A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 4.

"Darstellende Geometrie und Stereometrie"

zusammengestellt und bearbeitet von Dr. M. Dennert und Dr. E. Siory

Bereich Schulmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts der Humboldt-Universität zu Berlin

0. Einige Bemerkungen zur vorliegenden Aufgabensammlung aus dem Unterricht des betreffenden Stoffabschnitts:

Mit dem Abschnitt "Darstellende Geometrie und Stereometrie" des Lehrplans für Klasse 10 der Spezialschulen wird eine Weiterentwicklung des Wissens und Könnens der Schüler bezüglich geometrischer Darstellungsverfahren sowie Körperberechnungen angestrebt, die im Unterricht für Darstellende Geometrie und Stereometrie im Mathematikunterricht sowie im Fach Technisches Zeichnen der Klassen 7 und 8 der OS vermittelt wurden. Durchgängig sollte beispielsweise von Beginn des Unterrichts dieses Stoffabschnitts 4 das den Schülern bereits vertraute Darstellen von Figuren in einem Schrägbild mit $\alpha = 45^\circ$ und $q = \frac{1}{2}$ verwendet werden. Früher wurde in unserem Mathematikunterricht der OS im Zusammenhang damit von "Kavalierperspektive" gesprochen. Jetzt spricht man vereinfachend nur von einem "Schrägbild" (im technischen Zeichnen auch von "frontaldimetrischer Projektion"). Im Mathematikunterricht der Klasse 7 wird bereits auf die Möglichkeit hingewiesen, den Verzerrungswinkel α und das Verzerrungsverhältnis q auch anders zu wählen (siehe Mathematiklehrbuch Klasse 7 der OS, Ausgabe 1985, S. 112). Das hier betrachtete Thema war bisher - in etwa mit gewissen Abstrichen - im Mathematikunterricht unserer OS ebenfalls in Klasse 10 im Stoffabschnitt "2. Körperdarstellung und Körperberechnung" mit 30 Stunden vorgesehen (vgl. /1/, Lehrplan Mathematik Klasse 5 bis 10. Volk und Wissen, Berlin 1977). Nach dem neuen Lehrplan (/2/, Lehrplan Mathematik Klasse 9 und 10, Volk und Wissen, Berlin 1987) wird bereits in Klasse 9 im Abschnitt "4. Körperdarstellung und Körperberechnung" mit 20 Unterrichtsstunden ein Teil dieses Themas unterrichtet, es stehen für den Unterricht in Klasse 9 der OS aber insbesondere die Winkelfunktionen nicht zur Verfügung. Ergänzende Betrachtungen zur Anwendung der Winkelfunktionen sind für Klasse 10 der OS im Abschnitt "2. Anwendungen von Winkelfunktionen in Planimetrie und Stereometrie" vorgesehen. Als Aufgabensammlung - auch für Spezialschulen - können daher zumindest teilweise die Aufgabensammlung des bisher verwendeten Mathematiklehrbuches für Klasse 10 (/9/, Mathematik, Lehrbuch für Klasse 10, Volk und Wissen, Berlin

1977) sowie die der neuen Mathematiklehrbücher für die Klasse 9 (/4/, Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9, Volk und Wissen, Berlin 1987) und 10 verwendet werden. (Das ab September 1988 verwendete Lehrbuch für Klasse 10 der POS stand bei der Zusammenstellung der vorliegenden Aufgabensammlung nicht zur Verfügung.) Das dürfte insbesondere für Aufgaben zutreffen, die in den angegebenen Sammlungen als Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad gekennzeichnet sind. Um den Lehrern der Spezialschulen ihre Arbeit zu erleichtern, wurde dennoch versucht, eine "vollständige" Aufgabensammlung zusammenzustellen, wobei ein Teil der Aufgaben aus den genannten Sammlungen - ggf. modifiziert - aufgenommen wurde. Die hier angegebenen Aufgaben gliedern sich in die folgenden Themengruppen, die auch als Grundlage für eine zugehörige Stoffverteilung dienen können. Anregungen hierfür kann auch - natürlich mit den erforderlichen Ergänzungen - die Reihenfolge der Lerninhalte im alten Mathematiklehrbuch /3/ für Klasse 10 geben.

I. Berechnen und Darstellen einfacher Körper im Ein- und Zweitafelverfahren

II. Wahre Größe und Gestalt von Seitenflächen und Schnittfiguren von Polyedern mit Ebenen; weitere Polyederdarstellungen

III. Darstellen von Kreisen und Kugeln in beliebiger Lage in senkrechter Parallelprojektion, Schnitt von Polyedern, Kreiskegeln, Kugeln und Kreiszylindern mit Ebenen in beliebiger Lage; komplexe Übungen

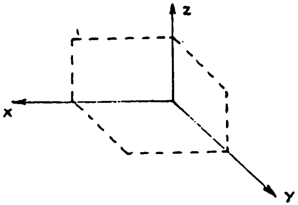
IV. Einige Konstruktionsaufgaben, die zweckmäßig mittels geometrischer Transformationen gelöst werden können

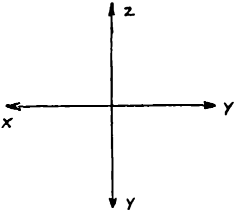
Für den ersten Komplex werden etwa 8 Stunden, für den zweiten etwa 14 und für den dritten Komplex etwa 18 Unterrichtsstunden vorgeschlagen. Im IV. Abschnitt sind als Ergänzung 20 Konstruktionsaufgaben zusammengestellt, die recht zweckmäßig mit geometrischen Transformationen gelöst werden können. Bei Bedarf könnten derartige Aufgaben, unabhängig von den anderen Themen, als "Knobelaufgaben" eingestreut werden.

Bei der Einführung von "Ellipse" als Bild eines Kreises bei senkrechter Parallelprojektion ist eine Angabe der entsprechenden Mittelpunktgleichung empfehlenswert sowie ein Mitteilen der üblichen Konstruktionsverfahren mittels Krümmungskreise (wie z. B. in /5/ (E. Schröder: Darstellende Geometrie, Berlin 1980) auf S. 84 angegeben). Das Bild eines beliebigen Kreises bei orthogonaler Projektion läßt sich dann problemlos und zügig zeichnen.

In Anbetracht der z. V. stehenden Zeit wurde das Rytzsche Verfahren der Hauptachsenkonstruktion von Ellipsen nicht in den Lehrplan aufgenommen. Dieses Verfahren wird beispielsweise für das Ermitteln der Bildfigur einer Ellipse bei beliebiger Parallelprojektion nützlich. In solchen Fällen muß man sich mit der Ermittlung einer ausreichenden Anzahl von Bildpunkten begnügen, z. B. wie in /3/ auf S. 84 erläutert.

Bei Aufgaben zum Ein-, Zwei- und Dreitafelverfahren ist ein Arbeiten mit einem geeignet gewählten Koordinatensystem zweckmäßig, wie es Abb. 1 zeigt.





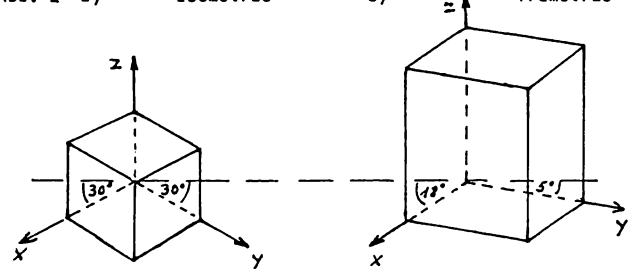
In der Zeichenebene

Abb. 1 (a) (b)

Beim Eintafelverfahren dient die x-y-Ebene als Bildebene, beim Zweitafelverfahren ist die Grundrißebene die x-y-Ebene, die Aufrißebene die x-z-Ebene, die Rißachse ist gleichzeitig die x-Achse. Im Dreitafelverfahren ist die y-z-Ebene zusätzlich die Kreuzrißebene. Auf diese Weise können schnell einheitliche Vorgaben gegeben werden und auch Ergebnisse gut kontrolliert werden.
Kugeln werden bei schräger Parallelprojektion (z. B. bei dem im Mathematikunterricht meist verwendeten Schrägbildverfahren

mit $\alpha = 45^0$ und $q = 1/2$) als Ellipsen, die keine Kreise sind, abgebildet. Dadurch entstehen nicht sehr anschauliche Bilder, zusätzlich ist der Konstruktionsaufwand für exakte Darstellungen nicht gering. Falls nicht für Kugeldarstellungen nur mit dem Ein- oder Mehrtafelverfahren gearbeitet wird, empfiehlt es sich, mit genormten "normalen axonometrischen Verfahren" zu arbeiten, wie sie in Abb. 2 durch die drei Darstellungen eines Würfels gegeben sind. Hier werden, da mit orthogonalen Parallelprojektionen gearbeitet wird, Kugeln als Kreise abgebildet.
Mit λ_x, λ_y und λ_z sind die Verkürzungsverhältnisse in den entsprechenden Achsenrichtungen bezeichnet. Das Bild der z-Achse steht in der Zeichnung stets senkrecht zur waagerecht gestrichelten Geraden. Will man hier beispielsweise die Inkugel der dargestellten Würfel einzeichnen, so muß man nur das Bild des Schnittpunktes zweier Raumdiagonalen des Würfels ermitteln und um diesen Punkt mit dem Radius a/2 den Kreis zeichnen, dabei ist a die Kantenlänge des dargestellten Würfels.

Abb. 2 a) Isometrie c) Trimetrie



$\lambda_x : \lambda_y : \lambda_z = 1 : 1 : 1$

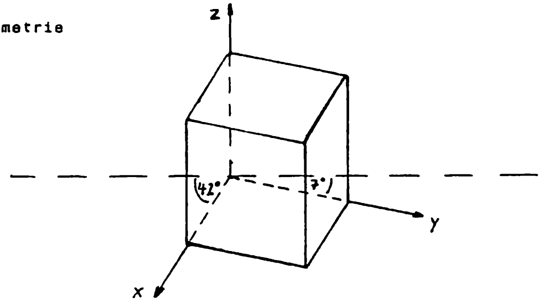
$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z \approx 0{,}817$

$\lambda_x : \lambda_y : \lambda_z = 0{,}5 : 0{,}9 : 1$

$\lambda_x \approx 0{,}493$ $\lambda_y \approx 0{,}887$

$\lambda_z \approx 0{,}985$

b) Dimetrie



$$\lambda_x : \lambda_y : \lambda_z = 0,5 : 1 : 1$$

$$\lambda_x \approx 0,471 \qquad \lambda_y = \lambda_z \approx 0,943$$

I. Berechnen und Darstellen einfacher Körper im Ein- und Zweitafelverfahren

1. Ein Sechskantstahl hat den im Bild 1 angegebenen Querschnitt und eine Länge von 900 mm. Berechnen Sie das Volumen und skizzieren Sie den Körper im Schrägbild!

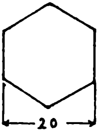


Bild 1

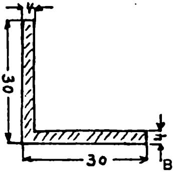


Bild 2

2. Welche Masse haben 13500 mm L-Stahl, wenn die Dichte des Materials $7,85 \frac{g}{cm^3}$ beträgt (Maße siehe Bild 2)?

3. Ein Quader hat einen Oberflächeninhalt von 3400 cm^2. Zwei Kanten haben die Maße a = 34,5 cm und b = 20,0 cm. Berechnen Sie die Länge der dritten Kante und sein Volumen!

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Schnittflächen der im Bild 3 dargestellten geraden Prismen!
Ermitteln Sie im Eintafelverfahren die wahre Gestalt der Schnittflächen!

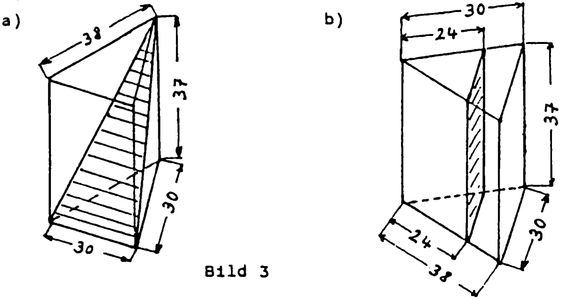


Bild 3

5. Ein schiefes Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seitenlängen 3,0 cm, 4,0 cm und 5,0 cm, seine Seitenkanten sind 8,5 cm lang und gegen die Grundfläche um 45° geneigt. Stellen Sie den Körper im Grund- und Aufriß dar und berechnen Sie sein Volumen!

6. Eine Granate trifft ein Schiff unter der Wasserlinie. Der angrenzende Raum hat einen trapezförmigen Querschnitt und eine Länge von 4 m (Bild 4). Um die Funktionsfähigkeit der in diesem Raum eingebauten Geräte zu erhalten, darf das eindringende Wasser maximal bis zu einer Höhe von einem Meter steigen. In welcher Zeit muß das Leck abgedichtet sein, wenn die Einströmgeschwindigkeit 15 l/s beträgt?

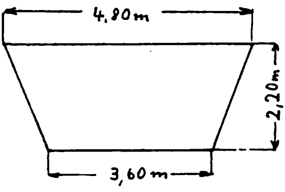


Bild 4

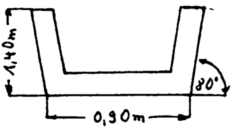


Bild 5

7. Gräben sollen durch Betonfertigteile gestützt werden, die 1 m lang sind (Bild 5). In einem Grabenabschnitt sollen 130 solcher Fertigteile eingebracht werden. Wieviel Kubikmeter Erde müssen ausgehoben werden?

8. Ein gerader Kreiszylinder hat das Volumen $V = 15{,}7\ dm^3$. Seine Höhe h verhält sich zum Grundflächenradius r wie 5 : 2. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Zylinders und stellen Sie ihn geeignet im Grund- und Aufriß dar!

9. Auf Militärflugplätzen wird der Kraftstoff in zylindrischen Erdtanks gespeichert. Ein solcher Tank hat einen Durchmesser von 2,20 m und faßt 20 000 l Kraftstoff. Wieviele solcher Tanks können auf einer quadratischen Fläche von 900 m^2 in zwei Etagen maximal untergebracht werden?

10. Stellen Sie eine regelmäßige sechsseitige Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 3{,}0$ cm und der Höhe $h = 8{,}0$ cm im Schrägbild dar! Wieviel Prozent ihrer Gesamtoberfläche macht ihre Mantelfläche aus?

11. Von einer geraden quadratischen Pyramide ist das Volumen $V = 138\ cm^3$ und der Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche mit $\alpha = 72{,}5^\circ$ gegeben. Wie lang sind Grundkanten und Seitenkanten der Pyramide? Zeichnen Sie ein Bild der Pyramide im Zweitafelverfahren!

12. Eine Pyramide wird in halber Höhe parallel zu ihrer Grundfläche von einer Ebene geschnitten. In welchem Verhältnis steht das Volumen der Teilkörper zum Volumen der gegebenen Pyramide? Stellen Sie ein Beispiel im Zweitafelverfahren und als Schrägbild dar!

13. Ein gerader Kreiskegel hat einen Öffnungswinkel von 112° und eine Mantellinie von 8,0 cm Länge. Wie groß sind Grundkreisradius, Oberflächeninhalt und Volumen dieses Kegels? Stellen Sie den Körper im Zweitafelverfahren dar!

14. Aus einem kreisförmigen Stück Blech von 1,0 m Radius wird ein Stück mit einem Zentriewinkel von 135° ausgeschnitten und zu einem Kegelmantel zusammengerollt. Wie groß sind Radius und Volumen des entstehenden Kegels?

15. Ein Globus hat einen Durchmesser von 40 cm. Welche Fläche nimmt auf diesem Globus der Kontinent Afrika ein?

16. Eine Hohlkugel von 1 cm Wandstärke hat ein Volumen von 120 cm^3. Wie groß ist ihr äußerer Radius?

17. Bei einer Hohlkugel von 1 cm Wandstärke beträgt die Differenz zwischen dem äußeren und dem inneren Oberflächeninhalt 60 cm^2. Wie groß ist der äußere Radius?

18. Ein Kreiskegel mit gleichseitigem Achsenschnitt hat das gleiche Volumen wie ein Kreiszylinder mit quadratischem Achsenschnitt. Wie verhalten sich a) die Höhenlängen, b) die Mantelflächeninhalte und c) die Oberflächeninhalte beider Körper zueinander? Skizziere beide Körper!

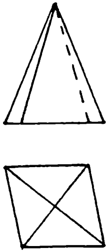
19. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Cavalier, daß das Volumen einer Halbkugel gleich der Differenz zwischen dem Volumen eines Kreiszylinders und dem Volumen eines Kreiskegels ist, wenn diese Körper die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe wie die Halbkugel haben!

20. Von einem schiefen Prisma mit regelmäßiger sechseckiger Grundfläche sind gegeben:
    Grundkantenlänge a = 3 cm, Körperhöhe h = 8,5 cm,und ein Eckpunkt der Deckfläche liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
    a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriß des gegebenen Körpers!
    b) Zeichnen Sie ein Schrägbild dieses Prismas!
    c) Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt!

21. Zeichnen Sie für die im Bild 6 im Zweitafelverfahren (Maßstab 1 : 2) gegebenen Pyramiden ein Schrägbild! Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt!

22. Stellen Sie die im Schrägbild (Bild 7) gegebenen Pyramiden in Zweitafelprojektion dar!

a)



b)

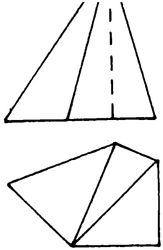
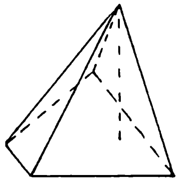


Bild 6

a)



b)

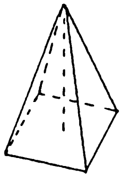
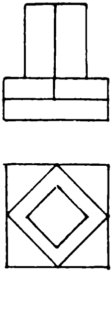


Bild 7

23. Zeichnen Sie für die im Bild 8 durch Grund- und Aufriß gegebenen Körper ein Schrägbild! Berechnen Sie deren Oberflächeninhalt und Volumen!

a)



b)

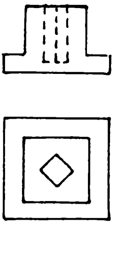


Bild 8

24. Konstruieren Sie zu den in Zweitafeldarstellung gegebenen Körpern einen zweiten Aufriß, dessen Rißachse senkrecht zur gegebenen Rißachse ist! Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der dargestellten Körper! (Bild 9)

a)

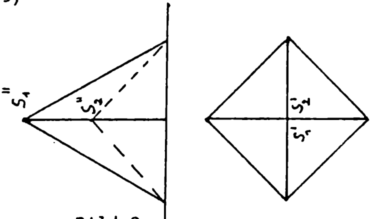


Bild 9a

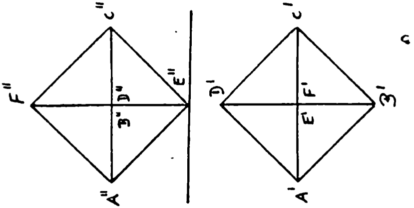


Bild 9b

25. Wieviele Tonnen Sand lassen sich ungefähr auf einer kreisförmigen Fläche von 8 m Durchmesser aufschütten? (Böschungswinkel von Sand etwa 34°, Sanddichte $2{,}3\ \frac{t}{m^3}$)

26. Wieviele Tonnen Kies faßt eine kegelförmige Aufschüttung von etwa 4 m Höhe (Böschungswinkel 31°, Sanddichte $2{,}2\ \frac{t}{m^3}$) ?

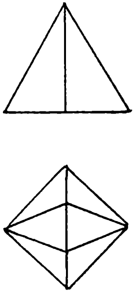
27. Einem Würfel ist je eine Kugel um- bzw. einbeschrieben. Stellen Sie den Sachverhalt im Zweitafelverfahren dar! In welchem Verhältnis stehen a) die Volumen und b) die Oberflächeninhalte der Körper?

28. Ermitteln Sie durch Konstruktion den Schnittwinkel zweier Raumdiagonalen eines Würfels! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung!

29. Ermitteln Sie durch Konstruktion den Winkel, den eine Raumdiagonale eines Würfels mit einer vom gleichen Eckpunkt ausgehenden Flächendiagonale einschließt! Oberprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung!

30. Von den im Bild 10 dargestellten Körpern sind die wahren Längen der Seitenkanten durch Konstruktion zu bestimmen!

a)



b)

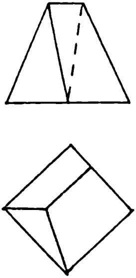


Bild 10

II. Weitere Polyederdarstellungen, wahre Größe und Gestalt von Seitenflächen und Schnittfiguren von Polyedern mit Ebenen

1. Eine Strecke $\overline{AB}$ ist durch A (2; 1; 0) und B (6; 4; 3,5) gegeben. Gesucht ist ein Punkt C mit folgenden Eigenschaften: C liegt auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$ und es ist $\overline{AC} = 3$.

2. Gegeben ist in Zweitafelprojektion eine Strecke $\overline{AB}$ durch A (2; 1; 1) und B (0,6; 4; 2). Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob ein Punkt Q existiert, für den die folgenden Bedingungen gleichzeitig gelten: Q liegt auf der

Strecke $\overline{AB}$ und Q hat von beiden Rißtafeln gleichen Abstand!

3. Gegeben ist eine Ebene e_1 und ein Punkt P in Zweitafelprojektion (Bild 1).
Gesucht ist diejenige Ebene e_2, die durch P geht und parallel zu e_1 ist.

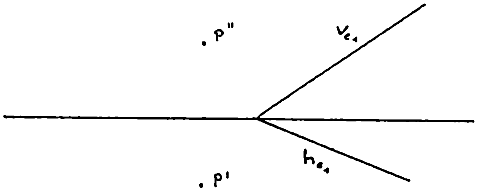


Bild 1

4. Eine Ebene ist durch ihre Spuren h_0 und v_0 und einem Punkt P gegeben (Bild 2). In P soll die Senkrechte zu e errichtet und eine Strecke $\overline{PP_0} = 3$ abgetragen werden.

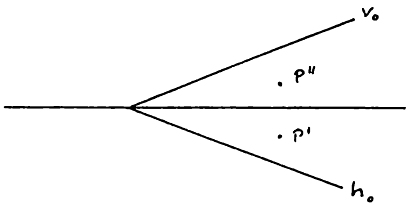


Bild 2

5. Geben Sie zu jeder räumlichen Darstellung die entsprechende Zweitafeldarstellung an (Bild 3)!

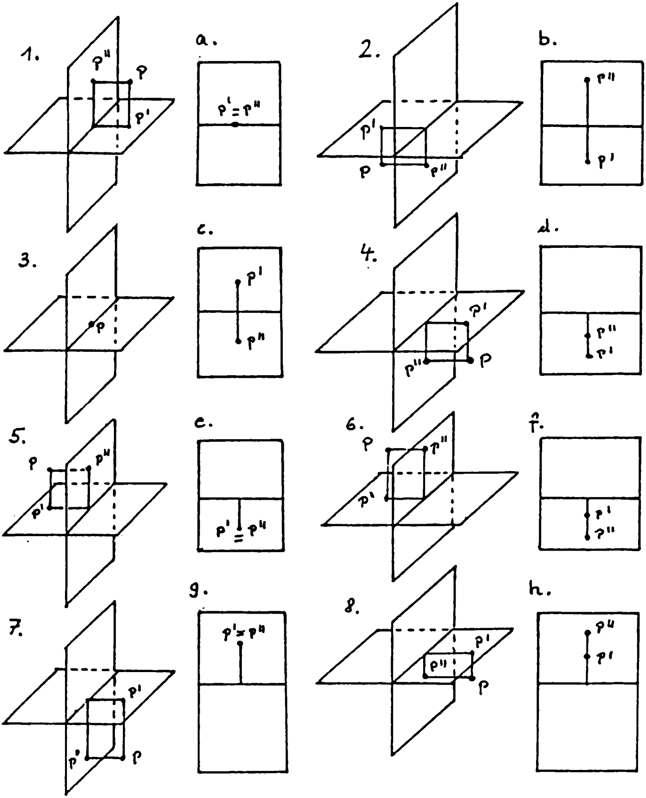


Bild 3

6. Eine Strecke $\overline{AB}$ ist gegeben (Bild 4). Im Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ ist die zu $\overline{AB}$ senkrechte Ebene zu errichten. Konstruieren Sie die Spuren dieser Ebene!

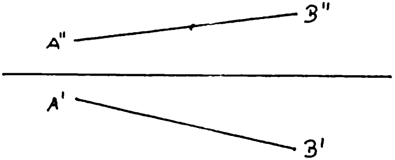


Bild 4

7. Gesucht ist der Abstand d eines Punktes P von einer Ebene e, die durch h_0 und v_0 gegeben ist (Bild 5).

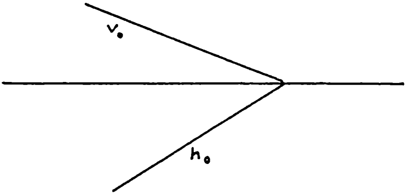


Bild 5

8. Ermitteln Sie den Durchstoppunkt D der Geraden g durch die Ebene e, die durch h_0 und v_0 gegeben ist! Kennzeichnen Sie die Sichtbarkeit von g (Bild 6)!

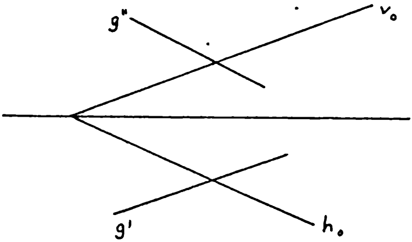
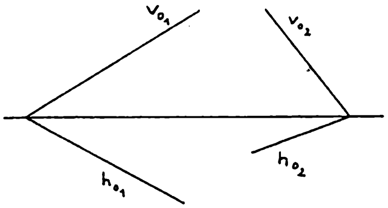


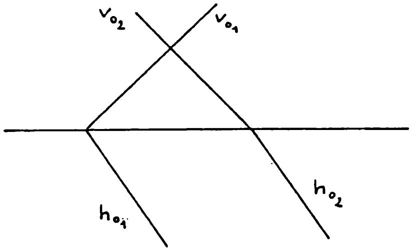
Bild 6

9. Ermitteln Sie die Bilder der Schnittgeraden zweier Ebenen, die durch ihre Spuren h_{o_1} und v_{o_1} bzw. h_{o_2} und v_{o_2} gegeben sind (Bild 7)!

a)



b)



10. Eine Ebene ABC ist gegeben (A (0; 0; 0), B (4; 4; 0), C (4; 0; 5)). Bestimmen Sie konstruktiv die Neigungswinkel zur Grund- und Aufrißebene!

11. Stellen Sie eine Ebene e mit der Gleichung $x + y + z = 1$ durch ihre Spuren h_o und v_o dar! Stellen Sie die Höhenlinien der Höhe 1 sowie die Gerade g durch die Punkte A (1; 1; 5) und B (-2; 1; 1) dar!
    a) Konstruieren Sie den Durchstoppunkt D von g mit e!
    b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung der Koordinaten des Durchstoppunktes!

12. Gegeben sind drei Punkte (A (1; 1; 0), B (6; 7; 0), C (2; 5; 4)).
   a) Bestimmen Sie die Spurgeraden h_0 und v_0 und die Neigungswinkel der Ebene ABC gegen Grund- und Aufrißebene!
   b) Bestimmen Sie konstruktiv die Punkte D und E, die auf der Senkrechten g durch C zu ABC liegen und von C den Abstand 4 haben!

13. Geben Sie eine notwendige Bedingung dafür an, daß zwei in Zweitafelprojektion gegebene Geraden einen Schnittpunkt haben!

14. In einer Ebene ABC liegt das Dreieck DEF (A (3; 5; 1), B (-2; 1; 3), C (-1; 4; 1), D (2; y_1; 4), E (0; y_2; 0), F (-2; y_3; 3)). Konstruieren Sie den Grundriß des Dreieckes!

15. Konstruieren Sie die Spuren der Ebene ABC mit der Grundriß- und Aufrißebene!
   a) A (6; 5; 8), B (3; 8; 2), C (0; 2; 5)
   b) A (0; 0; 6), B (-5; 6; 2), C (2; 2; 2)
   c) A (2; 7; 3), B (-3; 3; 5), C (-6; 9; 9)

16. Ermitteln Sie die Spuren einer Ebene mit der Grundriß- und Aufrißebene, wenn die Ebene gegeben ist
   a) durch zwei einander schneidende Geraden AB und AC, wobei A (0; 2; 2), B (3; 5; 0), C (-2; 2; 1) ist,
   b) durch eine Gerade PQ und einen Punkt R, wobei P (3; 3; 0), Q (-2; 0; 4) und R (0; 2; 4) ist,
   c) durch drei Punkte U (0; 2; 1), V (0; 0; 4) und W (4; 5; 3)!

17. Konstruieren Sie im Grund- und Aufriß die durch den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC (A (3; 5; 8), B (0; 8; 0), C (-3; 0; 3)) gehende Normale zur Ebene ABC!

18. Zeichnen Sie ein Zweitafelbild einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE (A (3; 4; 0)) mit dem Mittelpunkt M (0; 4; 0) ist! Die Seitenkanten sollen einen Neigungswinkel von 60° gegen die Grundriß-

ebene haben.

19. Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit der Grundkantenlänge $a = 4{,}5$ cm und der Höhe $h = 8{,}0$ cm steht mit der Grundfläche auf der Grundrißebene und wird von einer Ebene senkrecht zur Aufrißebene so geschnitten, daß die Körperhöhe halbiert wird. Der Winkel zwischen Grundrißebene und Schnittebene beträgt 45°.
Stellen Sie den Sachverhalt in Zweitafelprojektion dar und bestimmen Sie konstruktiv die wahre Gestalt der Schnittfigur!

20. Ein regelmäßiges fünfseitiges Prisma (Grundkantenlänge 3,0 cm, Höhe 9,0 cm), welches mit der Grundfläche auf der Grundrißebene steht, wird in halber Körperhöhe von einer Ebene, die senkrecht zur Aufrißebene ist, geschnitten. Der Neigungswinkel der Schnittebene zur Grundrißebene beträgt 60°.
Stellen Sie den Sachverhalt im Zweitafelverfahren dar und konstruieren Sie die wahre Gestalt der Schnittfigur!

21. Eine gerade quadratische Pyramide ($a = 4$ cm, $s = 8$ cm) wird in halber Höhe von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Stellen Sie den Sachverhalt in Zweitafelprojektion dar, konstruieren Sie die wahre Gestalt der Schnittfigur, und berechnen Sie das Volumen der entstehenden Teilkörper!

22. Eine gerade quadratische Pyramide ($a = 5{,}8$ cm, $h = 7{,}8$ cm) wird in 2 cm Höhe von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten.
Zeichnen Sie ein Schrägbild zu diesem Sachverhalt! In welchem Verhältnis steht
a) das Volumen des Stumpfes zum Volumen der gesamten Pyramide,
b) der Oberflächeninhalt des Stumpfes zum Oberflächeninhalt der gesamten Pyramide?

23. Von einem Würfel werden die "Ecken" so abgeschnitten, daß aus den Seitenflächen des Würfels Quadrate entstehen,

deren Diagonalen so lang wie die Würfelkanten sind. Stellen Sie den Restkörper in Zweitafelprojektion und einem Schrägbild dar! Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Körpers!

24. Von einem Würfel werden die Ecken so abgeschnitten, daß aus den Seitenflächen regelmäßige Achtecke entstehen. Stellen Sie den Restkörper in Zweitafelprojektion und einem Schrägbild dar! Welchen Prozentsatz hat das Volumen des Restkörpers im Vergleich mit dem Volumen des Körpers?

25. Unter welchen Bedingungen sind die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide gleich lang? Stellen Sie ein Beispiel für eine Pyramide dieser Art in Zweitafelprojektion und einem Schrägbild dar! (Als Beispiel soll keine regelmäßige Pyramide gewählt werden.)

26. Unter welchen Bedingungen sind die Höhen der Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide durch deren Spitze gleich lang? Stellen Sie ein Beispiel für eine Pyramide dieser Art in Zweitafelprojektion und einem Schrägbild dar! (Als Beispiel soll keine regelmäßige Pyramide gewählt werden.)

27. Eine Pyramide soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile zerlegt werden. In welchem Verhältnis muß dabei die Höhe des Körpers geteilt werden?

28. Stellen Sie eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Seitenflächen zur Grundfläche kongruent sind, in Zweitafelprojektion dar, und zwar so, daß eine Kante des Körpers in der Grundrißebene parallel zur Rißachse und eine weitere Kante parallel zur Grundrißebene liegt! Schneiden Sie den Körper durch eine Parallelebene zur Grundrißebene in halbem Abstand zwischen den genannten (windschiefen) Kanten, und ermitteln Sie die Schnittfigur! Stellen Sie den Körper mit dem Schnitt in einem Schrägbild dar!

29. Stellen Sie einen Würfel in Zweitafelprojektion dar, und

zwar in einer Lage, bei der ein Eckpunkt in der Grundrißebene, der in der Raumdiagonale gegenüberliegende Eckpunkt senkrecht über diesem und eine Kante parallel zur Aufrißebene liegt! Nehmen Sie drei Schnitte parallel zur Grundrißebene durch den Körper an, davon einen durch den Mittelpunkt des Würfels, und ermitteln Sie die Schnittfiguren! Stellen Sie Körper und Schnitte in einem Schrägbild dar!

30. Von einer geraden quadratischen Pyramide sei das Volumen $V = 138\ cm^3$ und der Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche $\beta = 72{,}5^\circ$ bekannt.
   a) Zeichnen Sie die Pyramide in Eintafelprojektion! Berechnen Sie hierfür die Länge der Grundkanten und die Höhe der Pyramide!
   b) Ermitteln Sie konstruktiv und rechnerisch die Länge der Seitenkanten und den Neigungswinkel der Seitenflächen zur Bildebene!

31. In einen Würfel mit der Kantenlänge a lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, die einander durchdringen und Flächendiagonalen des Würfels als Kanten haben.
   a) Stellen Sie jeweils die beiden Tetraeder im Schrägbild dar!
   b) Zeichnen Sie einen Würfel mit den beiden einander durchdringenden Tetraedern (das "sternförmige Oktaeder") im Schrägbild!
   c) Geben Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen des sternförmigen Oktaeders in Abhängigkeit von a an!

32. Gegeben sei ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 6{,}4$ cm und der Höhe $h = 10$ cm. Durch eine Grundkante werde eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche geneigt ist. Diese Ebene schneidet den Körper so, daß eine Pyramide entsteht.
   a) Stellen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der entstehenden Pyramide als Funktion des Neigungswinkels β der Schnittebene dar!
   Innerhalb welchen Intervalls für β ist das sinnvoll?

b) Stellen Sie für $\beta = 55^{\circ}$ das Prisma und die schneidende Ebene in Zweitafelprojektion dar! Ermitteln Sie konstruktiv die wahre Gestalt des Schnittdreiecks, und kontrollieren Sie die Genauigkeit Ihrer Konstruktion durch Berechnen der Seitenlängen des Schnittdreiecks!

33. Ein gerades quadratisches Prisma mit der Grundkantenlänge $a = 4$ cm und der Höhe $h = 7$ cm wird durch einen ebenen Schnitt, der durch eine Diagonale der Deckfläche und einen Eckpunkt der Grundfläche geht, abgeschrägt. Stellen Sie den Sachverhalt geeignet im Zweitafelverfahren und in einem Schrägbild dar, und konstruieren Sie die wahre Gestalt der Schnittfläche! Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche und das Volumen des Restkörpers!

34. Ein gerades quadratisches Prisma ($a = 3{,}5$ cm, $h = 7{,}5$ cm) wird durch einen ebenen Schnitt, der durch eine Deckkante geht und die gegenüberliegende Seitenfläche halbiert, abgeschrägt. Stellen Sie den Sachverhalt geeignet in Zweitafelprojektion.und einem Schrägbild dar! Konstruieren Sie die wahre Gestalt der Schnittfigur! Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen des Restkörpers!

35. Von einer vierseitigen Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD und ihrer Zweitafeldarstellung ist folgendes bekannt: Die Grundfläche liegt in π_1, $\overline{AB} = 5$ cm, S' liegt auf $\overline{BD}$, $\overline{DS} = 1/4\ \overline{DB}$, $\overline{SS'} = 5$ cm.
   a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriß dieser Pyramide!
   b) Bestimmen Sie konstruktiv die Größe des Neigungswinkels zwischen den Seitenflächen ABS und BCS!
   c) Kontrollieren Sie Ihre konstruktive Lösung durch Rechnung, und berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt der Pyramide!

36. Gegeben ist ein in der Grundrißebene gelegenes spitzwinkliges Dreieck ABC.
   a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriß einer dreiseitigen Pyramide, die das Dreieck ABC als Grundfläche hat und deren Seitenkanten paarweise zueinander senkrecht

sind!

b) Konstruieren Sie die wahre Größe der Seitenfläche ABS!

37. Eine Pyramide ABCDES ist gegeben, wobei A (1; 1; 1), B (1,5; 1; 3), C (4,5; 1; 6), D (7; 1; 2,5) und S (8; x; 6) ist.

a) Bestimmen Sie x konstruktiv so, daß $\overline{ES}$ = 8 cm ist, und zeichnen Sie die Pyramide im Zweitafelverfahren!

b) Geben Sie die Höhe der Pyramide an!

38. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD und Spitze Z soll folgenden Bedingungen genügen: $\overline{AB}$ = 6 cm, M ist Mittelpunkt der Grundfläche, $\overline{MZ}$ ist senkrecht zu $\overline{BZ}$ und $\overline{CZ}$.

a) Zeichnen Sie in Zweitafelprojektion eine Pyramide, die den angegebenen Bedingungen genügt und ein maximales Volumen hat!

b) Wie groß ist das maximale Volumen, das die Pyramide unter diesen Bedingungen annehmen kann?

39. Ein dreiseitiges gerades Prisma P_3 und ein vierseitiges gerades Prisma P_4 durchdringen einander. P_3 hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit A_1 (1,5; 1; 0), B_1 (7,5; 1; 0) und C_1 (4,5; v; 0), wobei $v \neq 0$ ist. Die Höhe von P_3 ist 9 cm. P_4 hat als Grundfläche das Quadrat $D_1E_1F_1G_1$, wobei $\overline{D_1E_1}$ = 3 cm ist, und eine Höhe von 9 cm. Eine Diagonale des Grundflächenquadrats liegt senkrecht zur Aufrißebene, die andere senkrecht zur Grundrißebene. S_1 (0; 5; 4,5) ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche. Zeichnen Sie Grund- und Aufriß beider Prismen und die Durchdringungsfigur!

40. Ein Walmdach überdeckt eine rechteckige Fläche von 15,80 m Länge und 6,60 m Breite. Alle Dachflächen sind gegen die Ebene der Traufenkanten um 45° geneigt.

a) Fertigen Sie eine Zweitafeldarstellung im geeigneten Maßstab an!

b) Bestimmen Sie konstruktiv die Länge des Dachfirsten! Kontrollieren Sie das Ergebnis durch Berechnung!

c) Ermitteln Sie konstruktiv die wahre Gestalt der Dach-fläche!

d) Wie groß sind Dachoberfläche und Dachraum?

41. Im Bild 8 ist der Grundriß eines Hauses mit den gleich hohen Traufenkanten e_1 bis e_6 dargestellt. Die Oberdachung soll so erfolgen, daß alle Dachflächen gleiche Neigung besitzen. Konstruieren Sie die Projektionen der Firste, Grate und Kehlen des Daches!

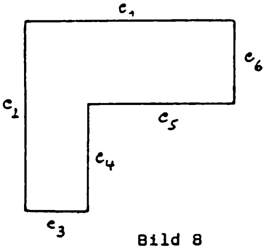


Bild 8

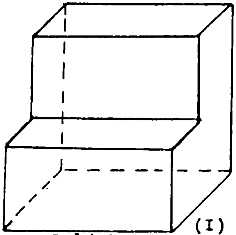


Bild 9

42. a) Stellen Sie die im Bild 9 durch ein Schrägbild dargestellten Körper, die sich in einen Würfel mit der Kantenlänge a einbeschreiben lassen, im Dreitafelverfahren mit a = 6 cm dar!
b) Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen dieser Körper!
c) Zeichnen Sie jeweils ein Körpernetz!

43. Ein gerader Pyramidenstumpf hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a = 3 cm. Die Seitenkanten sind gegen die Grundfläche unter einem Winkel von 67° geneigt, die Höhe des Stumpfes beträgt 5 cm. Zeichnen Sie den Körper in Zweitafelprojektion, und bestimmen Sie konstruktiv die wahre Gestalt der Deckfläche! Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses Körpers!

44. Von einem geraden quadratischen Pyramidenstumpf sind die Deckkanten 3 cm lang und die Seitenflächen schließen mit der Grundfläche einen Winkel von 52° ein. Zeichnen Sie den Körper im Zweitafelverfahren, und berechnen Sie sein

Volumen sowie den Oberflächeninhalt!

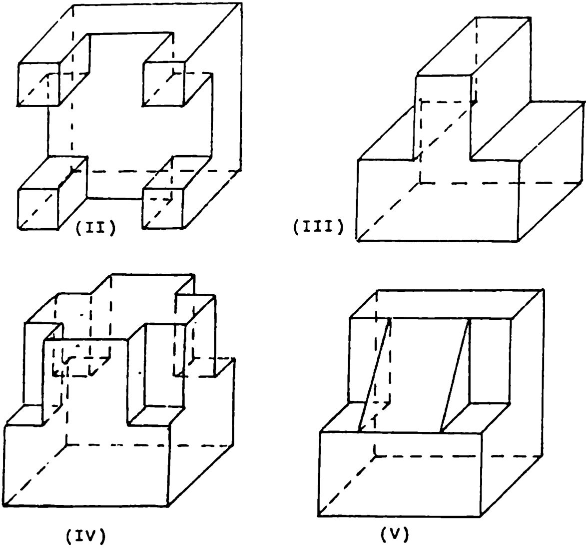


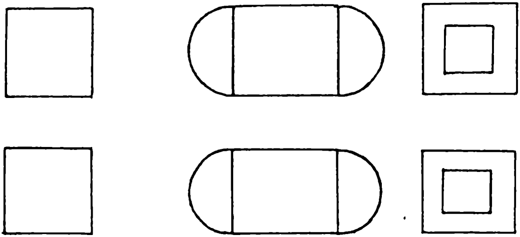
Bild 9

45. Von einem quadratischen Pyramidenstumpf sind gegeben: Grundkantenlänge $a_1 = 5$ cm, Deckkantenlänge $a_2 = 3$ cm, Seitenkantenlänge $z = 6$ cm.
Konstruieren Sie die Neigungswinkel der Seitenkanten und der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Rechnung!

46. Stellen Sie einen regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpf mit der Grundkantenlänge $a_1 = 3{,}5$ cm, der Deckkantenlänge $a_2 = 2$ cm und der Höhe $h = 4$ cm in Zweitafelprojektion und im Schrägbild dar!
Konstruieren Sie die wahre Gestalt einer Seitenlänge! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung!

47. Gegeben ist ein Pyramidenstumpf ABCDEF, der aus einer dreiseitigen geraden und regelmäßigen Pyramide ABCS mit der Höhe h = 10,5 cm entstanden ist. Die Höhe des Pyramidenstumpfes ist 4,2 cm, der Punkt A hat die Koordinaten (4; 2; 1), $\overline{AB}$ = 5 cm, das Dreieck ABC ist parallel zu π_1. $\overline{AC}$ ist parallel zu π_2. Der Stumpf wird von einer Ebene e geschnitten, die senkrecht zu π_2 ist und zu π_1 einen Neigungswinkel von 45° hat, die Grundrißspur von e geht durch den Punkt (11; 0; 0). Konstruieren Sie
   a) Grund- und Aufriß des Pyramidenstumpfes einschließlich der Schnittflächen, .
   b) die wahre Gestalt der Schnittfläche,
   c) die wahre Gestalt der Seitenfläche ABED!

48. Skizzieren Sie ein Schrägbild von wenigstens drei Körpern, die die angegebene Zweitafeldarstellung haben (Bild 10)!



(a) (b) (c)

Bild 10

49. Bild 11 ist Schrägbild eines geraden dreiseitigen Prismas. P liegt in der Seitenfläche $A_1C_1C_2A_2$, Q in $A_1B_1B_2A_2$ und R in $B_1C_1C_2B_2$. Ermitteln Sie im Schrägbild die Schnittfigur der Ebene PQR mit der Oberfläche des Prismas!

50. Bild 12 zeigt das Schrägbild einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS, der Punkt P liegt in der Seitenfläche ADS, Q in ABS und R in BCS. Ermitteln Sie im Schrägbild

die Schnittfigur der Ebene PQR mit der Oberfläche der Pyramide!

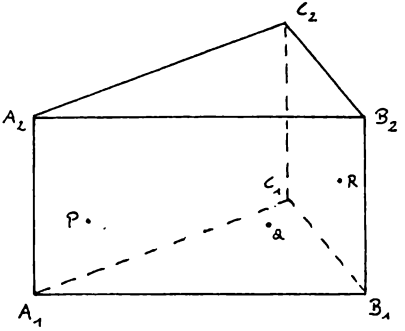


Bild 11

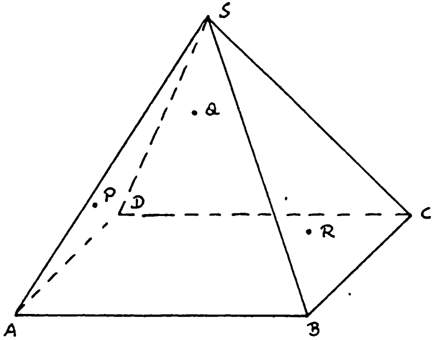


Bild 12

51. Bild 13 zeigt das Schrägbild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 4 cm. Der Punkt P liegt in der Seitenfläche ABEF, Q in BCGF und R in DAEH. Konstruieren Sie im Schrägbild die Schnittfigur des Würfels mit der Ebene PQR!

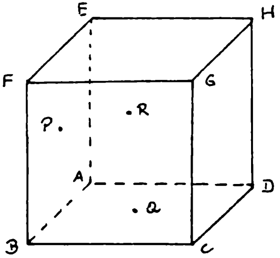


Bild 13

III. Darstellen von Kugeln und Kreisen in beliebiger Lage in senkrechter Parallelprojektion, Schnitt von Polyedern, Kreiskegeln, Kugeln und Kreiszylindern mit Ebenen in beliebiger Lage; komplexe Übungen

1. Bild 1 zeigt die Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren h_o und v_o und die Projektion einer Ellipse, die in dieser Ebene liegt. Konstruieren Sie den Aufriß und die wahre Gestalt dieser Ellipse!

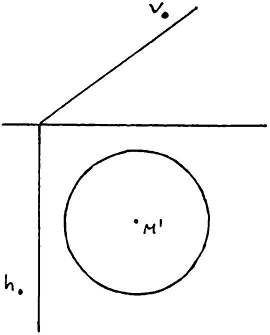


Bild 1

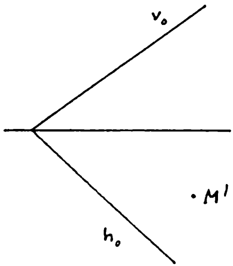


Bild 2

2. Eine Ebene ist durch ihre Spuren h_0 und v_0 gegeben (Bild 2). In dieser Ebene liegt ein Kreis, von dem der Radius mit $r = 2$ cm und der Grundriß des Mittelpunktes bekannt sind. Zeichnen Sie Grund- und Aufriß dieses Kreises!

3. In einer Ebene liegt ein Kreis mit $r = 3$ cm. Zeichnen Sie für folgende Lagen der Ebene je ein Beispiel im Grund- und Aufriß von Ebene und Kreis!
   a) e ist parallel zur Grundrißebene
   b) e ist parallel zur Aufrißebene
   c) e ist senkrecht zur Grund- und Aufrißebene.

4. Ein gerader Kreiszylinder wird von einer Ebene, senkrecht zur Aufrißebene liegend, in halber Körperhöhe geschnitten. Konstruieren Sie die wahre Gestalt der Schnittfigur!
   a) $r = 4$ cm, $h = 12$ cm, Winkel zwischen Schnittebene und Grundrißebene 45°;
   b) $r = 2,5$ cm, $h = 9$ cm, Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Grundrißebene 65°.

5. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck mit 7,5 cm langer Kathete. Der Kegel wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche im Abstand von 4 cm geschnitten.
   a) Stellen Sie den Kegel einschließlich der schneidenden Ebene im Zweitafelverfahren dar!
   b) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des abgeschnittenen Kegels und des Restkörpers!

6. Gegeben sind die Eckpunkte A (5; 2; 0), B (4; 4; 0), C (2; 6; 0), D (0; 4; 0), E (1; 1; 0) und S (3; 4; 6) einer fünfseitigen Pyramide. Diese Pyramide wird von einer Ebene PQR geschnitten P (0; 9; 0), Q (9; 0; 0), R (0; 0; 5). Stellen Sie die Pyramide und Ebene im Zweitafelverfahren dar!

7. Ein gerader Kreiskegel, der mit seiner Grundfläche auf der Grundrißebene steht, wird von einer Ebene e so geschnitten, daß die Schnittfigur eine Ellipse ist. Stellen Sie den geschilderten Sachverhalt im Zweitafelver-

fahren (einschließlich der Schnittfigur) für $e \perp \pi_2$ ($e \not\perp \pi_2$) dar, und ermitteln Sie die wahre Gestalt der Schnittfigur!

8. Konstruieren Sie das Bild einer Kugel mit r = 5 cm und umbeschriebenen Zylinder
   a) im Dreitafelverfahren,
   b) in schräger Parallelprojektion (z. B. $\alpha = 90^{\circ}$ und q = 1/2)!

9. Stellen Sie einen geraden Kreiskegel mit r = 4 cm und h = 8 cm in schräger Parallelprojektion dar! Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen des Kreiskegels!

10. Ein gerader Kreiszylinder mit r = 2 cm und h = 5 cm steht auf der Grundrißebene, der Mittelpunkt seiner Grundfläche ist M (2; 2; 5; 0). Der Kreiszylinder wird von einer Ebene e geschnitten. Die Horizontalspur h_0 der Ebene e geht durch A (9; 0; 0) und B (0; 9; 0), die Vertikalspur v_0 durch A und C (0; 0; 4). Zeichnen Sie die Zweitafeldarstellung des Zylinders, der Ebene und der Schnittellipse! Kennzeichnen Sie die Sichtbarkeit des Zylinders und der Schnittkurve!

11. Ein gerader Kreiszylinder mit r = 2 cm und h = 6 cm steht auf der Grundrißebene, der Mittelpunkt seiner Grundfläche ist M (3; 3; 0). Der Zylinder wird von einer Ebene e geschnitten. Diese Ebene steht senkrecht zur Aufrißebene, hat einen Neigungswinkel von 30° gegen die Grundrißebene und geht durch den Mittelpunkt der Zylinderachse.
   a) Stellen Sie den Zylinder und die Ebene in Zweitafelprojektion dar!
   b) Ermitteln Sie die Abwicklung der beiden Teilkörper!

12. Ein gerader Kreiszylinder mit r = 3 cm und h = 10 cm, dessen Grundfläche sich in π_1 befindet, wird von einer Ebene e geschnitten. Die Ebene geht durch den Mittelpunkt der Zylinderachse und hat mit der Grundrißebene einen Neigungswinkel von 30°, ihre Horizontalspur bildet mit der Rißachse einen Winkel von 30°. Das durch e abgeschnittene (obere) Zylinderteil wird um 180° gedreht und wieder auf die Schnittfläche aufgesetzt.

Zeichnen Sie Grund- und Aufriß des entstandenen "Rohrknies"!

13. Die Grundfläche ABC einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S hat die Seitenlängen a = 5 cm, b = 3 cm und c = 6 cm. Der Höhenfußpunkt F liegt innerhalb der Grundfläche, 2 cm von A und 4,5 cm von B entfernt; die Pyramidenhöhe mißt 4,5 cm. Die Pyramide wird von einer Ebene e geschnitten, die $\overline{AS}$ in L ($\overline{LS}$ = 2 cm), $\overline{BS}$ in M ($\overline{MS}$ = 3 cm) und $\overline{CS}$ in N ($\overline{NS}$ = 3,5 cm) schneidet.
   a) Konstruieren Sie das Netz der Pyramide und zeichnen Sie die Schnittlinien mit der Ebene LMN ein!
   b) Konstruieren Sie die Schnittfigur LMN in wahrer Größe!
   c) Zeichnen Sie das Netz der abgeschnittenen Pyramide LMNS und bestimmen Sie konstruktiv die Länge des Lotes von S auf die Ebene LMN!

14. Durch die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Würfels erhält man die Kanten eines Körpers. Wie heißt dieser Körper?
   a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriß dieses Körpers!
   b) Konstruieren Sie ein Schrägbild!
   c) Berechnen Sie Oberflächeninhalt, Volumen und Neigungswinkel benachbarter Seitenflächen dieses Körpers!

15. Eine Kugel k und eine Gerade g, die die Kugel in zwei Punkten schneidet, sind in Eintafelprojektion gegeben (Bild 3). Konstruieren Sie die Durchstoppunkte von g mit k, wenn bekannt ist:
   Neigungswinkel von g zur Grundrißebene $\alpha = 50^{\circ}$, Spurpunkt von g ist D' und k berührt die Grundrißebene.

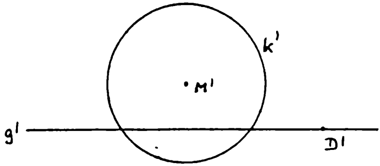


Bild 3

16. Von einer Kugel k und einer Geraden g, die die Kugel durchdringt, sind Grund- und Aufriß gegeben (Bild 4). Konstruieren Sie die Durchstoppunkte, und kennzeichnen Sie die Sichtbarkeit der Geraden!

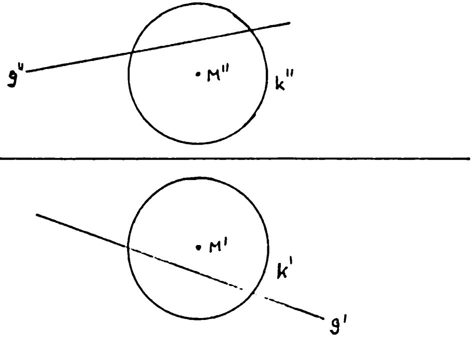


Bild 4

17. Eine Kugel, die im Grund- und Aufriß gegeben ist, wird von einer Ebene geschnitten (Bild 5).
Konstruieren Sie die Schnittfigur im Grund- und Aufriß!

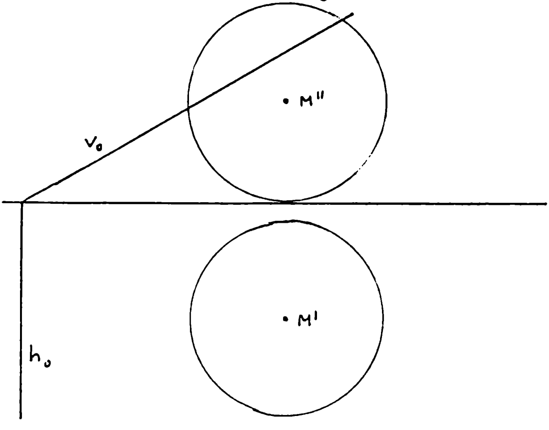


Bild 5

18. Stellen Sie einen Globus mit d = 45 cm in geeignetem Maßstab in Zweitafelprojektion dar! Dabei soll die Nord-Süd-Achse mit der Grundrißebene einen Winkel von 65^{0} einschließen und in einer Ebene liegen, die senkrecht zur Grund- und Aufrißebene ist. Stellen Sie auch den Äquatorkreis und die Breitenkreise 45^{0} nördlicher und südlicher Breite dar!

19. Ein gerader Kreiskegelstumpf mit dem Durchmesser 33,4 cm und 18,2 cm und der Höhe 15,2 cm wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile zerlegt.
Wie groß sind die Höhen der Teilkörper? Welcher Teilkörper hat die größere Mantelfläche? Konstruieren Sie ein Schrägbild ($\alpha = 45^{0}$, $q = 1/2$) des Kegelstumpfes mit der Schnittfigur!

20. Ein gerader Kreiskegelstumpf mit den Radien $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 3$ cm und der Höhe $h = 6$ cm, der auf der Grundrißebene steht, wird von einer Ebene senkrecht zur Aufrißebene so geschnitten, daß die Grundrißspur der Ebene vom Grundkreismittelpunkt 2,5 cm entfernt ist und der Mittelpunkt des Deckkreises Punkt der Ebene ist. Stellen Sie den Kegelstumpf mit der Schnittfigur in Zweitafelprojektion dar! Konstruieren Sie die Abwicklung des Kegelmantels mit den Schnittlinien!

21. Ein gerader Kreiszylinder ($r = 4$ cm, $h = 8$ cm) steht mit seiner Grundfläche auf der Grundrißebene. Er wird von einer Ebene senkrecht zur Aufrißebene so geschnitten, daß der Neigungswinkel der Ebene 30^{0} beträgt und ihre Grundrißspur vom Grundkreismittelpunkt 6 cm entfernt ist. Gesucht sind die Zweitafeldarstellung von Zylinder und Ebene mit Schnittfigur, die wahre Größe der Schnittfigur und die Mantelabwicklung des Restkörpers!

22. Ein Baumstamm, der 6dm lang ist, hat einen oberen Umfang von 2,5 m und einen unteren von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Kubikmeter Holz liefert er?

23. Ein Eimer, der 27 cm hoch ist, hat einen Bodendurchmesser von 20 cm. Welche lichte Weite muß der Eimer oben mindestens haben, wenn er 14 l Wasser fassen soll?

24. Skizzieren Sie Schrägbilder von Körpern mit der angegebenen Dreitafeldarstellung (Bild 6)!

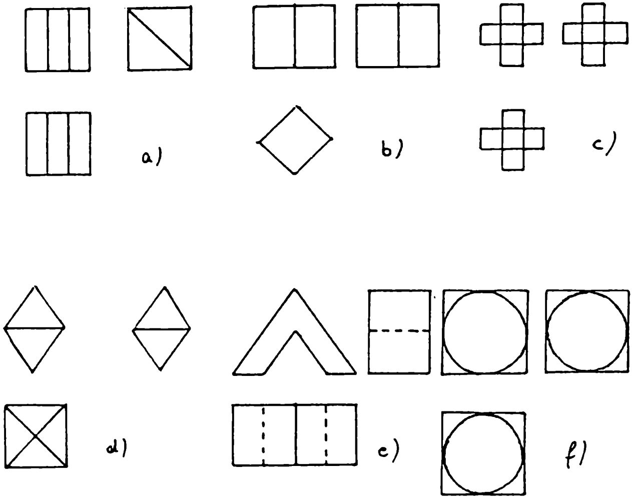


Bild 6

25. a) Stellen Sie einen Würfel, ausgehend von einer Zweitafeldarstellung, bei der eine Seitenfläche auf π_1 steht, durch Umprojizieren so dar, daß eine Raumdiagonale senkrecht zur neuen Bildebene ist.
b) An der erhaltenen Projektion erkennt man, daß man einen Würfel so "aushöhlen" kann, daß sich durch den so entstandenen Restkörper ein zum ursprünglichen Würfel kongruenter Würfel hindurchschieben läßt. Bauen Sie ein Modell des Restkörpers und des ursprünglichen Würfels!

26. Gegeben sind Dreitafeldarstellungen von Polyedern I bis IV (Bild 7). Die Konturen sind in allen drei Rissen Quadrate der Seitenlänge a.

a) Konstruieren Sie für $a = 6$ cm Schrägbilder der Polyeder (bei III mit $\alpha = 60^\circ$ und $q = 1/2$, bei IV mit $\alpha = 45^\circ$ und $q = 2/5$)!

b) Geben Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Körper in Abhängigkeit von a an!

c) Ermitteln Sie alle zwischen "benachbarten" Seitenflächen vorkommenden Neigungswinkel!

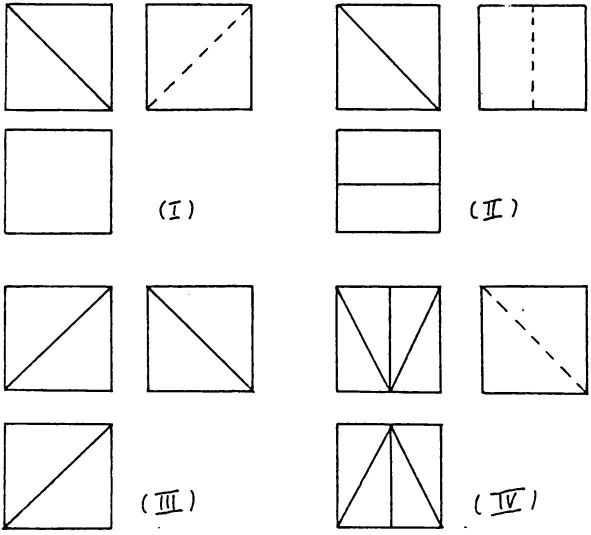


Bild 7

27. Besteht die Oberfläche eines Polyeders aus lauter regelmäßigen, einander konkruenten n-Ecken, so spricht man von regelmäßigen Polyedern oder platonischen (nach dem griech. Philosophen Platon, 427 - 347 v. u. Z.) Körpern. Jeder Würfel ist ein derartiger Körper, jedes (regelmäßige) Tetraeder ebenfalls. Außerdem gibt es nur noch drei weitere Arten: Oktaeder (acht gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, jede Ecke des Polyeders ist Endpunkt von 4 Polyederkanten), Ikosaeder (20 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, jede Ecke des Polyeders ist Endpunkt von 5 Polyederkanten) und Dodekaeder (12 reguläre 5-Ecke als Seitenflächen, jede Ecke ist Endpunkt von 3 Polyederkanten).
   a) Stellen Sie ein derartiges Oktaeder (Ikosaeder, Dodekaeder) mit einer Kantenlänge von 4 cm im Zweitafelverfahren dar!
   b) Skizzieren Sie ein Schrägbild dieses Körpers!
   c) Ermitteln Sie durch Konstruktion den Neigungswinkel benachbarter Seitenflächen! Kontrollieren Sie Ihre Konstruktion durch Berechnen!
   d) Zeichnen Sie ein Netz dieses Körpers!

28. Über dem Quadrat ABCD (A (4,5 ; 0,5; 0), C (-4,5; 5,5; 0)) in der Grundrißebene ist ein Würfel zu errichten. Sein Symmetriezentrum ist auch Mittelpunkt eines regelmäßigen Oktaeders, dessen Raumdiagonalen zu den Würfelkanten parallel und 10 cm lang sind. Stellen Sie jenen Teil des Oktaeders im Grund- und im Aufriß dar, der sich innerhalb des (durchsichtig gedachten) Würfels befindet!

29. Das Quadrat ABCD (A (-3; 3; 5), C (3; 6; 3)) liegt in einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene und ist ein Symmetrieschnitt eines regelmäßigen Oktaeders. Stellen Sie den Grund- und Aufriß dieses Oktaeders dar!

30. $\overline{EF}$ (E (3; 3,5; 1), F (-3; 3,5; 6) ist eine Raumdiagonale eines regelmäßigen Oktaeders, von dem ein weiterer Eckpunkt A in der Aufrißebene liegt, die x-Koordinate dieses Punktes ist
   a) positiv, b) negativ. Stellen Sie den Körper im Grund-

und im Aufriß dar!

31. In welchem Verhältnis stehen Umkugelradius R und Inkugelradius r beim a) regelmäßigen Tetraeder, b) Würfel, c) regelmäßigen Oktaeder?

32. S (0; 8; 5) ist die Spitze einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, deren Grundfläche in der Aufrißebene liegt; eine Seitenkante liegt auf der Geraden g durch S und P (3; 2; 6).
    a) Stellen Sie die Pyramide im Grund- und im Aufriß dar!
    b) Konstruieren Sie den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Aufrißebene und deren wahre Länge!
    c) Kontrollieren Sie Ihre Konstruktion durch Berechnung!

33. Von einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma liegen die Seitenkanten $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{D_1D_2}$ auf den Geraden r bzw. s. r geht durch A_1 (-3; 3,5; 5), s geht durch D_2 (5; 5,5; 4,5) und P (1; 2; 1).
    Stellen Sie den Prismenmantel im Grund- und im Aufriß dar!

34. S (6; 1,5; 1) und D (-1,5; 5; 10) sind die Endpunkte einer Seitenkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ABCDEFS; die ihr gegenüberliegende Seitenkante $\overline{SA}$ $(x_A<0)$ liegt auf der Geraden g durch S und P (-1,5; 5; 1). Stellen Sie den Körper im Grund- und im Aufriß dar!

35. Skizzieren Sie das Schrägbild eines Würfels und in dieses Schrägbild einen (offenen oder geschlossenen) Streckenzug, der die angegebene Dreitafeldarstellung hat (Bild 8)! Im Streckenzug sollen nur aufeinander folgende Strecken einen Punkt gemeinsam haben. Geben Sie dabei die Lage der Grundriß-, Aufriß- und Kreuzrißebene an!

36. Von einem Würfel sind das Symmetriezentrum Z und die Trägergerade PQ einer Seitenkante bekannt. Konstruieren Sie die Zweitafeldarstellung des Würfels für
    a) Z (0; 6; 6), P (0; 10; 3), Q (-3,5; 4; 0) und
    b) Z (0; 7; 7), P (0; 12,5; 10), Q (-6; 8; 1)!

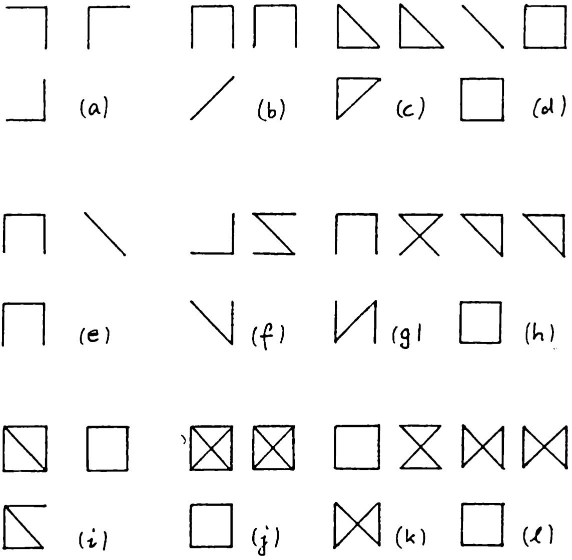


Bild 8

37. Von einem Würfel ist das Symmetriezentrum Z (0; 6,5; 6) bekannt, die Eckpunkte A und C liegen auf der Geraden durch P (1; 1; 0) und Q (-1; 8; 4). Konstruieren Sie die Zweitafeldarstellung des Würfels!

38. a) Zu dem im Bild 9 gegebenen Körper sind für a = 6 cm der Kreuzriß und ein weiterer Seitenriß zu zeichnen!
    b) Zeichnen Sie ein Netz dieses Körpers!
    c) Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen des Körpers!
    d) Berechnen Sie alle zwischen benachbarten Seitenflä-

chen vorkommenden Neigungswinkel!

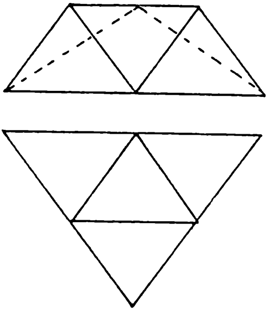


Bild 9

39. Stellen Sie einen geraden Kreiszylinder mit $r = 4$ cm und $h = 7,5$ cm im Schrägbild ($\alpha = 90^\circ$, $q = 1/2$) dar! Zeichnen Sie einen Achsenschnitt ein, dessen Ebene nicht parallel oder senkrecht zur Bildebene ist!

40. Konstruieren Sie ein Schrägbild ($\alpha = 90^\circ$, $q = 1/2$) eines geraden Kreiszylinders mit $r = 3$ cm und $h = 8$ cm in folgender Lage:
    a) auf einer horizontalen Ebene stehend,
    b) auf einer horizontalen Ebene liegend, wobei die Achse senkrecht zur Bildebene ist!

41. Von den nachfolgenden geraden Kreiskegeln sind Zweitafeldarstellungen und Schrägbilder ($q = 1/2$, $\alpha = 90^\circ$) anzufertigen. Die gesuchten Stücke sind durch Konstruktion zu ermitteln! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rechnung!
    a) $r = 3$cm, $h = 5$ cm; gesucht s
    b) $r = 3,5$ cm, Winkel zwischen Mantellinie und Grundflä-

che 52°; gesucht h und s

42. Konstruieren Sie von den im Bild 10 gegebenen Rotationskörpern ein Schrägbild ($\alpha = 90^\circ$, q = 1/2), und berechnen Sie Mantelinhalt und Volumen der Körper!

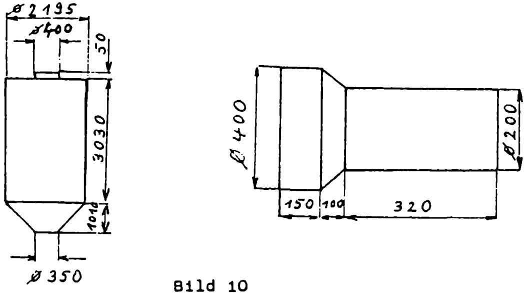


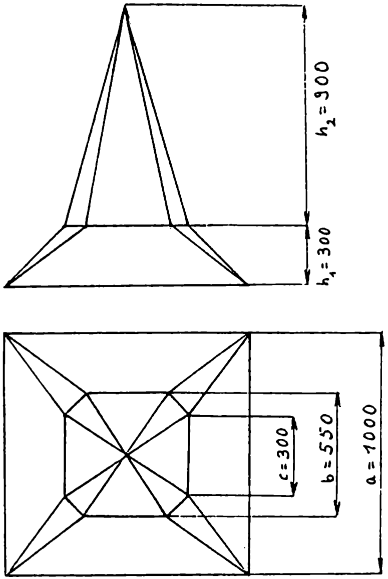
Bild 10

43. Ein Torpedo ist 7 m lang. Der Torpedokopf ist eine Halbkugel (Radius 25 cm). Daran schließen sich ein Zylinder (Länge 5,75 m) und ein Kegel (Höhe 1 m) an. Wieviel Prozent des Gesamtvolumens eines solchen Torpedos sind mit Sprengstoff gefüllt, wenn die Halbkugel vollständig und der Zylinder zu 20 % mit Sprengstoff gefüllt sind! Skizzieren Sie eine Zweitafeldarstellung des Torpedos!

44. Stellen Sie das Dach eines Turmes (Bild 11) im Maßstab 1 : 100 in einem Schrägbild dar! Berechnen Sie das Volumen des Dachraumes und den Oberflächeninhalt des Daches!

45. Bild 12 zeigt die Dreitafeldarstellung eines Polyeders. Dieser Körper läßt sich aus drei "Einheitswürfeln" zusammensetzen. Analog lassen sich aus vier derartigen Würfeln sechs verschiedene Polyeder zusammensetzen, die keine Quader sind. Polyeder werden dabei als gleich angesehen, wenn sie sich durch Verschiebungen sowie Drehungen ineinander überführen lassen. Stellen Sie diese sechs Körper im Dreitafelverfahren dar! Skizzieren Sie ein Schrägbild jedes dieser Körper und des im Dreitafelverfahren bereits vorgegebenen Körpers!

Hinweis:
Die betrachteten sieben Polyeder stellen die Teile eines sogenannten Somawürfels dar. Man kann aus ihnen einen Würfel zusammensetzen.



Maße in cm Bild 11

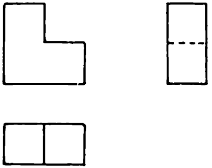


Bild 12

IV. Einige Konstruktionsaufgaben, die zweckmäßig mittels geometrischer Transformationen gelöst werden können

Generell kann für die folgenden Konstruktionsaufgaben erörtert werden, ob überhaupt und wieviele Lösungen existieren - je nach der Vorgabe der gegebenen Objekte.

1. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden p und q und zwischen diesen Geraden liegende Punkte A und B. Konstruieren Sie den Lichtstrahl, der von A ausgeht und nach zweimaliger Reflexion sowohl an p als auch an q durch B geht! Die erste Reflexion soll an p erfolgen.

2. Es sind eine Gerade s und zwei Kreise K_1 und K_2 gegeben. Konstruieren Sie ein Quadrat derart, daß zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Quadrats auf a und je ein Eckpunkt auf K_1 sowie K_2 liegen!

3. Gegeben sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B auf derselben Seite von g. Konstruieren Sie einen Punkt X auf g derart, daß der Winkel zwischen den Geraden BX und g doppelt so groß ist wie der Winkel zwischen den Geraden AX und g!

4. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, eine Gerade g und eine Länge d. Konstruieren Sie Punkte A von k_1 und B von k_2 mit AB // g und $\overline{AB} = d$!

5. Gegeben sind drei einander parallele Geraden a, b und c sowie ein Punkt A von a. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B liegt auf b und C liegt auf c!

6. Gegeben sind ein Punkt A sowie die Geraden b und d. Konstruieren Sie ein Quadrat ABCD, daß B zu b und C zu c gehört!

7. Gegeben sind zwei Geraden b und e sowie ein Punkt A. Konstruieren Sie ein regelmäßiges 5-Eck ABCDE derart, daß B zu b und E zu e gehört!

8. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise k_1 und k_2 und ein Punkt A, der zu keinem der Kreise gehört. Konstruieren

Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC derart, daß B zu k_1 und C zu k_2 gehört!

9. Gegeben sind ein Punkt A und die Geraden b und c. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Spitze A und dem Basiswinkel 75°, wobei B zu b und C zu c gehört!

10. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 sowie ein Punkt P. Konstruieren Sie einen Punkt A von k_1 und einen Punkt B von k_2 derart, daß P Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist!

11. Gegeben sind zwei Punkte P und Q innerhalb eines Kreises. Konstruieren Sie zwei gleichlange Kreissehnen, die einen Winkel von 45° einschließen. Eine der Kreissehnen soll durch P und die andere durch Q gehen.

12. Es sind vier Punkte A, B, C und D gegeben. Konstruieren Sie ein Quadrat derart, daß durch jeden der gegebenen Punkte eine Gerade, auf denen Seiten des Quadrats liegen, geht!

13. Konstruieren Sie durch den Schnittpunkt S zweier Kreise k_1 und k_2 eine Sekante derartig, daß die beiden auf ihr liegenden Sehnen sich wie 2 : 3 verhalten!

14. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 und ein Punkt S. Konstruieren Sie Punkte A auf k_1 und P auf k_2 derartig, daß S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist!

15. Konstruieren Sie ein Dreieck aus den Seiten b und c und der Länge der Winkelhalbierenden zum Winkel!

16. Konstruieren Sie ein Dreieck aus den Längen b, c und s_a!

17. Gegeben sind Geraden b und c sowie ein Punkt A. Konstruieren Sie ein Quadrat ABCD, wobei B zu b und C zu c gehört!

18. Gegeben sind ein Punkt A, ein Kreis k und eine Gerade g. Konstruieren Sie ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB}:\overline{BC} = 1 : 2$, B auf k und C auf g!

19. Gegeben sind vier Punkte A, B, C und D. Konstruieren Sie ein Rechteck PQRS mit $\overline{PQ} : \overline{QR} = 1:2$, A auf SP, B auf PQ, C auf QR und D auf RS !

20. Gegeben sind vier Längen a, b, c und d. Konstruieren Sie ein Sehnenviereck mit diesen Seitenlängen!