodass der gleiche erste Stein entfernt wird.

Damit darauf aufbauend die zweiten Züge für  $a$  und  $a + z$  den gleichen zweiten Stein entfernen, müssen  $a$  und  $a + z$  auch den gleichen Rest bei der Teilung durch 5 lassen, also  $z$  auch durch 5 teilbar sein, da dann analog wieder ggf. unterschiedlich viele Umläufe durch die 5 noch verbliebenen besetzten Felder durchgeführt werden, aber wieder an der gleichen Stelle gestoppt und damit auch der gleiche zweite Stein entfernt wird. Für den dritten Zug folgt analog, dass  $z$  durch 4 teilbar sein muss.

Tatsächlich erfüllen alle  $z$ , die durch  $60 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 4 \cdot 15$  teilbar sind, die Aussage der Aufgabenstellung, dass für  $a$  und  $a + z$  die gleichen Steine (sogar in der gleichen Reihenfolge) entfernt werden.

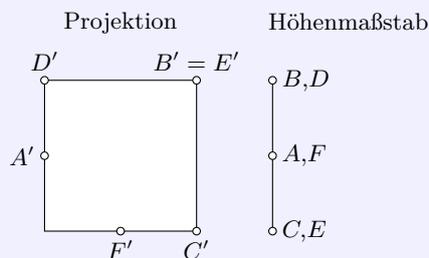
**Aufgabe 3 - 290923**

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl  $n$ , für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von  $n$  als auch Teiler der Quersumme von  $n + 1$  ist.

Endet die Zahl  $n$  auf genau  $k$  Neunen und besitzt davor die Ziffer  $z < 9$  (ggf. mit führender Null), so endet die Zahl  $n + 1$  auf genau  $k$  Nullen und besitzt davor die Ziffer  $z + 1 \leq 9$ . (Die Ziffern vor  $z$  bzw.  $z + 1$  sind in beiden Zahlen identisch.) Seien  $q_n$  und  $q_{n+1}$  die Quersummen von  $n$  bzw.  $n + 1$ . Dann gilt also  $q_{n+1} = q_n - k \cdot 9 + 1$ .

Damit beide Quersummen durch 5 teilbar sind, muss also  $k \cdot 9 - 1$  durch 5 teilbar sein. Dies tritt zum ersten mal für  $k = 4$  auf, sodass jede Zahl  $n$ , die der Aufgabenstellung genügt, auf mindestens vier Neunen enden muss.

Tatsächlich erfüllen die ersten dieser Zahlen, nämlich 9999, 19999, 29999 und 39999 nicht die Bedingung, dass ihre Quersumme durch 5 teilbar ist. Die nächste solche Zahl  $n = 49999$  erfüllt aber die Aufgabenstellung, da sowohl ihre Quersumme 40 als auch die Quersumme 5 von  $n + 1 = 50000$  durch 5 teilbar sind.

**Aufgabe 4 - 290924**

Die Abbildung stellt sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F$  in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.

Die Punkte  $C', B', D'$  und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge  $a = 6$  cm.

Die Punkte  $A'$  und  $F'$  sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben  $A, F$  von  $B, D$  den Abstand 3 cm und  $C, E$  von  $B, D$  den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen  $\alpha = 45^\circ$ ,  $q = \frac{1}{2}$  sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte  $B, C, D, E$  gehören, und dazu die Punkte  $A$  und  $F$ !

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen  $ABC$  und  $DEF$  durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke  $XY$ , die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!

Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Eine Verdeckung durch davor liegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).

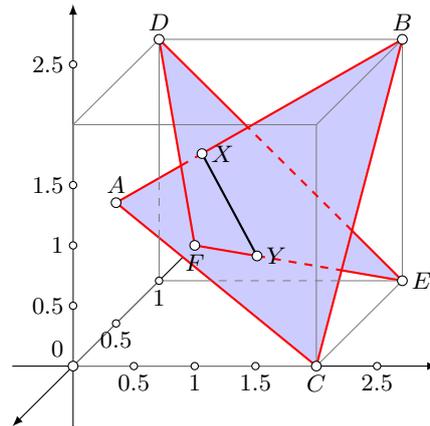
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck  $ABC$  parallel zu  $CB$ , im Dreieck  $DEF$  in dichter Schraffur parallel zu  $DE$ !

c) Geben Sie für die Schnittstrecke  $XY$  eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von  $X$  und  $Y$ !

Beschreiben Sie diese Konstruktion!

a), b): Eine Darstellung der beschriebenen Situation (mit Ausnahme der geforderten Schraffuren) findet sich in folgendem Bild, wobei hierfür eine Längeneinheit als 3 cm gewählt wurde.

Dabei ist genau der Teil des Dreiecks  $\triangle ABC$  nicht sichtbar, welcher durch das Viereck  $FYXS$  verdeckt wird, wobei  $S$  der Schnittpunkt in der Schrägbilddarstellung von  $DF$  und  $AX$  ist. Vom Dreieck  $\triangle DEF$  ist genau jenes Viereck, "der von  $D$  ausgehende Bereich bis zur Geraden  $AB$ " und "der von  $E$  ausgehende Bereich bis zur Geraden  $BC$ " sichtbar.



c) Jeder der beiden Endpunkte der Strecke  $XY$  muss auf dem Rand mindestens einer der beiden Dreiecksflächen liegen, findet sich also dort, wo eine Kante einer Fläche die andere durchstößt. Offenbar schneidet die Strecke  $AB$  das Dreieck  $\triangle DEF$  und die Strecke  $EF$  das Dreieck  $\triangle ABC$ , während die übrigen Seitenkanten dieser beiden Dreiecke das jeweils andere Dreieck nicht schneiden. Es sind also genau diese beiden Schnittpunkte zu bestimmen.

Jeder Punkt auf der Geraden  $AB$  besitzt für ein bestimmtes  $t \in \mathbb{R}$  die Koordinaten  $(0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (2 - 1), 1 + t \cdot (2 - 1)) = (2t, 1 + t, 1 + t)$ . (Dies erhält man aus der Zweipunktform zur Aufstellung der Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte.) Weiterhin gilt für jeden Punkt  $(x, y, z)$  auf der Ebene durch die Punkte  $D, E$  und  $F$ , dass  $x + z = 2$  ist. Für den Schnittpunkt  $X$  der Geraden mit der Ebene muss also  $2t + 1 + t = 2$  bzw.  $t = \frac{1}{3}$  gelten, sodass  $X$  die Koordinaten  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$  besitzt.

Analog gilt für jeden Punkt auf der Geraden  $FE$ , dass er für ein reelles  $t$  die Koordinaten  $(1 + t \cdot (2 - 1), 0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (0 - 1)) = (1 + t, 2t, 1 - t)$  besitzt, sowie für jeden Punkt  $(x, y, z)$  auf der Ebene durch  $A, B$  und  $C$ , dass  $y = z$  gilt. Also muss der Schnittpunkt  $Y$  dieser beiden Objekte die Bedingung  $2t = 1 - t$  bzw.  $t = \frac{1}{3}$  erfüllen, sodass  $Y$  die Koordinaten  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  besitzt.

Kennt man die Koordinaten beider Punkte  $X$  und  $Y$ , kann man sie leicht in das Schrägbild eintragen. (Streckenlängen von einem Drittel bzw. Vielfache davon kann man mit dem Strahlensatz konstruieren.)

*Aufgaben der II. Runde 1989 gelöst von cyrix*

## 2.31.3 III. Runde 1989, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 290931**

Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken  $AB$  und  $AC$ , die einen Winkel  $\angle BAC$  der Größe  $7^\circ$  bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Zur Konstruktion: 1) Man zeichne einen Kreis  $k$  um  $A$ , der beide Strecken  $AB$  und  $AC$  schneidet. Die Schnittpunkte mit  $AB$  und  $AC$  seien mit  $P_0$  und  $P_7$  bezeichnet, die Streckenlänge  $|P_0P_7|$  mit  $r_7$ .

2) Der Kreis um  $P_7$  mit Radius  $r_7$  schneide den Kreis  $k$  außer in  $P_0$  noch in einem zweiten Punkt  $P_{14}$ ; der Kreis um  $P_{14}$  mit Radius  $r_7$  außer in  $P_7$  noch in einem zweiten Punkt  $P_{21}$ , usw. Man erhält auf diese Weise sukzessive die Punkte  $P_{7n}$  auf  $k$  mit  $n = 0, 1, \dots, 13$ , insbesondere also den Punkt  $P_{91}$ .

3) Man errichte das Lot  $l$  auf  $AB$  durch  $A$  und als Schnittpunkt des Lots  $l$  mit dem von  $P_0$  ausgehenden Halbkreisbogen von  $k$ , auf dem auch  $P_7$  liegt, den Punkt  $P_{90}$ . Der Abstand  $|P_{90}P_{91}|$  sei mit  $r_1$  bezeichnet.

4) Der Kreis um  $P_0$  mit Radius  $r_1$  schneide den von  $P_0$  ausgehenden Halbkreisbogen von  $k$  in  $P_1$ ; der Kreis um  $P_1$  den Kreis  $k$  neben  $P_0$  in einem zweiten Punkt  $P_2$ ; der Kreis um  $P_2$  den Kreis  $k$  neben  $P_1$  in einem zweiten Punkt  $P_3$ ; usw., bis man den Punkt  $P_6$  erhält.

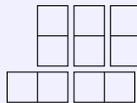
5) Die Strahlen  $AP_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  zerlegen den Winkel  $\angle P_0AP_1 = \angle BAC$  in sieben gleich große Teile.

Begründung:

Die Indizes der Punkte sind so gewählt, dass für jedes  $i$  der Winkel  $\angle P_0AP_i$  genau  $i^\circ$  groß ist. Dies ist für  $P_0$  und  $P_7$  aufgrund der gezeichneten Strecken und dem von diesen aufgespannten Winkel der Fall. Da die Bögen auf  $k$  zwischen  $P_{7n}$  und  $P_{7(n+1)}$  alle genauso groß sind wie der zwischen  $P_0$  und  $P_7$ , gilt auch  $\angle P_{7n}AP_{7(n+1)} = 7^\circ$  und damit sukzessive auch  $\angle P_0AP_{7n} = 7n^\circ$ .

Für  $P_{90}$  gilt  $\angle P_0AP_{90} = 90^\circ$ , da dieser Punkt auf dem Lot zu  $AP_0$  durch  $A$  liegt. Insbesondere ist nun  $\angle P_{90}AP_{91} = \angle P_0AP_{91} - \angle P_0AP_{90} = 1^\circ$ .

Nach Konstruktion ist der Bogen zwischen  $P_i$  und  $P_{i+1}$  für  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  immer genauso groß wie der zwischen  $P_{90}$  und  $P_{91}$ , sodass für diese  $i$  jeweils  $\angle P_iAP_{i+1} = 1^\circ$  gilt und damit sukzessive  $\angle P_0AP_i = i^\circ$  für alle  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , was das Gewünschte zeigt, da man dadurch eine entsprechende Unterteilung in 7 Teilwinkel der Größe von je einem Grad erhält.

**Aufgabe 2 - 290932**

Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:

Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein  $\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}$  mit  $0 \leq x \leq y \leq 6$  genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

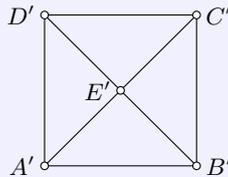
Da mindestens ein Übertrag notwendig ist, um aus der Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl zu erhalten, muss pro Figur mindestens einer der Dominosteine 6-6, 6-5, 6-4 oder 5-5 beteiligt sein.

Da aber  $6 + 4 = 5 + 5 = 10$  ist, können nicht alle vier jeweils einzeln in einer eigenen Figur liegen, da sonst die ersten beiden Stellen der Figuren mit diesen beiden Dominosteinen 1-0 lauten würden, dieser Dominostein aber nur einmal verwendet werden darf.

Also können höchstens drei solche Figuren gebildet werden. Dass dies möglich ist, wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 0 \quad 6 \\ + \quad 6 \quad 5 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \quad 0 \quad 0 \\ + \quad 5 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \quad 2 \quad 1 \\ + \quad 5 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \end{array}$$

### Aufgabe 3 - 290933



Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

- (1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte  $A, B, C, D, E$ .
- (2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte  $A', B', C', D', E'$  die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrats mit gegebener Seitenlänge  $a$ .  
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
- (3) Die durch  $A, B, C$  gehende Ebene  $\epsilon$  ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
- (4) Der Punkt  $D$  liegt "oberhalb" der Ebene  $\epsilon$  im Abstand  $\frac{a}{2}$  von ihr.
- (5) Der Punkt  $E$  liegt "oberhalb" der Ebene  $\epsilon$  im Abstand  $a$  von ihr.
- (6) Der Körper hat das Volumen  $\frac{1}{4}a^3$ .

Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Da laut Bedingung (3) die Ebene  $\epsilon$  parallel zur Bildebene ist und sonst in den weiteren Bedingungen nur von  $\epsilon$  die Rede ist, können wir o.B.d.A. die Bildebene mit  $\epsilon$  – und diese mit der  $xy$ -Ebene – identifizieren. Legen wir dort noch  $A$  in den Koordinatenursprung sowie  $B$  und  $C$  geeignet, dass sie die weiteren Eckpunkte des Quadrats darstellen, erhalten wir also aus den Bedingungen (2) bis (5) die Koordinaten aller fünf Punkte  $A$  bis  $E$ , die im Folgenden angegeben werden:

$$A(0,0,0), \quad B(a,0,0), \quad C(a,a,0), \quad D\left(0,a,\frac{a}{2}\right), \quad E\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a\right)$$

Aus der Zeichnung ergibt sich, dass alle vier Punkte  $A$  bis  $D$  jeweils mit  $E$  durch eine Kante verbunden sind. Damit lässt sich der aus allen fünf Punkten bestehende Körper auffassen als die Vereinigung der beiden Tetraeder  $ABCE$  und  $ACED$ . Diese beiden Tetraeder besitzen die gemeinsame Fläche  $\triangle ACE$ , jedoch keine gemeinsamen inneren Punkte, sodass sich das Volumen des Gesamtkörpers aus der Summe der Volumina der beiden Tetraeder berechnet.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders  $ABCE$  betrachten wir zuerst dessen Grundfläche  $\triangle ABC$ . Dieses ist gleichschenkelig rechtwinklig mit Kathetenlänge  $a$ , sodass es einen Flächeninhalt von  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2$  besitzt.

Die Spitze  $E$  dieses Tetraeders hat nach (5) eine Höhe von  $a$  über der Ebene, in der die Grundfläche liegt, sodass sich für den Tetraeder ein Volumen von  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a^2\right) \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$  ergibt.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders  $ACED$  betrachten wir zuerst dessen Grundfläche  $\triangle ACE$ . Dieses hat eine Grundseite  $AC$  der Länge  $\sqrt{2} \cdot a$  und eine Höhe des dritten Punkts  $E$  auf diese Seite der Länge  $a$ , also einen Flächeninhalt von  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2$ . Die Ebene durch die Punkte  $A, C$  und  $E$  verläuft parallel zur Projektionsrichtung, sodass das Lot von  $D$  auf diese Ebene parallel zur Bildebene – und damit der  $xy$ -Ebene – verläuft, also die gleiche Länge besitzt wie die dazu parallele Strecke  $D'E'$ , da das Viereck  $D'E'LD$ , wobei  $L$  der Lotfußpunkt von  $D$  ist, ein Rechteck darstellt. Also besitzt die

Spitze  $D$  des Tetraeders  $ACED$  eine Höhe von  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$  über der Grundfläche  $\triangle ACE$ , sodass sich für diesen Tetraeder ein Volumen von  $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{1}{6} \cot a^3$  ergibt.

Damit hat der Gesamtkörper  $ABCDE$  das Volumen  $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3$ , im Widerspruch zu Bedingung (6). Es gibt also keinen solchen Körper.

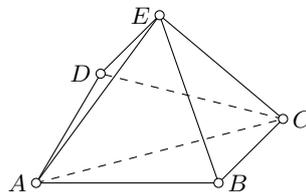
Bemerkung:

Wäre in den Bedingungen (4) und (5) nicht eine Beschreibung der Lage von  $D$  und  $E$  relativ zur Ebene  $\epsilon$  durch  $A$ ,  $B$  und  $C$  gegeben, sondern relativ zur Bildebene, so wären die Höhen von  $D$  und  $E$  über  $\epsilon$  – und damit der  $xy$ -Ebene – noch nicht eindeutig bestimmt.

Da die Bildebene "unterhalb" (oder auf) der Ebene  $\epsilon$  liegen muss, damit die Kanten des Dreiecks  $\triangle ABC$  sichtbar sind und  $E$  "oberhalb" (oder auf) der Ebene  $\epsilon$  liegen muss, damit die Kanten  $AE$ ,  $BE$  und  $CE$  sichtbar sind, gilt dann, dass  $E$  die Höhe  $h$  "über"  $\epsilon$  besitzt, wobei  $0 \leq a - h \leq a$  der Abstand der Ebene  $\epsilon$  zur Bildebene sei.

Der Tetraeder  $ABCE$  hätte dann nur noch das Volumen  $V_1 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$  und der Tetraeder  $ACED$  analog das Volumen  $V_2 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$ , sodass sich für den Gesamtkörper ein Volumen von  $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$  ergäbe, was mit Bedingung (6) auf  $h = \frac{3}{4} \cdot a$  und damit die eindeutig bestimmten Koordinaten  $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4} \cdot a\right)$  und  $D\left(0, a, \frac{a}{4}\right)$  führt.

Eine Darstellung dieses Körpers kann man nun leicht aus den Koordinaten seiner Eckpunkte erhalten.



#### Aufgabe 4 - 290934

Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen  $a, b$  mit  $a < b$  eine rationale Zahl  $x$  und eine irrationale Zahl  $y$  gibt, für die  $a < x < y < b$  gilt!

Wähle  $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b - a)$  und  $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a)$ . Dann ist wegen  $b - a > 0$  und  $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$  auch

$$a < a + \frac{1}{2} \cdot (b - a) = x < a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) = y < a + 1 \cdot (b - a) = b$$

und mit  $a, b \in \mathbb{Q}$  auch  $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b - a) \in \mathbb{Q}$  sowie wegen  $\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$  und  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  auch  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) \notin \mathbb{Q}$  und damit  $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) \notin \mathbb{Q}$ ,  $\square$ .

#### Aufgabe 5 - 290935

a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion  $f$ , die für alle reellen Zahlen  $x$  die Gleichung

$$f(x - 1) = (x^2 - 1) \cdot f(x + 1) \quad (1)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen  $x$  mit  $f(x) = 0$  gibt.

b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion  $f$  gibt, die für alle reellen Zahlen  $x$  die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl  $x$  den Funktionswert  $f(x) = 0$  hat!

a) Es ist für  $x = 1$  laut (1)  $f(0) = f(1 - 1) = (1^2 - 1) \cdot f(1 + 1) = 0 \cdot f(2) = 0$ . Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt für  $x = -2n + 1$  wegen (1), dass  $f(-2n - 2) = ((-2n + 1)^2 - 1) \cdot f(-2n)$  gilt. Aus  $f(0) = 0$  folgt damit direkt  $f(-2) = 0$ , daraus  $f(-4) = 0$  und sukzessive für alle negativen geraden ganzen Zahlen  $f(-2n) = 0$ , sodass die Funktion unendlich viele Nullstellen besitzt,  $\square$ .

b) Die Gleichung (1) setzt nur Funktionswerte von Argumenten in Beziehung, die sich um genau 2 unterscheiden. Es sei  $2\mathbb{Z} + 1$  die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Da für keine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$  gilt, dass  $x + 2$  oder  $x - 2$  eine ungerade ganze Zahl ist, ist die Wahl des Funktionswert für  $f(x)$  unabhängig von der Wahl der Funktionswerte an den ungeraden ganzzahligen Stellen. Also kann man für alle  $x$  mit  $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$  den Funktionswert  $f(x) := 0$  festsetzen und unabhängig davon die für  $x \in 2\mathbb{Z} + 1$ .

Setzt man nun  $f(1) := 1$ , so ergibt sich daraus ein eindeutiger Wert für  $f(3)$ , daraus ein eindeutiger Wert für  $f(5)$  usw. für alle ungeraden natürlichen Zahlen. Umgekehrt folgt aber aus  $f(1) = 1$  auch ein eindeutiger Wert, den  $f(-1)$  annehmen muss, daraus einer für  $f(-3)$  usw. für alle negativen ungeraden ganzen Zahlen.

Diese Funktion  $f$  ist wegen  $f(1) \neq 0$  nicht konstant 0 ist, erfüllt damit für alle reellen Zahlen  $x$  die Funktionalgleichung (1), sodass es eine solche Funktion gibt,  $\square$ .

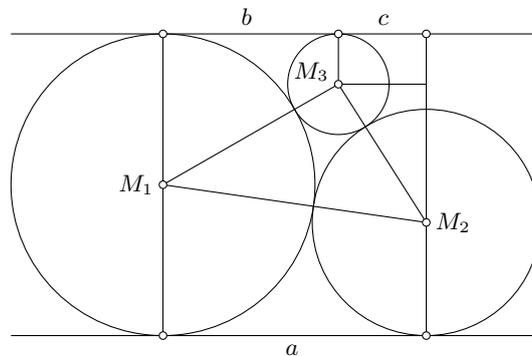
Aufgaben 1-5 der III. Runde 1989 gelöst von cyrix

### Aufgabe 6 - 290936

Es seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  gelte  $r_1 > r_2$ .

Eine Gerade, die  $k_1$  und  $k_2$  in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei  $t$ . Die von  $t$  verschiedene und zu  $t$  parallele Tangente an  $k_1$  sei  $u$ .

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von  $r_1$  und  $r_2$  den Radius  $r_3$  desjenigen  $u$  berührenden Kreises  $k_3$ , der  $k_1$  und  $k_2$  von außen berührt!



Seien  $M_1, M_2, M_3$  die Mittelpunkte der Kreise und  $a, b, c$  die Projektionen der Strecken  $M_1M_2, M_1M_3$  und  $M_2M_3$  auf die Tangenten. Dann erhalten wir mittels Pythagoras

$$\begin{aligned} a^2 + (r_1 - r_2)^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ b^2 + (r_1 - r_3)^2 &= (r_1 + r_3)^2 \\ c^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 &= (r_2 + r_3)^2 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir  $a = 2\sqrt{r_1 r_2}$  und  $b = 2\sqrt{r_1 r_3}$ . Mit  $c = |a - b|$  ergibt dann die dritte Gleichung

$$4(\sqrt{r_1 r_2} - \sqrt{r_1 r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Nach Ausmultiplizieren und zusammenfassen der Terme ist dieses äquivalent zu  $4r_1^2 = 8r_1\sqrt{r_2 r_3}$  und somit

$$r_1^2 = 4r_2 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}$$

**2.32 XXX. Olympiade 1990****2.32.1 I. Runde 1990, Klasse 9****Aufgabe 1 - 300911**

Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d.h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler *A* die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler *B* die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler *C* das Ziehen der Quadratwurzel (z.B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z.B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als "Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die "Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Diese Meinung stimmt. Man kann dies folgendermaßen begründen:

Der Schüler *A* erhält aus der Startzahl  $z$  der Reihe nach die Zahlen

$$z - 2, z - 2 \cdot 2, z - 3 \cdot 2, \dots$$

allgemein nach  $k$ -maliger Ausführung die Zahl  $z - k \cdot 2$ . Der Schüler *B* erhält entsprechend der Reihe nach

$$\frac{z}{2}, \frac{z}{2 \cdot 2}, \frac{z}{2^3}, \dots$$

allgemein nach  $k$ -maliger Ausführung die Zahl  $\frac{z}{2^k}$ .

Wegen  $z < 1000$  und  $2^{10} > 1000$  ist daher spätestens nach 10-maliger Ausführung sein Resultat kleiner als 1. Für den Schüler *A* ist (wegen  $z > 99$ ) für alle  $k \leq 10$  das Resultat nach  $k$ -maliger Ausführung  $z - k \cdot 2 > 99 - 20$  größer als 1.

Da schließlich für jede Zahl  $x > 1$  auch  $\sqrt{x} > 1$  ist, erreicht Schüler *C* niemals ein Resultat kleiner als 1. Also muss stets der Schüler *V* verlieren.

**Aufgabe 2 - 300912**

Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

Dies Gesamtsteigerung errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahlen  $1,08 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,12$ . Wegen

$$1,08 \cdot 1,11 = 1,1988 > 1,19; \quad 1,19 \cdot 1,09 = 1,2971 > 1,28; \quad 1,29 \cdot 1,12 = 1,4448 > 1,4$$

ist folglich die Gesamtsteigerung größer als 40%. Daher hat Peter nicht recht.

Die Gesamtsteigerung bei viermaliger Steigerung um 10% errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahl  $1,1^4$ . Wegen

$$1,08 \cdot 1,12 = 1,2096 < 1,21 = 1,1^2; \quad 1,09 \cdot 1,11 = 1,2099 < 1,21 = 1,1^2 \quad \text{also}$$

$$1,08 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,12 < 1,1^4$$

führt eine viermalige Steigerung im 10% daher in der Tat zu einer größeren Gesamtsteigerung. Bernds Behauptung trifft also zu.

Hinweis: Mit Taschenrechnergenauigkeit ergibt sich

$$1,08 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,12 \approx 1,463495 \quad ; \quad 1,1^4 = 1,4641$$

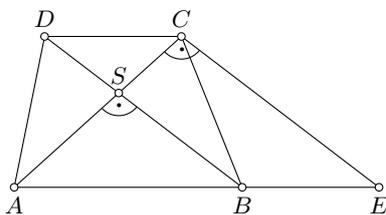
Rundet man diese Ergebnisse so, dass ganzzahlige Prozentangaben entstehen, also auf 1,46, so erhält man:

1. Die Gesamtsteigerung (bei Steigerungen um 8 %, 11 %, 9%, 12%) ist größer als 40 %. Allerdings ist der Beweis mit den so vorgenommenen Rundungsschritten nicht einwandfrei, da nicht untersucht wird, ob auch Aufrundungsschritte vorkommen.
2. Die viermalige Steigerung um 10% ergibt nur eine so wenige vergrößerte Gesamtsteigerung, dass man auch formulieren kann, sie sei "nicht wesentlich größer" und "in diesem Sinne" sei Bernds Behauptung nicht zutreffend.

### Aufgabe 3 - 300913

Beweisen Sie, dass in jedem Trapez  $ABCD$  mit  $AB \parallel CD$ , dessen Diagonalen  $AC$  und  $BD$  aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$



Verlängert man  $AB$  um eine Strecke der Länge  $CD$  bis  $E$ , so sind in dem Viereck  $BECD$  die Gegenseiten  $BE$  und  $CD$  zueinander parallel und gleichlang, also ist  $BECD$  ein Parallelogramm. Daher gilt  $BD = EC$  und  $BD \parallel EC$ .

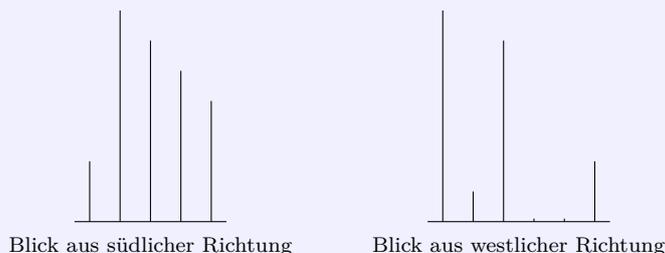
Für den Schnittpunkt  $S$  von  $AC$  und  $BD$  gilt nach Voraussetzung  $\angle ASB = 90^\circ$ , nach dem Stufenwinkelsatz wegen  $BS \parallel EC$  also auch  $\angle ACE = 90^\circ$ . Daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$AC^2 + EC^2 = AE^2 = (AB + BE)^2 \quad \text{und damit} \quad AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$$

### Aufgabe 4 - 300914

Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).

Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.

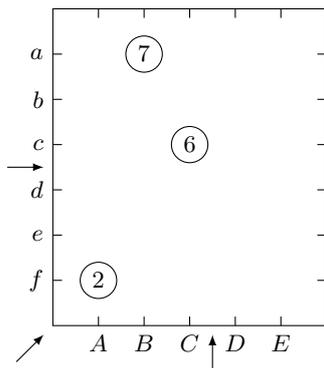


Bernd meint: Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen. Christoph korrigierte ihn: "Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren."

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

Bezeichnen wir die Schornsteine - beim kleinsten beginnend - mit ① bis ⑦ und die möglichen Standorte nach der Abbildung durch Buchstabenpaare (Aa) bis (Ef), so ergeben sich aus den Abbildungen der Aufgabenstellung sofort die Standorte für ②, ⑥, ⑦.



Ferner müssen ⑤ und ④ aus westlicher Richtung durch ⑥ oder ⑦ verdeckt sein; hiernach und wegen der linken Aufgabenabbildung kann ⑤ nur aus (Da) oder (Dc) und ④ nur auf (Ea) oder (Ec) stehen.

Da ③ aus westlicher Richtung von einem größeren Schornstein verdeckt ist, scheidet nun für ③ die waagerechten Reihen b, d, e, f aus. Da ③ auch aus südwestlicher Richtung verdeckt ist, scheidet (Ca), (Da), (Dc), (Ec) aus, also muss ③ auf (Ea) stehen.

Damit ③ dann auch aus südlicher Richtung verdeckt ist, folgt: ④ steht auf (Ec).

Hiernach sind aus südwestlicher Richtung bereits ⑦, ⑥, ②, ④ zu sehen, und für ⑤ scheidet (Da) aus, also steht ⑤ auf (Dc).

Nun folgt weiter:

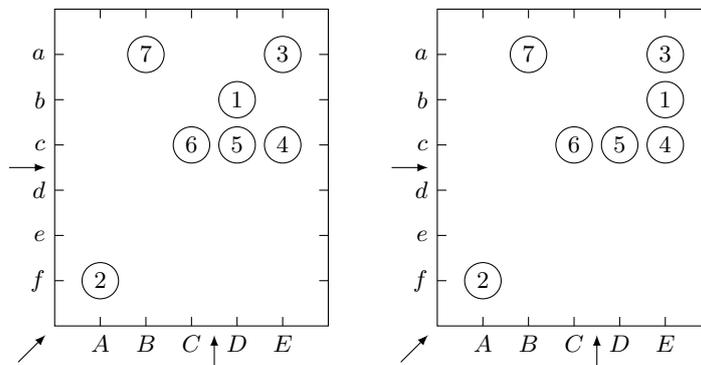
① muss auf Linie b stehen.

Stünde ① auf (Ab), so wären aus SW zwei kleinere vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde ① auf (Bb), so wäre aus S ein kleinerer vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde ① auf (Cb), so wären aus SW fünf Schornsteine nebeneinander zu sehen.

Steht ① auf (Db) oder (Eb), so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Also sind genau die beiden Anordnungen der nachfolgenden Abbildung möglich.



Lösungen der I. Runde 1990 übernommen von [5]

**2.32.2 II. Runde 1990, Klasse 9****Aufgabe 1 - 300921**

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x \neq 3$ , für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

Die Ungleichung ist äquivalent zu  $\frac{3}{5} < \frac{3}{x-3}$  bzw.  $\frac{1}{5} < \frac{1}{x-3}$ . Ist  $x-3$  negativ, so auch  $\frac{1}{x-3}$ , sodass die Ungleichung nicht erfüllt wäre. Also ist  $x-3$  positiv und damit die Ungleichung äquivalent zu  $5 > x-3 > 0$  bzw.  $3 < x < 8$ .

**Aufgabe 2 - 300922**

Man untersuche, ob es ein Rechteck  $ABCD$  mit einander gegenüberliegenden Ecken  $A$  und  $C$  gibt, bei dem im Dreieck  $ABC$  die Winkelhalbierende des Innenwinkels  $\angle ACB$  die Seite  $AB$  in deren Mittelpunkt schneidet.

Die Winkelhalbierende von  $\angle ACB$  im Dreieck  $\triangle ABC$  teilt die gegenüberliegende Seite  $AB$  im Verhältnis der anliegenden Seiten  $AC$  und  $BC$ . Verläuft sie durch den Mittelpunkt von  $AB$ , so gilt also  $|AC| = |BC|$ , was aber im Rechteck  $ABCD$  nicht sein kann, da das Dreieck  $\triangle ABC$  rechtwinklig in  $B$ , die Hypotenuse  $AC$  also länger als die Kathete  $BC$  ist. Also kann die Winkelhalbierende nicht durch den Mittelpunkt der Seite  $AB$  verlaufen,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 300923**

- Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z.B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
- Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
- Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

a) Jede Auswahl von 3 verschiedenen Ziffern ohne Beachtung der Reihenfolge führt auf genau eine solche dreistellige Zahl. Also gibt es  $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$  solcher dreistelligen Zahlen.

b) Jede Auswahl von 2 verschiedenen solchen dreistelligen Zahlen ohne Beachtung der Reihenfolge liefert genau eine solche sechsstellige Zahl. Also gibt es genau  $\binom{120}{2} = \frac{120 \cdot 119}{2 \cdot 1} = 60 \cdot 119 = 7140$  solcher sechsstelligen Zahlen.

c) Damit die Zahl möglichst klein ist, sollten die ersten Ziffern möglichst klein sein. Minimal möglich ist für eine dreistellige Zahl aus a) der Wert 210. Dann ist aber die um 1 größere Zahl nicht von der in a) beschriebenen Form.

Dafür muss die um 1 erhöhte Einerziffer immer noch kleiner als die Zehnerziffer sein, sodass diese mindestens 2 und damit die Hunderterziffer mindestens 3 betragen muss. Tatsächlich ist die minimale Möglichkeit dafür 320321, sodass dies die gesuchte Telefonnummer ist.

**Aufgabe 4 - 300924**

Für jede natürliche Zahl  $m \geq 2$  sei folgendes Vorhaben betrachtet:

Jemand möchte  $m$  verschiedene von einem Punkt  $P$  ausgehende Strahlen zeichnen.

Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die  $m$  Strahlen so zeichnen, dass sich dabei

- möglichst wenige,
- möglichst viele

verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von  $m$  die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Auf jedem Strahl liege ein von  $P$  verschiedener Punkt  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ , sodass diese in mathematisch positivem Drehsinn den Punkt  $P$  durchlaufen.

a) Nach Konstruktion sind die Winkel  $\angle P_0PP_i$  für alle  $i = 1, \dots, m-1$  paarweise verschieden. Also gibt es wenigstens  $m-1$  verschiedene Winkel. Ordnet man die Strahlen so an, dass  $\angle P_0PP_i = \frac{i}{m} \cdot 360^\circ$  gilt, so werden nur Winkel von dieser Form angenommen, da für  $i < j$  dann  $\angle P_iPP_j = \angle P_0PP_j - \angle P_0PP_i = \frac{j-i}{m} \cdot 360^\circ$  bzw.  $\angle P_jPP_i = 360^\circ - \angle P_iPP_j = \frac{m-(j-i)}{m} \cdot 360^\circ$  gelten. Also sind minimal  $m-1$  verschiedene Winkelgrößen möglich.

b) Die maximal mögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen erhielte man, wenn für je zwei verschiedene Indizes  $i \neq j$  mit  $0 \leq i, j \leq m-1$  die Winkel  $\angle P_iPP_j$  alle paarweise verschieden wären. Dann erhielte man  $m \cdot (m-1)$  verschiedene Winkelgrößen.

Um zu zeigen, dass dies möglich ist, ordne man die Strahlen so an, dass  $\angle P_0PP_i = \frac{3^i}{3^m} \cdot 360^\circ$  für alle  $i = 1, \dots, m-1$  gilt. Dann ist offenbar  $\angle P_iPP_j < 180^\circ$ , wenn  $i < j$  und  $\angle P_iPP_j > 180^\circ$ , wenn  $j > i$ . Es können also zwei solche Winkel  $\angle P_iPP_j$  und  $\angle P_kPP_\ell$  nur dann gleich sein, wenn  $i < j$  und  $k < \ell$ , oder  $i > j$  und  $k > \ell$  gilt.

Im zweiten Fall sind dann aber auch die entsprechenden Winkel in der jeweils anderen Orientierung gleich, sodass wir o.B.d.A.  $i < j$  und  $k < \ell$  voraussetzen können. Aus  $\angle P_iPP_j = \angle P_kPP_\ell$  folgt dann  $3^j - 3^i = 3^\ell - 3^k$ .

Die linke Seite der Gleichung ist eine durch  $3^i$ , aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl, die rechte Seite analog eine durch  $3^k$ , aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl.

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit  $i = k$ , woraus sofort auch  $j = \ell$  folgt, sodass es sich nicht um Winkel zwischen verschiedenen Strahl-Paaren gehandelt haben kann, also tatsächlich alle Winkel zwischen je zwei verschiedenen Strahlen verschiedene Größen haben. Damit kann man also maximal  $m \cdot (m-1)$  verschiedene Winkelgrößen erhalten.

*Aufgaben der II. Runde 1990 gelöst von cyrix*

## 2.32.3 III. Runde 1990, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 300931**

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:

Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.

Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.

Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.

Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.

Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

Egal, wie gespielt wird, B gewinnt immer. (Damit kann sich A eine beliebige Strategie festlegen, das Spiel so gestalten, und gewinnt mit Sicherheit.)

Beweis: Seien  $a$  und  $b$  mit o.B.d.A.  $a \geq b$  die Zahlen, die in einem Zug von einem Spieler auf aus dem Spiel genommenen Karten stehen. Dann verringert sich die Gesamtsumme aller Zahlen auf im Spiel befindlichen Karten um  $a + b$ , erhöht sich aber durch die neu ins Spiel gebrachte Karte um  $a - b$ .

Insgesamt verringert sich also die Gesamtsumme um  $a + b - (a - b) = 2b$ , also eine gerade Zahl, sodass sich die Parität der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen nie ändert. Da das Spiel endlich ist (mit jedem Zug sinkt die Anzahl der im Spiel befindlichen Karten um 1), ist irgendwann nur noch eine Karte im Spiel, d.h., die darauf befindliche Zahl ist dann gleichzeitig der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen.

Diese ist demnach genau dann gerade, wenn es auch die Summe aller Zahlen zu Spielbeginn war, welche  $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51$ , also ungerade ist. Damit bleibt in jedem Fall am Ende eine Karte mit einer ungeraden Zahl übrig, sodass B sicher gewinnt,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 300932**

Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Es ist  $1991 = 1001 + 990 = 11 \cdot (91 + 90) = 11 \cdot 181$ , wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Damit hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.

Es sei  $n \geq 3$  die Anzahl der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 1991 ergibt.

Fall 1: Es ist  $n = 2m + 1$  eine ungerade Zahl. Sei  $a - m$  der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren also  $a - (m - 1), a - (m - 2), \dots, a - 1, a, a + 1, \dots, a + (m - 1), a + m$  und wir erhalten

$$1991 = (a - m) + (a - (m - 1)) + \dots + (a - 1) + a + (a + 1) + \dots + (a + (m - 1)) + (a + m) = (2m + 1) \cdot a$$

Also müssen  $n = 2m + 1$  und  $a$  Teiler von 1991 mit  $0 < a - m = \frac{1991}{n} - \frac{n-1}{2}$  sein. Dies schließt  $n = 1991$  und  $n = 181$  aus;  $n = 1$  fällt wegen  $n \geq 3$  weg, sodass nur  $n = 11$  und damit  $a = 181$  verbleibt. Wir erhalten

$$1991 = 176 + 177 + 178 + 179 + 180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186$$

Fall 2: Es ist  $n = 2m$  eine gerade Zahl mit  $m \geq 2$ . Sei  $a - m$  der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren  $a - (m - 1), \dots, a + (m - 1)$ , sodass wir

$$1991 = (a - m) + (a - (m - 1)) + \dots + (a + (m - 1)) = 2m \cdot a - m = m \cdot (2a - 1)$$

erhalten. Diesmal müssen  $m$  und  $2a - 1$  Teiler und Gegenteiler von 1991 sein, sodass  $2a = \frac{1991}{m} + 1 = \frac{1991+m}{m}$  und damit  $a = \frac{1991+m}{2m}$  gilt.

Wieder muss  $0 < a - m = \frac{1991+m-2m^2}{2m}$ , also  $2m^2 - m < 1991$  gelten. Dies schließt  $m = 1991$  und  $m = 181$  aus, während  $m = 1$  wegen  $m \geq 2$  ausgeschlossen ist. Es verbleibt als einzige Lösung  $m = 11$ , woraus  $2a - 1 = 181$  und  $a = 91$  folgt. Wir erhalten die Darstellung

$$1991 = 80 + 81 + \dots + 100 + 101.$$

**Aufgabe 3 - 300933**

Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Wir beginnen mit einem Quadrat der Kantenlänge 10 cm und positionieren darauf Punkte, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Dazu beginnen wir auf einer Kante des Vierecks und positionieren je einen Eckpunkt in deren Endpunkte und einen auf ihren Mittelpunkt.

Dies wollen wir eine "Dreier-Strecke" nennen. Die Parallele zu dieser Kante im Abstand von  $\frac{1}{3} \cdot 10$  cm vierteln wir und positionieren auf den beiden äußeren Teilungspunkten je einen Punkt. Dies wollen wir eine "Zweier-Strecke" nennen.

Wieder auf der Parallelen zur Grundkante im Abstand  $\frac{2}{3} \cdot 10$  cm positionieren wir analog der Grundkante eine "Dreierstrecke" und abschließend auf der gegenüberliegenden Kante im Abstand  $\frac{3}{3} \cdot 10$  cm wieder eine "Zweier-Strecke".

Auf jeder Strecke haben je zwei ausgewählte Punkte den Abstand von mindestens 5 cm. Je zwei benachbarte der ausgewählten Punkte auf einer solchen Strecke spannen mit einem ausgewählten Punkt "zwischen ihnen" auf einer benachbarten Strecke ein gleichseitiges Dreieck mit Basislänge 5 cm und Länge der Höhe auf die Basis von  $\frac{1}{3} \cdot 10$  cm auf.

Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{24}{4} + \frac{90}{9}} = \sqrt{6 + 10} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

sodass auch keine zwei ausgewählte Punkte auf verschiedenen Strecken einen Abstand von 4 cm oder geringer haben.

Auf dem Quadrat haben wir so  $3 + 2 + 3 + 2 = 10$  Punkte ausgewählt, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Ein solches Quadrat nennen wir "gut gefüllt" und "mit Dreier-Strecke beginnend".

Spiegeln wir es, indem wir Grundkante und deren gegenüberliegende Kante aufeinander abbilden, so entsteht wieder ein "gut gefülltes" Quadrat, nun aber in der Reihenfolge "Zweier-Strecke", "Dreier-Strecke", "Zweier-Strecke", "Dreier-Strecke". Dieses wollen wir als "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat" bezeichnen.

Starten wir nun mit der Grundfläche des Würfels und legen in diese ein "mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes" Quadrat.

In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand  $\frac{1}{3} \cdot 10$  cm mit dem Würfel entsteht, legen wir – bezüglich der gleichen Orientierung – ein "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat". In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand  $\frac{2}{3} \cdot 10$  cm mit dem Würfel entsteht, legen wir wieder ein "mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat" und schließlich in die Deckfläche, welche zur Grundfläche parallel im Abstand  $\frac{3}{3} \cdot 10$  cm liegt, wieder ein "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat".

Auf diese Weise sind in alle drei Richtungen die ausgewählten Punkte jeweils "versetzt" angeordnet.

Zwei Punkte innerhalb eines solchen "gut gefüllten Quadrats" haben, wie oben schon gesehen, niemals einen Abstand von 4 cm oder weniger. Da wir vier "gut gefüllte Quadrate" in oder auf den Würfel gelegt haben, die sich paarweise nicht überschneiden (da sie in verschiedenen, zueinander parallelen Ebenen liegen), beträgt die Gesamtanzahl der so markierten Punkte also  $4 \cdot 10 = 40$ .

Jedoch bilden auch die so markierten Punkte auf den Schnitten, die durch Ebenen parallel zu den anderen Seitenflächen des Würfels im Abstand  $\frac{i}{3} \cdot 10$  cm zu diesen für jedes  $i = 0,1,2,3$  "gut gefüllte" Quadrate, sodass auch hier keine zwei Punkte einen Abstand von 4 cm oder weniger besitzen.

Also haben zumindest all diejenigen Paare verschiedener markierter Punkte, die in einer gemeinsamen zu einer Seitenfläche des Würfels parallelen Ebene liegen, jeweils einen Abstand von mehr als 4 cm zueinander. Zwei Punkte, die aber in keiner gemeinsamen solchen Ebene liegen, haben in jeder Richtung einen Abstand von mindestens  $\frac{1}{3} \cdot 10$  cm, also nach dem Satz von Pythagoras einen Abstand von mindestens

$$\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{300}{10}} = \sqrt{30} > \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

also mehr als 4 cm. Damit haben je zwei verschiedene der angegebenen markierten Punkte einen Abstand von mehr als 4 cm,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 300934

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$  zwischen 100 und 400, für die die Summe  $s$  der Ziffern bei Darstellung von  $n$  im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe  $t$  der Ziffern ist, die bei der Darstellung von  $n$  im System mit der Basis 9 auftreten.

Hinweis:

Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ..., 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

Es sei  $n = z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$  die Darstellung von  $n$  im Dezimalsystem und  $n = n_2 \cdot 9^2 + n_1 \cdot 9 + n_0$  die Darstellung im System zur Basis 9. Dabei reichen wegen  $9^3 = 729 > 400 \geq n$  auch drei Ziffern aus. Dann ist  $s = z_2 + z_1 + z_0$  und  $t = n_2 + n_1 + n_0$ .

Wegen  $10 \equiv 1 \pmod{9}$  ist  $n \equiv z_2 \cdot 1^2 + z_1 \equiv 1 + z_0 = s \pmod{9}$  und analog wegen  $9 \equiv 1 \pmod{8}$  auch  $n \equiv n_2 \cdot 1^2 + n_1 \cdot 1 + n_0 = t \pmod{8}$ .

Gilt  $s = t$ , so ist also  $n - s = n - t$  sowohl durch 9 als auch 8, also wegen  $ggT(9,8) = 1$  auch durch  $9 \cdot 8 = 72$  teilbar. Es folgt  $n - s = n - t \in \{144, 216, 288, 360\}$ .

Es ist  $n \leq 400 < 404 = 5 \cdot 81 - 1$ , also  $n < 488_9$ . Damit gilt  $t < 4 + 8 + 8 = 20$ , also  $t \leq 19$ .

Fall 1:  $n - s = n - t = 144$ .

Dann ist  $145 \leq n \leq 144 + 19 = 163$ , also  $s \leq 1 + 5 + 9 = 15$  und damit  $145 \leq n \leq 144 + 15 = 159$ . Es ist  $145 = 171_9$  und  $159 = 186_9$ , also  $9 \leq t \leq 16$ . Damit ergibt sich  $149 \leq n \leq 159$ . Für  $n = 149$  ist  $s = 14$  und wegen  $n = 175_9$  dann  $t = 13$ , also keine Lösung.

Für  $n = 150 + z_0$  ist  $s = 6 + z_0$ . Ist  $0 \leq z_0 \leq 2$ , so  $176_9 \leq n \leq 178_9$ , also  $s \leq 8$  und  $t \geq 14$ , sodass es keine Lösung gibt. Für  $3 \leq z_0 \leq 9$  dagegen ist  $n = 1 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + (z_0 - 3)$ , sodass sich  $t = 1 + 8 + (z_0 - 3) = 6 + z_0 = s$  ergibt.

Also sind alle  $n \in \{153, 154, 155, 156, 157, 158, 159\}$  Lösungen.

Fall 2:  $n - s = n - t = 216$ .

Dann ist  $217 \leq n \leq 216 + 19 = 235$  und damit  $s \leq 2 + 2 + 9 = 13$ , d.h.  $n \leq 216 + 13 = 229$ . Es ist  $217 = 261_9$  und  $229 = 274_9$ , also  $9 \leq t$  und damit  $225 \leq n \leq 229$ .

Es ist  $n = 220 + z_0$  mit  $z_0 \geq 5$  und  $n = 2 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + (z_0 - 5)$ , also  $s = 2 + 2 + z_0 = 4 + z_0$  und  $t = 2 + 7 + (z_0 - 5) = z_0 + 4 = s$ , sodass alle Werte  $n \in \{225, 226, 227, 228, 229\}$  Lösungen sind.

Fall 3:  $n - s = n - t = 288$ .

Dann ist  $289 \leq n \leq 288 + 19 = 307$ . Es ist  $289 = 351_9$  und  $307 = 371_9$ , also  $9 \leq t \leq 17$ . Damit ist  $297 \leq n \leq 305$ . Ist  $300 \leq n \leq 300$ , so also  $s \leq 3 + 0 + 5 = 8$ , was wegen  $t \geq 9$  keine Lösungen liefert.

Also ist  $297 \leq n \leq 299$  und damit  $s \geq 18$ , während  $297 = 360_9$  und  $299 = 362_9$ , also  $t \leq 3 + 6 + 2 = 11$ , sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 4:  $n - s = n - t = 360$ .

Dann ist  $361 \leq n \leq 379$ . Dann ist  $s \geq 10$ , also  $370 \leq n \leq 379$ , d.h.  $n = 370 + z_0$  und  $s = 10 + z_0$ . Es ist  $370 = 451_9$ , also für  $0 \leq z_0 \leq 7$  ist  $n = 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + (z_0 + 1)$  und  $t = 4 + 5 + z_0 + 1 = 10 + z_0 = s$ , sodass alle  $n \in \{370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377\}$  Lösungen sind.

Ist dagegen  $n = 370 + z_0$  mit  $8 \leq z_0 \leq 9$ , also weiterhin  $s = 10 + z_0$ , so ist  $n = 4 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + (z_0 - 8)$  und damit  $t = 4 + 6 + z_0 - 8 = 2 + z_0 \neq s$ , sodass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zusammenfassend erfüllen genau die folgenden  $n$  die Bedingung der Aufgabenstellung:

$n \in \{153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 225, 226, 227, 228, 229, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377\}$

#### Aufgabe 5 - 300935 = 321034

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(x, y, z)$  natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

O.B.d.A. gelte  $0 < x \leq y \leq z$ . Dann ist  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$  und damit  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ , also  $x < 4$ . Es ist auch  $x > 1$ , da sonst  $x = 1$ , also  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$  im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für  $x$ .

Fall 1: Es ist  $x = 2$ . Dann ist die folgende Gleichung zu lösen:  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ . Wegen  $y \leq z$  ist  $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ , also  $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ , sodass  $y \leq 6$  folgt. Wegen  $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$  ist auch  $y \geq 4$ , da sonst  $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$  mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist  $y = 4$ . Dann folgt  $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$ , also  $z = 20$ .

Fall 1.2: Es ist  $y = 5$ . Dann folgt  $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$ , also  $z = 10$ .

Fall 1.3: Es ist  $y = 6$ . Dann folgt  $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ , sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist  $x = 3$ . Dann ist folgende Gleichung zu lösen:  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$ . Dann ist wegen  $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$  auch  $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ , also  $y \leq 4$ . Wegen  $y \geq x$  ist auch  $y \geq 3$ .

Fall 2.1: Es ist  $y = 3$ . Dann folgt  $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$ , sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist  $y = 4$ . Dann folgt  $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$ , sodass es auch hier keine Lösung gibt.

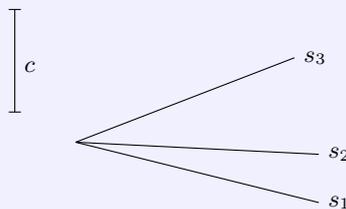
Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel

$(3,4,20)$ ,  $(3,20,4)$ ,  $(4,3,20)$ ,  $(4,20,3)$ ,  $(20,3,4)$ ,  $(20,4,3)$ ,  $(3,5,10)$ ,  $(3,10,5)$ ,  $(5,3,10)$ ,  $(5,10,3)$ ,  $(10,3,5)$ ,  $(10,5,3)$  positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

### Aufgabe 6 - 300936

Gegeben seien drei von einem Punkt  $S$  ausgehenden Strahlen  $s_1, s_2, s_3$ .

Dabei habe der von  $s_1$  und  $s_3$  gebildete Winkel  $\angle(s_1, s_3)$  eine beliebige Größe kleiner als  $60^\circ$ , und der Strahl  $s_2$  sei ein beliebiger von  $S$  aus in das Innere des Winkels  $\angle(s_1, s_3)$  hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge  $c$ .

- Wählen Sie derartige Vorgaben  $c, s_1, s_2, s_3$  (dabei  $s_2$  nicht als Winkelhalbierende von  $\angle(s_1, s_3)$ ) und konstruieren Sie dann drei von  $S$  verschiedene Punkte  $A$  auf  $s_1$ ,  $B$  auf  $s_2$  und  $C$  auf  $s_3$  so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  der Seitenlänge  $c$  sind!
- Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
- Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck  $ABC$  gleichseitig ist und dass seine Ecken  $A, B, C$  auf  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$  liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

Wir geben zuerst an, wie man zu einer gegebenen Strecke  $PQ$  einen Kreis  $k$  durch  $P$  und  $Q$  konstruiert, sodass der Peripheriewinkel in diesem Kreis über der Sehne  $PQ$  einem vorgegebenen Winkel  $\alpha$  entspricht:

Man trage in  $P$  und  $Q$  an die Strecke  $PQ$  in die gleiche Halbebene bezüglich der Geraden  $PQ$  den Winkel  $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$  ab, der sich leicht aus  $\alpha$  konstruieren lässt. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel dieser beiden Winkel sei  $R$ . Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle PQR$  gilt dann  $\angle QRP = 180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \alpha$ , sodass der Umkreis des Dreiecks  $\triangle PQR$  der gesuchte Kreis ist.

Nun zur eigentlichen Konstruktion:

- Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle A'B'C'$  der Kantenlänge  $c$ .

- Über der Strecke  $A'B'$  konstruiere man den Kreis  $k$  durch  $A'$  und  $B'$ , für den die Peripheriewinkel  $\angle A'PB'$  der Punkte  $P$  auf  $k$ , die in der gleichen Halbebene bezüglich  $A'B'$  wie  $C'$  liegen, genau so groß ist wie der Winkel zwischen  $s_1$  und  $s_2$ .
- Analog konstruiere man über der Strecke  $A'C'$  den Kreis  $\ell$  durch  $A'$  und  $C'$ , sodass die entsprechenden Peripheriewinkel zu Punkten, die in der gleichen Halbebene bezüglich  $A'C'$  wie  $B'$  liegen, die Größe des Winkels zwischen  $s_1$  und  $s_3$  haben.
- Der neben  $A'$  zweite Schnittpunkt der beiden Kreise  $k$  und  $\ell$  sei mit  $M$  bezeichnet, der Schnittpunkt der drei Strahlen  $s_1, s_2, s_3$  mit  $S$ .
- Trage von  $S$  aus auf  $s_1$  die Streckenlänge  $|A'M|$  ab und erhalte  $A$ , trage von  $S$  aus auf  $s_2$  die Streckenlänge  $|B'M|$  ab und erhalte  $B$  und trage schließlich von  $S$  aus auf  $s_3$  die Streckenlänge  $|C'M|$  ab und erhalte  $C$ .

Dann ist  $\triangle ABC$  ein gesuchtes Dreieck.

Beweis:

Nach Konstruktion<sup>1</sup> ist  $\angle A'MB' = \angle ASB$ ,  $\angle A'MC' = \angle ASC$  und  $\angle B'MC' = \angle A'MC' - \angle A'MB' = \angle ASC - \angle ASB = \angle BSC$ .

Also sind die beiden Dreiecke  $\triangle A'MB'$  und  $\triangle ASB$ , die beiden Dreiecke  $\triangle A'MC'$  und  $\triangle ASC$  sowie die beiden Dreiecke  $\triangle B'MC'$  und  $\triangle BSC$  jeweils zueinander kongruent, da sie jeweils in einem Winkel und den beiden anliegenden Seiten übereinstimmen.

Also gilt auch  $|AB| = |A'B'| = c = |A'C'| = |AC| = |B'C'| = |BC|$ . Also ist das Dreieck  $\triangle ABC$  gleichseitig mit Kantenlänge  $c$ , wobei nach Konstruktion  $A$  auf  $s_1$ ,  $B$  auf  $s_2$  und  $C$  auf  $s_3$  liegt,  $\square$ .

*Aufgaben der III. Runde 1990 gelöst von cyrix*

<sup>1</sup>Die beiden Kreise  $k$  und  $\ell$  sind verschieden, denn sonst würden sie mit dem Umkreis des Dreiecks  $\triangle A'B'C'$  zusammenfallen, sodass die jeweiligen Peripheriewinkel jeweils  $60^\circ$  betragen würden, entgegen der Voraussetzung.



- a) Dieses Kryptogramm hat keine Lösung, da es mehr als 10 ungleiche Buchstaben enthält.
- b) Angenommen, eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

Es ist  $N \neq 0$ , da sich in der Einerstelle aus  $N = 0$  der Widerspruch  $U = R$  ergäbe.

Also kann die in der Zehnerstelle auszuführende Addition von  $N, A$  und einem eventuellen Übertrag nur dann zu einer Zahl mit der letzten Ziffer  $A$  führen, wenn ein solcher Übertrag aus der Einerstelle vorliegt und  $N = 9$  ist.

Das führt aber zu einem Übertrag aus der Zehnerstelle in die Hunderterstelle, und die dort auszuführende Addition kann nur dann zu einer Zahl mit der letzten Ziffer  $A$  führen, wenn auch  $R = 9$  ist. Damit hat die Annahme einer Ersetzung, die Lösung ist, zu einem Widerspruch geführt; folglich hat das Kryptogramm keine Lösung.

- c) I) Angenommen, eine Ersetzung sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

An der Tausenderstelle liegt wegen  $E \neq R$  ein Übertrag aus der Hunderterstelle vor; es gilt  $M + M \geq 9$  (1) sowie  $E + 1 = R$  (2).

Aus (1) folgt  $M > 4$ ; ferner ist an der Einerstelle ersichtlich, dass  $M$  gerade ist, also  $M = 6$  oder  $M = 8$  sein muss. Führt man für diese Werte die Addition an der Hunderterstelle durch (und zwar entweder ohne oder mit Übertrag aus der Zehnerstelle) und wendet dann noch (2) an, so erhält man: Es gibt höchstens die folgenden Möglichkeiten:

$M$	$E$	$R$
6	2	3
6	3	4
8	6	7
8	7	8

Von ihnen widersprechen aber die zweite, dritte und vierte den Angaben an der Einerstellen. Die vierte enthält auch den Widerspruch  $M = R$ . Also kann nur die erste Möglichkeit vorliegen. Bei ihr entsteht kein Übertrag aus der Einerstelle in die Zehnerstelle; somit hat die Zahl  $I + I$  die letzte Ziffer  $I$ , was nur für  $I = 0$  zutrifft.

Also kann nur die Ersetzung  $M = 6, E = 2, R = 3, I = 0$  das Kryptogramm lösen.

- II) Sie erfüllt die Gleichheits- und Ungleichheitsforderungen, und die Addition

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{2} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{3} \\ + \phantom{2} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{3} \\ \hline = \phantom{2} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{3} \phantom{6} \end{array}$$

ist richtig gerechnet.

Damit ist gezeigt, dass das Kryptogramm genau diese Lösung hat.

### Aufgabe 3 - 310913

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Die Anzahl der Dreiecksflächen, aus denen die Oberfläche eines Körpers zusammengesetzt ist, sei  $f$ . Die Anzahl der Kanten, die an der Oberfläche dieses Körpers auftreten, sei  $k$ . Zählt man zu jeder der  $f$  Flächen ihre drei Kanten auf, so ergibt sich eine Aufzählung von insgesamt  $3f$  Kanten. In dieser Aufzählung ist jede Kante genau zweimal erfasst, da an jeder Kante genau zwei der Dreiecksflächen zusammenstoßen. Also gilt:

$$3f = 2k$$

somit ist  $f = 2(k - f)$  eine gerade Zahl, w.z.b.w.

**Aufgabe 4 - 310914**

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.

Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

a) Zu Beginn der Schuljahres sei  $x$  die Anzahl der Teilnehmer,  $y$  die Anzahl der Nichtteilnehmer gewesen, Dann gilt  $x + y = 825$  (1) und da die Zunahme der Teilnehmerzahl ebenso groß wie die Abnahme der Nichtteilnehmerzahl war, gilt

$$\frac{4}{100} \cdot x = \frac{7}{100} \cdot y \quad (2)$$

Aus (1) folgt  $x = 825 - y$ ; aus (2) folgt damit

$$4 \cdot (825 - y) = 7y \quad (3) \quad ; \quad 11y = 3300 \quad (4)$$

Also war die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres  $y = 300$  (5); sie nahm um 7 % dieses Wertes ab, d.h. um die Zahl  $z = 21$ .

b) Sind  $p$  und  $q$  die wahren, durch 4,0 und 7,0 angenäherten Werte, so liegt  $p$  zwischen 3,95 und 4,05 sowie  $q$  zwischen 6,95 und 7,05; ferner ist statt (3), (4), (5) nur bekannt, dass mit solchen Werten  $p, q$

$$p \cdot (825 - y) = q \cdot y \quad ; \quad y = \frac{p \cdot 825}{p + q}$$

gilt. Das führt zunächst zu der Aussage, dass  $y$  zwischen

$$\frac{3,95 \cdot 825}{4,05 + 7,05} = \frac{3258,75}{11,1} \quad \text{und} \quad \frac{4,05 \cdot 825}{3,95 + 6,95} = \frac{3341,25}{10,9} \quad \text{und}$$

also erst recht zwischen 293,58 und 306,54 liegen und folglich eine der Zahlen

$$294, 295, \dots, 306 \quad (6)$$

sein muss. Die Anzahl  $z = \frac{q}{100}y$  der Schüler, um die sich  $y$  während des Schuljahres verringert hat, liegt daher zwischen  $\frac{6,95}{100} \cdot 294 = 20,433$  und  $\frac{7,05}{100} \cdot 306 = 21,573$ , d.h. sie ist eindeutig bestimmt und beträgt  $z = 21$ .

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

## 2.33.2 II. Runde 1991, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 310921**

a) Geben Sie eine natürliche Zahl  $n$  an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von  $n$  als auch die Quersumme von  $n + 1$  durch 10 teilbar sind!

Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!

b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!

Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Endet die Zahl  $n$  nicht auf die Ziffer Neun, so ist die Quersumme von  $n + 1$  genau um eins größer als die von  $n$ , da sich nur die letzte Ziffer um eins erhöht und alle anderen gleich bleiben. Also können nicht beide Quersummen durch 10 teilbar sein. endet dagegen  $n$  auf genau  $k$  Neunen, so werden diese beim Übergang zu  $n + 1$  alle zu Nullen, während die Ziffer vor diesen Neunen (ggf. eine führende Null) um eins erhöht. Die Quersumme von  $n + 1$  erhält man also aus der von  $n$  durch Subtraktion von  $k \cdot 9 - 1$ .

Damit beide Quersummen durch 10 teilbar sind, muss also sowohl die von  $n$  als auch  $k \cdot 9 - 1$  durch 10 teilbar sein. Das kleinste  $k$ , welches die letzte Bedingung erfüllt, ist,  $k = 9$ . Also muss  $n$  auf mindestens neun Neunen enden. Damit hat  $n$  mindestens die Quersumme 81, also, da es eine durch 10 teilbare Quersumme haben soll, von mindestens 90.

Die kleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist 9.999.999.999. Diese endet aber auf genau zehn Neunen, sodass die Quersumme ihres Nachfolgers sich auf 1 reduziert, was nicht durch 10 teilbar ist.

Die nächstgrößere, also zweitkleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist  $n = 18.999.999.999$ . Tatsächlich ist die Quersumme von  $n$  gleich  $1 + 8 + 9 \cdot 9 = 90$  und die von  $n + 1 = 19.000.000.000$  gleich  $1 + 9 + 9 \cdot 0 = 10$ , sodass dieses  $n$  die Bedingung erfüllt und das kleinste solche ist.

**Aufgabe 2 - 310922**

Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte  $A$  und  $B$ .

Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt  $C$ , für den  $\angle ABC$  ein rechter Winkel ist!

Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Beweisen Sie: Wenn ein Punkt  $C$  nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist  $\angle ABC$  ein rechter Winkel!

Hinweis:

Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt  $M$  ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte  $P, Q$  ist (für die auch  $M = P$  oder  $M = Q$  sein darf), wobei die Punkte  $M, P, Q$  entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.

Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Wir führen folgende Konstruktion durch:

- 1) Kreis  $k_1$  um  $B$  durch  $A$ , Kreis  $k_2$  um  $A$  durch  $B$
- 2) Schnittpunkte von  $k_1$  und  $k_2$  seien  $P_1$  und  $P_2$
- 3) Kreis  $k_3$  um  $P_1$  durch  $A$ , Schnittpunkt von  $k_1$  und  $k_3$  seien  $A$  und  $P_3$
- 4) Kreis  $k_4$  um  $P_2$  durch  $P_1$
- 5) Schnittpunkte von  $k_4$  und  $k_1$  seien  $P_1$  und  $P_3$
- 6) Kreis  $k$  um  $P_3$  durch  $A$ , Kreis  $\ell$  um  $A$  durch  $P_3$
- 7) Schnittpunkte von  $k$  und  $\ell$  seien  $C$  und  $C'$

Beweis, dass  $\angle ABC = 90^\circ$  ist:

Nach Konstruktion besitzen die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  den gleichen Radius  $|AB|$ , sodass das Dreieck  $\triangle ABP_1$  gleichseitig mit Kantenlänge  $|AB|$  ist. Insbesondere ist  $\angle ABP_1 = 60^\circ$ .

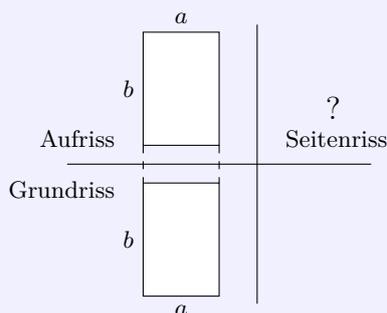
Auf analoge Weise erhält man auch die Gleichseitigkeit der Dreiecke  $\triangle P_1BP_2$  und  $\triangle P_2BP_3$ , sodass sich auch  $\angle P_1BP_2 = \angle P_2BP_3 = 60^\circ$  und damit

$$\angle ABP_3 = \angle ABP_1 + \angle P_1BP_2 + \angle P_2BP_3 = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

ergibt, sodass die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $P_3$  auf einer Geraden liegen, wobei  $B$  zwischen  $A$  und  $P_3$  liegt. Weiterhin haben alle drei betrachteten gleichseitigen Dreiecke die Kantenlänge  $|AB|$ , sodass auch  $|BP_3| = |AB|$  gilt und damit  $B$  der Mittelpunkt der Strecke  $AP_3$  ist.

Abschließend schneiden sich die beiden Kreise  $k$  und  $\ell$  auf dem Mittellot dieser Strecke  $AP_3$ , also insbesondere in einem Punkt  $C$  mit  $\angle ABC = 90^\circ$ , da das Mittellot von  $AP_3$  natürlich durch dessen Mittelpunkt  $B$  verläuft und senkrecht auf der Geraden  $AP_3 = AB$  steht,  $\square$ .

### Aufgabe 3 - 310923



Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.

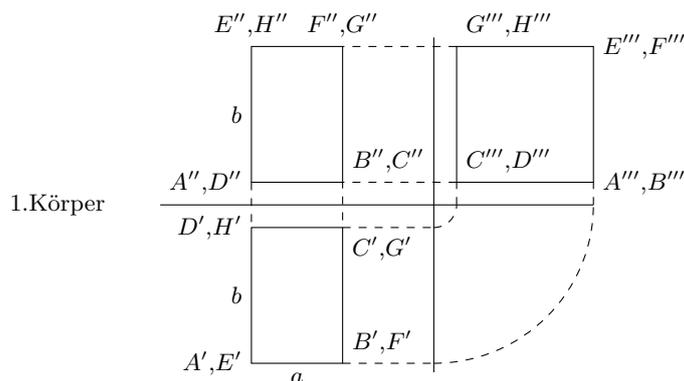
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen  $a, b$ ) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)

Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!

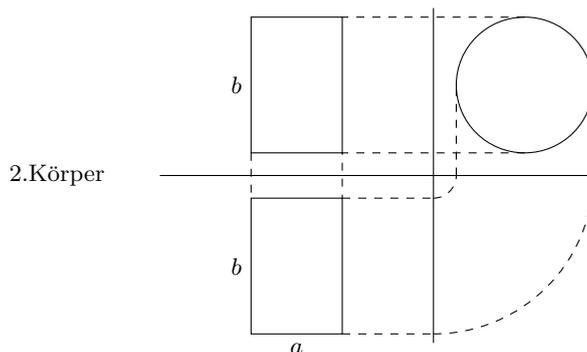
Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes  $P$  bezeichne man mit  $P'$ ,  $P''$  bzw.  $P'''$ ; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)

Geben Sie in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  die Volumina der drei dargestellten Körper an!

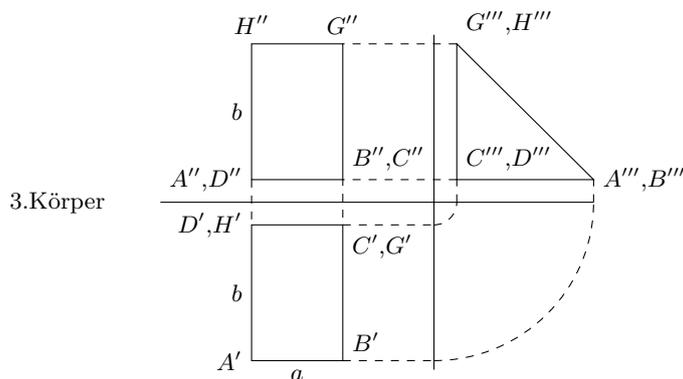
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Der 1. Körper ist ein Quader mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $b$ . Der Seitenriss ist ein Quadrat der Kantenlänge  $b$ . Das Volumen des Körpers ist damit  $V = ab^2$ .

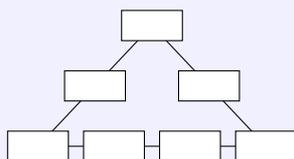


Der 2. Körper ist ein "liegender" Zylinder (Grund- und Deckfläche sind Kreise mit Durchmesser  $b$ , die "Höhe", also eher die Länge ist  $a$ ). Der Seitenriss ist ein Kreis dem mit Durchmesser  $b$ . Das Volumen wird  $V = \frac{\pi}{4}ab^2$ .



Der 3. Körper ist ein dreiseitiges Prisma mit der Höhe  $a$  und einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche, dessen Katheten  $b$  sind. Der Seitenriss ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Das Volumen des Körpers ist damit  $V = \frac{1}{2}ab^2$ .

**Aufgabe 4 - 310924**



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

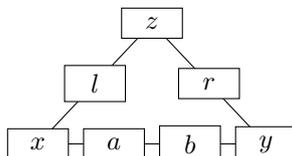
Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne, dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden auch o.B.d.A. voraussetzen, dass die Zahl im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Sei  $x$  die Zahl, die im ersten Feld der Basis,  $y$  diejenige im vierten Feld der Basis und  $z$  diejenige in der Spitze des Dreiecks steht sowie  $s$  die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist  $3s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + x + y + z = 28 + x + y + z$ , da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen  $6 = 1 + 2 + 3 \leq x + y + z \leq 5 + 6 + 7 = 18$  ist  $34 \leq 3s \leq 46$ , also, da  $s$  eine ganze Zahl ist,  $12 \leq s \leq 15$ .

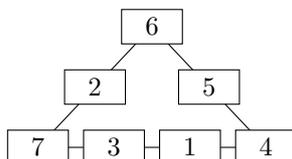
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für  $s$  den Wert, den die Summe der Eckfelder  $x + y + z$  dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	x+y+z
12	$8=1+2+5=1+3+4$
13	$11=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5$
14	$14=1+6+7=2+5+7=3+4+7=3+5+6$
15	$17=4+6+7$

Seien weiterhin mit  $l$  die Zahl im Mittelfeld des linken,  $r$  die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit  $a$  sowie  $b$  die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1:  $s = 15$ . Dann ist  $x + y + z = 4 + 6 + 7$  in irgendeiner Reihenfolge. Es können aber wegen  $s - 6 - 7 = 2 < 1 + 2$  nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass  $y = 4$  folgt. Weiterhin kann dann wegen  $s - 7 - 4 = 4$  nicht  $z = 7$  gelten, sodass  $x = 7$  und  $z = 6$  folgt. Dann muss  $l = s - x - z = 2$  und  $r = s - y - z = 5$  gelten. Es verbleiben für  $a$  und  $b$  die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann  $x + a + b + y = 15 = s$ , sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).



Fall 2:  $s = 14$ .

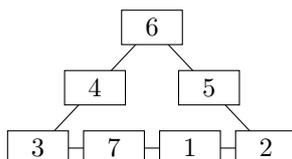
Dann ist  $x + y + z = 14 = s$  und es müsste  $l = s - x - z = y$  haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl  $y$  führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3:  $s = 13$ .

Fall 3.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 1 + 3 + 7$ . Dann sind insbesondere  $x + z$  und  $y + z$  gerade, aber  $s$  ungerade, sodass sowohl  $l$  als auch  $r$  beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

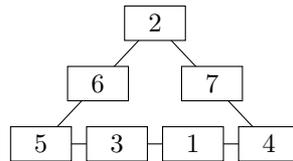
Fall 3.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 1 + 4 + 6$ . Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da  $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$ , da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss  $y = 1$  gelten. Es kann nicht  $z = 6$  gelten, denn sonst wäre  $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = 6 = z$ . Es kann aber auch nicht  $z = 4$  gelten, denn sonst wäre  $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$ . Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 2 + 3 + 6$ . Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da  $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$ , da 1 und 4 die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen sind. Also muss 2 in der Basis stehen und damit  $y = 2$  gelten. Dann kann nicht  $z = 3$  sein, da sonst  $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8 > 7$  wäre. Also muss  $z = 6$ ,  $r = 5$  und  $x = 3$  gelten, woraus wegen  $l = s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$  folgt. Es verbleiben für  $a$  und  $b$  die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt auch  $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13 = s$ , sodass auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.



Fall 3.4: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 2 + 4 + 5$ .

Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze  $z$  stehen, da sonst  $y = 2$  und  $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$  folgen würde. Also muss  $z = 2$ ,  $x = 5$  und  $y = 4$  sein, woraus sofort  $l = 6$  und  $r = 7$  folgt, sodass für  $a$  und  $b$  noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder  $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$ , sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



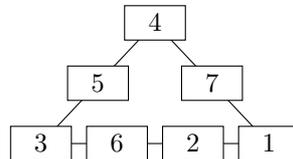
Fall 4:  $s = 12$ .

Fall 4.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 1 + 2 + 5$ .

Dann kann nicht die 5 in der Spitze  $z$  stehen, weil sonst  $x = 2$  und  $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$  folgen würde. Also ist  $x = 5$ . Aus analogem Grund kann dann nicht  $z = 2$  sein, sodass  $z = 1$  und  $y = 2$  folgt, was aber auf den Widerspruch  $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$  führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge  $x + y + z = 1 + 3 + 4$ .

Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst  $x = 4$  und  $y + z = 1 + 3$ , also  $r = s - y - z = 12 - 1 - 3 = 8 > 7$  folgen würde. Also muss  $z = 4$  und damit  $x = 3$  sowie  $y = 1$  gelten, woraus  $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$  und  $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$  folgt. Es verbleiben für  $a$  und  $b$  noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist  $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$ , sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten:



Damit gibt es, da die Fallunterscheidung vollständig war, bis auf Vertauschung der Felder  $a$  und  $b$  (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen.

*Aufgaben der II. Runde 1991 gelöst von cyrix*

## 2.33.3 III. Runde 1991, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 310931**

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Nein dies ist nicht möglich:

Gäbe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also  $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 21 = 84$ , betragen, da jeder jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.

Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass es eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 310932**

In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies "durch" für den Strich! Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist  $\frac{5}{20} = 0,25$ .

Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  die drei Ziffern. Es ist also die Gleichung  $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$  zu lösen.

Fall 1:  $b = 0$ .

Dann reduziert sich die Gleichung auf  $\frac{a}{c} = c + \frac{a}{100}$  bzw. nach Multiplikation mit  $c \neq 0$  auf  $a = c^2 + \frac{ac}{100}$ . Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auch die rechte Seite eine solche sein, also  $ac$  durch 100 teilbar. Wegen  $0 \leq a, c < 10$  ist  $0 \leq ac < 100$ , sodass  $ac = 0$  und wegen  $c \neq 0$  (sonst wäre der Bruch  $\frac{a}{c}$  nicht definiert) schließlich  $a = 0$ , aber daraus nach Einsetzen dann auch wieder  $c = 0$  folgen würde, was ein Widerspruch ist, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Fall 2:  $b > 0$ .

Dann ist  $10b + c \geq 10 > a$ , also  $0 \leq \frac{a}{10b+c} < 1$ . Da wegen  $0 < 10b + a \leq 99 < 100$  auch  $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$  gilt und  $c$  eine nicht-negative ganze Zahl ist, ist  $c$  der Vorkomma-Anteil von  $c + \frac{10b+a}{100}$ , also wegen  $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$  und  $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$  schließlich  $c = 0$ .

Dadurch vereinfacht sich die zu betrachtende Gleichung auf  $\frac{a}{10b} = \frac{a+10b}{100}$  bzw. nach Multiplikation mit  $100b$  auf  $10a = ab + 10b^2$ . Dabei kann  $a$  nicht null sein, da sonst  $0 = 10 \cdot b^2$  folgen würde, was ein Widerspruch zur Fallannahme  $b > 0$  wäre. Also sind sowohl  $a$  als auch  $b$  positiv, woraus  $ab > 0$  und  $10a > 10b^2$  bzw.  $a > b^2$  folgt. Dies ist aber für  $b \geq 3$  wegen  $a \leq 9$  nicht möglich, sodass  $b \in \{1, 2\}$  folgt.

Fall 2.1: Es ist  $b = 1$ . Dann muss  $10a = a + 10$  bzw.  $9a = 10$  gelten, was keine Lösung in ganzen Zahlen hat.

Fall 2.2: Es ist  $b = 2$ . Dann muss  $10a = 2a + 40$  bzw.  $8a = 40$ , also  $a = 5$  gelten. Tatsächlich ist also das schon in der Aufgabenstellung genannte Tripel  $(a, b, c) = (5, 2, 0)$  das einzig mögliche.

**Aufgabe 3 - 310933**

a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  und jedes Dreieck  $ABC$  ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in  $k^2$  einander kongruente, zu  $ABC$  ähnliche Dreiecke zu zerlegen.

b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  und jedes konvexe  $n$ -Eck  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ( $n > 3$ ) ist es möglich, die Fläche dieses  $n$ -Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl  $t$  von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich  $k^2$  einander kongruente, zu  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ähnliche  $n$ -Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der  $t$  Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!

Hinweis:

Eine Fläche  $F$  heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in  $F$  liegen, ganz in  $F$  liegt.

Beide Behauptungen sind wahr, wie im folgenden bewiesen wird:

a) Unterteilt man die Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  jeweils in  $k$  kongruente Abschnitte und zeichnet die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die entstandenen Unterteilungspunkte auf den Seiten, so wird das Dreieck  $\triangle ABC$  in eine Vielzahl kleinerer Dreiecke zerlegt.

Wir nennen ein solches Dreieck "Elementardreieck", wenn es nicht weiter durch eine solche Parallele unterteilt wird. Die Seitenkanten eines jeden solchen Elementardreiecks sind parallel zu einer Seite des Dreiecks  $\triangle ABC$  und haben aufgrund dieser Parallelitäten die gleichen Längen wie die entsprechenden Randabschnitte, also die  $\frac{1}{k}$ -fache Länge der entsprechenden Seite des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

Insbesondere haben also alle Elementardreiecke die gleichen Seitenlängen, sind damit kongruent untereinander, und, da diese im gleichen Verhältnis stehen wie beim Dreieck  $\triangle ABC$  sind sie auch alle ähnlich zu diesem.

Da der Ähnlichkeitsfaktor  $\frac{1}{k}$  beträgt, ist der Flächeninhalt eines jeden solchen Elementardreiecks genau das  $\frac{1}{k^2}$ -fache des Flächeninhalts des Dreiecks  $\triangle ABC$ . Da dieses vollständig in Elementardreiecke zerlegt wird, gibt es davon also genau  $k^2$  Stück,  $\square$ .

b) Da das  $n$ -Eck konvex ist, kann man es durch Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegen. Für jedes dieser Dreiecke führe man die Konstruktion aus Teilaufgabe a) durch.

Gegebenenfalls werden durch die Schnitte, die eines der Teildreiecke zerlegen, auch andere Teildreiecke und dortige Elementardreiecke zerlegt. Diese "fremden Schnitte" werden aber direkt durch Zusammenfassen der entsprechenden Teile zu den jeweiligen Elementardreiecken direkt wieder rückgängig gemacht.

Damit ist jedes der durch die Diagonalen des  $n$ -Ecks erzeugten "großen Teildreiecke" des  $n$ -Ecks in genau  $k^2$  Elementardreiecke, die mit einem Ähnlichkeitsfaktor von  $\frac{1}{k}$  ähnlich zum jeweiligen "großen Teildreieck" sind, zerlegt. Greift man sich nun aus jedem dieser "großen Teildreiecke" eines der dortigen Elementardreiecke heraus, so lässt sich daraus ein  $n$ -Eck, welches ähnlich zum Ausgangs- $n$ -Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor  $\frac{1}{k}$  ist, zusammenlegen.

Dies funktioniert aber unabhängig für jedes der  $k^2$  Elementardreiecke jeder Sorte, sodass man also  $k^2$  untereinander kongruente und zum Ausgangs- $n$ -Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor  $\frac{1}{k}$  ähnliche  $n$ -Ecke aus diesen zusammenlegen kann, ohne eines der Elementardreiecke doppelt zu verwenden oder übrig zu behalten,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 310934

Es sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von  $BA$  über  $A$  hinaus liege ein Punkt  $D$ , auf der Verlängerung  $CB$  über  $B$  hinaus ein Punkt  $E$ , und auf der Verlängerung von  $AC$  über  $C$  hinaus liege ein Punkt  $F$ .

Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck  $DEF$  gleichseitig sei.

Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets  $AD = BE = CF$  folgt.

In den gleichseitigen Dreiecken  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  sind alle Innenwinkel genau  $60^\circ$  groß. Also ist, da  $C$ ,  $B$  und  $E$  sowie  $D$ ,  $A$  und  $E$  in diesen Reihenfolgen jeweils auf einer Geraden liegen  $\angle DBE = \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Analog folgt auch  $\angle ECF = 120^\circ$  und  $\angle FAD = 120^\circ$ , sodass diese drei Winkel alle gleich groß sind.

Weiterhin ist  $\angle ADF = \angle FDE - \angle EDA = 60^\circ - \angle EDB = 180^\circ - 120^\circ - \angle EDB = 180^\circ - \angle DBE - \angle EDB = \angle BED$ , wobei letzteres aus der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle BED$  folgt. Analog folgt auch  $\angle ADF = \angle BED = \angle CFE$ .

Damit stimmen die Dreiecke  $\triangle BED$ ,  $\triangle CFE$  und  $\triangle ADF$  jeweils in zwei Winkeln und einer Seitenlänge ( $|DE| = |EF| = |FD|$ , da das Dreieck  $\triangle DEF$  n.V. gleichseitig ist) überein, sodass sie paarweise kongruent sind und die Längen entsprechender Seiten gleich groß sind, also insbesondere  $|AD| = |BE| = |CF|$  gilt,  $\square$ .

#### Aufgabe 5 - 310935

Man ermittle und zeichne in einem  $x, y$ -Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten  $(x; y)$  die Gleichung  $|x + y| + |x - y| = 4$  erfüllen.

Durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bzw. äquivalent einer Drehung um diesen um  $180^\circ$  geht jeder Punkt  $(x_P; y_P)$  in den Punkt  $(-x_P; -y_P)$  über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund der Beträge auch der zweite, und umgekehrt. Es genügt also die Figur im Bereich  $x \geq 0$  zu konstruieren und sie dann durch diese Punktspiegelung bzw. Drehung fortzusetzen, sodass wir o.B.d.A.  $x \geq 0$  annehmen können.

Weiterhin geht durch Spiegelung an der  $x$ -Achse jeder Punkt  $(x_P; y_P)$  in den Punkt  $(x_P; -y_P)$  über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung  $|x_P + y_P| + |x_P - y_P| = 4$ , dann wegen

$$|x_P - y_P| + |x_P + y_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P| = 4$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o.B.d.A. auch  $y \geq 0$  annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der  $x$ -Achse fortsetzen.

Schließlich geht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten jeder Punkt  $(x_P; y_P)$  in den Punkt  $(y_P; x_P)$  über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund

$$|y_P + x_P| + |y_P - x_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P|$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o.B.d.A.  $x \leq y$  annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten fortsetzen.

Zusammen haben wir also nun folgende Annahmen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen konnten:  $0 \leq x \leq y$ . Dann jedoch sind  $x + y$  und  $-(x - y)$  stets nichtnegativ, sodass die Gleichung übergeht in  $(x + y) + (y - x) = 4$  bzw.  $y = 2$ . Zu zeichnen ist also der Abschnitt der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $(0; 2)$ , für welchen die  $x$ -Koordinaten der auf ihm liegenden Punkte nichtnegativ und  $\leq 2$  sind, also die Strecke vom Punkt  $(0; 2)$  zum Punkt  $(2; 2)$ .

Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten erhält man die zusätzliche Strecke vom Punkt  $(2; 2)$  zum Punkt  $(2; 0)$ . Durch Spiegelung an der  $x$ -Achse setzt sich diese Strecke bis zum Punkt  $(2; -2)$  fort und man erhält als Spiegelung der ersten Teilstrecke noch die Strecke zwischen den Punkten  $(2; -2)$  und  $(0; -2)$ . Die Punktspiegelung/ Drehung um den Koordinatenursprung schließlich ergänzt die Figur, sodass man abschließend genau das Quadrat (bzw. genauer: dessen Rand) mit den Eckpunkten  $(\pm 2; \pm 2)$  als gesuchte Lösungsmenge erhält.

#### Aufgabe 6 - 310936

Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$  von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:

Es soll  $A$  links von  $B$ ,  $A$  links von  $C$ ,  $A$  links von  $D$ ,  $E$  links von  $F$ ,  $E$  links von  $G$ ,  $E$  links von  $H$ ,  $E$  links von  $J$  stehen.

Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?

Hinweise:

In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.

Die Formulierung " $X$  links von  $Y$ " schließt nicht aus, dass zwischen  $X$  und  $Y$  noch andere der Buchstaben stehen.

Wir unterteilen die neun Buchstaben in zwei Gruppen. Gruppe 1 enthält  $A, B, C$  und  $D$ , Gruppe 2 die übrigen fünf Buchstaben. Die Bedingungen vergleichen nur die Positionen von Buchstaben einer Gruppe miteinander, sodass jede beliebige Verteilung der neun Positionen auf die zwei Gruppen eine korrekte

Anordnung aller neun Buchstaben liefert, wenn innerhalb beider Gruppen die Bedingungen alle erfüllt sind.

Es gibt in Gruppe 1 insgesamt 6 mögliche Anordnungen, die die drei ihr zugehörigen Bedingungen erfüllt:  $A$  muss ganz links (unter diesen vier Elementen) stehen, während die Reihenfolge der drei übrigen Buchstaben dieser Gruppe beliebig ist, also dafür alle  $3! = 6$  Varianten möglich sind. Analog erhält man für Gruppe 2 nun  $4! = 24$  mögliche Anordnungen (da dort  $E$  unter diesen ganz links stehen muss, während sich die restlichen vier Buchstaben von Gruppe 2 beliebig anordnen lassen).

Die neun Positionen lassen sich auf  $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$  Arten auf die beiden Gruppen (ohne Beachtung der Reihenfolge der Verteilung der Positionen) verteilen. Für jede solche gibt es nun jeweils 6 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 1 untereinander auf den Positionen dieser Gruppe und jeweils 24 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 2 auf ihren Positionen untereinander, insgesamt also

$$126 \cdot 6 \cdot 24 = 126 \cdot 144 = 18144$$

mögliche Anordnungen.

*Aufgaben der III. Runde 1991 gelöst von cyrix*

## 2.34 XXXII. Olympiade 1992

## 2.34.1 I. Runde 1992, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 320911**

Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: "Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z.B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen."

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

Man kann, ohne dass (wie bei dem Taschenrechnerergebnis für 1:13) die Möglichkeit eines Rundungsfehlers zu berücksichtigen wäre,  $13 \cdot 76923 = 999999$  erhalten. Daraus folgt  $1000000 - 13 \cdot 76923 = 1$  und weiter

$$1 : 13 - 0,076923 = 0,000001 : 13$$

Also muss das Divisionsverfahren für die Aufgabe 1:13, nachdem es die Anfangsziffern 0,076923 erbracht hat, wieder mit denselben aufeinanderfolgenden Ziffern fortgesetzt werden, mit denen es begonnen hat.

Das heißt: der wahre Dezimalbruch für 1:13 ist der periodisch-unendliche Dezimalbruch  $0,\overline{076923}$ .

**Aufgabe 2 - 320912**

Drei natürliche Zahlen  $a, b, c$  mit  $0 < a \leq b < c$ , für die die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel  $a, b, c$  muss  $a \neq 1$  sein.

In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b) \quad (1)$$

Wäre  $a = 1$ , so wäre (1) für die ganzen Zahl  $c - b$  und  $c + b$ , die wegen  $0 < b < c$  positiv sind, nur für  $c - b = 1$  und  $c + b = 1$  möglich. Daraus folgte  $b = 0$  im Widerspruch zu  $0 < b$ . Also muss  $a \neq 1$  sein.

**Aufgabe 3 - 320913**

6						
5	■			■		
4						
3						
2	■			■		
1						
	a	b	c	d	e	f

Auf einem  $6 \times 6$ -Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, dass er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

- a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!  
 b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, dass es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, daß es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

7	2	5
4	■	8
1	6	3

Ein Teilfeld wie in der Abbildung kann auf dem Weg 1 - 2 - ... - 8 oder umgekehrt 8 - 7 - ... - 1 oder auf einem durch Spiegelung oder Drehung entstehenden Weg durch laufen werden.

- a) Daher ist z.B. das Durchlaufen der Teilfelder (links unten) - (links oben) - (rechts oben) - (rechts unten) so möglich, dass dabei jeweils in den Teilfeldern (a1 - ... - c2) - (b4 - ... - c6) - (d4 - ... - f5) - (e3 - ... - f1) auftreten.

b) Ebenso ist beispielsweise der Weg (c1 - ... - b3) - (a5 - ... - c4) - (d6 - ... - e4) - (f2 - ... - d3) - c1 möglich.

c) Denkt man sich die Felder wie auf einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, so besteht jeder Weg eines Springer abwechselnd aus schwarzen und weißen Feldern. Von seinen 32 Feldern müssen also 16 schwarz und 16 weiß sein.

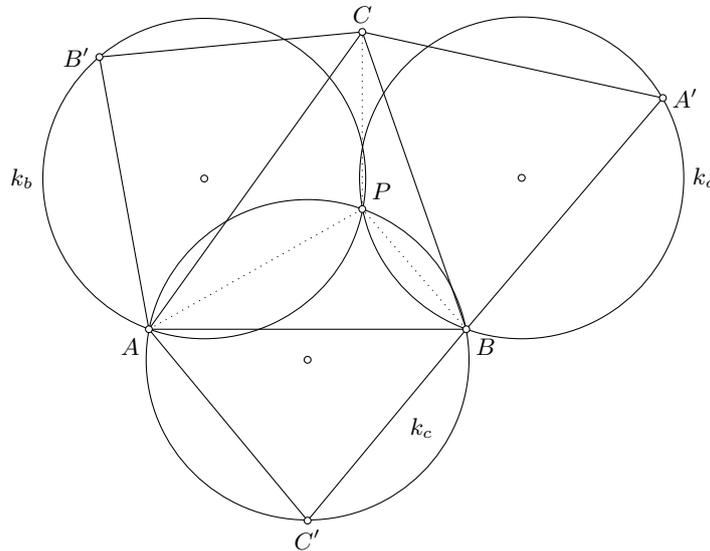
Besetzt man daher vier Felder so, dass nicht je 16 schwarze und weiße Felder frei bleiben, so existiert kein Weg der genannten Art. Beispielsweise wird dies erreicht, wenn a1, a3, c1, c3 als besetzte Felder gewählt werden.

#### Aufgabe 4 - 320914

Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks  $ABC$  werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von  $ABC$  ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck  $ABC$  der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

*Hinweis:* Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks  $ABC$  noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks  $ABC$ .



Die Innenwinkelgrößen des Dreiecks  $ABC$  seien wie üblich mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet. Die über  $BC, CA$  bzw.  $AB$  errichteten Dreiecke seien  $BCA', CAB'$  bzw.  $ABC'$ , ihre Umkreise  $k_a, k_b, k_c$ .

Nach dem Hinweis schneiden sich  $k_a$  und  $k_b$  außer in  $C$  in einem Punkt  $P$ , der im Innern des Dreiecks  $ABC$  liegt.

Nach Definition von  $BCA', CAB'$  und da  $CPBA'$  und  $CPAB'$  Sehnenvierecke sind, gilt

$$\angle CPB = 180^\circ - \alpha \quad , \quad \angle CPA = 180^\circ - \beta$$

Daraus sowie aus dem Innenwinkelsatz und der Definition von  $ABC'$  folgt

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta \\ &= 180^\circ - \gamma = 180^\circ - \angle AC'B \end{aligned}$$

Also ist auch  $APBC'$  ein Sehnenviereck; d.h.,  $P$  liegt auf dem Umkreis  $k_c$  von  $ABC'$ ; d.h.,  $k_a, k_b$  und  $k_c$  schneiden sich in dem Punkt  $P$ .

*Lösungen der I. Runde 1992 übernommen von [5]*

## 2.34.2 II. Runde 1992, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 320921**

Ein pythagoreisches Zahlentripel  $(a; b; c)$  besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen  $a, b, c$ , für die  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.

- a) Geben Sie drei verschiedene Tripel  $(a; b; c)$  mit  $a \leq b$  an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!  
 b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit  $a = b$ ?

- a) Offensichtlich ist für jedes natürliche  $n > 0$  das Tripel  $(3n; 4n; 5n)$  wegen

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

ein pythagoreisches.

- b) Wäre  $a = b$ , so also  $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , also  $2 = \frac{c^2}{a^2}$  mit  $\sqrt{2} = \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$ , was ein Widerspruch ist.

**Aufgabe 2 - 320922**

In der Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.

- a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?  
 b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Es seien  $a, b, c, d$  die vier Geraden.

- a) Wenn keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, dann besitzen  $a$  und  $b$ ,  $a$  und  $c$ ,  $a$  und  $d$ ,  $b$  und  $c$ ,  $b$  und  $d$  sowie  $c$  und  $d$  jeweils einen Schnittpunkt, der von den übrigen verschieden ist. Da zwei verschiedene Geraden nur höchstens einen Punkt gemein haben können, ist dies also die Maximalzahl möglicher verschiedener Schnittpunkte.

- b) Wir haben gerade gesehen, dass sich genau 6 Schnittpunkte erzeugen lassen, indem keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem Punkt schneiden.

Sind  $a$  und  $b$  parallel, aber  $c$  und  $d$  weder zueinander noch zu  $a$  (und  $b$ ) parallel, haben  $c$  und  $d$  mit  $a$  und  $b$  je zwei Schnittpunkte. Ist der Schnittpunkt von  $c$  und  $d$  keiner dieser vier, so gibt es insgesamt 5. Sind in der Konstruktion von eben nun  $c$  und  $d$  doch parallel, so gibt es nur die vier Schnittpunkte mit den Parallelen  $a$  und  $b$ .

Sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  paarweise parallel zueinander,  $d$  aber nicht, so schneiden sich  $a$ ,  $b$  und  $c$  paarweise nicht, während jede von diesen mit  $d$  genau einen Schnittpunkt besitzt, wobei keine zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen, es also insgesamt genau 3 gibt.

Sind alle vier Geraden paarweise parallel zueinander, so gibt es gar keinen, also 0, Schnittpunkte.

Verlaufen alle vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt  $P$ , gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich  $P$ . Weitere kann es nicht geben, da zwei verschiedene Geraden sich in höchstens einem Punkt schneiden.

Bleibt noch zu zeigen, dass genau zwei Schnittpunkte nicht möglich sind:

Angenommen, es gäbe eine solche Konstellation. Dann können die drei Geraden  $a$ ,  $b$  und  $c$  nicht paarweise parallel zueinander sein, da es sonst (s.o.) mit  $d$  genau 0 oder genau 3 Schnittpunkte gäbe.

Auch können sie sich nicht in einem gemeinsamen Punkt  $P$  schneiden, da es sonst (wenn  $d$  durch  $P$  verläuft) genau 1 oder (wenn  $d$  nicht durch  $P$  verläuft) genau  $1 + 3 = 4$  Schnittpunkte geben würde. Auch können die drei Geraden nicht paarweise nicht parallel sein, da aus dem Zusammenfallen von zwei ihrer drei Schnittpunkte sofort folgen würde, dass der dritte mit diesem auch identisch ist, man sich also im vorherigen Fall befindet.

Also sind von den drei Geraden  $a$ ,  $b$  und  $c$  genau zwei parallel und die dritte dazu nicht parallel. O.B.d.A. sei  $a \parallel b$  und  $b \not\parallel c$ . Analog kann man nun die drei Geraden  $b$ ,  $c$  und  $d$  betrachten, von denen wieder zwei parallel und die dritte nicht dazu parallel sein muss. Im Fall  $b \parallel d$  erhalten wir den Widerspruch  $a \parallel b \parallel d$  analog oben mit genau 3 Schnittpunkten und im verbleibenden Fall  $c \parallel d$  erhält man genau 4 Schnittpunkte (s.o.), also auch nicht genau 2.

Es lässt sich also jede Schnittpunktzahl von 0 bis 6 mit Ausnahme der 2 realisieren.

**Aufgabe 3 - 320923**

Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.

Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?

Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Es sei  $V$  das Volumen der noch nachzutankenden Menge in Litern.

Dann soll also  $\frac{1}{34} \cdot V = \frac{1}{51} \cdot (V + 7)$  gelten, also  $(\frac{1}{34} - \frac{1}{51}) \cdot V = \frac{7}{51}$ .

Es ist  $51 = 3 \cdot 17$  und  $34 = 2 \cdot 17$ , also geht die Gleichung durch Multiplikation mit  $17 \cdot 6$  über in  $(3 - 2) \cdot V = 7 = 14$ , sodass genau (auf beliebig viele Stellen nach dem Komma) 14 Liter vom 1 : 33-Gemisch nachzutanken sind.

**Aufgabe 4 - 320924**

Auf einer Geraden  $g$  seien  $A, B, C$  drei Punkte;  $B$  liege zwischen  $A$  und  $C$ .

Über der Strecke  $AC$  sei nach einer Seite von  $g$  das gleichseitige Dreieck  $ACP$  errichtet, über die Strecken  $AB$  und  $BC$  nach der anderen Seite von  $g$  die gleichseitigen Dreiecke  $ABQ$  und  $BCR$ .

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen  $AB = a$  und  $BC = b$ ) die Mittelpunkte  $L, M$  bzw.  $N$  der Dreiecke  $ACP, ABQ$  und  $BCR$  stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass  $A$  im Punkt  $(-a, 0)$ ,  $B$  im Koordinatenursprung und  $C$  im Punkt  $(b, 0)$  liegt.

In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge  $s$  besitzt die Höhe genau die Länge  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$  und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt wird, sodass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von  $\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot s$ .

Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte  $L, M$  und  $N$  demnach die Koordinaten  $(\frac{b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b))$ ,  $(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a)$  bzw.  $(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b)$ .

Es ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras die Quadrate der Streckenlängen zwischen je zwei dieser Punkte zu

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a+b)\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{9b^2 + 12a^2 + 12ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \\ |LN|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{9a^2 + 3a^2 + 12ab + 12b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \text{ und} \\ |MN|^2 &= \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 + 3a^2 - 6ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

sodass  $|LM| = |LN| = |MN| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$  gilt und damit das Dreieck  $\triangle LMN$  gleichseitig ist,  $\square$ .

*Aufgaben der II. Runde 1992 gelöst von cyrix*

## 2.34.3 III. Runde 1992, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 320931**

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.

Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner  $A$ ,  $B$  und  $C$  dieses Landes gehört:

$A$  sagt zu  $B$ : "Wenn  $C$  ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."

$C$  sagt zu  $A$ : "Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?

Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann  $A$ ,  $B$  und  $C$ ?

Wir betrachten zuerst  $C$  und seine Aussage. Wäre er ein Schurke, so also auch  $A$ , der mit seiner Aussage also eine falsche Aussage getroffen hätte. Nun ist aber die Voraussetzung "Wenn  $C$  ein Edelmann ist" seiner Aussage nicht erfüllt, diese also automatisch immer wahr, was ein Widerspruch ist.

Also kann in einem solchen Gespräch  $C$  kein Schurke, muss also ein Edelmann sein. Dann jedoch ist seine Aussage wahr und  $A$  ein Schurke. Dessen Aussage ist damit falsch, sodass (aufgrund der diesmal erfüllten Voraussetzung der Aussage von  $A$ ) auch  $B$  ein Edelmann sein muss.

In dieser Konstellation kann das Gespräch stattgefunden haben und es ist eindeutig bestimmt, welcher Sorte jeweils  $A$ ,  $B$  und  $C$  angehören, nämlich  $B$  und  $C$  den Edelmannern und  $A$  den Schurken.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 2 - 320932**

Wieviele Paare  $(x, y)$  natürlicher Zahlen für die  $10x + y < 1993$  gilt, gibt es insgesamt?

Für diese Aufgabe wird vorausgesetzt, dass 0 eine natürliche Zahl ist.

Dann gibt es für jedes natürliche  $x \leq 199$  genau  $1993 - 10x$  verschiedene Möglichkeiten  $y$  zu wählen (nämlich 0 bis  $1993 - 10x - 1$ ), sodass die Ungleichung erfüllt ist. Summieren wir dies über alle  $x$ , so erhalten wir also insgesamt

$$\sum_{x=0}^{199} (1993 - 10x) = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \sum_{x=0}^{199} x = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} = 200 \cdot 1993 - 1990 \cdot 100 = 199600$$

Paare natürlicher Zahlen, die die Ungleichung aus der Aufgabenstellung erfüllen.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 3 - 320933**

Gegeben ist eine Gerade  $g$  und auf ihr drei Punkte  $A, B, C$ , in dieser Reihenfolge angeordnet.

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen  $a = AB$ ,  $b = BC$  den Radius eines Kreises  $k$ , der durch  $A$  und  $B$  geht und eine durch  $C$  gehende Tangente besitzt, die auf  $g$  senkrecht steht!

b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis  $c$  um  $C$  gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von  $C$  an alle diejenigen Kreise  $k$  gelegt werden, die durch  $A$  und  $B$  gehen!

a) Da  $k$  durch  $A$  und  $B$  verläuft, liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von  $AB$ . Diese ist parallel zu der durch  $C$  gehenden Senkrechten zu  $g$ , welche im Abstand  $r := b + \frac{a}{2}$  zu dieser liegt. Es sei  $P$  der Berührungspunkt von  $k$  mit dieser Senkrechten.

Dann ist der Berührungsradius  $MP$  senkrecht auf der Tangenten, sodass diese Strecke genau das Lot von  $M$  auf die Tangenten ist, also die Länge  $r$  hat. Damit gilt  $|MP| = r$ , sodass der Radius von  $k$  genau den Wert  $r = b + \frac{a}{2}$  besitzt.

b) Es sei  $P$  ein Berührungspunkt eines Kreises  $k$  durch  $A$  und  $B$  mit einer Tangenten durch  $C$ . Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist dann  $|CP|^2 = |CA| \cdot |CB| = (a + b) \cdot b$ , also mit  $r := \sqrt{(a + b) \cdot b}$  schließlich  $|CP|^2 = r^2$  bzw.  $|CP| = r$ .

Dabei ist  $r$  vom gewählten Kreis  $k$  unabhängig, sodass all diese Berührungspunkte auf dem Kreis  $c$  um  $C$  mit Radius  $r$  liegen,  $\square$ .

Aufgabe gelöst von cyrix

**Aufgabe 4 - 320934**

Ist  $p$  eine Primzahl, so sei  $M_p$  die Menge aller derjenigen Zahlen  $z$ , die sich mit positiven ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  in der Gestalt  $z = x^2 + p \cdot y^2$  darstellen lassen.

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl  $p$  die folgende Aussage (\*) gilt!

Wenn eine Zahl  $z$  der Menge  $M_p$  angehört, dann gehört auch die Zahl  $z^2$  der Menge  $M_p$  an. (\*)

Es sei  $z \in M_p$ , sodass es also positive ganze Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $z = x^2 + p \cdot y^2$  gibt. Dann ist

$$z^2 = x^4 + 2px^2y^2 + p^2y^4 = x^4 - 2px^2y^2 + p^2y^4 + 4px^2y^2 = |x^2 - py^2|^2 + p \cdot (2xy)^2$$

Offensichtlich sind mit  $x$  und  $y$  auch  $|x^2 - py^2|$  und  $2xy$  ganze Zahlen. Mit  $x, y > 0$  ist auch  $2xy > 0$ .

Nach Definition ist  $|x^2 - py^2| \geq 0$ . Es kann aber nicht  $x^2 - py^2 = 0$  gelten, da sonst  $p = \frac{x^2}{y^2}$ , also  $\sqrt{p} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$  folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Also ist  $x^2 - py^2 \neq 0$  und damit  $|x^2 - py^2| > 0$ , sodass auch  $z^2 \in M_p$  folgt,  $\square$ .

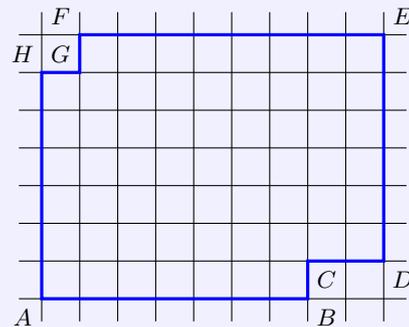
Aufgabe gelöst von cyrix

**Aufgabe 5 - 320935**

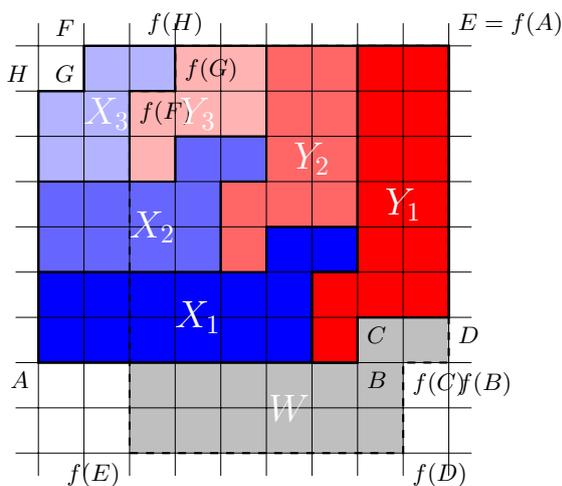
Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Käros) ist ein Achteck  $ABCDEFGH$  wie in der Abbildung gezeichnet.

Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei  $A$  mit  $E$  zur Deckung kommt.

Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.



Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!



Angenommen das Achteck  $Z := ABCDEFGH$  ist in zwei Flächen  $X, Y$  mit den geforderten Eigenschaften zerlegt, wobei  $A \in X$  und  $E \in Y$ . Es sei  $f$  diejenige (affin lineare) Abbildung, durch die  $X$  mit  $Y$  zur Deckung kommt und die  $f(A) = E$  erfüllt.

$f$  muss das Kästchen links unten in  $Z$  (das mit der Ecke  $A$ ) auf das Kästchen rechts oben in  $Z$  (das mit der Ecke  $E$ ) abbilden, wobei  $f(A) = E$ . Es gibt nur zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft, die in Frage kommen:

- eine ist die Drehung um  $180^\circ$  um den Mittelpunkt der Strecke  $AE$ ,
- die andere erhält man, indem man  $Z$  zuerst parallel verschiebt, so dass der Punkt  $A$  auf  $E$  zu liegen kommt und anschließend an derjenigen Gerade spiegelt, die  $Z$  nur im Punkt  $E$  schneidet und mit  $EF$  einen Winkel von  $45^\circ$  einschließt.

$f$  kann nicht die Drehung sein, denn dann wäre  $f \circ f = \text{id}$  und somit hätte  $Z = X \cup Y = X \cup f(X) = f \circ f(X) \cup f(X) = f(f(X) \cup X) = f(Z)$  eine Punktsymmetrie.

Also muss  $f$  die andere genannte Abbildung sein. Da die Abbildung  $f$  bijektiv ist und  $X$  auf  $Y$  abbildet, muss gelten: (1): Für alle Punkte  $p \in Z$  gilt  $f(p) \in Y$  genau dann, wenn  $p \in X$  gilt.

Es sei  $f(Z)$  das Achteck  $f(A)f(B)f(C)f(D)f(E)f(F)f(G)f(H)$ , dass man erhält, wenn man  $f$  auf das Achteck  $Z = ABCDEFGH$  anwendet.

Es sei  $W := f(Z) \setminus Z$ . Für jeden Punkt  $p \in Z = X \cup Y$  mit  $f(p) \in W$  gilt dann insbesondere  $f(p) \notin Y$  und nach (1) gilt somit  $p \in Y$ .

Daher ist die Menge  $Y_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in W\}$  eine Teilmenge von  $Y$ .

Wiederum nach (1) muss dann die Menge  $X_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_1\}$  eine Teilmenge von  $X$  sein.

Als nächstes betrachten wir  $Y_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_1\}$ . Wieder folgt aus (1), dass  $Y_2$  eine Teilmenge von  $Y$  ist.

Somit ist auch  $X_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_2\}$  eine Teilmenge von  $X$ .

Schließlich sei  $Y_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_2\} \subset Y$  und  $X_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_3\} \subset X$ .

Wir stellen fest, dass  $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$  bis auf einige Gitterlinien schon ganz  $Z$  ist.

Also muss  $X$  der Abschluss von  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$  sein und  $Y$  der Abschluss von  $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$  sein.

Tatsächlich erfüllen die so konstruierten Flächen alle gewünschten Eigenschaften. Damit ist sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von  $X, Y$  bewiesen.

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

### Aufgabe 6 - 320936

a) Geben Sie drei ganze Zahlen  $x, y$  und  $z$  an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \quad (1)$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel  $(x, y, z)$  ganzer Zahlen  $x, y, z$ , die die Gleichung (1) erfüllen!

Es ist

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z + 89,$$

also (1) äquivalent zu

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 - 89 - 57 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 146 = (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2$$

Es ist  $146 = 12^2 + 1^2 + 1^2$ , sodass man etwa  $x-2 = 12$ ,  $y+6 = z-7 = 1$ , also  $(x, y, z) = (14, -5, 8)$  wählen kann, was eine Lösung der Ausgangsgleichung liefert und Teilaufgabe a) löst.

Für b) stellen wir fest, dass die Anzahl der ganzzahligen Lösungen  $(x, y, z)$  der Ausgangsgleichung offenbar genau der Anzahl der ganzzahligen Lösungen  $(a, b, c)$  der Gleichung  $146 = a^2 + b^2 + c^2$  entspricht, da man aus jeder Lösung der einen eindeutig eine Lösung der anderen via  $x-2 = a$ ,  $y+6 = b$  und  $z-7 = c$  erhält.

Es lässt sich die Zahl 146 auf ausschließlich folgende Weisen (ohne Beachtung der Reihenfolge) als Summe von drei Quadratzahlen darstellen:

$$146 = 144 + 1 + 1 = 121 + 25 + 0 = 121 + 16 + 9 = 81 + 64 + 1 = 81 + 49 + 16$$

Für die letzten drei Darstellungen gibt es je 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden und unabhängig voneinander jeweils beide Wahlen für die Vorzeichen von  $a, b$  und  $c$ , also jeweils  $6 \cdot 2^3 = 48$  Lösungen; für beide Darstellungen insgesamt also 144 Lösungen.

Für die zweite Darstellung  $146 = 121 + 25 + 0$  gibt es wieder 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden, aber nur noch für die von Null verschiedenen Quadrate je zwei mögliche Vorzeichen, also für diese Darstellung  $6 \cdot 2^2 = 24$  Lösungen.

Und für die erste Darstellung gibt es wieder für jede der Variablen zwei mögliche Vorzeichen, dafür aber nur 3 mögliche Reihenfolgen der Summanden, also  $3 \cdot 2^3 = 24$  Lösungen.

Insgesamt besitzt also  $146 = a^2 + b^2 + c^2$  genau  $144 + 24 + 24 = 192$  verschiedene ganzzahlige Lösungstriplets, sodass dies auch die gesuchte Anzahl an Lösungen für die Ausgangsgleichung (1) ist.

*Aufgabe gelöst von cyrix und Marcel Seifert*

**2.35 XXXIII. Olympiade 1993****2.35.1 I. Runde 1993, Klasse 9**

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

**Aufgabe 1 - 330911 = 331011**

Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

**Aufgabe 2 - 330912 = 331012**

Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl  $z = 2 \cdot 7^6$  hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von  $z$  unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7,  $7^2$ ,  $7^3$ ,  $7^4$ ,  $7^5$ ,  $7^6$  sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl  $2 \cdot 7 = 14$ .

**Aufgabe 3 - 330913 = 331013**

Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen  $t$  ist  $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$  eine rationale Zahl, für welche nicht?

I Für  $t = 0$  ist  $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$ , also eine rationale Zahl.

II Angenommen, für eine ganze Zahl  $t > 0$  wäre  $z$  rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen  $z^2 = t + \sqrt{t}$  und somit  $\sqrt{t} = z^2 - t$  rationale wären.

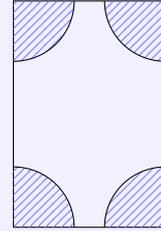
Also wäre  $t = m^2$  mit einer positiven ganzen Zahl  $m$ . Mit dieser wäre demnach  $z = \sqrt{m^2 + m}$ , woraus ebenso folgt, dass auch  $m^2 + m$  eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen  $m^2 < m^2 + m < (m+1)^2$  liegt aber  $m^2 + m$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme,  $z$  wäre rational, falsch war; d.h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen  $t > 0$  ist  $z$  keine rationale Zahl.

**Aufgabe 4 - 330914 = 331014**

Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen  $a, b$  sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius  $r$  haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).



- a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , zu denen es Längen  $a, b, r$  der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau  $x$  Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!
- b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniszahlen  $k = \frac{b}{a} \geq 1$ , für die es möglich ist, einen Radius  $r$  der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Die von  $a, b, r$  zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o.B.d.A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass  $0 < a \leq b$  gilt, so erfüllt  $r$  die Ungleichung  $0 < r < \frac{a}{2}$ .

- a) I. Wenn  $x$  eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau  $x$  Prozent der Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius  $r$ , also gleich  $\pi r^2$ . Da dies  $x$  Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \quad (1)$$

Wegen  $0 < a \leq b$  und der Voraussetzung  $0 < r < \frac{a}{2}$  folgt  $0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$

- II. Wenn  $0 < x < 25\pi$  gilt, so folgt: Für beliebiges  $a > 0$  für  $b = a$  und  $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$  ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass  $a, b, r$  Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau  $x$  Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen  $x$  sind genau alle reellen Zahlen  $x$  mit  $0 < x < 25\pi$  ( $\approx 78,5398$ ).

- b) I. Wenn für einen Wert  $k = \frac{b}{a} \geq 1$  vier Viertelkreise mit einem Radius  $r < \frac{a}{2}$  genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius  $r$ , also  $ab = 2\pi \cdot r^2$  (2).

Wegen  $r < \frac{a}{2}$  folgt  $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$  und damit  $1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

- II. Wenn  $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$  gilt, so folgt: Für Längen  $a, b, > 0$  mit  $\frac{b}{a} = k$  und  $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$  ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

so dass  $a, b, r$  Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen  $k$  sind genau alle reellen Zahlen  $x$  mit  $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$  ( $\approx 1,5708$ )

**Aufgabe 5 - 330915 = 331015**

Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszyinders mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$  seien  $A$  und  $B$  die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege  $A$  außerhalb und  $B$  innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

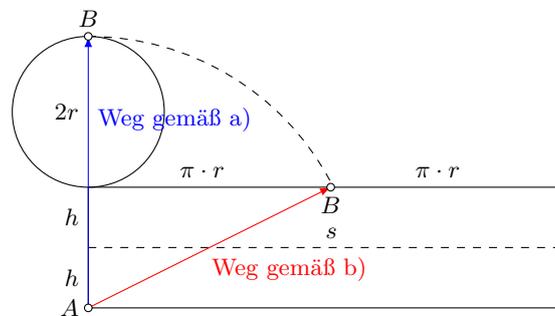
Eine Ameise bewegt sich von  $A$  nach  $B$

- nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,
- auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von  $A$  nach  $B$  gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses  $h : r$ , für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Der in a) beschriebene Weg hat die Länge  $2h + 2r$ .

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch  $A$  gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke  $s$  der Länge  $2\pi \cdot r$  über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke  $s$  als Drehachse in die Vorderseite der Zeichenebene hineindreht, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen  $2h$  und  $2\pi \cdot r$ , in dem  $A$  eine Ecke und  $B$  der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die  $A$  nicht enthält und  $2\pi \cdot r$  lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von  $A$  nach  $B$  muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 4^2 + 8hr + 4r^2 &= 4h^2 + \pi^2 r^2 \\ 8h &= (\pi^2 - 4) \cdot r \end{aligned}$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad (\approx 0,7337)$$

### Aufgabe 6 - 330916 = 331016

Bekanntlich gilt  $2^{10} = 1024$ .

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponenten  $p > 10$  ermitteln kann, für den die Zahl  $2^p$  ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

*Hinweis:* Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel:

```
10 P = 10
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P
```

Zu Werten des Exponenten  $p$  werden die letzten drei Ziffern der Potenz  $2^p$  in Gestalt einer ganzen Zahl  $z$  mit  $0 \leq z \leq 999$  gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten  $p = 10, z = 024$  (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird  $p$  um 1 erhöht (Zeile 30) und  $z$  verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 1000 zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert  $z$  schon  $0 \leq z < 100$  galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert  $2 \cdot z < 2000$ , und galt für ihn außerdem  $1000 \leq 2 \cdot z$ , so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder  $0 \leq 2 \cdot z - 1000 < 1000$ .

Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen  $2^p$  vermieden, wie es nach dem "Hinweis" erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge  $z = 024$  nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten  $p$  (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine "Endlos-Schleife" auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines "Probelaufs mit Risiko" erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten  $p = 110$  finden); man kann auch beweisen, dass für jedes  $p \geq 3$  die Ziffernfolge der drei Endziffern von  $2^p$  bei einem größeren  $p$  wiederkehren muss.

*Lösungen der I. Runde 1993 übernommen von [5]*

## 2.35.2 II. Runde 1993, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 330921**

Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.

Wie heißt die dreistellige Zahl?

Die gesuchte Zahl sei  $[abc]$ .

Die letzte Ziffer des Ergebnisses kann nur 8 sein, wenn mit einer  $c = 4$  multipliziert wurde. Alle Produkte von 7 mit einer anderen einstelligen Zahl enden mit einer anderen Ziffer.

Der Zehner 3 enthält damit aus dem Produkt  $7 \cdot 4 = 28$  einen Übertrag 2. Somit muss  $b = 3$  sein. Analog schließt man auf  $a = 2$ . Die gesuchte Zahl ist 234 und es ist  $234 \cdot 7 = 1638$ .

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 2 - 330922**

Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke  $A$  und  $B$  eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk  $A$  mahlen würde und anschließend nur mit  $B$ , so würde  $B$  noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.

Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit  $A$  gemahlen und anschließend nur mit  $B$ , so würde  $B$  noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn  $A$  und  $B$  von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Es seien  $x$  und  $y$  die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1$$

mit der Lösung  $x = 20, y = 30$ . Arbeiten beide  $t$  Stunden zusammen, wird damit  $\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$  mit der Lösung  $t = 12$ . Beide Mahlwerke benötigen 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 3 - 330923**

$$\begin{array}{rcccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für  $M$ ,  $R$  und  $K$ ) nicht die Ziffer Null auftreten darf.

Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:

1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens  $O$  mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe  $O$  darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

a)

$$\begin{array}{rcccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

b) Man kann aus der in a) gefundenen Lösung insgesamt  $2^4 = 16$  Lösungen erhalten, indem man unabhängig voneinander folgende Entscheidungen trifft, die aus einer Lösung eine weitere erzeugen:

- \*) Ziffern von  $O$  und  $A$  tauschen (oder nicht)
- \*) Ziffern von  $D$  und  $B$  tauschen (oder nicht)
- \*) Ziffern von  $(O$  und  $A)$  mit denen von  $(D$  und  $B)$  tauschen (oder nicht)
- \*) Ziffern von  $R$  und  $U$  tauschen (oder nicht).

Jede solche Tauschoperation erzeugt aus einer gültigen Lösung des Kryptogramms eine gültige Lösung. Auch sind je zwei dieser so erzeugten 16 Lösungen verschieden, da sie sich in wenigstens einer Ziffernzuweisung unterscheiden.

Es gibt also mindestens 16 und damit auch mindestens 15 verschiedene Lösungen,  $\square$ .

Bemerkung: Eine vollständige Fallunterscheidung bei der Konstruktion dieser Lösungen zeigt, dass dies tatsächlich alle Lösungen des Kryptogramms sind.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### **Aufgabe 4 - 330924**

Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck  $ABC$  die folgende Aussage gilt! Ist  $X$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $BC$  mit der Winkelhalbierenden durch  $A$  und ist  $Y$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $AC$  mit der Winkelhalbierenden durch  $B$ , so liegen die vier Punkte  $A, B, X, Y$  auf einem gemeinsamen Kreis.

Nach dem Südpolsatz liegen  $X$  und  $Y$  auf dem Umkreis des Dreiecks  $\triangle ABC$ , also insbesondere damit auch auf einem gemeinsamen Kreis mit  $A$  und  $B$ ,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.35.3 III. Runde 1993, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 330931**

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Es sei  $n \neq 0$  eine natürliche Zahl. Wir betrachten:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Stellt man diese Gleichung um

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

so erhält man für jedes  $n > 0$  eine Darstellung für den Stammbruch  $\frac{1}{n}$  als Summe zweier verschiedener Stammbrüche, also das Gesuchte.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 2 - 330932**

Für jede positive ganze Zahl  $n$  denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl  $n'$  gebildet: Aus der Zifferndarstellung von  $n$  im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.

Dann sei  $n'$  die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen  $n$  gibt, für die  $n' = n : 7$  gilt!

Wir schreiben  $n$  in der Form  $n = a \cdot 10^x + b$ , wobei  $a \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $x, b \in \mathbb{N}$  und  $b < 10^x$  sei. Dann ist  $n' = 10b + a$ .

Damit  $n' = n : 7$ , also  $7 \cdot (10b + a) = a \cdot 10^x + b$  gilt, muss demnach  $a(10^x - 7) = 69b$  gelten.

Wir wählen  $a = 1$  und suchen ein  $x \in \mathbb{N}$ , für das  $10^x - 7$  durch  $69 = 3 \cdot 23$  teilbar ist. Da  $10^x - 7 \equiv 1^x - 1 \equiv 0 \pmod{3}$  immer erfüllt ist, genügt es ein  $x$  zu finden mit  $10^x \equiv 7 \pmod{23}$ . Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt  $1 \equiv 10^{22} \pmod{23}$ . Multiplikation mit 7 liefert  $7 \equiv (7 \cdot 10) \cdot 10^{21} \equiv 10^{21} \pmod{23}$ . Also können wir  $x = 21$  wählen.

Für  $b = \frac{10^x - 7}{69}$  gilt offenbar  $b < 10^x$ , so dass wir schließen können, dass  $n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}$  eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

*Aufgabe gelöst von Nuramon*

**Aufgabe 3 - 330933 = 331033**

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge  $s$  gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  mit der Seitenlänge  $s$ . Dann konstruiere man den Mittelpunkt  $D$  von  $AB$  und verlängere die Strecke  $DC$  über  $C$  hinaus.

Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge  $\frac{s}{6}$  ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit  $M_7, M_8, M_9, \dots$  bezeichnet.

Für  $n > 6$  ist dann jeweils der durch  $A$  und  $B$  gehende Kreis um  $M_n$  näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen  $n$ -Ecks der Seitenlänge  $s$ .

Beate behauptet, speziell für  $n = 12$  gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.

Beweisen Sie diese Behauptung!

Nach Konstruktion ist die Gerade  $DC$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $AB$ . Damit ist  $DC$  auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABC$ , sodass  $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$  gilt.

Insbesondere ist das Dreieck  $\triangle ADM_{12}$  rechtwinklig bei  $D$  und besitzt die Kantenlängen  $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$  und

$$D_{M_{12}} = |DC| + (12 - 6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch  $|BM_{12}| = |AM_{12}|$ .

Es sei  $\alpha = \angle AM_{12}B$ . Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck  $\triangle ABM_{12}$  an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_{12}| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos \alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2 + \sqrt{3})s^2 + (2 + \sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2 + \sqrt{3})s^2 \cdot \cos \alpha$$

sowie  $1 = 2(2 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \cos \alpha)$ , also

$$1 - \cos \alpha = \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 \cdot (4 - 3)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$ . Da für  $\alpha$  als Innenwinkel eines Dreiecks  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  gilt und der Cosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also  $\angle AM_{12}B = \alpha = 30^\circ = \frac{1}{12} \cdot 360^\circ$  der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass  $M_{12}$  der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem  $AB$  eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge  $|AB| = s$  besitzt,  $\square$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

#### Aufgabe 4 - 330934

$$\begin{array}{rcccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline = & F & \ddot{U} & N & F \end{array}$$

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für  $Z$ ,  $D$  und  $F$ ) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:

Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

a)

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 4 & 3 \\ + & 5 & 7 & 4 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 6 \end{array}$$

b) In der Lösung aus a) können  $Z$  und  $D$  sowie unabhängig davon  $W$  und  $R$  vertauscht werden, sodass man drei weitere Lösungen erhält.

Schließlich gibt es die davon (wegen  $N = 0 \neq 8$ ) verschiedene Lösung

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 7 & 5 & 3 \\ + & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 0 & 6 \end{array}$$

für welche die gleichen Vertauschungen auch möglich sind, sodass es mindestens 8 verschiedene Lösungen, also insbesondere mehr als 5 verschiedene gibt.

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 5 - 330935**

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen  $n$  mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen  $n + 1$ ,  $n + 10$  und  $n + 55$  einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Sei  $g$  ein gemeinsamer Teiler der drei Zahlen. Dann ist auch  $g$  ein Teiler von  $(n + 10) - (n + 1) = 9$ . Damit die drei Zahlen also einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben, müssen sie alle drei durch 3 teilbar sein. Dies ist genau für  $n = 3m - 1$  mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl  $m$  der Fall, denn dann ist  $n + 1 = 3m$ ,  $n + 10 = 3m + 9 = 3(m + 3)$  und  $n + 55 = 3m + 54 = 3(m + 18)$ ; sonst ist keine der Zahlen durch 3 teilbar, sodass insbesondere  $n + 10$  und  $n + 1$ , also auch alle drei Zahlen gemeinsamen, teilerfremd sind. Die gesuchten Zahlen sind also die der Form  $3m - 1$  mit positiven ganzen Zahlen  $m$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 6 - 330936**

Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck  $ABCD$  die folgende Aussage gilt:

Sind  $M_1, M_2, M_3, M_4$  die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CD, DA$  und  $M_5, M_6$  die Mittelpunkte der Diagonalen  $AC, BD$  so gehen die drei Strecken  $M_1M_3, M_2M_4$  und  $M_5M_6$  durch einen gemeinsamen Punkt.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  sind.

Wir stellen zuerst fest, dass genau im Fall, dass  $ABCD$  ein Parallelogramm ist, die Mittelpunkte  $M_5$  und  $M_6$  beider Diagonalen zusammenfallen und somit keine echte Strecke  $M_5M_6$  existiert. In diesem Fall jedoch sind die Mittellinien  $M_1M_3$  und  $M_2M_4$  jeweils parallel zu den Seitenkanten des Parallelogramms und verlaufen durch die Mittelpunkte der Seiten, schneiden sich also auch im Diagonalschnittpunkt  $M_5 = M_6$ , sodass die Behauptung für diesen Fall als gezeigt gelten kann.

Sei ab nun  $ABCD$  ein konvexes Nicht-Parallelogramm. Dann fallen die Punkte  $M_5$  und  $M_6$  nicht zusammen (sowie auch keine weiteren der Mittelpunkte  $M_1$  bis  $M_4$  verschiedener Seiten, auch nicht mit  $M_5$  oder  $M_6$ , die echt im Innern des konvexen Vierecks liegen).

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma:

Verbindet man im echten Dreieck  $\triangle PQR$  die Mittelpunkte  $X$  von  $PQ$  und  $Y$  von  $PR$  miteinander, so ist die entstehende Strecke  $XY$  parallel zur Strecke  $QR$ .

Beweis: Dies zeigt direkt die Umkehrung des Strahlensatzes (von  $P$  aus gesehen).

Wenden wir dieses Lemma auf die Situation der Aufgabe an, so folgt einerseits im Dreieck  $\triangle ABC$ , dass  $M_1M_2 \parallel AC$  gilt, und andererseits im Dreieck  $\triangle CDA$ , dass  $M_3M_4 \parallel AC$ , insbesondere also  $M_1M_2 \parallel M_3M_4$  gilt. Analog folgt auch  $M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4$ . Damit ist das Viereck  $M_1M_2M_3M_4$  ein Parallelogramm, sodass sich dessen Diagonalen  $M_1M_3$  und  $M_2M_4$  im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Wenden wir das Lemma auf das Dreieck  $\triangle ACD$  an, so folgt  $M_3M_5 \parallel DA$ . Und wenden wir es auf das Dreieck  $\triangle ABD$  an, erhalten wir  $M_1M_6 \parallel AD$ , also insbesondere  $M_3M_5 \parallel M_1M_6$ . Wenden wir es auf das Dreieck  $\triangle BCD$  an, erhalten wir  $M_3M_6 \parallel BC$  und im Dreieck  $\triangle ABC$  schließlich  $M_1M_5 \parallel BC$ , sodass  $M_1M_6M_3M_5$  wieder ein Parallelogramm ist und sich dessen Diagonalen  $M_1M_3$  und  $M_5M_6$  im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Damit haben alle drei Geraden  $M_1M_3, M_2M_4$  und  $M_5M_6$  einen Punkt gemeinsam, der Mittelpunkt jeder dieser drei Strecken ist,  $\square$ .

Bemerkung: Die Konvexität wurde hier nicht benutzt, sodass der Satz auch für konkave und überschlagene Vierecke gilt, sofern keine der Punkte  $A$  bis  $D$  und  $M_1$  bis  $M_6$  zusammenfallen.

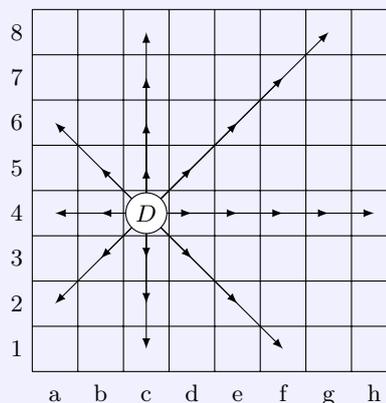
*Aufgabe gelöst von cyrix*

## 2.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 9

## Aufgabe 1 - 330941 = 331041

Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)

Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:

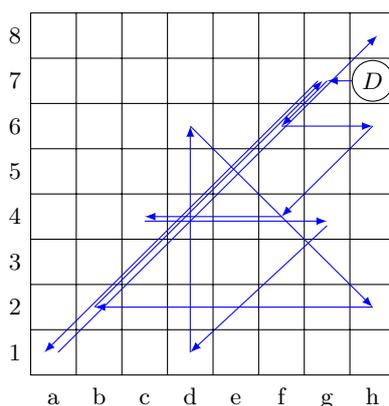


(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!



Es ist  $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$ .

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o.B.d.A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen  $\geq 7$  in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o.B.d.A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.

Dort muss nun ein Zug der Länge  $4\sqrt{2}$  ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge  $3\sqrt{2}$  sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis  $7\sqrt{2}$ , mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

$h7 - g7 - f6 - e6 - d6 - c4 - b2 - a1 - h8$

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

**Aufgabe 2 - 330942**

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel  $(a, b, c)$  positiver ganzer Zahlen  $a, b, c$  von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen  $a + b \geq 101$ ,  $a + c \leq 101$ ,  $a + b + c \geq 201$  gelten!

Wäre  $a + c < 101$  oder  $b < 100$ , so wegen  $a + c \leq 101$  und  $b \leq 100$  auch  $a + c + b < 101 + 100 = 201$ , im Widerspruch zur letzten gegebenen Ungleichung. Also muss  $a + c = 101$  und  $b = 100$  gelten, sodass die letzten beiden Ungleichungen also in jedem Fall erfüllt sind.

Aus  $a + c = 101$  folgt für jedes positive ganze  $1 \leq a \leq 100$ , dass auch  $c = 101 - a$  positiv ganz und nicht größer als 100 ist. Schließlich ist für alle diese  $a$  wegen  $b = 100$  auch  $a + b \geq 101$ , sodass alle Bedingungen erfüllt sind. Weitere Lösungen kann es nicht geben. Damit erfüllen genau die Elemente der Menge

$$\{(a, 100, 101 - a) | a \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq a \leq 100\}$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung.

**Aufgabe 3 - 330943 = 331043**

Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge  $a$  des Achtecks und der Seitenlänge  $b$  des Quadrats die Ungleichung  $b \geq \frac{4}{3}a$  gilt.

Dann bezeichne  $f$  den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.

Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen,  $f$  denselben Wert hat.

Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$  bezeichnet, sein Mittelpunkt mit  $A$  und sein Umkreisradius mit  $r$ .

Da das Achteck regelmäßig ist, gilt  $\angle P_1AP_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ , sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck  $\triangle P_1P_2A$  wegen  $|AP_1| = |AP_2| = r$  und  $|P_1P_2| = a$  die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(45^\circ) = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (2 - \sqrt{2}) \cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2^2 - 2} \cdot a^2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 \quad \text{und damit} \quad r = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen  $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$  der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit  $A, B, C$  und  $D$  bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten  $AB$  und  $AD$  den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten  $CD$  bzw.  $BC$  echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante  $AB$  des Quadrats schneide o.B.d.A. das Achteck in einem vom Punkt  $P_2$  verschiedenen Punkt  $S_1$  der Kante  $P_1P_2$ . (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)

Dann gilt  $0^\circ \leq \angle P_1AS_1 < 45^\circ$ . Damit ist  $0^\circ < \angle S_1AP_2 \leq 45^\circ$ , also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \quad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$$

sodass die Kante  $AD$  des Quadrats wegen  $90^\circ = \angle BAD = \angle S_1AS_2$  das Achteck in einem vom Punkt  $P_4$  verschiedenen Punkt  $S_2$  der Kante  $P_3P_4$  schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das  $n$ -Eck, welches (in dieser

Reihenfolge) durch die Punkte  $AS_1P_2P_3S_2$  begrenzt wird, wobei ggf.  $P_3$  und  $S_2$  zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke  $\triangle AP_1S_1$  und  $\triangle AP_3S_2$  besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist  $S_1 = P_1$ , so auch  $S_2 = P_3$ , sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge  $|AP_1| = |AP_3|$ , dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 45^\circ) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken  $\triangle AP_1P_2$  und  $\triangle AP_3P_4$ ) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45^\circ - \angle S_1AP_2 = 45^\circ - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45^\circ - 90^\circ + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat  $AS_1P_2P_3S_2$  lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke  $\triangle AS_1P_2$ ,  $\triangle AP_2P_3$  und  $\triangle AP_3S_2$ . Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck  $\triangle AP_1S_1$ , sodass das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken  $\triangle AP_1S_1$ ,  $\triangle AS_1P_2$  und  $\triangle AP_2P_3$  zusammensetzt, also dem Viereck  $AP_1P_2P_3$ .

Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats  $ABCD$  unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt,  $\square$ .

#### Aufgabe 4 - 330944

Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch \* angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von  $22!$  entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl  $n$  wird  $n!$  definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis  $n$ .

Es sei  $a$  die vordere und  $b$  die hintere der beiden unleserlichen Ziffern. Da  $22!$  durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Sie lautet  $1 + 1 + 2 + 4 + 7 + 2 + 7 + 7 + a + b + 6 + 7 + 6 + 8 = 58 + a + b$ , sodass wegen  $0 \leq a + b \leq 18$  dann  $a + b \in \{5, 14\}$  gilt.

Weiterhin ist  $22!$  durch 11 teilbar, sodass ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Diese lautet  $1 - 1 + 2 - 4 + 0 - 0 + 0 - 7 + 2 - 7 + 7 - a + b - 6 + 0 - 7 + 6 - 8 = -22 - a + b$ , sodass  $a - b$  durch 11 teilbar ist, was wegen  $-9 \leq a - b \leq 9$  auf  $a - b = 0$  und damit  $a = b$  führt.

Da es keine Lösung in natürlichen Zahlen für  $a + b = 5$  und  $a = b$  gibt, muss  $a + b = 14$  und damit  $a = b = 7$  gelten. Dies sind die gesuchten Ziffern.

#### Aufgabe 5 - 330945 = 331045

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?

Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!

c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur  $y$ -Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl  $x$  einen Punkt mit dieser  $x$ -Koordinate,

also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler  $x$ -Koordinate. Und für jede Parallele zu  $y$ -Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den  $y$ -Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur  $x$ -Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die  $y$ -Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler  $x$ -Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur  $y$ -Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die  $x$ - als auch die  $y$ -Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als  $x$ - und einmal als  $y$ -Koordinate) angenommen. Lügen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler  $x$ -Koordinate eine rationale  $y$ -Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:

Auf der Geraden  $y = 0$  liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler  $x$ -Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler  $x$ -Koordinate). Auf der Geraden  $y = \sqrt{2}$  liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler  $x$ -Koordinate) und gemischte (die mit rationaler  $x$ -Koordinate). Und auf der Geraden  $y = x$  liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler  $x$ -Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler  $x$ -Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z.B.  $y = \sqrt{2} \cdot x$ . Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt  $(0,0)$ , der gemischte Punkt  $(1, \sqrt{2})$  und der irrationale Punkt  $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ .

#### Aufgabe 6 - 330946

Ist  $P$  ein Punkt im Innern eines Dreiecks  $ABC$ , so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch  $P$  zu  $CB$  schneidet  $AB$  in  $S_1$ , die Parallele durch  $S_1$  zu  $AC$  schneidet  $BC$  in  $S_2$ , die Parallele durch  $S_2$  zu  $BA$  schneidet  $CA$  in  $S_3$ . In dieser Weise kann man für  $k = 1, 2, 3, \dots$  fortsetzen:

Die Parallele durch  $S_{3k}$  zu  $CB$  schneidet  $AB$  in  $S_{3k+1}$ , die Parallele durch  $S_{3k+1}$  zu  $AC$  schneidet  $BC$  in  $S_{3k+2}$ , die Parallele durch  $S_{3k+2}$  zu  $BA$  schneidet  $CA$  in  $S_{3k+3}$ .

Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck  $ABC$  und jeden Punkt  $P$  im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch  $P$  gehen muss!

Es sei  $S$  der Schnittpunkt der Parallelen durch  $P$  zu  $CB$  mit  $AC$ . Dann liegen  $S$ ,  $P$  und  $S_1$  in dieser Reihenfolge auf einer Parallelen zu  $CB$ . Wir zeigen im Folgenden, dass  $S_6 = S$  gilt und damit die Gerade  $S_6S_7$ , welche nach Definition parallel ist zu  $CB$  und durch  $S_6$  verläuft, identisch ist mit der Gerade  $SS_1$ , auf der auch  $P$  liegt.

Nach Konstruktion sind die Geraden  $SC = AC$  und  $S_1S_2$  sowie  $SS_1$  und  $CS_2 = CB$  jeweils zueinander parallel, sodass das Viereck  $SS_1S_2C$  ein Parallelogramm ist. Damit gilt insbesondere  $|SC| = |S_1S_2|$ .

Weiterhin sind analog auch die Vierecke  $S_3S_4BS_2$  und  $S_3S_4S_5C$  Parallelogramme (da jeweils gegenüberliegende Seiten nach Konstruktion parallel zueinander sind), sodass  $|CS_5| = |S_3S_4| = |S_2B|$  folgt.

Es ist  $S_6C = AC \parallel S_1S_2$  und es liegen  $C$ ,  $S_5$ ,  $S_2$  und  $B$  auf einer Geraden, also ist  $\angle S_6CS_5 = \angle S_1S_2B$ , da es sich um Stufenwinkel handelt. Analog folgert man auch  $\angle CS_5S_6 = \angle S_2BS_1$ , sodass die beiden Dreiecke  $\triangle S_6CS_5$  und  $\triangle S_1S_2B$  nicht nur aufgrund der Übereinstimmung zweier Winkelgrößen zueinander ähnlich, sondern wegen dem zuvor gezeigten  $|CS_5| = |S_2B|$  sogar kongruent sind. Insbesondere folgt damit  $|S_6C| = |S_1S_2| = |SC|$ . Also liegen  $S$  und  $S_6$  beide auf der Strecke  $AC$  in gleicher Entfernung zu  $C$ , sodass sie identisch sind. Es folgt, wie oben beschrieben, dass  $P$  auf der Parallelen zu  $BC$  durch  $S_6$  liegt,  $\square$ .

*Aufgaben der IV. Runde 1993 gelöst von cyrix*

## 2.36 XXXIV. Olympiade 1994

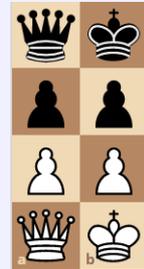
### 2.36.1 I. Runde 1994, Klasse 9

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

#### Aufgabe 1 - 340911 = 341011

Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:

- Das Spielfeld hat  $2 \times 4$  Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)



Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass

- a) das Spiel unentschieden endet,
- b) Weiß gewinnt,
- c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

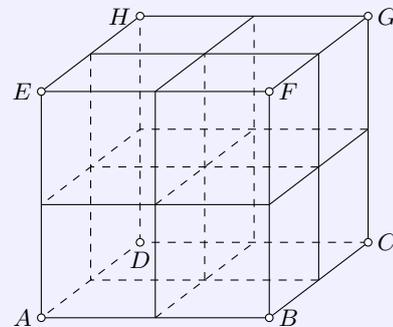
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

- a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.
- b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.
- c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

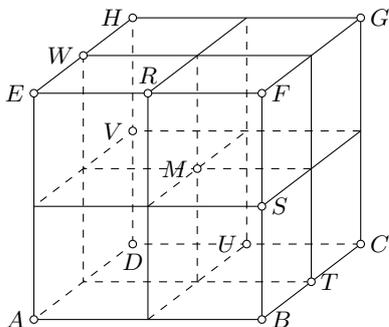
#### Aufgabe 2 - 340912 = 341012

Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels  $ABCDEFGH$  in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.

Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von  $A$  nach  $G$  gelangen. Wie viele verschiedene Wege gibt es hierfür insgesamt,



- a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.
- b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels  $ABCDEFGH$  angehören?



- a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von  $A$  nach  $G$  ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt.

Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

- b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels  $ABCDEFGH$ , wenn er über den Punkt  $M$  führt (siehe Abbildung). Von  $A$  nach  $M$  gibt es genau  $3! = 6$  Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von  $M$  nach  $G$ . Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege  $6 \cdot 6 = 36$ . Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

**Aufgabe 3 - 340913 = 341013**

Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein*.

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:

```

1  z = 0
2  for a = 0 to 9
3    for b = 0 to 9
4      for c = 0 to 9
5        for d = 0 to 9
6          for e = 0 to 9
7            for f = 0 to 9
8              if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9            next
10           next
11          next
12         next
13        next
14       next
15 print z/10000

```

2. Programm:

```

1  dim n(27)
2  for s = 0 to 27
3    n(s) = 0
4  next
5  for a = 0 to 9
6    for b = 0 to 9
7      for c = 0 to 9
8        s = a+b+c
9      next
10     next
11    next
12  next
13  z = 0
14  for s = 0 to 27
15    z = z + n(s)*n(s)
16  next
17  print z/10000

```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 - 7, 9 - 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft  $a + b + c = d + e + f$  untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable  $z$  um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller "Glücksschein"-Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von  $z/1000000$  als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe  $s = a + b + c$  der ersten drei Ziffern  $a, b, c$  eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert  $s$  unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau  $n(s)$  mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern  $d, e, f$  ebenfalls genau  $n(s)$  mal als Summe vor.

Für genau  $(n(s) \cdot n(s))$  Nummern liegt daher die Eigenschaft  $a + b + c = d + e + f$  speziell so vor, dass gerade für diesen Wert  $s$  die beiden Gleichungen  $a + b + c = s$  und  $d + e + f = s$  gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl  $z$  aller "Glücksschein"-Nummern ist die Summe aller für  $s = 0, \dots, 27$  gebildeten Produkte  $(n(s) \cdot n(s))$ .

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten  $n(s)$  geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen  $abc$  von 000 bis 999 jeweils die Anzahl  $n(s)$  der betreffenden Summe  $s = a + b + c$  um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in 1 - 4 alle  $n(s)$  auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten  $n(s)$  die Summe der Produkte  $(n(s) \cdot n(s))$  gebildet.

Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

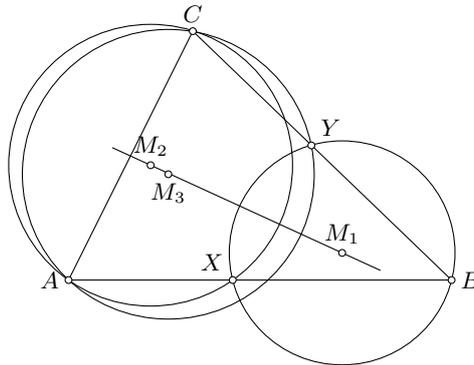
**Aufgabe 4 - 340914 = 341014**

Arne zeichnet ein Dreieck  $ABC$  und einen Kreis  $k_1$ , der so gewählt ist, dass er durch  $B$  geht, die Strecke  $AB$  in einem von  $B$  verschiedenen Punkt  $X$  schneidet und dass er die Strecke  $BC$  in einem von  $B$  verschiedenen Punkt  $Y$  schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis  $k_2$  des Dreiecks  $ACX$  und den Umkreis  $k_3$  des Dreiecks  $ACY$ .

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Kreise  $k_1, k_2, k_3$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck  $ABC$  gibt es für den Kreis  $k_1$  unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für  $k_1$  auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?



- I. Um zu erreichen, dass  $M_1, M_2, M_3$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von  $AC$  einen Punkt  $M_1$ , der so liegt, dass der um  $M_1$  durch  $B$  konstruierte Kreis  $k$ , die Strecken  $AB$  und  $BC$  in Punkten  $X \neq B$  bzw.  $Y \neq B$  schneidet.

Beweis, dass bei dieser Wahl  $M_1, M_2, M_3$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

Da die Kreise  $k_2$  und  $k_3$  beide durch  $A$  und  $C$  gehen, also  $M_2A = M_2C$  und  $M_3A = M_3C$  gilt, liegen  $M_2$  und  $M_3$  auf der Mittelsenkrechten von  $AC$ . Auf dieser wurde auch  $M_1$  gewählt.

Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

- II. Um zu erreichen, dass  $M_1, M_2, M_3$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man wählt  $M_1$  außerhalb der Mittelsenkrechten von  $AC$ , dabei aber so, dass der Kreis  $k_1$  um  $M_1$  durch  $B$  die Strecken  $AB$  und  $BC$  in Punkten  $X \neq B$  bzw.  $Y \neq B$  schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke  $ACX$  und  $ACY$  nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von  $k_1$  gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

Beweis, dass bei jeder solchen Wahl  $M_1, M_2, M_3$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass  $M_3$ , nicht mit  $M_2$  zusammenfallen kann; hiernach (und weil  $M_2$  und  $M_3$  auf der Mittelsenkrechten von  $AC$  liegen) könnten  $M_1, M_2, M_3$  nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch  $M_1$  auf der Mittelsenkrechten von  $AC$  läge, was durch die Wahl von  $M_1$  ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

**Aufgabe 5 - 340915 = 341015**

Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten  $x$  so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen  $x$  definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen  $x$  definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle  $x < \frac{1}{4}$  ist

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4} - x + \frac{3}{4} - x = 1 - 2x > 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

für alle  $x$  mit  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$  ist

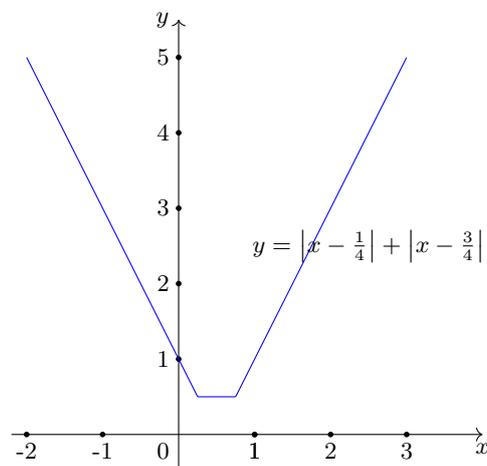
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{2}$$

für alle  $x > \frac{3}{4}$  ist

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + x - \frac{3}{4} = 2x - 1 > 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

Also sind genau alle  $x$  mit  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$  Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch  $f(x) = \left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right|$  definierten Funktion  $f$  (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung  $\sin x = 1$ . Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen  $x$  definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Da  $\pi$  irrational ist und alle  $\frac{4k+1}{2}$  rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

**Aufgabe 6 - 340916 = 341016**

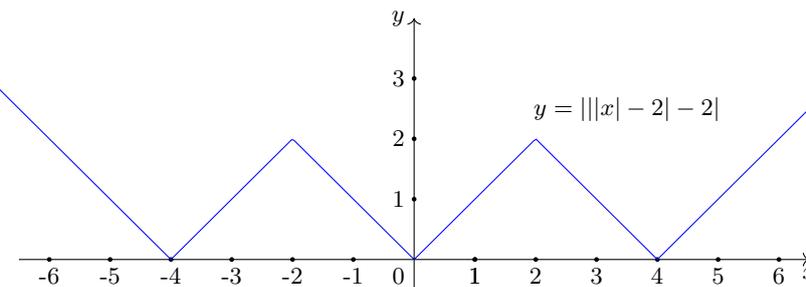
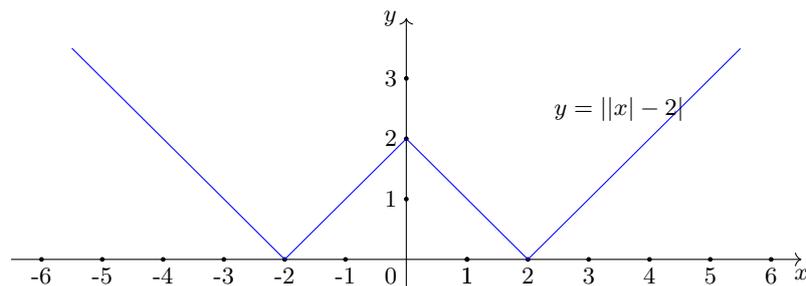
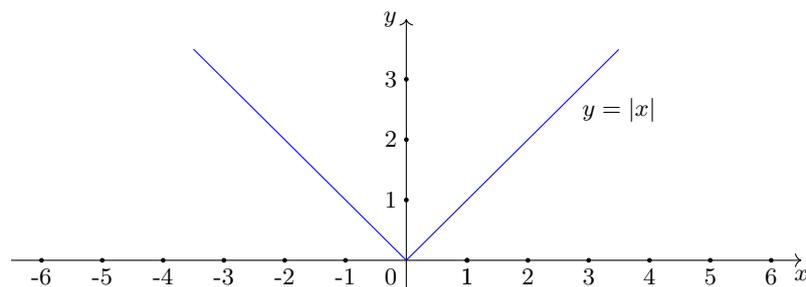
Es seien Funktionen  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  für alle reellen Zahlen  $x$  definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x| - 2|, \\ f_2(x) &= |||x| - 2| - 2|, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein:  $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$  für alle ganzen Zahlen  $k \geq 1$ .

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $f_0, f_1$  und  $f_2$ ! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion  $f_k$ !

Die Abbildung zeigt die Graphen von  $f_0, f_1$  und  $f_2$ .



Beschreibung des Graphen von  $f_k$ : Die Funktion hat  $(k + 1)$  Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von  $f_0$  kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von  $f_k$  wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von  $f_{k+1}$ .

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen von [5]

## 2.36.2 II. Runde 1994, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 340921**

Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.

Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.

Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Wir bezeichnen die Völkerstämme mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , sowie die Geschlechter mit 1, 2 bzw. 3, sodass also  $a1$  den Abgeordneten von Völkerstamm  $a$  mit Geschlecht 1 bezeichne.

Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm  $a$  bis  $c$  sowie jedes Geschlecht 1 bis 3 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{ccc} a1 & b2 & c3 \\ b3 & c1 & a2 \\ c2 & a3 & b1 \end{array}$$

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 2 - 340922**

Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{cccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.

Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.

Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Felix hat nicht recht. Dies kann z.B. folgendermaßen gezeigt werden: Es gibt die Lösungen

$$\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 9 & 2 \\ + & 5 & 8 & 1 & 7 \\ \hline = & 9 & 3 & 0 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 8 & 0 & 9 & 4 \\ + & 1 & 7 & 3 & 5 \\ \hline = & 9 & 8 & 2 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 7 & 0 & 9 & 1 \\ + & 2 & 6 & 4 & 8 \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 9 & 1 \\ + & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \hline = & 9 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 8 & 3 & 9 & 2 \\ + & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline = & 9 & 8 & 5 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 4 & 0 & 9 & 1 \\ + & 5 & 3 & 7 & 8 \\ \hline = & 9 & 4 & 6 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 9 & 3 \\ + & 5 & 2 & 8 & 6 \\ \hline = & 9 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für  $S$  und  $T$  miteinander vertauschen, ebenso (unabhängig hiervon) die Ziffern für  $I$  und  $C$ .

Da sich je zwei der Lösungen in der Ziffer für  $U$  voneinander unterscheiden, ergeben sich hiermit bereits  $4 \cdot 7 = 28$  verschiedene Lösungen.

*Übernommen aus [5]*

**Aufgabe 3 - 340923**

Ausgehend von einem Quadrat  $ABCD$  kann man für je zwei positive ganze Zahlen  $x$  und  $y$  die folgenden Konstruktionen ausführen:

Die Seite  $AB$  wird über  $B$  hinaus um die Länge  $x \cdot AB$  bis zum Punkt  $S$  verlängert,

die Seite  $BC$  wird über  $C$  hinaus um die Länge  $y \cdot BC$  bis zum Punkt  $T$  verlängert,

die Seite  $CD$  wird über  $D$  hinaus um die Länge  $x \cdot CD$  bis zum Punkt  $U$  verlängert,

die Seite  $DA$  wird über  $A$  hinaus um die Länge  $y \cdot DA$  bis zum Punkt  $V$  verlängert.

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare  $(x; y)$  positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck  $STUV$  einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat  $ABCD$  hat!

Das Viereck  $STUV$  lässt sich zerlegen in das Quadrat  $ABCD$  sowie die vier rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle VSA$ ,  $\triangle STB$ ,  $\triangle TUC$  und  $\triangle UVD$ .

Es habe das Quadrat  $ABCD$  die Kantenlänge  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$ , sodass  $|AV| = |CT| = y$ ,  $|BS| = |DU| = x$  und also  $|AS| = |CU| = 1 + x$  und  $|BT| = |DV| = 1 + y$  gilt.

Damit können wir die Flächeninhalte der vier Dreiecke, des Quadrats und damit auch des Vierecks  $STUV$  berechnen, denn dieser ist nun

$$F = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1+x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1+y) + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1+x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1+y) = 1 + y + xy + x + xy = 1 + x + y + 2xy$$

Nach Aufgabenstellung soll  $F = 11$  sein, sodass die Gleichung  $11 = 1 + x + y + 2xy$  bzw.  $10 = x + y + 2xy$  in positiven ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  zu lösen ist. Da diese symmetrisch in  $x$  und  $y$  ist, können wir o.B.d.A.  $x \leq y$  annehmen, sodass  $10 = x + y + 2xy \geq 2x + 2x^2 = 2x(1+x)$  gilt, also  $x = 1$ , da für alle  $x \geq 2$  diese Ungleichung nicht erfüllt ist.

Dann ist aber  $10 = 1 + y + 2y$ , also  $y = 3$ , was schließlich auf die beiden Lösungen  $(x; y) \in \{(1; 3), (3; 1)\}$  führt, für die dann der Flächeninhalt des Vierecks  $STUV$  genau 11 mal so groß ist wie der des Quadrats  $ABCD$ .

*Aufgabe gelöst von cyrix*

**Aufgabe 4 - 340924**

Über der Seite  $AB$  des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  mit gegebener Seitenlänge  $a$  werde nach außen das Quadrat  $ABPQ$  errichtet.

Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck  $ABC$  herum "rollen, ohne zu gleiten".

(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt  $B$  fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke  $BP$  in die Lage von  $BC$  kommt; dann bleibt  $C$  fest u.s.w.).

a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit  $AB$  zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang  $AB$  war).

Wie lang ist dabei der Weg, den

- der Punkt  $A$ ,
  - der Mittelpunkt  $M$  des Quadrates  $ABPQ$ ,
  - der Mittelpunkt  $H$  der Seite  $AB$  des Quadrates
- zurücklegt?

b) Ausgehend von dem Anfangszustand  $ABPQ$  wurde nicht nur eine in a) beschriebene "volle Umrundung des Dreiecks  $ABC$ " durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.

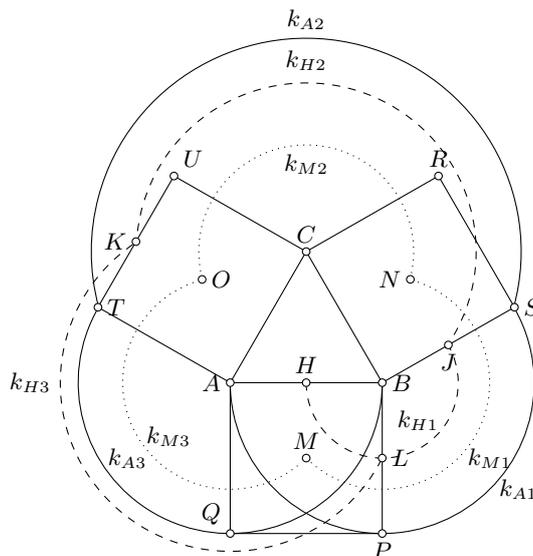
Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte  $A, B, P, Q$  seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.

- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks  $ABC$  fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?

- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seinen eigenen Mittelpunkt  $M$  wurden dabei insgesamt ausgeführt?

(a) Die volle Umrundung des Dreiecks  $ABC$  findet in drei Teilbewegungen statt (siehe Abbildung): Die erste ist die Drehung um  $B$  durch den überstumpfen Winkel  $\angle PBC$  der Größe  $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$ ; dabei gehen  $P, Q, A, M, H$  und  $C, R, S, N, J$  über.

Die zweite Teilbewegung ist die Drehung um  $C$  durch  $210^\circ$ ; dabei gehen  $R, S, B, N, J$  in  $A, T, U, O, K$  über. Die dritte Teilbewegung ist die Drehung um  $A$  mit  $210^\circ$ ; dabei gehen  $T, U, C, O, K$  in  $B, P, Q, M, L$  über.



Der Weg von  $A$  besteht demnach aus den drei Kreisbögen  $k_{A1} = APS$ ,  $k_{A2} = STM$ ,  $k_{A3} = TQB$ . Sie sind Bögen zu Zentriwinkeln der Größe  $210^\circ$  in Kreisen mit den Radien  $a, a\sqrt{2}, a$ . Also legt  $A$  einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot (1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{7}{6} \pi a \approx 12,5137a$$

zurück. Der Weg von  $M$  besteht aus  $k_{M1} = MN$ ,  $k_{M2} = NO$ ,  $k_{M3} = OM$ ; Bögen zu Zentriwinkeln von  $210^\circ$  in Kreisen des Radius  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ ; also legt  $M$  einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{7}{4}\sqrt{2}\pi a \approx 7,7750a$$

zurück. Für den Weg von  $H$ , bestehend aus  $k_{H1} = HLJ$ ,  $k_{H2} = JK$ ,  $k_{H3} = KL$ , ergibt sich entsprechend die Länge

$$(1 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{7}{12} \pi a \approx 10,0282a$$

(b) Bei der ersten Umrundung gehen die Punkt  $A, B, P, Q$  wie in (a) beschrieben, in  $B, P, Q, A$  über, d.h., sie haben dieselbe Lage wie nach einer Vierteldrehung um  $M$  erreicht. Um zu bewirken, dass sie erstmals in ihre Anfangslage übergehen, muss eine solche Umrundung daher insgesamt 4 mal durchgeführt werden. Die Strecke  $MQ$  geht bei der ersten in (a) genannten Teilbewegung in die Strecke  $NR$  über. Bezogen auf den Mittelpunkt des rollenden Quadrats ist das eine Drehung von der Größe des überstumpfen Winkels  $\angle QBR = 210^\circ$ .

Entsprechendes gilt für die weiteren Teilbewegungen, also findet bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats bei der ersten Umrundung eine Drehung um  $3 \cdot 210^\circ$  statt. Bei den festgestellten 4 Umrundungen ist dies eine Drehung um  $12 \cdot 210^\circ = 2520^\circ = 7 \cdot 360^\circ$ , das sind 7 volle Umdrehungen.

Übernommen aus [5]

## 2.36.3 III. Runde 1994, Klasse 9

**Aufgabe 1 - 340931**

Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte  $A, B, C$  so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke  $AB$  eine andere Länge hat als die Strecke  $BC$ .

Dann versucht er, einen Punkt  $X$  zu konstruieren, der weder auf der durch  $A$  und  $B$  gelegten Geraden  $g$  noch auf der durch  $B$  und  $C$  gelegten Geraden  $h$  liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Der Punkt  $X$  hat von  $g$  den gleichen Abstand wie von  $h$ .

(2) Die Strecken  $AB$  und  $BC$  erscheinen von  $X$  aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel  $\angle AXB$  ist ebenso groß wie der Winkel  $\angle BXC$ .

Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt  $X$ ; gleichgültig welche Wahl von  $A, B, C$  (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.

Hat Christa recht?

Ja, sie hat recht, wie im folgenden indirekt bewiesen wird:

Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck  $\triangle ABC$  und einen solchen Punkt  $X$ . Dann liegt nach (1)  $X$  auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle CAB$ , sodass die beiden Winkel  $\angle CBX$  und  $\angle XBA$  gleich groß sind.

Da nach Annahme auch die Winkel  $\angle AXB$  und  $\angle BXC$  gleich groß sind, stimmen die beiden Dreiecke  $\triangle AXB$  und  $\triangle BXC$  in zwei Innenwinkeln überein und zusätzlich auch in der Strecke  $XB$ , die sie beide gemeinsam haben, zwischen diesen beiden Innenwinkeln, sodass diese Dreiecke kongruent sind.

Dann folgt aber direkt, da die Strecken gleichgroßen Winkeln gegenüberliegen, auch  $|AB| = |BC|$ , was den Widerspruch zur entsprechenden Bedingung in der Lage der drei Punkte  $A, B, C$  liefert. Also kann es kein solches nicht gleichschenklige Dreieck  $\triangle ABC$  mit entsprechendem Punkt  $X$  geben,  $\square$ .

**Aufgabe 2 - 340932 = 341031**

Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl  $n$  gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl  $9^n + 1$  auf mehr als eine Null enden würde!

Würde  $9^n + 1$  auf mindestens zwei Nullen enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber  $9^n - 1 = 9^n - 1^n$  durch  $9 - 1 = 8$ , also insbesondere durch 4 teilbar, sodass  $9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$  nie durch 4 teilbar sein kann,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 340933 = 341032**

Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Mit  $n := 123456789$  ist also die Differenz

$$D := (n - 4) \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot (n + 7) - (n - 7) \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von  $n$  und verschiedene bei ungeraden Exponenten von  $n$ . Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4 - 2 - 1 + 7) + 2n \cdot (-8 + 56 + 28 + 14) = 180n = 22.222.222.020$$

**Aufgabe 4 - 340934 = 341034**

Ein Quadrat  $ABCD$  sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.

Ist  $n$  eine positive ganze Zahl mit  $n \leq 25$ , so seien  $n$  verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.

Von diesen  $n \cdot 25$  Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat  $ABCD$  gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.

Eine Zahl  $n$  werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:

Bei jeder Auswahl von 25 der  $n \cdot 25$  Blättchen, bei der jede der  $n$  Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat  $ABCD$  als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $C$  ist.

Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen  $n \leq 25$  alle "freundlichen" Zahlen!

Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen  $AC$  jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu  $AC$  symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Anzahl der Blättchen der Farbe  $1, 2, \dots, n$  unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left\lfloor \frac{a_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor$$

solcher Paare bilden. Wegen  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 25$  ist  $P = \frac{25-u}{2}$ , wobei  $u$  die Anzahl der ungeraden Zahlen unter  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch  $u$  ungerade und somit  $P$  eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich  $AC$  symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gibt.

Dafür muss aber  $n \geq 7$  sein. Dies bedeutet, dass alle  $n \leq 6$  "freundlich" sind. Ist jedoch  $n = 7$ , so kann man  $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 1$  und  $a_7 = 19$ , bzw. für  $n > 7$  schließlich  $a_1 = a_2 = \dots = a_7 = 1$  (und Rest beliebig  $\geq 1$ ) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich  $AC$  symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle  $7 \leq n \leq 25$  "unfreundlich".

#### Aufgabe 5 - 340935

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen  $n$ , für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Es ist genau eine der Zahlen  $n, n+6 = 5 + (n+1), n+2, n+8 = 5 + (n+3)$  und  $n+14 = 10 + (n+4)$  durch 5 teilbar, da auch genau eine der fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen  $n$  bis  $n+4$  durch 5 teilbar ist.

Die sechs Zahlen können also nur dann allesamt Primzahl sein, wenn die 5 unter ihnen ist. Da  $n > 0$  gilt, kommt dafür nur  $n$  oder  $n+2$  in Frage. Wäre aber  $n+2 = 5$ , so wäre  $n+12 = 15$  keine Primzahl. Also verbleibt nur  $n = 5$ , was wegen  $n+2 = 7, n+6 = 11, n+8 = 13, n+12 = 17$  und  $n+14 = 19$  tatsächlich eine Lösung ist. Es gibt also nur genau ein solches  $n$ , nämlich  $n = 5$ .

#### Aufgabe 6 - 340936

Es sei  $ABCD$  ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen  $ABC, ABD, ACD$  und  $BCD$  alle einander kongruent sind.

Ferner sei  $h$  die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und  $P$  sei ein Punkt im Innern des Tetraeders  $ABCD$ .

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:

Die Summe der Abstände von  $P$  zu den vier Tetraederflächen beträgt  $h$ .

Hinweis:

Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die Ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.

In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

Es sei  $A$  der Flächeninhalt einer (und damit jeder der) Tetraederfläche(n) und  $V$  das Volumen des Tetraeders  $ABCD$ . Dann gilt  $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$ .

Das Tetraeder  $ABCD$  lässt sich durch die Verbindungsstrecken von  $P$  zu den vier Eckpunkten vollständig in die vier Tetraeder  $ABCP$ ,  $ABDP$ ,  $ACDP$  und  $BCDP$  zerlegen, deren Volumina  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V_4$  bezeichnet seien. Dann gilt  $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ .

Seien weiterhin  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  und  $h_4$  die Längen der Höhen von  $P$  auf die Tetraederflächen  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  bzw.  $BCD$ , so gilt wegen der Kongruenz dieser vier Tetraederflächen  $V_i = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_i$  für alle  $i = 1, 2, 3, 4$ . Insbesondere ist also

$$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h = V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

und damit wegen  $A \neq 0$  schließlich  $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ ,  $\square$ .

*Aufgaben der III. Stufe 1994 gelöst von cyrix*

**2.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 9****Aufgabe 1 - 340941 = 340841**

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.

Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.

Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

a1	b2	c3	d4
b3	a4	d1	c2
c4	d3	a2	b1
d2	c1	b4	a3

**Aufgabe 2 - 340942 = 341041**

Zeigen Sie, dass die Zahl  $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + \dots + 7^{93} + 7^{95}$  durch 336 teilbar ist!

Es ist  $z = 7 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \dots + 7^{94})$  offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7} = 49^0 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + \dots + 49^{47} \equiv 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{47} = 48 \equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also  $z$  durch  $7 \cdot 48 = 336$  teilbar,  $\square$ .

**Aufgabe 3 - 340943 = 341042**

Auf der Seite  $AB$  des Quadrates  $ABCD$  werde ein Punkt  $X \neq A$  gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken  $AC$  und  $XD$  in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von  $X$  so zu treffen, dass es natürliche Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis  $1 : p : q : r$  stehen!

Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass  $A$  im Koordinatenursprung liegt und  $C$  die Koordinaten  $(1,1)$  besitzt. Dann liegt  $B$  bei  $(1,0)$  und  $D$  bei  $(0,1)$ . Weiterhin sei  $0 < a \leq 1$  eine reelle Zahl und der Punkt  $X$  habe die Koordinaten  $(a,0)$ . Dann liegt  $X$  auf der Strecke  $AB$ , ist aber verschieden von  $A$ .

Die Gerade  $XD$  lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung  $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$  und die Gerade  $AC$  durch  $g(x) = x$ . Für den Schnittpunkt  $S$  beider Geraden und den Koordinaten  $(x_S, y_S)$  gilt  $f(x_S) = g(x_S)$ , also  $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$  bzw.  $1 = (1 + \frac{1}{a}) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$ , also  $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$ .

Damit hat die Höhe  $h_a$  von  $S$  auf  $AB$  die Länge  $h_a = y_S = \frac{a}{a+1}$  und die Höhe  $h_d$  von  $s$  auf  $AD$  die Länge  $h_d = x_S = \frac{a}{a+1}$ . Es ergibt sich für das Dreieck  $\triangle ASX$  der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck  $\triangle ASD$  der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck  $\triangle ACD$  den Flächeninhalt von  $\frac{1}{2}$  besitzt und von der Strecke  $DS$  in die beiden Dreiecke  $\triangle ASD$  und  $\triangle DCS$  zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks  $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also  $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a+1-a^2 : 1 : a$ .

Da  $0 < a \leq 1$  ist, ist  $1 \geq a \geq a^2$ , also auch  $1 - a^2 \geq 0$  und damit  $a+1-a^2 \geq a$ . Also ist  $a^2$  der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit  $a^2$ , erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$ ,  $\frac{1}{a^2}$  und  $\frac{1}{a}$  müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  entsprechen. Insbesondere muss also  $0 < \frac{1}{a} = r$  eine natürliche Zahl, also  $a = \frac{1}{r}$  sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

mit  $p := r + r^2 - 1$  und  $q := r^2$ , von der gewünschten Form.

Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke  $AB$  ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke  $AX$  ist bzw.  $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$  mit einer positiven ganzen Zahl  $r$  gilt.

#### Aufgabe 4 - 340944 = 340844

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.

Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.

Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.

2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei  $a_1$  der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um  $1 + (11 - a_1) = 12 - a_1$ , denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert  $a_1$  werden noch  $11 - a_1$  weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.

Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert  $a - i$  die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert  $12 - a_i$ .

Sieht also Axel  $n$  Stapel und  $r$  Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \dots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \dots + a_n)$$

bzw.  $a_1 + \dots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$ ,

kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel offen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

#### Aufgabe 5 - 340945 = 341045

Einem regelmäßigen Tetraeder  $ABCD$  wird die Inkugel  $K$  einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$  berührt).

Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder  $PQRS$  einbeschrieben (d.h., seine Ecken  $P, Q, R, S$  liegen alle auf der Oberfläche der Kugel  $K$ ).

Welches Verhältnis  $V_2 : V_1$  bildet das Volumen  $V_2$  eines solchen Tetraeders  $PQRS$  mit dem Volumen  $V_1$  von  $ABCD$ ?

In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerlinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius  $r_1$  von  $ABCD$  genau dem Umkugelradius von  $PQRS$  entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius  $r_2$  genau  $\frac{1}{3}r_1$ .

Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

#### Aufgabe 6 - 340946 = 340846

Wie viele Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen  $x, y$ , die die Ungleichung  $|x - 30| + |y - 10| < 100$  erfüllen, gibt es insgesamt?

Wir betrachten zuerst die Ungleichung (\*)  $a + b < 100$  und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen  $a$  und  $b$ . Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit  $a = b = 0$ .

Für  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  gibt es genau die 99 Lösungen  $b = 1$  bis  $b = 99$ . Analog gibt es für  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  genau 99 Lösungen.

Sei nun  $a > 0$  und  $b > 0$ . Für festes  $a$  gibt es für  $b$  genau die Lösungen  $1, 2, \dots, 99 - a$ , also  $99 - a$  verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99} (99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.

Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:

Für jede Lösung  $(a, b)$  der Ungleichung (\*) mit  $a, b \neq 0$  erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man  $x - 30 = \pm a$  und unabhängig davon  $y - 10 = \pm b$  wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte  $a, b$  aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält  $x - 30 = 0$  bzw.  $y - 10 = 0$ .

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:

Ist  $a = b = 0$ , so erhält man genau  $1 \cdot 1 = 1$  Lösung für die Ausgangsgleichung.

Ist  $a = 0$  und  $b \neq 0$ , oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau  $99 \cdot 2$ , in beiden Fällen zusammen also  $99 \cdot 4$ , Lösungen der Ausgangsgleichung.

Und sind sowohl  $a$  als auch  $b$  von 0 verschieden, erhält man daraus  $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$  Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau  $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$  ganzzahlige Lösungen besitzt.

*Aufgaben der IV. Runde 1994 gelöst von cyrix*

Anmerkung:

Dieser Text enthält die offiziellen Aufgaben der Mathematik-Olympiade der Klassenstufen 9 der Stufen I bis IV.

Die Texte wurden aus verschiedenen Quellen zusammengetragen. Die Lösungen wurden durch 32 Autoren erstellt und zum Teil aus Quellen entnommen, darunter der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha", der Internetseite

www.olympiade-mathematik.de von Manuela Kugel und dem Buch "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR" von Prof. W.Engel und Prof. U.Pirl.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.

Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik wurde der heutigen Form angepasst. Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

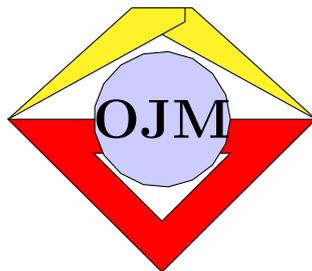
Der einleitende Text jedes Aufgabenblattes:

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

wurde nicht übernommen.

Quellen:

- 1) Zeitschrift "alpha", Verlag Volk und Wissen 1967-1989
- 2) "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR", W.Engel und U.Pirl, Verlag Volk und Wissen 1975
- 3) Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Verlag Volk und Wissen 1968
- 4) [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Viviani](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Viviani)
- 5) Offizielle Aufgabenkommission



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons "Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland" Lizenz.

