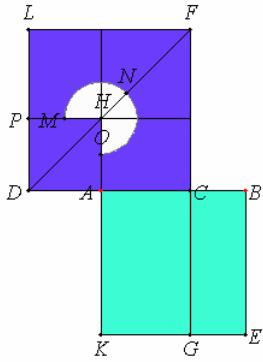


XIII. Buch



§ 1 (L. 1)

Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr größerer Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte.

Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Man setze an CA eine gerade Linie AD gerade an und mache $AD = \frac{1}{2} AB$. Ich behaupte, dass $CD^2 = 5 DA^2$.
Man zeichne über AB, DC die Quadrate AE, DF (I, 46), zeichne in DF die (übliche, I, 43) Figur fertig und ziehe FC bis G durch. Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist CE, und AC^2 ist FH, also Parallelogramm CE = FH. Da $BA = 2 AD$, $BA = KA$, $AD = AH$, so ist $KA = 2 AH$. Nun ist $KA : AH = \text{Parallelogramm } CK : CH$ (VI, 1), also Parallelogramm $CK = 2 CH$; aber auch Parallelogramm $LH + HC = 2 CH$ (I, 43); also Parallelogramm $CK = LH + HC$. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm $CE = HF$; also das ganze Quadrat AE = Gnomon MNO. Da $BA = 2 AD$, ist $BA^2 = 4 AD^2$ (II, 4), d.h. Quadrat AE = 4 DH. Aber AE = Gnomon MNO, also Gnomon MNO = 4 AP, also das ganze Quadrat DF = 5 AP. Nun ist DF aber DC^2 , und AP ist DA^2 ; also $CD^2 = 5 DA^2 - S$.

§ 1a Analysis und Synthesis

Was ist eine Analysis und was eine Synthesis? Eine Analysis ist die Zugrundelegung des Gefragten als anerkannt um seiner auf anerkannt Wahres führenden Folgerungen willen. Eine Synthesis ist die Zugrundelegung des Anerkannten um seiner auf Vollendung oder Ergreifung des Gefragten führenden Folgerungen willen.

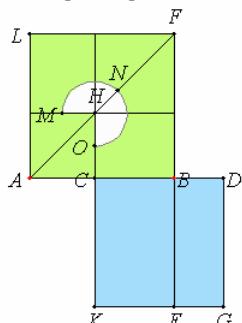
Analysis und Synthesis ohne Figur zu Satz 1.

Die Strecke AB sei in C stetig geteilt. AC sei der größere Abschnitt. Man mache $AD = \frac{1}{2} AB$. Ich behaupte, dass $CD^2 = 5 AD^2$.

Wenn $CD^2 = 5 AD^2$, während $CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2 CA \cdot AD$ (II, 4), so muss sein $CA^2 + AD^2 + 2 CA \cdot AD = 5 AD^2$, also, getrennt, $CA^2 + 2 CA \cdot AD = 4 AD^2$. Aber $2 CA \cdot AD = BA \cdot AC$, weil $BA = 2 AD$. Und $AC^2 = AB \cdot BC$; denn AB ist stetig geteilt (VI, Definition 3; VI, 17). Also muss sein $BA \cdot AC + AB \cdot BC = 4 AD^2$. Aber $BA \cdot AC + AB \cdot BC = AB^2$ (II, 2). Also muss sein $AB^2 = 4 AD^2$; und das ist richtig, weil $AB = 2 AD$.

Synthesis. Da $AB^2 = 4 AD^2$ und $BA^2 = BA \cdot AC + AB \cdot BC$, ist $BA \cdot AC + AB \cdot BC = 4 AD^2$. Aber $BA \cdot AC = 2 DA \cdot AC$ und $AB \cdot BC = AC^2$. Also ist $AC^2 + 2 DA \cdot AC = 4 DA^2$, folglich $DA^2 + AC^2 + 2 DA \cdot AC = 5 DA^2$. Aber $DA^2 + AC^2 + 2 DA \cdot AC = CD^2$; also $CD^2 = 5 DA^2 - q.e.d.$

§ 2 (L. 2)



Wird quadriert eine Strecke fünfmal so groß wie ein Abschnitt von ihr, dann ist, wenn man das Doppelte des genannten Abschnittes stetig teilt, der größere Abschnitt der Rest der ursprüngliche Strecke.

Quadriert weder die Strecke AB fünfmal so groß wie ihr Abschnitt AC, und es sei $2 AV = CD$. Ich behaupte, dass CB der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke CD ist.

Man zeichne über beider Strecken AB, CD die Quadrate AF, CG, zeichne in AF die Figur fertig und ziehe BE durch. Da $BA^2 = 5 AC^2$, ist Quadrat AF = 5 AH, also Gnomon MNO = 4 AH. Da $DC = 2 CA$, ist $DC^2 = 4 CA^2$, d.h.

Quadrat CG = 4 AH. Wie bewiesen, ist Gnomon MNO = 4 AH; also Gnomon MNO = CG. Da $DC = 2 CA$ und $DC = CK$, $AC = CH$ also $KC = 2 CH$, ist Parallelogramm $KB = 2 BH$ (VI, 1). Aber auch Parallelogramm $LH + HB = 2 HB$ (I, 43), also Parallelogramm $KB = LH + HB$. Wie bewiesen, ist der ganze Gnomon MNO = dem ganzen Quadrat CG, also auch Restquadrat HF = BG. BG ist nun $CD \cdot DB$, weil $CD = DG$, und HF ist CB^2 . Also ist $CD \cdot DB = CB^2$, also $DC : CB = CB : BD$ (VI, 17). Hier ist $DC > CB$, also $CB > BD$ (V, 14). CB ist also von der stetig geteilten (VI, Definition 3) Strecke CD der größere Abschnitt – S.

§ 3 (L. 3)

Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr kleinerer Abschnitt, wenn man die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts.

Eine Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt, und AC sei in D halbiert. Ich behaupte, dass $DB^2 = 5 DC^2$.

Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Doppelfigur fertig.

Da $AC = 2 DC$, ist $AC^2 = 4 DC^2$, d.h. Quadrat RS = 4 FG. Da $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17), $AB \cdot BC$ aber CE ist, AC^2 dabei RS, ist

Parallelogramm CE = RS. Aber Quadrat RS = 4 FG, also Parallelogramm CE = 4 FG. Ebenso ist, da AD = DC, HK = KF (I, 34), folglich Quadrat GF = Quadrat HL. Also ist GK = KL, d.h. MN = NE, folglich Parallelogramm MF = FE (I, 36). Aber Parallelogramm MF = CG (I, 43), also Parallelogramm CG auch = FE. Man füge beiderseits CN hinzu; dann ist Gnomon OPQ = CE. Wie oben bewiesen, ist aber Parallelogramm CE = 4 GF, also Gnomon OPQ = 4 GF, also Gnomon OPQ + GF = 5 GF. Gnomon OPQ + GF ist aber Quadrat DN. Und DN ist DB^2 , GF ist DC^2 . Also ist $DB^2 = 5 DC^2$ - q.e.d.

§ 4 (L. 4)

Teilt man eine Strecke stetig, so werden die beiden Quadrate über der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt zusammen dreimal so groß wie das Quadrat über dem größeren Abschnitt.

Man habe eine Strecke AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass $AB^2 + BC^2 = 3 CA^2$. Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig.

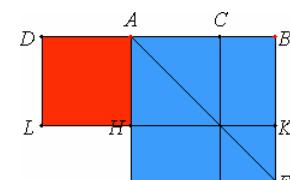
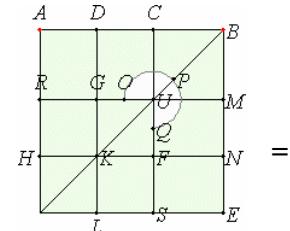
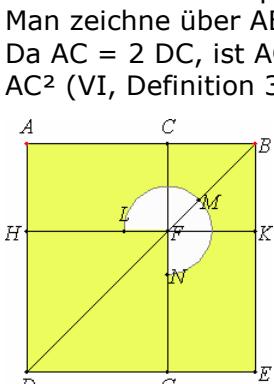
Da AB in C stetig geteilt ist, AC der größere Abschnitt, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist nun AK, und AC^2 ist HG; also Parallelogramm AK = HG. Hier ist Parallelogramm AF = FE (I, 43); man füge CK beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm AK = dem ganzen CE, also Parallelogramm AK + CE = 2 AK. AK + CE bilden aber Gnomon LMN + Quadrat CK; also ist Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 AK. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm AK = HG; also Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 HG, folglich Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = 3 Quadrat HG. Nun ist Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = ganzes Quadrat AE + CK, d.h. $AB^2 + BC^2$, GH dabei AC^2 . Also ist $AB^2 + BC^2 = 3 AC^2$ - q.e.d.

§ 5 (L. 5)

Teilt man eine Strecke stetig und setzt ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche an, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und größerer Abschnitt ist die Ausgangsstrecke.

Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt und $AD = AC$. Ich behaupte, dass die Strecke DB in A stetig geteilt ist und größerer Abschnitt die Ausgangsstrecke AB.

Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Figur fertig (wie II, 6). Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist hier CE, und AC^2 ist CH; also Parallelogramm CE = CH. Aber Parallelogramm CE = HE (I, 43) und Quadrat HC = DH (I, 36); also Quadrat DH = HE. Man füge HB beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm DK = dem ganzen AE. DK ist nun $BD \cdot DA$, weil $AD = DL$; und AE ist AB^2 . Also ist $BD \cdot DA = AB^2$; also $DB : BA = AD : DA$ (VI, 17). Hier ist $DB > BA$; also auch $BA > AD$ (V, 14). Also ist DB in A stetig geteilt, AB der größere Abschnitt – q.e.d.



§ 6 (L. 6)

Teilt man eine rationale Strecke stetig, so wird jeder ihrer Abschnitte eine Irrationale, wie man sie Apotome nennt.

Man habe eine Rationale (X, Definition 3) AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass sowohl AC als CB eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73; Definition) nennt. Man verlängere BA und mache $AD = \frac{1}{2} BA$.

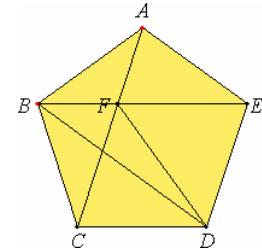
Da die Strecke AB in C stetig geteilt ist und AC, dem größeren Abschnitt, $AD = \frac{1}{2} AB$ hinzugefügt, ist $CD^2 = 5 DA^2$ (XIII, 1). Also verhält sich CD^2 zu DA^2 wie eine Zahl zu einer Zahl, CD^2 ist mit DA^2 kummensurabel (X, 6). Nun ist DA^2 rational (X, Definition 4); denn DA ist als Hälfte der Rationalen AB rational. Also ist CD^2 rational, also auch CD rational. Da CD^2 zu DA^2 aber kein Verhältnis hat wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (vgl. VIII, 11 Anm.), ist CD mit DA linear inkommensurabel (X, 9). CD, DA sind also nur quadriert kummensurable (X, Definition 2) rationale Strecken; also AC eine Apotome (X, 73; Definition).

Zweitens ist, da AB stetig geteilt, AC der größere Abschnitt ist, $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). Legt man also das Quadrat über der Apotome AC an die Rationale AB an (I; 44), so entsteht als Breite BC. Legt man aber das Quadrat einer Apotome an die Rationale an, so entsteht als Breite eine Erste Apotome (X, 97).

Also ist CB eine Erste Apotome (X, 84a: Definition). Wie bewiesen, ist auch CA eine Apotome – S.

§ 7 (L. 7)

Sind in einem gleichseitigen Fünfeck drei aufeinanderfolgende oder nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein.



Im gleichseitigen Fünfeck ABCDE seien drei Winkel, zunächst die aufeinanderfolgenden bei A, B, C einander gleich. Ich behaupte, dass das Fünfeck ABCDE gleichwinklig ist. Man ziehe AC, BE, FD.

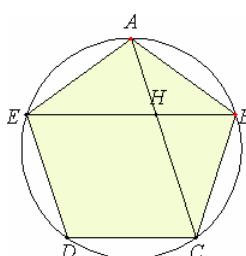
Da zwei Seiten CB, BA zwei Seiten BA, AE entsprechend gleich sind und $\angle CBA = \angle BAE$, ist Grundlinie AC = Grundlinie BE, $\triangle ABC = \triangle ABE$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkel gleichen, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $\angle BCA = \angle BEA$ und $\angle ABE = \angle CAB$ (I, 4), so dass auch die Seite AF = Seite BF (I, 6). Wie bewiesen, sind auch die ganzen Strecken AC = BE; also Rest FC = Rest FE. Aber auch CD = DE. Zwei Seiten FC, CD sind also zwei Seiten FE, ED gleich; ferner ist ihnen die Grundlinie FD gemeinsam. Also ist $\angle FCD = \angle FED$ (I, 8). Wie bewiesen, ist auch $\angle BCA = \angle AEB$; also die ganzen $\angle BCD = \angle AED$. Nach Voraussetzung ist $\angle BCD = \angle A$ und $\angle B$. Also auch $\angle AED = \angle A$ und $\angle B$. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $\angle CDE = \angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Fünfeck ABCDE ist also gleichwinklig.

Nunmehr seien nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, sondern die bei den Punkten A, C, D seien gleich. Ich behaupte, dass auch dann Fünfeck ACBDE gleichwinklig ist. Man ziehe BD.

Da zwei Seiten BA, AE zwei Seiten BC, CD gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie BD, $\triangle ABE = \triangle BCD$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkel gleichen, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4), also $\angle AEB = \angle CDB$. Aber auch $\angle BED = \angle BDE$ (I, 5), weil Seite BE = Seite BD. Also sind auch die ganzen $\angle AED = \angle CDE$. Nach Voraussetzung ist aber $\angle CDE = \angle A$ und $\angle C$; also auch $\angle AED = \angle A$ und $\angle C$. Aus demselben Grunde ist auch $\angle ABC = \angle A$, $\angle C$, $\angle D$; also ist Fünfeck ABCDE gleichwinklig – q.e.d.

§ 8 (L. 8)

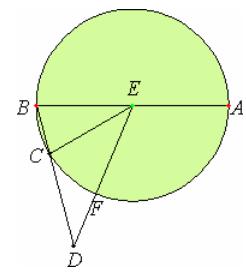
Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkel gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihr größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.



Im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck ABCDE mögen den beiden aufeinanderfolgenden Winkel bei A und B die Diagonalen AC, BE, die einander im Punkte H schneiden, gegenüberliegen. Ich behaupte, dass sie beide im Punkte H stetig geteilt werden und dass ihre größeren Abschnitte der Fünfeckseite gleich sind.

Man beschreibe dem Fünfeck ABCDE den Kreis ABCDE um (IV, 14). Da zwei Strecken EA, AB zwei Seiten AB, BC gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie AC, $\triangle ABE = \triangle ABC$, und die

übrigen Winkel sind den übrigen Winkel entsprechend gleich, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4). Also ist $\angle BAC = ABE$; also $\angle AHE = 2 \angle BAH$ (I, 32). Aber auch $\angle EAC = 2 \angle BAC$, da Bogen $EDC = 2$ Bogen CB (III, 28; VI, 33). Also ist $\angle HAE = AHE$, folglich Strecke $HE = EA$, d.h. $= AB$ (I, 6). Da Strecke $BA = AE$, ist auch $\angle ABE = AEB$ (I, 5). Wie bewiesen, ist aber $ABE = BAH$; also $BEA = BAH$. Und $\angle ABE$ ist beiden Dreiecken ABE und ABH gemeinsam. Also sind auch die dritten $\angle BAE = AHB$ (I, 32), $\triangle ABE$ also mit $\triangle ABH$ winkelgleich. Also stehen in Proportion $EB : BA = AB : BH$ (VI, 4). Aber $BA = EH$; also $BE : EH = EH : HB$. Hier ist $BE > EH$, also $EH > HB$ (V, 14). Strecke HE ist also in H stetig geteilt (VI, Definition 3), und der größere Abschnitt HE ist der Fünfeckseite gleich. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch AC in H stetig geteilt ist und sein größerer Abschnitt CH der Fünfeckseite gleich – q.e.d.



§ 9 (L. 9)

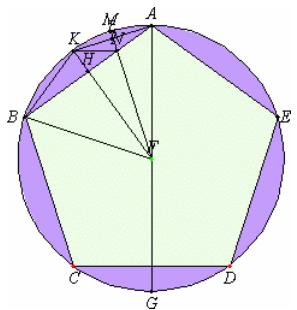
Fügt man die Seiten des demselben Kreise einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und ihr größerer Abschnitt ist die Sechseckseite.

Man habe den Kreis ABC , und von den dem Kreise ABC einbeschriebenen Figuren sei BC die Seite des Zehnecks und CD die des Sechsecks, und sie mögen einander gerade fortsetzen. Ich behaupte, dass die Summenstrecke BD stetig geteilt ist, CD ihr größerer Abschnitt.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt E des Kreises, ziehe EB , EC , ED und ziehe BE nach A durch. Da BC die Seite des gleichseitigen Zehnecks ist, ist Bogen $ACB = 5$ Bogen BC (III, 28), also Bogen $AC = 4$ Bogen CB . Nun ist Bogen $AC : CB = \angle AEC : CEB$ (VI, 33). Also ist $\angle AEC = 4 \angle CEB$. Da $\angle EBC = ECB$ (I, 5), ist $\angle AEC = 2 \angle ECB$ (I, 32). Da ferner Strecke $EC = CD$, weil beide der Seite des dem Kreise ABC einbeschriebenen Sechsecks gleich sind (IV, 15 Zusatz), ist auch $\angle CED = \angle CDE$ (I, 5), also $\angle ECB = 2 \angle EDC$ (I, 32). Wie oben bewiesen, ist aber $AEC = 2 \angle ECB$; also $AEC = 4 \angle EDC$. Wie auch schon bewiesen, ist $AEC = 4 \angle BEC$; also ist $EDC = BEC$. Und den beiden Dreiecken BEC , BED ist $\angle EBD$ gemeinsam; also auch Rest $\angle BED = ECB$ (I, 32), also $\triangle EBD$ dem $\triangle ECB$ winkelgleich. Also stehen in Proportion $DB : BE = EB : BC$ (VI, 4). Nun ist $EB = CD$, also $BD : DC = DC : CB$. Hier ist $BD > DC$, also auch $DC > CB$ (V, 14). Die Strecke BD ist also in C stetig geteilt (VI, Definition 3), DC ihr größerer Abschnitt – q.e.d.

§ 10 (L. 10)

Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird quadriert die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seiten des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen.

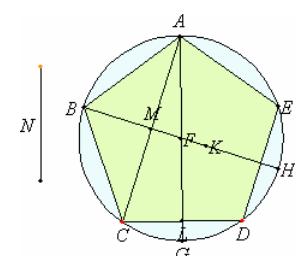


Man habe den Kreis $ABCDE$; dem Kreise $ABCDE$ sei das gleichseitige Fünfeck $ABCDE$ einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert die Seite des Fünfecks $ABCDE$ ebenso groß wird wie die Sehne des Sechsecks und des Zehnecks, die sich dem Kreise $ABCDE$ einbeschreiben lassen, zusammen.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF und ziehe es durch zum Punkte G , ziehe FB , falle von F auf AB das Lot FH und ziehe es nach K durch. Ferner ziehe man AK , KB und falle wieder von F auf AK das Lot FL , ziehe es nach M durch und ziehe KN . Da Bogen $ABCG =$ Bogen $AEDG$, hierin $ABC = AED$ (III, 28), sind die Restbogen $CG = GD$. CD gehört aber zum Fünfeck, CG also zum Zehneck. Da weiter $FA = FB$ und FH das Lot, ist $\angle AFK = KFB$ (I, 5, 32), folglich auch Bogen $AK = KB$ (III, 26), also Bogen $AB = 2$ Bogen BK , also Strecke AK die Zehneckseite. Aus demselben Grunde ist auch Bogen $AK = 2$ KM.

Da Bogen $AB = 2$ Bogen BK , während Bogen $CD =$ Bogen AB , ist auch Bogen $CD = 2$ Bogen BK . Aber Bogen CD ist auch $= 2$ CG; also Bogen $CG =$ Bogen BK . Bogen BK ist aber $= 2$ KM, da KA es ist; also Bogen $CG = 2$ KM. Aber auch Bogen $CB = 2$ BK, weil Bogen $CB = BA$; also ist auch der Summenbogen $GB = 2$ BM, folglich $\angle GFB = 2 \angle BFM$ (VI, 33).

Nun ist aber auch $\angle GFB = 2 \angle FAB$ (I, 32), weil $FAB = ABF$; also $\angle BFN = \angle FAB$. Den beiden Dreiecken ABF , BNF ist aber $\angle ABF$ gemeinsam. Also sind die dritten $\angle AFB = BNF$ (I, 32). $\triangle ABF$ ist also mit $\triangle BNF$



winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke AB : BF = FB : BN (VI, 4); also ist $AB \cdot BN = BF^2$ (VI, 17). Ebenso ist, da AL = LK und LN gemeinsam ist, dabei rechte Winkel bildet, Grundlinie KN = Grundlinie AN und $\angle LKN = \angle LAN$ (I, 4). Aber $\angle LAN = \angle KBN$ (III, 28; I, 5), also ist auch $\angle LKN = \angle KBN$. Und beiden Dreiecken AKB, AKN ist der Winkel bei A gemeinsam; also sind die dritten $\angle AKB = \angle KNA$ (I, 32); also ist $\triangle KBA$ mit $\triangle KNA$ winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke BA : AK = KA : AN (VI, 4); also ist $BA \cdot AN = AK^2$ (VI, 17). Wie oben bewiesen, ist aber $AB \cdot BN = BF^2$. Also ist $AB \cdot BN + BA \cdot AN$, d.h. (II, 2) $BA^2 = BF^2 + AK^2$. Hier ist BA die Seite des Fünfecks, BF die des Sechsecks (IV, 15 Zusatz) und AK die des Zehnecks. Quadriert wird also die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die des Sechsecks und des Zehnecks, die demselben Kreise eingeschrieben sind, zusammen – q.e.d.

§ 11 (L. 11)

Beschreibt man einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.

Dem Kreise ABCDE, der die Rationale (X, Definition 3) zum Durchmesser hat, sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass die Seite des Fünfecks ABCDE eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76: Definition) nennt.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF, FB, verlängere sie zu den Punkten G, H, ziehe AC und trage $FK = \frac{1}{4} AF$ (VI, 9) ab. AF ist rational, also FK rational; auch BF ist rational; also die Summe BK rational (X, 15). Da weiter Bogen ACG = Bogen ADG und hierin $ABC = AED$ (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. Zieht man hier AD, so ergibt sich (I, 4), dass die Winkel bei L Rechte sind und $CD = 2 CL$. Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei M Rechte und $AC = 2 CM$. Da so $\angle ALC = \angle AMF$, beide Dreiecke ACL und AMF dabei $\angle LAC$ gemeinsam haben, sind die dritten $\angle ALC = \angle MFA$ (I, 32); $\triangle ALC$ ist also mit $\triangle AMF$ winkelgleich. Also stehen in Proportion $LC : CA = MF : FA$ (VI, 4), also auch, bei Verdoppelung der Vorderglieder, $2 LC : CA = 2 MF : FA$ (V, 24). Aber $2 MF : FA = MF : \frac{1}{2} FA$ (V, 15); also $2 LC : CA = MF : \frac{1}{2} FA$ (V, 11), also auch, bei Halbierung der Hinterglieder, $2 LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$. Hier ist $2 LC = DC$, $\frac{1}{2} CA = CM$, $\frac{1}{4} FA = FK$; also $DC : CM = MF : FK$. Also ist, verbunden, $(DC + CM) : CM = MK : KF$ (V, 18), also auch $(DC + CM)^2 : CM^2 = KM^2 : KF^2$ (VI, 22).

Da nun, wenn man die zwei Seiten des Fünfecks gegenüberliegende Diagonalen, etwa AC, stetig teilt, der größere Abschnitt der Fünfeckseite, d.h. DC, gleich ist (XIII, 8), ferner der größere Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wird wie das Quadrat der Hälfte der ganzen Strecke (XIII, 1) und CM die Hälfte der ganzen Strecke AC ist, so ist $(DC + CM)^2 = 5 CM^2$.

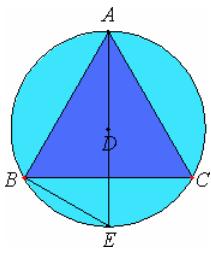
Wie bewiesen, ist aber $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$; also $MK^2 = 5 KF^2$ (V, Definition 5). Hier ist KF^2 rational, weil der Durchmesser rational ist. Also ist auch MK^2 rational (X, 6, Definition 4), also MK rational (X, Definition 3).

Da $BF = 4 FK$, ist $BK = 5 KF$; also $BK^2 = 25 KF^2$. Aber $MK^2 = 5 KF^2$; also $BK^2 = 5 KM^2$. BK^2 hat also zu KM^2 kein (VIII, 11 Anmerkung) Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl. Also ist BK mit KM linear inkommensurabel (X, 9). Beide Strecken sind rational; BK, KM sind also nur quadriert kummensurable rationale Strecken. Nimmt man aber von einer rationalen Strecke eine rationale weg, die der ganzen nur quadriert kummensurabel ist, dann ist der Rest irrational, eine Apotome (X, 73). Also ist MB eine Apotome, MK ihre Ergänzung. Ich behaupte weiter: eine Vierte Apotome (X, 84a Definition). Es sei $N^2 = BK^2 - KM^2$; BK übertrifft dann quadriert KM um N. Nun ist KF mit FB linear kummensurabel, auch, verbunden, KB mit FB linear kummensurabel (X, 15). BF ist aber BH linear kummensurabel, also BK mit BH linear kummensurabel (X, 12). Da nun $BK^2 = 5 KM^2$, ist $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$; also, umgewendet (V, Definition 16), $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, d.h. nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (VIII, 11 Anmerkung); also ist BK mit N linear inkommensurabel (X, 9). Quadriert übertrifft BK also um das Quadrat einer ihm inkommensurablen Strecke KM. Da hier die ganze Strecke BK um das Quadrat einer ihr inkommensurablen die Ergänzung KM übertrifft, während die ganze Strecke BK mit der zugrundeliegenden Rationalen BH linear kummensurabel ist, ist MB eine Vierte Apotome (C, 84 a Definition). Ein Rechteck, das von der Rationalen und einer Vierten Apotome umfasst wird, ist aber irrational und heißt eine Minor (X, 94). Da nun, wenn man AH zieht, $\triangle ABH$ mit $\triangle ABM$ winkelgleich (III, 31; VI, 8) wird, also $HB : BA = BM : AB$ (VI, 4), ergibt AB quadriert $HB \cdot BM$ (VI, 17).

Also ist AB, die Fünfeckseite, eine Irrationale, wie man sie Minor nennt. – q.e.d.

§ 12 (L. 12)

Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck ein, so wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius des Kreises.

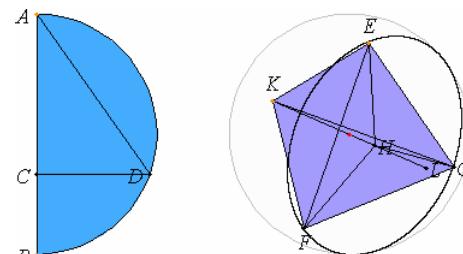


Man habe den Kreis ABC, ihm sei das gleichseitige Dreieck ABC einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert eine Seite des $\triangle ABC$ dreimal so groß wird wie der Radius des Kreises ABC.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt D des Kreises ABC, ziehe AD, verlängere es nach E und ziehe BE.

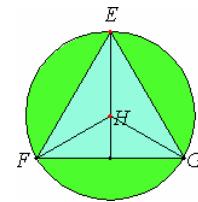
Da $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist Bogen BEC ein Drittel des Umfanges des Kreises ABC, Bogen BE also ein Sechstel des Kreisumfangs. Strecke BE gehört also zum Sechseck, ist also dem Radius DE gleich. Da $AE = 2 \cdot DE$, ist $AE^2 = 4 \cdot DE^2$, d.h. $= 4 \cdot BE^2$. Nun ist $AE^2 = AB^2 + BE^2$ (III, 31; I, 47), also $AB^2 + BE^2 = 4 \cdot BE^2$; also, getrennt, $AB^2 = 3 \cdot BE^2$. Aber $BE = DE$; also $AB^2 = 3 \cdot DE^2$. Also wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius – q.e.d.

§ 13 (A. 1)
Eine Pyramide zu errichten und mit einer gegebenen Kugel zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb so groß wird wie die Pyramidenkante.



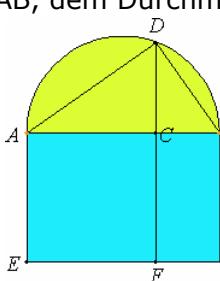
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass $AC = 2 \cdot CB$ (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in Punkt C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DA. Ferner lege man den Kreis EFG hin, dessen Radius $= DC$ sei, und beschreibe den Kreis EFG das gleichseitige Dreieck EFG ein (IV, 15). Man verschaffe sich den Mittelpunkt H des Kreises und ziehe EH, HF, HG. Weiter errichte man in H auf der Ebene des Kreises EFG die Senkrechten HK (XI, 12), trage auf HK die Strecke $HK = AC$ ab und ziehe KE, KF, KG.

Da KH auf der Ebene des Kreises EFG senkrecht steht, bildet es mit allen es treffenden geraden Linien, die in der Ebene des Kreises EFG liegen, rechte Winkel (XI, Definition 3). HE, HF, HG treffen es alle, also ist $HK \perp$ sowohl HE als HF als HG. Da $AC = HK$, $CD = HE$ und sie rechte Winkel umfassen, ist Grundlinie DA = Grundlinie KE (I, 4). Aus demselben Grund sind auch KF und KG beide $= DA$. KE, KF, KG sind also alle drei einander gleich. Da $AC = 2 \cdot CB$, ist $AB = 3 \cdot BC$. Aber wie hernach gezeigt werden soll (siehe Hilfssatz) $AB : BC = AD^2 : DC^2$; also ist $AD^2 = 3 \cdot DC^2$. Aber auch $FE^2 = 3 \cdot EH^2$ (XIII, 12) und $DC = EH$; also $DA = EF$. Wie bewiesen, ist aber $DA =$ sowohl KE als KF als KG. Von den Strecken EF, FG, GE ist jede jeder der Strecken KE, KF, KG gleich. Die vier Dreiecke EFG, KEF, KFG, KEG sind also gleichseitig. So hat man aus vier gleichseitigen Dreiecken die Pyramide errichtet, deren Grundfläche $\triangle EFG$ und deren Spitze Punkt K ist.



Weiter soll man sie mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser $1 \frac{1}{2}$ mal so groß wird wie die Pyramidenkante. Man setze die gerade Linie HL an KH gerade an und mache $HL = CB$.

Da $AC : CD = CD : CB$ (VI, 8 Zusatz), $AC = KH$, $CD = HE$, $CB = HL$, ist $KH : HE = EH : HL$, also $KH \cdot HL = EH^2$ (VI, 17). $\angle KHE$ und EHL sind dabei beide Rechte. Also muss der Halbkreis, den man über KL zeichnete, auch durch E gehen, da, wenn man EL zieht, $\angle LEK$ ein Rechter wird, weil $\triangle ELK$ sowohl mit $\triangle ELH$ als EHK winkelgleich wird (VI, 8; III, 31). Mithin muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während KL fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G gehen, da, wenn man FL, LG zieht, ähnlich auch die Winkel bei F und G Rechte werden. So wäre die Pyramide mit der gegebenen Kugel umschlossen. Denn der Durchmesser KL der Kugel ist $= AB$, dem Durchmesser der gegebenen Kugel, da man $KH = AC$ und $HL = CB$ gemacht hat.



Ich behaupte weiter, dass quadriert der Kugeldurchmesser $1 \frac{1}{2}$ mal so groß wird wie die Pyramidenkante.

Da $AC = 2 \cdot CB$, ist $AB = 3 \cdot BC$. Umgewendet ist also $BA = 1 \frac{1}{2} \cdot AC$. Aber $BA : AC = BA^2 : AD^2$, da, wenn man DB zieht, $BA : AD = DA : AC$ (VI, 4), weil $\triangle DAB \sim \triangle DAC$ (VI, 8) und das erste Glied sich zum dritten verhält wie das Quadrat des ersten um Quadrat des zweiten (VI, 19 Zusatz). Also ist $BA^2 = 1 \frac{1}{2} \cdot AD^2$. Hier ist BA der Durchmesser der gegebenen Kugel und AD der

Pyramidenkante gleich. Also wird quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb mal so groß wie die Pyramidenkante – q.e.d.

Hilfssatz: Man muss noch zeigen, dass $AB : BC = AD^2 : DC^2$.

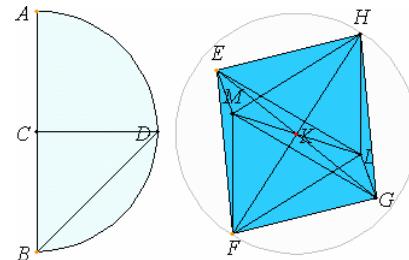
Man gehe von der Zeichnung des Halbkreises aus, ziehe DB, zeichne über AC das Quadrat EC und ergänze Parallelogramm FB.

Da, weil ΔDAB mit ΔDAC winkelgleich ist (VI, 8), $BA : AD = DA : AC$ (VI, 4), ist $BA \cdot AC = AD^2$ (VI, 17). Da $AB : BC = \text{Parallelogramm } EB : BF$ (VI, 1), hier EB aber $BA \cdot AC$ ist wegen $EA = AC$, BF aber $AC \cdot CB$, so ist $AB : BC = BA \cdot AC : AC \cdot CB$. Nun ist $BA \cdot AC = AD^2$, und $AC \cdot CB = DC^2$, weil das Lot DC zwischen den Abschnitten AC, CB der Grundlinie Mittlere Proportionale ist (VI, 8 Zusatz), da $\angle ADB$ ein Rechter (III, 31). Also ist $AB : BC = AD^2 : DC^2$ – q.e.d.

§ 14 (A. 2)

Ein Oktaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die früheren Körper zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, halbiere ihn in C (I, 10), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB.

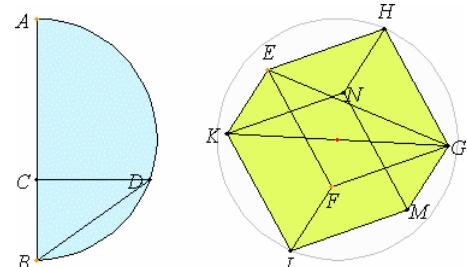


Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seiten alle = DB (I, 46), ziehe HF, EG und errichte im Schnittpunkt K auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechten KL (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als KM, trage sowohl auf KL als KM Strecken KL, KM = einer der Strecken EK, FK, GK, HK ab und ziehe LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH.

Da $KE = KH$ und $\angle EKH$ ein Rechter (IV, 9), ist $HE^2 = 2 EK^2$ (I, 47); ebenso ist, da $LK = KE$ und $\angle LKE$ ein Rechter (IX, Definition 3), $EL^2 = 2 EK^2$. Wie bewiesen, ist aber auch $HE^2 = 2 EK^2$; also $LE^2 = EH^2$, also $LE = EH$. Aus demselben Grunde ist auch $LH = HE$, also $\triangle LEH$ gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten des Quadrats EFGH und deren Spitzen die Punkte L, M sind, alle gleichseitig sind. So hat man das Oktaeder, das von 8 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet.

Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.

Da LK, KM, KE alle drei einander gleich sind, muss der Halbkreis, den man über LM zeichnete, auch durch E gehen. Aus demselben Grunde muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während LM fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G, H gehen. So wäre das Oktaeder mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen. Da nämlich $LK = KM$ und KE gemeinsam ist und sie rechte Winkel umfassen, ist



Grundlinie LE = Grundlinie EM (I, 4). Da $\angle LEM$ ein Rechter, weil er im Halbkreis liegt (III, 31), ist $LM^2 = 2 LE^2$ (I, 47). Ebenso ist, da $AC = CB$, $AB = 2 BC$. Aber $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also ist $AB^2 = 2 BD^2$. Wie bewiesen, ist $LM^2 = 2 LE^2$. Auch ist $DB^2 = LE^2$, da wir $EH = DB$ gemacht haben. Also ist $AB^2 = LM^2$, also $AB = LM$. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also LM dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.

Man hat also das Oktaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante – q.e.d.

§ 15 (A. 3)

Einen Würfel zu errichten und mit einer Kugel wie die Pyramide zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass $AC = 2 CB$ (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seite = DB sei (I, 46), errichte in E, F, G, H auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechten EK, FL, GM, HN (XI, 12), trage auf

allen geraden Linien EK, FL, GM, HN Strecken EK, FL, GM, HN, jede einer der Strecken EF, FG, GH, HE gleich, ab und ziehe KL, LM, MN, NK. So hat man den Würfel FN, der von 6 gleichen Quadraten umfasst wird, errichtet.

Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelseite. Man ziehe KG und EG.

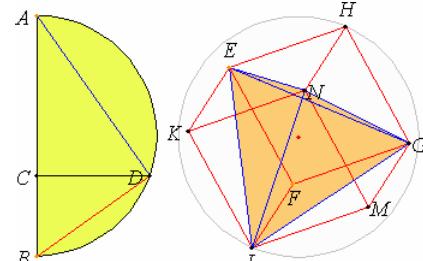
Da $\angle KEG$ ein Rechter, weil $KE \perp$ Ebene EG und natürlich auch \perp Strecke EG (XI, Definition 3), muss der Halbkreis, den man über KG zeichnete, auch durch Punkt E gehen (III, 31). Weil ebenso $GF \perp$ sowohl FL als FE, ist GF auch \perp Ebene FK

(XI, 4), so dass, wenn man FK zieht, auch $GF \perp FK$.

Deshalb muss der Halbkreis, den man über GK zeichnete, ebenso auch durch F gehen; und ähnlich muss er auch durch die übrigen Würfecken gehen. Bringt man mithin, während KG fest bleibt, den Halbkreis durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er ausging (XI, Definition 14), so muss der Würfel mit einer Kugel umschlossen sein; ich behaupte, mit der gegebenen. Da

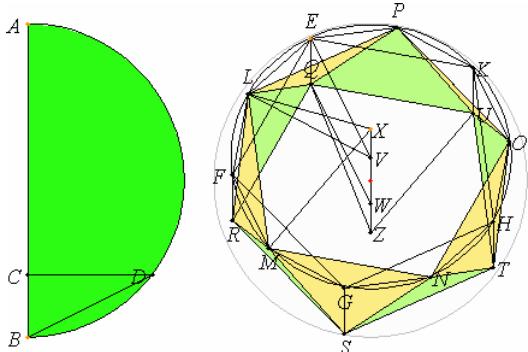
nämlich $GF = FE$ und der Winkel bei F ein Rechter, ist $EG^2 = 2 EF^2$ (I, 47). Aber $EF = EK$; also $EG^2 = 2 EK^2$, folglich $GE^2 + EK^2$, d.h. (I, 47) $GK^2 = 3 EK^2$. Da $AB = 3 BC$ und $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz), ist $AB^2 = 3 BD^2$. Wie bewiesen, ist auch $GK^2 = 3 KE^2$. KE haben wir aber $= DB$ gemacht; also ist $KG = AB$. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also KG dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.

Man hat also den Würfel mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelseite – q.e.d.



§ 16 (A. 4)

Ein Ikosaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt.



Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass $AC = 4 CB$ (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man den Kreis EFGHK hin, dessen Radius = DB sei, beschreibe dem Kreis EFGHK ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck EFGHK ein (IV, 11), halbiere den Bogen EF, FG, GH, HK, KE in den Punkten L, M, N, O, P (III, 30) und ziehe LM, MN, NO, OP, PL, EP; dann ist auch Fünfeck LMNOP gleichseitig und EP die Zehneckseite. Weiter errichte man in den Punkten E, F, G, H, K auf der Ebene des Kreises die Senkrechten EQ, FR, GS, HT, KU (XI, 12), die dem Radius des Kreises EFGHK gleich seien und ziehe QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ.

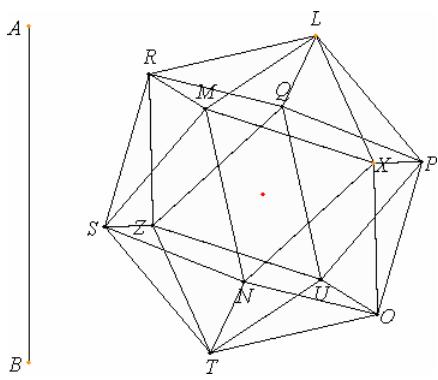
Da EQ, KU beide auf derselben Ebene senkrecht stehen, ist $EQ \parallel KU$ (XI, 6); ferner sind sie gleich. Strecken, welche gleich und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33); also ist auch QU = und $\parallel EK$. Nun ist EK Seite eines gleichseitigen Fünfecks, also auch QU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks. Aus demselben Grunde ist auch jede der Strecken QR, RS, ST, TU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks; Fünfeck QRSTU ist also gleichseitig. Ferner ist, da QE die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), EP die Zehneckseite und $\angle QEP$ ein Rechter ist (XI, Definition 3), QP (I, 47) die Fünfeckseite; denn (XIII, 10) quadriert wird die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seite des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen. Aus demselben Grunde ist auch PU die Fünfeckseite. Und QU ist eine Fünfeckseite; also ist $\triangle QPU$ gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch QLR, RMS, SNT, TOU alle gleichseitig. Da, wie bewiesen, jede der Strecken QL, QP die Fünfeckseite ist, auch LP aber eine Fünfeckseite, ist $\triangle QLP$ gleichseitig. Aus demselben Grund sind auch $\triangle LRM$, $\triangle MSN$, $\triangle NTO$, $\triangle OUP$ alle gleichseitig.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt V des Kreises EFGHK (III, 1), errichte in V auf der Ebene des Kreises die Senkrechte VY (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als VX, trage ab

eine Sechseckseite VW und Zehneckseiten sowohl VW als WY , und ziehe $QY, QW, UY, EV, LV, LX, XM$.

Da VW, QE beide auf der Ebene des Kreises senkrecht stehen, ist $VW \parallel QE$ (XI, 6); ferner sind sie gleich; also ist auch $EV =$ und $\parallel QW$ (I, 33). Nun ist EV die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), also auch QW die Sechseckseite. Da QW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, auch $\angle QWY$ ein Rechter (IX, 7, Definition 3; I, 29), so ist QY die Fünfeckseite (XIII, 10). Aus demselben Grunde ist auch UY die Fünfeckseite. Denn zieht man VK, WU , so sind sie gleiche gegenüberliegende Seiten, auch ist VK als Radius der Sechseckseite gleich; also ist WU die Sechseckseite; ferner ist WY die Zehneckseite und $\angle UWY$ ein Rechter; also UY die Fünfeckseite. Auch QU ist eine Fünfeckseite, also $\triangle QUY$ gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien QR, RS, ST, TU und der Spitze Y alle gleichseitig. Ebenso ist, da VL Sechseckseite, VX die Zehneckseite und $\angle LVX$ ein Rechter, LX die Fünfeckseite. Aus demselben Grund ergibt sich, wenn man MV , das die Sechseckseite ist, zieht, dass auch MX die Fünfeckseite ist. Auch LM ist eine Fünfeckseite; $\triangle LMX$ ist gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien MN, NO, OP, PL und der Spitze X alle gleichseitig sind. Man hat also das Ikosaeder, das von 20 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet.

Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76) nennt.



Da VW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, ist YV in W stetig geteilt, VW sein größerer Abschnitt (XIII, 9); also $YV : VW = VW : WY$ (VI, Definition 3). Nun ist $VW = VE$, $WY = VX$; also $YV : VE = EV : VX$; $\angle YVE, EVX$ sind hier Rechte. Zieht man also Strecke EY , dann muss $\angle XEY$ ein Rechter sein wegen $\triangle XEY \sim VEY$ (VI, 6; I, 32). Aus demselben Grunde ist, da $YV : VW = VW : WY$, $YV = XW$ und $VW = WQ$, $XW : WQ = QW : WY$; also muss, wenn man QX zieht, ebenso der Winkel bei Q ein Rechter sein. Der Halbkreis, den man über XY zeichnete, muss also auch durch Q gehen (III, 31). Bringt man den Halbkreis, während XY fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er

ausging (XIII, Definition 14), so muss er durch Q und die übrigen Ikosaederecken gehen, und das Ikosaeder wäre mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen.

Man halbiere VW in Z (I, 10). Da Strecke YV in W stetig geteilt ist, ihr kleinerer Abschnitt YW , wird YW , wenn man WZ , die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts (XIII, 3); also $YZ^2 = 5ZW^2$. Nun ist $2YZ = YX, 2ZW = VW$; also $YX^2 = 5VW^2$. Da nun $AC = 4CB$, ist $AB = 5BC$. Aber $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $AB^2 = 5BD^2$. Wie oben bewiesen, ist auch $YX^2 = 5VW^2$. Nun ist $DB = VW$, weil beide dem Radius des Kreises $EFGHK$ gleich sind. Also ist $AB = XY$. Nun ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; XY also dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich, das Ikosaeder ist also mit der gegebenen Kugel umschlossen.

Weiter behaupt ich, dass die Ikosaederseite eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und er quadriert fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises $EFGHK$, ist der Radius des Kreises $EFGHK$ rational, folglich auch sein Durchmesser rational (X, Definition 3). Wird aber einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben, so ist die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt (XIII, 11; X 105 Anmerkung). Die Seite des Fünfecks $EFGHK$ ist aber die Ikosaederkante; die Ikosaederkante ist also eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.

Zusatz: Hiernach ist klar, dass quadriert der Kugeldurchmesser fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert, und dass der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen – q.e.d.

§ 17 (A. 5)

Ein Dodekaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt.

Man lege zwei aufeinander senkrechte Flächen ABCD, CBEF des besprochenen Würfels (XIII, 15) hin, halbiere alle Kanten AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC in G, H, K, L, M, N, O ziehe GK, HL, MH, NO und teile die Strecken NP, PO, HQ alle stetig in den Punkten R, S, T (VI, 30); ihre größeren Abschnitte seien RP, PS, TQ. Ferner errichte man in den Punkten R, S, T auf den Würfelkanten vom Würfel nach außen die Senkrechten RU, SV, TW (XI, 12), mache sie den Strecken RP, PS, TQ gleich und ziehe UB, BW, WC, CV, VU. Ich behaupte, dass das Fünfeck UBWCV gleichseitig ist, in einer Ebene liegt und gleichwinklig ist.

Man ziehe RB, SB, VB.

Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, RP der größere Abschnitt, sind $PN^2 + NR^2 = 3 RP^2$ (XIII, 4). Hier ist $PN = NB$, $PR = RU$; also $BN^2 + NR^2 = 3 RU^2$. Aber $BN^2 + NR^2 = BR^2$ (I, 47); also $BR^2 = 3 RU^2$, folglich $BR^2 + RU^2 = 4 RU^2$. Aber $BR^2 + RU^2 = BU^2$ (I, 47); also $BU^2 = 4 UR^2$; also $BU = 2 RU$. Aber auch $VU = 2 UR$, da (I, 34) $SR = 2 PR$, d.h. $= 2 RU$. Also ist $BU = UV$. Ähnlich lässt sich zeigen, dass von den Strecken BW, WC, CV jede sowohl BU als UV gleich ist. Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig.

Ich behaupte weiter, dass es in einer Ebene liegt. Man ziehe durch P vom Würfel nach außen $PX \parallel RU$ und SV (I, 31) und ziehe XH , HW . Ich behaupte, dass die Linie XHW gerade ist. Da HQ in T stetig geteilt ist, QT sein größerer Abschnitt, ist $HQ : QT$

$= QT : TH$ (VI, Definition 3). Hier ist $HQ = HP$, $QT =$ sowohl TW als PX ; also $HP : PX = WT : TH$. Nun ist $HP \parallel TW$, weil beide \perp Ebene BD (XI, 6). Und $TH \parallel PX$, weil beide \perp Ebene BF . Setzt man aber zwei Dreiecke, wie XPH , HTW , in denen zwei Seiten mit zwei Seiten in Proportion stehen, mit einer Ecke so aneinander, dass ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so müssen die letzten Strecken einander gerade fortsetzen (VI, 32). XH setzt also HW gerade fort. Jeder gerade Linie liegt aber in einer Ebene (XI, 1). Das Fünfeck UBWCV liegt also in einer Ebene (XI, 2, 7).

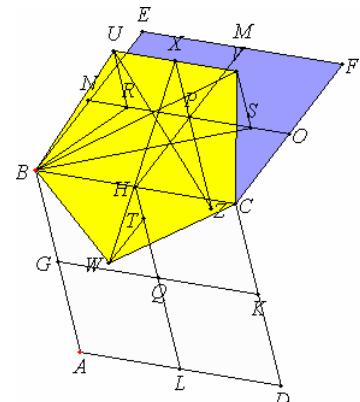
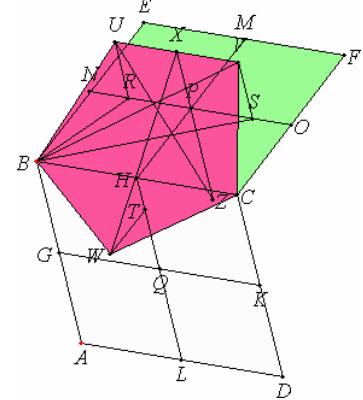
Ich behaupte weiter, dass es gleichwinklig ist.

Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, PR der größere Abschnitt und $PR = PS$, so ist NS in P stetig geteilt, NP der größere Abschnitt (XIII, 5); also $NS^2 + SP^2 = 3 NP^2$ (XIII, 4). Hier ist $NP = NB$, $PS = SV$; also $NS^2 + SV^2 = 3 NB^2$, folglich $VS^2 + SN^2 + NB^2 = 4 NB^2$. Nun ist $SN^2 + NB^2 = SB^2$ (I, 47); also $BS^2 + SV^2$, d.h. (I, 47) $BV^2 - \angle VSB$ ist je ein Rechter (XI, Definition 3) $- = 4 NB^2$; also $VB = 2 BN$. Aber auch $BC = 2 BN$; also $BV = BC$. Da hier zwei Seiten BU , UV zwei Seiten BW , WC gleich sind, auch Grundlinie BV = Grundlinie BC , ist $\angle BUV = \angle BWC$ (I, 8). Ähnlich lässt sich auch zeigen, dass auch $\angle UVC = BWC$. $\angle BWC$, BUV , UVC sind also alle drei einander gleich. Sind aber in einem gleichseitigen Fünfeck drei Winkel einander gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein (XIII, 7); Fünfeck BUVCW ist also gleichwinklig. Wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig und gleichwinklig und liegt dabei auf einer Würfelkante BC . Konstruiert man also auf jeder der 12 Würfelkanten ebenso, so muss ein Körper entstehen, der von 12 gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken umfasst wird, der Dodekaeder heißtt.

Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73) nennt. Man verlängere XP , es werde XY . PY trifft dann die Würfeldiagonale, und sie halbieren einander; dies ist nämlich im vorletzten Satz des XI. Buches (XI, 38) bewiesen. Sie mögen einander in Y schneiden; dann ist Y der Mittelpunkt der den Würfel umschließenden Kugel und YP die Hälfte der Würfelkante. Man ziehe UY .

Da die Strecke NS in P stetig geteilt ist, NP ihr größerer Abschnitt, sind $NS^2 + SP^2 = 3 NP^2$ (XIII, 4). Hier ist $NS = XY$, da $NP = PY$ und $XP = PS$. Aber $PS = XU$, da $= RP$; also $YX^2 + XU^2 = 3 NP^2$. Aber $YX^2 + XU^2 = UY^2$ (I, 47); also $UY^2 = 3 NP^2$. Aber auch der Radius der den Würfel umschließenden Kugel wird quadriert dreimal so groß wie die Hälfte der Würfelkante; denn wie man einen Würfel errichtet, ihn mit einer Kugel umschließt und zeigt, dass quadriert der Kugeldurchmesser

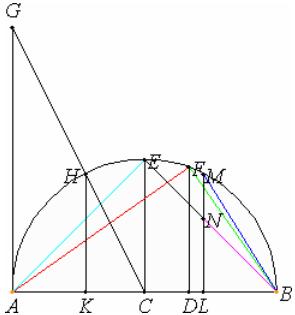
dreimal so groß wird wie die Würfelkante, ist früher (XIII, 15) gezeigt worden; wenn dies von den Ganzen gilt, gilt es auch von den Hälften. Hier ist NP die Hälfte der Würfelkante; also ist UY dem Radius der den Würfel umschließenden Kugel gleich. Y ist der Mittelpunkt der den



Würfel umschließenden Kugel; Punkt U liegt also auf der Kugelfläche. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch alle übrigen Dodekaederecken auf der Kugelfläche liegen. Man hat also das Dodekaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen.

Weiter behauptet ich, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt. Da RP der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NP ist, PS der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke PO, ist RS der größere Abschnitt der stetig geteilten ganzen Strecke NO. Da $NP : PR = PR : RN$, gilt entsprechendes auch etwa von den Doppelten; denn Teile haben dasselbe Verhältnis wie Gleichvielfache (V, 15). Also ist $NO : RS = RS : (NR + SO)$; hier ist $NO > RS$, also $RS > (NR + SO)$ (V, 14); NO ist also stetig geteilt, RS der größere Abschnitt. Nun ist $RS = UV$, also UV der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NO. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und quadriert dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15), ist NO als Würfelkante rational (X, Definition 3). Wird aber eine rationale Strecke stetig geteilt, so ist jeder ihrer Abschnitte irrational, eine Apotome (XIII, 6; Anmerkung). Die Strecke UV, welche die Dodekaederkante ist, ist also irrational, eine Apotome.

Zusatz: Hiernach ist klar, dass die Dodekaederkante der größere Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante ist – q.e.d.



§ 18 (A. 6) Die Kanten der Fünf Körper darzustellen und miteinander zu vergleichen.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass $AC = CB$, und in D so, dass $AD = 2 \cdot DB$, zeichne über AB den Halbkreis AEB, errichte in C und D auf AB die Senkrechten CE, DF und ziehe AF, FB, EB.

Da $AD = 2 \cdot DB$, ist $AB = 3 \cdot BD$, also umgewendet (V, Definition 16), $BA = 1 \frac{1}{2} \cdot AD$. Aber $BA : AD = BA^2 : AF^2$, weil $\triangle AFB$ mit $\triangle AFD$ winkelgleich ist (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $BA^2 = 1 \frac{1}{2} \cdot AF^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch anderthalbmal so groß wie die Pyramidenkante (XIII, 13). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also AF der Pyramidenkante gleich.

Ebenso ist, da $AD = 2 \cdot DB$, $AB = 3 \cdot BD$; und $AB : BD = AB^2 : BF^2$, also $AB^2 = 3 \cdot BF^2$. Quadriert wird aber der Kugeldurchmesser aber auch dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also BF die Würfelkante.

Ferner ist, da $AC = CB$, $AB = 2 \cdot BC$; und $AB : BC = AB^2 : BE^2$, also $AB^2 = 2 \cdot BE^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch zweimal so groß wie die Oktaederkante (XIII, 14). Und AB ist der Durchmesser der gegebenen Kugel; also BE die Oktaederkante.

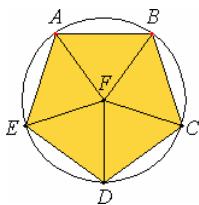
Weiter errichte man im Punkte A auf der geraden Linie AB die Senkrechte AG, mache $AG = AB$, ziehe GC und falle von H auf AB das Lot HK. Da $GA = 2 \cdot AC$, weil $GA = AB$, und $GA : AC = HK : KC$ (VI, 4), ist $HK = 2 \cdot KC$; also $HK^2 = 4 \cdot KC^2$; also $HK^2 + KC^2$, d.h. (I, 47) $HC^2 = 5 \cdot KC^2$. Hier ist $HC = CB$; also $BC^2 = 5 \cdot CK^2$. Da $AB = 2 \cdot CB$ und hierin $AD = 2 \cdot DB$, ist auch Rest $BD = 2 \cdot DC$, also $BC = 3 \cdot CD$, also $BC^2 = 9 \cdot CD^2$. Aber $BC^2 = 5 \cdot CK^2$; also $CK^2 > CD^2$, also $CK > CD$.

Man lege $CL = CK$ hin, errichte in L auf AB die Senkrechte LM und ziehe MB. Da $BC^2 = 5 \cdot CK^2$, $2 \cdot BC = AB$, $2 \cdot CK = KL$, ist $AB^2 = 5 \cdot KL^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch fünfmal so groß wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert (XIII, 16 Zusatz). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also KL des Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert; KL ist also die Sechseckseite im genannten Kreis (IV, 15 Zusatz). Und da der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich dem genannten Kreis einbeschreiben lassen (XIII, 16 Zusatz), AB aber der Kugeldurchmesser, KL Sechseckseite und $AK = LB$, ist sowohl AK als LB die Seite des Zehnecks, das sich dem Kreise einbeschreiben lässt, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert. Da hier LB die Zehneckseite ist und ML die Sechseckseite – denn es ist $= KL$, da $= HK$, weil sie vom Mittelpunkt gleichweit abstehen (III, 14), und HK, KL sind beide $= 2 \cdot KC$ – so ist MB die Fünfeckseite (XIII, 10). Die Fünfeckseite ist aber die Ikosaederkante (XIII, 16); also ist MB die Ikosaederkante. Da FB die Würfelkante ist, teile man es stetig in N, NB sei der größere Abschnitt (VI, 30); dann ist NB die Dodekaederkante (XIII, 17 Zusatz).

Da, wie bewiesen, quadriert der Kugeldurchmesser $1 \frac{1}{2}$ mal so groß wird wie die Pyramidenkante AF, 2 mal so groß wie die Oktaederkante BE und 3 mal so groß wie die Würfelkante FB, werden quadriert die Pyramidenkante 4 mal, die Oktaederkante 3 mal und die Würfelkante 2 mal so groß wie eine Größe, von der der Kugeldurchmesser quadriert das 6fache

wird. Quadriert wird also die Pyramidenkante $1 \frac{1}{3}$ mal so groß wie die Oktaederkante und 2 mal so groß wie die Würfelkante; und quadriert wird die Oktaederkante $1 \frac{1}{2}$ mal so groß wie die Würfelkante. Die Kanten der genannten drei Körper, nämlich Pyramide, Oktaeder und Würfel, stehen zueinander in rationalen (X, Definition 3) Verhältnissen. Die beiden anderen, nämlich die Kanten von Ikosaeder und Dodekaeder stehen weder zueinander (X, 111a) noch zu den oben genannten in rationalen Verhältnissen; denn sie sind irrational, die eine eine Minor (XIII, 16), die andere eine Apotome (XIII, 17).

Dass die Ikosaederkante $MB >$ die Dodekaederkante NB , lässt sich folgendermaßen zeigen. Da $\triangle FDB$ mit $\triangle FAB$ winkelgleich ist, stehen in Proportion $DB : BF = BF : BA$ (VI, 8, 4). Stehen aber drei Strecken in Proportion, dann verhält sich das Quadrat über der ersten zu dem über der zweiten wie die erste Strecke zur dritten (VI, 19 Zusatz); also $DB : BA = DB^2 : BF^2$, und, umgekehrt (V, Definition 13), $AB : BD = FB^2 : BD^2$. Hier ist $AB = 3 BD$, also $FB^2 = 3 BD^2$. Aber $AD^2 = 4 DB^2$, weil $AD = 2 DB$. Also ist $AD^2 > FB^2$, also $AD > FB$, um so mehr $AL > FB$. Teilt man AL stetig, so ist KL der größere Abschnitt, da ja LK die Sechseckseite und KA die Zehneckseite ist (XIII, 9). Teilt man aber FB stetig, so ist NB der größere Abschnitt. Also ist $KL > NB$ (V, 14). Nun ist $KL = LM$; also $LM > NB$. Und $MB > LM$ (I, 19). Um so mehr ist MB , die Ikosaederkante, $> NB$, die Dodekaederkante.



§ 18a

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks $2/3 R$. beträgt, würden die 6 zusammen $= 4 R.$; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen $< 4 R.$ (XI, 21). Aus demselben Grund lässt sich auch aus mehr als 6 solchen ebenen Winkeln keine Ecke errichten.

Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederseite umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks $1 \frac{1}{5} R.$ beträgt, würden die 4 Winkel zusammen $> 4 R.$; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine verwendbare Ecke umfasst werden – S.