Oberschule

Proletarier aller Länder, vereinigt euch!

LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

Organ der Bezirksleitung Leipzig der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands

Preis 0,30 MDN | Sonderausgabe | Dezember 1966

MR

Rechenvorteile

Vorteile, Punkte und „Punkte“

Der Bezirkskonsultationspunkt Junger Techniker und Naturforscher in Leipzig stellt sich vor

Es gibt Punkte und Nichtpunkte, Randpunkte und innere Punkte, es gibt Mittelpunkte, Drehpunkte usw. Alle diese Punkte haben etwas mit Mathematik zu tun. Nun gibt es auch einen Konsultationspunkt. Mit Mathematik hat der Konsultationspunkt etwas zu tun und mit Vorteilen.

Gestattet also, daß ich diesen „Punkt“ etwas näher in den Mittelpunkt Eurer Aufmerksamkeit rücke. Entstanden ist der Konsultationspunkt aus einem Tagungsordnungspunkt des Rates des Bezirkes Leipzig. Dieser Konsultationspunkt sollte nun Mittel-, Dreh- und Ansatzpunkt für die außerschulische Arbeit aller Mathematik-, Technik- und Kulturbegeisterten und -interessierten sein: Es sollte also ein verantwortlicher Punkt werden. Verantwortung braucht Titel; also bekam der „Punkt“ den schönen, von der sonstigen Ausdehnung eines Punktes etwas abweichenden, Namen: Bezirkskonsultationspunkt Junger Techniker und Naturforscher beim Rat des Bezirkes, Abteilung Volksbildung.

Kurz nach seiner Namensgebung blickte der BKP trotzdem recht verloren in die Bezirksgegend und überlegte zunächst einmal. Dann ergriff er die Initiative und gründete unter anderem Zirkel, Mathematikzirkel für interessierte und begabte Schüler ab Klassenstufe 6. Das war der erste Vorteil für die Schüler. Denn nun konnten sie sich gründlich auf die Olympiaden Junger Mathematiker vorbereiten. Es hatte sich ja schon herumgesprochen, daß nicht nur im Sport Training notwendig ist. So lernten die Schüler nun Punkt für Punkt die verschiedensten Gebiete der Mathematik kennen und viele auch schätzen. Die „Menge“ der Schüler des Bezirkes Leipzig, die bei den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR Preise errangen, war nicht mehr „leer“; ein Zeichen also, daß der Ansatzpunkt zunächst richtig war.

Da auch an anderen Punkten des Bezirkes, nicht nur in Leipzig, mathematikinteressierte Schüler wohnen, und da die Abstände dieser Punkte vom Bezirkskonsultationspunkt recht groß sind, waren diese Schüler benachteiligt. Also wurden benachbarte „Punkte“ auf Kreisebene geschaffen. Alle 14 Tage treffen sich die Schüler der Randpunkte des Bezirkes in diesen „Punkten“ und erweitern ihr Wissen. Die besten Schüler dieser „Kreispunkte“ treffen sich einmal im Monat im Bezirkskonsultationspunkt zu Konsultationen und beschäftigen sich in einer Art Fernstudium mit den verschiedensten mathematischen Problemen. Das war der zweite Vorteil. Denn nun kann sich jeder mit dem Stoff beschäftigen, dessen Schwierigkeitsgrad seinen Voraussetzungen angepaßt ist.

So waren alle Schüler zufrieden. Bis auf die Schüler der 11. Klassen, denn diese wurden mit der Studienbewerbung jäh daran erinnert, daß sie in eineinhalb Jahren studieren werden. Manch einem mag es dabei nicht ganz wohl zumute gewesen sein, denn was wird einen an der Universität erwarten? Also richtete der Bezirkskonsultationspunkt in Verbindung mit dem Mathematischen Institut, dem Chemischen Institut und dem Physikalischen Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig in diesen Instituten Zirkel für Schüler der Klassenstufe 11 ein, die nach dem Abitur an diesen Instituten studieren wollen.

Dies ist der dritte Vorteil. Die Schüler lernen nach und nach die Gepflogenheiten und Anforderungen an der Universität kennen und haben dann zum Beginn des Studiums nicht mehr so große Schwierigkeiten. Ein halbes Jahr vor dem Abitur beenden die Schüler die von Wissenschaftlern geleiteten Zirkel, damit sie sich zielstrebig und gewissenhaft auf das Abitur vorbereiten können. Der vierte Vorteil ist der, daß die besten Schüler dieser Zirkel keine Aufnahmeprüfungen abzulegen brauchen und sofort immatrikuliert werden.

Seht Ihr, deshalb ist es vorteilhaft, sich so nach und nach mit Punkten, auch Konsultationspunkten, zu beschäftigen. Nicht nur jeder persönlich, auch die Gesellschaft hat Vorteile, und deshalb wollte ich Euch den Bezirkskonsultationspunkt in der Messestadt vorstellen.

Gerhard Kleinfeld

Liebe Mädel und Jungen!

Aus Briefen und Gesprächen wissen wir, daß unsere neue mathematische Sonderausgabe schon mit großer Spannung erwartet wird. Da ist sie also, die fünfte „Mathe-LVZ“. Sie soll Euch mit den verschiedensten Rechenvorteilen aus dem Leben der Schule und der gesellschaftlichen Praxis bekanntmachen. Vielleicht profitieren auch Eltern, Geschwister und Bekannte ganz gern von den Anregungen, wie man im Haushalt, im Betrieb, im Handel ökonomisch, schnell und richtig rechnen kann.

Auch diesmal wieder stellten der Verdiente Lehrer des Volkes Johannes **Lehmann** und der Mathematikfachlehrer Walter **Unze** den mathematischen Inhalt der zwölfseitigen Sonderausgabe zusammen. Herrn Oberstudienrat Dr. Rolf **Lüders** (Berlin) danken wir für die zahlreichen fachlichen Hinweise.

Diesmal findet Ihr in unserer „Mathe-LVZ“ auch ein kleines Preisausschreiben. Sicherlich interessiert Schüler und Lehrer, vor allem außerhalb unseres Bezirkes, der Leipziger Konsultationspunkt Junger Techniker und Naturforscher, den wir auf dieser Seite vorstellen.

Wir hoffen, daß Ihr die neue Mathe-Zeitung mit Vergnügen und einigem Nutzen lesen werdet. Vielleicht schreibt Ihr uns einmal darüber. Vor allem wünschen wir uns aber, daß Ihr Euch zuweilen miteinander oder mit Lehrern und Eltern darüber unterhaltet, weshalb in der Schule so viel von Euch gefordert wird. Schon in der 1. Klasse lernt Ihr, was eine Gleichung ist. In der 8. Klassenstufe und in den höheren Klassenstufen operiert Ihr mit Begriffen und Lösungsmethoden, die oftmals Eure Großeltern nicht einmal dem Namen nach kennen. Ihr aber sollt mehr wissen und können. Ihr sollt gute Facharbeiter und gute Sozialisten werden, mit Eurem Wissen und Eurer ganzen Persönlichkeit ganz bewußt dazu beitragen, daß die Deutsche Demokratische Republik, das Vaterland aller guten Deutschen, immer stärker wird. Dazu wünschen wir Euch gutes Gelingen.

Redaktion der Leipziger Volkszeitung

Pioniere!

Beteiligt Euch an unserem

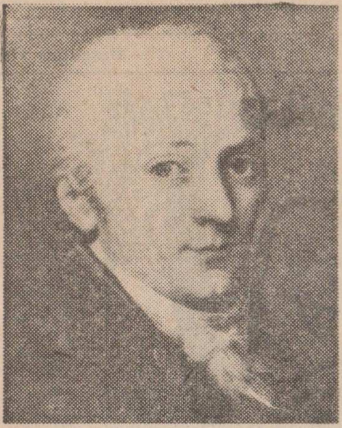
PREISAUSSCHREIBEN

auf den Seiten 6 und 7!

Es gibt wertvolle Preise!

Wer wagt, gewinnt!

Carl Friedrich Gauß entdeckte einen wichtigen Rechenvorteil



Ein Kind achtet bei seinen Träumen hierauf, ein anderes darauf. Der kleine Carl Friedrich achtete auf die Zahlen. Eine brennende Neugier führte ihn frühzeitig in ihr Reich. Oft mag er dabeigesessen haben, wenn der Vater mit seinen Gesellen beim Wochenabschluß war. Oft hat er auf die Rechnungen gehorcht, die da angestellt wurden. „Mein Vater schrieb und rechnete gut", hat er später einmal gesagt. Einmal aber wundert sich der erst Dreijährige. Als es ans Auszahlen gehen soll, ruft er warnend dazwischen. Es stimmt nicht, was der Vater errechnet hat. Lachend hält Meister Gebhardt inne. Aber siehe da! Als er die Rechnung nachprüft, ist die Zahl, die das Kind genannt hat, wahrlich die rechte.

Das eine Kind spielt hiermit, das andere damit. Der kleine Carl Friedrich spielt mit den Zahlen. Ja, Zahlen sind seine Spielsachen. ...

Bezeichnend ist ein Erlebnis, das der Lehrer Büttner der Braunschweiger Anfängerschule mit ihm hat. Noch ist es die Zeit vor der Neugestaltung des Braunschweiger Schulwesens, und ein mechanischer Drill ohne eine natürliche Anschauung herrscht auch in der dumpfen Luft der Rechenklasse Büttners. Alle Zahlen von 1 bis 40 sollen seine Schüler zusammenzählen.

„Eine tüchtige Zeit werden sie dazu brauchen", denkt der Lehrer, „genug, um mich ein wenig von all der Mühsal ausruhen zu können." Kaum aber hat er sich mit seinem Prügelstock hingesetzt, als der kleine Gauß von seinem Platz aufspringt und nach vorn gelaufen kommt „Da licht se", ruft er recht braunschweigisch dem verwunderten Lehrer glücklich zu und legt seine Tafel, wie es üblich ist, mit der Rechnung verkehrt auf das Pult.

„Nun", denkt Büttner, „eine schöne Dummheit wird das Bürschchen in seinem Übermut begangen haben." Und spöttisch ruhen seine Blicke auf ihm, der siegesbewußt auf seinem Platze wartet.

Lange dauerte es, bis die andern mühsam die 40 Zahlen zusammengebracht haben. Tafel nach Tafel wird auf die erste gelegt. Ironisch lächelnd dreht Büttner endlich wieder eine nach der andern um.

Wie erstaunt ist er aber, als er zur ersten kommt und auf ihr nichts weiter steht als die eine richtige Zahl, die Zahl 820!

Ja, hier hat es kein ärgerliches Addieren wie auf den andern Tafeln gegeben. Mit dem Blick eines frühen Meisters hat hier einer blitzschnell Zusammenhänge gesehen. Wie in einem lustigen Tanz haben sich ihm die 40 Zahlen des Lehrers geordnet. Ganz anders als zu Beginn standen sie plötzlich vor ihm, immer eine vom Anfang einer vom Ende zugesellt. Zwanzig Gruppen von je zwei Zahlen waren es schließlich, und immer ergaben die beiden zusammen 41. Was blieb also noch zu tun, als diese neue Zahl zu verzwanzigfachen?

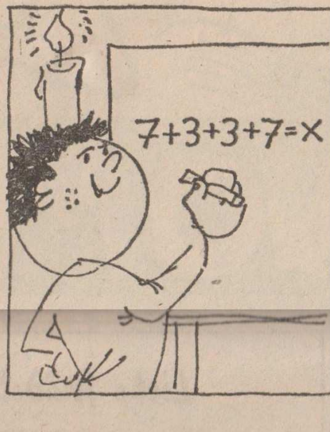
Der Lehrer Büttner ist erschüttert. Das Bürschchen da vor ihm hat also aus eigener Kraft das Gesetz zur Bildung der Summe einer arithmetischen Reihe entdeckt, ohne je etwas von einer solchen Reihe gehört zu haben.

(aus: C. F. Gauß — Ein Lebensbild von Erich Worbs)

13mal Rechenvorteile selbst entdeckt!

A

$7 + 3 + 3 + 7 = x$
$27 - 5 + 3 - 5 = x$
$29 + 17 + 11 - 17 = x$
$25 + x = 25$
$27 + 27 + 27 + 27 = x$
$36 - 6 - 6 - 6 = x$
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = x$
$9 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = x$
$7 \cdot 8 - 3 \cdot 8 + 8 = x$
$72 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 7 = x$
$(15 \cdot 3) : 5 = x$
$27 : (3 \cdot 9) = x$
$17 \cdot 8 \cdot 0 \cdot 3 = x$



Wann ist die Freude am größten?

Wenn du das Gewünschte erreichst!

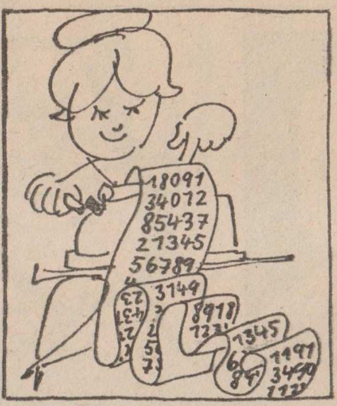
Thales von Milet

„Be-be-be"

Die Eingeborenen West-Irians rechneten nach einem Bericht des hervorragenden russischen Forschungsreisenden N. N. Miklucho-Maklai wie folgt:

„Ein beliebtes Zählverfahren besteht darin, daß der Papua einen Finger nach dem anderen umbiegt und dabei einen bestimmten Laut ausstößt, z. B. ‚be-be-be'. Hat er bis fünf gezählt, so sagt er ‚ibon-be' (ibon: die Hand). Darauf biegt er die Finger der anderen Hand um und zählt wieder ‚be-be ...' bis er zu ‚ibon-ali' (zwei Hände) gelangt. Dann fährt er fort und zählt so lange ‚be-be' vor sich hin, bis er zu ‚samba-be' und ‚samba-ali' (ein Fuß, zwei Hände) gelangt. Ist es nötig, noch weiter zu zählen, so benutzt der Papua die Finger und Zehen eines anderen."

Lange Zahlenreihen vorteilhaft addiert



Lange Additionsreihen erfordern konzentrierte Rechenarbeit. Man bewältigt solche Additionen durch geschickte Anordnung der Rechnung, durch sinnvolles Umstellen der einzelnen Rechenschritte, soweit das möglich ist. An einem Beispiel sollen die wenigen Vorteile, die man bei der Addition wahrnehmen kann, erläutert werden.

820
879
57
913
844
85
78
135
3811

Beachte bei der Addition von **oben** nach **unten:**

1. Nicht nur auf die nächste Zahl starren, sondern die ganze Reihe überblicken und **„Zehnerpäckchen"** aufsuchen! Also nicht

$9 + 7 = 16;\ 16 + 3 = 19$ usw., sondern
$9 + (7 + 3) = 19;\ 19 + 4 = 23;$
$23 + (5 + 5) = 33;\ 33 + 8 = 41.$

Wir benutzten vorteilhaft zwei „Zehnerpäckchen" und hatten daher nur 5 Summanden statt 7 vorher zu addieren.

2. Nicht die Rechenvorgänge ansagen, nur die Ergebnisse sprechen! Also nicht:

9 plus 7 ist 16, plus 3 ist 19 usw., sondern:

9, 19, 23, 33, 41 in der E-Reihe,
4, 6, 13, 23
(denn $5 + 1 + 4 = 10$), 31, 41 in der Z-Reihe,
4, 20, 30, **38** in der H-Reihe.

3. **Gleiche Zahlen in einer Reihe** durch Multiplikation zusammenfassen! Man hätte demnach in der H-Reihe der Beispielaufgabe auch so verfahren können:
4, 28 (denn $3 \cdot 8 = 24$);
38 (denn $9 + 1 = 10$).

Die fett gedruckten Ziffern werden jeweils geschrieben.

Wenn die Additionskolonnen besonders lang sind — das ist z. B. bei den Aufzeichnungen der Tageseinnahmen eines Betriebes über einen Monat hinweg der Fall —, so zerlegt man die Summen in Teilsummen, die man dann addiert, wobei die obigen Rechenvorteile auszunutzen sind:

3658,45 MDN	
2752,23 MDN	
3165,15 MDN	
3232,47 MDN	
3314,24 MDN	
3226,64 MDN	
2752,82 MDN	
3142,51 MDN	
3222,15 MDN	
3342,13 MDN	31808,79 MDN
4059,52 MDN	
....,.. MDN	
....,.. MDN	.....,.. MDN
3579,81 MDN	
....,.. MDN	
....,.. MDN	.....,.. MDN
	.....,.. MDN

Lange Reihen können auch „übertraglos" addiert werden, d. h. jede Ziffernreihe wird für sich addiert und, dem Stellenwert entsprechend, „versetzt" untereinander geschrieben, um daraus die Endsumme zu bilden. Hier kann bei der Addition auch mit dem **größten** Stellenwert begonnen werden. Dann würde sich die „Treppe" im Beispiel von links nach rechts aufbauen.

Einpfennig	-Reihe	39
Zehnpfennig	-Reihe	34
Einer	-Reihe	35
Zehner	-Reihe	37
Hunderter	-Reihe	34
Tausender	-Reihe	28
		31808,79

A

$1574 + 6236 + 3382 + 8623$
$+ 5855 + 2248 + 5911$
$+ 1521 + 7167 + 2523 = x$

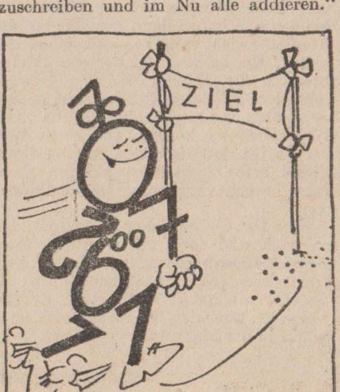
$3597 + 7476 + 5889 + 4947$
$+ 7387 + 9796 + 2674$
$+ 7257 + 8864 + 6927 = x$

$69686 + 27899 + 85978 + 74635$
$+ 48378 + 89987 + 67814$
$+ 18889 + 91423 + 17657 = x$

Die schnelle Addition

Ihr sagt eurem Freund:

„Schreibe, ohne es mir zu zeigen, untereinander soviel mehrstellige Zahlen, wie du willst. Dann komme ich und werde ganz schnell noch ebensoviel Zahlen hinzuschreiben und im Nu alle addieren."



Nehmen wir an, der Freund habe geschrieben:

7621
3057
2794
4518

Ihr schreibt zu jeder Zahl diejenige Zahl dazu, die sie zu 9999 ergänzt. Diese Zahlen sind:

2378
6942
7205
5481

Jetzt ist es nicht schwer, dahinterzukommen, wie man schnell die ganze Summe errechnet: Man muß 9999 mit 4 multiplizieren. Eine solche Multiplikation läßt sich schnell im Kopf ausführen: Wir multiplizieren 10000 mit 4 und subtrahieren die 4 überschüssigen Einer. Es ergibt sich:

$$10000 \cdot 4 - 4 = 40000 - 4 = 39996$$

Das ist das ganze Geheimnis des Kunststückes.

(aus: „Köpfchen, Köpfchen" von Kordemski)

16 · 19	26 · 86	62 · 68

Multiplikation zweistelliger Faktoren im Bereich zwischen 10 und 20

$16 \cdot 19 = x$

Wie zeitraubend wird diese Rechnung durchgeführt! Man rechnet gewöhnlich so:

$10 \cdot 19 = 190;$

$6 \cdot 19$ wird zerlegt in $6 \cdot 10 = 60$

und $6 \cdot 9 = 54$

Als Summe der Teilergebnisse erhält man endlich:

$16 \cdot 19 = 160 + 60 + 54 = \underline{\underline{304}}.$

Schneller kommt man so zum Ziel!

Man addiert zu dem einen Summanden den Einer*) des anderen Summanden, also: $16 + 9 = 25$. Dieses Ergebnis wird mit 10 multipliziert, also: $25 \cdot 10 = 250$. Dazu addiert man das Produkt aus den Einern der beiden Summanden, also $6 \cdot 9 = 54$ und erhält $250 + 54 = 304$.

Man rechnet im Kopfe so:

$14 \cdot 17 = x; \quad 14 + 7 = 21;$
$21 \cdot 10 = 210; \quad x = 210 + 4 \cdot 7 = 238.$
$13 \cdot 16 = x; \quad 13 + 6 = 19;$
$19 \cdot 10 = 190; \quad x = 190 + 3 \cdot 6 = 208.$

Die Herleitung dieses abgekürzten Rechenvorgangs ergibt sich aus der Formel

$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = \underline{\underline{10a(10a + b + c) + bc = x}}.$$

Am Beispiel

$16 \cdot 19 = x$ soll die Erläuterung erfolgen:

$a = 1,$
$b = 6,$
$c = 9.$

$$x = 10(10 + 6 + 9) + 6 \cdot 9 = 10 \cdot 25 + 6 \cdot 9 = 250 + 54 = \underline{\underline{304}}.$$

Alle diese Rechenschritte lassen sich bequem im Kopfe ausführen, wenn einigermaßen Übung erfolgte.

*) Hier und im folgenden werden bei der im dekadischen Positionssystem dargestellten natürlichen Zahl

$z = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \ldots + 10^n a_n,$

wo die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 9$ sind, die Zahl a_0 als „der Einer", die Zahl a_1 als „der Zehner", die Zahl a_2 als „der Hunderter" usw. der natürlichen Zahl z bezeichnet.

A

$13 \cdot 14 = x$
$12 \cdot 18 = x$
$17 \cdot 17 = x$
$19 \cdot 19 = x$

Multiplikation zweistelliger Faktoren, deren **Einer** einander gleich sind und deren Zehnersumme 10 ergibt.

$26 \cdot 86 = x$

Der Rechenvorteil ergibt sich dadurch, daß man die Zehner miteinander multipliziert und den gemeinsamen Einer addiert, also: $2 \cdot 8 + 6 = 22$, (eigentlich 2200), und an dieses Ergebnis das Produkt aus den beiden Einern anhängt, also: $6 \cdot 6 = 36$, d. h. $x = 2236$, (eigentlich $2200 + 36$).

Kürzer geht es also so im Kopfe:

$78 \cdot 38 = x \qquad 7 \cdot 3 + 8 = 29\,..$
$8 \cdot 8 = 64 \qquad x = 2964.$
$73 \cdot 33 = x \qquad 7 \cdot 3 + 3 = 24\,..$
$3 \cdot 3 = 9 \qquad x = 2409.$*)

Die Herleitung dieses Rechenvorteils ergibt sich aus der Formel

$$(10a + b)[10(10 - a) + b] = 100a(10 - a) + 10ab + 10(10 - a)b + b^2 = 100[a(10 - a) + b] + b^2.$$

Beispiel:

$26 \cdot 86 = x \qquad a = 2$
$\qquad\qquad\qquad b = 6$

$x = 100[2(10 - 2) + 6] + 6 \cdot 6,$
$x = 100(16 + 6) + 36,$
$x = 2200 + 36,$
$\underline{\underline{x = 2236}}.$

* Ist das Produkt der Einer kleiner als 10, so muß noch die Ziffer 0 eingefügt werden.

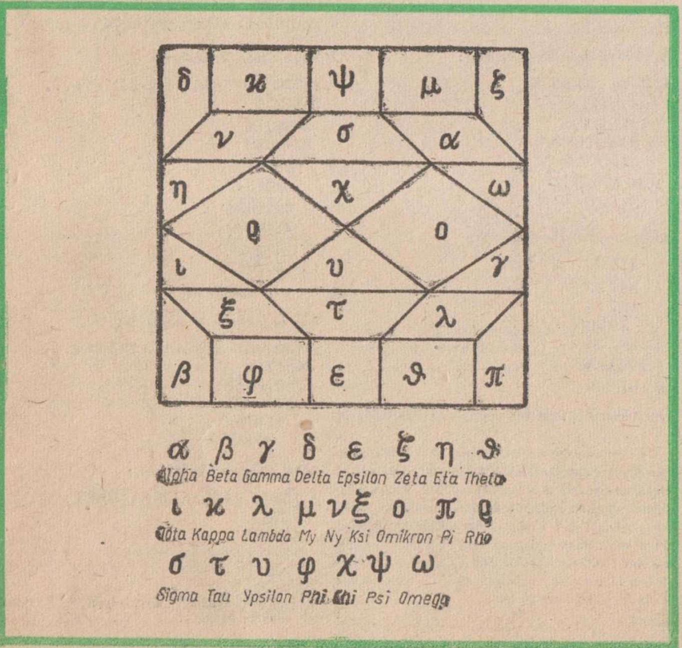
Auch mit Hilfe dieses Rechenvorteils können nach einiger Übung entsprechende Aufgaben schnell im Kopfe gelöst werden.

A

$44 \cdot 64 = x \qquad 54 \cdot 54 = x$
$16 \cdot 96 = x \qquad 62 \cdot 42 = x$
$35 \cdot 75 = x$

Hier gehts um Schnelligkeit!

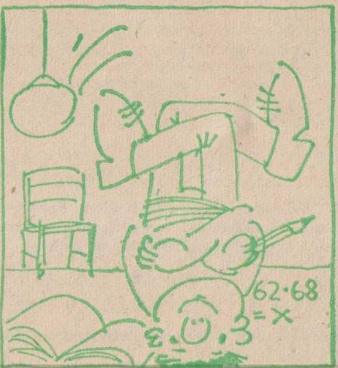
In dieser Zeichnung ist das griechische Alphabet eingetragen. Nimm eine Stoppuhr oder Taschenuhr mit Sekundenzifferblatt und prüfe, in welcher Zeit du alle Buchstaben dem Alphabet nach zeigen kannst!



Multiplikation zweistelliger Faktoren, deren **Zehner** einander gleich sind und deren Einersumme 10 ergibt.

$62 \cdot 68 = x$

Der Rechenvorteil ergibt sich dadurch, daß man den (gemeinsamen) Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner multipliziert, also $6 \cdot 7 = 42$ (eigentlich $60 \cdot 70 = 4200$), und an dieses Ergebnis das Produkt aus den Einern „anhängt", also $2 \cdot 8 = 16$, (eigentlich $4200 + 16$), $\underline{\underline{x = 4216}}$.



Die Schritte beim Kopfrechnen gehen also so:

$34 \cdot 36 = x \qquad 3 \cdot 4 = 12\,..$
$4 \cdot 6 = 24 \qquad x = 1224.$
$11 \cdot 19 = x \qquad 1 \cdot 2 = 20\,..$
$1 \cdot 9 = 9 \qquad x = 209.$*)
$191 \cdot 199 = x \qquad 19 \cdot 20 = 380\,..$
$1 \cdot 9 = 9 \qquad x = 38009.$**)

Die Herleitung dieses Rechenvorteils ergibt sich aus der Formel

$$(10a + b)(10a + 10 - b) = 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2 = 100a^2 + 100a + 10b - b^2 = \underline{\underline{100a(a + 1) + b(10 - b) = x}}.$$

Beispiel:

$62 \cdot 68 = x \qquad a = 6, \qquad b = 2$
$x = 600(6 + 1) + 2(10 - 2),$
$x = 4200 + 16,$
$\underline{\underline{x = 4216}}.$

Nach einiger Übung wird man darüber erstaunt sein, wie schnell sich solche Multiplikationen im Kopfe ausführen lassen.

*) Ist das Produkt der Einer kleiner als 10, so muß noch die Ziffer 0 eingefügt werden.

**) Der Rechenvorteil läßt sich auch bei dreistelligen Zahlen anwenden, wenn die Zehner und Hunderter der Faktoren paarweise einander gleich sind.

A

$51 \cdot 59 = x \qquad 111 \cdot 119 = x$
$73 \cdot 77 = x \qquad 172 \cdot 178 = x$
$42 \cdot 48 = x \qquad 153 \cdot 157 = x$
$72 \cdot 78 = x$
$94 \cdot 96 = x$

Aus diesem Rechenvorteil ergibt sich, daß zweistellige Quadratzahlen, die 5 als Einer haben, besonders einfach zu berechnen, ja beinahe „anzusagen" sind:

$45^2 = x; \qquad 4 \cdot 5 = 20$
$\qquad\qquad 5 \cdot 5 = 25; \qquad \underline{\underline{x = 2025}}.$

A

$35^2 = x \qquad 65^2 = x$
$55^2 = x \qquad 85^2 = x$

Auch bei dreistelligen Zahlen ist dieser Rechenvorteil anwendbar.

$125^2 = x; \; 12 \cdot 13 = 156\,..; \; 5 \cdot 5 = 25$
$x = 15625$

A

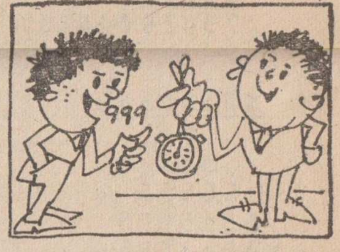
$145^2 = x \qquad 205^2 = x$
$155^2 = x \qquad 495^2 = x$
$195^2 = x$

Das macht Spaß!

Addiere oder subtrahiere, bis eine Zahl mit gleichen Ziffern erscheint!

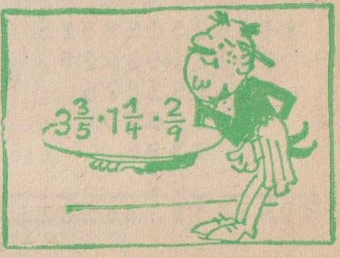
Überprüfe mit der Stoppuhr, ob du unter Anwendung von Rechenvorteilen schneller zum Ziel kommst.

1. $74 + 37 + 37 + \ldots$
2. $142 + 59 + 59 + \ldots$
3. $141 + 69 + 69 + \ldots$
4. $204 + 48 + 48 + \ldots$
5. $6054 + 789 + 789 + \ldots$
6. $77812 + 2769 + 2769 + \ldots$
7. $491 - 76 - 76 - \ldots$
8. $2610 - 287 - 287 - \ldots$
9. $4932 - 657 - 657 - \ldots$
10. $12211 - 739 - 739 - \ldots$
11. $35591 - 4896 - 4896 - \ldots$
12. $56 + 49 - 58 + 49 - 58 + - \ldots$
13. $153 - 74 + 97 - 74 + 97 - + \ldots$
14. $560 + 238 - 267 + 238 - 267 + - \ldots$
15. $1245 + 796 - 837 + 796 - 837 + - \ldots$
16. $44242 + 9475 - 3869 + 9475 - 3867 + - \ldots$
17. $19 + 9 + 8 + 7 - 6 - 5 - 4 + 9 + 8 + 7 - 6 - 5 - 4 + - \ldots$



Erst rechnen, dann staunen!

18. $900991 \cdot 863247$
19. $143 \cdot 37 \cdot 21$
20. $803 \cdot 202 \cdot 137$
21. $9901 \cdot 6363 \cdot 5291$
22. $54439 : 7$
23. $726 : 33$
24. $275528 : 62$
25. $689976 : 888$
26. $(379 + 888) - (477 + 124)$
27. $(44444 + 78967) + (396019 - 74986)$
28. $(27311 - 18269) \cdot (13010 - 5637)$
29. $(2997 \cdot 729) : (81 \cdot 81)$
30. $(1296 \cdot 396) : (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6)$



31. $54 \cdot 6\frac{1}{6}$
32. $73\frac{1}{3} \cdot 60\frac{3}{5}$
33. $151\frac{1}{2} \cdot 14\frac{2}{3}$
34. $120 \cdot 102\frac{7}{8}$
35. $54 \cdot 6\frac{1}{6}$
36. $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9}$
37. $41^2 + 43^2 + 45^2$
38. $12345678987654321 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$

Ziffernornamente

77^2
49
4949
77^2 49
7 5929
777
847·7=5929

666^2
36
3636
363636
3636
36
443556

666^2
6
666
66666
73926·6=443556

5555555^2
5
555
55555
5555555
555555555
55555555555
5555555555555
6172838271605·5=
30864191358025

5555555^2
25
2525
252525
25252525
2525252525
252525252525
25252525252525
252525252525
2525252525
25252525
252525
2525
25
30864191358025

1·1 = 1
11·11 = 121
111·111 = 12321
1111·1111 = 1234321
11111·11111 = 123454321

9·7 = 63
99·77 = 7623
999·777 = 776223
9999·7777 = 77762223

32·23 91·93 107·109

Multiplikation beliebiger zweistelliger Faktoren **nach der Kreuzmethode** (das sogenannte „Ferrolsche Rechenverfahren")

$32 \cdot 23 = x$

Man überlege sich, welche Schritte bei der allgemein üblichen Multiplikation ausgeführt werden müssen:

32 · 23		
64	3 · 2	= 6
96	3 · 3 = 9	
	2 · 2 = 4	13
736	2 · 3	= 6

H	Z	E
		6
1	3	
6		
7	3	6

Schreibt man die beiden Faktoren **untereinander** und verfährt entsprechend den angegebenen Richtungspfeilen:

$$\begin{matrix} 3 & & 2 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ 2 & & 3 \end{matrix},$$

so läuft der Rechenvorgang im Kopf folgendermaßen ab:

Einer: 2 · 3 = **6**
Zehner: 2 · 2 + 3 · 3 = 13 (schreibe **3**, merke 1)
Hunderter: 1 + 3 · 2 = **7**

Bei diesem Rechenverfahren werden außer den beiden Faktoren der Aufgabe nur die das Ergebnis bildenden (hier fett gedruckten) Ziffern geschrieben.

Mit Variablen läßt sich das Verfahren wie folgt darstellen:

$$(a_0 + 10a_1)(b_0 + 10b_1)$$
$$= a_0b_0 + 10(a_0b_1 + a_1b_0) + 100a_1b_1.$$

Die nun folgenden Beispiele, **die jeweils stärker verkürzt geschrieben werden,** sind zur Festigung dieses Rechenvorteils zu üben:

$37 \cdot 34 = x$

$$\begin{matrix} 3 & & 7 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ 3 & & 4 \end{matrix}$$

1 2 5 8

E 7 · 4 = **28**
Z 2 + 3 · 7 + 3 · 4 = **35**
H 3 + 3 · 3 = **12**

$48 \cdot 55 = x$

48
55
2640

Jetzt nur noch gedacht:

8 · 5 = **40**
4 + 8 · 5 + 4 · 5 = **64**
6 + 5 · 4 = **26**

Der Zeitaufwand für die Ausführung der Multiplikation nach diesem Verfahren wird gegenüber dem sonst üblichen Verfahren bedeutend verringert.

A

$45 \cdot 23 = x$ $37 \cdot 68 = x$ $66 \cdot 72 = x$
$27 \cdot 84 = x$ $59 \cdot 72 = x$

Das Quadrieren zweistelliger Zahlen ist nach diesem Verfahren besonders einfach, weil die Zehner aus **zwei gleichen** Produkten gebildet werden. Beispiel:

$34^2 = x$

34
34
1156

im Kopfe:
4 · 4 = **16**
1 + 2 · 3 · 4 = **25**
2 + 3 · 3 = **11**

$82^2 = x$

82
82
6724

im Kopfe:
2 · 2 = **4**
2 · 2 · 8 = **32**
3 + 8 · 8 = **67**

A

$43^2 = x$ $76^2 = x$ $93^2 = x$
$57^2 = x$ $27^2 = x$ $61^2 = x$

Die Multiplikation nach der Kreuzmethode wurde schon im Mittelalter in Indien angewandt und von den italienischen Rechenmeistern übernommen (multiplicare per crocetta). Der deutsche Rechenmeister Adam Ries (1492 bis 1559) meinte von dieser Methode: **„Sie nimpt viel Kopffs."**

Multiplikation zweistelliger Faktoren, **die nahe bei 100 liegen** (sogenannte „schwellennahe" Faktoren)

a) **Die Faktoren liegen unter der Hunderterschwelle:**

$91 \cdot 93 = x$

Man kann sich den Rechenvorgang hierzu folgendermaßen merken:

Summe der beiden Faktoren bilden: **184,**
davon die erste Ziffer streichen (das entspricht der Subtraktion der Zahl 100): **84,**
Differenz beider Faktoren bis zur „Schwelle" feststellen (9 und 7),
beide Differenzen multiplizieren: **63,*)**
und als weitere Stellen anhängen: **x = 8463.**

*) Ist dieses Produkt kleiner als 10, so hat man noch die Ziffer 0 einzufügen. Ist dieses Produkt größer als oder gleich 100, so hat man den Hunderter des Produkts zu „übertragen".

Oder kürzer:

$92 \cdot 97 = x$ 92 + 97 = 189
= 89
8 · 3 = 24
8924 = x.

Und noch kürzer prägt man sich ein:

$98 \cdot 94 = x$

98	2
94	6
92	12 = x.

Die Aufgaben können auch Dezimalzahlen enthalten, z. B.:

$0,95 \cdot 0,93 = x$

95	5
93	7
0,88	35 = x.

Auch dieses Verfahren läßt sich leicht erklären:

$$(100 - a)(100 - b)$$
$$= 100(100 - b) - 100a + ab$$
$$= 100[(100 - a) + (100 - b) - 100] + ab.$$

Im Falle des ersten Beispiels erhält man also wegen $a = 9$ und $b = 7$:

$$91 \cdot 93 = (100 - 9)(100 - 7)$$
$$= 100[91 + 93 - 100] + 9 \cdot 7$$
$$= 100 \cdot 84 + 63$$
$$= 8463.$$

A

$93 \cdot 95 = x$; $92 \cdot 88 = x$;
$9,4 \cdot 9,8 = x$; $9,5 \cdot 0,89 = x$;
$0,97 \cdot 0,88 = x$

b) **Die Faktoren liegen über der Hunderterschwelle:**

$107 \cdot 109 = x$

Es gilt dieselbe Regel wie oben, d. h. die Schritte sind:
Summe beider Faktoren bilden und 100 subtrahieren:

107 + 109 = 216,
216 — 100 = 116,

Produkt, gebildet aus den Differenzen beider Faktoren bis zur Schwelle, als weitere Stellen anhängen:

7 · 9 = 63
x = 11663.

In kürzerer Darstellung rechnen wir so:

$103 \cdot 108 = x$

103	3
8	8
11124 = x, und auch	

$112 \cdot 121 = x$

112	12
21	21
133	252
13552 = x.	

Die Herleitung dieses Verfahrens ergibt sich wie oben:

$$(100 + a)(100 + b)$$
$$= 100(100 + b) + 100a + ab$$
$$= 100[(100 + a) + (100 + b) - 100)] + ab.$$

A

$104 \cdot 107 = x$ $10,5 \cdot 11,2 = x$
$106 \cdot 106 = x$ $0,108 \cdot 1,17 = x$
$109 \cdot 115 = x$

Abgekürzte Multiplikation

Bei Preisberechnungen sind nur zwei Stellen nötig!

Sammelergebnis: 42,3765 t Altmaterial
Preis pro Tonne: 23,85 MDN

Ausführlicher Rechenweg:

42,3765 · 23,85
847530
1271295
3390120
2118825
1010,679525
≈ 1010,68

Abgekürzter Rechenweg:

423,76 | 5 · 2,385
847 53
127 13
33 90
2 12
1010,68
≈ 1010,68

Der Gesamtpreis beträgt ≈ **1010,68 MDN**

Der Grundgedanke der abgekürzten Multiplikation liegt darin, daß alle Teilprodukte nur auf so viel Dezimalstellen berechnet werden, wie das Ergebnis erhalten soll. Wir rücken deshalb in unserem Beispiel das Komma im 1. Faktor um **eine** Stelle nach **links** und zum Ausgleich im 2. Faktor um **eine** Stelle nach **rechts**. Die Anzahl der Kommastellen bleibt somit erhalten und die umgeformte Aufgabe sieht dann so aus:

$423,765 \cdot 2,385 = x$

Abgekürzte Division

Eine Gießerei berechnet die Selbstkosten je Tonne Guß. In einem Monat betrugen die Selbstkosten 287 395,64 MDN und die Produktion 836,745 t guter Guß.

Veraltetes Verfahren

287395640 : 836745 = 343,468 ...
2510235
3638214
3346980
2902340
2510235
3921050
3346980
5740700
5020470
7202300

Vereinfachtes Verfahren:

287395640 : 836745 = 343,468 ...
3637214
2902340
3921050
5740700
7202300

Abgekürztes Verfahren:

287396 | : 83674 | 5 = 343,47
36372
2902
392
57

Die Selbstkosten pro Tonne betragen rd. 343,47 MDN.

$(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(a+b)(a-b)$

Praktische Anwendungen der Binomischen Formeln

● $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Wir wenden diese Formel an, wenn beide Faktoren einer Multiplikationsaufgabe gleich sind und diese wenig **über** einem vollen Zehner liegen, z. B. $31^2 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(30+1)^2 = 30^2 + 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$30\cdot 30 + 2\cdot 1\cdot 30 + 1 = \underline{\underline{961}}$.

Und kürzer mit **Betonung:**

30; **900**; 60; **960**; 1; **961**.

Oder: $53^2 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(50+3)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$50\cdot 50 + 2\cdot 3\cdot 50 + 9 = \underline{\underline{2809}}$.

Und kürzer mit **Betonung:**

50; **2500**; 300; **2800**; 9; **2809**.

A

$33^2 = x$ $\quad 64^2 = x$
$92^2 = x$ $\quad 102^2 = x$
$71^2 = x$ $\quad 303^2 = x$
$43^2 = x$ $\quad 405^2 = x$

● $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Liegen die beiden gleichen Faktoren einer Multiplikationsaufgabe wenig **unter** einem vollen Zehner, so ist das Mittelglied in der Kopfrechnung zu subtrahieren, statt zu addieren, z. B. $29^2 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(30-1)^2 = 30^2 - 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$30\cdot 30 - 2\cdot 1\cdot 30 + 1 = \underline{\underline{841}}$.

Und kürzer mit **Betonung:**

30; **900**; 60; **840**; 1; **841**.

Oder: $58^2 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(60-2)^2 = 60^2 - 2\cdot 60\cdot 2 + 2^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$60\cdot 60 - 4\cdot 60 + 4 = \underline{\underline{3364}}$.

Und kürzer mit **Betonung:**

60; **3600**; 240; **3360**; 4; **3364**.

A

$38^2 = x$ $\quad 88^2 = x$ $\quad 299^2 = x$
$47^2 = x$ $\quad 97^2 = x$ $\quad 497^2 = x$
$69^2 = x$ $\quad 198^2 = x$

● $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Diese Formel findet dann Anwendung, wenn beide Faktoren einer Multiplikationsaufgabe um den gleichen Betrag nach oben **und** nach unten von einer **durch 10 teilbaren Zahl** abweichen, d. h., wenn das arithmetische Mittel beider Faktoren durch 10 teilbar ist. Dieser Vorteil ist besonders günstig, weil sich die Addition oder die Subtraktion des Mittelgliedes erübrigt.

Zum Beispiel: $32\cdot 28 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(30+2)(30-2) = 30^2 - 2^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$30\cdot 30 - 2\cdot 2 = \underline{\underline{896}}$.

Und kürzer mit **Betonung:**

30; **900**; 4; **896**.

Oder: $77\cdot 83 = x$.

Aus der Formel folgt:

$(80-3)(80+3) = 80^2 - 3^2 = x$.

Wir rechnen im Kopf so:

$80\cdot 80 - 3\cdot 3 = 6391$.

Und kürzer mit **Betonung:**

80; **6400**; 9; **6391**.

A

$43\cdot 37 = x$ $\quad 94\cdot 106 = x$
$76\cdot 64 = x$ $\quad 305\cdot 295 = x$
$52\cdot 68 = x$ $\quad 124\cdot 116 = x$

Zahlen mit der Endziffer 5, also z. B. 15, 35, 125 usw. lassen sich sowohl mit Hilfe der Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

als auch mit Hilfe der Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

quadrieren. Für solche Fälle gibt es übrigens noch einen anderen schönen Rechenkniff:

Man multipliziert den Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner und hängt 25 an, z. B.:

$15^2 = 225$.

Rechne im Kopf so:

$1\cdot 2 = 2$; 225

$25^2 = 625$. Rechne im Kopf so:
$2\cdot 3 = 6$; 625

$35^2 = 1225$. Rechne im Kopf so:
$3\cdot 4 = 12$; 1225

$125^2 = 15625$. Rechne im Kopf so:
$12\cdot 13 = 156$; 15625.

Die Richtigkeit dieser Regel ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25.$$

Beispiel: $75^2 = x$

$$x = 7\cdot(7+1)\cdot 100 + 25$$
$$x = 7\cdot 8\cdot 100 + 25$$
$$x = 5625.$$

A

$45^2 = x$ $\quad 135^2 = x$
$95^2 = x$ $\quad 255^2 = x$
$115^2 = x$ $\quad 495^2 = x$

Diesen Rechenvorteil kann man in geeigneten Fällen auch sehr gut bei Überschlagsrechnungen anwenden, z. B.:

$73\cdot 77 \approx 75\cdot 75 \qquad 75^2 = 5625$.

In diesem Falle erhält man, da beide Faktoren um den gleichen Betrag (nach unten bzw. nach oben) von 75 abweichen, das genaue Ergebnis wie folgt:

$73\cdot 77 = (75-2)(75+2) = 75^2 - 4 = 5625 - 4 = \underline{5621}$.

A

Überschlage auf diese Weise:

$34\cdot 35 \approx x$ $\quad 83\cdot 86 \approx x$
$56\cdot 54 \approx x$ $\quad 144\cdot 146 \approx x$.

Schnellrechner, hergeschaut!

·4

Multiplikand zweimal verdoppeln.
Beispiel:
$27\cdot 4 = 27\cdot 2\cdot 2 = 54\cdot 2 = \underline{\underline{108}}$.

Rechne im Kopfe so:
27; 54; **108**.

Beispiel: $3{,}8\cdot 4 = \underline{\underline{15{,}2}}$.

Rechne im Kopfe so: 38; 76; 152; **15,2**.

·5

Multiplikand halbieren und eine Null anhängen (ggf. Rechenweg umkehren).
Beispiel:
$32\cdot 5 = (32:2)\cdot 10 = 16\cdot 10 = \underline{\underline{160}}$.

Rechne im Kopfe so: 32; 16; **160**.
Beispiel:
$83\cdot 5 = (83\cdot 10):2 = 830:2 = \underline{\underline{415}}$.

Rechne im Kopfe so: 83; 830; **415**.

·10

An Multiplikand eine Null anhängen bzw. Komma **eine** Stelle nach **rechts** verschieben.
Beispiele: $23\cdot 10 = \underline{\underline{230}}$.
$0{,}536\cdot 10 = \underline{\underline{5{,}36}}$.

·15

Zum Multiplikanden seine Hälfte addieren und die Summe mit 10 multiplizieren.
Beispiel:
$24\cdot 15 = (24+12)\cdot 10 = \underline{\underline{360}}$.

Rechne im Kopfe so: 24; 12; 36; **360**.
Beispiel:
$47\cdot 15 = (47+23{,}5)\cdot 10 = \underline{\underline{705}}$.

Rechne im Kopfe so: 47; 23,5; 70,5; **705**.

·25

Multiplikand durch 4 dividieren und zwei Nullen anhängen.
Beispiel:
$16\cdot 25 = (16:4)\cdot 100 = 4\cdot 100 = \underline{\underline{400}}$.

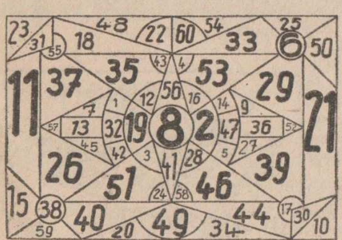
Rechne im Kopfe so: 16; 4; **400**.
Beispiel:
$54\cdot 25 = (54:4)\cdot 100 = 13{,}5\cdot 100 = 1350$.

Rechne im Kopfe so: 54; 27; 13,5; **1350**.

·100

An Multiplikanden zwei Nullen anhängen bzw. Komma **zwei** Stellen nach **rechts** rücken.
Beispiele: $46\cdot 100 = 4600$.
$3{,}476\cdot 100 = \underline{\underline{347{,}6}}$.

Hier geht's um Schnelligkeit!



In der Zeichnung sind die Zahlen 1 bis 60 eingetragen. Nimm eine Uhr mit Sekundenzifferblatt und prüfe, in welcher Zeit du alle Zahlen der Reihe nach zeigen kannst! Wer wird der Schnellste sein?

Auf einen Blick!

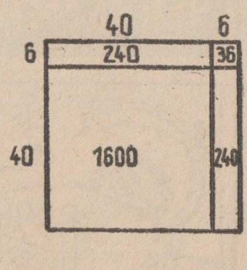
Hier sind zwei Zahlenreihen geschrieben. Seht sie euch beide eine Minute gut an und schreibt sie aus dem Kopfe nieder. Ohne das Erkennen eines Vorteils ist das kaum möglich.

1 9 3 8 7 6 1 5 2 0.
9 6 4 8 2 4 1 2 6 3

Mach's mal nach!

$\underline{46\cdot 46}$
184
$\underline{\ \ 276}$
$\underline{2116}$

$46^2 = (40+6)^2$
1600
36
$\underline{480}$
$\underline{2116}$



$46^2 = (50-4)^2$
2500
$\underline{+\ 16}$
2516
$\underline{-\ 400}$
$\underline{\underline{2116}}$

46
$\underline{46}$
16|36
2|4
$\underline{2|4}$
$\underline{2116}$

~~46~~ ~~46~~
23 92
11 184
5 368
~~2~~ · ~~736~~
$\underline{1\ 1472}$
$\underline{2116}$

46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46+46 = 2116

Leipziger Messe

Zeittafel zur Geschichte der MM

Um 1160

Im Stadtbrief Markgraf Ottos von Meißen wird erstmalig der Leipziger Jahrmarkt erwähnt.

1458

Kurfürst Friedrich von Sachsen verleiht der Stadt Leipzig zu den bereits bestehenden Oster- und Michaelismärkten noch den Neujahrsmarkt.

1497 und 1507

Bestätigung der Leipziger Messen durch Kaiser Maximilian I., der 1514 noch eine Sanktionierung der kaiserlichen Urkunden durch Papst Leo X. folgt.

Um 1500

Wachsende zentrale Stellen der Leipziger Messen im Ost-West-Handel an Stelle der niedergehenden Hanse im Norden und durch Verlagerungen der von Oberdeutschland ausgehenden Handelsrouten. Großer Einfluß der Blüte des erzgebirgischen Silberbergbaus und des Mansfelder Kupfers auf den Leipziger Fernhandel. Die Blütezeit der Stadt findet in reichen Bürgerbauten ihren Niederschlag: 1530 bis 1538 Bau von Auerbachs Hof, 1555 Bau der „Alten Waage" am Leipziger Markt,
1556 Bau des „Alten Rathauses".

16. Jahrhundert

Die Leipziger Messen werden Umschlagplatz für Waren aus Übersee. Zu den wichtigsten Messegütern gehören russische Pelzwaren, Metalle und niederländische Tuche. Auch der Absatz der sächsischen Produktion nimmt zu.

1710

Leipzig hat die Messen von Frankfurt a. M. überflügelt und steht an der Spitze aller Warenmessen.

1764

Beschluß der norddeutschen Buchhändler, nicht mehr die Messe Frankfurt a. M., sondern nur noch Leipzig zu besuchen. Leipzig wird Mittelpunkt des Buchhandels.

1850

Sächsische Industrieausstellung in Leipzig.

ab 1871

Die rasche industrielle Entwicklung Deutschlands nach der Reichsgründung führt zur Ablösung der Warenmesse durch die Mustermesse.

1896

Eröffnung des Städtischen Kaufhauses, des ersten „Meß-Palastes". In den folgenden Jahren Einstellung der Neujahrsmesse, Herausbildung des Wechsels von Frühjahrs- und Herbstmesse.

1914

Ausstellung für Buchgewerbe und Graphik (Bugra) in Leipzig. In den folgenden Jahren des ersten Weltkrieges Isolierung Leipzigs vom Weltmarkt, Beschränkung der ausländischen Aussteller auf wenige neutrale Staaten.

1916

Gründung des Leipziger Messeamtes.

1918

Gründung der Technischen Messe und Baumesse.

1920

Erstmalige Benutzung des Geländes am Völkerschlachtdenkmal für die Technische- und Baumesse.

1922

Zur Herbstmesse erste sowjetische Ausstellung in Leipzig, nachdem schon 1921 ein Informationsstand der sowjetischen Handelsvertretung in Berlin auf der Messe vertreten war.

1943 bis 1945

Zerstörung von 80% der Messeanlagen durch anglo-amerikanische Luftangriffe auf Leipzig.

1946

Im März 1946 Befehl des Obersten Chefs der SMAD zur Wiederdurchführung der Leipziger Messe, die erstmalig im Mai 1946 mit Ausstellern und Besuchern aus allen Teilen Deutschlands und 16 ausländischen Staaten stattfindet.

1947

Zur Frühjahrsmesse die ersten volkseigenen Betriebe als Aussteller in Leipzig.

1950

Diese Frühjahrsmesse ist die erste nach der Gründung der Deutschen Demokratischen Republik. Umfassende Beteiligung der UdSSR und der europäischen Volksdemokratien auf einer Ausstellungsfläche von insgesamt 20730 m².

1954

Die Leipziger Messe hat ihre Weltbedeutung zurückerlangt. Auf der Herbstmesse sind Aussteller aus 37 (darunter 28 westeuropäische und überseeische) und Besucher aus 59 Staaten vertreten.

1959

Die Herbstmesse stand im Zeichen des zehnjährigen Bestehens der Deutschen Demokratischen Republik.

1960

Die internationale Bedeutung Leipzigs als Welthandelsplatz, besonders für den Ost-West-Handel, ist weiter gewachsen. Die Gesamtumsätze der Außenhandelsorgane der DDR konnten auf 123,9% (Vergleich Frühjahrsmesse 1959) gesteigert werden.

1961

Die Erfolge unserer Volkswirtschaft zeigten sich vor allem auf dem Gebiet der metallverarbeitenden Industrie, in der ganze Industriezweige das internationale Niveau der Technik erreicht haben. Im Umsatz mit den Ländern des kapitalistischen Weltmarktes ergaben sich besonders erfreuliche Steigerungen des Exports und Imports. Höhepunkt der Herbstmesse war der Besuch des sowjetischen Kosmonauten Major Titow.

1962

Das gestellte Ziel von 950 Mio MDN Ein- und Verkaufsverträgen konnte um 104 Mio MDN überboten werden.

1963

Auf der Frühjahrsmesse wurden für DDR-Spitzenerzeugnisse über 100 Diplome vergeben. Bemerkenswert sind die vielen Fachtagungen, darunter ein Symposium von 200 Wissenschaftlern der Metallurgie aus 12 Ländern.

Zur Herbstmesse wird das neuerbaute „Messehaus am Markt" erstmalig als Buchmessehaus von in- und ausländischen Ausstellern belegt (1.—8. 9.).

1965

In der 800jährigen Geschichte des in der ganzen Welt bekannten und geachteten Handelsplatzes Leipzig war die Jubiläumsmesse 1965 ein glanzvoller Höhepunkt.

10447 Aussteller aus 75 Ländern boten auf 344223 m² Ausstellungsfläche ihre Erzeugnisse an, aus 94 Ländern kamen 986723 Messegäste.

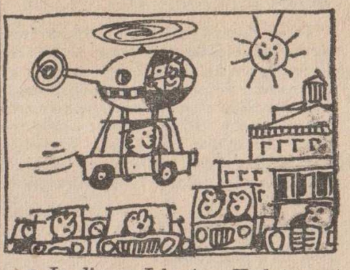
Die hohe internationale Anerkennung der Leipziger Messe fand ihren Ausdruck in der Anwesenheit von 33 Regierungs- und Parlamentsdelegationen und von prominenten Persönlichkeiten des politischen und wirtschaftlichen Lebens vieler Staaten.

In hunderten von Fachvorträgen sowie auf Konferenzen und Symposien fand ein besonders reger internationaler wissenschaftlich-technischer Erfahrungsaustausch statt, an dem Experten aus vielen Ländern teilnahmen.

(aus: Statistisches Jahrbuch 1966 Stadt Leipzig)

MM-Nachrichten

● Um den wachsenden Ansturm der motorisierten Messegäste zu bewältigen, wurde an der Ostseite des Leipziger Hauptbahnhofes nach umfangreichen Bauarbeiten die Straße erweitert. Statt bisher 3000 können nunmehr 5000 Fahrzeuge je Stunde diesen Verkehrsknotenpunkt passieren. Zur Messe passierten sogar 9000 Fahrzeuge den Hauptbahnhofsvorplatz.

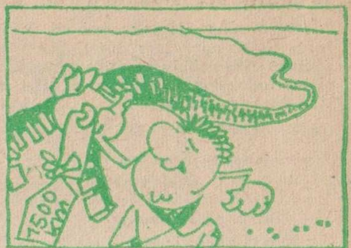


● In diesem Jahr (zur Herbstmesse) konnten wir 1125 ausländische Kraftfahrzeuge registrieren, das sind 30% mehr als zur Herbstmesse des vergangenen Jahres.

● 700 Taxis (davon 185 Behelfstaxis) waren zur Messe im Tag- und Nachteinsatz auf den Straßen Leipzigs unterwegs. Von der regen Inanspruchnahme dieses wendigsten Beförderungsmittels zeugen Kilometerzähler. 32 Erdumkreisungen, umgerechnet selbstverständlich, legten Leipzigs Taxis im Messetrubel zurück und beförderten 300000 Fahrgäste.

● Schwedenpunsch und Schwedenplatte kennen viele, den Schwedenzug nur wenige. Und doch gehört er längst zur Tradition der Messe. Seit 1947 verkehrt er jedes Jahr zweimal zwischen Stockholm und der Messe-Metropole. „Leipzig-Hauptbahnhof, Bahnsteig 26", lautet die Anschrift dieses fahrbaren Messehotels für Kaufleute aus dem Norden. Einer von ihnen ist Herr Nils A. Kilander von der Svenska Cellulosa Aktiebalagit, mit 14000 Beschäftigten, 1,6 Millionen Hektar Wald und 1 Milliarde Schwedenkronen Umsatz (100 Schwedenkronen $\hat{=}$ 81,19 MDN) das größte forstwirtschaftliche Unternehmen Schwedens und zugleich der größte Waldbesitzer Europas.

● VEB Elektrowärme meldet: Alle 24 Sekunden eine Reinigungsmaschine. Die „elektrische" Raumpflegerin, Omega-Großreinigungsmaschine „Reima", wurde im Handelshof vorgeführt. Sie kann in einer Stunde 600 m² reinigen und spart damit 7 Arbeitskräfte ein.



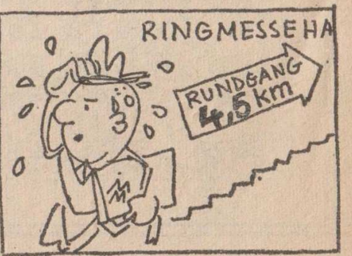
● Bereits in den ersten Messetagen der Herbstmesse wurden Verträge mit der VR Polen und der CSSR über die Lieferung von 1500 km Plastreißverschlüssen aus dem VEB Kleinmetallwarenwerk Heiligenstadt abgeschlossen.

● Aus dem VEB Wirkmaschinenbau Karl-Marx-Stadt war einer der Automaten für nahtlose Damenstrümpfe zu sehen. Bis zu 140 Paar Damenstrümpfe können im dreischichtigen Betrieb täglich an einer solchen Maschine gefertigt werden. Eine Arbeitskraft ist in der Lage, 50 solcher Maschinen zu bedienen.

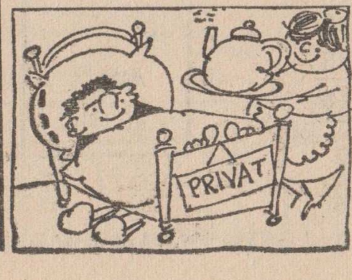
● Der in zielgerichteter Gemeinschaftsarbeit junger Ingenieure entstandene 8,5 kg schwere und auch Batteriebetrieb gestattende Fernsehempfänger „Staßfurt K 67" mit 28 cm implosionsgeschützter Bildröhre erregte überall Aufsehen.

● Eine erfolgreiche wirtschaftliche Zusammenarbeit entwickelte sich zwischen der DDR und der Ungarischen Volksrepublik. Sie ermöglichte in diesem Jahr im Rahmen des langfristigen Handelsabkommens Vereinbarungen über 1,2 Milliarden Verrechnungsmark, das sind rund 12% mehr als im Vorjahr.

● Als eines der ersten unter den im Kriege schwer beschädigten Messehäusern nahm das Ring-Messehaus nach 1945 seinen Betrieb wieder auf. Fast zwei Drittel des Hauses waren im Kriege zertrümmert oder durch Feuer zerstört worden. 900 Ausstellern aus 31 Nationen steht heute eine Ausstellungsfläche von 18000 m² zur Verfügung (1954: 13000 m²). Wer jede Auslage wenigstens flüchtig streifen wollte, hätte die Strecke von 4,5 km abzulaufen. Das Ring-Messehaus ist das größte Textilhaus Europas.



HERBSTMESSE IN SCHLAGZEILEN



6489	Aussteller aus 60 Ländern
233660	Besucher aus 87 Ländern, darunter
53660	aus dem Ausland, aus Westdeutschland und Westberlin
300	Sonderzüge fertigte der Hauptbahnhof Leipzig ab
40000	Privatquartiere und
2595	Hotelbetten (in 25 Hotels) wurden für die Messebesucher bereitgestellt
130865	m² Nettoausstellungsfläche stand den Ausstellern zur Verfügung

Preisausschreiben

Auftrag: Bilde aus dem auf diesen beiden Seiten gegebenen Zahlenmaterial eine Textaufgabe, schreibe sie auf einer Postkarte oder in einem Brief nieder! Füge Rechenweg und Lösung bei!*

* Vergiß nicht, dein Alter und deine genaue Anschrift anzugeben.

Letzter Einsendetermin: 30. Januar 1967

Adresse: Mathe-LVZ-Preisausschreiben
701 Leipzig, Postfach 660

Es gibt wertvolle Preise!

Viel Spaß und Erfolg wünscht

Eure LVZ-Redaktion

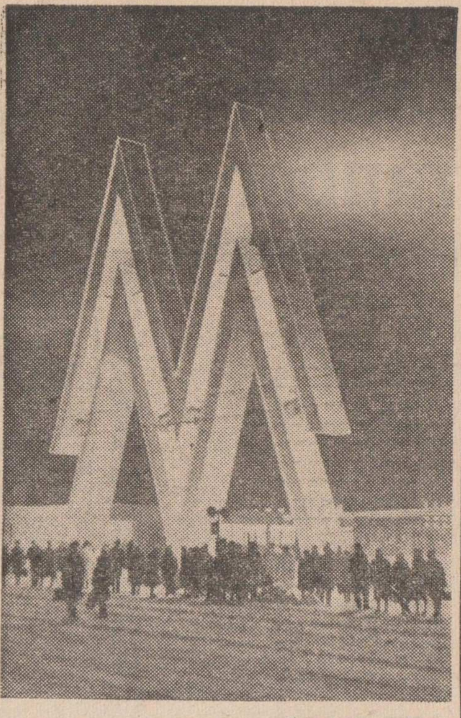


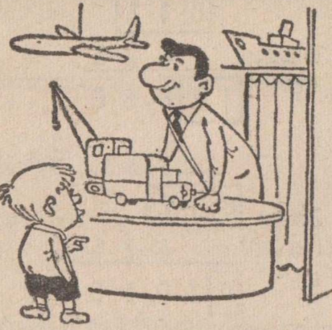
Foto: Bellmann, Leipzig

ZAHLENSPIEGEL

Weit über 120 km müßten wir zurücklegen, wenn wir keinen Messestand bei einem Rundgang durch die Leipziger Frühjahrsmesse auslassen wollten.

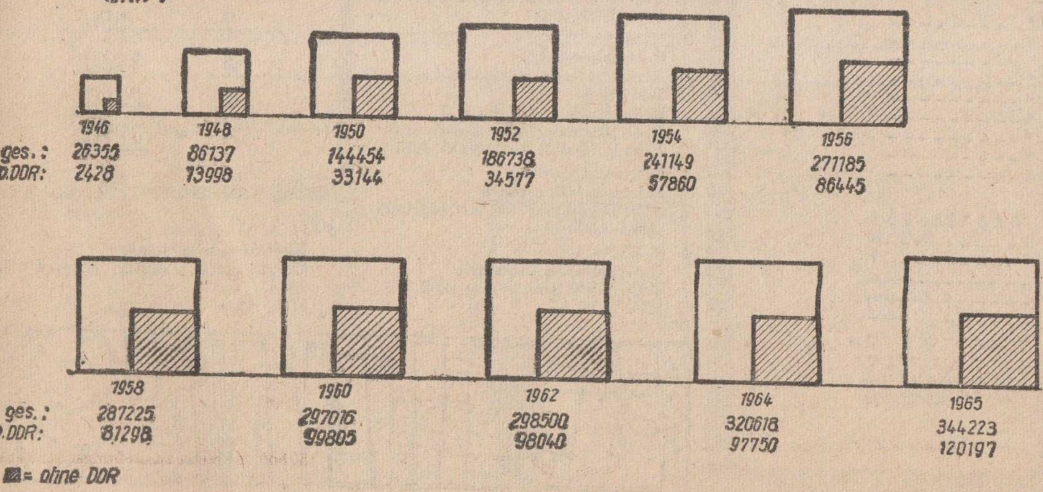
Gesamtmessefläche	850000 m²
Messestandfläche netto	344000 m²
davon Technische Messe	220000 m²
Anzahl der Messehäuser	18
Anzahl der Messehallen	22
Anzahl der Pavillons	30
Exponate	1000000
Einkäufer und Besucher jährlich ca.	990000
Zahl der anwesenden Journalisten	1000

Von den rund 22000000000 MDN Außenhandelsumsatz der DDR, deren industrielle Produktion an 10. Stelle in der Welt steht, wird mehr als ein Drittel über die Leipziger Messe abgewickelt (1965).



„Mein Vater sagt, ich soll das Spielzeug erst mal ausprobieren. Wenn es nach einer Stunde noch ganz ist, will er kommen und eine größere Bestellung aufgeben!" (aus: Messeprospekt)

Belegte Ausstellungsfläche der Frühjahrsmessen
(in m²)



Zahlenspiegel der Messestadt

Einwohner	595660
Männer	260172
Frauen	335488
Einwohner pro km²	4216
Lebendgeborene	8968
Eheschließungen	4452
Ortsmitte nördliche Breite	51° 20′
östlich von Greenw.	12° 23′
Stadtmittelpunkt (Markt)	113 m über Normal-Null
Sonnentage	18
(Sonnentage 1964)	44
durchschn. Jahrestemperatur (°C)	8,4
Niederschläge (mm)	794,2
(Niederschläge 1964)	417,1
Länge der Stadtgrenze rd. 80 km	
Gesamtfläche (ha)	14131,4
Fahrbahnfläche (m²) —1963—	6143700
Weiße Elster (km)	16,7
Parthe (km)	12,5
Pleiße (km)	6,0
Wohnungen	210229
Wohnraumfläche (m²)	12868336
Sommerschwimmbäder	11
Besucherzahl jährlich	610000
Wannen- und Brausebäder	17
Krankenhäuser	27
Bettenkapazität	7935
Polikliniken	14
Studierende an der Karl-Marx-Universität (Direktstudium)	9178
Studierende an Fachschulen	12876
Berufsschulen	31
mit Schülern	16793
Sonderschulen	13
mit Schülern	3240
erw. Oberschulen	8
mit Schülern	2689
Oberschulen	59
mit Schülern	63221
Horte und Heime	73
mit Plätzen	15880
Kindergärten	152
mit Plätzen	10506
Kinderkrippen	85
mit Plätzen	3420
Professoren, Dozenten, Lektoren der Karl-Marx-Universität	561
Lehrer an	
Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschulen	2798
Erweiterten Oberschulen	163
Sonderschulen	315
Berufsschulen	540
Erzieher in Kindergärten, Horten und Heimen	1791
Allgemeine öffentliche Bibliotheken	58
Buchbestand (gesamt)	462000
Deutsche Bücherei — Buchbestand	3254208
Zoo	
Tierbestand in Arten	566
in Individuen (ohne Fische)	2191
Besucherzahl	1290000
Theater	5
Plätze	4817
Filmtheater	22
Plätze	12795
Mitglieder Deutscher Turn- und Sportbund	40531
Studierende an DHfK	1585
Industriebetriebe	800
Handwerksbetriebe	5903
Verkaufsstellen	6648
Gaststätten und Hotels (1964)	237
Sitzplätze in HOGaststätten	21383
Eingesetzte Straßenbahnwagen	767
Gleislänge des Straßenbahnnetzes (km)	381,6
Eingesetzte Obusse	56
Eingesetzte Omnibusse	74
Taxis	457
Elektrische Leuchten	11960
Gasleuchten	11821
Telefonhauptanschlüsse	40768
Fernsehgenehmigungen	141683
Rundfunkgenehmigungen	153018

(aus: Statist. Jahrbuch 1966 der Stadt Leipzig)

Zauberzahlen Zahlenzauber

(1)

3 · 37 = 111
6 · 37 = ___
__ · __ = ___
__ · __ = ___
__ · __ = ___
__ · __ = ___
__ · __ = ___
__ · __ = ___
27 · 37 = 999

(2)

3 · 37037 = ______
6 · 37037 = ______
__ · _____ = ______
__ · _____ = ______
__ · _____ = ______
__ · _____ = ______
__ · _____ = ______
__ · _____ = ______
27 · 37037 = ______

(3)

1 · 91 = 091
2 · 91 = 182
_ · __ = ___
_ · __ = ___
_ · __ = ___
_ · __ = ___
_ · __ = ___
_ · __ = ___
9 · 91 = 819

(4)

33 · 3367 = 111111
66 · 3367 = ______
99 · ____ = ______
132 · ____ = ______
___ · ____ = ______
___ · ____ = ______
___ · ____ = ______
___ · ____ = ______
___ · ____ = ______

(5)

1 · 8 + 1 = 9
12 · 8 + 2 = 98
123 · 8 + 3 = 987
1234 · 8 + 4 = ____
_____ · _ + _ = _____
______ · _ + _ = ______
_______ · _ + _ = _______
________ · _ + _ = ________
_________ · _ + 9 = _________

(6)

1 · 9 + 2 = 11
12 · 9 + 3 = ___
123 · 9 + _ = ____
____ · _ + _ = _____
_____ · _ + _ = ______
______ · _ + _ = _______
_______ · _ + _ = ________
________ · _ + 9 = _________

(7)

0 · 9 + 8 = 8
9 · 9 + 7 = 88
__ · _ + _ = ___
___ · _ + _ = ____
____ · _ + _ = _____
_____ · _ + _ = ______
______ · _ + _ = _______
_______ · _ + 1 = ________

(8)

142857 · 1 = 142857
______ · 2 = 285714
______ · 3 = 428571
______ · 4 = ______
______ · 5 = ______
______ · 6 = ______
142857 · 7 = ______

(10)

1 · 8 = 8 Quersumme 8
2 · 8 = 16 Quersumme 7
_ · _ = __ _
_ · _ = __ _
_ · _ = __ _
_ · _ = __ _
_ · _ = __ _
_ · _ = __ _
9 · 8 = 72 _

(9) Wir lassen nur die 8 aus!

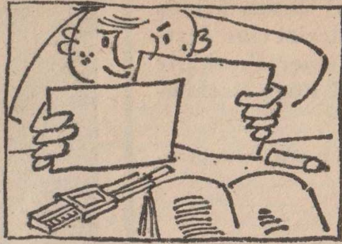
1 · 9 · 12345679 = _________
2 · _ · ________ = _________
3 · _ · ________ = _________
4 · _ · ________ = _________
5 · _ · ________ = _________
6 · _ · ________ = _________
7 · _ · ________ = _________
8 · _ · ________ = _________
9 · 9 · 12345679 = _________

(11)

987654321 · 9 = 8888888889
_________ · _ = 1________8
_________ · _ = 2________7
_________ · _ = __________
_________ · _ = __________
_________ · _ = __________
_________ · _ = __________
_________ · _ = __________
987654321 · _ = 8________1

4000000000005

Schiebezettelmethode für ganz Schlaue



218 · 425 = x

Man schreibe einen der beiden Faktoren in umgekehrter Ziffernfolge auf einen Zettel: 812 und multipliziere dann, wie aus dem folgenden Schema ersichtlich ist.

Einer
812
425
40

Zehner
812
425
250

Hunderter
812
425
4650

Tausender
812
425
12650

Zehntausender
812
425
92650

Rezept für „Kopfrechnen schwach"

Wer mit 2 multiplizieren und durch 2 dividieren kann, beherrscht das Einmaleins!

Wir wollen z. B. die Aufgabe 34 · 45 rechnen.

Gebrauchsanweisung:

Wir schreiben die beiden Zahlen nebeneinander, teilen die erste fortgesetzt durch 2 (etwaige Reste bleiben unberücksichtigt) bis zum Ergebnis 1 und multiplizieren die andere ebensooft mit 2. Dann werden alle geraden Zahlen der ersten Reihe durchgestrichen und ebenso die danebenstehenden der zweiten Reihe. Zuletzt addieren wir die noch übrig bleibenden Zahlen der zweiten Reihe und erhalten somit das gesuchte Ergebnis:

5 · 4 = x

5	4
~~2~~	~~8~~
1	16
x =	20

34 · 45 = x

~~34~~	~~45~~
17	90
~~8~~	~~180~~
~~4~~	~~360~~
~~2~~	~~720~~
1	1440
x =	1530

122 · 35 = x

~~122~~	~~35~~
61	70
~~30~~	~~140~~
15	280
7	560
3	1120
1	2240
x =	4270

Bücher, in denen ihr weiteres Material über Rechenvorteile findet!

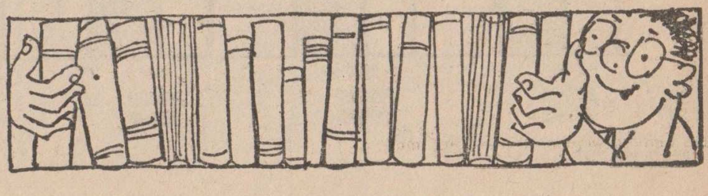
1 Autorenkollektiv
Bausteine des Wissens
Mathematik, Band I
Urania-Verlag Leipzig, Jena, Berlin 1965 MDN 12,—

2 M. Miller
Rechenvorteile
Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek
Reihe Mathematik, Band 3
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig 1966 3. Aufl. MDN 3,75

3 Ostrowski/Kordemski
Zeichnen hilft rechnen
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1963
MDN 8,50

4 J. E. Perelman
Unterhaltsame Geometrie
Volk und Wissen Verlag 1962
MDN 3,80

5 B. A. Kordemski
Köpfchen, Köpfchen!
Urania-Verlag Leipzig, Jena, Berlin 1965
MDN 12,—



Ohne Probe ist jede Lösung unvollständig

Addition

1. Eine bekannte Probe ist die **wiederholte**, aber in der entgegengesetzten Richtung verlaufende Addition der Reihe. Addiert man zunächst „von oben nach unten", so wird nun zur Kontrolle „von unten nach oben" addiert oder umgekehrt.

2. Lange Reihen können **„übertragslos"** addiert werden, d. h. jede Ziffernreihe wird für sich addiert und, dem Stellenwert entsprechend „versetzt" untereinander geschrieben, um daraus die Endsumme zu bilden, (vgl. das Beispiel S. 2: Lange Zahlenreihen). Bei der Addition kann man auch mit dem **größten** Stellenwert beginnen; dann baut sich die „Treppe" im Beispiel von links nach rechts auf.

3. Eine natürliche Zahl ergibt bei der Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Auf dieser Eigenschaft beruht die **Neunerprobe** mit dem sogenannten **Neunerrest** (NR). An dem folgenden Beispiel soll das Verfahren zur Kontrolle des Ergebnisses einer Addition erläutert werden.

	Quersumme	NR	neuer NR
3246	15	6	
458	17	8	
2919	21	3	
6512	14	5	
718	16	7	
33	6	6	
515	11	2	
8699	32	5	
23100		42	6

NR = 6

Die Arbeitsschritte sind:

Die Reihe wird zunächst addiert. Dann werden die Neunerreste aus den Quersummen (nur diese!) addiert. Von dieser Summe wird abermals der Neunerrest gebildet, im Beispiel 6.

Stimmt nun der Neunerrest der Summe 23100 mit dem Neunerrest der Summe der Neunerreste aller Summanden überein, so ist das Ergebnis mit großer Wahrscheinlichkeit richtig.

Ziffernvertauschungen einer gegebenen Zahl werden allerdings nicht erkannt.

Ferner wird bei der Neunerprobe ein Fehler dann nicht erkannt, wenn die Abweichung von dem richtigen Ergebnis 9 oder ein Vielfaches von 9 beträgt.

Ein weiteres Beispiel:

	NR	neuer NR
8271	—	
633	3	
450	—	
7515	—	
961	7	
8100	—	
712	1	
6318	—	
32960	11	2

NR = 2

Der Neunerrest von 9 ist 0. Daher kann in der obenstehenden Tabelle ein Neunerrest weggelassen werden, wenn die Quersumme 9 oder ein Vielfaches von 9 beträgt. Übrigens kann die Berechnung des Neunerrestes dadurch vereinfacht werden, daß man bei der Ermittlung der Quersumme von Summanden, die 9 oder ein Vielfaches von 9 betragen, wegläßt, z. B. beträgt der Neunerrest der Zahl 961: 6 + 1 = 7.

Subtraktion

1. Subtrahiert man nur **eine** Zahl vom Minuenden, so führt man die Probe in der Weise durch, daß Differenz und Subtrahend addiert werden. Die Summe muß den Minuenden ergeben, z. B.:

$$\begin{array}{r} 6305 \\ -\,4289 \\ \hline 2016 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{r} 2016 \\ +\,4289 \\ \hline 6305 \end{array}$$

Auf weitere Beispiele kann verzichtet werden, da dieses Verfahren, auch ohne erneutes Hinschreiben, allgemein geübt wird.

2. Bei Subtraktionsaufgaben mit einem oder mehreren Subtrahenden läßt sich ebenfalls die **Neunerprobe** mit dem **Neunerrest** anwenden, wie das folgende Beispiel zeigt:

	NR	neuer NR
323602	7	7
— 15906	3	25
— 8222	5	
— 154619	8	
— 78500	2	
— 2921	5	
63434	2	

Die Arbeitsschritte sind:

Die Neunerreste der Subtrahenden und der Differenz werden addiert. Die Summe ist 25, ihr Neunerrest 7. Er stimmt mit dem Neunerrest des Minuenden überein; das Ergebnis 63434 ist also mit großer Wahrscheinlichkeit richtig.

Multiplikation

1. Jedes Ergebnis einer Multiplikation überprüfen wir grundsätzlich zunächst durch **Überschlagsrechnung:**

$28 \cdot 32 \approx 30 \cdot 30 \approx 900$

$109 \cdot 447 \approx 100 \cdot 450 \approx 45000.$

Besonders wichtig ist der Überschlag bei Dezimalzahlen, um festzustellen, ob das Komma richtig steht:

$8{,}35 \cdot 9{,}05 \approx 8 \cdot 9 \qquad 8 \cdot 9 = 72$

folglich: $8{,}35 \cdot 9{,}05 \approx 72$

$42{,}376 \cdot 23{,}85 \approx 40 \cdot 25 \qquad 40 \cdot 25 = 1000$

folglich: $42{,}376 \cdot 23{,}85 \approx 1000.$

2. Bei der Multiplikation ist die **Neunerprobe** besonders zu empfehlen. Man untersucht, ob der Neunerrest des Produktes der Neunerreste der Faktoren mit dem Neunerrest des Produktes übereinstimmt. Man zeichnet sich dazu ein „Neunerkreuz" und merkt sich die Anordnung der einzutragenden Neunerreste:

$$\begin{array}{ccc} & \text{NR des Produkts der NR der Faktoren} & \\ \text{NR des 1. Faktors} & \times & \text{NR des 2. Faktors} \\ & \text{NR des Produkts} & \end{array}$$

Beispiele:

$23 \cdot 16 = 368$

$\begin{array}{ccc} & 8 & \\ 5 & \times & 7 \\ & 8 & \end{array}$ NR des 1. Faktors: 5, NR des 2. Faktors: 7, $7 \cdot 5 = 35$; NR: 8, NR des Produkts: 8.

$2169{,}2 \cdot 328{,}75 = 713124{,}5$

$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 2 & \times & 7 \\ & 5 & \end{array}$ NR des 1. Faktors: 2, NR des 2. Faktors: 7, $2 \cdot 7 = 14$; NR: 5, NR des Produkts: 5.

Hierzu die Überschlagsrechnung:

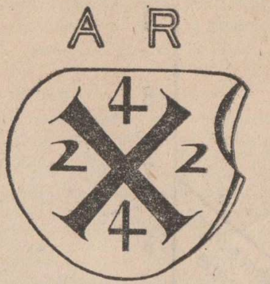
$2200 \cdot 300 = 660000.$

Die **untereinanderstehenden** Zahlen am Neunerkreuz **sind gleich,** d. h. die Probe hat die Richtigkeit des Ergebnisses bestätigt.

A

In den folgenden Lösungen sind zwei Fehler enthalten. Stelle die **falschen** Ergebnisse mit Hilfe des Überschlags und der Neunerprobe fest.

$56{,}85 \cdot 1{,}68 = 95{,}508;$
$47{,}65 \cdot 3{,}56 = 169{,}634;$
$24{,}74 \cdot 165{,}00 = 408{,}21;$
$33{,}25 \cdot 98{,}20 = 3265{,}15;$
$8{,}675 \cdot 261{,}00 = 2364{,}175.$



Die Probe gehörte zur Zeit des Rechenmeisters Adam Ries (1492 bis 1559) unbedingt „zur vollständigen Erledigung einer Rechenaufgabe".

So wählte er dieses Zeichen als Berufswappen, das sogenannte Neuner-Kreuz.

Division

1. Um Stellenfehler zu vermeiden, überprüfen wir jedes Ergebnis einer Division grundsätzlich durch **Überschlagsrechnung:**

$1085 : 53 \approx 1000 : 50 = 100 : 5 = 20,$

$1597{,}95 : 770{,}52 \approx 1600 : 800 = 16 : 8 = 2,$

$441{,}62 : 0{,}901 \approx 4500 : 9 = 500.$

2. Auch hier kann die Neunerprobe, wenn auch nicht direkt, angewandt werden. Man prüft, ob das Produkt aus dem Quotienten und dem Divisor den Dividenden ergibt.

a) Die Division geht auf:

$1360 : 16 = 85$

$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 4 & \times & 7 \\ & 1 & \end{array}$ NR des Quotienten: 4, NR des Divisors: 7, $4 \cdot 7 = 28$; NR: 1, NR des Dividenden: 1.

$304{,}725 : 1{,}275 = 239$

$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 5 & \times & 6 \\ & 3 & \end{array}$ NR des Quotienten: 5, NR des Divisors: 6, $6 \cdot 5 = 30$; NR: 3, NR des Dividenden: 3.

b) Die Division ergibt einen Rest:

Ergibt sich bei der Division der natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ der Rest r, so ist

$a = c \cdot b + r,$

wobei c und r natürliche Zahlen sind und $r < c$ ist.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung kann auch in solchen Fällen die Neunerprobe angewandt werden:

$45 : 7 = 6 + \frac{3}{7}$ oder $45 = 6 \cdot 7 + 3.$

Neunerprobe:

NR von 6:	6	
NR von 7:	7	
NR von 6 · 7:	6	
NR von (6 · 7 + 3):	0	
NR von 45:	0	

$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 6 & \times & 7 \\ & 0 & \end{array}$

Die letzten beiden NR sind einander gleich.

$454247 : 296 = 1534 + \frac{183}{296}$ oder

$454247 = 1534 \cdot 296 + 183.$

Gegenweg zur Neunerprobe:

NR von 1534:	4
NR von 296:	8
NR von 4 · 8:	5
NR von 183:	3
NR von 5 + 3:	8
NR von 454247:	8

$\begin{array}{ccc} & 8 & \\ 4 & \times & 8 \\ & 8 & \end{array}$

In allen Beispielen sind die **untereinanderstehenden** Zahlen dem Neunerkreuz einander gleich, d. h. die Probe läßt mit großer Wahrscheinlichkeit die Richtigkeit der Ergebnisse vermuten.

Schnellrechner, hergeschaut!

: 4

Dividend zweimal halbieren.

Beispiel:

$144 : 4 = (144 : 2) : 2 = 72 : 2 = 36$

Rechne im Kopf so: 144; 72; **36.**

Beispiel: $5{,}4 : 4 = 1{,}35.$

Rechne im Kopf so: 54; 27; 13,5; **1,35.**

: 5

Dividend verdoppeln und Ergebnis durch 10 dividieren (ggf. Rechenvorgang umkehren).

Beispiel:

$360 : 5 = (360 \cdot 2) : 10 = 720 : 10 = 72$
$= (360 : 10) \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72.$

Rechne im Kopf so: 360; 36; **72.**

Beispiel: $84 : 5 = 16{,}8.$

Rechne im Kopf so: 84; 8,4; **16,8.**

: 10

Eine Null streichen oder Komma **eine** Stelle nach **links** rücken.

Beispiel: $2400 : 10 = 240.$

Beispiel: $3{,}67 : 10 = 0{,}367.$

Beispiel: $0{,}1 : 10 = 0{,}01.$

: 15

Dividend durch 10 teilen. Ergebnis mit $\frac{2}{3}$ multiplizieren.

Beispiel:

$360 : 15 = [(360 : 10) : 3] \cdot 2$
$= (36 : 3) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24.$

Rechne im Kopf so: 360; 36; 12; **24.**

Beispiel: $6900 : 15 = 460.$

Rechne im Kopf so: 6900; 690; 230; **460.**

: 25

Dividend durch 100 dividieren und Ergebnis vervierfachen (ggf. Rechenweg umkehren).

Beispiel:

$4200 : 25 = (4200 : 100) \cdot 4 = 168.$

Rechne im Kopf so: 4200; 42; 84; **168.**

Beispiel: $160 : 25 = 6{,}4.$

Rechne im Kopf so: 160; 320; 640; **6,4.**

: 100

Zwei Nullen streichen oder Komma **zwei** Stellen nach **links** rücken.

Beispiel: $4800 : 100 = 48.$

Beispiel: $388 : 100 = 3{,}88.$

Beispiel: $5{,}57 : 100 = 0{,}0557.$

Zum Abschluß soll noch die Richtigkeit der benutzten Regeln der Neunerprobe nachgewiesen werden. Wir führen den Nachweis mit Hilfe der elementaren Zahlentheorie und setzen dabei Kenntnisse über die Zahlenkongruenzen voraus.

Es sei

$z = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \ldots + 10^n a_n,$

wobei die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 9$ sind, eine natürliche Zahl, dargestellt im dekadischen Positionssystem.

Nun ist

$10 \equiv 1 \pmod 9$, also $10a_1 \equiv a_1 \pmod 9$,
$10^2 \equiv 1 \pmod 9$, also $10^2a_2 \equiv a_2 \pmod 9$,
......
$10^n \equiv 1 \pmod 9$, also $10^n a_n \equiv a_n \pmod 9$.

Daraus folgt

$z = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \ldots + 10^n a_n$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9,$

d. h. jede natürliche Zahl ist ihrer Quersumme modulo 9 kongruent. **Daher ist der Neunerrest einer natürlichen Zahl gleich dem Neunerrest ihrer Quersumme;** denn zwei natürliche Zahlen ergeben genau dann bei der Division durch 9 den gleichen Rest, wenn sie einander modulo 9 kongruent sind.

Aus

$a_1 \equiv r_1 \pmod 9$ und $a_2 \equiv r_2 \pmod 9$

folgt

$a_1 + a_2 \equiv r_1 + r_2 \pmod 9,$

d. h. der **Neunerrest der Summe zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem Neunerrest der Summe der Neunerreste beider Zahlen.** Entsprechendes gilt für die Summe von endlich vielen natürlichen Zahlen.

Ferner folgt aus

$a_1 \equiv r_1 \pmod 9$ und $a_2 \equiv r_2 \pmod 9$
$a_1 a_2 \equiv r_1 r_2 \pmod 9,$

d. h. der **Neunerrest des Produktes zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem Neunerrest der Produktes der Neunerreste beider Zahlen.**

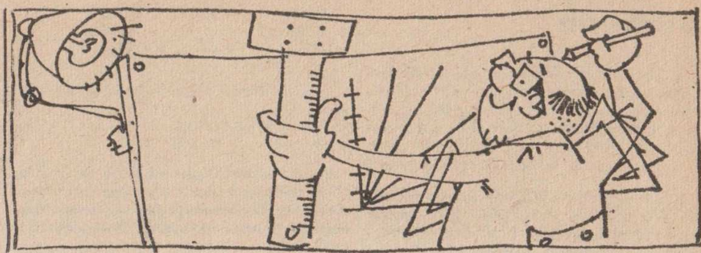
Entsprechendes gilt für das Produkt aus drei oder mehr natürlichen Zahlen.

Stimmt daher bei einer Addition der Neunerrest der Summe **nicht** mit dem Neunerrest der Summe der Neunerreste der Summanden überein, so liegt ein Rechenfehler vor. Entsprechendes gilt für die Multiplikation.

Die Übereinstimmung ist jedoch nur eine notwendige, keineswegs aber hinreichende, Bedingung für die Richtigkeit des Ergebnisses.

Wer das Rechnen mit dem Rechenstab beherrscht, wird statt der geschilderten Proben bei einer Multiplikation oder Division besser die Probe mit Hilfe des Rechenstabes durchführen (wenn er nicht bereits die Rechnung selbst mit dem Rechenstab durchgeführt hat). Daher spielt die oben beschriebene Neunerprobe in der Praxis nur eine untergeordnete Rolle.

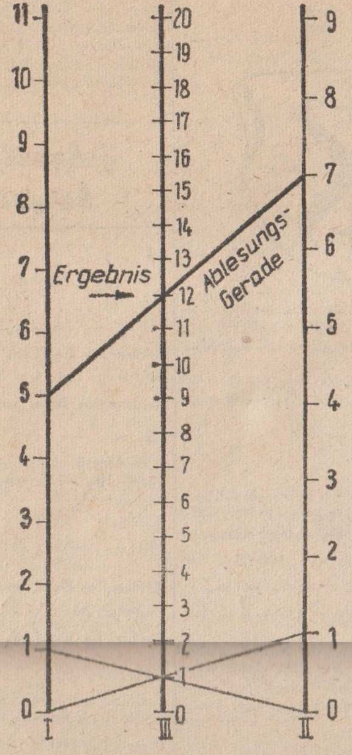
Mit dem Zeichenstift gerechnet!



Aufgaben, die in gleicher Form wiederholt auftreten und in denen sich nur die Größen ändern, lassen sich **zeichnerisch** lösen. Aus Tafeln, die man sich selbst anfertigt, zweckmäßigerweise auf Millimeter-Papier, können die Ergebnisse der wiederholt vorkommenden Aufgaben abgelesen werden. Die Beispiele sollen dazu anregen, selbst **„Leitertafeln"** oder **„Netztafeln"** anzufertigen und sie zum vorteilhaften Rechnen zu benutzen.

(Die Zeichnungen dieser Seite wurden entnommen aus: Nomogramme, Volk u. Wissen, 1964, 001301)

Leitertafel zur Addition und Subtraktion



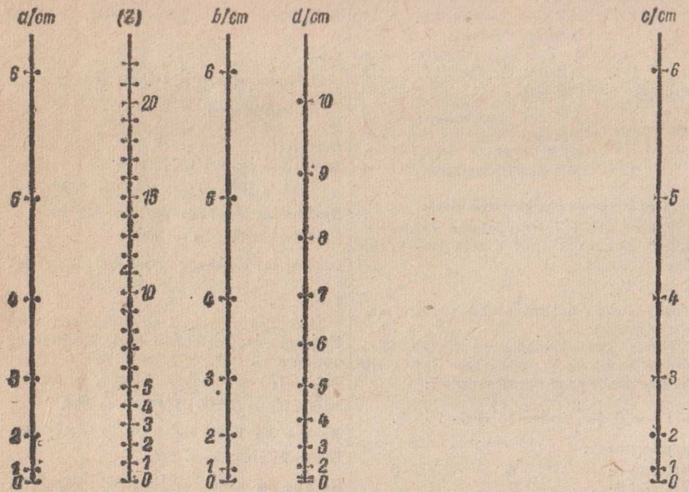
Der Aufbau der Tafel bzw. die Einteilung der Leitern ist durch den zweiten Teil des Strahlensatzes begründet.

Als Ablesehilfe benutzen wir am besten ein Lineal aus durchsichtigem Werkstoff, mit dem wir immer drei zusammengehörige Werte erfassen. In der Abbildung gehören die Werte 5, 12 und 7 zusammen, die zu den Aufgaben $5 + 7 = 12$, $12 - 5 = 7$ und $12 - 7 = 5$ gehören. Bei der Addition steht das Ergebnis auf der **Mittelleiter**, bei der Subtraktion auf der gegenüberliegenden **Außenleiter.**

A

Bilde selbst weitere Aufgaben zu dieser Leiter!

Leitertafel zur Bestimmung der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kanten a, b, c



Die rechnerische Ausführung führt auf die Formel $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Der Aufbau der hierzu erforderlichen Tafel ergibt sich aus der Abbildung.

Beispielaufgabe: Gegeben sind $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm. Wie groß ist d?

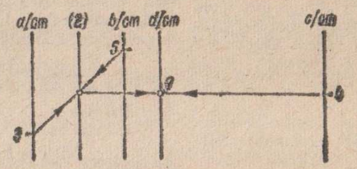
$d = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\text{ cm} \approx 7\text{ cm}.$

Der Ablesevorgang geht aus der Skizze hervor.

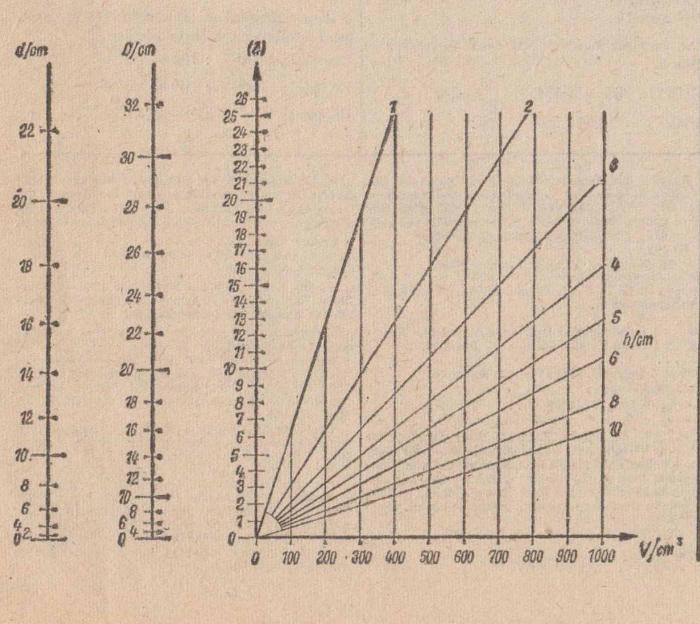
A

Lies ebenfalls für d die Werte ab, wenn gegeben sind:

1. a = 4 cm, b = 6 cm, c = 3,5 cm;
 a = 6 m, b = 3 m, c = 6 m;
 a = 5 dm, b = 5 dm, c = 5 dm.



Netztafel zur Bestimmung des Volumens eines Hohlzylinders mit den Durchmessern D und d



Die Rechnungsdurchführung erfolgt mit der Formel $V = \frac{\pi}{4} \cdot h\,(D^2 - d^2)$. Der Aufbau der Tafel ist aus der Abbildung ersichtlich:

Beispielaufgabe: Gegeben sind D = 16 cm, d = 8 cm, h = 3 cm. Berechne V!

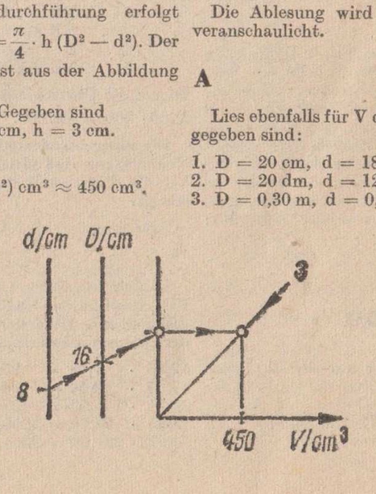
$V = \frac{\pi}{4} \cdot 3\,(16^2 - 8^2)\text{ cm}^3 \approx 450\text{ cm}^3.$

Die Ablesung wird durch die Skizze veranschaulicht.

A

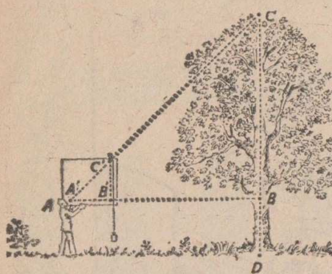
Lies ebenfalls für V die Werte ab, wenn gegeben sind:

1. D = 20 cm, d = 18 cm, h = 10 cm;
2. D = 20 dm, d = 12 dm, h = 5 dm;
3. D = 0,30 m, d = 0,22 m, h = 0,02 m.

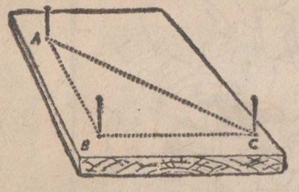


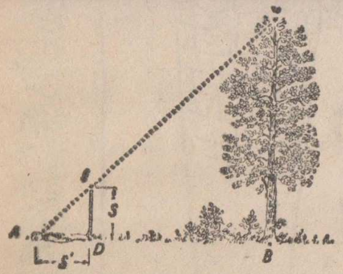
Das ist die Höhe

Geometrie im Walde

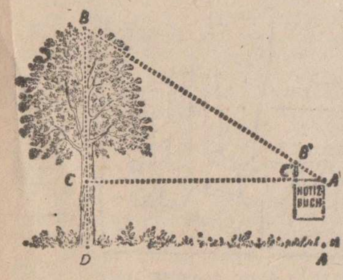


Die Höhe eines Baumes wird mit dem Stecknadelgerät gemessen.

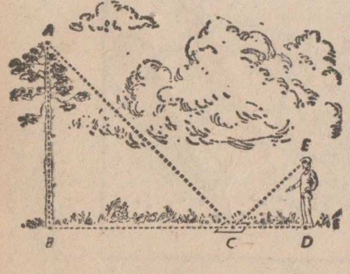




Ein weiteres Höhenmeßverfahren



Messen der Baumhöhe mit dem Notizbuch



Höhenmessungen mit dem Spiegel

(aus: J. E. Perelmann „Unterhaltsame Geometrie")

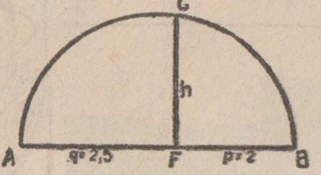
$\sqrt{5}$

Ohne Tafel — geometrisch gelöst

Im Höhensatz des Euklid heißt es: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den durch diese Höhe gebildeten Hypotenusenabschnitten, oder kürzer:

$\mathbf{h^2 = p \cdot q.}$

Dieser Lehrsatz gestattet das Ziehen der Quadratwurzel einer gegebenen Zahl auf einfachste Weise durch Zeichnung. Man zerlegt die gegebene Zahl in **zwei beliebige Faktoren,** z. B. $5 = 2 \cdot 2{,}5$ und betrachtet diese Faktoren als Längen der Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks.



Über der Hypotenuse schlägt man den Halbkreis. Die Senkrechte, die in F auf der Hypotenuse errichtet wird und die den Halbkreisbogen in C schneidet, ist die Höhe *h* des rechtwinkligen Dreiecks; ihre Länge ist gleich der gesuchten Wurzel. Aus der Abbildung wird ersichtlich:

$\sqrt{5} \approx 2{,}2$.

Übrigens hätte der Radikand auch so zerlegt werden können:

$5 = 1 \cdot 5, \quad 5 = 1{,}25 \cdot 4, \quad 5 = 0{,}5 \cdot 10;$

in jedem Falle erhält man aus der entsprechenden Konstruktion dasselbe Ergebnis. Größere Radikanden erfordern eine maßstäbliche Konstruktion, z. B.: $\sqrt{600} = x.$

$x = \sqrt{20 \cdot 30}$ M. 1 : 10; $\frac{x}{10} = \sqrt{2 \cdot 3}.$

Zur Übung werden empfohlen:

$\sqrt{8} = x, \quad \sqrt{15} = x, \quad \sqrt{20} = x, \quad \sqrt{30} = x.$

(Ggg. in mehreren Varianten konstruieren!)

Ferner:

$\sqrt{800} = x, \quad \sqrt{1200} = x, \quad \sqrt{2100} = x.$

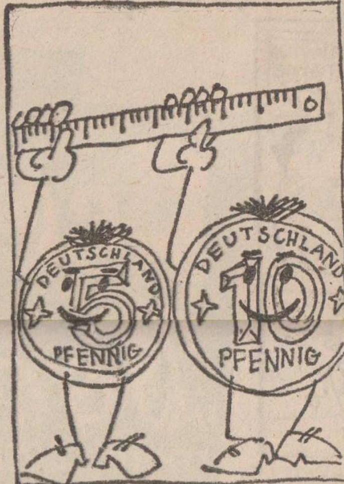
(Im Maßstab 1 : 10)

Immer das Kleingeld

Etwas Kleingeld steht meist zur Verfügung, aber nur wenige Menschen wissen, daß man damit verhältnismäßig genaue Messungen durchführen kann. Zunächst seien die Durchmesser unserer Geldstücke genannt:

Einpfennigstück	17 mm
Fünfpfennigstück	19 mm
Zehnpfennigstück	21 mm
Fünfzigpfennigstück	23 mm
Einmarkstück	25 mm
Zweimarkstück	27 mm

Diese Zahlen lassen sich leicht einprägen, da sie eine arithmetische Folge bilden. Legt man also ein Fünf- und ein Zehnpfennigstück aneinander, so ergibt sich eine Länge von 4 cm.



Ein Fünfzigpfennigstück und ein Zweimarkstück ergeben 5 cm, vier Einmarkstücke ergeben 1 dm = 10 cm. Weitere Kombinationen bleiben jedem selbst überlassen.

Zeichnet man die 4 cm-Strecke auf einem Blatt auf, faltet das Papier zweimal, so erhält man eine Strecke von 1 cm Länge.

Das müßte stimmen!? Foto: Harasim, Leipzig

Könnt ihr gut rechnen?

Gerechnet wird überall: in der Straßenbahn und im Geschäft, zu Hause, im Betrieb, im Büro und auf der Sparkasse. Die Arbeit des Konstrukteurs, der Maschinen entwirft, ist mit komplizierten Rechnungen verbunden ebenso wie die des Wissenschaftlers, der die Umlaufbahn eines künstlichen Erdtrabanten bestimmt.

In dem Maße wie die Methoden der wissenschaftlichen Untersuchungen vollkommener wurden, drang die numerische (d. h. rechnende) Mathematik immer mehr und tiefer in alle Gebiete der vielseitigen Tätigkeit des Menschen ein. Durch Berechnungen überprüfen der Astronom, der Ingenieur, der Gelehrte in den meisten Fällen seine wissenschaftlichen Voraussagen, bestätigt oder widerlegt sie und damit die aufgestellten Hypothesen. Die weisen Worte von Leibniz „Wir wollen nicht streiten, sondern rechnen" gelten heute genauso wie vor vielen Jahren. Schon immer suchten und fanden die Menschen mit viel Scharfsinn verschiedene Hilfsmittel, die ihnen die Rechenarbeit erleichterten. In verhältnismäßig kurzer Zeit entwickelte sich die Rechentechnik vom Abakus über Rechentafeln, wie sie schon in der Schule benutzt wurden, über Rechenstab und Tischrechenmaschinen zu den modernen elektronischen Rechenautomaten. Es wurden große Rechenzentren, gewissermaßen Fabriken, in denen maschinell gerechnet wird, eingerichtet — in denen wunderbare „denkende" Maschinen die Arbeit von Hunderten von Rechnern übernommen haben.

Man könnte auf den Gedanken kommen, die vielen Rechenhilfsmittel würden das übliche einfache Rechnen, insbesondere das Kopfrechnen, überflüssig machen, und man könne darauf verzichten. Das aber wäre ein ganz großer Irrtum. So nützlich die verschiedensten Hilfsmittel auch sind, sie vermögen bei weitem nicht allen Anforderungen zu genügen, die im bezug auf das Rechnen in unserem Privatleben oder bei der täglichen Arbeit von uns gestellt werden. Genau wie der Arbeiter an der modernsten Universal-Werkzeugmaschine ab und zu einmal nach Hammer und Meißel greifen muß, kann auch der Rechner trotz Tabellen und Rechengeräten nicht ohne gelegentliches einfaches Rechnen auskommen. Mehr noch, sehr oft besteht gerade die zweckmäßigste und zuverlässigste Art des Rechnens in einem Zusammenspiel von Rechnungen mit einem Gerät und Hilfsrechnungen im Kopf. Will man eine gewisse Fertigkeit im Kopfrechnen erlangen, so muß man zunächst eine häufig zu beobachtende Scheu vor Rechnungen und Umformungen, die im Kopf auszuführen sind, überwinden. Man muß ständig üben und Erfahrungen sammeln. Übung und Freude am Kopfrechnen sind das Unterpfand des Erfolges. Gerade diese Faktoren erziehen zu jener Konzentration der Aufmerksamkeit, jenem schnellen Erfassen von Zusammenhängen, jener Beharrlichkeit und Freudigkeit, ohne die ein erfolgreiches Kopfrechnen undenkbar ist. Großen Nutzen können auch die Kenntnisse allgemeiner Prinzipien und spezieller Methoden bringen.

Prof. G. Ju. Germanowitsch (aus: Bausteine des Wissens, Mathematik, Band I)

LVZ dankt auch im Namen ihrer Autoren, Studienrat Johannes Lehmann, Walter Unze, Oberstudienrat Dr. Rolf Lüders, den Mitgestaltern dieser Zeitung:

Techn. Zeichnungen: Brigitte Gubitz, Jungarbeiterin, VEB Fernmeldewerk Leipzig

Satz: Rosmarie Dienelt, Ingrid Koch, Beate Strobel, Jungarbeiterinnen, Buchdruckerei Frankenstein KG, Leipzig

Diplomwirtschaftlerin Renate Hellige und Kollektiv, Staatl. Zentralstelle für Statistik, Kreisstelle Leipzig-Stadt

Vignetten: Hans-Joachim Jordan, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 607 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik. Druck: LVZ-Druckerei „Hermann Dunker", Leipzig
III-18-138


80·80-3·3=
6391
„---!"
REDAKTION
mathe
LVZ
„...UND ICH HABE DEN VORTEIL!"
Rechen
„Vorteile"
meint JOCHEN JORDAN
KINDERGRÖSSEN
„3 KOGNAK, 7 BIER UND IHRE FAHRERLAUBNIS BITTE!"
„...DER IST VORTEILHAFT, ER PASST WENIGSTENS NOCH IM NÄCHSTEN JAHR!"
„KOMISCH! LAUT MATHE-LVZ HABEN WIR DIE RICHTIGE FLUGHÖHE!"
LEIPZIG 20
LEIPZIG 2□km
TEMPO TEMPO, NUR NOCH 2 Km
„---!"