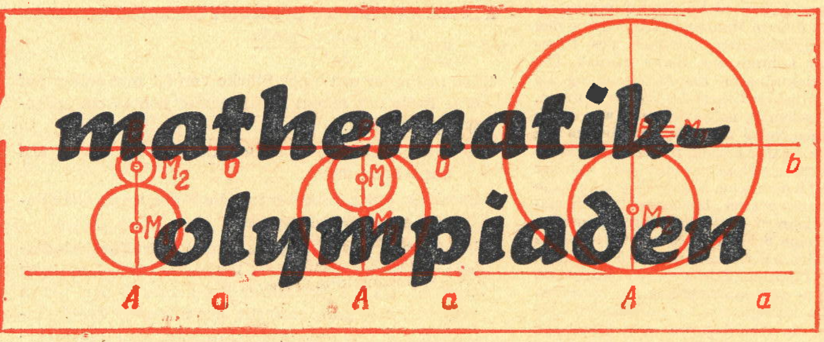
Proletarier aller Länder, vereinigt euch!

LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

Organ der Bezirksleitung Leipzig der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands

Preis 0,50 MDN | SONDERAUSGABE | Mai 1965

mo mathematik-olympiaden



Dokumentation:
244 Aufgaben aus Olympiaden der DDR, Klassenstufen 11 und 12

Zum Geleit

Übung macht den Meister

Von JOCHEN POMMERT

Zum dritten Male geben wir den mathematikbegeisterten Schülerinnen und Schülern die Mathematik-LVZ in die Hand. Jedoch nicht nur ihnen. Die „Mathe-LVZ“ soll Anregungen geben, soll Freude an dieser schönen Wissenschaft erwecken; vor allem auch bei demjenigen, der noch nicht so recht weiß, ob er es den Mathematik-Olympioniken gleichtun soll. Unsere kleine Zeitung soll ihnen Anregung sein, es zu versuchen.

Es ist sicherlich ungewöhnlich, eine Tageszeitung als Herausgeber einer Mathematikzeitung anzutreffen. Aber leben wir, die wir den Sozialismus in unserem Lande aufbauen und die technische Revolution zu meistern haben, nicht auch in einer ungewöhnlich schönen Zeit!

Wir sehen als Redaktion einen Teil unserer Pflicht vor dem Heute und Morgen darin, mitzuhelfen, soviel wie möglich Freunde der Mathematik zu finden. Und wir wollen denen, die bereits mit der Mathematik auf Du und Du stehen, Anregungen und Stoff geben sich zu üben, um in ihr Wesen einzudringen.

Übung hilft beim Meisterwerden. Daher nehmen die Aufgaben den größten Teil des Raumes ein. Auf etwa 30 Seiten enthält unsere „Mathe-LVZ“ wie sie kurz genannt wird, 244 Aufgaben. Damit ist Stoff gegeben, den zu bearbeiten sich lohnt.

In diesem Jahr 1965, in dem wir den 20. Jahrestag der Befreiung vom Faschismus begehen, findet die Internationale Mathematik-Olympiade in der Deutschen Demokratischen Republik statt. Wir wünschen den Teilnehmern, den Jungen und Mädeln aus der DDR besonders, gute Erfolge im edlen Wettstreit zur Meisterung ihrer Wissenschaft.

Mit dieser Zeitung wollen wir unseren Schülern helfen, auf der internationalen Olympiade gut zu bestehen. Wir wollen helfen, der Mathematik und den Mathematikern den Platz zu geben, der ihnen in unserer Zeit gebührt.

> Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur da zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf. K. F. Gauß

Gerlinde Wußing
Wissenschaftliche Mitarbeiterin
am Institut für Pädagogik

Liebe zur Mathematik

Was wäre Archimedes ohne seine Ausbildung an dem hochberühmten Museion in Alexandria geworden? Hätte Isaac Newton aus eigner Kraft, z. B. als Robinson auf einer Südseeinsel, der bedeutende Mathematiker und Naturforscher werden können? Hätte sich Evariste Galois ohne die Anregung seines Lehrers der Mathematik verschrieben? In diesen vom historischen Standpunkt törichten Fragen ist aber der berechtigte Hinweis auf die außerordentliche Bedeutung enthalten, die dem Bildungswesen und der Lehrerpersönlichkeit für den Entwicklungsgang auch des größten Talentes zukommt. Sie werden aus eigener Erfahrung wissen, liebe junge Freunde, wie sehr ihr Verhältnis zum Fach „Mathe“ vom Lehrer abhängt: versteht er es, Ihre Liebe zur Mathematik zu wecken, begeistert er Sie für ein zähes Verfolgen komplizierter mathematischer Gedankengänge und das Lösen vielfältiger praktischer Probleme, oder bietet er Ihnen die Mathematik dar als eine unübersehbare Fülle trockener Rechnereien, deren Zusammenhänge Sie kaum ahnen?

Unser Staat ist sich der großen Bedeutung der Mathematik bewußt. Ausbildung und Erziehung des Mathematikers beginnen an den Schulen; daher kommt der Ausbildung der Mathematiklehrer eine besondere Bedeutung zu. Ich darf Ihnen aus eigenem Erleben sagen, daß es zu den schönsten mathematischen Berufen gehört, in der neuen Generation die Begeisterung für die Mathematik zu wecken.

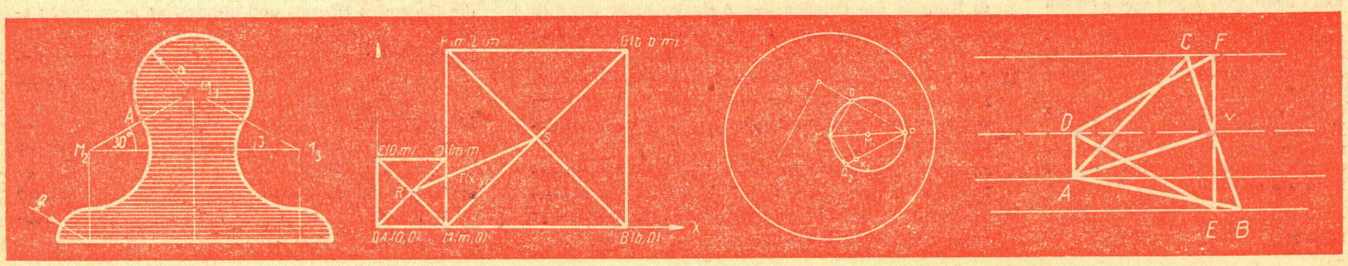
Prof. Dr. Beckert
Mathematisches Institut
der Karl-Marx-Universität

Königin und Dienerin

In dieser Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung finden Sie eine ganze Reihe Aufgaben, die den üblichen Schwierigkeitsgrad der Schule übersteigen und deren Lösung einige Ausdauer erfordert. Wer diese Aufgaben gern löst und dabei Freude und Befriedigung findet, hat eine erste Bedingung für einen mathematischen Beruf erfüllt.

Die Mathematik besteht jedoch nicht aus einer Sammlung von Knobeleien – das wäre eine falsche Vorstellung. Sie ist eine vielschichtiger Anwendungen fähige Wissenschaft, die zu den großartigsten Schöpfungen menschlichen Geistes zählt. Wenn Sie sich ernsthaft mit der Mathematik beschäftigen wollen, kann Ihnen Ihr Lehrer sicher Bücher nennen, die einen Einblick in den systematischen Aufbau von Teilgebieten der Mathematik vermitteln. Natürlich setzt das Lesen eines mathematischen Lehrbuches neben Fleiß und Ausdauer auch einige Übung im mathematischen Denken voraus, die man sich u. a. durch den Schulunterricht und das Lösen von Aufgaben, etwa der vorliegenden, erwerben kann.

Die Mathematik wird in Zukunft immer mehr Bereiche durchdringen und viele Berufe werden eine mathematische Vorbildung verlangen. Ich wünsche viel Erfolg beim Knobeln und hoffe, daß wir einige von Ihnen am Mathematischen Institut als tüchtige Studenten wiedersehen.



Johannes Lehmann,
Verdienter Lehrer des Volkes

In eigener Sache

Den 13. Juni 1960 werde ich in meinem Leben nicht wieder vergessen. An diesem Montag kehrte ich von den Feierlichkeiten anläßlich des Tages des Lehrers aus Berlin zurück. Die Glückwünsche zur Auszeichnung als Verdienter Lehrer des Volkes, Blumen, Geschenke, nahm ich nur wie durch einen Nebel wahr, denn an diesem Tag um 15 Uhr begann in Leipzig die erste Mathematik-Olmpiade für Schüler auf Kreisebene. Sieben Tage lang hatte ich mit je zwei „besessenen" Mathematiklehrern und drei Jugendfreunden (meine Schüler) insgesamt 210 junge Talente der Klassenstufen 5 bis 12 aus 56 Leipziger Schulen – von insgesamt 71 – zu beaufsichtigen, zu betreuen. Oft korrigierten wir anschließend bis in die Nacht hinein, um sofort die Sieger zu ermitteln.

Das war ein lehrreicher Vorlauf für die zweite Olympiade im Januar 1961, der zwei Monate später die erste Bezirksolympiade mit Teilnehmern aus allen 13 Kreisen folgte.

Viele Widerstände waren zu überwinden, ehe ich am Tag des Kindes 1960 den ersten Lesebogen Junger Mathematiker herausbrachte. Heute ist die Zahl der an Lehrer und Schüler ausgelieferten Lesebogen auf mehr als eine Viertelmillion gestiegen. Ein Teil dieses Materials für die außerunterrichtliche Arbeit wandert bis weit über die Grenzen der DDR hinaus.

Mit der Erhöhung des Bildungsniveaus für alle Lernenden sind Maßnahmen zur Förderung besonderer Begabungen und Talente zu treffen. Durch das bessere Eingehen auf individuelle Leistungsvermögen der Lernenden im Unterricht und in der Fach- und Hochschulausbildung, durch die Einrichtung von Spezialschulen und -klassen, durch spezielle Bildungsveranstaltungen an Fach- und Hochschulen, durch außerunterrichtliche Bildungsveranstaltungen und andere Maßnahmen sind die Begabungen zu fördern.

aus: Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem (erster Teil, § 6)

Am 1. Februar 1961 startete die Hauptstadt der Deutschen Demokratischen Republik ihre erste Mathematik-Olympiade in drei Stufen – Schule, Stadtbezirk, Bezirk – für die Klassenstufen 7 bis 12. Seitdem verbindet mich mit meinem Berliner Fachkollegen Herbert Titze eine enge Freundschaft.

Heute ist die Förderung von Talenten innerhalb und außerhalb des Unterrichts ein selbstverständlicher Bestandteil unserer Bildung und Erziehung, und die mathematischen Wettstreite haben ihren festen Platz im einheitlichen sozialistischen Bildungssystem der DDR. Wir haben in dieser Hinsicht viel aufzuholen. In Rumänien und Ungarn gibt es seit einem halben Jahrhundert mathematische Wettbewerbe. Auf Studienreisen bewunderte ich die exakten Dokumentationen der Mathematischen Gesellschaften dieser Länder.

Mit meinem langjährigen Freund Walter Unze, Fachlehrer für Mathematik an der Leipziger Sonderschule für Körperbehinderte, bemühe ich mich um eine solche Dokumentation

Fortsetzung auf Seite 3

Die Aufgaben der Olympiaden der Deutschen Demokratischen Republik/Dokumentation

Klassenstufe 11

1. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^2}$$

2. 500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
   a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluß auf der Rolle, und
   b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

3. Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 km · h⁻¹. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 m · s⁻¹ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt. Nach wieviel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

4. Man beweise, daß die Gleichung
$$x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$$
keine positiven Lösungen haben kann.

5. Differenzieren Sie folgende Funktion
$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

6. Gibt es einen Winkel ε, für den die Gleichung
$$\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon = 1 \quad \text{gilt?}$$

7. Man beweise: Bezeichnen α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, so gilt
$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$$

8. Für welche Werte von a schneidet die Kurve
$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$ die x-Achse unter einem Winkel von $45°$?

9. Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte „stufenweise Verdünnung" an. Man schwemmt 1 cm³ einer Bodenprobe (x) mit 10 cm³ chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm³ und schwemmt es ebenfalls mit 10 cm³ reinem Wasser auf.
   a) Wie oft muß man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2 000 000 zu erreichen?
   b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm³ der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm³ der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält?

10. Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 km/h:
   a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
   b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, daß der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 km/h mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

1. $\frac{169}{30} \; ? \; \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$
   a) Welche der Rechenzeichen (+, —, ·, :) können anstelle des Fragezeichens stehen?
   b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden! [Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung].
   c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
   d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

12. Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	—
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8 000 t Zement und 24 000 t Wandfertigteile.
Nimmt man an, daß x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:
$$5{,}23\,x + 4{,}19\,y \leq 8\,000 \qquad (1)$$
$$22{,}1\,y \leq 24\,000 \qquad (2)$$
Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

13. Es ist zu beweisen, daß bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

14. Der XXII. Parteitag der Kommunistischen Partei der Sowjetunion zeigt uns die gewaltige Perspektive der Entwicklung der Volkswirtschaft. Die Industrieproduktion wird in den nächsten 20 Jahren jährlich um 9,6 Prozent wachsen, d. h. in jedem Jahr wird die Produktion um 9,6 Prozent höher als im Vorjahr sein.
   a) Auf das Wievielfache des Standes von 1960 wird die Industrieproduktion im Jahre 1970 und auf das Wievielfache wird sie im Jahre 1980 angewachsen sein?
   b) Die Industrieproduktion der USA ist in den letzten Jahren nur um 2,5 Prozent jährlich gestiegen. Auf das Wievielfache wird die Produktion der USA im Jahre 1970 und im Jahre 1980 steigen, wenn man eine jährliche Steigerung von 2,5 Prozent annimmt?
   c) Die Industrieproduktion der UdSSR betrug 1960 rund 60 Prozent der Industrieproduktion der USA. Wann wird die UdSSR die USA in der Industrieproduktion einholen?
   d) Wieviel mal so groß als die der USA wird die Produktion der Sowjetunion im Jahre 1980 sein?

15. Ein Dampfer fährt auf einem Fluß von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

16. 3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden. Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist? Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

17. Das auf dem XXII. Parteitag der Kommunistischen Partei der Sowjetunion beschlossene Programm sieht nicht nur ein starkes Anwachsen der industriellen Produktion, sondern auch der landwirtschaftlichen Produktion vor. Die Gesamtproduktion in der Landwirtschaft wird von 1960 bis 1970 etwa auf das Zweieinhalbfache steigen.
   a) Um wieviel Prozent steigt die landwirtschaftliche Produktion jährlich?
   b) Die landwirtschaftliche Produktion der UdSSR betrug 1960 etwa 80 Prozent der landwirtschaftlichen Produktion der USA (im Jahre 1955 waren es nur etwa 60 Prozent). Wann wird die Sowjetunion die USA in der landwirtschaftlichen Produktion einholen, wenn man bei den USA mit einer jährlichen Zunahme der landwirtschaftlichen Produktion von 2 Prozent rechnet?
   c) Um wieviel Prozent wird im Jahre 1970 die landwirtschaftliche Produktion höher als die der USA sein?
   d) Stellen Sie die Entwicklung in beiden Ländern grafisch dar (Skizze genügt)!

18. Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform" (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße:	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm.
Mindestmaße:	Länge und zweifacher Durchmesser 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

   a) Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

b) Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

19. Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen. Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 m/s² eingehalten worden oder nicht?
Begründen Sie Ihre Feststellung!

20. Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält?
Die Behauptung ist zu begründen!

21. In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 DM je Ventilator. Eine sozialistische Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so daß die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 DM je Ventilator betragen. Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13 500,— DM aufgewandt werden.
Wieviel Ventilatoren müßten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird? Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

22. Es ist zu beweisen, daß für

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ stets}$$

$$\sin x + \cos x \geqq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x} \text{ ist!}$$

23. Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \text{ erfüllen!}$$

Das Ergebnis ist zu überprüfen!

24. Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, daß mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10 000fache gesteigert werden kann.

a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?

b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd kWh erzeugt).
Vergleichen Sie die Ergebnisse!

25. Beweisen Sie, daß stets

$$\sin \alpha + \cos \alpha \neq 1{,}5 \text{ ist!}$$

26. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

27. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c} \text{ ist!}$$

28. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen!

29. Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

30. Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geqq 5$ durch 24 teilbar ist!

31. Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

32. Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1 000 050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

33. Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

34. Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2!$$

35. Welche Lösungen hat die Gleichung
$\lg (2 - x) - \lg (x - 3) = 3$?

36. Zeigen Sie, daß $2 = \sin (x + y) \cdot \sin (x - y) - \cos (x + y) \cdot \cos (x - y)$ von y unabhängig ist!

37. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

a) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n}\right) = \qquad (a > o)$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n\right) =$$

38. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl um $\frac{1}{12}$ seiner Intensität J geschwächt. Wieviel Platten sind notwendig, um die Intensität J auf die Hälfte herabzusetzen?

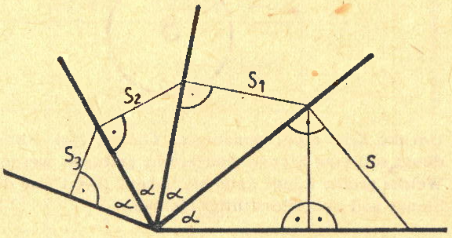
39. Wie erklärt es sich, daß man in dem Ausdruck

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right) \cdot \left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)$$

die beiden Brüche weglassen kann, ohne den Wert des Ausdrucks zu ändern?

40. Je zwei benachbarte Halbstrahlen eines Strahlenbüschels schließen miteinander den Winkel α ein. Von irgendeinem Punkt eines Strahles fällt man auf den nachfolgenden das Lot S, von dessen Fußpunkt auf den nächstfolgenden das Lot S_1 usw.

$$\lim_{n \to \infty} (S+S_1+S_2+\ldots+S_n) = ?$$



41. Ein Bruch von der Form $\frac{1}{a^2 + a}$ läßt sich in die Differenz zweier Teilbrüche zerlegen.
Berechnen Sie:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x}$$

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Lösung!

42. Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.

a) Wie kann man mit 3 Wägungen ermitteln, welche Kugel es ist?

b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist?

43. Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,— DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann. Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?
(Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.)

44. Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?
(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

45. Bei der Aufgabe

```
 A T O M   A T O M
 -----------------
   X X X X X
     X X X X X
       X X X X X
         X X X X X
 -----------------
   X X X X A T O M
```

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen X eine der Ziffern von 0 bis 9 ($A \neq O$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.
Wie lautet die Aufgabe?

Fortsetzung von Seite 2

für die Deutsche Demokratische Republik. Der 17. Lesebogen (a+b=b+a, Auflage 20 000) mit 573 Aufgaben für die Klassenstufen 2 bis 10 und diese mathematische Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung mit Aufgaben für die Klassenstufen 11 und 12 sind eine Art Zwischenbilanz, zeigen, welchen Weg wir beschritten, was wir bisher erreicht haben.

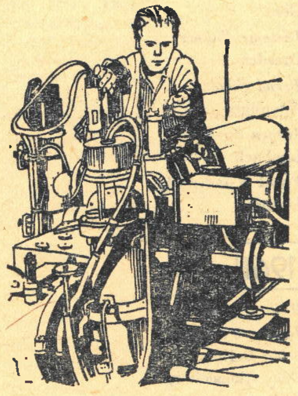
An dieser Stelle möchte ich den Tausenden Lesern danken, die uns durch ihre Anteilnahme und Anerkennung anspornten, unsere Arbeit auf dem Gebiet der pädagogischen Propaganda immer weiter zu verbessern. Unser Dank gilt auch den Mitarbeitern an der Schreibmaschine, am Zeichenbrett, im Fotolabor, am Schreibtisch, den Setzern und Druckern. Rückhaltlose Unterstützung gewährten uns die Direktoren des Pädagogischen Bezirkskabinetts und des Pädagogischen Kreiskabinetts Leipzig-Stadt sowie der Kreisvorstand des FDGB, Gewerkschaft Unterricht und Erziehung Leipzig-Stadt.

Als langjähriger ehrenamtlicher Mitarbeiter der LVZ bin ich besonders erfreut über die Initiative und das pädagogische Verständnis für die Volkswissenschaft Mathematik, denen ich dort begegne.

Vor uns stehen die IV. Mathematik-Olympiade der DDR und die VII. Internationale Olympiade. Beide werden dazu beitragen, die Schönheit, Klarheit, Exaktheit, die erzieherischen Werte der Mathematik nicht nur zu zeigen, sondern unsere mathematischen Talente zu scharfem Nachdenken und bewußtem zielstrebigen Handeln herauszufordern. Wir erwarten von ihnen, daß sie ihr Wissen und Können an ihre Mitschüler weitergeben und später in mathematischen Berufen anwenden.

Viel Freude, schöpferische Kraft und natürlich gute Erfolge wünscht

Joh. Lehmann



Köpfchen, Köpfchen ...

In einem mathematischen Zirkel für Schüler der 7. und 8. Klassenstufen arbeitet auch ein Junge aus der 5. Klasse mit.

Eine Aufgabe lautet: Es ist zu beweisen, daß $53^{53}-33^{33}$ durch 10 teilbar ist.

Ein Teilnehmer (8. Klasse): Ist doch klar. Bei der Subtraktion dieser beiden Ausdrücke ist die letzte Ziffer eine Null, also ist Ausdruck durch 10 teilbar.

Harald (der Teilnehmer aus der 5. Klasse): Stop, das war ein Trugschluß. Erst muß ja bewiesen werden, daß beide Ausdrücke auf dieselbe Ziffer enden, erst dann ist klar, daß die Differenz als letzte Ziffer eine Null hat.

Und er bewies es.

Sie vertraten die DDR bei den IMO

1959

Rudolf Nitz, Magdeburg, Delegationsleiter und Betreuer

Teilnehmer:

Dieter Domes, Magdeburg
Werner Schöneberg, Magdeburg
Elke Genz, Limbach-Oberfrohna
Frank Köhler, Limbach-Oberfrohna
Frank Zilger, Dresden
Bernd Kässner, Dresden
Ingrid Seidel, Be lin
Irene Neumann, Berlin

1960

Johannes Gronitz
Walter Schramm, beide Berlin, Delegationsleiter, Stellvertreter

Teilnehmer:

Klaus Walter, Görlitz, Diplom
Horst Ernst, Dahlen
Dietmar Peip, Gera
Dietmar Rahner, Dresden
Bernd Scholz, Altenburg
Jürgen Streu, Limbach
Frank Wunderlich, Limbach

1961

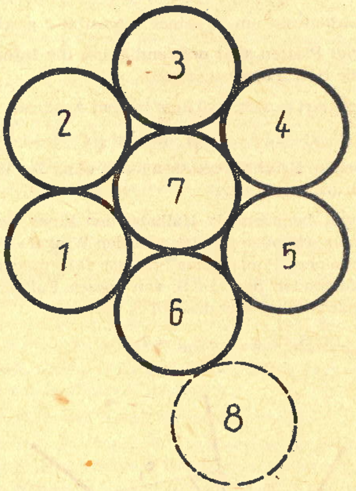
Herbert Titze
Johannes Gronitz, beide Berlin, Delegationsleiter, Stellvertreter

Teilnehmer:

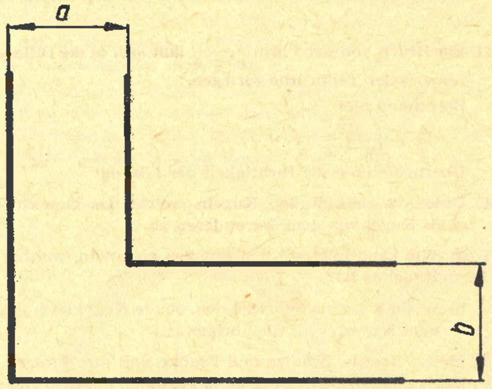
Thomas Görnitz, Leipzig, 3. Preis
Heike Wenzel (Lawin), Berlin, Diplom
Mary Schleifstein, Berlin, Diplom
Gerd Nass, Halle, Diplom
Gernot Krabbes, Halle
Peter Bachmann, Freital
Steffen Oelsner, Oschatz
Klaus Zipperer, Berlin

46. Drei Studentinnen, Monika, Eva und Gisela werden nach ihrem Alter gefragt. Jede antwortet mit drei Sätzen:
Monika: „Ich bin 22 Jahre alt; ich bin zwei Jahre jünger als Gisela; ich bin ein Jahr älter als Eva."
Gisela: „Ich bin nicht die Jüngste von uns dreien; zwischen Eva und mir besteht ein Altersunterschied von 3 Jahren; Eva ist 25 Jahre alt."
Eva: „Ich bin jünger als Monika; Monika ist 23 Jahre alt; Gisela ist drei Jahre älter als Monika."
Jede muß auf eine nochmalige Frage zugeben, daß sie nur zweimal die Wahrheit gesagt hat und einmal eine Unwahrheit. Wie alt ist jede der drei Studentinnen?

47. In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslos ab. Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?



48. Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung) soll eine Stange waagerecht getragen werden. Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)



49. Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt:
$h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\alpha = 106{,}4°$,
Konstruieren Sie das Dreieck!

50. Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?

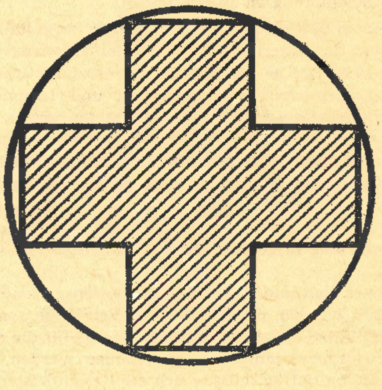
51. Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen. Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.

a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, daß die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 mm liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?

b) Wie groß ist das Volumen?

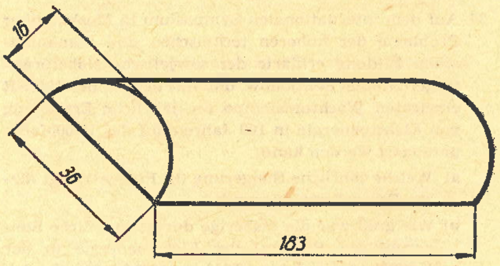
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

52. Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninnern kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)



53. In einem Achsenkreuz sind die Punkte P_1 (1;1) P_2 (4;2) P_3 (3;—2) Z (—1;4) gegeben. Es ist ein dem $\triangle\, P_1\, P_2\, P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3!

54. Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!

c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

55. Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt a Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

56. Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis. Welche Abmessungen muß der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

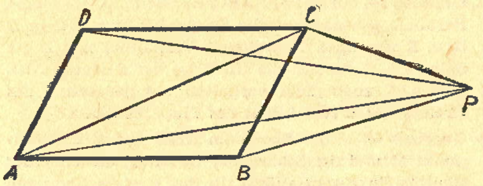
57. Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden. Wie groß muß man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit

a) der Rauminhalt,

b) die Mantelfläche,

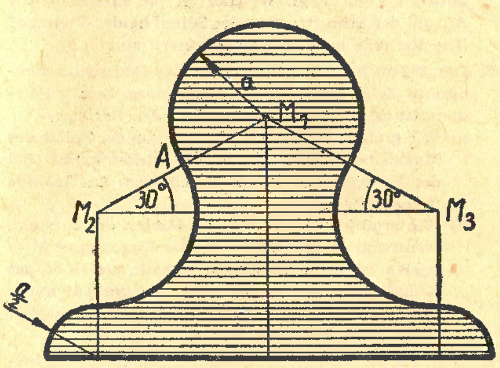
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

58. Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion!

59. Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = a$ ist!



60. Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

A (0,00;0,00), B (87,00;54,40), C (153,60;44,00), D (206,40; 25,00), E (303,50;33,80), F (352,00;0,00).

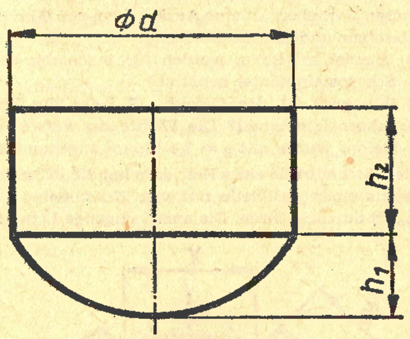
a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!

b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wieviel m² Straße asphaltiert werden müssen!

61. Beweisen Sie folgende Behauptung:
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punktes von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks!

62. Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung) dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

63. Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.



a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe?

b) Berechnen Sie den Zahlenwert für
$d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
(Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.)

64. Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.

a) Wo liegen alle Punkte P, für die die Quadrate ihrer Entfernung von A und B die feste Summe s haben?

b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

65. Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke.

Beweisen Sie diese Behauptung!

66. Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, daß der erhaltene Schnitt ein

a) gleichseitiges Dreieck b) Quadrat

c) regelmäßiges Fünfeck d) regelm. Sechseck ist?

Die Behauptungen sind zu beweisen!

67. Es seien ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P$, $P_2 P$ bzw. $P_3 P$ mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.
Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1 P}{P Q_1}, \quad \frac{P_2 P}{P Q_2}, \quad \frac{P_3 P}{P Q_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

68. Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind. Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, daß in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wieviel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wieviel haben eine, wieviel zwei und wieviel drei angestrichene Flächen?

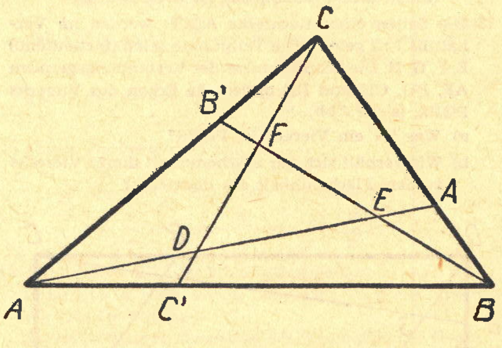
b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

69. Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, daß ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und
AB = BC ist.
Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!

Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

70. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A', B' bzw. C', so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist (vgl. die Abbildung).



71. Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen! Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

1962

Herbert Titze,
Berlin,
Delegationsleiter

Johannes Gronitz,
Karl-Marx-Stadt,
Stellvertreter

Teilnehmer:

Karl-Heinz Tetsch,
Sonneberg, 2. Preis

Reinhard Bölling,
Berlin

Claus Michel,
Bautzen

Wolfgang Lehmann,
Leipzig

Walter Görgens,
Schönebeck/Elbe

Friedrich Golze,
Senftenberg

Katharina Görke,
Berlin

Stefan Weller,
Berlin

1963

Prof. Dr. W. Engel,
Rostock,
Delegationsleiter

Oberstudienrat
Herbert Titze,
Berlin,
Stellvertreter

Teilnehmer:

Rolf-Gunter Riedel,
Freital, 3. Preis

Uwe Küchler,
Lauchhammer, 3. Preis

Hans-Ulrich Schwarz,
Jena, 3. Preis

Rolf Thier,
Altenburg

Wolfgang Schulze,
Bernau

Bernd Noack,
Berlin

Joachim Krell,
Berlin

Lutz Bernhardt,
Leipzig

1964

Prof. Dr. W. Engel,
Rostock,
Delegationsleiter

Oberstudienrat
Herbert Titze,
Berlin,
Stellvertreter

Teilnehmer:

Wolfgang Klamt,
Leipzig, 2. Preis

Manfred Brandt,
Fürstenwalde, 3. Preis

Monika Titze,
Berlin, 3. Preis

Jan Grabowski,
Berlin

Manfred Krüppel,
Rostock

Otto Trewendt,
Berlin

Ilona Zinke,
Cottbus

Dietrich Freitag,
Sondershausen

Aus dem Statut der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Das Ziel der Olympiaden Junger Mathematiker ist es, den Schülern die Bedeutung mathematischen Wissens und Könnens bewußt zu machen sowie Interesse und Begeisterung für das Fach Mathematik zu wecken, sie zu mathematischem Denken zu erziehen und zur Lösung mathematischer Probleme zu befähigen. Gleichzeitig sollen mathematisch interessierte und talentierte Schüler ermittelt werden, damit sie systematisch gefördert werden können. Die Teilnahme an den Olympiaden ist freiwillig.

Teilnahmeberechtigt sind die Schüler der allgemeinbildenden polytechnischen zehn- und zwölfklassigen Oberschulen, der Klassen Berufsausbildung mit Abitur, aus Berufsschulen, Abendoberschulen und Volkshochschulen. Die Teilnehmer dürfen bei Beginn des Schuljahres nicht älter als 19 Jahre sein.

Die Teilnehmer werden nach Klassen eingeteilt. Jeder Schüler darf in einer höheren Klasse als der, die seinem Ausbildungsstand entspricht, teilnehmen.

Die Olympiade Junger Mathematiker umfaßt vier Stufen. Die Teilnahme an der nächsthöheren Stufe setzt eine erfolgreiche Beteiligung am Wettbewerb der vorangehenden Stufe voraus.

Aus den Preisträgern der DDR-Olympiade werden die Teilnehmer an der Internationalen Olympiade (IMO) ausgewählt. Die erfolgreiche Teilnahme an der DDR-Olympiade wird bei der Zulassung zu einem Studium, das mathematische Fähigkeiten erfordert, berücksichtigt.

Die Olympiade Junger Mathematiker wird von dem Zentralen Komitee geleitet. Es stützt sich dabei auf die Arbeit von drei Kommissionen: Organisationskommission, Aufgabenkommission, Jury. Der Vorsitzende des Zentralen Komitees und die Vorsitzenden der Kommissionen werden im Einverständnis mit dem Ministerium für Volksbildung vom Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft ernannt. Der Vorsitzende der Organisationskommission ist zugleich Sekretär des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker.

Dem Zentralen Komitee gehören an: der Vorsitzende, die Vorsitzenden der drei Kommissionen, je ein Vertreter der Staatlichen Kommission für Mathematik beim Ministerium für Volksbildung, des Ministeriums für Volksbildung, des Zentralrates der FDJ, des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen, der Sekretär der Mathematischen Gesellschaft der DDR. Sitz des Zentralen Komitees ist Berlin.

Die Organisationskommission hat die Durchführung der Olympiaden Junger Mathematiker in allen Stufen sicherzustellen.

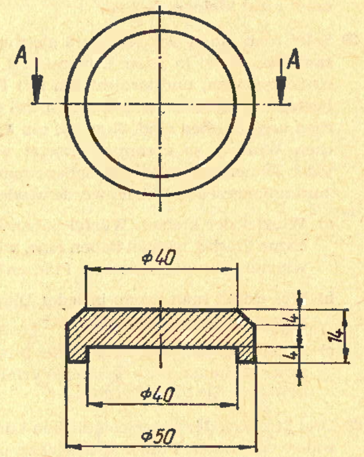
Die Aufgabenkommission hat die Aufgaben, die zugehörigen Lösungen und die Bewertungsrichtlinien zu erarbeiten. Ihr gehören an: der Vorsitzende dieser Kommission, der Sekretär des Zentralen Komitees, ein Mitglied der Jury, vier Hochschullehrer, vier Lehrer.

Die Jury hat die Korrekturen der Aufgaben der vierten Stufe anzuleiten, die Preisverteilung und die Teilnehmer an der Internationalen Olympiade vorzuschlagen. Sie soll nicht mehr als zwölf Mitglieder umfassen.

Die Deutsche Demokratische Republik beteiligt sich an der alljährlich stattfindenden Internationalen Mathematikolympiade.

72. Zu dem „Haus des Lehrers" in Berlin gehört auch ein Kongreßgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte. Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m.
Berechnen Sie:
a) den Radius r der Kugel,
b) die Fläche der Kugelkalotte und
c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Alu $\gamma = 2{,}7\,\mathrm{p \cdot cm^{-3}}$)!

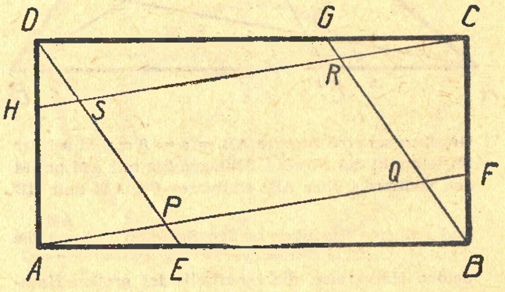
73. Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp" wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.
a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?
b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird? (Vgl. Abbildung).



74. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, daß für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:
$$d = \sqrt{r_1\,(r_1 - 2r_2)}\,!$$
Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

75. Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.
a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, daß $PR = PQ$ ist!
b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

76. Die Seiten eines Rechtecks ABCD werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks PQRS. (siehe Abb).
a) Was für ein Viereck ist PQRS?
b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?



77. Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, daß von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben. Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

78. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet. In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes DBCE?

79. Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

80. In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, daß keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt. Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke? (Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.)

81. Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.
a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi R h$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6370$ km.)

82. Gegeben sei ein Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G. Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

83. In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

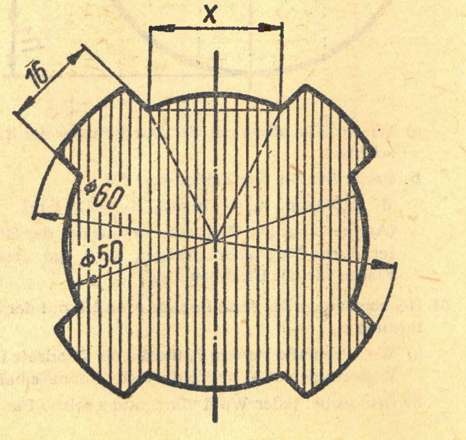
84. In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

85. Für das Kraftwerk Klingenberg wurden zwei neue Schornsteine gebaut. Jeder von ihnen besteht aus einem Betonmantel, der die Form eines hohlen Kreiskegelstumpfes mit den folgenden Maßen hat:

Unterer lichter Durchmesser	d_u	= 10,00 m
Oberer lichter Durchmesser	d_o	= 7,50 m
Unterer äußerer Durchmesser	D_u	= 11,20 m
Oberer äußerer Durchmesser	D_o	= 7,80 m
Höhe	H	= 140,00 m

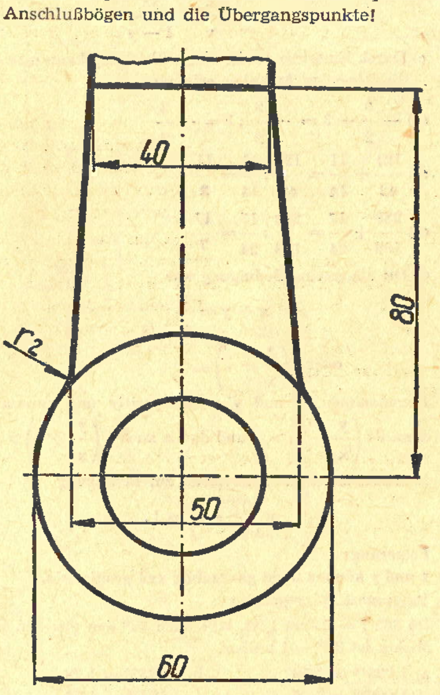
Dieser Mantel erhält eine Auskleidung von Glaswolle, Kieselgur und Klinkersteinen.
a) Wieviel m^3 Beton werden für jeden der beiden Schornsteinmäntel benötigt?
b) Wie groß ist das Gewicht G jedes der beiden Schornsteinmäntel? Die Wichte des verwendeten Betons wurde mit $\varrho = 2{,}4\ \mathrm{Mp/m^3}$ angenommen.

86. Die Gütekontrolle eines Betriebes hat die Prüfung des Profils einer Keilwelle mit vier Nutenkeilen (siehe Figur) durchzuführen. Die anzufertigende Lehre mißt



als Prüfstrecke x den Abstand zweier benachbarter Keile von Innen- zu Innenkante. Berechnen Sie das Prüfmaß!

87. In der Skizze sind die Nabe und der anschließende Schaft eines Hebels aufgezeichnet. Der Übergang vom Schaft zur Nabe soll durch eine Abrundung mit $r_2 =$ 30 mm erfolgen. Konstruieren Sie die Mittelpunkte der Anschlußbögen und die Übergangspunkte!

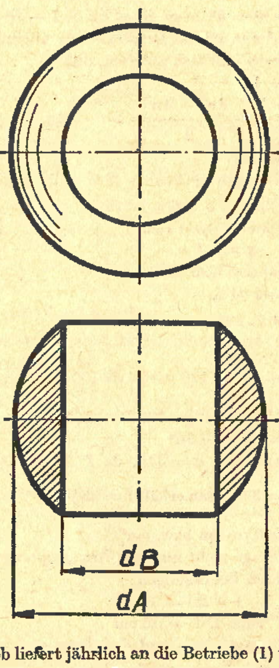


88. Zur Verwendung als verschiebbare Laufgewichte auf einer Stange sollen zylindrisch durchbohrte Kugelringe hergestellt werden.

a) Stellen Sie die Gesamtfläche dieses Kugelringes als Funktion vom Bohrlochdurchmesser dar! (Kugeldurchmesser konstant vorgegeben).

b) Wie groß muß der Bohrlochdurchmesser sein, wenn die Gesamtoberfläche maximal sein soll?

c) Wie groß ist die maximale Oberfläche?



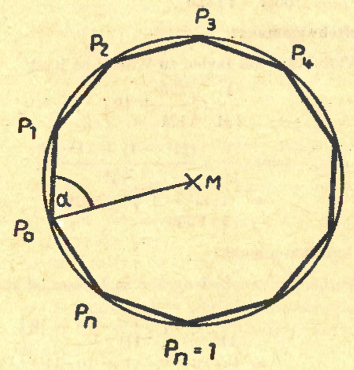
89. Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t bzw. 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in MDN betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wieviele Fahrten muß jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Anmerkung: Man bezeichnet zweckmäßigerweise die Anzahl der jährlichen Fahrten des LKW i zum Betrieb j mit x_{ij}. (x_{12} — lies: „x eins - zwei" — ist also z. B. die Anzahl der jährlichen Fahrten des LKW 1 zum Betrieb 2.)

90. In dem Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius $\overline{MP_0}$ den Winkel α bildet $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ reflektiert (vgl. die Abbildung!).



a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\widehat{P_0P_n}$ an!

b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_{10}$ sich nicht überschneidet?

c) Es sei $\alpha = 50°$. Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt?

Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an!

(In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ überschneiden).

91. Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$? (im Dezimalsystem).

92. Man berechne gemeinsame Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

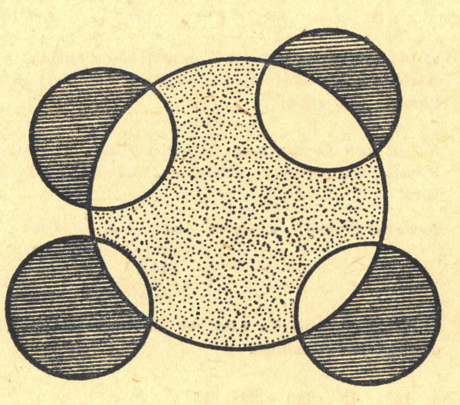
(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

93. Ohne Benutzung einer Tafel und ohne Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

94. Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (Abbildung).



a) Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Abbildung punktierten Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage läßt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Mathematikerpersönlichkeiten des 19. und 20. Jahrhunderts

Sie lehrten an der Karl-Marx-Universität

1796–1814 Moritz von Prasse
1801–1810 Conrad S. Ouvrier
1811–1825 Brandan Mollweide
1815–1868 August Ferdinand Möbius
1824–1867 Moritz Wilhelm Drobisch
1812–1834 Heinrich Brandes
1841–1843 Carl Wilhelm Brandes
1833–1874 Gotth. Oswald Marbach
1853–1908 Wilhelm Scheibner
1863–1867 Hermann Hankel
1866–1908 Adolph Mayer
1867–1889 Karl von der Mühll
1868–1911 Carl Neumann
1876–1877 Axel Harnack
1878–1888 Carl Rohn
1904–1920 Carl Rohn
1880–1886 Felix Klein
1881–1888 Friedrich Schur
1882–1887 Walter (von) Dyck
1885–1888 Eduard Study
1884–1904 Friedrich Engel
1886–1898 Sophus Lie
1891–1896 Georg Wilhelm Scheffers
1893–1916 Otto Fischer
1895–1910 Felix Hausdorff
1899–1901 Gerhard Kowalewski
1899–1937 Otto Hölder
1899–1910 Heinrich Liebmann
1909–1925 Gustav Herglotz
1910–1914 Paul Koebe
1926–1945 Paul Koebe
1911–1914 Robert König
1914–1917 Wilhelm Blaschke
1917–1956 Walter Schnee
1919–1935 Friedrich Levi
1922–1933 Leon Lichtenstein
1922–1926 Ludwig Neder
1929–1939 Ernst Hölder
1931–1945 B. L. van der Waerden
1937–1944 Eberhard Hopf
1935 Felix Burkhard

Mathematik als Erholung

Marx hatte neben den Poeten und Romanciers noch ein anderes sehr merkwürdiges Mittel, um geistig auszuruhen; das war die Mathematik, für die er besondere Vorliebe hegte. Die Algebra gewährte ihm sogar einen moralischen Trost; zu ihr nahm er seine Zuflucht in den schmerzlichsten Momenten seines bewegten Lebens. Während der letzten Krankheit seiner Frau war es ihm unmöglich, sich in gewohnter Weise mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu beschäftigen; er konnte dem Druck, den die Leiden seiner Gefährtin auf sein Gemüt ausübten, nur entfliehen, wenn er sich in die Mathematik versenkte... In der höheren Mathematik fand er die dialektische Bewegung in ihrer logischsten und zugleich einfachsten Form wieder; nach seiner Meinung war auch eine Wissenschaft erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt war, sich der Mathematik bedienen zu können.

aus: Paul Lafargue „Erinnerungen an Marx"

Die erste Internationale Olympiade

1959 in Rumänien

Am 21. Juli 1959 reiste die Delegation der DDR zur ersten Internationalen Mathematik-Olympiade aus Berlin ab. Es war für alle Mitglieder die erste Fahrt ins Ausland nach 1945.

Welche Freude, die ersten Begegnungen der Schüler aus den befreundeten Ländern zu erleben – außer Albanien waren alle europäischen Volksdemokratien und die Sowjetunion beteiligt. Die Verständigung über mehrere Sprachen, die Aufgeschlossenheit der Jugend, ihre stürmisch erregten Fragen und Antworten werde ich nie vergessen. Was kann es für einen Menschen, der bisher die internationale Solidarität nur theoretisch kannte und bejahte, Schöneres geben als dieses Erlebnis der lebendigen Verbundenheit junger Sozialisten?

Newton schrieb einmal als „Rezept" für Reisende in fremde Länder sinngemäß: Beobachten Sie die Sitten; passen Sie sich ihnen an. Treten Sie nicht als Lehrender sondern stets als Lernender auf. Unsere Schüler haben sich bemüht, ihr Verhalten danach einzurichten.

Beim mathematischen Wettbewerb zu dem die Schüler aus den befreundeten Ländern gut vorbereitet antraten, konnten einzelne Teinehmer aus der DDR zehn Punkte erreichen. In der Einzelwertung war ein Schüler aus der CSR mit 40 Punkten der Beste, Zweiter war ein junger Rumäne mit 37 Punkten, Dritter ein junger Ungar mit 36 Punkten. In der Länderwertung nahmen die Rumänische Volksrepublik, die Ungarische Volksrepublik und die Sowjetunion die ersten drei Plätze ein.

Rudolf Nitz

Kein Mensch wird dadurch kräftig, daß er eine Abhandlung über Turnen liest, sondern indem er turnt; kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, daß er selbst denkt und sich die Natur der Dinge selbst zu erklären sucht.

Mihai Eminescu
(VR Rumänien)

Platz der Republik in Bukarest

Lösungen Klassenstufe 11

9. Aufgabe

1. Aufschwemmung:

1 Teil Bodenprobe und 10 Teile Wasser werden zu 11 Teilen Mischung vereinigt. Das Verhältnis von Boden zu Waser ist

$$1:10$$

2. Aufschwemmung:

1 Teil Mischung wird mit 10 Teilen Wasser vereinigt. Das Verhältnis von Boden zu Wasser ist jetzt

$$\frac{1}{11} : \left(\frac{11}{10} + 10\right)$$

oder $\frac{1}{11} : \frac{10 + 110}{11}$

oder $1:120$

3. Aufschwemmung:

Das Verhältnis von Boden zu Wasser ist jetzt

$$\frac{1}{121} : \left(\frac{120}{121} + 10\right)$$

oder $\frac{1}{11^2} : \frac{(11^2 - 1) + 11^2 \cdot 10}{11^2}$

$= 1:11^2 - 1 + 11^2 \cdot 10$

$= 1:1330$

n-te Aufschwemmung:

Das Verhältnis von Bodenprobe zu Wasser ist allgemein

$$\frac{1}{11^{n-1}} : \left(\frac{11^{n-1} - 1}{11^{n-1}} + 10\right)$$

$= 1:(11^{(n-1)} - 1 + 10 \cdot 11^{(n-1)})$

$= 1:(11^{(n-1)} \cdot 10 \cdot 11^{(n-1)} - 1)$

$= 1:[11^{(n-1)} \cdot (1 + 10) - 1]$

$= 1:[11^n - 1]$

a) Mischverhältnis etwa 1:2000000
es muß also

$1:(11^n - 1) = 1:2000000$ sein.

Vereinfacht heißt es dann

$11^n - 1 = 2000000$,

für $n = 6$, erhält man

$11^6 = 1771561$.

Man muß die Aufschwemmung etwa 6mal wiederholen, um ein Mischverhältnis von 1:2000000 zu erhalten.

b) In 1 cm^3 Bodenprobe waren 10 Millionen Bakterien enthalten. Dann sind in 1 cm^3 der Aufschwemmung nur noch $\frac{1}{2000000}$ der ursprünglich enthaltenen Bakterien, also etwa 5 Bakterien.

In der Aufschwemmung sind durchschnittlich etwa 5 Bakterien enthalten.

10. In 14 Sekunden wird der Wagen auf $80\,km \cdot h^{-1}$ oder $22{,}2\,m \cdot s^{-1}$ beschleunigt.
Formel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung:

$$s = \frac{b}{2} t^2 \quad \text{und} \quad v = b \cdot t \quad \text{und} \quad b = \frac{v}{t}$$

eingesetzt in $s = \frac{b}{2} t^2$ ergibt: $s = \frac{v \cdot t}{2}$

$$s = \frac{22{,}2 \cdot 14}{2} \qquad s = 155{,}4$$

a) In 14 Sekunden legt der Wagen 0,155 km zurück.
Nach 14 Sekunden fährt der Wagen in geradlinig gleichförmiger Bewegung:

$$s = v \cdot t$$

Es ist noch zu berechnen, in welcher Zeit die restliche Strecke von 844,6 m (1000 m — 155,4 m) zurückgelegt wird.

Nach der Formel $s = v \cdot t$ ist $t = \frac{s}{v}$

$$t = \frac{844{,}6}{22{,}2} \qquad t = 38{,}1$$

b) Insgesamt wird für 1 km die Zeit von 14 s + 38,1 s, das sind 52,1 s benötigt.

11. a_1) $\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{169 + 26}{30} = \frac{13}{2}$

a_2) Die Subtraktion entfällt in diesem Fall, denn Summe und Differenz zweier rationaler Zahlen ($\neq 0$) können nie gleich sein.

a_3) $\frac{169}{30} \cdot \frac{13}{15} = \frac{169 \cdot 13}{30 \cdot 15} \neq \frac{13}{2}$

a_4) $\frac{169}{30} : \frac{13}{15} = \frac{169 \cdot 15}{30 \cdot 13} = \frac{13}{2}$

Anstelle des Fragezeichens können nur die beiden Rechenzeichen (+) und (:) stehen.

b) Nach a) sind zwei Zahlen x und y zu finden, so daß ihre Summe gleich dem Quotienten von ihnen ist:

$$x + y = \frac{x}{y} = \frac{y^2}{1 - y}$$

c) Durch Einsetzen in die obige Gleichung kann man etwa die folgenden Aufgaben erhalten:

c_0) $-\frac{9}{2} + 3 = -\frac{9}{2} : 3 = -\frac{3}{2}$

c_1) $\frac{121}{42} + \frac{11}{14} = \frac{121}{42} : \frac{11}{14} = \frac{11}{3}$

c_2) $\frac{289}{168} + \frac{17}{24} = \frac{289}{168} : \frac{17}{24} = \frac{17}{7}$

d) Die allgemeine Bedingung war

$$x + y = \frac{x}{y}$$

oder $y\left(\frac{y}{x} + 1\right) = 1$

Angenommen, x und y wären positiv und ganzzahlig, dann ist $\left(\frac{y}{x} + 1\right) > 1$ und damit auch $y\left(\frac{y}{x} + 1\right) > 1$.

Letzteres steht im Widerspruch zur Bedingung

$$y\left(\frac{y}{x} + 1\right) = 1.$$

Folgerung:
x und y können nicht ganzzahlig und positiv sein.

13. Es ist $6^{2n} - 1 = 36^n - 1$.
Da $36:7 = 5$ Rest 1 ist, läßt auch 36^n den gleichen Rest. Mithin ist $36^n - 1$ teilbar.

14. a) $1{,}096^{10} = 2{,}50$ b) $1{,}025^{10} = 1{,}28$
$1{,}096^{20} = 6{,}25$ $1{,}025^{20} = 1{,}64$

c) $60 \cdot 1{,}096^x = 100 \cdot 1{,}025^x$
$x \approx 7{,}6$. Also 1968

d) $\frac{6{,}25 \cdot 0{,}6}{1{,}64} = 2{,}28$; etwa 2,3mal so groß

15. Es ist $s:(v_D + v_S) = 3$

$$s:(v_D - v_S) = \frac{9}{2}$$

Der Dampfer würde ohne Strömung $3\frac{3}{5}$ Std. fahren, daher braucht das Fahrzeug 18 Stunden.

16. Da $c^2 - b^2 = a^2$ bzw. $b^2 + 2b + 1 - b^2 = a^2$, kann es sich bei a^2 nur um das Quadrat einer ungeraden Zahl handeln. Daraus läßt sich ableiten, daß

$a = 2n + 1$

$b = \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{4n^2 + 4n}{2} = 2n^2 + 2n.$

Tatsächlich ist:

$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$

17. a) $x^{10} = 2{,}5$, d. h. 9,6% jährlich
b) $80 \cdot 1{,}096^x = 100 \cdot 1{,}02^x$
$x \approx 3{,}1$
In 3 Jahren, also 1963
c) Um rund 64%

18. a) $l + 2d \leq 100$
$l \leq 80$

Für $l + 2d = 100$ wird $l = 100 - 2d$ und $f(d) = \frac{4V}{\pi}$

$= d^2(100 - 2d) = 100d^2 - 2d^3$

$f'(d) = 200d - 6d^2$

Maximum für $d = 33\frac{1}{3}$, da $f''(d) = 200 - 12d < 0$

für $d = 33\frac{1}{3}$. Man erhält $l = 33\frac{1}{3}$ und $V = \frac{\pi}{4}(33\frac{1}{3})^3$

$\approx 29\,060$ (in cm bzw. cm^3).

b) Diese Frage stellt nur eine Art „Sophismus" dar. Denn die beiden Bedingungen

$l + 2d = 17$ cm
$\max(l, d) = 10$ cm

sind für $l = 17$ cm und $d = 0$ cm stets erfüllt, so daß theoretisch $V_{min} = 0$ ist.

21. Mindestens 744 Stück.

22. Für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ ist $(1 - 2 \sin x \cos x)^2 \geqq 0$, also

$1 - 4 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos^2 x \geqq 0$.

Da $(1 + 2 \sin x \cos x)^2 - 8 \sin x \cos x = (1 - 2 \sin x \cos x)^2$,
ist $(1 + 2 \sin x \cos x)^2 - 8 \sin x \cos x \geq 0$
oder $(1 + 2 \sin x \cos x)^2 \geqq 8 \sin x \cos x$.
Mithin ist $(\sin x + \cos x)^4 \geqq 8 \sin x \cos x$

und $\sin x + \cos x \geqq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}$.
Es muß zunächst sein

$$-1 \leqq x \leqq 3.$$

Ferner erhält man (z. B. nach zweimaligem Quadrieren usw.), daß

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad \text{und} \quad x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31}$$

sein müßte. Die Probe zeigt, daß

$$-1 \leqq x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}$$

alle Lösungen umfaßt.

24. a) Aus $x^{100} = 10000$ erhält man 9,6%.
b) Die bisherige Steigerung betrug 11,5%, war also noch höher als in der Vorhersage.

25. Wäre die Behauptung falsch, so müßte $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2{,}25$ sein bzw. (nach entsprechender Umformung) $\sin 2\alpha = 1{,}25$. Dies ist aber nicht möglich, also war die Behauptung richtig.

26. Mit Hilfe der Potenzgesetze wird er Ausdruck umgeformt:

$$5 \cdot 5^{2n} \cdot 2^2 \cdot 2^n + 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^{2n}$$
$$20 \cdot 5^{2n} \cdot 2^n + 18 \cdot 2^{2n} \cdot 3^n$$
$$20 \cdot (50)^n + 18 \cdot 12^n$$

Die beiden Faktoren 20 und 18 lassen wegen ihrer durch 19 teilbaren Summe 38 einen Zusammenhang ahnen. Zum Ziel kommt man jedoch nur, wenn es gelingt, den Ausdruck in Vielfache von 19 zu zerlegen.

$$20\,(38 + 12)^n + 18 \cdot 12^n$$

Die ersten Glieder des Ausdrucks $(38 + 12)^n$ sind alle Vielfache der Zahl 19! Das letzte Glied heißt 12^n.

$$20\,(38^n + 38^{n-1} \cdot 12 + \cdots + 38 \cdot 12^{n-1} + 12^n) + 18 \cdot 12^n$$

also

$$20\,(19a_1 + 19a_2 + 19a_3 + \cdots 19a_n) + 20 \cdot 12^n + 18 \cdot 12^n$$
$$20\,(19a_1 + 19a_2 + 19a_3 + \cdots 19a_n) + 38 \cdot 12^n$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, denn beide Summanden sind durch 19 teilbar und so auch der gesamte Ausdruck.

28. $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\,(1 - \sin x \cos x)$.
Setzt man $\sin x + \cos x = a$, so erhält man $a^3 - 3a + 2 = 0$ und daraus $x = 2k\pi$ und $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mit

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

29. a) Man kann annehmen, daß sich in der 1. Tasse die Menge 1 an Milch und in der 2. Tasse die Menge 1 an Kaffee befinden. Bezeichnet man die Menge, die ein Löffel faßt, mit q, so erhält man das folgende Schema:

	1. Tasse		2. Tasse	
	Kaffee	Milch	Kaffee	Milch
Anfangszustand	0	1	1	0
Zustand nach der ersten Umfüllung	0	$1 - q$	1	q
Veränderung durch die 2. Umfüllung	$+\frac{q}{1+q}$	$+\frac{q^2}{1+q}$	$-\frac{q}{1+q}$	$-\frac{q^2}{1+q}$
Endzustand	$\frac{q}{1+q}$	$1 - q + \frac{q^2}{1+q} = \frac{1}{1+q}$	$1 - \frac{q}{1+q} = \frac{1}{1+q}$	$q - \frac{q^2}{1+q} = \frac{q}{1+q}$

In der 1. Tasse befindet sich also im Endzustand ebenso viel Kaffee wie in der 2. Tasse Milch.

b) In diesem Falle erhält man das folgende Schema:

	1. Tasse		2. Tasse	
	Kaffee	Milch	Kaffee	Milch
Anfangszustand	0	1	2	0
Zustand nach der ersten Umfüllung	0	$1 - q$	2	q
Veränderung durch die 2. Umfüllung	$+\frac{2q}{2+q}$	$+\frac{q^2}{2+q}$	$-\frac{2q}{2+q}$	$-\frac{q^2}{2+q}$
Endzustand	$\frac{2q}{2+q}$	$1 - q + \frac{q^2}{2+q} = \frac{2-q}{2+q}$	$2 - \frac{2q}{2+q} = \frac{4}{2+q}$	$q - \frac{q^2}{2+q} = \frac{2q}{2+q}$

In der 1. Tasse befindet sich also auch diesmal ebenso viel Kaffee wie in der 2. Tasse Milch.

27. Man zerlege die rechte Seite in drei gleiche Summanden. Jeder von ihnen ist dann kleiner als jeder der links stehenden Summanden.

$$\text{Aus } \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}; \quad \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c};$$
$$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}$$
$$\text{folgt } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > 3 \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

und damit die Behauptung.

30. Es ist $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$, wobei beide Faktoren gerade Zahlen sind. Da eine Primzahl $p > 2$ bei Division durch 4 stets entweder den Rest 1 oder den Rest 3 läßt, ist auch stets entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 4 teilbar, das Produkt $(p + 1)(p - 1)$ also durch 8 teilbar. Bei Division durch 3 läßt jede Primzahl $p > 3$ entweder den Rest 1 oder den Rest 2. Also ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar und mithin $p^2 - 1$ für $p \geqq 5$ durch 24 teilbar.

31. Man formt um in
$\sin^2 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x > (3 \sin x - 4 \sin^3 x)^2$ usw.
Man setzt $\sin^2 x = z$ und erhält

$$4z^3 - 5z^2 + z < 0.$$

Diese Ungleichung gilt für $\frac{1}{4} < z < 1$.

Man erhält also $\frac{1}{4} < \sin^2 x < 1$

und damit $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

und $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi$.

Da aus der letzten Ungleichung auch alle vorhergehenden folgen, ist die gegebene Ungleichung für die angegebenen Intervalle erfüllt.

32. Addiert man jeweils die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte .... usw. .... dieser Zahlen, so erhält man 50 gleiche Summen von je 20001. Also heißt die kleinste der gesuchten Zahlen 9951 und die größte 10050.

33. Es ist

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= n^2(n + 3) - (n + 3) \\ &= (n^2 - 1)(n + 3) \\ &= (n - 1)(n + 1)(n + 3). \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, sind mindestens ein Faktor dieses Produktes durch 4 und die beiden anderen Faktoren durch 2 teilbar. Das Produkt ist also durch 16 teilbar. Ferner ist ein Faktor und mithin auch das Produkt durch 3 teilbar. Daher ist das Produkt durch 48 teilbar.

34. Die gegebene Gleichung ist mit folgenden Gleichungen äquivalent:

$$1 - \sin 5x = \cos^2 \frac{3}{2}x + \sin^2 \frac{3}{2}x - 2 \sin \frac{3}{2}x \cos \frac{3}{2}x \qquad (1)$$
$$1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x \qquad (2)$$
$$\sin 5x - \sin 3x = 0 \qquad (3)$$
$$2 \cos 4x \sin x = 0. \qquad (4)$$

Die Gleichung (4) ist genau dann erfüllt, wenn entweder $\sin x = 0$, also $x = \pi k$
oder $\cos 4x = 0$. also $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$ ist.
wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.
Da die gegebene Gleichung mit der Gleichung (4) äquivalent ist, hat sie die Lösungsmenge

$$x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{8}(2k+1) \qquad \text{(k ganze Zahl).}$$

43. Es gibt folgende Zahlenpaare:
2, 10 — 5, 11 — 10, 14 — 23, 25
Also kauften:
Meier 25 Tiere — Krause 10 Tiere
Schulze 14 Tiere — Franke 11 Tiere
Frau Meier ist eine geborene Schulze, Frau Franke ist eine geborene Meier, Frau Krause ist eine geborene Schulze.

44. Es gibt 21 Möglichkeiten. Lösung z. B. durch systematisches Probieren.
Die Primzahlen < 99 sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
Für die Bildung der Summe 99 kommen nicht in Frage: die Zahl 2, weil die beiden anderen ungeraden Summanden eine gerade Summe ergeben würden; die Zahl 97, weil sie eine Summe > 99 ergeben würde. Die systematische Zusammenstellung der drei Summanden beginnt mit der Zahl 3 und ordnet ihr Paare von Primzahlen zu, die die Teilsumme $99 - 3 = 96$ bilden usw.

Das Geheimnis der rumänischen Erfolge

Aus Informationen von Professor Teodorescu, Dekan der Fakultät für Mathematik und Mechanik an der Bukarester Universität

Die Förderung der leistungsstarken Schüler in Mathematik und Physik ist in der Rumänischen Volksrepublik bereits zu einer Massenaktion geworden. Eine bewährte Methode ist die jährliche Mathematikolympiade. Sie läuft in drei Etappen ab: die Olympiade der besten Schüler einer Stadt, dann der Region und schließlich des Landes. 1962 beteiligten sich an der Olympiade 26 146 Schüler, in Physik 19 485 Schüler an der ersten Etappe. 1963 stieg die Teilnehmerzahl auf 28 687 und in Physik auf 20 637.

Eine wertvolle Einrichtung für die begabten Schüler sind die sogenannten Stadtzirkel. In diesen Zirkeln werden die besten Schüler aus den Schulen einer Stadt zusammengefaßt, ihr mathematisches Wissen wird vervollständigt, und es werden ihnen zusätzliche Kenntnisse vermittelt. Mitarbeiter von Hochschulen halten in diesen Zirkeln Vorlesungen. Oftmals übernehmen die Schüler selbst Referate. Schwere Aufgaben werden im Kollektiv gelöst.

Von wesentlicher Bedeutung ist auch die monatlich in 28 000 Exemplaren erscheinende Zeitschrift „Mathematik und Physik für Schüler". In dieser Zeitschrift werden komplizierte mathematische Aufgaben gestellt, z. B. Prüfungsaufgaben zur Aufnahme an Hochschulen aus den Vorjahren, Aufgaben der vorjährigen Olympiade. Schüler, die 12 oder 30 richtige Lösungen einsenden (je nach Leistungsklasse) werden namentlich genannt und prämiiert.

Ich konnte mich überzeugen, daß die namentliche Liste der Teilnehmer, die die Bedingungen erfüllten, 16 Seiten umfaßte.

Bewährt hat sich auch ein jährlicher Wettbewerb der Schulen über die außerschulische Tätigkeit zur Förderung der mathematischen Kenntnisse. Gewertet werden: Zahl der Zirkel, Zahl der Zirkelteilnehmer, Zahl der Zusammenkünfte, Teilnehmerzahl an der Mathematikolympiade, erhaltene Auszeichnungen, Zahl der Bezieher der Mathematikzeitschrift für Schüler. Diese Methode ist erst neu. Trotzdem beteiligten sich bereits 50 Schulen an diesem Wettbewerb.

Die sorgfältige Förderung, die die rumänische Jugend in den mathematischen Wissenschaften erfährt, sichert der Rumänischen Volksrepublik einen Nachwuchs gutausgebildeter und mit reichen mathematischen Kenntnissen versehener Menschen. Besonderes Augenmerk wird dabei den Lehrkräften zuteil.

So gelang es der Rumänischen Volksrepublik in 15 Jahren, aus der rumänischen mathematischen Schule, die auch bereits früher Tradition besaß, aber an Zahl gering war, heute eine mathematische Schule mit zahlreichen jungen Forschern zu entwikkeln, die bekannt und oftmals bereits international geschätzt sind.

(Auszug aus „Deutsche Lehrerzeitung" 3/64)

Ungarn an der Spitze

Vom 18. bis 25. Juli 1960 fand in Sinaia die II. Internationale Mathematische Schülerolympiade statt, an der Schüler (Absolventen der 11. und 12. Klassen) aus den Volksrepubliken Rumänien, Ungarn, Bulgarien, aus der Tschechoslowakischen Sozialistischen Republik und der Deutschen Demokratischen Republik teilnahmen. Die Olympiade wurde von der rumänischen „Gesellschaft für Mathematik und Physik" in Zusammenarbeit mit dem Ministerium für Kultur der Rumänischen Volksrepublik organisiert.

Am ersten Tag des Wettstreits, am 21. Juli, eröffnete Prof. Dr. Moisil, Präsident der „Gesellschaft für Mathematik und Physik" die Olympiade. Dann arbeiteten die 40 Teilnehmer aus den fünf Staaten, unter ihnen nur ein Mädchen aus Bulgarien, drei Stunden angestrengt.

Nachmittags war Freizeit, die zu einem umfangreichen und heftigen „Erfahrungsaustausch" über die Lösung der Probleme benutzt wurde. Für die zweite Arbeit am folgenden Tag standen den Teilnehmern vier Stunden zur Verfügung.

Die besten Ergebnisse erzielten Ungarn (zwei erste Preise, zwei zweite Preise), die CSSR und Rumänien (je ein erster und ein zweiter Preis). Neben den Preisen gab es auch Auszeichnungen; Bulgarien z. B. erhielt einen dritte Preis und eine Auszeichnung.

Die Ergebnisse unserer Delegation waren besser als im Vorjahr. Das im Vergleich zu anderen Teilnehmern schwache Abschneiden hat u. a. folgende Ursachen:

1. Unsere Schüler konnten nicht gründlich und systematisch vorbereitet werden (keine außerunterrichtliche Arbeit, keine Olympiaden).

2. Die gestellten Probleme waren für unsere Schüler völlig neu (ausgefallene geometrische Konstruktionen, Ungleichungen, Raumgeometrie).

3. Die Auswahl unserer Teilnehmer war nicht in allen Fällen gut. Keiner unserer Delegierten wird später Mathematik studieren, von den ungarischen dagegen sieben.

(aus: „Wissenschaft und Fortschritt" 3/61)

Dann ergeben sich die Kombinationen:

3 mit	$7+89=13+83=17+79=23+73=29+67=37+59=43+53=96$	7
5 mit	$11+83=23+71=41+53=94$	3
7 mit	$13+79=19+73=31+61=92$	3
11 mit	$17+71=29+59=41+47=88$	3
13 mit	$19+67=86$	1
17 mit	$23+59=29+53=82$	2
19 mit	$37+43=80$	1
23 mit	$29+47=76$	1

Insgesamt 21 Kombinationen

45. Die mit „ATOM" bezeichnete Zahl sei x.
Dann ist $1000 \leqq x < 10\,000$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe besteht die Zahl x aus lauter verschiedenen Ziffern. Die letzte Ziffer kann nicht 0 sein, da sonst im Ergebnis zwei gleiche Endziffern vorkämen.

Es ist ferner

$x^2 - x = x\,(x-1) = n \cdot 10^4$ (n eine nat. Z.).

Da von diesen beiden Faktoren stets einer gerade und der andere ungerade ist, kann der Primfaktor 2 nur in einem der beiden auftreten. Außerdem kann $x - 1$ nicht durch 10 teilbar sein, weil dann x auf 1 enden würde, also nicht durch 5 teilbar wäre, was aber notwendig ist.

Es bleiben nur zwei Fälle übrig:

a) x ist ein Vielfaches von 2^4, $x - 1$ ein Vielfaches von 5^4 oder

b) $x - 1$ ist ein Vielfaches von 2^4 und x ein Vielfaches von 5^4.

Der Fall a) führt auf die Gleichungen $x = 16\,\varkappa$ und $x = 625\,\lambda + 1$, wobei $\varkappa$, λ positive Zahlen sind.
Man erhält $\lambda = 15$ und daraus $x = 9376$.

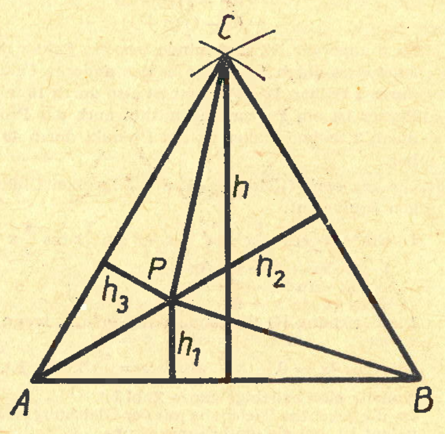
Der Fall b) führt auf keine Lösung für x.

47. $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ Umdrehungen

48. $\tan x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

54. a) Die Fläche des Querschnitts beträgt 384 m².
b) Der Rauminhalt beträgt 70 272 m³.
c) $384\ \text{m}^2 : 576\ \text{m}^2 = 2 : 3$

61.



Voraussetzung: Dreieck ABC ist gleichseitig.

Behauptung: $h_1 + h_2 + h_3 = h$

Beweis:

Zum Beweis teilt man das Dreieck ABC in die drei Teildreiecke ABP, ACP und BCP auf. In diesen Dreiecken sind h_1, h_2 und h_3 die Höhen.

Die Flächeninhalte der Teildreiecke und des Gesamtdreiecks sind

ABC: $F = \frac{a}{2} \cdot h$ ABP: $F = \frac{a}{2} \cdot h_1$

BCP: $F = \frac{a}{2} \cdot h_2$ ACP: $F = \frac{a}{2} \cdot h_3$

Es gilt:

$$\frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + h_3), \text{ da}$$

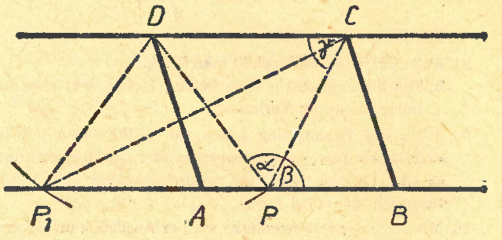
$$F = F_1 + F_2 + F_3 \text{ ist.}$$

Dividiert man die Gleichung durch $\frac{a}{2}$, so ergibt sich:

$\underline{h = h_1 + h_2 + h_3}$, was zu beweisen war.

62. Konstruktionsüberlegung (Analysis):
Wenn P ein Punkt mit den geforderten Eigenschaften ist, dann muß Winkel DPC = Winkel CPB sein.
Es gilt aber ferner: Winkel CPB = Winkel DCP (als Wechselwinkel). Also muß auch Winkel DPC = Winkel DCP sein; das gilt aber nur, wenn das Dreieck DPC gleichschenklig ist. P muß also auf AB und auf dem Kreis um D mit DC als Radius liegen.

Konstruktion:



Beschreibung:
Man schlägt um D mit DC einen Kreisbogen, der AB in P schneidet. P ist ein Punkt, von dem aus die Strecken CD und BC unter gleichem Winkel erscheinen, also
Winkel DPC = Winkel BPC
ist.
Das Dreieck DPC ist gleichschenklig (nach Konstruktion).
Daraus folgt, daß
Winkel DPC (α) = Winkel DCP (γ)
ist.
Die Winkel β und γ sind gleich (Wechselwinkel an Parallelen), also Winkel DCP (γ) = Winkel BPC (β).
Daraus folgt wiederum, daß
Winkel DPC (α) = Winkel BPC (β) ist.
Die Konstruktion des Punktes P ist nicht eindeutig.

66. a) Ja. Die Seiten sind Diagonalen der Würfelflächen.
b) Ja. Parallelebene.
c) Nein, da ein Würfel keine fünf zueinander nicht parallele Flächen hat.
d) Ja. Seitenlänge gleich der halben Diagonalen der Würfelflächen.

67. Ist P der Schwerpunkt S, so ist die Forderung erfüllt, da hierbei alle Verhältnisse gleich 2 sind. Man ziehe durch S Parallelen zu den Dreieckseiten. Durch Fallunterscheidungen läßt sich dann der Beweis führen (P liegt in einer der Teilfiguren).

68. a) $1 + 6 + 12 + 8$
b) $8 + 24 + 24 + 8 = 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 6 + 2^1 \cdot 12 + 2^0 \cdot 8$
c) $(n-2)^3 \cdot 1 + (n-2)^2 \cdot 6 + (n-2)^1 \cdot 12 + (n-2)^0 \cdot 8 = n^3$

69. Man zeichne AM = a und schlage um M mit c einen Kreis sowie um die Mitte M_1 von AM mit $\frac{c}{2}$ einen zweiten Kreis.
Nun schlage man mit b um M einen Kreis, der den kleinen Kreis in B_1 bzw. B_2 schneidet. Man verbinde A mit B_1 bzw. B_2 und verlängere bis zum Schnitt mit dem großen Kreis. Dadurch erhält man die Punkte C_1, C_1' bzw. C_2, C_2'. Da $MC_1 = 2M_1B_1$ und entweder $MC_1 \parallel M_1B_1$ oder $MC_1' \parallel M_1B_1$, ist entweder $C_1B_1 = B_1A$ oder $C_1'B_1 = B_1A$ bzw. entsprechend für C_2 oder C_2'.

Die Aufgabe ist lösbar für $\frac{a-c}{2} \leqq b \leqq \frac{a+c}{2}$.

72. a) $r = 17{,}5$ m b) $O = 1054$ m² c) $G \approx 3{,}98$ mp

73. a) etwa 23,2 Prozent
b) etwa 7 Bunsenbrennerfüße

74. Der Umkreismittelpunkt kann innerhalb oder außerhalb der Dreiecke oder auf einer Dreieckseite liegen. Für diese drei Fälle ist die Formel zu beweisen. Der Beweis kann z. B. mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze erfolgen. Seien z. B. N der Mittelpunkt des Inkreises und M der Mittelpunkt des Umkreises. Beide liegen auf der Symmetrieachse des Dreiecks. Man verlängere diese bis zum Schnittpunkt S mit dem Umkreis und verbinde A mit S sowie A mit N. Dann läßt sich bei jeder Lage von M herleiten, daß
$$(r_1 + d)\,(r_1 - d) = 2r_1r_2$$
ist.
Daraus folgt dann die Behauptung. (Hinweis: Die Dreiecke ASC und RNC sind ähnlich, wobei R der Fußpunkt des Lotes von N auf AC ist. Außerdem ist das Dreieck ASN gleichschenklig und daher AS = SN).

75. a) Die symmetrisch zu P liegende Parallele zu g schneidet den Kreis in zwei Punkten, falls der doppelte Abstand von P zu g kleiner als a + r ist. Man erhält dann zwei Sekanten mit den geforderten Eigenschaften.

b) Je nach der Lage von P und der Größe von a bzw. r gibt es zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung. Falls b der Abstand des Punktes P von g ist, treten diese Fälle für

$$2b \lesseqgtr (a + r).$$

76. a) PQRS ist ein Parallelogramm (Kongruenz von Teildreiecken).

b) Aus der Berechnung der bestehenden Teilflächen erhält man $F_{PQRS} = \frac{2}{5} F_{ABCD}$.

77. Das Tetraeder ist ein regelmäßiger Körper, sein Volumen und seine Oberfläche lassen sich deshalb durch die Kante s ausdrücken

$$V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \qquad O = s^2\sqrt{3}$$

Bei der Berechnung der Körperhöhe ist zu beachten, daß dieselbe die Seitenhöhe im Verhältnis 2:1 teilt.

Nach der Aufgabenstellung werden 4 Tetraeder mit der Kante $s_1 = 1/3$ s abgeschnitten. Jedes solche kleine Tetraeder ist dem ursprünglichen ähnlich, sein Volumen beträgt 1/27 V.

Daraus folgt:

$$\text{Volumen des Restkörpers} = V - \frac{4}{27}V = \frac{23}{27}V$$

$$= \frac{23}{324} s^3 \sqrt{2}$$

Durch das Abschneiden der 4 Tetraeder entfallen für die Oberfläche 4mal drei gleichseitige Dreiecke mit der Seite $s_1 = 1/3$ s. Dafür entstehen aber 4 neue (Grundflächen)! Also ist

Oberfläche des Restkörpers = Oberfläche des Tetraeders − 8 Dreiecke.

$$O_R = s^2\sqrt{3} - 8 \cdot \frac{s^2}{36}\sqrt{3} = \frac{7}{9} s^2 \sqrt{3}$$

78. Die Teilung erfolgt nach dem goldenen Schnitt, also ist

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(Auf die äußere Teilung braucht nicht eingegangen zu werden.)

79. Der geometrische Ort ist der innerhalb des Kreises liegende Kreisbogen des Thaleskreises über $\overline{MS}$.

80. Die größte Anzahl beträgt 16, da jede Seite des Vierecks mit dem Umfang des Fünfecks stets nur höchstens 4 Schnittpunkte haben kann. (Bei einer ungeraden Anzahl gelangt man in die Figur nur „hinein", aber nicht wieder „heraus", erhält also nicht die höchstmögliche Anzahl.)

81. a) Bezeichnet man den Erdradius mit R, die Höhe des Antennenmastes mit a und die Höhe der zu überblickenden Kugelkappe mit x, so erhält man nach dem Satz des Euklid

$$R^2 = (R + a)(R - x).$$

Die Fläche der zu überblickenden Kugelkappe beträgt also

$$F = \frac{2\pi R \cdot aR}{R + a} = 14090 \text{ km}^2 \text{ (vierstellige Tafel).}$$

b) Im Falle b erhält man die Fläche

$$F' = 2\pi R a.$$

Der relative Fehler beträgt hier

$$\frac{F' - F}{F} = \frac{a}{R}.$$

Nun ist $\frac{a}{R} \approx 0{,}000055$.

Der prozentuale Fehler beträgt also nur 0,0055%. Er ist sehr gering, weil für kleine Werte von a der Faktor $\frac{R}{R + a}$ in der Formel für F sich nur wenig von 1 unterscheidet.

83. Der kleinste Abstand zweier Punkte voneinander sei d. K sei der Kreis mit dem Durchmesser d, der durch zwei dieser Punkte P_1 und P_2 geht. Dann liegt weder im Innern noch auf der Peripherie des Kreises K ein weiterer der gegebenen Punkte.

Ferner seien K_3 bzw. K_4 bzw. ... bzw. K_n diejenigen Kreise, die durch P_1 und P_2 und außerdem einen der Punkte P_3 bzw. P_4 bzw. ... P_n gehen. Unter diesen Kreisen gibt es mindestens einen Kreis K_1, der den kleinsten Durchmesser hat.

K_1 ist ein Kreis mit der geforderten Eigenschaft; denn im Inneren von K_1 liegt keiner der angegebenen Punkte. Würde nämlich ein solcher Punkt P_k im Innern dieses Kreises liegen, so hätte der durch P_1, P_2 und P_k gehende Kreis einen kleineren Durchmesser als K_1, was der Voraussetzung widerspricht.

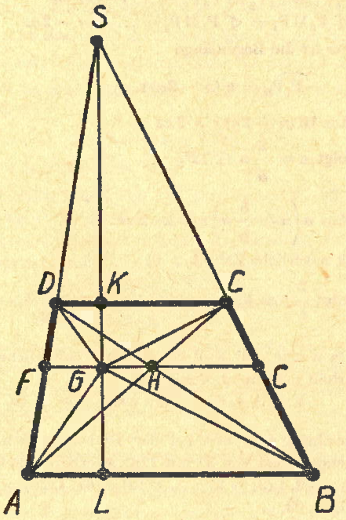
82. Man verlängert das Lot von S auf EF bis zum Schnitt mit den Seiten CD und AB. Die Schnittpunkte seien K und L. Dann ist

$$\frac{GK}{GL} = \frac{EC}{EB} = \frac{CD}{AB} \text{ (Projektionszentrum H).}$$

Ferner ist (Projektionszentrum S)

$$\frac{DK}{AL} = \frac{KC}{LB} = \frac{CD}{AB}.$$

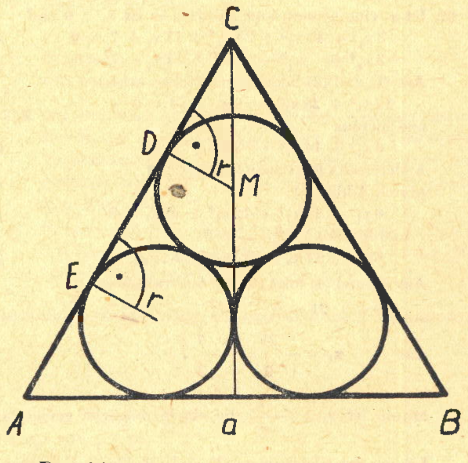
Also ist $\frac{GK}{GL} = \frac{KC}{LB}$.



(Es muß in der Abb. SCEB heißen).

Mithin ist $\triangle KGC \sim \triangle LBG$ und $\sphericalangle BGL = \sphericalangle KGC$. Da aber FE senkrecht auf SL steht, ist somit $\sphericalangle CGE = \sphericalangle EGB$. Analog beweist man, daß $\sphericalangle DGF = \sphericalangle FGA$ ist. EF ist also Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD.

84. a) In der Abbildung sei CM = x.



Dann ist

$$r : x = \frac{a}{2} : a, \quad \text{also} \quad x = 2r.$$

Ferner ist $CD = AE = r\sqrt{3}$ und $ED = 2r$.

Mithin ist $a = 2r + 2r\sqrt{3}$

und $r = \frac{a}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

b) Daraus ergibt sich die Konstruktion.

89. Es gelten die Gleichungen bzw. Ungleichungen:

$$\begin{array}{llllll}
x_{11} + 4x_{21} & & & & = 600 & (1)\\
 & & x_{12} + 4x_{22} & & = 400 & (2)\\
x_{11} + & & x_{12} & & \leqq 300 & \\
 & x_{21} & & + x_{22} & \leqq 200 & (3)\\
 & & & x_{11} & \geqq 0 &
\end{array}$$

Außerdem soll die sogenannte Zielfunktion

$$z = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22}$$

ein Minimum annehmen.

Aus (1) und (2) folgen

$$x_{11} = 600 - 4x_{21} \qquad x_{12} = 400 - 4x_{22}$$

also $z = 18000 - 20x_{21} - 60x_{22}$.

Da wegen (2) $x_{22} \leqq 100$ und wegen (3)

$$x_{21} \leqq 200 - x_{22}$$

ist, wird z ein Minimum genau dann, wenn

Zwei Wochen in Rumänien

„Horst, wollen Sie nach Rumänien fahren?" Mir verschlug es fast die Sprache. „Dort findet Mitte Juli eine mathematische Olympiade statt, und Sie sollen in die Mannschaft unserer Republik aufgenommen werden".

Ob wohl einer da nein gesagt hätte? Am 11. Juli 1960 trafen wir uns in Berlin zu einem kurzen Vorbereitungslehrgang. Sehr notwendig! Manche Probleme – geometrische Beweisaufgaben, abstrakte Aufgaben der Arithmetik – schienen uns unlösbar. Doch die Tips unserer beiden Berater und zukünftigen Begleiter brachten uns schließlich stets auf den richtigen Weg. Aber würden wir selbständig die Aufgaben lösen können – noch dazu in ungewohnter internationaler Atmosphäre? Die Beantwortung dieser Frage mußte uns die Zukunft bringen. Wir wußten, daß es nicht um einen der ersten Plätze, sondern um ein ehrenvolles Abschneiden ging.

Die Reise in die befreundete Volksrepublik führte uns über Berlin, Prag und Budapest bis nach Sinaia. In Budapest trafen wir die ungarischen Freunde. Gemeinsam mit ihnen betraten wir an einem strahlenden Sonntag die herrliche Karpatenlandschaft und wurden schließlich in Sinaia empfangen. Dieser Empfang durch Junge Pioniere, die Begrüßung durch die Organisatoren der bevorstehenden Olympiade sowie ein spontanes freundschaftliches Verhältnis zwischen den einzelnen Delegationen ließen uns bereits die wunderbaren Tage in Rumänien vorausahnen. Diese Fahrt zum mathematischen Wettkampf wurde zur Demonstration echter Freundschaft und Achtung, zu der Gewißheit, daß es uns an wahren Kameraden nicht fehlt.

Horst Ernst, Oschatz

Tibor Bakos

Talent und Fleiß

Die „Középiskolai Matematikai Lapok“ – Mathematische Blätter für die Mittelschule – organisiert jährlich Wettbewerbe mit Punktwertung für die einzelnen Schulklassen. Die Teilnahme ist freiwillig. Es beteiligen sich ungefähr 1500 Schüler. 500 bis 700 regelmäßige Teilnehmer erreichen mindestens 10 Prozent der möglichen Punkte. Die Zeitschrift veröffentlicht auch die Lösungen der verschiedenen Wettbewerbe, ergänzt mit einigen Ausblicken und Verallgemeinerungen.

Es gibt ein Grundprinzip aller unserer Wettbewerbe, auch der Punktwettbewerbe: Bewertet werden verschiedene Lösungen der einzelnen Aufgaben, Verallgemeinerungen und andere Schönheiten der Arbeiten, aber nur, wenn für jede Aufgabe eine vollständige Grundlösung vorliegt. Dadurch wird die Entscheidung erleichtert, weil das nur bei wenigen Arbeiten erfüllt ist. Der Beweis und die Diskussion gehören selbstverständlich zur Lösung, z. B. bei geometrischen Konstruktionen oder parametrischen Gleichungen. Die Benutzung von Büchern usw. ist gestattet.

Ein ausländischer Mathematiker, der Ungarn besuchte, sagte einmal, Ungarn sei eine Großmacht in der Mathematik. Das kann etwas übertrieben sein, doch Ungarn hat eine Reihe hervorragender Mathematiker hervorgebracht.

Das Milieu ist günstig, und die Traditionen werden gepflegt. Wir suchen die Talente und den Fleiß. Doch gibt es nicht in allen Jahren herausragende Erfolge, unser Reservoir ist nicht zu groß. Ein ungarischer Schüler hat an den internationalen Schüler-Olympiaden dreimal erfolgreich teilgenommen (als Schüler der 2. bis 4. Klasse) und mehrere Schüler zweimal. Doch 1963 mußten wir in der achtköpfigen Mannschaft einen Versuch mit zwei 15jährigen machen, und das ist gut gelungen.

Aus: Wissenschaft und Fortschritt 6/64

Prozessograph kontrolliert Maschinen

BUDAPEST Die neue volltransistorisierte Dispatcheranlage „Prozessograph“, die vom Budapester Institut für Betriebsmeß-, Steuerungs- und Regeltechnik entwickelt wurde und bereits in einer Elektromotorenfabrik und einer Fabrik für Fernsehbildröhren in Ungarn eingesetzt ist, kann jeweils zwei Funktionen von 220 Maschinen kontrollieren. Sind 120 Maschinen angeschlossen, werden vier und bei 80 Maschinen sogar acht Funktionen überwacht. Die Kontrolle kann automatisch erfolgen, aber auch von dem die jeweiligen Maschinen bedienenden Arbeiter durch Drucktaste in die Dispatcheranlage eingegeben werden.

Auf einer Schautafel an der modern ausgestatteten Anlage zeigen Lichtsignale den Verlauf der einprogrammierten Funktionen an, während gleichzeitig auf Schreibbändern die Betriebsstockungen registriert werden. Zählwerke geben zugleich die Stückzahlen auf 30 Maschinen produzierter Einzelteile an. Der Dispatcher kann über Telefon oder mit einem Mikrophon an die einzelnen Arbeitsstellen Anweisungen geben, die auf einem Magnettonbandgerät festgehalten werden können.

$x_{22} = 100$ und $x_{21} = 100$,
also $x_{11} = 200$, $x_{12} = 0$ ist.

Der LKW 1 muß also 200 Fahrten zum Betrieb 1 und zum Betrieb 2 keine Fahrt durchführen, der LKW 2 dagegen 100 Fahrten zum Betrieb 1 und 100 Fahrten zum Betrieb 2, damit die gesamten Transportkosten möglichst gering werden. (Sie betragen 10000 MDN.)

90. a) Aus der Kongruenz der Dreiecke $P_0MP_1, P_1MP_2, \dots$ folgt
$\overline{P_0P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots$ Ferner ist
$\sphericalangle P_0MP_1 = \sphericalangle P_1MP_2 = \dots = \pi - 2\alpha$.

Daher ist die Bogenlänge

$$\overset{\frown}{P_0P_n} = n(\pi - 2\alpha) r.$$

b) Aus $10(\pi - 2\alpha) r = 2\pi r$

folgt $\alpha = \frac{2}{5}\pi \mathrel{\hat=} 72°$.

c) Aus $n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k \cdot 2\pi r$

(k natürliche Zahl, $k > 0$)

folgt $\frac{2}{9} n = k$, also $n = \frac{9}{2} k$.

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, erhält man nur Lösungen für

$k = 2, 4, 6, \dots$, und zwar $n = 9, 18, 27, \dots$

91. Bezeichnet man den bei der Division durch 100 auftretenden Rest von 3^n mit $f(n)$, so erhält man $f(1) = 03$, $f(2) = 09$, $f(3) = 27$, ..., $f(19) = 67$, $f(20) = 01$, $f(21) = 03$, ...

Wegen $3^{n+20} = 3^n \cdot 3486784401$ ist
$f(n) = f(n+20)$. Daher ist
$f(999) = f(49 \cdot 20 + 19) = f(19) = 67$.

Bezeichnet man entsprechend den bei der Division durch 100 auftretenden Rest von 2^n mit $g(n)$, so erhält man
$g(1) = 02$, $g(2) = 04$, $g(3) = 08$, ... $g(19) = 88$,
$g(20) = 76$, $g(21) = 52$, $g(22) = 04$, $g(23) = 08$, ...
Daher ist $g(999) = g(19) = 88$.
Die Zahl $3^{999} - 2^{999}$ endet demnach auf 79.

92. Ist x_1 eine gemeinsame Lösung, so ist $x_1 \neq 0$ und

$$3x_1^4 + 13x_1^3 + 20x_1^2 + 17x_1 + 7 = 0 \qquad (1)$$
$$3x_1^4 + x_1^3 - 8x_1^2 + 11x_1 - 7 = 0 \qquad (2).$$

Aus (1) und (2) folgt (durch Subtraktion):

$$12x_1^3 + 28x_1^2 + 6x_1 + 14 = 0$$

und hieraus

$$6x_1^3 + 14x_1^2 + 3x_1 + 7 = 0 \qquad (3).$$

Andererseits folgt aus (1) und (2) (durch Addition):

$$6x_1^4 + 14x_1^3 + 12x_1^2 + 28x_1 = 0$$

und hieraus wegen $x_1 \neq 0$:

$$6x_1^3 + 14x_1^2 + 12x_1 + 28 = 0 \qquad (4).$$

Aus (3) und (4) folgt (durch Subtraktion):

$$9x_1 + 21 = 0,$$

also $x_1 = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$.

Mithin ist $x_1 = -\frac{7}{3}$ die einzig mögliche gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2). Durch Einsetzen in beide Gleichungen kann leicht verifiziert werden, daß x_1 tatsächlich die gemeinsame Lösung ist.

93. Setzt man $u = 1620$ und $v = 12\sqrt{17457}$, so wird (1)

$$z = \sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{u-v} \qquad (2)$$
$$z^3 = u + v + 3\sqrt[3]{u+v}\sqrt[3]{u-v}\left(\sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{u-v}\right) + u - v$$
$$z^3 = 3240 + 3\sqrt[3]{1620^2 - 12^2 \cdot 17457} \cdot z$$
$$z^3 = 3240 + 144z \qquad (3).$$

Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $z_1 = 18$, da

$(z^3 - 144z - 3240) : (z - 18) = z^2 + 18z + 180$ ist

und die Gleichung

$$z^2 + 18z + 180 = 0$$

keine reellen Lösungen besitzt.

Da es nur eine reelle Zarl z gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, und da für diese Zahl auch (3) erfüllt ist, da andererseits die Gleichung (3) nur eine reelle Lösung hat, ist

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}} = 18.$$

Eine weitere Lösung:

Versucht man, die Zahlen $1620 \pm 12\sqrt{17457}$ in der Form $(a \pm \sqrt{b})^3 = a^3 \pm 3a^2\sqrt{b} + 3ab \pm b\sqrt{b}$ mit $a = 9$ darzustellen, so folgt aus $a^3 + 3ab = 1620$ zunächst $b = 33$. Tatsächlich ist dann auch

$(3a^2 + b)\sqrt{b} = 12 \cdot \sqrt{17457} = 12 \cdot 23 \cdot \sqrt{33}$.

Damit ist aber $z = (9 + \sqrt{33}) + (9 - \sqrt{33}) = 18$.

94. a) Bezeichnet man mit K den Gesamtflächeninhalt des großen Kreises und mit $\overline{K}$ den Flächeninhalt der punktierten Teilfläche, ferner mit K_1, K_2, K_3, K_4 die Flächeninhalte der kleineren Kreise sowie mit $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \overline{K}_4$ die Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen dieser Kreise, so ist

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \quad \text{und}$$
$$K + (\overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3 + \overline{K}_4)$$
$$= K + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4).$$

Daraus folgt

$$\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3 + \overline{K}_4, \text{ w. z. b. w.}$$

b) Die Aussage gilt auch für eine andere Anzahl von kleineren Kreisen, die nicht notwendig gleich groß sein müssen, wenn nur die Summe der Flächeninhalte dieser kleineren Kreise gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen Kreises ist. Denn in diesem Fall folgt für n Kreise aus

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_n \quad \text{und}$$
$$K + (\overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \dots + \overline{K}_n)$$
$$= \overline{K} + (K_1 + K_2 \dots K_n)$$
$$\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 \dots + \overline{K}_n.$$

Die Aussage gilt auch für beliebige ebene Figuren, die nicht notwendig Kreise sind, wenn nur die Summe der Flächeninhalte dieser Figuren gleich dem Flächeninhalt der ursprünglichen Figur ist.

Für den Leser:

- Vorhandene Lösungen zu den Aufgaben 136 bis 150 wurden nicht mehr gesetzt, um die Herausgabe des Lesebogens nicht zu verzögern.
- Redaktionsschluß: Bezirksolympiade 13. und 14. März 1965
- Aus drucktechnischen Gründen wurde der Bruchstrich teilweise schräg gestellt, über den Strecken fehlen zum Teil die Striche, bei einzelnen Aufgaben wurden die Begriffe Masse und Gewicht nicht unterschieden, p/cm statt $p \cdot cm^{-1}$ usf. geschrieben.
- Die Aufgaben wurden orginal übernommen. Das entspricht dem Wesen einer Dokumentation. Dem Leser bleibt es überlassen, die Aufgaben im Sinne der Modernisierung des Mathematikunterrichts und der Praxis abzuändern.
- Beim Satz der Aufgaben und Lösungen halfen dankenswerterweise: Buchdruckerei R. Hahn (H. Otto), Elbe-Saale-Druckerei Naumburg, Sachsendruck Plauen. Die Klischees fertigte die Firma Stier, Leipzig.
- Wir danken für die Bereitstellung von Material: Inge Bausch, Sekretär der Mathematischen Gesellschaft der DDR
Oberstudienrat Herbert Titze, Sekretär des Zentralen Olympischen Komitees für die Jungen Mathematiker der DDR
Studienrat Walter Schramm, Verdienter Lehrer des Volkes, Fachberater Mathematik Berlin-Köpenick
Studienrat Dr. Weiß und Oberlehrer Arnold Hopfe, Ministerium für Volksbildung
Rudolf Nitz, Mathematikfachlehrer, Erw. O.-von-Guericke-Oberschule, Magdeburg
Hans Meyer, wissenschaftlicher Mitarbeiter beim PBK Magdeburg
- Unsere Arbeit und damit die Zusammenarbeit mit der LVZ unterstützten in hervorragender Weise Lothar Zymara, Direktor des Pädagogischen Kreiskabinetts Leipzig-Stadt, und Richard Fuhrmann, Vorsitzender der Gewerkschaft Unterricht und Erziehung Leipzig-Stadt
- Bei der Zweitkorrektur half das Kollektiv der Fachkommission Mathematik Leipzig-Stadt
- Die Technischen Zeitungen fertigten in bewährter Weise die Jungarbeiterinnen des RFT-Fernmeldewerkes Brigitte Gubitz, Heidi Hofmann, Vroni Zeising.

Aufgaben Klassenstufe 12

1. Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte. Der Dreher dachte über die Form des Zyinders nach. Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

3. Der Ausdruck $\sqrt[3]{\dagger\dagger\dagger 9}$ ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? (Die Kreuze stellen unleserliche Ziffern dar.)

3. Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger. Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, daß eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis. Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

4. Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \ldots;\ \frac{1}{n\,(n+1)}\ \ldots;$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

5. Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{1{,}5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0{,}8}}}}$$

6. Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe $11^6 + 14^6 + 16^6$?

7. Zur Zeit t_0 verläßt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_1 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wann und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt aus dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW? Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

8. Bei 27.000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P_2O_5 dt je ha	Ernteertrag dt je ha
0,0	237
0,3	251
0,9	269

Die zwischen der Düngergabe x (in dt je ha) und dem Ernteertrag y (in dt je ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!

b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt je ha und 1,2 dt je ha!

c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt je ha bzw. 275 dt je ha fest!

9. Es ist zu beweisen, daß das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

10. Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist. Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

11. Vom Fenster eines fahrenden Zuges aus (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) scheinen Regentropfen — bei völliger Windstille — in Richtung einer Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $m.s^{-1}$), wenn der Zug in 3 Minuten 2 km zurücklegt?

12. In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12 000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,— DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli. Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,— DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, „Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 Prozent des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials.
Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich:

2 Bestellungen	60,— DM
Kosten der Lagerhaltung, d. s. 20 Prozent von 3000 Stück durchschnittlichem Lagerbestand zu je 1,— DM, also von 3000,— DM	600,— DM
zusammen	660,— DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, daß viermal im Jahre die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.

a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?

b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten?
Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

13. Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar?
Die Antwort ist zu begründen!

14. Bei der Planung unserer sozialistischen Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung. Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:
Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:
1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km
1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km
2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km
2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km
Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Dabei wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind!

15. Die Industrieproduktion der Sowjetunion wächst z. Zt. jährlich um 9,6 Prozent, während die der USA günstigstenfalls um 2,5 Prozent jährlich wachsen wird. Daher wird die Sowjetunion die USA in der Industrieproduktion im Jahre 1968 einholen. Im Jahre 1956 betrug die Bevölkerungsziffer der Sowjetunion 200 Millionen, 1960 dagegen 216 Millionen. Für die USA lauten die entsprechenden Zahlen 168 Millionen und 180 Millionen. Die Industrieproduktion der Sowjetunion betrug 1960 insgesamt 155 Milliarden Rubel (60 Prozent der Industrieproduktion der USA).

a) Wann wird die Sowjetunion die USA in der Pro-Kopf-Produktion der Industrie einholen?

b) Stellen Sie die Entwicklung der Pro-Kopf-Produktion in beiden Ländern grafisch dar (Skizze genügt)!

16. Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:
Höchstmaß: Länge, Breite und Höhe zus. 90 cm, größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm.
Mindestmaß: Länge 10 cm, Breite 7 cm.

a) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe? (Begründung!)

b) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung!)

17. Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt x.y.z stets durch 60 teilbar.
Beweisen Sie diese Behauptung!

18. Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Erlebnisse am Rande

Die III. Internationale Mathematik-olympiade fand 1961 in der Ungarischen Volksrepublik statt.

In Vesprem in der Nähe des Plattensees wurden an zwei Vormittagen die Klausuren geschrieben. Danach ging es im Bus nach Budapest zurück. Auf dieser Fahrt meinte es die Sonne besonders gut mit uns. Wir schwitzten viel mehr als bei der Klausur. Plötzlich begann es nach verbranntem Gummi zu riechen. Unser Fahrer hielt in der Nähe eines Ziehbrunnens an. Wir waren über die Rast sehr froh. Der Asphalt war so heiß, daß man ihn unmöglich mit bloßen Füßen betreten konnte.

Der Ziehbrunnen war genau so wie ich mir einen ungarischen Ziehbrunnen immer vorgestellt hatte. Ein großer Holzeimer hing an einer langen Stange und diese war an dem Schwenkarm befestigt. Das Wasser in dem Brunnen war allerdings sehr trüb, uns wurde gesagt, wir sollten nichts trinken. In der Nähe sah ich eine große Herde schwarzer Schweine, die dort geweidet wurden.

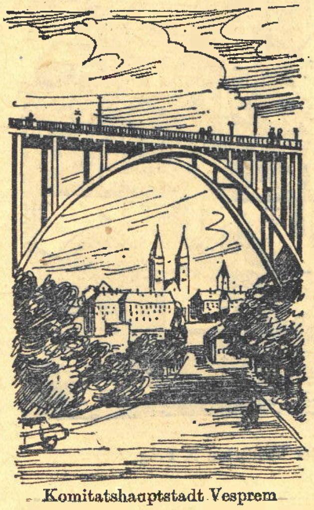
Nachdem unser Fahrer den Schaden behoben hatte, fuhren wir weiter. Der Himmel bewölkte sich plötzlich mehr und mehr. Auf einmal begann ein orkanartiger Sturm. Er wehte von den abgeernteten Feldern so viel Erde in die Höhe, daß wir manchmal die Straßenbäume vom Bus aus nicht sehen konnten. Ballen von gepreßtem Stroh flogen durch die Luft, als wenn es leere Papiertüten wären. Wir hatten Glück, daß unser Bus nicht von einem umstürzenden Baum oder Telegrafenmast getroffen wurde und waren alle heilfroh, als das Unwetter vorüber war. Als ich wieder zu Hause war und die LVZ von diesen Tagen durchlas, fand ich auch eine Meldung, daß dieser Sturm seit langer Zeit der schwerste in Ungarn war.

Diese und viele andere kleine Begebenheiten lockerten die mit ernster Arbeit angefüllten ersten Tage unseres Aufenthalts etwas auf und machten die folgenden zu einem unvergeßlichen Ferienerlebnis. Der schönste Augenblick war, als ich bei der großen Abschlußfeier als einziger unserer Mannschaft einen Preis entgegennehmen konnte.

In diesem Jahr haben wir die Ehre, die Teilnehmer der Internationalen Mathematik-Olympiade in unserer Republik zu empfangen.

Ich möchte von dieser Stelle aus besonders unserer Mannschaft recht viel Erfolg wünschen und hoffe, daß ich sie als Betreuer einer der Gastmannschaften persönlich kennen lerne.

Thomas Görnitz cand. phys.



Komitatshauptstadt Vesprem

Ich war Teilnehmer der IV.

Wolfgang Lehmann, Leipzig

Im Jahre 1962 fand die internationale Mathematik-Olympiade in der CSSR statt. Ich hatte das Glück, daß im Republik-Maßstab nur drei besser waren als ich und gehörte deshalb zu der achtköpfigen Mannschaft, die die DDR bei diesem Wettkampf vertreten sollte.

Uns begleitete Professor Gronitz (bei den internationalen Mathematik-Olympiaden gibt es nur „Professoren" und „Schüler"). Unser anderer Begleiter, Professor Titze, war schon zwei Tage früher zur Festlegung der Aufgaben nach Prag gefahren.

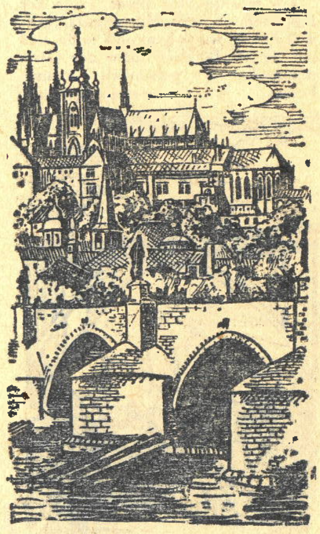
Am Sonntagnachmittag fuhren wir dann mit einigen Bussen zu unserem Wettkampfort, Ceske Budejowice. Dort wurden wir vor dem Internat, in dem wir wohnen sollten, von einer begeisterten Menge empfangen. Mancher der Ortsansässigen erwarb sich schon hier eine ausländische Adresse.
Am Dienstag wurde die Mathematik-Olympiade offiziell eröffnet, und die ersten drei Aufgaben mußten in drei Stunden gelöst werden. Nachmittags fuhren wir baden.

Obwohl wir am Mittwochvormittag, im zweiten und letzten Teil der Olympiade, nicht viel herausbekommen haben, ließen wir uns nicht unterkriegen.

Am Nachmittag fand ein internationales Volleyballtournier statt. Durch das K.-o.-System sind wir schon nach unserem ersten Spiel gegen die CSSR (1:2) Zuschauer geworden.
Am Sonnabend war Siegerehrung. Zwei sowjetische und zwei ungarische Schüler bekamen einen ersten Preis zugesprochen. Unser Bester, Karl-Heinz Tetsch, erhielt zusammen mit einigen anderen einen zweiten Preis, wir anderen jeder ein Diplom.

Auf dem Bahnhof erlebte ich dann etwas ganz Überraschendes: Die findige tschechische Post hatte den Empfänger einer Karte gefunden, die diese Anschrift trug:

Wolfgang Lehmann
Prag, Intern. Mathematik-
Olympiade, CSSR



Der Hradschin in Prag

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Es wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.

19. Es ist zu beweisen, daß $x + y \leqq a\sqrt{2}$ wenn $x^2 + y^2 = a^2$ und $a \geqq 0$ ist!

20. Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1. Man soll zeigen, daß unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

21. Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wieviel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.
Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

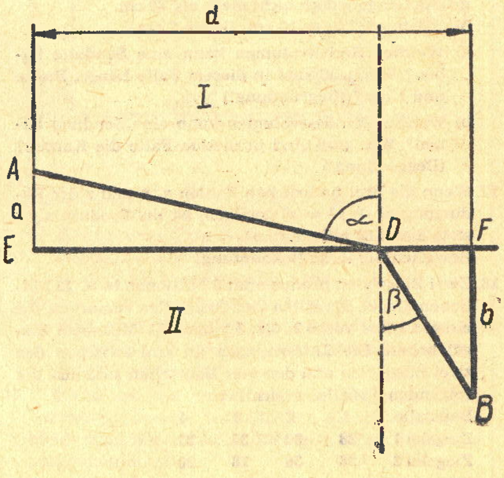
22. Beweisen Sie, daß die Funktion
$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$
die folgenden Eigenschaften hat:
a) Sie ist für alle reellen Zahlen definiert.
b) Sie ist für alle $x \geqq 1$ wachsend.
c) Sie hat den Wertevorrat $0 \leqq y < 1$.
d) Ihr Bild ist achsensymmetrisch. Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

23. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung
$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$
für $0° \leqq x \leqq 360°$ zu bestimmen!

24. Es ist zu beweisen, daß es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl
$$N = x^4 + 4y^4$$
Primzahl ist!

25. Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L. W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:
In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:
a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf — Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.
Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,
b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,
c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.
Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

26. Ein Lichtstrahl, der in einem Medium I die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium II die Geschwindigkeit c_2. Beweisen Sie, daß die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{ist.}$$



27. a) Beweisen Sie, daß für jedes ebene Dreieck
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq \frac{3}{4}$$
ist!
b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

28. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$ ist!
Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

29. Für welche Werte von x gilt
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq 1\,?$$

30. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

31. Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}$$
alle Lösungen an!

32. a) Beweisen Sie, daß der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

33. Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt
$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leqq 1\,?$$

34. Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung
$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geqq \frac{3}{2}$$
Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

35. Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen
$$x_2 + x_3 = px_1,\; x_1 + x_3 = px_2,\; x_1 + x_2 = px_3$$
genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

36. Beim Eichen eines Dynamometers*) wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:
$P(N) = a_1N + a_2N^2 + a_3N^3 + a_4N^4$.
a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!
b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16$!
Bemerkung: Im allgemeinen werden derartige Probleme mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöst.
*) Ein Dynamometer ist ein Gerät zur Messung von Kräften, bei dem die elastische Deformation einer Feder über ein Hebelwerk auf einer (meist kreisförmigen) Skala angezeigt wird (Federwaage).

37. Man beweise: Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$ und
$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$.

38. Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

39. Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:
$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}!$$

40. Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen:
Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

41. Bestimmen Sie — in Abhängigkeit von der reellen Zahl p — alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen

$$xy + \frac{x}{y} = 3p\,(x^2 + y^2)$$

$$xy - \frac{x}{y} = p\,(x^2 + y^2)!$$

42. Für welche reellen Zahlen x ist

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

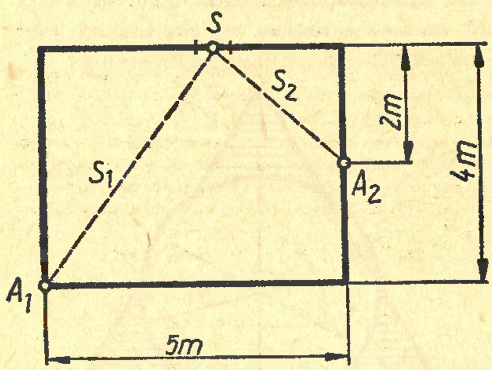
b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$?

43. Welche Bedingungen bestehen zwischen den Mittelpunktskoordinaten und den Radien der Kreise $(x-c_1)^2 + (y-d_1)^2 = r_1^2$ und $(x-c_2)^2 + (y-d_2)^2 = r_2^2$, die sich a) von außen, b) von innen berühren? ($r_1 > r_2$).

44. Der absolute Druck von gesättigtem Wasserdampf beträgt nach Dulong in Atmosphären $P = \left(\frac{40+t}{140}\right)^5$ für eine gegebene Temperatur t, solange t oberhalb von 80 °C liegt. Gesucht wird das Verhältnis von Druckänderung zu Temperaturänderung bei 100 °C.

45. In einem Arbeitsraum von 5 m Länge und 4 m Breite sind 2 Arbeiter tätig, deren Arbeitsplätze ständig A_1 und A_2 sind. An der Rückwand des Raumes soll ein Materialschrank eingebaut werden.
Beide Arbeiter legen den Weg zum Schrank in gleichem Tempo und gleichoft zurück.
An welcher Stelle der Wand ist der Schrank einzubauen, damit der Zeitverlust für die Wege ein Minimum ist?



46. Wie groß ist der Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkt (6;0), der mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 2$ eine gemeinsame Tangente hat, die parallel zur Geraden $y = x$ ist?

47. Für vier positive ganze Zahlen p, q, r, s gelte

$$\frac{p}{q} = \frac{r^2}{s^2}$$

Sind p und q beide Quadrate von ganzen Zahlen?
Sind r und s teilerfremd, wenn p und q teilerfremd sind? Ist p durch 49 teilbar, wenn r durch 7 teilbar ist?

48. A, B, C und D sollen gemeinschaftlich einen Graben ziehen. A würde denselben allein in 15, B in 20, C in 24, D in 30 Tagen fertig bringen.
Bevor sie jedoch zusammen an die Arbeit gehen, haben A und B schon einen Tag gearbeitet, und C setzt 4 Tage, D 3 Tage aus. In wieviel Tagen wird der Graben fertig sein?

49.
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 16$$
$$\frac{1}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{x} = 15$$
$$\frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 14$$

50.
$$x^4 - 5\frac{5}{6}x^3 + 10\frac{1}{3}x^2 - 5\frac{5}{6}x + 1 = 0$$

51. Man läßt aus einem Gefäß mit 300 l Wasser 15 l ablaufen und füllt dafür 90prozentigen Alkohol ein. Wird dieses Verfahren mehrmals wiederholt, so steigt der Alkoholgehalt der Mischung allmählich an. Wann beträgt er 60 Prozent?

52. Wieviel reelle Wurzeln hat die Gleichung
$$x = 3142 \sin x + 157?$$

53. Gegeben sei ein Bruch $\frac{a}{b}$.
Man bilde nacheinander die folgenden Brüche:
$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{2a+3b}$, $\frac{2a+3b}{3a+5b}$, usw.
Welchen Endwert (Grenzwert) streben die Brüche zu?

54. Es sollen alle ganzzahligen x- und y-Werte gefunden werden, die die folgenden Ungleichungen befriedigen (erfüllen)!

a) $x < 23$ b) $y - x + 4 < 0$
c) $-2x + 58 < y$ d) $-x^2 + 44x - y < 468$

55. Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist!
Wann gilt das Gleichheitszeichen?

56. Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0!$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

57. Es bezeichne a_n die letzte Ziffer der Zahl n^{n^n}.
n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$.
Beweisen Sie, daß die Zahlen a_n eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an! (n^{n^n} bedeutet $n^{(n^n)}$).

58. Ein Trugschluß „Zwei ist größer als vier!“

Offensichtlich gilt: $\frac{1}{4} > \frac{1}{16}$

oder: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2 \lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4 \lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wir dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.

Wo steckt der Fehler?

59. Wieviel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null (0) als Ziffer?

60. Bei einer Silvesterfeier, zu der 300 Personen anwesend sind, gratuliert um Mitternach jeder jedem mit einem Händedruck. Wieviel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten!

61. Gegeben sind 13 gleichgroße Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen

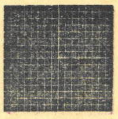
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, daß ihr Gewicht nicht abweicht.

Anmerkung: Es ist bekannt: daß bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend numeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält. Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, — 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung $n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$ errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

62. Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1, 2
b) 1, 2, 3
c) 1, 2, 3, 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen?



Stanislav Vodinsky

Olympiaden in der CSSR

Schon zum vierzehnten Male findet an den tschechoslowakischen Schulen der alljährliche Wettbewerb statt, der den charakteristischen Namen Mathematikolympiade trägt. In der CSSR nehmen an diesem Wettbewerb die besten Schüler der Fach- und allgemeinbildenden Mittelschulen und des letzten Jahrgangs der neunjährigen Grundschule teil.

Den Veranstaltern der Mathematikolympiade helfen die Lehrer, indem sie unter ihren Schülern junge Talente suchen. Alle Schüler, die Begabung aufweisen, erhalten mathematische Probeaufgaben. Die Besten begegnen dann einander in der I. Runde der Olympiade. Das ist die sogenannte Schul- oder Bezirksrunde, deren Sieger in die II., die Kreisrunde, aufsteigen. Die dritte Runde ist zentral, sie findet in der Regel im Mai statt und die aus ihr hervorgehenden sieben besten jungen Mathematiker nehmen an der internationalen Olympiade teil. Hier haben die tschechischen und slowakischen Schüler bisher eine ehrenvolle Plazierung erzielt. Bei der Mathematikolympiade in Moskau 1964 erhielten sie zum Beispiel zwei zweite und zwei dritte Preise.

Die Auswahl in den einzelnen Runden der Mathematikolympiade ist sehr streng. Für die niedrigste, die I. Runde dieses Wettbewerbs melden sich einige Zehntausende Jungen und Mädchen an, und diese Zahl steigt alljährlich. In die zweite Runde gelangen jedoch nur 4000 davon, und in die zentrale Runde steigen nur noch einige Dutzende der Fähigsten auf.

Die leitenden Organe dieses wichtigen Wettbewerbs (das Ministerium für Schulwesen und Kultur, der Verband der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker, das Mathematische Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften und die Organisationen des Jugendverbands) fördern das Interesse der jungen Mathematiker auf jede erdenkliche Weise. Im Laufe des Schuljahres veranstalten sie zahlreiche Vorträge und Konsultationen und geben für die Mittelschüler eine spezielle Zeitschrift, die „Mathematisch-physikalische Revue“ sowie eingehende informative Broschüren mit einer großen Anzahl mathematischer Aufgaben heraus, deren Charakter im großen und ganzen den Wettbewerbsanforderungen entspricht. Diese Broschüren erhalten alle Interessenten unentgeltlich. Außerdem erscheint die Reihe „Schule der jungen Mathematiker“ (herausgegeben vom Verlag Mladá fronta), kleine Bücher, die in allen Mittelschulbibliotheken vorhanden sind.

Auszug aus DLZ 2/65

Aus der Chronik der Mathematik-Olympiaden

Teilnehmer der V. erinnern sich

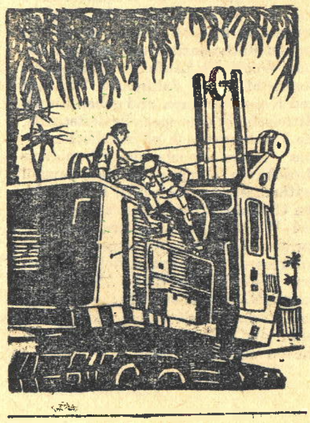
Noch geht es nicht los. Erst am Dienstag in Wrocław wird es ernst. Nach dem heutigen Essen im Restaurant „Rafynfka“ sprach mich einer auf Englisch an. Ich verstand nur: Parameter, Kreis, Radius. Es stellte sich heraus, daß es ein ungarischer Schüler war, der auch an der Internationalen Mathematikolympiade teilnahm und mir unbedingt eine komplizierte Mathematikaufgabe stellen wollte. Die Ungarn wollten nur einmal nachprüfen, inwieweit wir auf dem laufenden sind ...

Sonntag: Wir fuhren alle in den Kulturpark, den größten Park Warschaus, um bei herrlichem Sonnenschein noch einmal Kraft für den bevorstehenden Wettkampf zu sammeln. Alle Teilnehmer unserer Mannschaft erhielten als Geschenk vom sowjetischen Team gedruckte Aufgabenhefte, in denen eine Fülle von Mathematikaufgaben gesammelt sind. Im Kulturpark und noch spät in den Schlafzimmern knobelten wir alle acht, um Lösungen zu finden. Wir haben dabei wie immer, wenn wir eine Aufgabe erwischen, kein Ende gefunden, sondern suchten ständig nach neuen Lösungsmöglichkeiten. So konnten wir auch den anderen Mannschaften noch Zeit widmen. Dabei bestätigte es sich auch heute wieder: Die aussichtsreichsten für den Mathematikwettkampf sind die Schüler aus der Sowjetunion. Sie lösten unsere Aufgaben, an denen wir oft sehr lange gesessen haben, im Handumdrehen. Trotzdem lassen wir uns nicht einschüchtern. Unsere Devise heißt: Ruhe bewahren, die anderen kochen auch nur mit Wasser. Na, und am Dienstagmittag, nach der ersten Klausur in Wrocław, werden wir mehr wissen.

Uwe Küchler, Lauchhammer
Joachim Krell, Berlin

Sie trainierten ihre Gegner

Montag: Bei einem Zusammentreffen mit den Schülern der sowjetischen Delegation schenkten sie uns Sammlungen von mathematischen Aufgaben. Sie halfen uns auch selbst gleich, einige interessante Lösungswege zu finden. Genau gesehen, begünstigten sie uns damit, trainierten praktisch ihre eigenen Gegner für den Wettkampf. Aber das ist der Geist der Mathematikolympiade.



Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

d) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?
e) Was läßt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

63. Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten. Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Wagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

64. Die Jugendfreunde Hans und Fritz besuchen regelmäßig den Schießzirkel in der GST. In einer Übungsstunde schossen beide mit dem Luftgewehr auf eine 12er-Scheibe. Jeder schoß 5 mal, und jeder schoß eine 10. Die Scheibe zeigte folgende Treffer:
5, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12.
Hans erreichte mit seinen 4 letzten Schüssen siebenmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Fritz erreichte mit seinen 4 ersten Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit seinem letzten Schuß. Mit den beiden ersten Schüssen erreichte Fritz genau so viele Ringe wie mit den beiden letzten.
a) Wer schoß die 12? Begründen Sie Ihre Antwort!
b) Wie sah die mögliche Ringverteilung aus?

65. Es ist $\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$

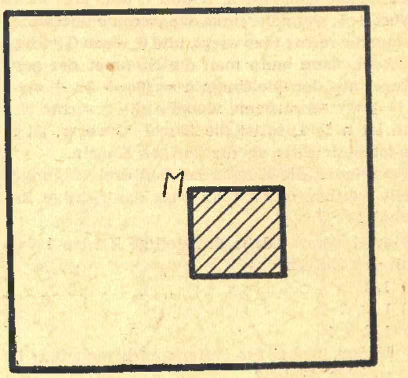
Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne daß sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

66. Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen: Der erste Hirt erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist. Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

67. Drei Streichholzschachteln lassen sich auf drei verschiedene Arten zu einem Quader zusammenlegen, wenn sie sämtlich die gleiche Lage haben sollen; man erhält diese drei Möglichkeiten, indem man die Schachteln der Länge nach, der Breite nach und der Höhe nach zusammenlegt. Wieviel verschiedene Paketformen gibt es bei 72 Streichholzschachteln? (Für den, der es herausbekommt: Wieviel Paketformen gibt es bei n Streichholzschachteln?)

68. In einer Arbeitsgemeinschaft Schach wollen die 10 Mitglieder ein Turnier austragen, wobei jeder mit jedem eine Partie und die Rückpartie spielen muß (einmal als Weiß, einmal als Schwarz).
Es stehen ausreichend Schachbretter zur Verfügung.
An jedem Abend darf jeder Spieler höchstens einmal spielen.
Stellen Sie eine Tabelle auf, in der Sie für 2, 3, 4, ... 10 Mitglieder des Zirkels folgendes bestimmen:
a) Wieviel Spiele sind zu spielen?
b) Wieviel Spieltage sind erforderlich?
c) Wieviel Tage haben die einzelnen Spieler spielfrei?
d) Wieviel Spiele werden an einem Abend gespielt?

70. Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein! Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen (M = ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).



69. Der links von P_1 (2; 3) liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

71. Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, daß der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

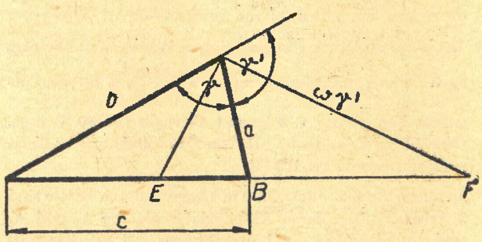
72. Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ist.}$$

73. Beweisen Sie folgenden Satz: „Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beispiel Behauptung:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

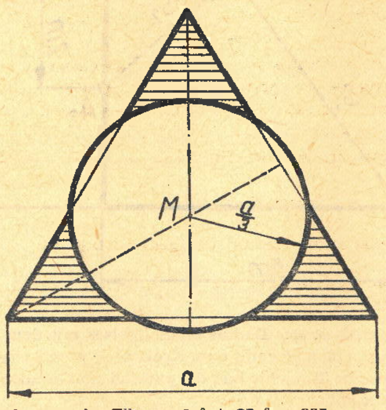


74. Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

75. Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen. Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?



76. Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1\left(-1; \frac{21}{5}\right)$
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse!
b) Weisen Sie nach, daß die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$ geht. Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

77. Ein Porzellantiegel (äußere Höhe h = 10 cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm³), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{10}x^2 \text{ und } y = \frac{1}{40}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken. Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers: 13,5 g/cm³)

78. Zeichnen Sie die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstellen senkrecht aufeinander stehen.

79. Berechnen Sie die innere Masse einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll! Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, daß die Wärmeverluste an der Ober-

fläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen.
(Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3).

80. Der Querschnitt eines Abwässerkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 qm beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen? Es soll dabei berücksichtigt werden, daß das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zuläßt.

81. Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius r = 6370 km)

82. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^2 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

83. Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60° konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie die Behauptung!

84. Gegeben ist ein Quadrat ABCD und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, daß PQR ein gleichseitiges Dreieck wird. Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs ABCD bewegt?

85. In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben. Behauptung: Der Inhalt des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreise mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!

86. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus
$AC = b$,
$AB = c$ und
$\sphericalangle BMA = \omega$,
wobei M die Mitte der Strecke BC ist.
Es sei $\omega \sphericalangle 90°$.
Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b \text{ ist.}$$

In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

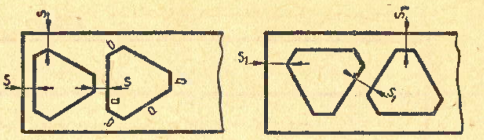
87. Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die folgende Näherungsformel benutzt:

$$l = \pi \frac{D + d}{2} + 2a + \frac{(D - d)^2}{4a}$$

Dabei ist
d der Durchmesser der treibenden Scheibe,
D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und
$M_1 M_2 = a$ der Abstand der beiden Achsen.
Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden. Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler, (in Prozent) der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?
a) d = 140 mm, D = 220 mm, a = 500 mm
b) d = 60 mm, D = 220 mm, a = 200 mm

88. Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben.
Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen!
Begründen Sie die Konstruktion!

89. Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß).
a) Wie lang und wie breit muß der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, daß die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) 2 mm betragen muß. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?



Zeichnung 1	Zeichnung 2
a = 34 mm	b = 8 mm
s = 2 mm	s_1 = 3 mm

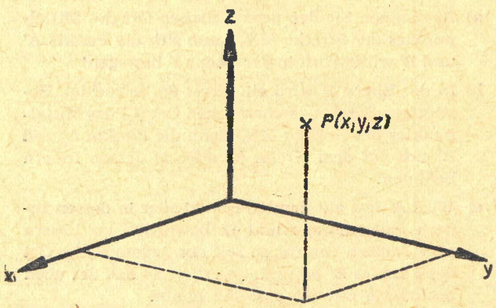
b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muß nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall? Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier 3 mm).

90. Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben.
Begründen Sie, daß diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

91. Gegeben sei eine Strecke AB = a = 6 cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB!
Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

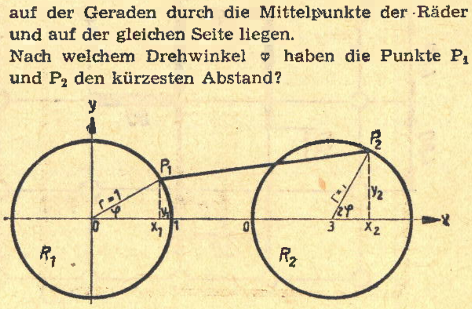
92. Konstruieren Sie das Dreieck ABC, wenn seine drei Seitenhalbierenden
s_a, s_b und s_c gegeben sind!
Beschreiben Sie die Konstruktion!

93. Im dreidimensionalen Raum erhält jeder Punkt P mit der Einführung eines rechtwinkligen x, y, z — Achsenkreuzes 3 Koordinaten x, y, z.



Durch folgende Bedingungen wird eine räumliche Punktmenge abgegrenzt:
$x^2 + y^2 \leq 25$
$0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 10$
Alle Punkte, deren Koordinaten diese Bedingungen erfüllen, befinden sich im Innern oder auf den „Begrenzungsflächen" dieser räumlichen Punktmenge (dieses „Körpers").
a) Verschaffen Sie sich eine Vorstellung vom Aussehen dieses „Körpers" (Schrägbild oder Grund- und Aufriß)
b) Berechnen Sie den Rauminhalt dieses „Körpers"!

94. 2 Räder mit dem gleichen Radius r = 1 und dem Achsenabstand 3 r drehen sich in der gleichen Richtung.
Das Rad R_2 dreht sich doppelt so schnell wie das Rad R_1. Die Ausgangslage der Punkte P_1 und P_2 wird für den Drehwinkel $\varphi = 0^0$ so angenommen, daß sie auf der Geraden durch die Mittelpunkte der Räder und auf der gleichen Seite liegen.
Nach welchem Drehwinkel φ haben die Punkte P_1 und P_2 den kürzesten Abstand?



Fortsetzung von Seite 16

Dienstag: Am Montag beim Abendbrot fing es an. Man kam gar nicht richtig zum Essen. Wir hatten uns die kleinen schmalen Plakate von der V. Internationlen Mathematikolympiade besorgt und alle Schüler der sieben anderen Mannschaften der Reihe nach gebeten, uns auf diesen Plakaten Autogramme zu geben. Gleich besorgten sich alle, die 56 anderen Teilnehmer, auch Plakate. Alle wollten von allen Autogramme haben.

Aber das wichtigste Thema der letzten Stunden ist natürlich unsere erste Klausur, die wir heute schreiben. Noch hat sich der Beginn der Arbeit am heutigen Dienstag verzögert, weil es natürlich für die aus allen acht Ländern anwesenden Professoren und Wissenschaftler kompliziert ist, solche Formulierungen in ihrer Sprache für die Aufgabenstellung zu finden, die keine Mannschaft gegenüber der anderen benachteiligt. Aber lassen wir die Sache an uns herankommen, heute abend wissen wir mehr.

Rolf-Gunter Riedel, Freital
Rolf Thier, Altenburg

Schwere Brocken

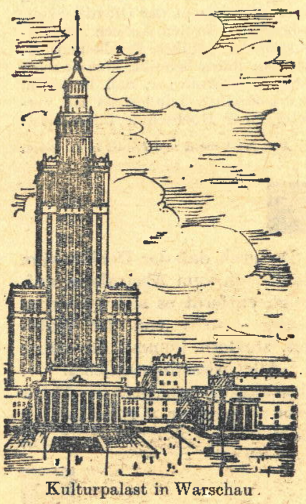
Dienstag: Die erste vierstündige Klausur ist überstanden. Die Aufgaben waren eigentlich so, wie wir alle sie erwartet haben, denn wir bildeten uns nicht ein, daß es uns leicht gemacht wird. Bei der dritten Aufgabe z. B. überblickte man sofort, worauf sie hinaus wollten, aber das zu beweisen, war ein harter Brocken. Doch gerade darauf kam es ja an, und wenn ich auch längst nicht alles gelöst habe, so muß ich doch sagen, daß mir die Klausur großen Spaß gemacht hat, weil ich da so richtig in der Mathematik wühlen konnte.

Als wir nach vier Stunden Klausur aus der Tür kamen, stand da schon ein Reporter von Radio DDR und wollte von uns Interviews haben. Aber wir waren noch dermaßen im Bann der angestrengten Arbeit, daß dabei nichts Gescheites herauskam. Vielleicht hatte der Reporter etwas falsche Vorstellungen, denn er wollte durchaus, daß wir lustig sind.

Ulrich Schwarz, Jena

Donnerstag: Früh, vor der zweiten Klausur, war es mir wieder ziemlich schwummrig in der Magengegend. Als es dann soweit war, fing ich mit der letzten Aufgabe an, sie schien mir am leichtesten. An die zweite war gar nicht ranzukommen. Ich war ärgerlich über mich selbst, weil ich so wenig wußte. Aber dann stand während der Arbeit ein Teilnehmer der sowjetischen Mannschaft auf und lief grübelnd hin und her. Da sagte ich mir, wenn die es schon auf Anhieb nicht wissen, dann sind es wirklich schwere Brokken . . .

Bernd Noak, Berlin



Kulturpalast in Warschau

In Polen seit 1949

Mathematische Olympiaden finden in der Volksrepublik Polen bereits seit 1949 statt. Bei der Gründung dieser Einrichtung ging man von dem Ziel aus, das allgemeine Niveau im Hinblick auf den Mathematikunterricht zu heben und Schüler ausfindig zu machen, die eine besondere mathematische Befähigung haben. Diese Schüler sollen für das Studium der Mathematik (bzw. solcher Fächer, für die die Mathematik eine besondere Rolle spielt) gewonnen werden. Ferner gibt man ihnen beim Studium eine besondere Unterstützung. Die langjährige Erfahrung hat gezeigt, daß dieses Ziel in weitem Umfang verwirklicht werden konnte.

1. Zur Organisation

Die Olympiade findet in drei Etappen statt. Die 1. Etappe, die als Vorbereitung bezeichnet werden kann, beginnt in jedem Jahr am 1. Oktober und dauert bis etwa Mitte Januar. In dieser Zeit werden monatlich an jede Schule vier Aufgaben versandt, die der Mathematiklehrer am 1. des Monats allen Schülern aushändigt (bzw. diktiert). Die Schüler lösen die Aufgaben innerhalb eines Monats. Dabei dürfen sie alle Hilfsmittel, die ihnen zur Verfügung stehen, benutzen. Es ist also auch erlaubt, mathematische Literatur, Formelsammlungen usw. zu verwenden.

2. Zum Inhalt

Die Aufgaben werden dem lehrplanmäßigen Unterrichtsstoff entnommen. Dabei wird Wert darauf gelegt, daß die Lösung der Aufgaben eigene schöpferische Arbeit der Teilnehmer erfordert. Es wird also angestrebt, daß die Aufgaben neuartig gegenüber denen in den Lehrbüchern sind.

3. Erfahrungen und Anregungen

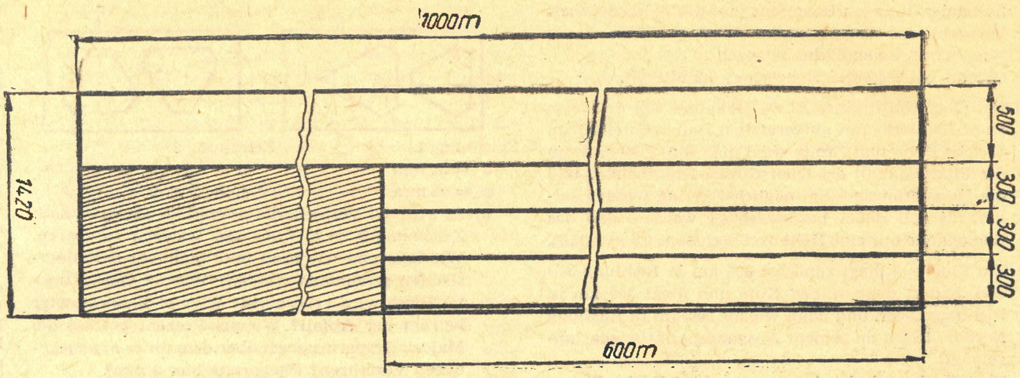
Der materielle Anreiz, der allein schon mit der Teilnahme an der 2. Etappe (Reise in die Bezirksstadt usw.) oder mit der Teilnahme an der 3. Etappe (Reise nach Warschau) verbunden ist, die Ehre, als Sieger ausgezeichnet zu werden, sowie die materiellen und ideellen Vergünstigungen für die Sieger haben dazu geführt, daß die polnischen Schüler sich wesentlich intensiver als früher mit der Mathematik beschäftigen. Die entsprechenden Vergünstigungen für die Lehrer der Sieger haben sich ebenfalls sehr positiv ausgewirkt.

Die Erfolge der mathematischen Olympiaden haben zu einer hohen Wertschätzung in der Öffentlichkeit, insbesondere in den Kreisen der Wissenschaftler, geführt. Die Bedeutung, die man ihnen beimißt, kommt auch darin zum Ausdruck, daß in jedem Bezirkskomitee mindestens ein Vertreter einer Hochschule mitarbeitet.

Aus: Mathematik und Physik in der Schule

Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich – wenn es richtig – nicht von der Wahrheit, sondern kommt ihr näher ... Alle wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, getreuer, vollständiger wider.

Lenin



95. Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1800 m geschnitten werden.
Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die schraffierte Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.
Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, daß der Abfall erheblich geringer wird.
   a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?
   b) Wie muß die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?
   c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?

96. Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.
Es ist zu beweisen, daß für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt
$$q \geq \sqrt{2}$$

97. Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken AA', BB'.
   a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunktes der Strecke MN, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!
   b) In der Ebene P wird ein Kreis (0) betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort (L) des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise (0) oder in dessen Innern befinden!
   c) Wird A' fest auf dem Kreise (0) oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von (0), so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so daß der oben bestimmte Ort (L) derselbe bleibt.
   Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden: — A' und B' sind verschieden — A' und B' fallen zusammen.

98. Das „Haus des Lehrers" in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile. Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m.
Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoß! Dabei wurde die Bewehrung nicht berücksichtigt.

99. Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, daß ABCD sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist! (Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

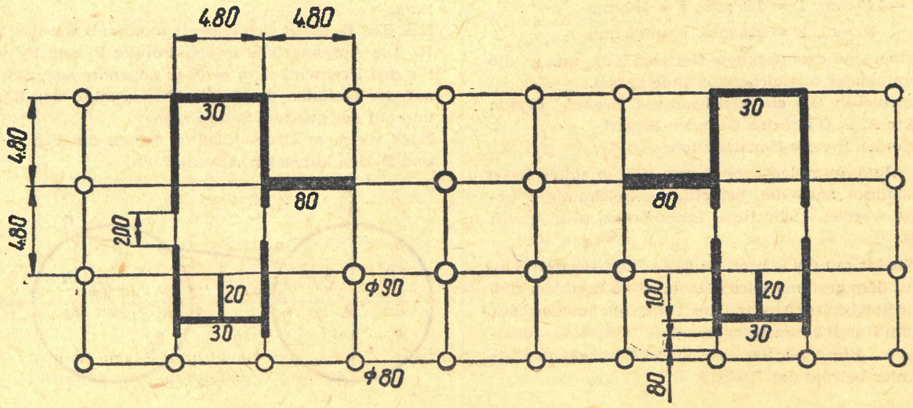
100. Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, daß CE = CB ist! Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, daß CA = CD ist!
   a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Strecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?
   b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage des Punktes C zu beweisen.
   Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, daß **jeder** seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

101. Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

102. Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M. Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate AMDE und MBGH!
Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

103. Gegeben sei ein Würfel ABCD A' B' C' D' mit AA' ∥ BB' ∥ CC' ∥ DD'.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats ABCD in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats A'D'C'B' in dieser Reihenfolge. Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

104. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten 2a und 2b, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, daß die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet. Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.



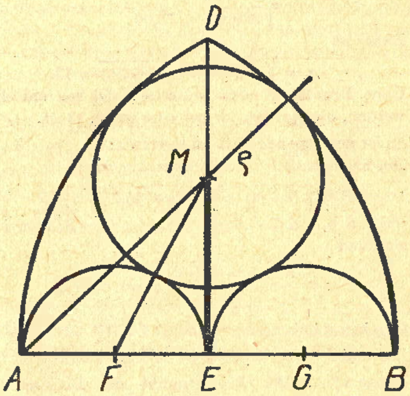
105. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, daß ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

106. Gegeben sei eine Pyramide ABCD, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, daß N auf DB und P auf DC liegen und ABNM sowie ACPM Sehnenvierecke sind.
a) Beweisen Sie, daß auch BCPN ein Sehnenviereck ist!
b) Beweisen Sie, daß die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

107. Von den Punkten A und B einer Strecke AB, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man mißt folgende Winkel:
$\sphericalangle DAB = 80°$, $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle ABC = 60°$,
$\sphericalangle ABD = 20°$.
Die Länge der Strecke CD beträgt 2 km.
Wie kann man die Länge der Strecke AB ermitteln?
a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!
b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmäßige Berechnung wird nicht verlangt.)

108. Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.
Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

109. Gegeben sei eine Strecke AB. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit AB geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung).



E sei der Mittelpunkt von AB. Über AE und EB als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen.
Berechnen Sie ME, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen AD und BD berührt!

110. Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden. Man beweise, daß

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB} \text{ ist!}$$

111. Beweisen Sie folgenden Satz:
Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ ist.

112. Gegeben sei ein Würfel ABCD A' B' C' D' mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche ABCD sind.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

113. Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b.
Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B. Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit folgenden Eigenschaften:
a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.
b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.
c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
d) Es ist $r_1 = 2\,r_2$.

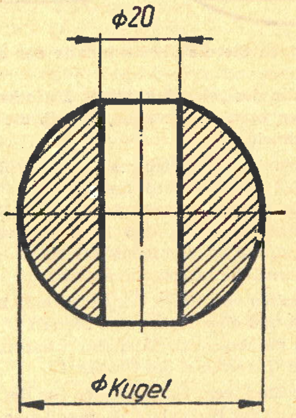
114. Auf ihrem Flug um den Mond näherte sich die sowjetische Raumstation Lunik III dem Erdtrabanten bis auf 7000 km. Für die folgenden Berechnungen werde der Mondradius r mit $r = 3500$ km angenommen; der Flächeninhalt F einer Kugelkappe mit dem Kugelradius r und der Kappenhöhe h ist
$F = 2\pi rh$, wobei $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt werde.
a) Wie groß ist das Gebiet des Mondes, das aus dieser Entfernung übersehen werden konnte?
b) Wieviel Prozent der Mondoberfläche sind dies?
c) Unter welchem Sehwinkel φ wäre der Mond aus dieser Entfernung zu beobachten?
d) Wie breit muß ein Gegenstand sein, der aus 100 m Entfernung unter demselben Sehwinkel gesehen werden soll?

115. Verlängert man den Radius einer Kugel zunächst um 5 cm und dann um weitere 3 cm, so erhält man zwei Kugeln, deren Rauminhalte sich um den Inhalt der gegebenen Kugel unterscheiden.
Wie groß ist deren Radius?

116. Eine Halbkugel soll durch einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert werden. In welcher Entfernung vom Kugelmittelpunkt ist der Schnitt zu legen?

117. An die Kurve $y = e^{x}$ wird ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b so herangeschoben, daß die Kathete a auf der x-Achse gleitet und die Hypotenuse die Kurve berührt.
Wo liegt der Berührungspunkt?

118. Das Laufgewicht einer Brückenwaage soll die Form einer durchbohrten Kugel haben; die Bohrung hat einen Durchmesser von 20 mm. Wie groß muß der Durchmesser der Kugel sein, damit das Laufgewicht gerade 1 kp wiegt?
(Wichte des Materials: $\gamma = 7{,}8$ p/cm³)



119. Bekanntlich werden in der analytischen Geometrie die Kegelschnitte nach ihrer Exzentrizität unterschieden. Dabei ist die numerische Exzentrizität (das Verhältnis e : a) gleich dem Verhältnis k, das bei der Leitlinienkonstruktion eine Rolle spielt.
Es läßt sich eine Beziehung zwischen der numerischen Exzentrizität und dem Schnittwinkel β beim Schnitt eines Doppelkegels mit der halben Öffnung φ herleiten. Zwei Freunde tun das und kommen dabei zu unterschiedlichen Ergebnissen:

A) $\varepsilon^2 = \dfrac{1 + \tan^2\beta}{1 + \tan^2\varphi}$ B) $\varepsilon = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}$

Wie kann schnell festgestellt werden, wer wohl recht hat?

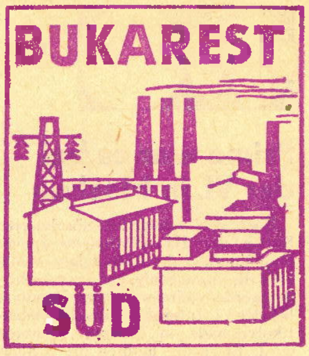
120. Gegeben sind zwei beliebige, sich schneidende Strecken. Konstruiere dasjenige Quadrat, von dem jede Seite (oder deren Verlängerung) nur einen Streckenendpunkt enthält!

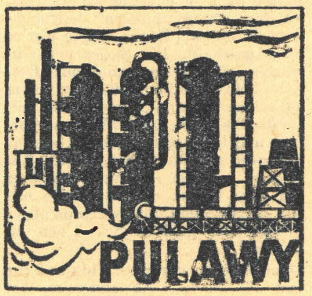
121. Ein Vieleck hat zwei Seiten und 11 Diagonalen mehr als ein anderes. Welche Vielecke sind es?

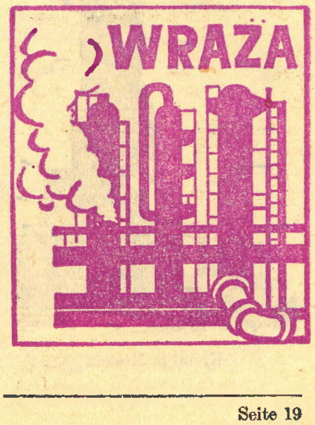
122. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven zu $y = x^2 - 12\,x + 40$ und $y^2 - 12\,y = x - 40$!

123. Ein Einheitskreis rollt auf der x-Achse im ersten Quadranten von hohen positiven x-Werten an die Parabel $y = x^2$ heran. Welche Koordinaten hat der Berührungspunkt? Wie lautet die Gleichung der gemeinsamen Tangente?

124. Man beweise, daß die Subtangente der Kurve $y = a^{x}$ eine konstante Länge besitzt.







Prima war es bei der VI. in Moskau

Nach drei erfolgreich absolvierten Stufen der III. Olympiade Junger Mathematiker der DDR folgte im Mai 1964 die vierte Stufe, auf der entschieden werden sollte, wer unsere Republik bei der VI. Internationalen Mathematikolympiade in Moskau vertreten wird. Erstmalig mußten die Schüler der 11. Klassen dieselben Aufgaben wie die der 12. Klassen lösen. Somit hatten auch sie eine Chance erhalten, an der „Internationalen" teilzunehmen. Nach zwei Klausurtagen war es dann geschafft. Die Sieger und Anwärter auf die Teilnahme standen fest. Zehn Schüler nahmen dann an einem 14tägigen Vorbereitungslehrgang teil, für den die Akademie der Wissenschaften und die Humboldt-Universität Lektoren zur Verfügung stellten. Am meisten mußten sich unsere Lehrer auf dem Gebiet der Geometrie mit uns plagen, denn dort waren im allgemeinen die größten Schwächen zu finden.

Dann begann der erste Flug und für fast alle die erste Auslandsreise. Wir waren sehr gespannt, was uns erwarten würde.

In Moskau landeten wir in einer dicken „Nebelsuppe". Als wir ausstiegen, schlug uns warme, feuchte Luft entgegen, die uns fast den Atem nahm. Wir wurden von einer Dolmetscherin und einer Mathematikstudentin begrüßt und hatten sofort Kontakt gefunden. Mit einem Bus fuhren wir nun zu den Leninbergen, wo wir in der Lomonossow-Universität wohnen sollten.

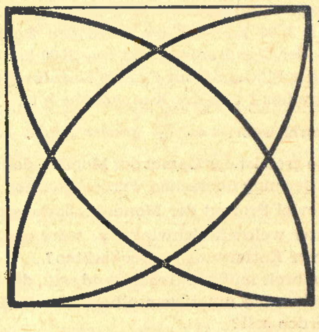
Am nächsten Morgen war die offizielle Eröffnung der Olympiade. Gemeinsam gingen alle Mannschaften anschließend in den nahegelegenen Pionierpalast. Dieser Bau ist sehr modern und mit allem, was man sich denken kann, ausgerüstet.

Langsam wurde uns komisch zumute, die Klausur stand unmittelbar bevor. Sie fand an zwei Tagen statt. Die erste Aufgabe des ersten Tages konnten wir alle lösen, aber bei den übrigen fünf sah es nicht ganz so gut aus. Wir hatten stets einen unter uns, der auf eine Aufgabe die volle Punktzahl erreichte. Am zweiten Tag gab es ein Malheur. Die Aufgaben waren in der deutschen Übersetzung ungenau formuliert und unsere Dolmetscherin nicht mehr anwesend, als wir es bemerkten. So kam es, daß eine an sich nicht allzu schwierige Aufgabe nur durch ein einziges Mitglied unserer Mannschaft gelöst wurde.

Fortsetzung Seite 21

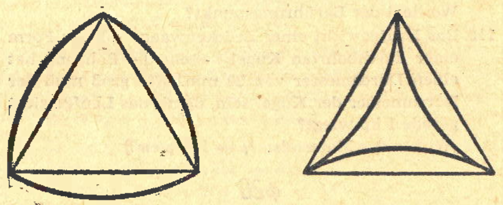
Kreml in Moskau

125. In einem Quadrat mit $a = 10$ cm werden von den 4 Eckpunkten Kreisbögen mit $r = a$ geschlagen, wie es die Abbildung zeigt.



Es ist die Fläche des in der Mitte des Quadrats entstandenen krummlinig begrenzten Vierecks zu bestimmen.

126. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Kante a. Von den drei Ecken sind Kreisbögen mit dem Radius a zu schlagen, so daß ein „ausgebuchtetes", krummlinig begrenztes Dreieck entsteht, so wie es die Abbildung zeigt.
Sodann spiegele man die Kreisbögen an den Dreieckseiten entsprechend der Abbildung, so daß ein „eingebuchtetes", krummlinig begrenztes Dreieck entsteht.

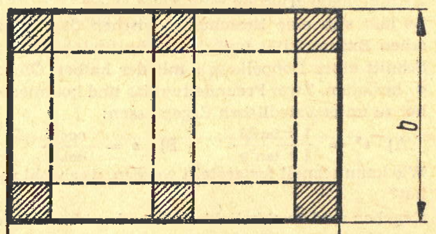


Berechnen Sie die Flächeninhalte der beiden Dreiecke!
Im Falle des „eingebuchteten" Dreiecks ist zu entscheiden bzw. zu beweisen, ob sich die Kreisbögen überschneiden.

127. Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. Auf der Seite AB ist ein Punkt P festgelegt.
Dem Dreieck ABC ist ein gleichseitiges Dreieck PQR so einzubeschreiben, daß P in den vorgesehenen Punkt, Q auf BC und R auf AC fällt.
Wann wird die Lösung unmöglich?

128. Ein Graben von 100 m Länge hat eine Breite von b Metern und eine Tiefe von t Metern.
Er soll parabolischen Querschnitt haben. Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

129. Aus rechteckigem Kartonpapier von der Länge $a = 27$ cm und der Breite $b = 18$ cm soll eine quaderförmige geschlossene Faltschachtel hergestellt werden, deren Deckel an drei Seiten übergreift. Nachstehende Skizze zeigt das Netz der Schachtel.



a) Wie groß muß die Seitenlänge der auszustanzenden Quadrate sein, wenn das Volumen der Schachtel möglichst groß werden soll?
b) Berechnen Sie dieses Volumen!
c) Wieviel Prozent des ursprünglichen Materials beträgt der Abfall, der durch das Ausstanzen der Quadrate entsteht?

130. Gegeben sei ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind. Beweisen Sie, daß dann folgende Punkte zusammenfallen:

1. Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel.
2. Der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel.

131. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$.
Auf der Seite BC liege ein Punkt P, wobei $BP : PC = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\sphericalangle APC = 60°$ sind.
Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonomie die Größe des Winkels γ ermitteln.

132. Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
1. Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
2. Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.
3. Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
4. Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

133. Nikita Sergejewitsch Chruschtschow berichtete auf der Tagung des Obersten Sowjets der UdSSR am 13. Juli 1964, daß der durchschnittliche Jahreszuwachs der Industrieproduktion in den letzten sechs Jahren in der Sowjetunion 9,7% und in den USA 3,6% betrug. Während noch vor 10 Jahren die Industrieproduktion der UdSSR nur etwa ein Drittel so hoch war wie die Industrieproduktion der USA, erreichte sie 1963 bereits 65% der Industrieproduktion der USA.
Wann wird die Sowjetunion die USA in der Industrieproduktion einholen, wenn man den Jahreszuwachs der letzten Jahre auch für die Zukunft annimmt?

134. Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636\,000} \approx 86{,}00$$
$$\sqrt[3]{389\,000} \approx 73{,}00.$$

Daher ist

$$z = \sqrt[3]{636\,000} - \sqrt[3]{389\,000} \approx 13.$$

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

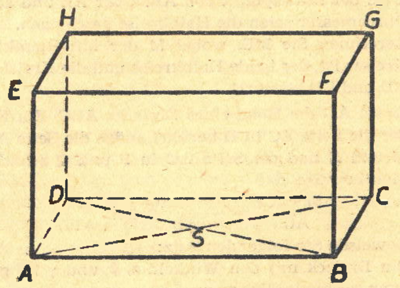
135. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,,$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \quad \text{gesetzt wird.}$$

136. Gegeben sei ein Quader ABCD EFGH mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD sei S (Abbildung).



a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.
b) Es ist zu beweisen, daß die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.

137. Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

138. In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander.
Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball).

Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir die folgenden Angaben:

1. Der Ingenieur sitzt ganz links.
2. Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.
3. Der Pole ist Journalist.
4. Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.
5. Der Lehrer treibt Schwimmsport.
6. Der Kapitän reist nach Rostock.
7. Der Handballspieler stammt aus der DDR.
8. Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.
9. Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.
10. Der Leichtathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.
11. Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.
12. Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.
13. Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.
14. Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler? Weisen Sie nach, daß die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

139. Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, daß aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen, deren Eckpunkte auf den Würfelkanten liegen.
Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen. Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:
a) Es entstehen regelmäßige Vielecke.
b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.
c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

140. Es ist zu beweisen, daß alle Zahlen der Form
$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$
— wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist — durch 1965 teilbar sind.

141. Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung $a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geqq 0$ richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

142. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90°!$$
(Es soll eine gute Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.)

143. In einem spitzwinkligen Dreieck A, B, C ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleichgroßen Winkeln erscheinen (d. h. $\sphericalangle BPA \cong \sphericalangle CPB \cong \sphericalangle CPA$).

144. Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen $x^2 + y^2 < r^2$ und $|y - x| > \frac{r}{2}$ genügen $(r > 0)$!

145. In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:
1. a ist eine rationale Zahl.
2. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5. a ist eine reelle Zahl, die die folgende Ungleichung erfüllt:
$$0 < a^3 + a < 8000.$$
6. a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, daß von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist. Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

146. Es sei $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten $(c \neq 0)$. Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \rightarrow y = f(x)$ eine Funktion definiert? Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a, b, c, d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist!

147. Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen. Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d. h. für den $\sphericalangle APB \geqq \sphericalangle AQB$ für alle $Q \epsilon g$ gilt.

148. Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung
$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$
erfüllt?

149. Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form
$$z = x! + y!$$
dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leqq y$ ist?

150. Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedene Punkten berühren, d. h. je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Lösungen (Klassenstufe 12)

1. Die obere Grundfläche des Zylinders muß $\frac{1}{3}$ Kegelhöhe von der unteren Grundfläche entfernt sein.

9. Für 720 gilt folgende Primzahlzerlegung:
$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
Demnach ist zu zeigen, daß das Produkt von 6 beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen (natürliche) durch 2^4, durch 3^2 und durch 5 teilbar ist.
In der Folge der natürlichen Zahlen 1; 2; 3; ... ist jede zweite Zahl durch 2 teilbar, jede dritte durch 3, jede vierte durch 4 und jede fünfte durch 5.
Daher sind von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen genau drei durch 2 teilbar, das Produkt ist also durch 2^3 teilbar. Mindestens eine Zahl ist durch 4 teilbar, das Produkt also durch 2^4. Aus dem gleichen Grund sind von den sechs Zahlen genau zwei durch 3 teilbar, das Produkt also durch 3^2; und ebenso ist von ihnen genau eine durch 5 teilbar.
Demnach ist das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ teilbar.

10. Wegen $5^4 = 625$ (dreistellig) und $10^4 = 10\,000$ (fünfstellig) kommen nur folgende Potenzen in Frage:
$6^4 = 1296$ Quersumme 18 $18^4 \neq 6^4$
$7^4 = 2401$ Quersumme 7 $7^4 = 7^4$
$8^4 = 4096$ Quersumme 19 $19^4 \neq 8^4$
$9^4 = 6561$ Quersumme 18 $18^4 \neq 9^4$
Die richtige Lösung lautet demnach $7^4 = 2401$.

11. $\tan\alpha = 0{,}85$; $v = 9{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

12. a) 420,— DM
b) Minimum $X = 6$

13. Ja, da 21 und 39 durch 3, ihre Potenzen also durch 9 teilbar sind. Da ferner 21^n auf 1 bzw. 39^{2m+1} auf 9 endet, endet ihre Summe auf 0, ist also durch 5 teilbar.

14. Es ist $f(x) = 25x + 24(10\,000\,000 - x) + 26(18\,000\,000 - x) + 20(7\,000\,000 - 10\,000\,000 + x)$
$= -5x + 648 \cdot 10^6$
$x_{min} = 10\,000\,000$, da $x \leqq 10\,000\,000$ ist.
Also liefern:
1. Ziegelei an 1. Betrieb: 10 000 000 Ziegel
2. Ziegelei an 2. Betrieb: 0 Ziegel
2. Ziegelei an 1. Betrieb: 8 000 000 Ziegel
2. Ziegelei an 2. Betrieb: 7 000 000 Ziegel

15. Jährlicher Bevölkerungszuwachs der UdSSR: 1,9%
Jährlicher Bevölkerungszuwachs der USA: 1,7%
Pro-Kopf-Produktion 1960 in der UdSSR: 718 Rubel
Pro-Kopf-Produktion 1960 in den USA: 1433 Rubel
$$\frac{718 \cdot 1{,}096^x}{1{,}019^x} = \frac{1433 \cdot 1{,}025^x}{1{,}017^x} \quad x \approx 11$$
Also im Jahre 1971.
Probe für 1971: UdSSR: 1598 Rubel
USA: 1562 Rubel

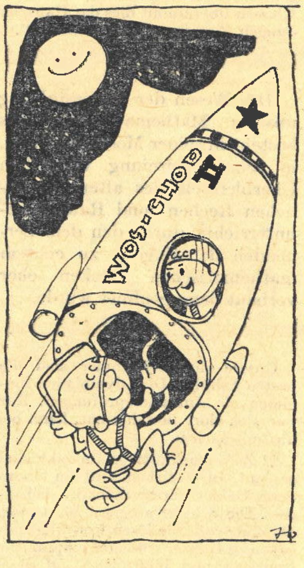
Zwei Fragen an Juri

1. Frage: Welche speziellen Wissensgebiete muß man beherrschen, um in den Weltraum zu fliegen und ganz besonders, welche Bedeutung hat die Mathematik für die Raumfahrt, für das Leben der Kosmonauten?

Juri Gagarin: Die Kosmonautik ist ein Zusammenwirken vieler Wissenschaften. Die letzten Errungenschaften im buchstäblichen Sinne des Wortes sind notwendig. Beim Bau einer starken Trägerrakete spielen viele Wissenschaften hinein, auch die Mathematik. Es ist unmöglich, die Kapazität der verschiedenen Konstruktionen, die günstigsten Maße usw. zu berechnen, ohne die höhere Mathematik zu beherrschen. Man muß die Formeln kennen, muß alles das meistern. Man muß die Materialkunde voll beherrschen, neue Metalle müssen für Triebwerke geschaffen werden. Brennstoffe, die Chemie, die ganzen Verbrennungsprozesse von chemischen Materialien usw. muß man beherrschen. Um in den Kosmos zu fliegen, muß man die Biologie, die Geologie, die Astronomie kennen, auch die Astrophysik. Es gibt wohl überhaupt kaum eine Wissenschaft, die nicht in irgendeinem Grade irgendwie mit der Kosmonautik in Verbindung steht.

2. Frage: Hatten Sie selbst auch gute Zensuren in Mathematik?

Juri Gagarin: Meistens hatte ich gute Zensuren.



Fortsetzung von Seite 20

Als die Klausur hinter uns lag, widmeten wir uns ganz der Besichtigung der Stadt. Die Tage waren sehr erlebnisreich. Alles uns namentlich Bekannte lernten wir nun selbst kennen. Ein besonderes Erlebnis war der Besuch der Tretjakow-Galerie, einer Aufführung des Balletts „Schwanensee" im Bolschoi-Theater und der Empfang in der Moskauer DDR-Botschaft. An jedem Abend kamen wir erst spät ins Bett, weil wir fürchteten, etwas zu versäumen.

Viel zu schnell vergingen die herrlichen Tage. Wir verließen die Stadt in der Hoffnung, vielleicht in einigen Jahren wieder einmal hierher zu kommen.

Monika Titze, Berlin
Wolfgang Klamt, Leipzig (jetzt Berlin)

Im Konsultationspunkt

Olympiade als Aufnahmeprüfung

Der Leipziger Bezirkskonsultationspunkt Junger Naturforscher und Techniker hat die Aufgabe, in den Fachgebieten Mathematik, Chemie, Maschinenbau, Elektrotechnik einschließlich BMSR-Technik und Elektronik die gesamte außerschulische Tätigkeit zu koordinieren sowie die Tätigkeit von Spezialarbeitsgemeinschaften und Stützpunkten in allen Kreisen des Bezirkes zu unterstützen.

Seit dem 14. September 1964 kommen Schüler ab Klassenstufe 7, die bei mathematischen Olympiaden hervorragende Plätze errungen haben, zu uns; vor allem aus Leipzig-Stadt und Leipzig-Land, aber auch aus Grimma, Altenburg, Torgau und anderen Kreisen. Bisher waren solche Schüler meistens nur sporadisch gefördert worden, nun soll das im Konsultationspunkt kontinuierlich das ganze Jahr über geschehen.

In diesem Jahr bestehen drei Zirkel für die Klassenstufen 7 und 8, 9 und 10, 11 und 12. Diese Koppelung wird nächstes Jahr aufgehoben, so daß dann für jede Klassenstufe ein Zirkel besteht. Im April begann erstmalig ein Zirkel für die Klassenstufe 4. In der Perspektive wollen wir erreichen, daß begabte Schülerinnen und Schüler von der 4. bis zur 12. Klasse systematisch gefördert werden. Für die 5. und 6. Klassen übernimmt dies das Haus der Jungen Pioniere „Georg Schwarz".

Das Wesen der Umgestaltung unseres Mathematikunterrichts besteht in seiner Modernisierung, in seiner Befreiung von allen Überbleibseln des alten bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterrichts, durch den dem Lernenden der Zugang zu echtem mathematischen Denken eher verbaut denn geöffnet wurde.

Unsere Zirkelteilnehmer sind die besten Schüler. Die Olympiaden fungieren als Aufnahmeprüfungen. Nur wer sich dort bewährt hat, kann bei uns mitmachen.

21 Zirkelnachmittage im Jahr sind geplant. In je sieben wird ein besonderes Gebiet der Mathematik behandelt. Die Schüler arbeiten zielstrebig, oft mühevoll. Sie lösen freiwillig Aufgaben zu Hause, studieren empfohlene Literatur und bilden sich auf diese Weise selbst weiter. Schüler, die so intensiv bei der Sache sind, unterstützen wir bei der Wahl eines bestimmten Berufes.

Für den Zirkel der 11. und 12. Klassen sind folgende Themen vorgesehen:

I. Einführung in die Theorie algebraischer Strukturen
II. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
III. Konvexe Figuren

Zum Selbststudium erhalten die Jugendlichen im Konsultationspunkt kostenlos die Mathematischen Lesebogen, herausgegeben vom Rat der Stadt Leipzig, Abteilung Volksbildung, Pädagogisches Kreiskabinett und die mathematischen Sonderausgaben der Leipziger Volkszeitung. Einige Aufgaben daraus gelten als Hausaufgaben. Die Lösungen wertet der Zirkelleiter danach aus.

Gerhard Kleinfeld

16. a) Wir stellen zunächst fest, für welche x, y, z die Bedingungen $x + y + z = 90$ und $V = x \cdot y \cdot z = \text{Max.}$ erfüllt sind.
Setzt man $x = a + u$ und $y = a - u$, so wird $x + y = 2a$ und $V = (a^2 - u^2) \cdot z$, und dieser Ausdruck ist für $u = 0$ am größten. Also ist $x = y$.
Ebenso beweist man, daß $y = z$ ist. Daher erhält man
$x = y = z = \frac{90}{3} = 30.$
Für diese Werte ist auch die zweite Bedingung — $\text{Max}(x, y, z) \leqq 60$ — erfüllt.
Also ist das Höchstvolumen $V = 30^3 = 27\,000$. (in cm^3).

b) Die Frage stellt nur eine Art „Sophismus" dar. Denn da für die Höhe keine Vorschriften gemacht werden, kann theoretisch $z = 0$ sein, d. h. das Mindestvolumen ist gleich Null.

17. $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, unter den 3 Zahlen mindestens eine gerade!
1. Teilbarkeit durch 3:
Mögliche Reste: 0, 1, 2
Mögliche Reste der Quadratzahlen: 0, 1
Daher wenigstens eine durch 3 teilbar.
2. Teilbarkeit durch 5:
Mögliche Reste: 0, 1, 2, 3, 4
Mögliche Reste der Quadratzahlen: 0, 1, 4
Daher wenigstens eine durch 5 teilbar.
3. Teilbarkeit durch 4:
Mögliche Reste: 0, 1, 2, 3
Mögliche Reste der Quadratzahlen: 0, 1
Daher wenigstens eine durch 4 teilbar.
Produkt mithin durch 60 teilbar.

18. Es liefern:
Ziegelei 1 an Baustelle 2: 3 Mill. Ziegel
Ziegelei 1 an Baustelle 4: 3 Mill. Ziegel
Ziegelei 2 an Baustelle 1: 5,2 Mill. Ziegel
Ziegelei 2 an Baustelle 3: 5,7 Mill. Ziegel
Ziegelei 2 an Baustelle 4: 1,1 Mill. Ziegel

19. Es sei $x + y = b$. Man erhält dann leicht für $x = y$, daß hier $b = a\sqrt{2}$ ist. Nun nimmt man $x > y$ an und setzt $x = \frac{b}{2} + m$ und $y = \frac{b}{2} - m$. Damit läßt sich dann der Beweis führen.

21. Da $\frac{1}{13}$ der Fische gekennzeichnet waren, sind rund 390 Fische der betreffenden Sorte vorhanden. (In der Praxis wird eine solche Messung selbstversändlich mehrfach wiederholt.)

22. a) Für alle reellen x ist
$$x^2 - 2x + 2 > 0$$
b) Es sei $x = 1 + z$, Dann ist
$$y = \frac{|z|}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}}$$
ein Ausdruck, der mit wachsendem z wächst.
c) Für alle reellen z (außer $z = 0$) bleibt y stets positiv und kleiner als 1. Für $z = 0$ erhält man (da $x = 1$) aus dem ursprünglichen Ausdruck $y = 0$.
d) Symmetrieachse ist die Gerade $x = 1$ (Beweis!).

23. Umformung mit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ usw. ergibt eine reduzierbare Gleichung. Lösungen sind:
$x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 45^\circ$, $x_3 = 90^\circ$, $x_4 = 135^\circ$, $x_5 = 150^\circ$, $x_6 = 210^\circ$, $x_7 = 225^\circ$, $x_8 = 270^\circ$, $x_9 = 315^\circ$, $x_{10} = 330^\circ$.

24. Der Ausdruck läßt sich umformen zu
$$N = [(x - y)^2 + y^2] \cdot [(x + y)^2 + y^2]$$
Von diesen positiven Faktoren muß mindestens einer gleich der Zahl 1 sein, das ist aber nur für $x = y = 1$ der Fall.

25. Man gewinnt drei Ungleichungen, die man zunächst als Gleichungen betrachtet. Aus der Maximumbedingung erhält man das Ergebnis:
a) 26 Stück Sorte 1 und 6 Stück Sorte 2
b) 60 Stück Sorte 1 und 0 Stück Sorte 2
c) 0 Stück Sorte 1 und 80 Stück Sorte 2

26. Drückt man die für den Weg ADB benötigte Zeit als Funktion von x aus und ermittelt die Extremwerte dieser Funktion, so ergibt sich die Behauptung.

27. Hier liegt das entscheidende Problem gleich am Anfang, nämlich die Tatsache, daß in jedem ebenen Dreieck
$$\cos\alpha = -\cos(\alpha + \beta).$$
In die linke Seite eingesetzt, ergibt
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta)$$
und unter Anwendung des Additionstheorems
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta.$$
Der Ausdruck $\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta$ wird ersetzt durch
$$(1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$$
und man erhält durch Zusammenfassung
$1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$
und durch Ausklammern
$1 - 2\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)$
$1 - 2\cos\alpha\cos\beta[-\cos(\alpha + \beta)]$
und schließlich
$1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$
Durch Fallunterscheidung ermittelt man, daß obiger Ausdruck
im rechtwinkligen Dreieck stets gleich 1
im stumpfwinkligen Dreieck stets größer als 1 ist.
Im gleichseitigen Dreieck ist dieser Ausdruck gleich $\frac{3}{4}$. Durch Grenzwertbetrachtung stellt man weiterhin fest, daß Werte unter $\frac{3}{4}$ ausgeschlossen sind.

28. Es ist $(a - b^2) \geqq 0$, mithin $\alpha^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$ und $a^2 + b^2 \geqq 2ab$. Also ist $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geqq 2$ oder
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2.$$

29. Da $\sqrt{1 - x} > \sqrt{1 + x}$ sein muß, kann x nur negativ sein.
(1) Diskussion der reellen Funktion $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
Definitionsbereich: $-1 < x < +1$
Wertevorrat: $+\infty > y > -\infty$
Die Funktion ist monoton fallend, und es gilt $y(x) = -y(-x)$, d. h. Symmetriezentrum im Koordinatenursprung.
(2) Lösungsplan: Man bestimme x_1 für $y = 1$, dann ist $-1 < x \leqq x_1$ das gesuchte Intervall.
(3) Berechnung von x_1 (der Index wird in der Rechnung einfachheitshalber weggelassen).
$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1$; mit $\sqrt{1 - x^2}$ multipliziert:
$\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x} = \sqrt{1 - x^2}$ quadriert und geordnet:
$1 + x^2 = 2\sqrt{1 - x^2}$ erneut quadriert und geordnet:
$x^4 + 6x^2 - 3 = 0$ führt auf die Lösungen
$x_{11} = +\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$; $x_{12} = +\sqrt{-3 - 2\sqrt{3}}$;
$x_{13} = -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$; $x_{14} = -\sqrt{-3 - 2\sqrt{3}}$.
Hier ist nur brauchbar $x_{13} = -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$
(4) Antwort: Die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{1 + x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \geqq 1$ gilt im Intervall $-1 < x \leqq -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

30. Die Quersumme muß durch 9 teilbar sein. Die alternierende Quersumme muß ferner durch 11 teilbar sein. Daraus folgt, daß die Quersumme selbst eine gerade Zahl sein muß, und damit die Behauptung.

31. Nach Umformung und Reduzierung auf die Kosinusfunktion erhält man eine quadratische Gleichung (wenn $\cos^2 x = z$ gesetzt wird). Daraus ergibt sich $\cos^2 x \geqq \frac{3}{4}$ und nach einigen weiteren Überlegungen
$-30^\circ + k \cdot 180^\circ \leqq x < k \cdot 180^\circ$
und $k \cdot 180^\circ < x \leqq 30^\circ + k \cdot 180^\circ$
mit $k = 0, 1, 2, \ldots$
Wir untersuchen die Funktion $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$.
Sie hat bei $x = k\frac{\pi}{2}$ (k ganz) Unendlichkeitsstellen, und zwar für $x = k\pi$ beiderseits positive. Die gesuchten Intervalle erstrecken sich also links und rechts von diesen Werten, die dabei auszunehmen sind. Die Grenzen ermittelt man aus der Bedingung
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{8}{3}$$
Nach Substition $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = z$ ergibt sich leicht die quadratische Gleichung $z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8} = 0$ mit den Lösungen $z_1 = \frac{3}{4}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}$, von denen nur die erste brauchbar ist und über $\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ auf $x_1 = \pm 30^\circ$ und $x_2 = \pm 150^\circ$ führt.
Antwort: Die Ungleichung gilt für x aus den Intervallen $k\pi - \frac{\pi}{12} \leqq x \leqq k\pi + \frac{\pi}{12}$ (k nat. Zahl), wobei $x \neq k\pi$ bleibt. Die Intervallfolge beginnt mit dem halben Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{12}$

35. Angenommen ξ_1, ξ_2, ξ_3 seien Lösungen. Dann ist $(p+1)(\xi_1-\xi_2)=(p+1)(\xi_2-\xi_3)=0$. Für $p \neq -1$ ist dann $\xi_1=\xi_2=\xi_3=t$. Da aber $(p-2)(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=0$ gilt, ist für $t \neq 0$ notwendig $p=2$. Für $t=0$ ist p beliebig. Für $p=-1$ brauchen wir nur $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ zu betrachten. Es ist $\xi_1=u$, $\xi_2=v$, $\xi_3=-u-v$. Notwendige Bedingungen für die Lösungen sind also

$$\begin{array}{ll} p=-1 & ;\ \xi_1=u,\ \xi_2=v,\ \xi_3=-u-v \\ p=2 & ;\ \xi_1=\xi_2=\xi_3=t \\ p\neq -1,\ p\neq 2; & \xi_1=\xi_2=\xi_3=0. \end{array}$$

Wie die Probe zeigt, sind diese Bedingungen auch hinreichend.

36. a) Durch Einsetzen der entsprechenden Werte für N und P erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 5a_1+25a_2+125a_3+625a_4&=4{,}87\\ 10a_1+100a_2+1000a_3+10000a_4&=10{,}52\\ 15a_1+225a_2+3375a_3+50625a_4&=17{,}24\\ 20a_1+400a_2+8000a_3+160000a_4&=25{,}34. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$a_4=\frac{0{,}02}{15000}=0{,}0000013333$$

$$a_3=\frac{0{,}52}{1500}=0{,}00034667$$

$$a_2=0{,}0101667 \qquad a_1=0{,}914333.$$

b) Setzt man $N=25$ in die Gleichung

$$P(N)=0{,}914333\,N+0{,}0101667\,N^2+0{,}00034667\,N^3+0{,}0000013333\,N^4$$

ein, so erhält man bei Rechnung mit einer vierstelligen Logarithmentafel $P(25)=35{,}15$.

Dieser Wert stimmt mit dem durch Messung gefundenen Wert gut überein. Die Differenz beträgt rd. 0,03%.

37. In jedem Dreieck ist

$$a=2r\sin\alpha \quad b=2r\sin\beta$$
$$c=2r\sin\gamma \text{ und } a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$4r^2\sin^2\alpha=4r^2(\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha).$$

Durch Umformen bestätigt man auch die andere Behauptung.

38. Die gesuchte Zahl sei x. Dann ist

$$\begin{array}{ll} & 100x \leqq x^3 < 100(x+1) \\ \text{oder} & 1000x \leqq x^3 < 1000(x+1) \\ \text{oder} & 10000x \leqq x^3 < 10000(x+1). \end{array}$$

Aus (1) folgt $100 \leqq x^2 < 100\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqq 110$,

also $x=10$.

Aus (2) folgt $1000 \leqq x^2 < 1000\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqq 1100$,

also $x=32$.

Aus (3) folgt $10000 \leqq x^2$, was unmöglich ist.

Daher sind 10 und 32 die einzigen Zahlen, die der Bedingung entsprechen.

39. Mit Hilfe der Formel

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$$

erhält man das äquivalente Gleichungssystem

$$\cos x+\cos y=1$$
$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4},$$

das nur erfüllt ist, wenn

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ und } \cos y=\frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge

$$x=2\pi m\pm\frac{\pi}{3},\quad y=2\pi n\pm\frac{\pi}{3},$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

40. Es sei $x=a+10b$ und $x^3\equiv x \pmod{10^2}$, dann gilt:

$$a^3\equiv a \pmod{10} \text{ und } 3a^2b+\frac{a^3-a}{10}\equiv b \pmod{10}.$$

Wir diskutieren alle Möglichkeiten:

$a=1$; $3b\equiv b \pmod{10}$, also $b=0$, od. $b=5$. $x=1$(entf.) $x=51$

$a=4$; $48b+6\equiv b \pmod{10}$, also $b=2$. $x=24$

$a=5$; $75b+12\equiv b \pmod{10}$, also $b=2$ oder $b=7$. $x=25$ $x=75$

$a=6$; $108b+21\equiv b \pmod{10}$, also $b=7$. $x=76$

$a=9$; $243b+72\equiv b \pmod{10}$, also $b=4$ oder $b=9$. $x=49$ $x=99$

41. Mit jedem Paar (ζ,η), welches das System erfüllt, ist auch das Paar $(-\zeta,-\eta)$ eine Lösung.

(1) Stets muß $y\neq 0$ gelten, also sind alle Paare $(\zeta, 0)$ ausgeschlossen.

(2) **Sonderfall:** $p=0$ ergibt $x=0$. Dann sind alle Paare $(0,\eta)$ mit $\eta\neq 0$ Lösungen des Systems.
Umgekehrt kann ein Paar $(0,\eta)$ nur dann Lösung sein, wenn $p=0$ ist.
Also ist für $p\neq 0$ stets $x\neq 0$, d. h. in allen Lösungspaaren (ζ,η) gilt dann $\zeta\neq 0, \eta\neq 0$.

(3) **Allgemeiner Fall:** $p\neq 0$.
Aus (1) und (2) folgt

durch Addition $\quad xy=2p(x^2+y^2)$,

durch Subtraktion $\quad \frac{2x}{y}=2p(x^2+y^2)$,

woraus sich $x\left(y-\frac{2}{y}\right)=0$ ergibt.

$x=0$ scheidet wegen (2) aus. Daher folgt $y^2=2$.

a) $y_I=\sqrt{2}$.

Dann folgt aus (2): $x^2-\frac{1}{p\sqrt{2}}x+2=0$

mit den Lösungen

$$x_1=\frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-16p^2}\right),$$

$$x_2=\frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1-16p^2}\right),$$

Damit x_1, x_2 reell sind, muß p der Bedingung

$$1-16p^2=0 \text{ oder } |p|\leqq\frac{1}{4} \text{ genügen.}$$

b) $y_{II}=-\sqrt{2}$.

Dann folgt aus (2): $x^2+\frac{1}{p\sqrt{2}}x+2=0$

mit den Lösungen

$$x_3=-\frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1-16p^2}\right),$$

$$x_4=-\frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-16p^2}\right),$$

wobei wieder $|p|\leqq\frac{1}{4}$ die notwendige Realitätsbedingung für die Lösungen darstellt.

Zusammenfassung:

Für $0<|p|=\frac{1}{4}$ haben sich folgende Lösungspaare ergeben:

$$(\zeta,\eta)=\begin{cases}(x_1, y_I)\\(x_2, y_I)\\(x_3, y_{II})\\(x_4, y_{II})\end{cases}$$

Die Lösungen lassen sich durch die entsprechenden Proben bestätigen.

(4) Für $|p|>\frac{1}{4}$ ist die Menge reeller Lösungspaare leer.

42. Man bildet die Funktionen

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

Für $x=0$; $x=-\frac{1}{2}$ und $x=-1$ ist diese Funktion nicht definiert. Durch Untersuchung in den Bereichen

$$\begin{array}{l} -\infty<x<-1, \\ -1<x<-\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}<x<0 \text{ und} \\ 0<x<+\infty \end{array}$$

erhält man folgende Lösungen:

a) Ist erfüllt für $-1<x<-\frac{1}{2}$ und $0<x<+\infty$.

b) Keine Lösungen.

c) Ist erfüllt für $-\infty<x<-1$ und $-\frac{1}{2}<x<0$.

52. Die Gleichung hat 1999 reelle Wurzeln.

53. Die Brüche führen unabhängig von der Wahl des a und b auf 0,618 ... (Verhältnis des goldenen Schnitts).

54. Die Lösung ist eindeutig; $x=22$, $y=17$.

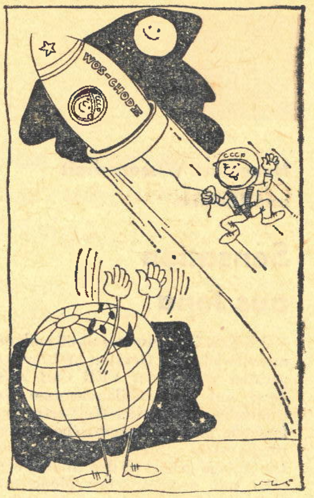
55. Es sei $a\geqq b$ (o. B. d. A.). Dann ist

$$\begin{aligned} a^{a-b}&\geqq b^{a-b}\\ a^{a-b}\cdot b^{b-a}&\geqq 1\\ a^{a+b}\cdot b^{b+a}&\geqq a^{2b}\cdot b^{2a}\\ \sqrt{a^{a+b}\cdot b^{a+b}}&\geqq a^b\cdot b^a \end{aligned}$$

Wegen $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$ ist $a+b\geqq 2\sqrt{a\cdot b}$ oder:

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\geqq\sqrt[a+b]{a^b\cdot b^a}.$$

Bemerkung: Es ist darauf zu achten, daß in dieser Reihenfolge geschlossen wird. Natürlich wird die Lösung im allgemeinen in umgekehrter Reihenfolge gefunden werden. Man muß aber stets von einer gesicherten Aussage ausgehen.



Steckenpferde: Chemie und Mathematik

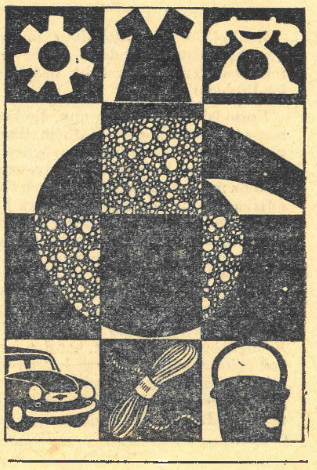
Ich habe von unserem Lehrer den Auftrag erhalten, über meine schulische Entwicklung zu berichten. Das fällt mir nicht leicht, da ich der Meinung bin, daß es noch viele andere Schüler gibt, die bessere Leistungen zeigen als ich.

Als ich 1958 mein erstes Zeugnis erhielt, befand ich mich schon mit unter den drei besten Schülern der Klasse 1c der 41. Leipziger Oberschule. Auf Grund meiner guten Leistungen wurde ich 1959 zur 42. Oberschule in eine Klasse mit erweitertem Russischunterricht delegiert. Dort machte das Lernen viel mehr Spaß, denn die Anforderungen an den Schüler wuchsen. Ich erhielt dreimal das Abzeichen „Für gute Arbeit in der Schule". Ebenfalls dreimal nahm ich an der 2. Stufe der Mathematikolympiade teil, wo ich Vierter und Achter wurde. Besonders habe ich mich über den Erfolg unseres Chemikerkollektivs gefreut, zu dem auch ich gehöre. Wir haben auf Anhieb in der Chemieolympiade 1965 des Stadtbezirkes Südwest den ersten Platz belegt. Damit werden wir am Bezirksausscheid teilnehmen.

Meine Lieblingsfächer sind Chemie, Mathematik und Englisch. Ich werde nun das achte Schuljahr beenden und dann zur erweiterten Leibniz-Oberschule überwechseln, wo ich das Abitur ablegen und gleichzeitig den Beruf eines Maschinenbauers erlernen möchte.

Peter Uhlmann
Schüler der Klasse 8 R I,
42. Oberschule Leipzig

Man kann ein großer Rechner sein, ohne die Mathematik zu ahnen.
Novalis



Neues aus Wissenschaft und Technik

Sensation aus Jena

JENA. Zusammen mit 66 anderen neuentwickelten Geräten und Zusatzgeräten stellte der VEB Carl Zeiss Jena auf der Jubiläumsmesse das wahrscheinlich in der Welt erste umfassende photogrammetrische Kartierungssystem „Stereotrigomat“ aus. Die Anlage gehört zu den Analogrechnern mit geometrischer Modellvorstellung. In dem stereoskopischen Meßgerät werden dabei zwei Luftbilder ausgemessen, die durch entsprechende äußerst genaue Anordnung ein optisches Modell der fotografierten Landschaft darstellen, wobei sich die Verbindung von Situations- und Reliefauswertung durch den Wegfall der Vermessungsarbeiten im Gelände besonders zeitsparend auswirkt. Das neuentwickelte Universalgerät, mit dem Landkarten und Pläne praktisch aller Maßstäbe hergestellt werden können, eröffnet wahrscheinlich auch völlig neue Anwendungsgebiete, die erst während des Einsatzes in der Praxis untersucht und weiter ausgearbeitet werden können.

Die neuartige Aufteilung völlig geschlossen gebauter Gerätegruppen – Meßgerät, Rechenaggregat und Elektroteil – mit fester Zuordnung auf einer Podestkonstruktion ermöglicht eine bessere Bedienbarkeit und das Einsparen von Hilfskräften. Mit erstmalig verwendeten messenden Kugelschraubtrieben und elektrischen Präzisionsnachführungen in der Größenordnung von wenigen Mikrometern wird auch im feinmechanisch-optischen Gerätebau ein Stand erreicht, der das Weltniveau bestimmen dürfte.

Mahler-Problem gelöst

MINSK. Das sogenannte „Kurt-Mahler-Problem“, eine von dem deutschen Mathematiker Kurt Mahler vor 33 Jahren aufgestellte Hypothese über Probleme im Grenzbereich der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Algebra und anderer mathematischer Disziplinen, ist nach dreijähriger Arbeit jetzt von dem 28jährigen belorussischen Wissenschaftler Wladimir Sprindshuk gelöst worden. Die Akademie der Wissenschaften der Unionsrepublik und verschiedene mathematische Institutionen haben laut TASS diese Arbeit als eine der größten Leistungen auf dem Gebiet der Zahlentheorie in den letzten Jahren gewertet.

Zahlreiche Wissenschaftler in den verschiedensten Ländern haben bereits seit langem versucht, das Mahler-Problem zu lösen.

Sprindshuk gelang es nun, die Voraussage des deutschen Mathematikers über eine genaue Folge der möglichen Größen von Polynomen begrenzter Potenz mit veränderlichen ganzen Koeffizienten für fast alle Zahlen zu bekräftigen und die Hypothese zu präzisieren. Die genauen Ergebnisse der Arbeit werden demnächst im Mitteilungsblatt der Akademie der Wissenschaften der UdSSR veröffentlicht. Der gegenwärtig in Australien lebende Kurt Mahler, Mitglied der Britischen Königlichen Gesellschaft, hat den jungen belorussischen Wissenschaftler bereits brieflich zu seinem Erfolg beglückwünscht und seine Befriedigung über die Lösung des Problems ausgedrückt.

56. Angenommen x_1 sei eine Lösung der Gleichung. Dann muß

sein $\sin 3x_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_1\right) = -1$

und $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x_1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x_1\right) + m \neq 0.$

Das ist aber (wegen $|\sin x| \leqq 1$ und $|\cos x| \leqq 1$) nur möglich, wenn entweder a) $\sin 3x_1 = -1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_1\right) = 1$

oder b) $\sin 3x_1 = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_1\right) = -1$ ist.

Fall a) ergibt $x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ und $x_1 = \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \cdot (l, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

Daraus folgt $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ und $6l + 8k = 5$, was unmöglich ist.

Fall b) ergibt $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ und $x_1 = \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ $(l, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Daraus folgt $4k = 3l + 1$ oder $k = \frac{3l + 1}{4}$ bzw. wenn man $\frac{3l + 1}{4} = 3t + 1$ setzt, $k = 3t + 1$ mit $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Also erhält man als Lösung $x_1 = 2\pi t + \frac{5\pi}{6}$.

Durch Einsetzen in die zweite oben angegebene Gleichung ermittelt man schließlich $m \neq -2$.

57. Falls n die Endziffern 1, 5, 6, 9 bzw. 0 hat, erhält man stets 1, 5, 6, 9 bzw. 0 als Endziffern von n^{n^n}.
Hat n die Endziffer 2, so ist entweder $n \equiv 0 \pmod 4$ oder $< n \equiv 2 \pmod 4$. In beiden Fällen ist dann $n^n \equiv 0 \pmod 4$ und die Endziffer von n^n entweder 4 oder 6. Daher endet (n ist ja gerade) n^{n^n} in diesem Falle stets auf 6.
Hat n die Endziffern 4 oder 8, so führt eine analoge Überlegung zu dem Ergebnis, daß n^{n^n} in diesem Falle stets auf 6 endet.
Ist 3 die Endziffer von n, so ist entweder $n \equiv 3 \pmod 4$ oder $n \equiv 1 \pmod 4$, wobei diese Fälle in dieser Reihenfolge ständig wiederkehren. Dann ist für $n \equiv 3 \pmod 4$ auch $n^n \equiv 3 \pmod 4$, und n^{n^n} hat als letzte Ziffer 7. Ist $n \equiv 1 \pmod 4$, dann ist auch $n^n \equiv 1 \pmod 4$ und n^{n^n} hat als letzte Ziffer 3. Also hat n^{n^n} im betrachteten Fall als Endziffer abwechselnd 7 oder 3.
Hat n schließlich die Endziffer 7, so ist (in dieser Reihenfolge stets wiederkehrend) entweder $n \equiv 3 \pmod 4$ oder $n \equiv 1 \pmod 4$ mit $n^n \equiv 3 \pmod 4$ bzw. $n^n \equiv 1 \pmod 4$.
Also hat n^{n^n} abwechselnd die Endziffer 3 oder 7.
Mithin gibt es für die Endziffern folgende 20stellige Periode:
1; 6; 7; 6; 5; 6; 3; 6; 9; 0; 1; 6; 3; 6; 5; 6; 7; 6; 9; 0.

59. a) 90 % d) $0{,}9^9 = 0{,}387$ 38,7 %
b) 81 % e) $0{,}9^{19} = 0{,}135$ 13,5 %
c) 65,61% f) $0{,}9^{49} = 0{,}0057$ 0,57%

61. Die Verteilung lautet:
a) 0; 6; 8; 10; 12 mit 5; 7; 9; 11; 13
b) 7; 5; 2; 4; 12 mit 0; 6; 3; 11; 13
c) 0; 5; 11; 4; 10 mit 1; 2; 8; 7; 13

62. a) $8 = 2^3$ b) $27 = 3^3$
c) $64 = 4^3$ d) 2^4, bzw. 3^4, bzw. 4^4
e) $n^4 = n + 4 \cdot n \cdot (n-1) + 6 \cdot n \cdot (n-1)(n-2) + 3 \cdot n \cdot (n-1) + n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)$,
wenn man folgende Fälle untersucht:
1. vier gleiche Ziffern: z. B. 1111
2. drei gleiche Ziffern: z. B. 1112
3. zwei gleiche Ziffern: z. B. 1123
4. zwei gleiche und zwei gleiche Ziffern: z. B. 1122
5. vier versch. Ziffern: z. B. 1234.

63. Man nimmt aus dem 1. Gefäß 1 Kugel,
aus dem 2. Gefäß 2 Kugeln,
aus dem 3. Gefäß 4 Kugeln,
aus dem 4. Gefäß 8 Kugeln,
aus dem 5. Gefäß 16 Kugeln
und ermittelt mit einer Wägung die Gesamtmasse dieser 31 Kugeln. Zieht man von dem Zahlenwert dieser Gesamtmasse 310 ab, so erhält man die Zahl a.

Aus der Gleichung
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 = a$$
erhält man dann eindeutig für die x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die Werte 0 oder 1, je nachdem in dem i-ten Gefäß Kugeln von 10 g oder Kugeln von 11 g liegen.

Beispiel: Es ist a = 22. Man erhält
$$0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 22.$$
Also liegen in dem 1. und 4. Gefäß Kugeln von 10 g, während in dem 2., 3. und 5. Gefäß Kugeln von 11 g liegen.

64. Mögliche Lösung:
$$h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 7 \cdot h_1$$
$$7 + 7 + 11 + 10 = 7 \cdot 5$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 5 \cdot f_5$$
$$9 + 9 + 12 + 10 = 5 \cdot 8$$
$$f_1 + f_2 = f_4 + f_5$$
$$9 + 9 = 10 + 8$$
Hans schoß 5, 7, 7, 11, 10 = 40 Ringe
Fritz schoß 9, 9, 12, 10, 8 = 48 Ringe
Fritz schoß die 12.

65. (I) $\frac{10a + b}{10c + b} = \frac{a}{c}$ Für b = 0 gilt die Aussage für jedes a und c.
(a und c $\neq$ 0) Für b $\neq$ 0 ist a = c.

(II) $\frac{10b + a}{10b + c} = \frac{a}{c}$ $b \neq 0;\ a = c \neq 0$

(III) $\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}$ Für a = b ist auch a = c.
(a und b $\neq$ 0) Für a $\neq$ b ist $c = \frac{10ab}{9a + b}$.

Das liefert die Lösungen:
1. a = 1; b = 6, c = 4 oder b = 9, c = 5
2. a = 2; b = 6, c = 5
3. a = 4; b = 9, c = 8

(IV) $\frac{10b + a}{10c + b} = \frac{a}{c}$ Für a = b ist auch a = c.
(b und c $\neq$ 0) Für a $\neq$ b ist $c = \frac{ab}{10b - 9a}$.

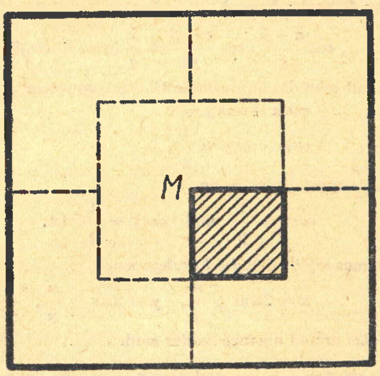
Das liefert die Lösungen:
1. b = 6; a = 4, c = 1 oder a = 5, c = 2
2. b = 9; a = 5, c = 1 oder a = 8, c = 4

66. Bezeichnet man mit x die Anzahl der Tiere, so ist
$$x^2 - 20n = 10 + r,$$
wobei n eine natürliche Zahl und r = 1, 2, …, 9 sind.
Also läßt x^2 bei Division durch 20 den Rest 10 + r.
Setzt man $x = 10k + q$ mit $q = 1, 2, \ldots, 9$ und $k = 2, 3, \ldots$,
so erhält man $x^2 = 100k^2 + 20kq + q^2$.
Diese Zahl läßt bei Division durch 20 stets den gleichen Rest wie q^2. Es müßte also dieser Rest gleich 10 + r sein. Das liefert eindeutig r = 6. Das Messer kostete mithin 6 Groschen. (Die Anzahl der Tiere ist damit nicht eindeutig festgelegt, am Ergebnis ändert sich dadurch aber nichts.)

68. a) 90 Gesamtspiele b) 18 Spieltage
c) Kein Spieler ist spielfrei. d) 5 Spiele je Abend.

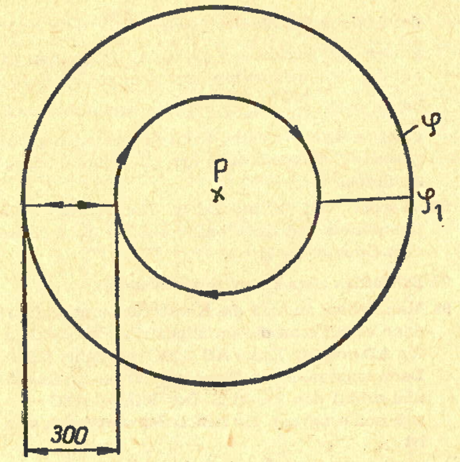
69. $V = 72\pi$ RE; $V \approx 222{,}3$ RE

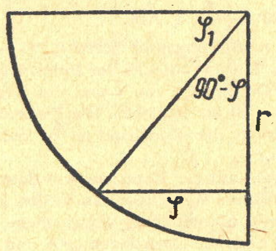
70. Die Einteilung erfolgt entsprechend der Abbildung.



81. a) Ausgangspunkt ist der Nordpol.
b) Das Flugzeug muß von einem beliebigen Punkt starten, der 300 km nördlich desjenigen südlichen Breitenkreises φ_1 liegt, dessen Umfang 300 km beträgt. Es gibt demnach beliebig viele Ausgangspunkte, die alle auf dem gleichen südlichen Breitenkreis φ liegen.

b_1) Berechnung von φ_1
Aus der Abbildung erhält man (beim West-Ost-Flug soll dieselbe Linie nicht mehrmals durchflogen werden):





I $\quad \sin(90^0 - \varphi_1) = \frac{\varphi}{r}$

II $\quad \varphi = \frac{300}{2\pi}$

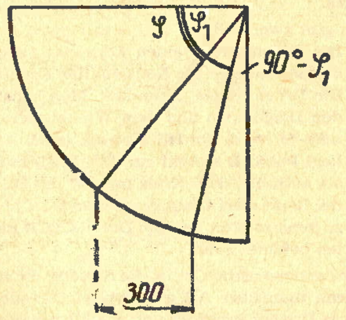
II in I $\quad \cos\varphi_1 = \frac{300}{2\pi \cdot 6370}$

$\underline{\varphi = 89{,}57^0}$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \lg 300 &= 12.4771-10 \\ -\lg 2 &= 0.3010 \\ -\lg \pi &= 0.4971 \\ -\lg 6370 &= 3.8041 \\ \hline \lg \cos\varphi_1 &= 7.8749-10 \end{aligned}$$

Aus der Abbildung erhält man:



I $\quad \varphi = \varphi_1 - \varphi$

II $\quad \overset{\frown}{\varphi_2} = \frac{306}{6370}$

$\overset{\frown}{\varphi_2} = 0{,}0471$

$\overset{\frown}{\varphi_2} = 2{,}7^0$

I $\quad \varphi = 86{,}87^0$

Nebenrechnung.

$$\begin{aligned} \lg 300 &= 12.4771-10 \\ -\lg 6370 &= 3.8041 \\ \hline \lg \overset{\frown}{\varphi_2} &= 8.6730-10 \\ \lg \overset{\frown}{\varphi_2} &= 0.6730-2 \end{aligned}$$

Der Ausgangspunkt liegt irgendwo auf dem Breitenkreis 86,87° südlicher Breite.

82. a) **Diskussion der Funktion**

1. Schnittpunkt mit der y-Achse ($x = 0$)

1,1) $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ für $|x| > 1$
ist für $x = 0$ nicht erklärt, deshalb kein Schnittpunkt mit der y-Achse.

1,2) $\psi(x) = x^3$ für $|x| \leq 1$ ergibt $\psi(0) = 0$
Die Bildkurve schneidet die y-Achse im Koordinatenursprung O(0, 0).

2. Schnittpunkt mit x-Achse [$\varphi(x) = 0$; $\psi(x) = 0$]:

2,1) Aus $\varphi(x) = \frac{|x|}{x} = 0$ folgt $|x| = 0$ bzw. $x = 0$, also außerhalb des Definitionsbereiches. Demnach hat $\varphi(x)$ keine Nullstelle.

2,2) Aus $\psi(x) = x^3 = 0$ folgt $x = 0$
(in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in 1,2).

3. Verhalten im Unendlichen:

3.1 Für $x > 1$ gilt $\varphi(x) = \frac{|x|}{x} = +1$ und

$\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = +1.$

Für $x < -1$ gilt $\varphi(x) = \frac{|x|}{x} = -1$ und

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-1) = -1.$

Die Bildkurve von $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ für $1 < x < +\infty$ ist demnach die Parallele zur x-Achse im Abstand $+1$ im ersten Quadranten,

die Bildkurve von $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ für $-1 > x > +\infty$ ist die Parallele zur x-Achse im Abstand -1 im dritten Quadranten.

3,2 Für $\Psi(x) = x^3$ entfällt wegen des gegebenen Definitionsbereiches $-1 \leq x \leq \pm 1$ die Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen.

4. Extrema [$f'(x_e) = 0$; $f''(x_e) \gtrless 0$] und Wendepunkte $f''(x_w) = 0$; $f'''(x_w) \neq 0$:

4.1 Für $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ mit $|x| < 1$ existieren keine Extrema und Wendepunkte, da beide Teile der Bildkurve Parallelen zur x-Achse sind.

4.2 Für $\Psi(x) = x^3$ mit $|x| \leq 1$ gilt $\Psi'(x) = 3x^2$ und $3x_e^2 = 0$. Demnach ist $x_e = 0$ und $\Psi''(x_e) = 6 \cdot x_e = 0$.
An der Stelle $x = 0$ liegt kein Extremum, sondern ein Horizontalwendepunkt vor, denn außer $\Psi'(0) = 0$ und $\Psi''(0) = 0$ gilt auch $\Psi'''(x) = 6 \neq 0$. Wendetangente ist die x-Achse.

5. Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgende Bildkurve für f (x):
Im Intervall $-\infty < x < -1$ erhält man eine Parallele zur x-Achse im Abstand -1, im Intervall $-1 \leq x \leq +1$ eine kubische Parabel und im Intervall $+1 < x < +\infty$ eine Parallele zur x-Achse im Abstand $+1$.
Die Bildkurve ist zentralsymmetrisch mit dem Koordinatenursprung als Zentrum.

b) **Berechnung des Flächeninhaltes:**

Berechnung der Fläche F, die von der Bildkurve der Funktion, der x-Achse und der Geraden $x = -2$ und $x = +2$ begrenzt wird.

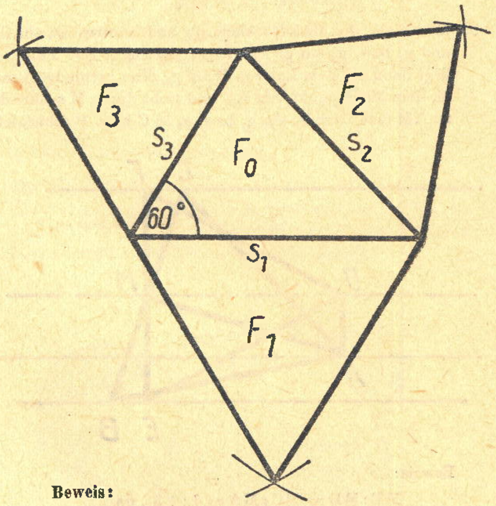
$$F = 2\left(\int_0^1 x^3 dx + 1\right)[E^2] = 2\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 1\right)[E^2]$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} + 1\right)[E^2]$$

$$F = 2\frac{1}{2}[E^2]$$

Der Flächeninhalt beträgt $2\frac{1}{2}$ FE.

83 Die Behauptung lautet dann: $F_0 + F_2 = F_1 + F_3$
Es können mehrere Beweise geführt werden.



Beweis:

1. Umformung von $F_0 + F_2$:

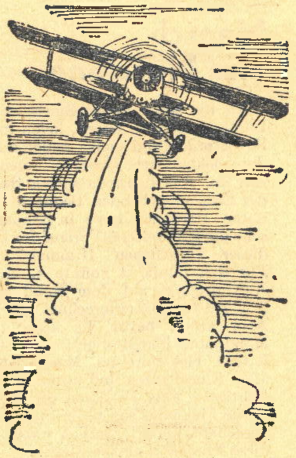
$$\frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_3 \cdot \sin 60^0 + \frac{1}{4} s_2^2 \cdot \sqrt{3},$$

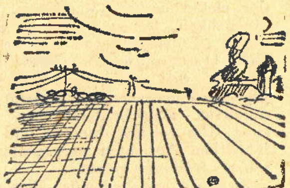
wegen $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ erhält man durch Ausklammern $\frac{\sqrt{3}}{4}(s_1 \cdot s_3 + s_2^2)$

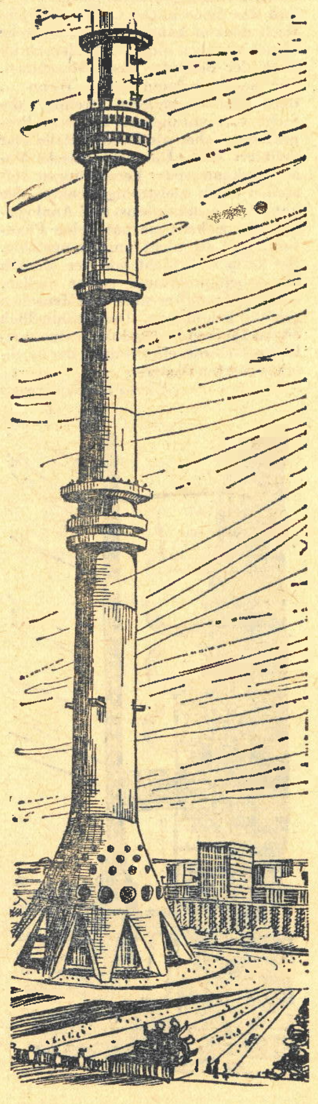
und daraus wegen $s_2^2 = s_1^2 + s_3^2 - 2s_1s_3 \cdot \cos 60^0 = s_1^2 + s_3^2 - s_1s_3$,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(s_1s_3 + s_1^2 + s_3^2 - s_1s_3)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(s_1^2 + s_3^2).$$







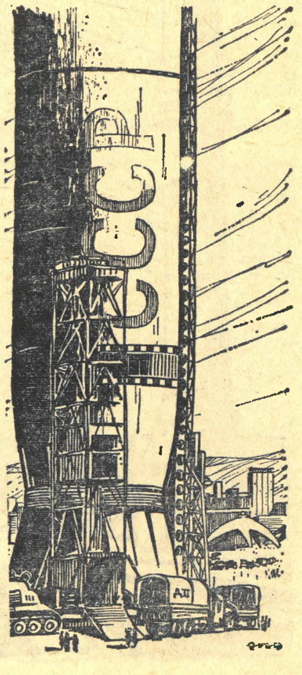
Mensch und Maschine

Als die sowjetischen Sputniks und Luniks gestartet waren, liefen in der Sowjetunion und vielen anderen Ländern elektronische Großrechenmaschinen an. Aus den von vielen Stellen der Erde eingehenden Beobachtungsdaten errechneten sie in Sekundenschnelle den weiteren Verlauf der Bahn dieser künstlichen Himmelskörper. Für den Lunik II konnte z. B. der Auftreffpunkt auf dem Mond ziemlich genau vorherberechnet werden. Aber schon bevor die künstlichen Monde und Planeten gestartet waren, hatten elektronische Maschinen in allen Einzelheiten und unter Berücksichtigung aller Faktoren die theoretische Flugbahn sowie die Startdaten berechnet, die erforderlich waren, um diese Flugbahn einzuschlagen.

Die staunenerregenden Leistungen der elektronischen Maschinen, ihre Möglichkeit, bis zu einem gewissen Grade „Entscheidungen“ zu treffen, haben bestimmte westliche Kreise dazu verleitet, den „denkenden Roboter“ gegen den Menschen auszuspielen – in durchaus menschenfeindlicher Absicht. Um solchen dunklen und gefährlichen Absichten entgegenzutreten, sei folgendes gesagt:

Zwischen dem denkenden Menschen und einer elektronischen Maschine bestehen grundlegende Unterschiede. Auf einen Nenner gebracht, bedeuten sie, daß das menschliche Gehirn schöpferisch denken kann, die elektronische Maschine aber nicht! Der Mensch ist auch der Schöpfer dieser Maschinen. Die Maschine kann keine „Wenn ... dann“-Entscheidungen treffen, die nicht von vornherein in ihrem Programmspeicher als Eventualfälle klar definiert sind. Die elektronische Maschine kann weder Vermutungen aufstellen noch zielstrebig denken. Sie kann keine Induktions- und Analogieschlüsse ziehen; sie hat keine Phantasie und ist nicht anpassungsfähig. Sie kann sich nicht wie der Mensch ein Arbeitsprogramm selber stellen, sondern sie muß es stets vom Menschen gestellt bekommen. Denn schließlich ist das Denken ein Produkt des menschlichen Gehirns, ein Produkt der hochorganisierten Materie.

Aus Wochenpost 20/60



2. Umformung von $F_1 + F_3$:

$$\frac{1}{4} s_1^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4} s_3^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(s_1^2 + s_3^2)$$

Da sich bei der ersten und zweiten Umformung Gleichheit ergibt, gilt $s_1^2 + s_3^2 = s_1^2 + s_3^2$, womit obige Behauptung bewiesen ist.

84. R beschreibt ein Quadrat, Drehung um 60°.

86. Man konstruiert des Teildreieck AMB. Punkt A liegt

a) auf dem Ortskreis für ω,

b) auf dem Kreis mit $\frac{b}{2}$ um den Mittelpunkt M_1 von AB, wobei $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$, da dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüberliegt.

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn beide Kreise Punkte gemeinsam haben. Es gibt in der Regel zwei Lösungen, im Grenzfall (Berührung von innen) eine Lösung. Dabei wird ω vom Radius MM_1 halbiert. Da $AC \parallel MM_1$ und $MM_1 \perp AB$, ist $\tan\frac{\omega}{2} = \frac{c}{2} : \frac{b}{2} = c : b$ und mithin $c = b \cdot \tan\frac{\omega}{2}$.

In allen anderen Fällen kann man in M_1 eine Senkrechte errichten, die den Ortskreis von ω in P schneidet. Dann ist $M_1P = x > M_1M = \frac{b}{2}$ und damit, da $\tan\frac{\omega}{2} = \frac{c}{2x}$ ist, $\frac{c}{2x} < \frac{c}{b}$.

Also ist hier $c = 2x \cdot \tan\frac{\omega}{2} > b \cdot \tan\frac{\omega}{2}$ und mithin allgemein $b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leqq c < b$.

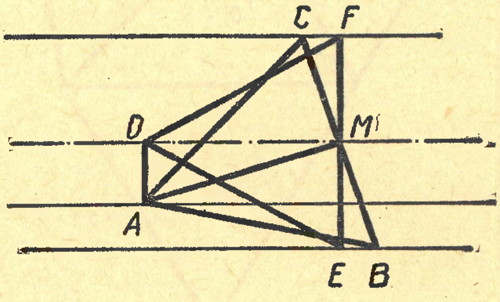
87. Ist β der Winkel, den die Berührungsradien mit den senkrecht auf M_1M_2 stehenden Radien R bzw. r bilden, $\left(R = \frac{D}{2};\ r = \frac{d}{2}\right)$, so lautet die „genaue Formel“:

$$l = 2\sqrt{a^2 - (R - r)^2} + \pi R \cdot \frac{180° + 2\beta}{180°} + \pi r \frac{180° - 2\beta}{180°}$$

mit $\sin\beta = \frac{R - r}{a}$.

Man erhält: a)	„genau“:	$l = 1568{,}7$ mm
	Näherung:	$l \approx 1568{,}7$ mm
	Fehler:	0,00%
b)	„genau“:	$l = 872{,}1$ mm
	Näherung:	$l \approx 871{,}7$ mm
	Fehler:	0,05%

88. Man zieht die Mittelparallele g_m und konstruiert auf ihr und g_1 bzw. g_2 ein gleichseitiges Dreieck DEF. Punkt A liegt dann auf dem Lot von D auf g_2. Man verbindet A mit M, dem Mittelpunkt von EF und zieht durch M senkrecht zu AM eine Gerade, die g_1 bzw. g_2 in C bzw. B schneidet.



Beweis:

$MF : MD = MC : MA = 1 : \sqrt{3}$, da
$\triangle CMF \sim \triangle AMD$ (w, w, w).

89. a) Länge $l = 383{,}7$ m Breite $b = 46$ mm
Blechverbrauch: 17,65 m²
Abfall: 7,66 m²

b) Länge $l_1 = 324{,}6$ m Breite $b_1 = 43$ mm
Blechverbrauch: 13,75 m² Abfall: 3,76 m²
Materialersparnis: etwa 22%

90. a) $V_w : V_t : V_o = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

b) Man berechnet die beiden Radien (Euklid) und stellt Übereinstimmung fest.

91. Man konstruiere die Symmetrieachse zu AB. Sei r der Radius des gesuchten Kreises. Dann ist der Abstand des gesuchten Mittelpunktes von den Mittelpunkten der kleinen Halbkreise jeweils $\frac{AM}{2} + r$ und vom großen Halbkreisbogen gerade r. Trägt man mithin auf der Symmetrieachse über dem großen Halbkreisbogen noch $\frac{AM}{2}$ ab, so hat man einen dritten Punkt eines zu dem gesuchten Kreis konzentrisch gelegenen großen Kreises und kann den Mittelpunkt leicht konstruieren.

93. „Körper“ ist zylindrisches Raumstück zwischen Grundkreis und Rotationsparaboloid um z-Achse mit dem Scheitel (0; 0; 10).

98. Es werden etwa 256 m³ Beton benötigt.

99. Man nehme an, daß die Konstruktion ausgeführt sei, dann erhält man die im allgemeinen ungleichen Seiten AD und CD. Es sei AB < BC und daher CD > AD. Dann trägt man von D aus auf CD die Strecke AD ab und erhält den Punkt E. Der Winkel AEC = ε läßt sich nun ermitteln. Da ABCD Sehnenviereck sein soll, ist

$$\varepsilon = 180° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$$

Außerdem muß (Tangentenviereck!) BC — AB = CD — AD sein. Mithin läßt sich der Punkt E als Schnittpunkt des Ortskreises von ε und des Kreises um C mit (BC — AB) konstruieren. Die Eindeutigkeit und Ausführbarkeit der Konstruktion ist dann noch zu diskutieren.

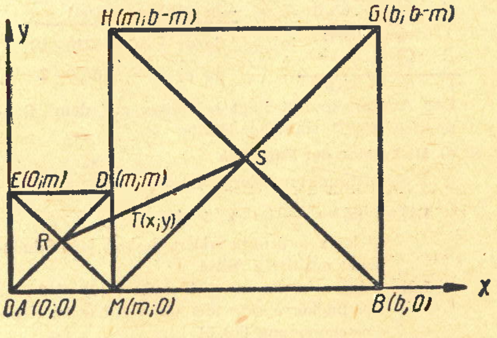
100. Es liegt wohl auf der Hand, diese Aufgabe zunächst für konstruktive Weise lösen zu wollen, indem man dem Punkt C nacheinander verschiedene Lagen gibt und dabei auch die Grenzlagen in A und B betrachtet. Das Resultat ist die Vermutung, daß der $\sphericalangle$ BMA stets ein Rechter ist und der Punkt M auf dem Thaleskreis wandert. Das gilt es jedoch zu beweisen. Dabei helfen uns die beiden Dreiecke ACD und CBE, die nach Konstruktion gleichschenklig sind. Nennen wir den Winkel CBE = α, so ist $\sphericalangle$ ACD als Außenwinkel gleich 2α und der $\sphericalangle$ DAC = R — α. Daraus folgt aber, daß das Dreieck ABM ein rechtwinkliges sein muß.

101. Es gibt zwei Fälle:

a) Die Seiten haben einen Eckpunkt gemeinsam. In diesem Falle ist die Konstruktion einfach (s, s, s).

b) Die Seiten liegen gegenüber. Man konstruiere aus den Diagonalen und dem Winkel zwischen ihnen nach (s, w, s) ein Hilfsdreieck (z. B. ACD_1). Dann liegt Punkt D sowohl auf dem Kreis mit AD um A als auch auf dem Kreis mit BC um D_1. Es gibt in der Regel zwei Lösungen. Punkt B ist jeweils leicht zu konstruieren, da vom Dreieck BCD nun alle Seiten bekannt sind.

102. Der geometrische Ort ist die Strecke, die man erhält, wenn man über AB ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck errichtet und die Mitten seiner beiden Schenkel miteinander verbindet.



Aus der Figur entnimmt man, da Quadratdiagonalen einander halbieren, die Koordinaten von R und S als:

$$R\left(\frac{m}{2}\ \frac{m}{2}\right) \text{ und } S\left(\frac{b+m}{2}\ \frac{b-m}{2}\right)$$

Dann sind die Koordinaten x; y des Mittelpunktes T der Strecke

$$RS:\ x = \frac{b + 2m}{4};\ y = \frac{b}{4}$$

Antwort: Wegen $0 \leqq m \leqq b$ heißt das: der geometrische Ort ist das Stück der Geraden

$$y = \frac{b}{4} \text{ mit } \frac{b}{4} \leqq x \leqq \frac{3b}{4}$$

Beweis der Umkehrung:

Voraussetzung: Punkt Z $(x_z;\ y_z)$ sei ein Punkt des Geradenstücks,

d. h. $\frac{b}{4} \leqq x_z \leqq \frac{3b}{4}$ und $y_z = \frac{b}{4}$

Behauptung: Dann gibt es genau einen zugeordneten Teilpunkt M_z auf AB.

Beweis: Setzt man $x_z = \frac{b + 2m}{4}$, so ist damit

$m = \frac{4x_z - b}{2}$ eindeutig bestimmt. Der zugeordnete Teilpunkt M_z hat dann die Koordinaten m und 0 wzbw.

103. Bezeichnet man mit M den Halbierungspunkt der Kante AA' und mit N den Halbierungspunkt der Kante CC', dann ist die Strecke MN der gesuchte geometrische Ort.

107. a) Man zeichnet eine beliebige Strecke $\overline{A'B'}$, trägt in A' die Winkel $\alpha = 80°$ und $\alpha_1 = 30°$ und in B' die Winkel $\beta = 60°$ und $\beta_1 = 20°$ an. Dadurch erhält man die Schnittpunkte C und D'. Nun trägt man auf der Geraden CD' von C aus die gegebene Strecke bis zum Punkte D ab. Die Parallele zu D'A' durch D schneidet die Gerade CA' in A. Die Parallele zu D'B' durch D schneidet die Gerade CB' in B. $\overline{AB}$ ist die gesuchte Strecke.

b) Im Dreieck ABC ist $\overline{BC} = \frac{x \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta)} = px$,

im Dreieck ABD ist $\overline{BD} = \frac{x \cdot \sin \alpha_1}{\sin(\alpha + \beta_1)} = qx$

(Sinussatz).

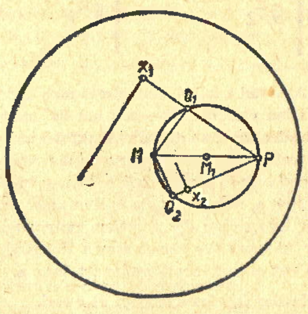
Nach dem Kosinussatz ist

$c^2 = p^2x^2 + q^2x^2 - 2pq\,x^2 \cos(\beta - \beta_1)$,

also $x^2 = \frac{c^2}{p^2 + q^2 - 2pq \cos(\beta - \beta_1)}$.

Die Rechnung ergibt x = 2,875 km.

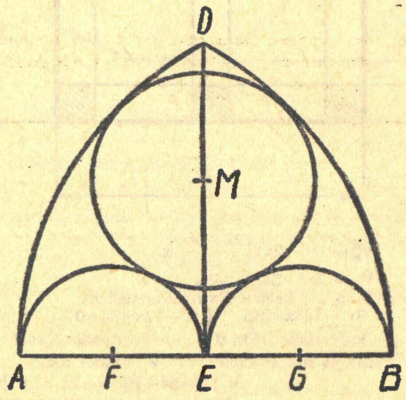
108. Der geometrische Ort ist die Menge aller Punkte des Thaleskreises mit $\overline{MP}$ als Durchmesser, da die Mittelsenkrechten aller Sehnen durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufen.



Es kann aber auch kein Punkt außerhalb oder innerhalb des Thaleskreises geometrischer Ort der geforderten Art sein. Angenommen X sei ein solcher Punkt. Dann verbindet man X mit P. Außerdem verlängert man diese Strecke bis zum Schnitt mit dem erwähnten Thaleskreis. Der Schnittpunkt sei Q (evtl. ist Q = P bzw. Q = M). Dann läßt sich stets in Q an PQ ein rechter Winkel so antragen, daß sein freier Schenkel durch M verläuft. Da aber X Sehnenmittelpunkt sein soll, errichte ich in X ebenfalls eine Senkrechte, die damit parallel zu QM verläuft. Da aber QM den Punkt M enthält, kann diese Parallele nicht ebenfalls diesen Punkt enthalten. Also kann X nicht Sehnenmittelpunkt sein.

Ist Q ein Punkt des Thaleskreises, so ist Q Mittelpunkt der durch P und Q gehenden Sehne, weil nur die Verbindungsstrecke zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Sehnenmittelpunkt auf der Sehne senkrecht steht.

109.



In der Abbildung ist

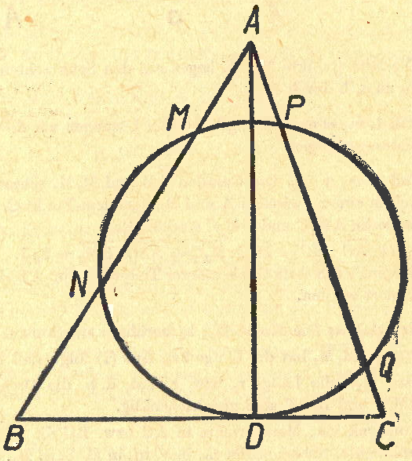
$$\begin{aligned} MK &= \rho, \\ AF &= FE = EG = GB, \\ FM &= FE + MK \text{ und} \\ AM &= AB - MK. \end{aligned}$$

Dann gilt:
$$\begin{aligned} FM^2 &= FE^2 + ME^2 \\ AM^2 &= AE^2 + ME^2 \\ \hline AM^2 - FM^2 &= AE^2 - FE^2 \end{aligned}$$

Daraus erhält man: $\rho = \frac{6}{5}$ FE.

Also ist $ME = \frac{4}{5}\sqrt{6}$ FE.

110.



In der Abbildung ist

$$BM \cdot BN = BD^2 = AB^2 - AD^2$$

$$BM \cdot BN - CP \cdot CQ = AB^2 - AC^2$$

$$(BA+AM)(BA+AN) - (CA+AP)(CA+AQ) = AB^2 - AC^2.$$

also $\frac{AM+AN}{AC} = \frac{AP+AQ}{AB}$

111. I. Das Dreieck sei rechtwinklig.

O.B.d.A. sei $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $2\gamma = \pi - 2\beta$.

Dann wird $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(\pi - 2\beta)$
$= \cos \pi + \cos 2\beta - \cos 2\beta = -1$,
also $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$.

II. Es sei $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$.
Aus $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ folgt:
$\cos 2\gamma = \cos[2\pi - 2(\alpha + \beta)] = \cos 2(\alpha + \beta)$
$= 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1$.

III. Ferner ist:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos \frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cos \frac{2\alpha - 2\beta}{2} = 2\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Daraus folgt:
$2\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2(\alpha + \beta) = 0$; also
$\cos(\alpha + \beta) \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 0$, also
$\cos(\alpha + \beta) \cdot 2\cos\alpha \cdot \cos\beta = 0$.

Fall a) Aus $\cos(\alpha + \beta) = 0$ folgt $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ also $\gamma = \frac{\pi}{2}$,

Fall b) Aus $\cos\alpha = 0$ folgt $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Fall c) Aus $\cos\beta = 0$ folgt $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Aus der Gleichung folgt also entweder

$\gamma = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\beta = \frac{\pi}{2}$.

112. Das Dreieck XAY ist bei A rechtwinklig.
(Für Y = A oder X = A vereinfacht sich die nachfolgende Überlegung.)
Im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse gleich dem Umkreismittelpunkt. Daher ist der Abstand des Mittelpunktes der Strecke $\overline{XY}$ gleich der halben Länge der Strecke $\overline{XY} = \overline{AA'}$.
Jeder Punkt im Innern oder auf dem Rande des Würfels der von A diesen Abstand hat, tritt als Mittelpunkt einer Strecke $\overline{XY}$ mit den geforderten Eigenschaften auf.

Ergebnis:
Der geometrische Ort ist gleich der Menge derjenigen Punkte im Innern oder auf dem Rande des Würfels, die auf der Oberfläche der Kugel um A mit der halben Länge der Würfelseite als Radius liegen.

Neues aus Wissenschaft und Technik

Geometrie des Alls

MOSKAU Systematische Untersuchungen der Radiostrahlung ferner Galaxienhaufen wurden in der Sowjetunion mit Apparaten hoher Empfindlichkeit angestellt, teilt TASS mit. Diese „Haufen“ sind dichte Zusammenballungen von 30 bis 300 Galaxien. Ihre Entfernung erreicht etwa 3,5 Millarden Lichtjahre.

Zwölf von den fünfzehn untersuchten Anhäufungen wurden von den Radioastronomen erstmalig studiert. Mit einer Ausnahme senden alle eine meßbare hochfrequente Strahlung aus, woraus zu ersehen ist, daß sich praktisch in jedem Galaxienhaufen mindestens eine „Radioquelle“ befindet. Der Radioastronom Genadi Scholomizki, der die Untersuchungen vornahm, nimmt an, daß es die Beobachtung der Radiostrahlung derart weit entfernter Galaxienhaufen ermöglicht, eine Vorstellung von der Geometrie des Alls zu bekommen.

Hybridrechner

STUTTGART Eine erste kombinierte Datenverarbeitungsanlage aus Analog- und Digitalrechner der westdeutschen Telefunken-Werke soll in den nächsten Monaten an der Stuttgarter Technischen Hochschule installiert werden. Telefunken hat zu diesem Zweck Anschlußsysteme entwickelt, mit denen sich seine Digitalrechenautomaten „TR 4“ und „TR 10“ mit den Analogrechnern „RAT 700“, „RAT 740“ und „RAT 800“ koppeln lassen. Die in letzter Zeit entwickelte Kombination der beiden unterschiedlichen Funktionsarten elektronischer Rechner, die eine Erweiterung der Rechenmöglichkeiten der Geräte bedeutet, wird als Hybridrechner bezeichnet.

Rechenanlagen in der Medizin

WASHINGTON In über 300 amerikanischen Krankenhäusern und medizinischen Forschungseinrichtungen sind bereits elektronische Rechenanlagen zur Diagnose, Therapie, Statistik und experimentellen Forschung eingesetzt. Die größte elektronische Datenverarbeitungsmaschine wurde in der Universität von Californien in Betrieb genommen. Die Gesamtkosten belaufen sich auf 3,3 Millionen Dollar.

Automatische Bibliothekare

RIGA Ein Informationszentrum mit elektronischen Maschinen, die als automatische Bibliothekare arbeiten sollen, wird laut TASS bei der Akademie der Wissenschaften Lettlands entstehen. Die Roboter werden die erforderlichen Bücher aus den Regalen suchen, Fotokopien von Schriftstücken aushändigen, bibliographische Auskünfte erteilen und sogar Referate zusammenstellen können.

Zunächst aber soll in Riga ein informatorisch-logisches Zentrum aufgebaut werden, das durch Funk an verschiedene Institute angeschlossen wird. Dort werden zwei schnell arbeitende elektronische Rechenmaschinen mit einem besonders aufnahmefähigen „Gedächtnis“ aufgestellt. Diese Maschinen werden es gestatten, moderne kybernetische Methoden praktisch auf allen Forschungsgebieten – von der Technik bis zur Sprachforschung – anzuwenden.

Eine Milliarde Minuten

In der Schule lernt man, daß das Addieren eine Abkürzung des Weiterzählens ist. 7+3 heißt, es soll von 7 aus um 3 weitergezählt werden, also 8, 9, 10. Tatsächlich erledigt man nicht selten Additionen kleiner Zahlen durch Weiterzählen. Wie das Addieren ein Abkürzen des Weiterzählens, so ist das Subtrahieren ein Abkürzen des Rückwärtszählens. Das Multiplizieren ist dann wieder eine Abkürzung des Addierens gleicher Summanden. Das Dividieren endlich ist eine Abkürzung einer mehrmaligen Subtraktion. – Man kann die Erklärung der Rechenarten auch anders geben; unsere Fassung ist auch nur für ganze Zahlen berechnet. Aber ich will hier ja kein Rechenbuch schreiben.

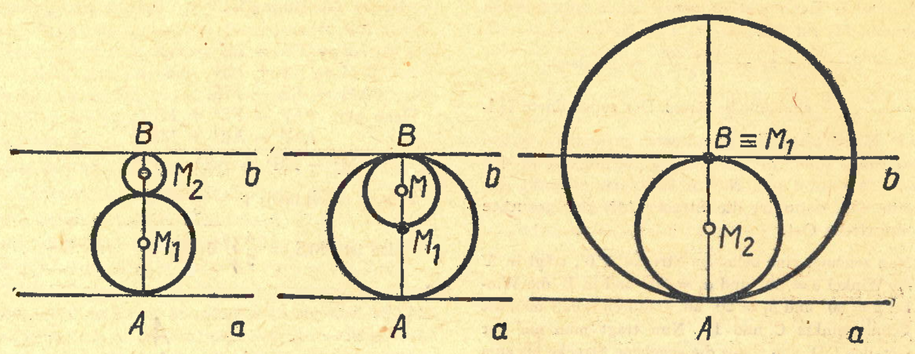
Wir wollen nun zunächst den Nachdruck auf das Wort „Abkürzung" legen. Es ist ja klar, wenn ich die Aufgabe 7388+5149 wirklich in der Weise rechnen wollte, daß ich von 7388 um 5149 weiterzählte, so würde das recht langweilig werden, und obendrein liefe ich Gefahr, mich zu verzählen. Ich muß nämlich genau aufpassen, da ich, näher betrachtet, zwei Zählungen gleichzeitig vornehme. Wenn es sich gar um noch größere Zahlen handelte, um Millionen und Billionen, dann würde ich Jahre brauchen und oft doch nicht fertig werden. Es gibt da eine nette Geschichte: Karlchen bekommt in der Schule die Aufgabe: Wie oft kann man 3 von einer Million abziehen? Er setzt sich zur gewohnten Stunde an die Arbeit. Nur langsam kommt er vorwärts. Da greift Mutter ein und hilft. Und als der Vater von der Arbeit heimkommt, hilft auch er. Die Geschwister, Onkel und Tanten werden mobil gemacht, sie arbeiten, bis ihnen die Augen vor Müdigkeit zufallen – und dann schimpfen sie am nächsten Tag auf den unvernünftigen Lehrer, der solche Aufgaben kleinen Kindern stellt!

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet ein wenig unterhaltsamer zu gestalten.

Blaise Pascal

Ein Hamburger Mathematiker, H. Schubert, hat ausgerechnet, daß am 29. April 1902 um 10 Uhr 40 Minuten gerade eine Milliarde Minuten seit dem Beginn unserer Zeitrechnung verflossen war. Es ist das ein sehr gutes (von uns schon benutztes) Beispiel zur Veranschaulichung der Zahl 1 000 000 000. Ein Witzblatt machte nun bei der Meldung davon die sehr geistreiche Bemerkung: „Wieviel Tausende von Minuten muß dieser Gelehrte zu verlieren haben?" Das Blatt schien zu glauben, daß es sich um das Ergebnis langwieriger Zählungen und Berechnungen handelte. Es ist im gleichen Irrtum wie die brave Familie von oben: Dividiert man eine Milliarde durch die Anzahl der Minuten eines Jahres und wertet den Rest aus, so hat man das gewünschte Ergebnis. Natürlich mußte er auch die Schaltjahre u. dgl. noch berücksichtigen. Schubert hat übrigens, wie ich nachträglich von W. Ahrens erfuhr, an das Blatt geschrieben und gesagt, er habe nur 15 Minuten zu der Berechnung gebraucht. Worauf es Schubert überhaupt ankam, einen anschaulichen Begriff von der Größe einer Milliarde zu geben, das hatte jener Spötter im Witzblatt nicht verstanden.

Aus W. Lietzmann „Riesen und Zwerge im Zahlenreich"



113. Die Mittelpunkte M_1, M_2 liegen auf den Senkrechten m_1, m_2 zu a, b durch A, B.

Fall 1. $m_1 = m_2$. Dann gibt es drei Lösungen wie die Abbildungen zeigen.

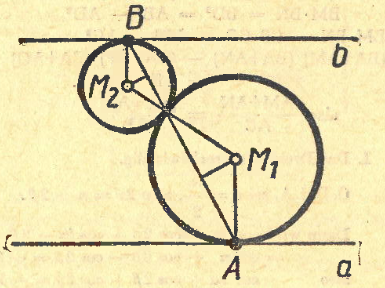
Fall 2. $m_1 \neq m_2$. Die Geraden AB und M_1M_2 schneiden sich in einem zwischen A und B liegendem Punkt C. Die Dreiecke AM_1C und BM_2C sind ähnlich.

(1) $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{M_1C} : \overline{M_2C} = \overline{AM_1} : \overline{BM_2} = 2:1.$

Hieraus kann stets C (als innerer Teilpunkt von AB) konstruiert werden.

Unterfall a: Die Kreise K_1, k_2 berühren sich außen. Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ hat die Länge $3r_2$. Aus (1) folgt, daß $\overline{M_1C}$ bzw. $\overline{M_2C}$ die Länge r_1 bzw. r_2 hat, d. h. die Dreiecke AM_1C und BM_2C sind gleichschenklig.

Konstruktion: Man errichte in $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ die Mittelsenkrechte. Sie schneidet m_1 bzw. m_2 in M_1 bzw. M_2.



Unterfall b: Die Kreise K_1, k_2 berühren sich innen. Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ hat die Länge $r_2 = 0{,}5\,r_1$.

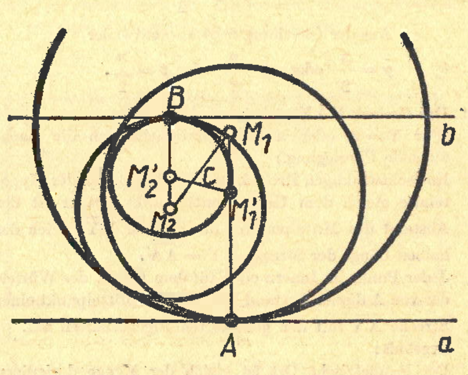
Aus (1) folgt, daß $\overline{M_1C}$ die Länge $\frac{2}{3}r$ hat. Daher ist

$$\overline{AM_1} : \overline{CM_1} = 2r_2 : \tfrac{2}{3}r_2 = 3:1.$$

Konstruktion: Man trage in A auf m_1 drei (beliebige) Längeneinheiten ab und schlage um den Endpunkt D einen Kreis mit dem Radius von einer Längeneinheit. Er schneidet die Gerade AB in zwei Punkten E′ und E″, oder er berührt die Gerade AB in einem Punkt F, oder aber er meidet die Gerade AB. (Dieser letzte Fall tritt genau dann ein, wenn das Verhältnis der Projektion der Strecke $\overline{AB}$ auf b zur Strecke $\overline{AB}$ größer als $\frac{1}{3}$ ist.)

Die Parallele g′ bzw. g″ bzw. g zu DE′ bzw. DE″ bzw. DE durch C schneidet

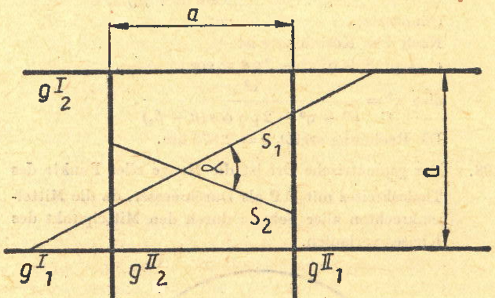
m_1, m_2 in M_1', M_2'
bzw. M_1'', M_2''
bzw. M_1, M_2.



Ergebnis: Je nach der Lage der Punkte A, B gibt es ein, zwei oder drei Kreispaare mit den geforderten Eigenschaften.

120. **Vorüberlegung:**

Die voneinander um 90° verschiedenen Richtungen der Geraden gI_1 und gI_2 einerseits und der Geraden gII_1 und gII_2 andererseits müssen relativ zu den Strecken s_1 und s_2 so liegen, daß die Projektionen beider Strecken auf die Geraden, auf denen ihre Endpunkte nicht liegen, gleich sind, nämlich immer a (Seite des Quadrats).



Um den Abstand a zu erhalten, dreht man deshalb bei der Konstruktion eine der Strecken um 90° und setzt den Endpunkt der einen an den Endpunkt der anderen. Jetzt hat sich gleichzeitig die Projektion a der einen Seite mit gedreht und liegt in der gleichen Richtung wie die andere. Wir erhalten a, indem wir die beiden nicht aufeinanderliegenden Endpunkte der Strecken miteinander verbinden. Der Abstand des gemeinsamen Endpunktes beider Strecken von eben dieser Geraden ist dann a.

125. Die Fläche des Quadrats beträgt 31,5 cm².

126. „Ausgebuchtet": $\frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$

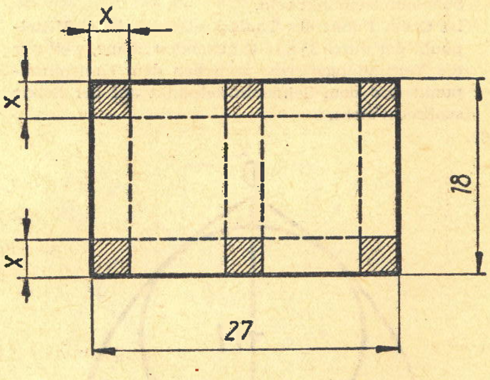
„Eingebuchtet": $\frac{a^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$

Die krummen Linien laufen unter 30° gegen die Dreieckseiten. Infolgedessen berühren sich die Bogen im eingebuchteten Dreieck.

127. Die Winkel ACP und PCB dürfen 60° nicht übersteigen.

128. Der Querschnitt des Grabens beträgt $\frac{2}{3} b \cdot t$.

129. Das Volumen als Funktion einer Veränderlichen:



$$V = (18-2x)\left(\frac{27-3x}{2}\right)x$$

$$V = 3x^3 - 54x^2 + 243x$$

Ermittlung der beiden Extremwertstellen:

$V' = 9x^2 - 108x + 243$ | $x^2 - 12x + 27 = 0$

$9x^2 - 108x + 243 = 0$ | $x_1 = 9 \quad x_2 = 3$

a) Nachweis des Maximums: $V'' = 18x - 108$

$V''(3) = 54 - 108 = -54 < 0$ MAX

$V''(9) = 162 - 108 = 54 > 0$ MIN

b) Berechnung des Volumens:

$V = 12\,\text{cm}\cdot 9\,\text{cm}\cdot 3\,\text{cm} = 324\,\text{cm}^3$

c) Ermittlung des Prozentsatzes:

$486\,\text{cm}^2 \triangleq 100\%$

Der Abfall besteht aus 6 Quadraten; jedes Quadrat hat einen Flächeninhalt von 9 cm²

$$54\,\text{cm}^2 \triangleq \frac{100\cdot 54}{486}\% = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\% = 11{,}\overline{1}\%$$

130. Man zeichne ein beliebiges Dreieck als Grundfläche und durch seine Ecken Parallelen zu den Gegenseiten. Dadurch entstehen vier kongruente Dreiecke, die man als Netz eines Tetraeders auffassen kann. Die Umkreise dieser vier Dreiecke sind untereinander kongruent. Da die Umkreise dieser vier Dreiecke (Seitenflächen des Tetraeders) von den Ebenen des Tetraeders aus der Umkugel ausgeschnitten werden, haben die Seitenflächen vom Umkugelmittelpunkt ein und denselben Abstand, d. h. der Umkugelmittelpunkt ist auch Inkugelmittelpunkt.

Daß die betrachtete Möglichkeit die einzige ist, zeigt man folgendermaßen:

Wenn die Mittelpunkte der beiden erwähnten Kugeln zusammenfallen sollen, müssen die Seitenflächen von diesem Punkt untereinander gleichen Abstand haben. Dann liegen sie aber auch auf Schnittebenen, die die Umkugel in untereinander kongruenten Kreisen schneidet. Da andererseits beim Netz eines Tetraeders je zwei aneinanderstoßende Flächen in mindestens einer Seite übereinstimmen müssen und laut Voraussetzung alle vier Tetraederflächen flächengleich sein sollen, müssen sie auch untereinander kongruent sein.

131. Man fällt vom Punkt C das Lot auf $\overline{AP}$. Sein Fußpunkt sei D. Dann ist $\sphericalangle\, DCP = 30°$ und $\triangle\, DCP$ mithin die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks.

Also ist $\overline{DP} = \frac{\overline{CP}}{2} = \overline{BP}$. Wenn man D mit B verbindet, erhält man daher ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem $\sphericalangle DPB = 180° - 60° = 120°$ und somit $\sphericalangle BDP = \sphericalangle DBP = 30°$ sind. Ferner ist $\sphericalangle ABD = 45° - 30° = 15°$. Außerdem ist aber $\sphericalangle PAB = 180° - 120° - 45° = 15°$ und damit $\triangle ABD$ gleichschenklig, wobei $\overline{AD} = \overline{DB}$ ist. Da aber auch $\triangle$ CDB gleichschenklig und $\overline{CD} = \overline{DB}$ ist, ist $\overline{AD} = \overline{CD}$ und $\triangle$ ADC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Folglich ist $\sphericalangle ACD = 45°$ und $\sphericalangle ACB = 45° + 30° = 75°$.

132. Die Aussage 1. ist wahr. Zieht man vom Mittelpunkt des Kreises die Radien zu den Vielecksecken, so erhält man lauter gleichschenklige Dreiecke, die sämtlich untereinander kongruent (s, s, s) sind. Daraus folgt die Gleichheit der Vieleckswinkel.
Die Aussage 2. ist falsch, da auch jedes Rechteck einen Umkreis besitzt.
Die Aussage 3. ist falsch, da sich jedem Kreis ein Rhombus umschreiben läßt.
Die Aussage 4. ist wahr. Zieht man vom Mittelpunkt die Verbindungsstrecken zu den Vielecksecken, so werden durch diese Strecken die Vieleckswinkel halbiert (die Vielecksseiten sind ja Tangenten an dem Kreis). Infolgedessen entstehen auf diese Weise lauter gleichschenklige Dreiecke, die sämtlich untereinander kongruent sind, da sie in allen Winkeln und einer Höhe (Radien zum jeweiligen Berührungspunkt der Vielecksseiten) übereinstimmen. Daher sind auch die Vielecksseiten untereinander gleich lang.

Kurztitel	Stufe	Klasse 11	Stufe	Klasse 12
Vorolympiade 1960 Berlin/Leipzig		1-6, 8, 47-60,		1-7, 58-60, 69-80,
Vorolympiade 1961 Berlin/Leipzig	I	(entfällt)	I	(entfällt)
	II	9-11, 61-62,	II	9-10, 81-83,
	III	12, 42. 63-65,	III	11-12, 61, 84-85,
I. Olympiade 1962	I	13-15, 66-68,	I	13-14, 62, 86-87,
	II	16-18, 43, 69,	II	15-17, 63, 88,
	III	19-21, 70-71,	III	18-19, 64 89-94,
	IV	(entfällt)	IV	8, 20, 95-97,
II. Olympiade 1963	I	22-23, 72-75,	I	21-24, 98-99,
	II	24-26, 76-77,	II	25-28, 100,
	III	27-28, 44, 78-80,	III	29-31, 101-103,
	IV	(entfällt)	IV	32-34, 104-106,
III. Olympiade 1964	I	29-32, 81-82,	I	35-37, 65, 107-108,
	II	33-34, 45. 83-84,	II	38-39, 66, 109-110,
	III	(Aufgaben wie Kl. 12)	III	40-42, 111-113,
	IV	(Aufgaben wie Kl. 12)	IV	55-57, 130-132,
IV. Olympiade 1965	I	89-94.	I	133-138,
	II	(Aufgaben wie Kl. 12)	II	139-144.
	III	(Aufgaben wie Kl. 12)	III	145-150.
	IV		IV	
Suhl		37-41, 86-88,		43-45, 115-118,
Licht.		35-36. 85,		114,
Fern	46	Chronologische		46, 67,
LVZ	7	Übersicht		53-54, 68, 125-129,
Volksh.	zur Dokumentation			47, 119,
ABF-K.-M.-St.	244 Olympiadeaufgaben (Kl. 11 u. 12)			48-52, 120-124,

Erläuterungen zu den Abkürzungen (Kurztitel)

Suhl: „Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden" PBK Suhl

Licht: „Berliner Mathematiklehrer berichten". Aus der Arbeit des Stadtbezirks Lichtenberg

Fern: Mathematik-Fernländerkampf Ungarn-DDR 1963 (Sendung „Abend der Jugend" von Radio DDR)

LVZ: „Mathe-Preisaufgabe für Berufs- und Oberschüler der Leipziger Volkszeitung" (in 4 Runden, von Juli bis August 1963)

Volkshochschule: Mathematik-Meisterschaften der Volkshochschulen der DDR. (2. Wettkampf im Frühjahr 1964)

ABF K.-M.-Stdt.: II. Mathematischer Wettbewerb an der Arbeiter-u.-Bauernfakultät in K.-M.-Stadt 1960.

Unterwegs zum Diplom-Mathematiker

Wolfgang *Lehmann*, Absolvent der Leipziger Max-Klinger-Oberschule, Teilnehmer an der IV. Internationalen Olympiade, studiert im dritten Studienjahr am Mathematischen Institut der Karl-Marx-Universität und ist Sekretär für wissenschaftliche Arbeit der Fachschaftsleitung. „Mit Vorlesungen sind wir eingedeckt", erzählt Wolfgang. Zum Studienplan gehören auch eine breite physikalische Ausbildung mit Praktika, Sprachen (russisch und englisch) und Gesellschaftswissenschaft.

Mit dem Talent für Mathematik, das sei so eine Sache. „Lust und Liebe gehören natürlich dazu, aber vor allem Übung." Wolfgang entsinnt sich der üblichen Mathematikstunden in der Schule. Einer rechnete an der Tafel, die anderen warteten darauf, was er herausbekommt und schrieben es ab. „Aber so geht es nicht. Nur wer eine Aufgabe ganz durchdenkt und alle Schritte bis zur Lösung selber tut, kann es in Mathematik zu etwas bringen".

Horst *Ernst*, der 1960 aus Dahlen zur II. IMO delegiert wurde, studiert am Mathematischen Institut in Leipzig.

Thomas *Görnitz*, Teilnehmer an der III. Internationalen Olympiade 1961 in der Ungarischen Volksrepublik, erreichte als erster Teilnehmer aus der DDR einen dritten Preis. Er studiert Physik und steht kurz vor dem Diplom.

Steffen *Oelsner* aus Mügeln bei Oschatz war Teilnehmer der III. IMO. Er studiert an der Technischen Universität in Dresden Mathematik und vollendet das 6. Semester.

Rolf *Thier* aus Altenburg, Teilnehmer an der V. IMO, besucht ebenfalls die TU Dresden, Fachrichtung Schwachstrom/Regelungstechnik der Fakultät Elektronik. Neben dem Studium arbeitet er als Hilfsassistent am Institut für Regelungstechnik.

Wolfgang *Klamt* errang bei der VI. IMO einen zweiten Preis für die Deutsche Demokratische Republik. Seit September 1964 gehört er zu den besten Schülern der Spezialklasse für Mathematik an der Berliner Heinrich-Hertz-Oberschule.

Zitiert

Wenn wir von „jungen Mathematikern" sprechen, so soll das lediglich die berechtigte Hoffnung ausdrücken, daß aus diesem Kreise einmal tüchtige Mathematiker hervorgehen. Man muß sich aber darüber klar sein, daß bei den Olympiaden vor allem Schüler hervortreten, die eine gute Kombinationsfähigkeit besitzen und imstande sind, Probleme schnell zu lösen. Das sind zwar für einen Mathematiker wertvolle Eigenschaften, es wäre aber verfehlt, zu glauben, daß nur der ein guter Mathematiker werden kann, der über diese Eigenschaften verfügt. Es gibt ja auch zahlreiche mathematische Probleme, deren Lösung ein tiefgründiges Umdenken erfordert, und Mathematiker, die solche Probleme gelöst haben, würden vielleicht niemals zu Preisträgern einer Olympiade gehören. *Prof. Engel, Rostock*

Aus berufenem Munde

Wir müssen größte Vorsicht üben, damit wir nicht solche Eigenschaften der Zahlen für wahr zulassen, die wir durch Experimentieren entdeckt haben und die allein durch Induktion bestätigt wurden. In der Praxis benötigen wir solche Methoden, die uns bei der Erforschung der Eigenschaften die Möglichkeit geben, die gefundenen Eigenschaften präzise zu beweisen oder zu widerlegen, wobei wir auch im letzteren Fall viel Nützliches lernen können.

Leonhard Euler

Das mathematisch Wertvolle macht die meiste Freude.

Prof. Härtig, Berlin

Wie man in unserer Zeit zu keinem wirklich guten Mathematiker oder Physiker werden kann, wenn man den vorangegangenen langen, von der Wissenschaft durchschrittenen Weg ignoriert, so ist es auch unmöglich, seinen Platz im Leben einzunehmen und seinen tiefen Sinn zu verstehen, wenn man jene Wissenschaften, die direkt unser Leben und unsere Tätigkeit betreffen, nicht kennt und all ihre Tiefe studiert.

Prof. Dr. J. Kedrow, UdSSR

Die bis jetzt in der Mathematik erreichte hohe Stufe der Abstraktion ist das Ergebnis eines langen historischen Prozesses.

Wenn man dem Menschen nur Formeln, nur Algorithmen beibringt, dann hat man im Grunde nur das getan, was man heute schon mit einer Maschine machen kann.

Dipl.-Ing. Heinrich, Scharfenstein

In dem Reich des Mathematischen herrscht eine eigentümliche Schönheit, welche nicht sowohl mit der Schönheit der Kunstwerke, als vielmehr mit der Schönheit der Natur übereinstimmt und welche auf den sinnigen Menschen, der das Verständnis dafür gewonnen hat, ganz in ähnlicher Weise einwirkt, wie diese.

Prof. E. Kummer

I. Olympiade — Rumänien 1959

1. Zeige, daß der Bruch $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ für keine natürliche Zahl n zu kürzen ist!

2. Für welche reellen Werte von x gelten die Gleichungen

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$,

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$,

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$,

wobei die Wurzeln nur positiv aufzufassen sind?

3. Es sei x ein Winkel (d. h. eine reelle Zahl). Weiter seien a, b und c beliebige reelle Zahlen. Die vier reellen Zahlen a, b, c und cos x mögen die quadratische Gleichung

$$a\cos^2 x + b\cdot\cos x + c = 0$$

erfüllen. Man gebe eine quadratische Gleichung an, der die Zahlen a, b, c und cos 2x genügen. Im Falle $a=4$, $b=2$, $c=1$ vergleiche man diese Gleichungen.

4. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem die Hypotenuse c gegeben ist und von dem man weiß, daß die zu c gehörende Seitenhalbierende das geometrische Mittel der beiden Katheten ist.

5. Auf einer Strecke $\overline{AB}$ wird ein zwischen A und B liegender Punkt M angenommen, und über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ als Seiten werden die Quadrate AMCD und MBEF errichtet, die auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegen sollen. Die den Quadraten umschriebenen Kreise mit den Mittelpunkten P und Q schneiden einander außer in M noch in dem Punkte N. Die durch AF und durch BC gegebenen Geraden mögen sich im Punkt N' schneiden.

a) Man zeige, daß N und N' zusammenfallen.

b) Wie auch der Punkt M immer angenommen sein mag, stets gehen die Geraden MN durch einen festen Punkt S. Man beweise dies. (Eine Gerade durch P und Q werde mit PQ bezeichnet, mit $\overline{PQ}$ ist die Strecke von P bis Q gemeint).

c) Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken $\overline{PQ}$, wenn M zwischen A und B variiert.

6. Es sind zwei sich in einer Geraden g schneidende Ebenen P und Q gegeben. Weiterhin ist in der Ebene P ein Punkt A und in der Ebene Q ein Punkt C gegeben; keiner diesen Punkten liegt auf der Geraden g.

Ein gleichschenkliges Trapez ABCD (mit $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$), dem man einen Inkreis einschreiben kann, ist so zu konstruieren, daß der Punkt B in der Ebene P und der Punkt D in der Ebene Q liegt.

II. Olympiade — Rumänien 1960

1. Bestimme alle dreiziffrigen Zahlen, die durch 11 geteilt, eine Zahl ergeben, die gleich ist der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl!

2. Für welche Werte der Veränderlichen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9\,?$$

3. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n eine ungerade Zahl). Ist α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so zeige, daß gilt

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)\,a}\,!$$

4. Konstruiere ein Dreieck ABC, wenn h_a, h_b und s_a bekannt sind! (h_a ist die auf der Seite a errichtete Höhe, h_b die auf der Seite b, und s_a ist die Seitenhalbierende der Seite a)!

5. Gegeben ist ein Würfel ABCDA'B'C'D'.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken XV, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke AC und V ein beliebiger Punkt der Strecke B'D' ist!

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte Z der Strecke XV, die die Beziehung $ZV = 2XZ$ erfüllen!

6. Gegeben ist ein Kegel, die dem Kegel eingeschriebene Kugel und der der Kugel umschriebene Zylinder, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels in einer Ebene liegt. V_1 ist der Rauminhalt des Kegels und V_2 der Rauminhalt des Zylinders.

a) Beweise, daß die Gleichung $V_1 = V_2$ nicht bestehen kann!

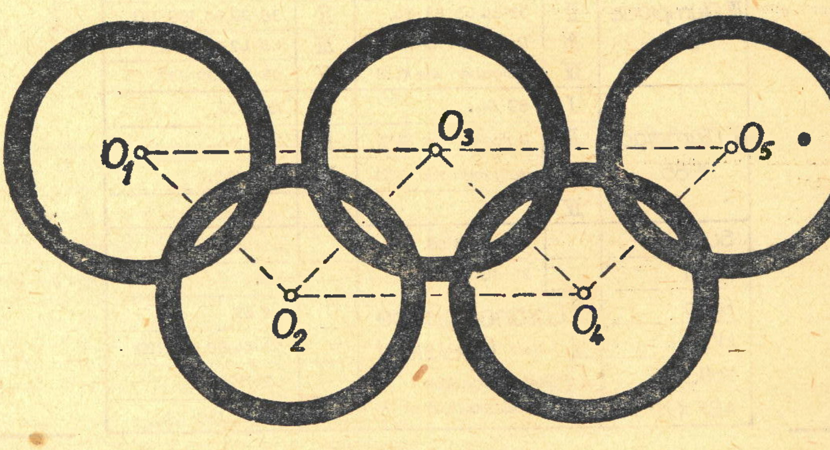
b) Bestimme die kleinste Zahl k, für welche $V_1 = kV_2$ gilt und konstruiere für diesen Fall den Winkel an der Spitze des Kegels!

7. Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien a und b und der Höhe h.

a) Konstruiere den Punkt P auf der Symmetrieachse, von dem aus die beiden Schenkel unter einem rechten Winkel erscheinen!

b) Bestimme die Entfernung des Punktes P von einer der beiden Grundlinien rechnerisch!

c) Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion des Punktes P möglich? (Diskussion der möglichen Fälle.)



IMO

Internationale Mathematik-Olympiaden 1959 bis 1964

III. Olympiade — Ungarn 1961

1. Man löse das Gleichungssystem

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$xy = z^2,$$

in dem a und b gegebene Zahlen sind!
Bei welcher Bedingung für a und b sind x, y, z sämtlich positiv und verschieden?

2. Gegeben sind a, b, c als die Längen der Seiten eines Dreiecks. S sei die Größe der Fläche desselben Dreiecks. Man beweise, daß stets

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4\,S\sqrt{3} \text{ ist!}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

3. Man löse die Gleichung $\cos^n x - \sin^n x = 1$, wo n eine beliebig gegebene natürliche Zahl ist!

4. Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3. Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1},\quad \frac{P_2P}{PQ_2},\quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

5. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus $AC = b$, $AB = c$ und $\sphericalangle AMB = \omega$, wobei M die Mitte der Strecke BC ist. Es sei $\omega < 90^0$. Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leqq c < b \text{ ist!}$$

In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

6. Es sind eine Ebene (ε) und drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gegebenen, so daß die Punkte auf derselben Seite von (ε) liegen und die von ihnen gebildete Ebene nicht parallel mit (ε) ist. A′, B′, C′ seien drei beliebige Punkte von (ε). Die Mittelpunkte der Strecken AA′, BB′, CC′ seien L, M bzw. N und der Schwerpunkt des Dreiecks LMN sei G. (Die Punkte A′, B′, C′, für die LMN kein echtes Dreieck bilden, lassen wir außer acht.)
Man bestimme den geometrischen Ort des Punktes G, wenn A′, B′, C′ unabhängig voneinander die Ebene (ε) durchlaufen!

V. Olympiade — Polen 1963

1. Man bestimme alle reellen Werte von x, die der Gleichung $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = 0$ genügen, wo p ein reeller Parameter ist!

2. Es ist im Raum der geometrische Ort des Scheitels eines rechten Winkels zu finden, von dem der eine Schenkel durch einen gegebenen Punkt A geht und der andere Scheitel wenigstens einen Punkt mit einer gegebenen Strecke $\overline{BC}$ gemeinsam hat!

3. In einem n-Eck, dessen innere Winkel alle gleich sind, seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aufeinanderfolgende Seiten, für die die Ungleichungen $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$ gelten. Es ist zu beweisen, daß dann notwendig $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ist!

4. Man finde alle Werte von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, die den Gleichungen $x_5 + x_2 = yx_1$, $x_1 + x_3 = yx_2$, $x_2 + x_4 = yx_3$, $x_3 + x_5 = yx_4$, $x_4 + x_1 = yx_5$ genügen, wo y ein Parameter ist!

5. Man beweise, daß $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ ist!

6. An einem Wettbewerb nahmen fünf Schüler A, B, C, D, E teil. Jemand hatte die Vermutung ausgesprochen, daß im Endergebnis die Reihenfolge ABCDE sein würde. Er hat aber damit weder die Stelle irgendeines Bewerbers noch irgendein Paar direkt aufeinanderfolgender Bewerber richtig erraten. Ein anderer hatte die Reihenfolge DAECB vermutet. Das war schon besser, denn hier stimmten die Stellen von genau zwei Bewerbern, und zwei Paare von direkt aufeinanderfolgenden Bewerbern waren richtig.
Welches Ergebnis hatte der Wettbewerb?

IV. Olympiade — CSSR 1962

1. Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
   a) Ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6.
   b) Wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

2. Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \tfrac{1}{2}$$

erfüllen!

3. Es ist ein Würfel ABCDA′B′C′D′ (mit den Gegenseitenflächen ABCD, A′B′C′D′, wobei AA′ ∥ BB′ ∥ CC′ ∥ DD′) gegeben. Der Punkt X durchläuft mit einer konstanten Geschwindigkeit den Umfang des Quadrates ABCD in dieser Reihenfolge, und der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats B′C′CB in dieser Reihenfolge; die Punkte X und Y beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Anfangspunkten A und B′ aus. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

4. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

zu bestimmen!

5. Auf einer Kreislinie k sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Auf derselben Kreislinie ist ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dasß ABCD ein Tangentenviereck ist! (Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden!)

6. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r, sein Inkreis den Radius ϱ.
   Man beweise, daß der Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise $d = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$ ist!

7. Es ist ein Tetraeder SABC mit folgender Eigenschaft gegeben: Es gibt 5 Kugelflächen, von denen jede die Kanten SA, SB, SC, AB, BC, CA bzw. deren Verlängerungen berührt.
   Beweisen Sie, daß
   a) das Tetraeder regelmäßig ist;
   b) umgekehrt für jedes regelmäßige Tetraeder fünf solche Kugelflächen existieren!

VI. Olympiade — UdSSR 1964

1. a) Bestimmen Sie alle positiven Zahlen n, für die die Zahl $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist.
   b) Beweisen Sie, daß für keine positive ganze Zahl die Zahl $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist.

2. Wir bezeichnen die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks mit a, b, c. Es ist zu beweisen, daß

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqq 3abc \text{ gilt.}$$

3. Wir betrachten den in das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c einbeschriebenen Kreis und seine den Seiten des Dreiecks parallelen Tangenten. Diese Tangenten schneiden vom Dreieck ABC drei neue Dreiecke ab. In jedes dieser neuen Dreiecke sei wieder ein Kreis einbeschrieben. Berechnen Sie die Summe der Inhalte aller vier Kreise.

4. Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur drei Themen, und je zwei Wissenschaftler behandeln ein und nur ein Thema. Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

5. In einer Reihe sind fünf Punkte gegeben. Unter der Geraden, die diese fünf Punkte verbinden, gibt es keine parallelen, senkrechten oder zusammenfallenden. Wir fällen von jedem Punkt die Lote auf alle Geraden, die man durch paarweise Verbindung der übrigen vier Punkte erhält. Zu bestimmen ist das Maximum der Anzahl der Schnittpunkte dieser Lote ohne die gegebenen fünf Punkte.

6. a) Es ist ein Tetraeder ABCD gegeben. Die Ecke D wird mit dem Schwerpunkt D_1 der Grundfläche ABC verbunden. Die Parallelen zu DD_1, die durch A, B, C gezogen sind, schneiden die diesen Ecken gegenüberliegenden Seitenflächen in den Punkten A_1, B_1, C_1. Beweisen Sie, daß das Volumen des Tetraeders ABCD gleich einem Drittel des Volumens des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ ist.
   b) Gilt das Resultat auch noch, wenn der Punkt D_1 im Innern der Grundfläche ABC beliebig gewählt wird?

In der gegenwärtigen Menschheitsgeschichte wird der Anteil des theoretischen Denkens an der individuellen Tätigkeit immer größer, da die Tätigkeit des einzelnen an Vielseitigkeit gewinnt.

Gelingt es, den Schüler zu erziehen, die Realität durch geistiges Arbeiten zu erfassen, so trägt das erheblich zur Herausbildung eines materialistischen Weltbildes bei.

Das Denken entwickelt sich auch in Verbindung mit praktischer und manueller Tätigkeit im Bildungs- und Erziehungsprozeß.

Es genügt heute nicht, sehr eng an Regeln gebunden zu sein, ohne die Fähigkeit zu besitzen, selbst Regeln zu entwickeln.
Die Begriffe, die zunächst durch Abstraktionen aus einzelnen Sachverhalten oder Erfahrungskomplexen gebildet wurden, gewinnen ein eigenes Leben. Sie erweisen sich als viel reichhaltiger und fruchtbarer, als man ihnen zunächst ansehen kann. Sie zeigen in der späteren Entwicklung eine selbständig ordnende Kraft, indem sie zur Bildung neuer Formen und Begriffe Anlaß geben, Erkenntnisse über deren Zusammenhang vermitteln und sich auch bei dem Versuch, die Welt der Erscheinungen zu verstehen, in irgendeinem Sinne bewähren.

Nobelpreisträger
Prof. Dr. W. Heisenberg, München

Es gibt wohl kaum ein Gebiet, zu dessen Beherrschung man derart viel schöpferische Phantasie braucht wie die Mathematik. Eine Anekdote berichtet von dem Mathematiker Hilbert, daß er auf die Frage, was aus einem seiner Assistenten geworden sei, geantwortet habe: „Der ist unter die Dichter gegangen. Zur Mathematik hatte er nicht genügend Phantasie“.

H. Titze, Berlin

Wir Mathematiker sind auch echte, berufene Dichter; uns obliegt noch der Beweis für das Gedichtete.

Ludwig Kronecker

Das einheitliche sozialistische Bildungssystem... dient dem Wachsen und Werden allseitig gebildeter, daß heißt sozialistisch bewußter, hochqualifizierter, gesunder, geistig und körperlich leistungsfähiger, kulturvoller Menschen, die fähig und bereit sind, die historischen Aufgaben unserer Zeit zu erfüllen.

aus: Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem (Präambel)

AUSWAHL

aus nationalen Olympiaden sozialistischer Länder

Unser Jahrhundert

Die Entwicklung zum Kommunismus wird sich viel schneller vollziehen, als wir es uns heute vorstellen können. Wenn wir davon ausgehen wollten, was die Gesamtheit der Menschen von heute als Summe ihrer Bedürfnisse anmelden würde, kämen astronomische Zahlen heraus. Manche von ihnen – zum Beispiel auf dem Gebiet der Motorisierung – wären vielleicht grundsätzlich irreal.

Dabei würden wir aber übersehen, daß die Bedürfnisse der Menschen von morgen keineswegs durch die Summe der materiellen Bedürfnisse der heutigen Menscheit erfaßt werden können.

Wenn man mit größter Selbstverständlichkeit jeden Tag, zu jeder Stunde das haben kann, was man braucht; wenn das ein Dauer- und noch besser ein allgemeiner Zustand ist; wenn obendrein die Menchen weit und breit zu einer vernünftigen Lebensweise erzogen sind; wenn die fürsorgende, hilfreiche neue Gemeinsamkeit der sozialistischen Gesellschaft in allen Zügen ausgebildet und ausnahmslos wirksam ist – dann werden auch die Bedürfnisse der Menschen anders als heute sein: edler, schlichter, echter. Gier? Geiz? Raffsucht? Genußsucht? Hang zu üppigem Luxus? Prunksucht und Prahlerei mit Reichtümern? Private Vorratswirtschaft? Damit wird man höchstens in den psychiatrischen Kliniken noch zu tun haben; im Zusammenleben der Menschen werden solche Erscheinungen keine Rolle mehr spielen.

Die Menschen von morgen werden weit weniger verbrauchen, als sie heute verbrauchen würden, wenn sie beliebig reich wären!

So kommt die Erziehung der Bedürfnisse auf dem Boden völlig neuartiger gesellschaftlicher Umstände der rapiden Steigerung der Produktivität entgegen.

Diese Steigerung wird in absehbarer Zeit wahrscheinlich erheblich zunehmen. Das ist nicht etwa lediglich oder auch nur hauptsächlich deshalb zu erwarten, weil die neuen technologischen und energetischen Potenzen erst in einigen Jahren oder Jahrzehnten voll zum Einsatz gelangen – mit Auswirkungen, deren Einfluß auf die Wirtschaftsplanung wir heute noch nicht exakt erfassen können. Viel bedeutsamer wird unsere wachsende Fähigkeit sein, von ihnen Gebrauch zu machen.

Das Zeitalter des Kommunismus, das die kühnsten Träume der Menschen von einem reichen, wahrhaft menschenwürdigen Dasein verwirklicht und übersteigt, liegt näher vor uns, als wir heute denken!

In unserem Jahrhundert noch erreicht die Menschheit das einst so ferne, so traumhafte Gestade, an dem ihr eigentliches Dasein beginnt. Der dialektische Sprung von der Vorgeschichte zur eigentlichen Geschichte der Menschheit vollzieht sich in unserer Zeit, vor unseren Augen, unter unserer Mitwirkung.

Für immer wird das 20. Jahrhundert, und darin die Zeit unseres Lebens, als die ereignis- und entscheidungsreichste Periode, als die Wende der Menschheitsgeschichte gelten.

Aus: Böhm Dörge „Unsere Welt von morgen“

CSSR

Konstruieren Sie ein Dreieck, von dem gegeben sind: h_c, s_c, w_c. Führen Sie die Diskussion über die Lösbarkeit im Hinblick auf die gegebenen Größen!

Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ der ganzen Zahlen x, y, für die folgende Gleichung gilt: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$.

Bestimmen Sie alle Zahlenpaare $(x; y)$ in Stufen, die folgendem Gleichungssystem entsprechen:

$$\sin(x + 150^\circ) = \cos(y - 75^\circ)$$

$$\cos x + \sin(y - 225^\circ) + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0.$$

Lösen Sie folgende Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen:

$$1 - \sqrt{1 - 2x^2} \leq 1.$$

Eine Stenotypistin schrieb auf der Schreibmaschine hintereinander die natürlichen Zahlen: 123456789101112131415 usw. ohne Komma und Punkte oder Absätze. Insgesamt schrieb sie 1000 Ziffern. Wie oft hat sie dabei die Ziffer 7 angeschlagen?

Es ist folgender Ausdruck gegeben:

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}$$

Vereinfachen Sie den Ausdruck und beweisen Sie, daß er positiv ist. Was muß von den Zahlen a, b und c gesagt werden, damit der gegebene Ausdruck einen Sinn hat?

Denken Sie sich, Sie hätten alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 aufzuschreiben. Wie oft mußten Sie dabei die Ziffer 9 schreiben?

Polen

Folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 20 \\ xy + xu + zy + zu &= 16 \\ xyzu &= 9 \end{aligned}$$

Durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten (Schenkel) eines Trapezes ist eine Gerade zu ziehen, die das Trapez in zwei gleich große Flächenstücke teilt.

Es ist zu beweisen, daß – vorausgesetzt, eine Kugel existiert, die alle Kanten eines Tetraeders berührt – die Summen der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders gleich sind, und daß eine konträre Behauptung ebenfalls richtig ist.

Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die ganzen Zahlen a und b erfüllen – wobei b nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist – damit ganze Zahlen x und y existieren, die die Gleichung

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

erfüllen.

Es soll bewiesen werden, daß man in ein Trapez dann und nur dann einen Kreis einbeschreiben kann, wenn die Kreise, deren Durchmesser die Schenkel des Trapezes sind, sich äußerlich berühren.

Es soll bewiesen werden, daß die Zahl $53^{53} - 33^{33}$ durch 10 teilbar ist.

Eine natürliche Zahl n ist zu finden, wobei bekannt ist, daß die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ eine dreiziffrige Zahl mit gleichen Ziffern ist.

Gegeben ist das Dreieck ABC. Es ist das Rechteck von kleinster Fläche zu finden, in dem sich das Dreieck befindet.

Es soll bewiesen werden, daß von sieben natürlichen Zahlen, die eine arithmetische Folge mit der Differenz 30 bilden, eine und nur eine durch 7 teilbar ist.

Auf einer Ebene sind die Gerade m sowie die Punkte A und B gegeben, die auf gegenüberliegenden Seiten der Geraden m liegen. Auf der Geraden m ist ein Punkt M so zu finden, daß die Differenz der Entfernungen dieses Punktes von den Punkten A und B die größtmöglichste ist.

Ungarn

Die Seiten eines Dreiecks bilden eine arithmetische Folge, deren Differenz d ist; die Fläche des Dreiecks beträgt F Flächeneinheiten.
Wie groß sind Seiten und Winkel des Dreiecks?
Welche Werte erhalten Sie, wenn $d = 1$ und $F = 6$ beträgt?

Beweisen Sie, daß n verschiedene Karten unter zwei Personen auf

$$2(2^{n-1} - 1)$$

Weise verteilt werden können!

Es sind die Seiten des aus den Fußpunkten der Höhen gebildeten Dreiecks gegeben.
Berechnen Sie die Stücke des ursprünglichen Dreiecks!

Bestimmen Sie die Menge der ganz positiven Werte von n, für die

$$2^n + 1$$

durch 3 ohne Rest teilbar ist!

Bei welchem einem Kreis einbeschriebenen konvexen Vieleck ist die Quadratsumme der Seiten ein Maximum?

Beweisen Sie, daß es in einer sechsköpfigen Gesellschaft stets drei solche Personen gibt, die sich gegenseitig kennen, oder drei solche, die sich gegenseitig nicht kennen! (Zwei Personen A und B kennen sich gegenseitig, wenn A B kennt und B A kennt.)

Eine Kreisscheibe soll mit Hilfe anderer Kreisscheiben von halb so großem Durchmesser bedeckt werden. Wie läßt es sich mit möglichst wenig Scheiben durchführen?

In einem Wettbewerb kämpfte jeder einmal gegen jeden, und kein Wettkampf endete unentschieden. Beweisen Sie, daß es einen solchen Teilnehmer gibt, der alle seine Gegner dann erwähnt, wenn er die von ihm besiegten sowie die von diesen besiegten Teilnehmer aufzählt!

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 607 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Satz und Druck: LVZ-Druckerei „Hermann Duncker“, Leipzig, III 18 138