Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht

Arbeitsgruppe "Spezialschule" des wissenschaftlichen Rats für Mathematikdidaktik

A U F G A B E N S A M M L U N G

für den Einsatz im Mathematikunterricht an Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung

Akademie der Pädagogischen Wissenschaften, Berlin, 1990

Herausgeber: Akademie der Pädagogischen Wissenschaften
der Deutschen Demokratischen Republik
Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht
Abteilung Mathematik
Otto-Grotewohl-Str. 11
B e r l i n
1 0 8 0

Das vorliegende Material nutzt Arbeitsergebnisse der Arbeitsgruppe "Spezialschule" des wissenschaftlichen Rats für Mathematikdidaktik. Die von Mitgliedern der Arbeitsgruppe und den einzelnen Spezialschulen mathematisch- naturwissenschaftlich- technischer Richtung eingereichten Beiträge wurden durch Dipl.-Math. Klaus Müller (APW/IMN) für den Druck bearbeitet bzw. vorbereitet.

- Als Manuskript gedruckt -

Weitere Veröffentlichungen dieses Materials - auch auszugsweise - sind nur mit Genehmigung des Herausgebers gestattet.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

V o r b e m e r k u n g e n

Die vorliegende Aufgabensammlung für den Einsatz im Mathematikunterricht an Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung ist das Ergebnis eines intensiven Erarbeitungs-, Erprobungs- und Diskussionsprozesses über mehrere Jahre. Durch die weitere Ausgestaltung der Spezialschulen m-n-t Richtung wurde es notwendig, sowohl den Lehrern als auch Schülern Arbeitsmaterialien in die Hand zu geben, um den Unterrichtsprozeß effektiver zu gestalten. Insbesondere wurde die Bitte geäußert, eine Sammlung von Aufgaben zu erstellen, die es Lehrern und Schülern erleichtern soll, den spezifischen Anforderungen des Mathematikunterrichts an Spezialschulen m-n-t Richtung besser gerecht zu werden. Viele Kollegen der Spezialschulen und Hochschullehrer verschiedener Hochschulen und Universitäten der DDR haben dazu Aufgaben eingereicht, die im Unterrichtsprozeß erprobt wurden. Der Nutzer dieser Aufgabensammlung wird sehr schnell bemerken, daß ihrer Linienführung und Gliederung der Lehrplan Mathematik für Spezialschulen m-n-t Richtung von 1986 zugrunde gelegt wurde. Obwohl dabei noch keine völlige Einheitlichkeit der einzelnen Kapitel hinsichtlich Formulierung und Akzentuierung der Aufgaben erreicht wurde, hält er die Arbeitsgruppe doch für gerechtfertig, daß Material in der vorliegenden Form als Manuskript zu veröffentlichen, da der Wunsch nach einer solchen praktikablen Hilfe immer nachdrücklicher geäußert wurde. In einer überarbeiteten, teilweise noch zu ergänzenden Fassung muß es dann gelingen, die jetzt noch vorhandenen Schwächen zu überwinden. Für Hinweise und Vorschläge wäre die Arbeitsgruppe sehr dankbar.

Berlin, Juni 1990

Klaus Müller
Leiter der Arbeitsgruppe

A u f g a b e n s a m m l u n g

zu den Stoffgebieten 1.2. und 1.3.
"Reelle Zahlen; Potenzen und Potenzgesetze; Wurzeln und Logarithmen; Elemente der Kombinatorik"

zusammengestellt und bearbeitet von einem Autorenkollektiv
an der Spezialschule "Heinrich Hertz", Berlin

Potenzen

Leichte Aufgaben aus Lehrbuch Klasse 9 (alt, neu) wie z. B.

1. $\left(\frac{a^6}{2b^2}\right)^3 - \left(\frac{4b^5}{a^3}\right)^3$

2. $\left(\frac{2p^4 \cdot q^7}{3p^2\ q^2}\right)^5$

- ganzzahliger Exponent

3. $a^{k+1} \cdot b^{k-1} \cdot c^{-k} \cdot a^{-k} \cdot c^{k-1}$

4. $\frac{q^{2n-1} \cdot r^{3n}}{q^{2n+1} \cdot r^{-3n}}$

5. $\frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)^2}$

6. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a) $\left\{\left[0{,}01^3 \cdot 10^4 - 0{,}1^4 - \left(\frac{1}{100}\right)^{-2}\right] \cdot \frac{1}{0{,}01^3} + \left(\frac{1}{10^{-3}}\right)^2\right\}^2 - 10^8$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 4^{-3} + \frac{1}{8}\right]^2 : \left[0{,}25^{-3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2^{-1}}\right]^{-1}$

7. $\frac{(a^2-4b^2)^3}{(a-2b)^4} \cdot \frac{(a^2+4ab+4b^2)^3}{(a+2b)^5} \cdot \left[\frac{(a+2b)^4}{(a-2b)}\right]^{-1}$

8. $\left\{(a^2-ab-6b^2)^{-1}(a+2b) - \frac{1}{a-3b}\right\}\left(\frac{1}{a^2 b} + \frac{1}{a^3 b^{-1}}\right)$

9. $\left\{\left(\frac{a^2-a-2}{a+1}\right)^{-1} - \frac{1}{a^2-4a+4}\right\}^{-2} - \frac{(2-a)^4}{a^2-6a+9}$

10. $\frac{[1{,}5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}} : \left[1+a^{-1} + (-2b^{-1}) + \frac{(1-b^{-1})^2}{a^{-1}-1}\right]$

- rationaler Exponent

11. a) Leichte Aufgaben aus Lehrbuch
    b) Rationalmachen des Nenners

    z. B. $\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}$

12. Berechnen (ohne Taschenrechner)

$$\sqrt[4]{\frac{81}{128}}\,(\sqrt{2})^{1,5} + \left(\sqrt[4]{11 + \frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}\right)^{-1}$$

13. $a > 0;\ b > 0$

$$\frac{1}{a\sqrt{b}}\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{a^9b^4}}}$$

14. $\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]a^2 : \left[(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}\right]$

15. $\left[\dfrac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$

16. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \dfrac{2a^{\frac{1}{a}} - 2}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1}$

Logarithmen

1. Berechne x ohne Zahlentafel und Rechner

   a) $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$

   b) $x = 100^{\frac{1}{2} - \lg\sqrt[4]{4}}$

   c) $x = \sqrt{10^{2 + \frac{1}{2}\lg 16}}$

   d) $x = 49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

2. $\log_4 (\log_3 (\log_2 x)) = 0$

3. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Literatur: 1. J. Wisliceny "Grundbegriffe der Mathematik"
II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen
Reihe MfL

2. "Aufgabensammlung zur Elementarmathematik"
Bd. 1 von N. A. Antonow
VuW 1963

Kombinatorik

1. Wieviele Permutationen der Elemente a, b, c, d, e gibt es? Wie lautet die 43. Permutation in lexikographischer Anordnung?

2. Zwölf Personen sollen namentlich in eine Liste eingetragen werden. Auf wieviele verschiedene Arten ist dies möglich?

3. Ein Nummernschild eines Autos soll aus drei Buchstaben und vier Ziffern bestehen. Wieviele verschiedene Nummernschilder lassen sich aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern bilden?

4. In einer Sportsektion gibt es 10 gute Volleyballspieler. Auf wieviele Möglichkeiten läßt sich aus ihnen eine Mannschaft (6 Spieler) zusammenstellen?

5. Alle fünfbuchstabigen Wörter, die sich genau aus den Buchstaben A, E, G, L, R bilden lassen, werden alphabetisch geordnet. An wievielter Stelle steht LAGER?

6. Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt. Wieviele Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

7. Eine FDJ-Gruppe hat 21 Mitglieder. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, daß 5 von ihnen in die Gruppenleitung gewählt werden?

8. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür, daß drei Soldaten und ein Unteroffizier zum Dienst eingeteilt werden, wenn dafür 15 Soldaten und 4 Unteroffiziere zur Verfügung stehen?

9. Die neun Mitglieder einer Gewerkschaftsleitung müssen einen Vorsitzenden, einen Sekretär und einen Kassierer wählen. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

10. Die Schüler einer Klasse werden in neun verschiedenen Fächern unterrichtet. Wieviele Möglichkeiten gibt es für den Schultag, an dem fünf verschiedene Stunden auf dem Plan stehen?

11. Gegeben seien 12 Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Wieviele Verbindungsgeraden existieren?

12. Wieviele Diagonalen hat ein konvexes Neuneck?

13. Wieviele gerichtete Streckenzüge können in der Ebene durch vier Punkte gelegt werden, wenn nicht mehr als zwei Punkte davon auf einer Geraden liegen?

14. Zu Silvester feiert eine achtköpfige Gesellschaft. Wie oft klingen die Gläser, wenn um Mitternacht jeder mit jedem anstößt?

15. Für welches n-Eck gilt, daß die Anzahl seiner Diagonalen
    a) gleich der Anzahl
    b) doppelt so groß wie die Anzahl
    c) k-mal so groß wie die Anzahl
    seiner Seiten ist?

16. Wieviele verschiedene Arten von Fahrkarten einer Klasse muß die Eisenbahnverwaltung a) für 5 b) für n Stationen einer Strecke zur Verfügung stellen, wenn die Möglichkeit bestehen soll, in jeder Station eine Fahrkarte nach jeder beliebigen anderen Station der Strecke zu lösen?

17. Wieviele verschiedene Verbindungsgeraden von 7 Punkten einer Ebene sind höchstens möglich, wann liegen
    a) keine drei Punkte auf ein und derselben Geraden
    b) 4 Punkte auf einer ersten und 3 Punkte auf einer zweiten Geraden?

18. Sechs Schüler (Axel, Bernd, Christian, Dieter, Enno, Frank) wollen in einem Kaufhaus die Rolltreppe zur nächsten Etage benutzen.
    A) Auf wieviele Arten können sie sich nacheinander auf jeweils einer Stufe anordnen?
    B) Auf wieviele Arten ist das möglich, wenn jeweils Axel

unmittelbar vor Bernd und Bernd unmittelbar vor Christian die Rolltreppe benutzen wollen?

C) Auf wieviele Arten ist die Benutzung der Rolltreppe möglich, wenn Axel, Bernd und Christian auf jeweils einer Stufe unmittelbar vor- oder hintereinander stehen wollen?

D) Wieviele Anordnungsmöglichkeiten verbleiben, wenn Axel als erster und Frank als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen?

19. In der Blindenschrift werden Buchstaben, Zahlen oder Satzzeichen durch Anordnung von 6 Punkten, die erhoben oder als Löcher in Papier gedruckt werden, dem Blinden fühlbar gemacht. Wieviele Zeichen sind möglich?

20. Auf wieviele verschiedene Weisen kann ein Skatspieler seine zehn Karten erhalten?

21. Wieviele verschiedene Zeichen lassen sich mit einem
a) 5-Kanal-Lochstreifen b) 8-Kanal-Lochstreifen
erzeugen (Dualsystem)?

22. Wieviele fünfstellige Zahlen gibt es, in deren Ziffern die gleiche Grundziffer nicht mehrfach auftritt?

23. Wieviele fünfstellige Zahlen lassen sich aus drei Grundziffern 1 und zwei Grundziffern 2 bilden? In wievielen stehen zwei Grundziffern 2 nicht nebeneinander? In wievielen stehen drei Grundziffern 1 nicht nebeneinander?

24. Wieviele sechsstellige Zahlen lassen sich aus je drei Grundziffern 5 und 7 bilden? Wieviele beginnen mit
a) 5 b) 7 c) 55 d) 57 ?

25. Wieviele siebenstellige Zahlen lassen sich aus drei Grundziffern 1, zwei Grundziffern 3 und zwei Grundziffern 5 bilden? Wieviele beginnen mit a) 5 b) 531 ?

26. Wieviele verschiedene Zahlenkombinationen sind bei einem Wurf mit a) drei b) vier gleichartigen Würfeln möglich?

27. Wieviele voneinander verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Augenzahlen der Würfel bei einem Wurf mit 3 Würfeln

a) überhaupt

b) wenn sämtliche Würfel verschiedene Augenzahlen anzeigen

c) wenn genau zwei Würfel die gleiche Augenzahl haben?

28. In einer Schachtel befinden sich r rote und g gelbe Kugeln, die durch Numerierung voneinander zu unterscheiden sind. Auf wieviele verschiedene Arten können unter den n entnommenen Kugeln m gelb sein?

29. Drei rote und vier gelbe Kugeln, die durch Numerierung voneinander zu unterscheiden sind, sollen so nebeneinander gelegt werden, daß die Farben abwechseln. Wieviele Möglichkeiten gibt es hierfür?

30. Auf wievielen verschiedenen Wegen kann ein Turm auf dem Schachbrett von einem Eckfeld zum diagonal gegenüberliegenden Eckfeld gelangen, wenn keine Umwege zugelassen werden?

31. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Aufteilung von acht verschiedenen Geldstücken unter Bruder und Schwester?

32. Beim Dominospiel bestehen die Steine aus Kombinationen von jeweils zwei Zahlen. Es werden die Zahlen von 0 bis 6 verwendet. Aus wievielen Steinen besteht das Spiel?

33. Wieviele verschiedene Aufgaben enthält das kleine Einmaleins? (1 1 bis 9 9)

34. Ein schwarzer und ein weißer Turm stehen auf einem Schachbrett. Wieviele verschiedene Möglichkeiten ihrer Anordnung gibt es?

35. In einem Gefäß befinden sich 10 rote und 5 weiße Kugeln. Wieviele Möglichkeiten gibt es beim Herausnehmen von 3 Kugeln, so daß a) 2 rote und 1 weiße
b) 1 rote und 2 weiße darunter sind?

36. Wieviele RENTNER-Zahlen (symmetrisch, siebenstellig, nat.) gibt es? Wieviele REGER-Zahlen gibt es?

37. Auf wieviele verschiedene Weisen können aus 9 Personen zwei Gruppen gebildet werden, von denen die erste

a) 7 b) 4 Personen umfaßt?

38. Wieviele verschiedene Widerstände kann man durch Hintereinanderschaltung von Widerständen mit 1, 2, 5, 10, 20 Ohm erzeugen?

39. In der Umgebung eines Erholungsortes sollen 15 Wanderwege durch je zwei parallele Striche gekennzeichnet werden. Wieviele Farben benötigt man, wenn
   a) die Reihenfolge der Striche eine Rolle spielt und beide Striche von gleicher Farbe sein dürfen
   b) die Reihenfolge der Striche keine Rolle spielt und beide Striche von gleicher Farbe sein dürfen
   c) die Reihenfolge der Striche keine Rolle spielt und beide Striche nicht von gleicher Farbe sein dürfen?

40. Für einen Automaten werden von 4 Sorten Pralinen jeweils 3 Stück in einem Beutel so abgepackt, daß der Inhalt jedes Beutels aus 3 verschiedenen Pralinensorten besteht. Die Preise der einzelnen sind: A: 50 Pf., B: 40 Pf., C: 30 Pf., D: 20 Pf. An den Beuteln ist jeweils der Gesamtpreis der in ihnen verpackten Pralinen angegeben.
   a) Wieviele verschiedene Zusammenstellungen zu je 3 Stück gibt es?
   b) Wieviele verschiedene Preise gibt es?
   c) Können die Stückpreise der einzelnen Pralinensorten aus den möglichen Gesamtpreisen berechnet werden?

41. Wieviele verschiedene Spielanfänge gibt es beim Skatspiel? (Verteilungen der Karten auf Spieler und Skat)

42. Beim Zahlenlotto werden aus 90 Zahlen 5 ermittelt. Wieviele Tips muß man abgeben, um mit Sicherheit einen Fünfer zu erzielen? Wieviele Vierer und Dreier werden dabei auftreten?

43. Beim Tele-Lotto (5 aus 35) sind 5 Zahlen von insgesamt 35 auszuwählen. Wieviele verschiedene Tips müssen jeweils abgegeben werden, um mit Sicherheit einen Fünfer, Vierer bzw. Dreier zu erzielen?

44. Wieviele Stichprobenmöglichkeiten gibt es bei einer Produktionsserie von 100 Stück, wenn bei der Stichprobe 5

Einzelstücke untersucht werden sollen?

45. Wieviele Anschlüsse sind in einem Fernsprechnetz mit fünfstelligen Rufnummern möglich, wenn man die mit 0 und 1 beginnenden Rufnummern für Sonderanschlüsse reserviert und hier nicht berücksichtigt?

46. Zu einem Eishockey-Turnier werden 20 Spieler eines Verbandes gemeldet. Wieviele Möglichkeiten der Verteilung der Rücken-Nummern 1 bis 20 gibt es, wenn ein bestimmter Spieler auf jeden Fall die Nummer 11 erhält und ein zweiter keinesfalls die Nummer 9 tragen soll?

47. Die Entwertung von Fahrscheinen für Nahverkehrsmittel erfolgt in einer Stadt durch das Einstanzen von 1 bis 6 Löchern an verschiedenen Stellen eines 2mal3-Schemas. Wieviele verschiedene Kennzeichnungen sind auf diese Weise möglich?

48. Am Ende des 1. Schuljahres werden die Disziplinen Lesen, Rechtschreibung, Ausdruck, Schreiben des Faches Deutsch und das Fach Heimatkunde zensiert. Wieviele Schüler müßten in der Klasse sein, wenn nur die Zensuren 1 und 2 auf alle möglichen Arten auf diese Fächer verteilt werden sollen?

49. Auf wieviele Arten können sich 6 Schüler auf 3 Zimmer verteilen, wenn die Anordnung in den Zimmern beliebig ist?

50. Wieviele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den folgenden Ziffern bilden?

a) 3, 4, 5, 6

b) 2, 3, 4, 5, 6

c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 1.4.
"Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung"
(mit Lösungen)

zusammengestellt und bearbeitet von einem Autorenkollektiv an der Spezialschule "M. A. Nexö", Dresden, mit Unterstützung durch Dr. Maibaum, TU Dresden

1. Ein Bankhalter würfelt mit drei Würfeln, ein Gegenspieler kann mit einem beliebigen Einsatz auf eine der Zahlen 1, ..., 6 setzen.
Diesen Einsatz erhält der Spieler (k + 1)-mal zurück, wenn seine Zahl k-mal (k = 1, 2, 3) erscheint. Erscheint sie nicht (k = 0), so ist der Einsatz verloren.
Ist dieses Spiel "gerecht"?

Lösung

Berechnungen über Binomialverteilung oder über "klassische" Def. der Wahrscheinlichkeit

a) $\underline{k = 0}$

$$p_0 = P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$p_0 = \frac{\binom{3}{0} \cdot 5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

$p_0 = p_B$ Wahrsch. dafür, daß der Spieler verliert bzw. daß der Bankhalter gewinnt.

b) $\underline{k = 1}$

$$p_1 = P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$p_1 = \frac{\binom{3}{1} \cdot 5^2}{6^3}$$

c) $\underline{k = 2}$

$$p_2 = P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$p_2 = \frac{\binom{3}{2} \cdot 5}{6^3}$$

d) $\underline{k = 3}$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{216}$$

$$p_3 = \frac{\binom{3}{3} \cdot 5^0}{6^3}$$

p_s: Wkt. "Spieler gewinnt"

$p_s = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{91}{216}$ $\qquad$ $p_B = p_o = 1 - p_s = \frac{125}{216}$

(s. a))

Also $p_s < \frac{1}{2} < p_B$, d. h. ohne Betrachtung der Gewinnchancen ("um die Ehre"), wäre das Spiel "ungerecht"; ("gerechtes Spiel" soll durch $p_s = \frac{1}{2} = p_B$ charakterisiert sein).

Werden die Gewinnchancen ("Spiel mit Bewertung") in die Betrachtungen einbezogen, so muß die Beurteilung über die "Gerechtigkeit" des Spieles über den Erwartungswert erfolgen.

$$EX = \sum_{k=0}^{3} g_k \cdot p_k$$

$$= 0 \cdot \frac{125}{216} + 2e \cdot \frac{75}{216} + 3e \cdot \frac{15}{216} + 4e \cdot \frac{1}{216}$$

$$= \underline{\frac{199}{216}\, e}$$

g_o: kein Gewinn für Spieler ($g_o = 0$)

g_k ($k = 1, 2, 3$): Gewinne für Spieler (e: Einsatz (z. B. in M));

d. h. $g_k = (k + 1) \cdot e$; $g_1 = 2e$, $g_2 = 3e$, $g_3 = 4e$

z. B. $e = 216$ M $\quad EX = 199$ M $\quad \underline{EX - e = -17 \text{ M}}$

Auch dieses Spiel ist "ungerecht", da $EX = 216$ M ($= e$) sein müßte, um das Spiel als "gerecht" zu bezeichnen, d.h., der "mittlere Gewinn" müßte dem Einsatz e entsprechen.

EY Erwartungswert für Bankhalter

$EX + EY = e$ $\qquad$ $EY = e - EX$

$$= e\,(1 - \frac{199}{216}\,e) = \frac{17}{216}\,e$$

z. B. s. o. $EY = 17$ M

Der "mittlere Gewinn" des Bankhalters muß aber bei einem "gerechten" Spiel seinem "Einsatz" (also 0 M) entsprechen.

Abschließend könnten die Schüler z. B. ein "gerechtes

Spiel" erfinden, hier z. B. durch ... Einsatz (2k)-mal zurück ...

$$EX = 2e \cdot \frac{75}{216} + 4e \cdot \frac{15}{216} + 6e \cdot \frac{1}{216} = \frac{150 + 60 + 6}{216} e$$

$$= e$$

$$EY = e - e = 0$$

2. In einem Versuch sagen Schüler die Zahlen "0" und "1" beliebig an. Die Anzahl der angesagten Zahlen soll z. B. 60 sein.
Die Anzahl der Wechsel der "Läufe" (Umschlagpunkte) von 0 auf 1 und umgekehrt ist eine Zufallsgröße, Bezeichnung L_n

z. B. $L_n = 1$; $\underbrace{111 \ldots 111}_{60 \text{ mal}}$ oder $\underbrace{000 \ldots\ldots 00}_{60 \text{ mal}}$

Uns interessiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße "L_n" und der Erwartungswert der Zufallsgröße!

Lösung

Auswertung des Schülerversuchs:

z. B. längste Kette der "0"
längste Kette der "1"
L_n des Versuchs ermitteln; Vergleich verschiedener Versuche
$1 \leq L_n \leq 60$

Zufälliges Ereignis		Zufallsgröße	Wahrscheinlichkeit
A_1	$\longrightarrow$	$L_n = 1$	$P(L_n = 1) = \frac{2 \cdot 1}{2^n}$
A_2	$\longrightarrow$	$L_n = 2$	$P(L_n = 2) = \frac{2 \cdot (n-1)}{2^n} = \frac{2 \cdot \binom{n-1}{1}}{2^n}$
A_3	$\longrightarrow$	$L_n = 3$	$P(L_n = 3) = \frac{2 \cdot \binom{n-1}{2}}{2^n}$

Zufälliges Ereignis	Zufallsgröße	Wahrscheinlichkeit
A_4 $\longrightarrow$	$L_n = 4$	$P\,(L_n = 4) = \dfrac{2 \cdot \binom{n-1}{3}}{2^n}$

A_n $\longrightarrow$	$L_n = n$	$P\,(L_n = n) = \dfrac{2 \cdot \binom{n-1}{k-1}}{2^n}$

allgemein: $P\,(L_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} \qquad k = 1 \ldots n$

(Binomialverteilung; $p = \frac{1}{2}$)

<u>Erwartungswert der Zufallsgröße L_n</u>

$$EL_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P\,(L_n = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} \qquad j = k - 1$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(j \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j}\right]$$

1. Summand ist "0", deshalb

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} j \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \right]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-j)!} \right]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)!}{(j-1)!(n-1-j)!} \right]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (n-1) \frac{(n-2)!}{(j-1)!(n-2-(j-1))!} \right]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + (n-1) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-2}{j-1} \right] \qquad j = e + 1$$

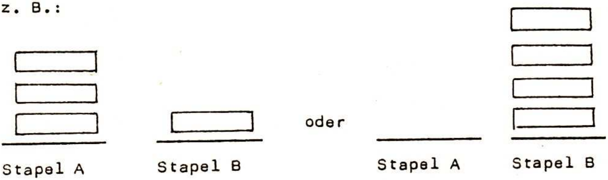
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + (n-1) \cdot \sum_{e=0}^{n-2} \binom{n-2}{e} \right]$$

$$EL_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} \right] = \frac{n+1}{2}$$

---

3. 4 Steine können als zwei Stapel angeordnet werden,

z. B.:



Es gibt also insgesamt fünf verschiedene Anordnungen.

Mit einem Zufallsexperiment wird einer der beiden Stapel ausgewählt, und zwar mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ der Stapel A und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ der Stapel B. Vom ausgewählten Stapel wird dann ein Stein entfernt (falls dort überhaupt ein Stein vorhanden ist). Diesen Vorgang - wir wollen ihn kurz einen "Zug" nennen - wiederholen wir (gedanklich) nötigenfalls bis beide Stapel leer sind.

Wie sollte man die 4 Steine auf die beiden Stapel verteilen, so daß

a) die mittlere Anzahl der Züge bis zum ersten Leerwerden eines Stapels maximal ist?

b) die mittlere Anzahl der Züge bis zum Ende des Abbaus beider Stapel minimal wird?

c) die Wahrscheinlichkeit des Abbaus beider Stapel mit genau 4 Zügen maximal wird?

Verallgemeinerungen

N Steine, 2 Stapel A und B, Abbauwahrscheinlichkeiten p und 1 - p

---

"Hilfsmittel": . diskrete Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert

(evtl. / ggf.) . Baumdiagramme

. geometrische Verteilung, Binomialverteilung

. Computer zur Simulation

Hinweis: Vor Bearbeitung Lösung 'raten' oder 'vermuten' lassen!

Lösung

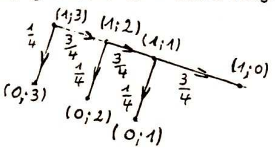
a) Es kommen offenbar nur die Verteilungen

A	1	2	3
B	3	2	1

in Betracht; dabei ist die Verteilung A : 3, B : 1 gewiß nicht die optimale Verteilung.

Y ... (zufällige) Anzahl der Züge bis zum ersten Leerwerden eines Stapels; gesucht: EY = Erwartungswert von Y

Verteilung A : 1
B : 3

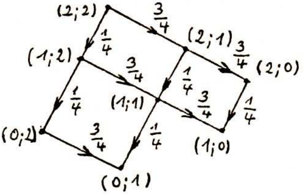


mögliche Werte für Y:

1, 2, 3

$P(Y=1) = \underline{\frac{1}{4}}$, $P(Y=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{16}}$, $P(Y=3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{9}{16}}$

$EY = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{9}{16} = \underline{\frac{37}{16}} = \underline{2,3125}$



Verteilung A : 2
B : 2

mögliche Werte für Y:

2, 3

$P(Y=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$, $P(Y=3) = 1 - \frac{5}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$

$EY = 2 \cdot \frac{5}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \underline{\frac{19}{8}} = \underline{2,375}$

Ergebnis zu a) Die optimale Verteilung der 4 Steine ist also die Verteilung A : 2, B : 2 (und nicht die Verteilung A : 1, B : 3, die den "Abbauwahrscheinlichkeiten" der Stapel A u. B entsprechen würde!)

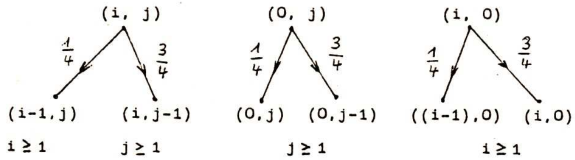
b) Es kommen die Verteilungen

A	0	1	2	3	4
B	4	3	2	1	0

in Betracht; dabei sind die Verteilungen A : 3, B : 1 und A : 4, B : 0 gewiß nicht optimal.

$T_{i,j}$ ... (zufällige) Anzahl der Züge bis zum Ende des Abbaus beider Stapel, wenn am Anfang i Steine auf Stapel A und j Steine auf Stapel B liegen.

$E_{i,j} := ET_{i,j} \mathrel{\hat{=}}$ mittlere Anzahl der Züge bis zum Ende des Abbaus beider Stapel gesucht: $E_{0,4}$ / $E_{1,3}$ / $E_{2,2}$ / $E_{3,1}$ / $E_{4,0}$



Hieraus: $E_{i,j} = (1 + E_{i-1,j}) \cdot \frac{1}{4} + (1 + E_{i,j-1}) \cdot \frac{3}{4}$

$$E_{i,0} = 4i \qquad E_{0,j} = \frac{4}{3}j \qquad (i \geq 1\ ;\ j \geq 1)$$

Damit:

$$E_{0,0} = 0$$

$$E_{1,0} = 4 \qquad E_{0,1} = \frac{4}{3}$$

$$E_{2,0} = 8 \qquad E_{1,1} = \frac{13}{3} \qquad E_{0,2} = \frac{8}{3}$$

$$E_{3,0} = 12 \qquad E_{2,1} = \frac{97}{12} \qquad E_{1,2} = \frac{59}{12} \qquad E_{0,3} = 4$$

$$E_{4,0} = 16 \qquad E_{3,1} = \frac{577}{48} \qquad E_{2,2} = \frac{398}{48} \qquad E_{1,3} = \frac{273}{48} \qquad \underline{\underline{E_{0,4} = \frac{256}{48}}}$$

Ergebnis: Die optimale Verteilung der 4 Steine ist also die Verteilung A : 0, B : 4 (und nicht die Verteilung A : 1, B : 3, die den "Abbauwahrscheinlichkeiten" der Stapel A und B entsprechen würde).

c) Es kommen die Verteilungen

A	0	1	2	3	4
B	4	3	2	1	0

in Betracht;

dabei sind die Verteilungen A : 4, B : 0 und A : 3, B : 1 gewiß nicht optimal. Es bezeichnet q jeweils die Wahrscheinlichkeit des Abbaus beider Stapel (also der 4 Steine) mit genau 4 Zügen.

Verteilung: A : 0, B : 4 $\qquad q = (\frac{3}{4})^4 = 0,3164$

$A : 1,\ B : 3 \qquad q = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}4219$

$A : 2,\ B : 2 \qquad q = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}2109$

Ergebnis: Die optimale Verteilung der 4 Steine ist also die Verteilung A : 1, B : 3, d. h. also, die Verteilung, die den "Abbauwahrscheinlichkeiten" der Stapel A und B entspricht.

4. Eine Strecke der Länge a soll auf "gut Glück" in 3 Teilstrecken zerlegt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus diesen 3 Teilstrecken ein Dreieck bilden läßt?

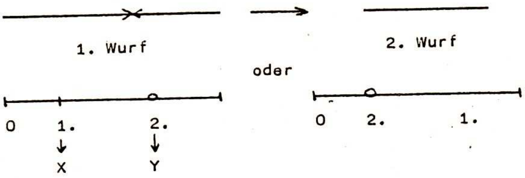
Die Formulierung läßt folgende Betrachtungen zu:

1) Die Punkte werden gleichzeitig geworfen

<u>Lösung</u> $P(\Delta \text{ möglich}) = \frac{1}{4}$

(Dr. Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 60, Aufgabe 8)

2) Vor dem 2. Wurf wird das kleinere Teilstück weggenommen



Realisierung der Zufallsgröße

1. Punkt ≙ X — gleichmäßig verteilt auf dem Intervall $[0;\ 1]$

2. Punkt ≙ Y
- Y gleichmäßig verteilt auf dem Intervall $[x;\ 1]$, falls $X = x$ und $x \leq \frac{1}{2}$
- Y gleichmäßig verteilt auf Intervall $[0; x]$, falls $X = x$ und $x \geq \frac{1}{2}$

$$(*) \quad P\,(\Delta \text{ möglich}) = \int_0^1 P\,(\Delta \text{ möglich} \;/\; X = x)\; f\,(x)dx$$

gleichmäßige
Verteilung

Δ möglich $\Longleftrightarrow$ $a + b \geq c$

$x \leq \frac{1}{2}$ Dreieckseiten $x;\; Y - x;\; 1 - Y;$

Dreieck möglich:

- $x + Y - x \geq 1 - Y \qquad Y \geq \frac{1}{2}$
- $x + 1 - Y \geq Y - x \qquad Y \leq x + \frac{1}{2}$
- $Y - x + 1 - Y \geq x \qquad x \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq Y \leq x + \frac{1}{2}$$

$x \geq \frac{1}{2} \longrightarrow \qquad x - \frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$

mit $(*)$

$$P\,(\Delta \text{ möglich}) = \int_0^{\frac{1}{2}} P\,(\tfrac{1}{2} \leq Y \leq x + \tfrac{1}{2}) \;/\; X = x \quad dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} P\,(x - \tfrac{1}{2} \leq Y \leq \tfrac{1}{2}) \;\; dx$$

- $P\,(\frac{1}{2} \leq Y \leq x + \frac{1}{2} \;/\; X = x) = \dfrac{x + \frac{1}{2}}{1 - x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - x} = \dfrac{x}{1 - x}$

($P\,(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$; gleichmäßige stetige Verteilung
„Sprunghöhe" $\frac{1}{1 - x}$)

- $P\,(x - \frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{x} - \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x} = \dfrac{1 - x}{x}$

$$P\,(\Delta \text{ möglich}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - x}{x}\, dx$$

$$P\,(\Delta\,\text{möglich}) = 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-x}{x}\,dx \qquad \text{(Symmetrie!)}$$

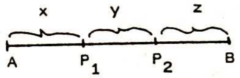
$$P\,(\Delta\,\text{möglich}) = 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$P\,(\Delta\,\text{möglich}) = 2 \cdot \Big[\ln x - x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$P\,(\Delta\,\text{möglich}) = 2 \cdot \ln 2 - 1$$

$$P\,(\Delta\,\text{möglich}) \approx 0{,}3863$$

Programm zur Aufgabe:



1. P_1 zufällig gesetzt
   AP_1 - kürzere Strecke
2. P_2 zufällig auf $\overline{P_1P}$ gesetzt

gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß $\overline{AP_1}$; $\overline{P_1P_2}$; $\overline{P_1B}$ Dreieck

```
10        W: = 0        :      G: = 0
20      FOR I = 1         TO      30000
30        x: = RND (1) * 0,5
40        y: = RND (1) * (1 - x)
50        z: = 1 - x - y
60        IF (x + y  z)
        ADN (x + z  y)
        ADN (y + z  x)
        THEN G: = G + 1   :
              W: = G / I
70      NEXT I
80      PRINT W
```

<u>Rechnerausdruck</u>: 0,38744624820827

Problem der vollständigen Serie

Allgemeine Aufgabenstellung: Ein Versuch hat 1, 2, ..., r ($r \in N$) Ausgänge. Mit wievielen Versuchen muß man durchschnittlich rechnen, damit jeder mögliche Ausgang mindestens einmal eintritt?

Erklärung

1. Beim Münzwurf sind die Ausgänge "Zahl" und "Wappen", also r = 2, möglich. Wie oft muß die Münze im Durchschnitt geworfen werden, damit jeder mögliche Ausgang mindestens einmal eintritt?
2. Beim Würfeln ist r = 6 (Augenzahlen). Wie oft muß der Würfel ... (s. 1.)?

Diskussion des Problems

$r > 2$: Zahl der möglichen Ausgänge

$P_r = \frac{1}{r}$ (gleichmäßige Verteilung wird angenommen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Nach n Würfen ($n \in N$, $n \geq r$) soll eine vollständige Serie realisiert sein.

Zufallsgröße X (zufällige Anzahl der Würfe bis zum ersten Erreichen einer vollständigen Serie)

$$X \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach $n = r + K$ ($K \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Würfen die vollständige Serie aufgetreten ist?

$P(X = r + K) = w_r(K)$ Kennzeichnung der W.-Verteil.

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist z. B. durch ihren Erwartungswert EX charakterisiert, der in den Lösungen betrachtet werden soll.

Das Problem wird für r = 2 und r = 3 durchgerechnet:

Lösung

a) r = 2 (Für Klasse 10 vollständig "machbar")

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$		1	2	3	...	(n - 1)	n	Würfe
	z. B.	1	1	1	...	1	2	
	oder	2	2	2	...	2	1	

$$P(X = \underbrace{2 + K}_{= n}) = P(X = n) = \frac{2}{2^n}$$ $\longrightarrow$ günstige Fälle; $\longrightarrow$ n Würfe $\longrightarrow$ 2^n Möglichk.

$$= \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$W_2(K) = \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \mathop{}_{K=0} W_2(K) = 1$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Folge $(W_2(K))$:

$$W_2(0) = \frac{1}{2}$$
$$W_2(1) = \frac{1}{4}$$
$$W_3(2) = \frac{1}{8}$$

$W_2(K) > W_2(K+1)$

Monotonieverhalten

<u>Erwartungswert</u>

$$EX = \sum_{n=2}^{\infty} P(X = n) \cdot n = \sum_{K=0}^{\infty} W_2(K) \cdot (2 + K)$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} (K + 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} + 2 \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} + 2$$

Durch Probieren erhält man $\sum_{K=0}^{m} K \cdot \frac{1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{m+2}{2^{m+1}}$

Anschließend Beweis mittels vollst. Ind.

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{m+2}{2^{m+1}}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{EX}} = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$ D. h. z. B. Eine (ideale) Münze muß man durchschnittlich dreimal werfen, um beide Ausgänge ("Zahl"; "Wappen") zu erhalten.

b) $\underline{r = 3}$ (Erst in Klasse 11 vollständig "machbar")

1	2	3	1	2	3	4	n - 1	n	Würfe
($\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$)	1	2	.	.	.	3	
			2	3	.	.	.	1	
			1	3	.	.	.	2	

Die Möglichkeiten für den Abschluß der vollst. Serie im n-ten Versuch

2^{n-1} Mögl. z. B. 1, 2 auf den Plätzen (n - 1) zu erhalten

$2^{n-1} - 2$ Mögl. für "alles" 1 oder "alles" 2

$$P\,(X = n) = \frac{3 \cdot (2^{n-1} - 2)}{3^n} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}$$

$$P\,(X = 3 + K) = \frac{2^{K+2} - 2}{3^{K+2}} = W_3\,(K)$$

$W_3\,(0) = \frac{2}{9}$ $W_3\,(3) = \frac{10}{81}$ Monotonieverhalten!

$W_3\,(1) = \frac{2}{9}$ $W_3\,(4) = \frac{62}{729}$ (Zeichnung auf mm-Papier)

$W_3\,(2) = \frac{14}{81}$

<u>Erwartungswert</u>

$$EX = \sum_{K=0}^{\infty} W_3\,(K)\,(K + 3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2^{K+2} - 2}{3^{K+2}} \cdot (K + 3)$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{K+2} \cdot (K+3) - 2 \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{K+2} (K+3)$$

Differentialrechnung! ∇_0

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\,(x)^{K+3} \Big/_{x=\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\,(x)^{K+3} \Big/_{x=\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{d}{dx} x^3 \sum_{K=0}^{\infty} x^K \Big/_{x=\frac{2}{3}} - 2 \frac{d}{dx} x^3 \sum_{K=0}^{\infty} x^K \Big/_{x=\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(x^3 \cdot \frac{1}{1-x}\right) \Big/_{x=\frac{2}{3}} - 2 \frac{d}{dx} \left(x^3 \cdot \frac{1}{1-x}\right) \Big/_{x=\frac{1}{3}}$$

$$\underline{\underline{EX = \frac{11}{2}}}$$

Aus weiteren Berechnungen ergibt sich die Vermutung

$$W_r\ (K) = \frac{(r-1)^{K+r-1} - \binom{r-1}{1}(r-2)^{K+r-1} + \binom{r-1}{2}(r-3)^{K+r-1} -}{r^{K+r-1}}$$

$$\frac{\ldots + (-1)^r \binom{r-1}{r-2} (1)^{K+r-1}}{r^{K+r-1}}$$

Das wäre noch zu beweisen!

A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 2.3.

"Lineare Ungleichungssysteme"

zusammengestellt und bearbeitet durch Doz. Dr. H.-J. Sprengel, PH Potsdam

Formale Einführungsaufgaben

1. a) Geben Sie ein Paar (x,y) reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leq 100 \qquad (1)$$
$$5y - 5x > 0 \qquad (2)$$
$$y + x \geq 21 \qquad (3)$$

   b) Beweisen Sie, daß es mehr als zehn verschiedene derartige Paare (x,y) gibt! (OJM - Aufgabe 201011)

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20 \qquad (1)$$
$$y - x < 4 \qquad (2)$$
$$y - ax \geq 6 \qquad (3)$$

3. Ermitteln Sie sämtliche Eckpunkte des konvexen Bereiches, der durch

$$x + y + 1 \geq 0$$
$$x - 2y - 2 \geq 0$$
$$2x - y - 4 \geq 0$$

definiert ist (vgl. /1/, S. 44).

Aufgaben zur theoretischen Durchdringung

4. a) Beweisen Sie, daß die durch lineare Ungleichungssysteme definierten Mengen konvex sind!

   b) Beweisen Sie, daß der Durchschnitt konvexer Mengen wieder konvex ist (vgl. /1/, S. 21) und damit Aufgabe a)!

5. Beweisen Sie, daß die Summe aus einer beliebigen Lösung eines gegebenen Ungleichungssystems und einer beliebigen Lösung des zugehörigen homogenen Ungleichungssystems wiederum Lösung des gegebenen Systems ist! (vgl. /1/, S. 39)

6.* Beweisen Sie: Ist ein lineares Ungleichungssystem lösbar, so gibt es eine geeignete Linearkombination der Ungleichung, die eine unlösbare Ungleichung ist. (vgl. /1/,S.71)

Lineare Optimierung

7. a) Ein Betrieb stellt die Erzeugnisse A und B her. Die Produktionskapazitäten unterliegen gewissen Einschränkungen.

   Für eine Zeiteinheit gilt:

   - Die $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Gießerei}}{\text{Putzerei}}$ kann entweder $\genfrac{}{}{0pt}{}{50}{40}$ Mengeneinheiten des Erzeugnisses A oder $\genfrac{}{}{0pt}{}{30}{40}$ Mengeneinheiten des Erzeugnisses B oder entsprechende Mengeneinheiten von A und B $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{herstellen}}{\text{bearbeiten}}$.
   - Die Kapazität der Montagestraße $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$ beträgt $\genfrac{}{}{0pt}{}{35}{25}$ Einheiten des Erzeugnisses $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$. Der Betriebsgewinn beträgt pro Erzeugniseinheit $\genfrac{}{}{0pt}{}{25}{35}$ TM bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$.

   Ziel ist ein gewinnoptimales Produktionsprogramm. Inwieweit werden bei einem optimalen Programm die vorhandenen Kapazitäten genutzt?

   b) Man löse die Aufgabe für die Gewinnannahme von $\genfrac{}{}{0pt}{}{24}{40}$ TM bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$.

8. s. /1/, S. 88 ff

9. a sei positiv reell; x, y seien nichtnegativ reell mit

   $$\begin{aligned} x + ay &\leq 7a &\quad (1)\\ -x + y &\leq 2 &\quad (2)\\ 2x - y &\leq 2 &\quad (3) \end{aligned}$$

   Berechnen Sie den maximalen Wert von $ax + y$!

   (Man führe geeignete Fallunterscheidungen nach a ein!)

10. Man zeige, daß $|ax + b| < 1$ einem linearen Ungleichungssystem äquivalent ist,

    $|ax + b| > 1$ dagegen nicht.

Lit.: /1/ Solodownikow, A. S.: Lineare Ungleichungssysteme
Dtsch. Verlag der Wissenschaften
Berlin 1973 (MSB 74)

A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 3.2.

"Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen"

zusammengestellt und bearbeitet von Dieter Kertzsch,
Spezialschule Riesa

Inhalt

Inhalt	Aufgaben

Anmerkung: Die Aufgaben sind in Aufgabenblöcken zusammengestellt. Jeder Aufgabenblock enthält Aufgaben in drei Niveauatufen, wobei die Anforderungen von Stufe 1 zu Stufe 3 zunehmen.

1. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte, Monotonieintervalle und Anzahl der Nullstellen quadratischer Funktionen in Abhängigkeit vom Parameter a!

1.1.1. $f(x) = ax^2 + 1$

1.1.2. $f(x) = ax^2 + a$

1.2.1. $f(x) = ax^2 + a^2$

1.2.2. $f(x) = \sqrt{1 - a^2}\, x^2 + a$

1.3.1. $f(x) = (1 - a^2)\, x^2 - |a|$

1.3.2. $f(x) = |2a + 1|\, x^2 - \sqrt{-a}$

Ermittlung von Gleichungen quadratischer Funktionen: Aufgaben 2 - 4

2. $f(x) = x^2 - 2 \cdot (p_1 + 1)\, x + 1 - p_1 \quad (x, y, p_1 \in R)$

Ermitteln Sie p_1 und f !

2.1. f geht durch P (2; 3).

2.2.1. f berührt die x-Achse.

2.2.2. f geht durch O (0; 0).

2.2.3. $y_S = \frac{9}{4}$

2.2.4. $x_S = -2$

2.2.5. f hat keine Nullstelle.

2.3.1. Für welche $p_1 \in R$ wird die y-Koordinate des Scheitelpunktes maximal bzw. minimal?

2.3.2. Für welches $p_1 \in R$ ist das Produkt der beiden Nullstellen -10?

2.3.3. Für welches $p_1 \in R$ ist die Summe der Quadrate der beiden Nullstellen 8?

3. Ermittlung von Funktionsgleichungen der Form

$f(x) = ax^2 + bx + c$

3.1. S (1; -1); A (-2; 0)

3.2. A_1 (1; 0); A_2 (-2; -1,5); A_3 (3; 6)

3.3.

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

n_1, n_2 sind einstellige natürliche Zahlen.

4. Ermittlung von Funktionsgleichungen

4.1. $f(x) = x^2 + (a + 1)x + a$

Bestimmen Sie die Parabel, die die Symmetrieachse $x = -3$ hat!

4.2. $f(x) = x^2 + (a + 1)x + a$

4.2.1. Diskutieren Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter a! Für welche a R sind die Nullstellen ganzzahlig?

4.2.2. Falls zwei verschiedene Nullstellen existieren, hat dann die Summe der Quadrate der beiden Nullstellen einen größten oder kleinsten Wert?

4.3. $f(x) = ax^2 - ax + c \qquad (a = 0, \quad a, c \quad R)$

Bestimmen Sie diejenige Parabel, die durch den Punkt P (0; 4) geht und auf der x-Achse ein Segment von $\left\{\begin{matrix} 7\ \text{LE} \\ n\ \text{LE} \end{matrix}\right\}$ herausschneidet!

5. Verschieben, Strecken, Stauchen, Spiegeln von Graphen quadratischer Funktionen

5.1. $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$

5.1.1. Verschieben Sie f um 3 Einheiten in Richtung der positiven y-Achse! Gleichung!

5.1.2. Verschieben Sie f um 2 Einheiten in Richtung der negativen x-Achse! Gleichung!

5.1.3. Stauchen Sie f im Verhältnis 1 : 3! Gleichung!

5.1.4. Spiegeln Sie f an der x-Achse! Gleichung!

5.1.5. Spiegeln Sie f an der y-Achse! Gleichung!

5.1.6. Spiegeln Sie f an der Winkelhalbierenden $y = x$! Gleichung!

5.2. Führen Sie die Anweisungen (1) bis (6) nacheinander aus und ermitteln Sie die Endgleichung und den Endgraph!

5.3. Es ist die Ausgangsgleichung zu bestimmen, wenn nach der Nacheinanderausführung der Anweisungen (1) bis (6) folgende Endgleichung entstanden ist:

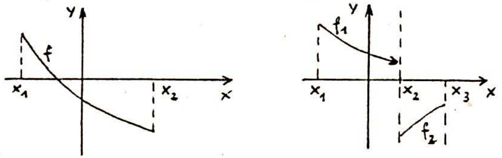
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} \\ + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{9}{4}} \end{cases}$$

Benutzen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich!

6. Funktion und Umkehrfunktion

6.1. - Führen Sie den Monotonienachweis, daß $f(x) = -2x^2$ im Intervall $x \geq 0,\ x \in R$ streng monoton fallend ist!

- Begründen Sie, ob die beiden Funktionen im gegebenen Intervall umkehrbar sind!



f auf $[x_1, x_2]$

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x); & x_1 \leq x < x_2 \\ f_2(x); & x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

6.2. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4; & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2; & x > 2 \end{cases}$

6.2.1. Begründen Sie, warum die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f existiert!

6.2.2. Skizzieren Sie f und $\bar{f}$ in das gleiche Koordinatensystem!

6.2.3. Was sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion?

6.3.1. $f(x) = \sqrt{-x + a}$ $(a > 0,\ a \in R)$

Zeigen Sie, daß f auf dem gesamten Definitionsbereich monoton fallend ist! Bilden Sie die Umkehrfunktion!

6.3.2. $g(x) = \sqrt{-x + a} + \sqrt{+x + a}$ $(a > 0,\ a \in R)$

Untersuchen Sie, ob g auf dem gesamten Definitionsbereich umkehrbar ist!

7. Lösen Sie folgende Gleichungen der Form

$ax^2 + bx = c$! $(a, b, c \in R)$

7.1. $ax^2 - b = 1$ $(a, b, x \in R)$

7.2. $ax^2 - b = 1 + x^2$

7.3. $a^2x^2 - b = b^2x^2 + a$

8. Lösen Sie folgende Gleichungen der Form

$ax^2 + bx + c = 0$! $(a, b, c \in R)$

8.1. $\frac{x + a}{x - a} = \frac{a + b}{a - b}$

8.2. $\frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a - x)^2 - (x - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

8.3. $\frac{a^2 (1 - x^2) + (ax - b)^2}{a^2 (1 - x^2) - (ax - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

9. Lösen Sie folgende Gleichungen!

9.1. $\frac{5}{x + 1} + \frac{6}{x + 2} - \frac{14}{x + 3} = 0$

9.2. $\frac{x - 8}{8x-48} - \frac{2x + 5}{x^2 - 36} + \frac{72 + 13x}{24x + 144} = \frac{5}{12}$

9.3. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} +$

$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} + \frac{1}{x^2 - 13x + 42} =$

$\frac{x (x + 5)}{x^2 - 8x + 7}$

10. Anwendung des Vietaschen Wurzelsatzes:

$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$

10.1. Für welche $a \in R$ ist die Differenz der Lösungen gleich 1?

10.2. Für welche $a \in R$ ist eine Lösung gleich dem Quadrat der anderen Lösung ?

10.3. Für welche $a \in R$ ist die Summe der Kuben der Lösungen gleich $\frac{1755}{64}$?

11. Anwendung des Vietaschen Wurzelsatzes:
Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die als Wurzeln hat:

11.1. $y_1 = x_1 + x_2$; $y_2 = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

11.2. $y_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $y_2 = x_1^2 + x_2^2$

11.3. $y_1 = x_1^2 + x_2^2$; $y_2 = x_1^3 + x_2^3$

12. Zeigen Sie, daß f folgende Funktionalgleichungen erfüllt:

12.1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$;

$x \cdot f(x+2) - (x+2) \cdot f(x+1) = 0 \qquad (x \neq 0)$

12.2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$;

$f(x-1) + 8x = f(x+1) + 6$

12.3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$;

$f[f(x+1)] = f(x) \cdot f(-x)$

13. Einfache Funktionalgleichungen

13.1. $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0;\ a, b, c \in R)$
Ermitteln Sie alle quadratischen Funktionen f, für die gilt: $f(x+1) = f(-x)$!

13.2. $f(x) = x^2 + px + q \qquad (p, q \in R)$
Ermitteln Sie alle quadratischen Funktionen f, für die gilt: $f(p) = f(q) = 0$!

13.3. $f(x) = x^2 + px + q \qquad (p, q \in R)$
Ermitteln Sie alle quadratischen Funktionen f, für die gilt: $f(p) = f(q)$!

14. Extremwertaufgaben

14.1. Die Zahl 250 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß das Produkt der beiden Summanden maximal wird. Wie groß sind die Summanden?

14.2. Aus 200 m Maschendraht soll eine Rechteckfläche mit maximalem Inhalt entstehen.
a) Wie groß sind die Länge und Breite des Zaunes?
Die maximale Rechteckfläche soll unter Ausnutzung einer Mauer entstehen.
b) Wie groß sind jetzt Länge und Breite des Zaunes?

14.3. Ein Sportplatz hat eine Innenbahn von 400 m.
Für welche Länge a und Breite b wird die Fläche des rechteckigen Fußballfeldes maximal?

15. Parabel und Gerade

15.1. Zeigen Sie, daß der Punkt (-4; 16) auf der Geraden g der Gleichung $y = -3x + 4$ liegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch den Punkt B (-3; 9), die parallel zur ursprünglichen Geraden ist.

15.2. Gegeben sind die Punkte A (-4; 16); B (-3; 9) der Parabel $f(x) = x^2$. Gesucht ist das Paar paralleler Geraden AA', BB', welches die Parabel in den Punkten A, A', B, B' schneidet, so daß gilt:
$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{3}{1}$!

15.3. Gegeben sind die Punkte A (x_2, y_2); B (x_1, y_1) der Parabel $f(x) = x^2$. Gesucht ist das Paar paralleler Geraden AA', BB', welches die Parabel in den Punkten A, A', B, B' schneidet, so daß gilt:
$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{3}{1}$!

16. Parabel und Gerade

16.1. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte O (0; 0) und P_{min} $(-3; -\frac{9}{2})$ geht!
Welche Lage hat die Gerade $y = mx$ bezüglich dieser Parabel? Geben Sie die Koordinaten des Punktes A

in Abhängigkeit von m an! A liegt sowohl auf g als auch auf der Parabel.

16.2. $B(x_2; y_2)$ ist zentralsymmetrisch zu A bezüglich O (0; 0) gelegen. Geben Sie die Koordinaten von B in Abhängigkeit von m an!
Bestimmen Sie den geometrischen Ort für alle Punkte B, wenn die Gerade $y = mx$ um den Koordinatenursprung gedreht wird. Geben Sie die Gleichung (x) an!

16.3. Zeigen Sie, daß die Parabel und die Funktion mit der Gleichung (x) eine gemeinsame Tangente besitzen. Bestimmen Sie die Tangentengleichung!

17. Parabel und Gerade

17.1. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
$g(x) = -2x + 3$
Ermitteln Sie die Lagebeziehung von Parabel und Gerade!

17.2. $f(x) = x^2 + 2px + p$
$g(x) = -2x + 3$
Ermitteln Sie die Lagebeziehung von Parabel und Gerade in Abhängigkeit vom Parameter p!

17.3. $f(x) = x^2 + 2px + p$
$g(x) = -2x + 3$
Für welche ganzen Zahlen p sind die Schnitt- und Berührungspunkte von Parabel und Gerade ganzzahlig?

18. Parabel und Gerade

18.1. $f(x) = 2x^2$

$g(x) = \frac{1}{3}x + z$

Für welche $z \in R$ ergeben sich zwei Schnittpunkte?

18.2. Für welche ganzen Zahlen z ergeben sich ganzzahlige Abszissen und Ordinaten für die Schnittpunkte?

18.3. Für welche $z \in R$, $1 \leq z \leq 5$ ergeben sich Schnittpunkte mit ganzzahligen Abszissen und Ordinaten?

19. Parabel und Parabel

19.1. $f_1(x) = ax^2 + c \qquad (a, c \neq 0, \quad a, c \in R)$

$f_2(x) = cx^2 + a$

Welche Lage haben beide Parabeln zueinander?

19.2. Welche Parabeln $f_1(x)$, $f_2(x)$ haben die Nullstellen

$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\quad \pm\sqrt{2}$?

19.3. Wir betrachten die Nullstellen $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{2}$ als Nullstellen einer Funktion 4. Grades.
Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung
$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$!

20. Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung

20.1. Der Abstand des Körpers A vom Körper B beträgt 20 m. Beide Körper bewegen sich in die gleiche Richtung. Körper A legt während der ersten zwei Sekunden 24 m, während der ersten drei Sekunden 39 m zurück, Körper B während der ersten Sekunde 14,75 m, während der ersten zwei Sekunden 29 m zurück.
Nach wieviel Sekunden holt Körper A den Körper B ein?

20.2. Zwei Körper, die sich von zwei Punkten einer Geraden A,B, Abstand 200 m, in ein und dieselbe Richtung geradlinig gleichmäßig beschleunigt bewegen, haben folgende Eigenschaften:
Der erste Körper legt in der ersten Sekunde 25 m und in der zweiten Sekunde $\frac{1}{3}$ mehr zurück. Der zweite Körper, der sich gleichmäßig verzögert bewegt, legt in der ersten Sekunde 30 m zurück und in der zweiten Sekunde $\frac{1}{2}$ m weniger. Nach wievielen Sekunden holt der erste Körper den zweiten Körper ein?

20.3. Ein Körper bewegt sich geradlinig, gleichmäßig beschleunigt aus der Ruhelage. In der letzten Sekunde legt er $\frac{3}{4}$ seines Gesamtweges zurück, die Beschleunigung beträgt $a = 2\ \frac{m}{s^2}$. Berechnen Sie den Gesamtweg und die dafür benötigte Zeit!
Verallgemeinerung: In der letzten Sekunde wird der

$\frac{p}{q}$ te Teil von s zurückgelegt ($p < q$). die Beschleunigung sei a. Berechnen Sie den Gesamtweg und die Gesamtzeit!

21. Senkrechter Wurf

21.1. Eine Kugel wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_o = 25 \frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen. Nach wievielen Sekunden erreicht sie die Höhe $h = 30$ m? Wie groß ist die Steigzeit und die Steighöhe?

21.2. Aus einer Höhe von $h = 195$ m über dem Erdboden bewegt sich ein Körper im freien Fall. Im Moment, wo dieser Körper zu fallen beginnt, werfen wir vom Boden aus einen zweiten Körper mit $v_o = 65 \frac{m}{s}$ senkrecht nach oben. Wann und in welcher Höhe treffen beide Körper aufeinander?

21.3. Gleiche Aufgabenstellung wie 21.2. Ein dritter Körper soll aus einer Höhe von 195 m waagerecht so abgeschossen werden, daß er mit den beiden anderen Körpern gleichzeitig zusammentrifft. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des dritten Körpers, wenn sein Abstand zu den beiden anderen Körpern 2000 m beträgt. Zu welchem Zeitpunkt muß der dritte Körper abgeschossen werden?

22-26 Lösen Sie folgende Gleichungen! Benutzen Sie geeignete Substitutionen!

22.1. $(\frac{x+1}{x-2}) + 12\,(\frac{x-2}{x+1}) - 7 = 0$

$(x \in R)$

22.2. $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 4} + \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{5}{2}$

22.3. $\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\ \ x$ $(x > 0,\ x \in R)$

23.1. $(\frac{x}{x+1})^2 + (\frac{x+1}{x})^2 = \frac{17}{4}$

23.2. $x\,(x+2)\,(x+4)\,(x+6) = (x+1)\,(x+3)^2\,(x+5)$

23.3. $x^2 - 4(p-1)x + 4(p-2)^2 = 0$

Es sind alle diejenigen Werte von $p \in R$ zu ermitteln, für die die quadratische Gleichung wenigstens eine reelle Lösung hat, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist!

24.1. $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$

24.2. $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$

Diskutieren Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter a, $a \in R$!

24.3. $x^4 - 5x^2 + a = 0$

Gleiche Aufgabenstellung wie 24.2.

25.1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

25.2. $x^4 - 8x^3 + 20x^2 + 16x + 3 = 0$

25.3. $(4x+3)^2 \cdot (2x-1) \cdot (x+2) = -\frac{39}{2}$

26.1. $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

26.2. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2 - x^4 = 0$

26.3. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$

27-29 Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

27.1.
$$x + xy + y = -1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

27.2.
$$x \cdot y = 2$$
$$x \cdot z = 3$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

27.3.
$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

28.1.
$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3}$$
$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

28.2.
$$x^4 + y^4 = 12(x^2 + y^2) - 6x^2y^2 + 16$$
$$xy = 3$$

28.3. $\frac{x + y}{xy} + \frac{xy}{x + y} = a + \frac{1}{a}$

$\frac{x - y}{xy} + \frac{xy}{x - y} = b + \frac{1}{b}$

29.1. $x^2 + xy + y^2 = 13$

$x + y = 4$

29.2. $2\sqrt{x + y} + x + y = 8$

$x^3 + y^3 = 40$

29.3. $x + y + z = 3$

$x^3 + y^3 + z^3 = 3$

$xyz = 1$

30. Quadratische Ungleichungen

30.1.1. $x^2 + 2x + 3 > 0$ $(x \in R)$

30.1.2. $x^2 - 4x + 5 < 0$

30.1.3. $x^2 - 6x + 5 > 0$

30.2. $\frac{x^2 + 10}{x} < 7$

30.3. $\frac{5}{4} < x^2 + 2x < 35$

31. Lösen Sie folgende Ungleichungen!

31.1. $-1 < \frac{7x - 3}{8x - 5} < 1$ $(x \in R)$

31.2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 < 0$

31.3. $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$

32. Lösen Sie folgende Ungleichungssysteme!

32.1. $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 4x + 4 < 0$

32.2. $x^2 - 3x + 2 > 0$

$x^2 + 4x + 5 > 0$

$x^2 + 6x + 9 > 0$

$x^2 + x - 2 > 0$

32.3. $1 - |1 - x| < 2x$

$\frac{1}{2} + 2 > |x + 1|$

33. Beweisen Sie folgende Ungleichungen!

33.1. $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ $(x, y \in R^+)$

33.2. $x^4 - 4xy^3 + 3y^4 \geq 0$ $(x, y \in R)$

33.3. $x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy$ $(x, y \in R)$

34. Reziproke Gleichungen

Definition: Reziproke Gleichungen besitzen Lösungen, die zueinander reziprok sind. Es treten keine Mehrfachlösungen auf. Die Lösungen werden dabei vorausgesetzt.

34.1. Eine Gleichung 2. Grades $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0,\ a, b \in R)$ ist genau dann reziprok, wenn .....

34.2. Eine Gleichung 3. Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0,\ a, b, c \in R)$ ist genau dann reziprok, wenn ....

34.3. Eine Gleichung 4. Grades $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0,\ a, b, c, d, e \in R)$ ist genau dann reziprok, wenn ....

35-36 Anwendungen quadratischer Gleichungen

35.1. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 30 cm, sein Flächeninhalt 30 cm^2. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

35.2. Die Maßzahlen des Flächeninhalts und des Umfanges eines rechtwinkligen Dreiecks sind gleich und ganzzahlig. Wie lang sind die ganzzahligen Seiten a, b, c ?

35.3.1. Beweisen Sie, daß in jedem pythagoreischen Zahlentripel $a^2 + b^2 = c^2$ $(a, b, c \in N)$ wenigstens eine durch drei teilbare Zahl enthalten ist.

35.3.2. Führen Sie den Beweis:

Wenn die natürlichen Zahlen a, b, c die Gleichung

$a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, so ist das Produkt $a \cdot b \cdot c$ durch 60 teilbar.

36.1. Für welche $x \in R$ ist der Zähler doppelt so groß wie der Nenner?

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 7}$$

36.2. Für welche $x \in R$ ist der Zähler das k-fache ($k \in Z$) des Nenners?

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 7}$$

36.3.1. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen p, für die die Gleichung $x^2 - 5x + 7 = p \cdot x$ keine Lösung hat!

36.3.2. Bestimmen Sie alle $c \in R$, so daß die Gleichung $x^2 - 5x + 7 = c \cdot x$ zwei komplexe Lösungen besitzt, wobei die Summe der Quadrate der Lösungen gleich 11 ist!

37, 38 Rechnen mit komplexen Zahlen

37. Lösen Sie folgende Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen!

37.1. $x^3 + 1 = 0$

37.2. $x^6 - 1 = 0$

Bilden Sie die Produkte $x_i \cdot y_j$

$(i, j \in (1, 2, 3, 4, 5, 6))$

37.3.1. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

37.3.2. $x^3 + x^2 (1 + i) + x + i + 1 = 0$

38.1. Stellen Sie die Form $a + bi$ her! $(a, b \in R)$

38.1.1. $\sqrt{3 - 4i} =$

Nutzen Sie den Ansatz $\sqrt{3 - 4i} = a + bi$ und bestimmen Sie a, b mit Hilfe eines Gleichungssystems!

38.1.2. $\sqrt{1 - i\sqrt{3}} =$

38.2. Berechnen Sie z!

38.2.1. $|z| - z = 1 + 2i$

38.2.2. $|z| + z = 2 + i$

38.3. Für welche komplexen Zahlen r, s gibt es ein Polynom p (x) mit $(x^2 + rx + 1) \cdot p(x) = x^4 - 1$?

A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 3.3.

"Potenz- und Wurzelfunktionen; Wurzelgleichungen"

zusammengestellt und bearbeitet von einem Autorenkollektiv
an der Spezialschule "Friedrich Engels", Riesa

Ganzrationale Funktionen

1. Gegeben sei f mit $f(x) = x^n$ und $n \in N$.

   a) Beweisen Sie, daß f für $x \geq 0$ streng monoton wachsend ist!

   b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f in Abhängigkeit von n.

   c) Untersuchen Sie die Existenz von Extremalstellen für f.

2. Es sei f^* der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^n$; $n \in N$. Durch welche elementaren Transformationen aus f entstehen dann die Graphen der Funktionen $f(x - a)$, $f(x) + b$, $f(\frac{x}{c})$, $d \cdot f(x)$?

   (vgl. /3/, S. 28 ff.)

3. a) Für welche Verhältnisse der Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_o gilt, daß der Graph g^* von g mit $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ aus dem Graphen von $f(x) = x^3$ durch ausschließlich elementare Transformationen hervorgegangen ist?

   b) Man ermittle <u>die</u> Nullstelle einer solchen Funktion g.

4. Aus einem rechteckigen Material mit den Abmessungen 80 cm x 60 cm ist das Netz eines oben offenen Kastens so zu schneiden, daß das Volumen des Kastens

   a) 24 000 cm^3

   b) 23 000 cm^3 beträgt.

   Wie groß sind die Kantenlängen des Kastens?

   (Hinweis: Im Fall a) ist eine der Lösungen ganzzahlig, im Fall b) ist eine Näherungsmethode - z. B. Bisektion - angebracht.)

5. Bei der Messung der Kantenlängen eines Quaders ergaben sich a = 50 cm, b = 87 cm und c = 93 cm. Jede der Messungen konnte nur mit der Genauigkeit von ± 0,5 cm vorgenommen werden.

   Welche Fehlerschranke ergibt sich für das Volumen, wenn man Fehler "höherer Ordnung" vernachlässigt?

6. Formale Ermittlung von Interpolationspolynomen wie in /2/ Nr. 12-15, S. 45.

7. Man ermittle alle Paare $(f(x), g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_o$$

deren Koeffizienten a_o, a_1, a_2, a_3, b_o, b_1, b_2, b_3 reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1

(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$

(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$

(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$

(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

(OJM - Aufgabe 191241)

8. Mit deg (f) werde der Grad der ganzrationalen Funktion f bezeichnet.
f und g seien ganzrationale Funktionen mit
$\deg(f) = n$, $\deg(g) = p$ und $n \leq p$
Beweise: a) $\deg(a \cdot f + bg) \leq p$ (a und b beliebig, aber fest gewählte reelle Zahlen)
b) $\deg(f \cdot g) = n + p$

9. Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß zu den Polynomen
$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30$,
$g(x) = x^3 + 2x + a$
ein Polynom $h(x)$ so existiert, daß für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

(OJM - Aufgabe 181241)

10. Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat.

(OJM - Aufgabe 221045)

Hinweis auf Lösungsmöglichkeiten:

a) Zerlegung in Produkt zweier quadratischer Terme (versagt allerdings bei den meisten anderen Koeffizientenkombinationen)

b) Betrachtung von $f(x) = g(x)$ mit Funktionen f und g von 4. und 2. Grades so, daß mit Sicherheit Aussagen über das Schnittverhalten dieser Funktionen gemacht werden können.

11. In einer Abhandlung des französischen Astronomen Leverrier über den Planeten Uranus aus dem Jahr 1849 findet sich die Gleichung

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0$$

Beweisen Sie, daß diese Gleichung keine reellen Lösungen hat.

12. Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, daß die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

(OJM - Aufgabe 221241a)

Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten

13. Beweisen Sie, für alle Funktionen f mit

$$y = f(x) = \frac{mx + n}{kx + 1} \quad \text{mit } ml \neq nk,\ k \neq 0$$

gilt, daß ihre graphischen Darstellungen aus den für $y = \frac{1}{x}$ durch die Nacheinanderausführung elementarer Transformationen gewonnen werden können.

(/3/, S. 31)

14. Gibt es eine Funktion f ($f(x) \neq 0$), so daß folgende Bedingungen gelten?
(1) $D(f) = R$
(2) Jede Drehung längs der Ordinatenachse mit dem Faktor $r \neq 0$ kann durch eine Drehung längs der Abzissenachse mit dem Faktor r ersetzt werden. (/3/, S. 34)

15. Ermitteln Sie die Nullstellen und lokalen Extrema der Funktionen f mit

$$f(x) = x + \frac{d}{x} + c\ .$$

16. Die elektromotorische Kraft einer Stromquelle sei e, ihr innerer Widerstand R_1. Wie groß muß der äußere Widerstand x gewählt werden, damit die von der Stromquelle abgegebene Leistung N maximal wird?

17. a) Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion der Funktion

f mit $f(x) = \frac{x}{3x - 1}$

den gleichen Graphen wie f hat. (vgl. /3/, S. 42)

b) Für welche der Funktionen f aus Aufgabe 13 gilt die in a) an einem speziellen Beispiel registrierte Eigenschaft?

Wurzelfunktionen (Wurzelgleichungen)

18. a) Beweisen Sie, daß zu einer Funktion f genau dann eine Umkehrfunktion f^{-1} existiert, wenn f streng monoton ist.

b) Beweisen Sie, daß die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f eine streng monotone Funktion ist.

c) Ermitteln Sie, zu welchen (eingeschränkten) Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten Umkehrfunktionen (Wurzelfunktionen) existieren!

19. Mit welcher Genauigkeit muß die Seitenlänge eines Quadrates gemessen werden, damit der prozentuale Fehler des Flächeninhalts nicht 1 % überschreitet?

20. Gegeben seien die beiden Terme

$$f_1(x) = \sqrt{x + 0{,}1} - \sqrt{x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{1}{10\,(\sqrt{x + 0{,}1} + \sqrt{x})}$$

mit $x \neq 0$

a) Zeigen Sie, daß durch $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die gleiche Funktion f definiert wird, die Terme $f_1(x)$ und $f_2(x)$ damit "formal gleichwertig" sind.

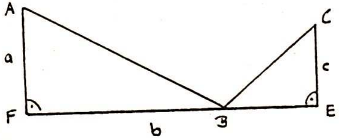
b) Berechnen Sie $f_1(10^6)$ und $f_2(10^6)$ mit dem TR! Daraus folgt, daß $f_1(x)$ und $f_2(x)$ "numerisch nicht gleichwertig" sind.
Welcher Term ist günstiger?

Anmerkung:

Für $f_1(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$ und $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

werden die numerischen Effekte deutlicher.

21. Vorgelegt sei folgende "textlich auszuschmückende" Situation:



mit gegebenen
$1 = \overline{AB} + \overline{BC}$
$a = \overline{AF}$
$c = \overline{CE}$
$b = \overline{FE}$

Gesucht sind die Abstände $\overline{FB}$ und $\overline{BE}$!

22. Formale Wurzelgleichungen höheren Anspruchs findet man z. B. in /1/, S. 46 ff.

23. Welche der "fundamentalen" Funktionalgleichungen

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

wird von einer oder allen Potenzfunktionen $f(x) = x^r$ (mit rationalem r) erfüllt?

Kontrastaufgaben

(sollen vorschnelle und damit falsche Analogiebildungen verhindern)

24. a) Skizzieren Sie den Graphen f^* der Funktion f mit

$$f\,(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

b) Beweisen Sie, daß f^* aus keinem Graphen einer Potenzfunktion durch elementare Transformationen erzeugt werden kann.

25. Bekanntlich gilt: Ist f mit $f\,(x) = \sqrt{x} + c$ nullstellenfrei, so ist auch g mit $g\,(x) = f\,(x) + f\,(2x)$ nullstellenfrei. (Beweis?)
Zeigen Sie, daß eine analoge Aussage für $h\,(x) = \left[\sqrt{x}\right] + c$ falsch ist.

26. Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die

$x^{2x} = \frac{1}{2}$ gilt!

(OJM - Aufgabe 271034)

Literatur:

/1/ P. Borneleit: Übungen für Junge Mathematiker - Teil 4 Gleichungen -
Teubner VG, Leipzig 1976 (MSB 87)

/2/ N. M. Günter, R. O. Kusmin: Aufgabensammlung zur höheren Mathematik, Bd. II -
Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1957

/3/ H.-J. Sprengel, O. Wilhelm: Funktionen und Funktionalgleichungen
Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1984 (MSB 114)

A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 3.4.

"Winkelfunktionen; goniometrische Gleichungen;

ebene Trigonometrie"

zusammengestellt und bearbeitet von einem Autorenkollektiv

an der Spezialschule "Wilhelm Ostwald", Leipzig

Erste Übungen

1. Die rechte Seite folgender Funktionen ist zu vereinfachen:

a) $y = \cos(x + \pi)$

b) $y = -\tan(\pi - x)$

c) $y = \cos(2{,}5\pi - 2x)$

d) $y = \dfrac{\sin(-x - 1{,}5\pi)}{\cot(2 \quad - x)}$

$x \neq (1{,}5 - n)\cdot\pi$

$x \neq (2 - n)\cdot\pi \quad n \in Z$

2. Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(x) = \cos\pi\cdot x + \cos\pi\cdot\sqrt{2}\,x$ nicht periodisch ist.

3. Man berechne die Werte der anderen Winkelfunktionen für Winkel des I. Quadranten:

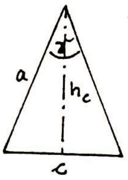
a) $\sin x = \dfrac{4\sqrt{m}}{1 + 4m}$

b) $\cos x = \dfrac{1 - q^2}{1 + q^2}$

Dreiecksberechnungen

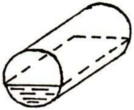
a) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

4. Von einem gleichschenkligen Dreieck seien die Schenkel $a = 75{,}0$ cm und der Basiswinkel $\alpha = 70°$ gegeben.
Wie groß sind der Winkel γ an der Spitze, die Basis c, die Höhe h_c auf der Basis und die Fläche A des Dreiecks?



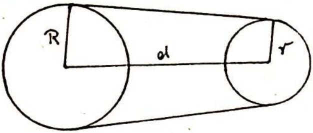
5. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben.
Wie groß sind die Seite s, der Umfang u und die Fläche A des n-Ecks, wenn $n = 9$ und $r = 100$ cm sind?

6. Ein zylindrischer Dampfkessel hat den Durchmesser $d = 100$ cm und die Längl $= 600$ cm und ist bis zu einer Höhe von $h = 80$ cm mit Wasser gefüllt.
Wie groß ist die mit dem Wasser benetzte Fläche A des Dampfkessels?



7. Ein Turm von der Höhe $h = 30{,}0$ m erscheint unter einem Erhebungswinkel von $\alpha = 5°$. Um welche Strecke x muß man sich ihm nähern, damit er unter doppeltem Erhebungswinkel 2α zu sehen ist?

8. Der Achsenabstand zweier Riemenscheiben mit den Radien $R = 0{,}30$ m und $r = 0{,}20$ m beträgt $d = 4{,}50$ m. Welche Länge l hat ein straff über die Scheiben gespannter Treibriemen?



9. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basis $c = 28{,}0$ cm und der Schenkel $a = 42{,}3$ cm gegeben. Es sind

a) der Inkreisradius ϱ

b) der Umkreisradius r zu berechnen.

10. Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a, b und den Winkeln α, β gilt: $c = b + a \tan\alpha/2$. Man beweise diese Formel!

11. Durch eine Grundkante eines gegebenen Würfels mit der Kantenlänge $a = 12{,}3$ cm ist eine unter $\alpha = 30°$ geneigte Ebene gelegt. Wie groß sind die Rauminhalte der beiden Teile, in die der Würfel durch die Ebene zerlegt wird?

b) Sinussatz, Kosinussatz, Flächeninhaltsformeln für Dreiecke

12. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel!

Nr.	α	β	γ	a	b	c
a)	22,62°	30,51°				52,00 m
b)	14°		143°			39 m
c)	36,9°			195 m	180 m	
d)			82,1097	14,300m	26,000m	
e)				45 m	296 m	325 m

13. Ein rechtwinkliges Blatt Papier mit den Seiten a = 23,5 cm und b = 41,2 cm wird so gefaltet, daß zwei gegenüberliegende Ecken übereinander liegen. Wie groß ist die Fläche des dadurch entstandenen Gebildes?

14. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und der Seitenhalbierenden s_a gilt: $2(b^2 + c^2) - a^2 = 4s_a$
Der Beweis ist zu führen.

15. In einem Parallelogramm mit den Seiten a, b und den Diagonalen e und f gilt: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.
Man beweise die Formel.

16. Die Diagonalen e und f eines beliebigen konvexen Vierecks schneiden sich unter einem Winkel φ. Für den Flächeninhalt des Vierecks ergibt sich die Formel

$$A = \frac{ef}{2} \sin\varphi$$

Diese Formel ist zu beweisen.

17. Ein Dreieck ist zu berechnen (Seiten, Winkel, ϱ, A, u) aus:

a) $a : b = 8 : 5$ $\quad A = 1220\ m^2$ $\quad \gamma = 51{,}2°$

b) $h_a + h_b = 153\ m$ $\quad \alpha = 42°$ $\quad \beta = 40°$

c) $\varrho = 100\ m$ $\quad \alpha = 60°$ $\quad \beta = 62°$

d) $a + b = 127\ m$ $\quad A = 500\ m^2$ $\quad \gamma = 30°$

e) $u/2 = 113$ m $\quad a = 76$ m $\quad \alpha = 41°$

f) $a + b = 115$ m $\quad h_a - h_b = 21,3$ m $\quad \gamma = 26°$

g) $a + b = 324$ m $\quad \varrho = 43$ m $\quad \gamma = 72°$

h) $u/2 = 65,04$ m $\quad A = 802,5$ m² $\quad \gamma = 69,2°$

i) $a + b = 52,32$ cm $\quad c = 24,17$ cm $\quad \alpha - \beta = 23,32°$

18. a) Von einem Dreieck sind $h_c = 118,5$ m und $\gamma = 45°$ bekannt. Welche Länge haben die Seiten a, b und c, wenn $\sin\alpha = 4 \sin\beta$ ist?

b) In einem Dreieck mit der Seite $\overline{AB} = c = 140,2$ m ist durch den Eckpunkt C eine Gerade g derart gezogen, daß die Seite c im Punkt D im Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ geteilt wird und die den Strecken AD und DB gegenüberliegenden Teilwinkeln von γ die Größe $\delta = 37°$ und $\varepsilon = 28°$ erhält. Wie groß sind a, b, α, β, γ?

c) Die Seiten a, b, c eines Dreiecks verhalten sich wie 10 : 35 : 39. In welche Teilwinkel δ und ε zerlegt die Seitenhalbieren s_b den Winkel β ?

19. Eine gerade regelmäßige dreiseitige Pyramide habe die Grundkante $a = 5,0$ cm und die Höhe $h = 8,0$ cm. Man berechne den Winkel α zwischen Grund- und Seitenkante, den Neigungswinkel β einer Seitenkante gegen die Grundfläche, den Neigungswinkel γ einer Seitenfläche gegen die Grundfläche sowie den Neigungswinkel δ zweier Seitenflächen zueinander.

20. Vorgegeben seien ein Winkel α mit dem Scheitel A und seine Winkelhalbierende w_α. Zieht man durch einen beliebigen Punkt P auf w_α mit dem Abstand $\overline{AP} = a$ vom Scheitel eine beliebige Gerade g, so schneidet diese auf den Schenkeln des Winkels die

Abschnitte $\overline{AB} = u$ und $\overline{AC} = v$ derart ab, daß für jede Gerade g

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \text{const.} \quad \text{ist.}$$

Man führe den Beweis und drücke die Konstante durch α und a aus.

21. Zeigen Sie, daß die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels β im Dreieck ABC gleich $\dfrac{2ac}{a+b} \cos \dfrac{\beta}{2}$ ist.

22. Bilden Sie nach dem Sinussatz

a) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$ b) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}$

und leiten Sie daraus die sogenannten Mollweideschen Formeln

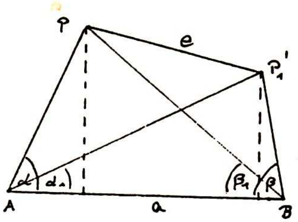
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

ab!

Vermessungsaufgaben

23. Hansensche Aufgabe

Die Entfernung zweier Punkte P und P_1' soll bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden in zwei Punkten A und B mit dem bekannten Abstand $\overline{AB} = a$ die Winkel α und α_1, sowie β und β_1 gemessen.



Zahlenbeispiel:

$a = 311{,}16$ m

$\alpha = 58° \; 24' \; 34''$

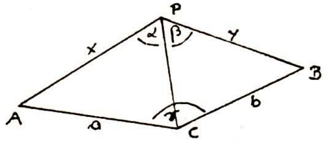
$\alpha_1 = 18° \; 59' \; 07''$

$\beta = 78° \; 58' \; 42''$

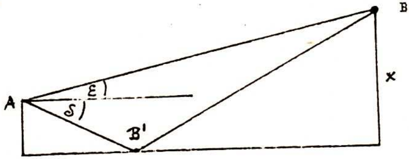
$\beta_1 = 28° \; 17' \; 32''$

24. Snellinsche Aufgabe - Rückwärtseinschneiden

Die Länge dreier Punkte A, B, C zueinander sei durch die Strecke $\overline{AC}$ = a = 625,30 m, $\overline{BC}$ = b = 418,40 m und den Winkel $\sphericalangle$ ACB = γ = 152° 37' 23" bekannt. Durch Messung des Winkels $\sphericalangle$ CPA = α = 47° 26' 04" und $\sphericalangle$ BPC = β = 38° 53' 37" soll die Lage des Punktes P in bezug auf A, B und C bestimmt werden, d.h. es sind die Strecken $\overline{PA}$ = x und $\overline{PB}$ = y zu ermitteln.



25. Ein Ballon schwebt über einem See, in dem sein Spiegelbild B' gesehen wird. Wie groß ist seine Höhe x über dem See, wenn er von einem Standpunkt A mit der Höhe h = 28,32 m über dem See unter dem Höhenwinkel ε = 55° 27' und sein Spiegelbild unter dem Tiefenwinkel δ = 58° 14' zu sehen ist?



26. Ein Eisenbahndamm ist aufzuschütten. Es sollen die Kronenbreite 10,00 m, der Böschungswinkel 30° betragen.
Da die Dammrichtung parallel zu den Höhenlinien des Geländes verläuft, hat die Dammsohle eine Querneigung von 15 %.
Die Dammhöhe h_2 soll 1,60 m betragen.
Zu berechnen sind:

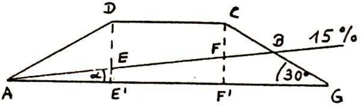
a) die Dammhöhe h_1,

b) die Länge der Böschungsfallinien $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$,

c) die Breite $\overline{AB}$ der Dammsohle,

d) die Fläche ABCD des Dammquerschnittes.

$h_1 = \overline{DE}$ $\qquad h_2 = \overline{CF}$



Additionstheoreme

27. Man vereinfache:

a) $\cos(30^\circ + x) - \cos(30^\circ - x)$

b) $\sin(x - 330^\circ) - \cos(120^\circ - x) + \sin(270^\circ - x)$

c) $\sin(210^\circ - x) + \cos(150^\circ - x)$

d) $$\frac{\sin(60^\circ + x) - \cos(30^\circ + x)}{\sin(60^\circ + x) + \cos(30^\circ + x)}$$

e) $$\frac{1 - \cos^2 2x}{2 \sin x}$$

f) $$\frac{\sin 2x \cdot \cos x}{(1 + \cos 2x)\cdot(1 + \cos x)}$$

28. Zeigen Sie die folgenden Identitäten unter Beachtung ihrer Definitionsbereiche!

a) $$\frac{\sin x + \cos x \cdot \tan y}{\cos x - \sin x \cdot \tan y} = \tan(x + y)$$

b) $$\tan(45^\circ + x) = \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$$

c) $$\frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2 x$$

d) $$\tan^2(45^\circ + x/2) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$$

e) $\cos x \cos y = 0{,}5(\cos(x + y) + \cos(x - y))$

f) $\sin^2(\pi/4 + 2x) = \dfrac{1 + \sin 2x}{2}$

g) $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

h) $\cot^2 x - \tan^2 x = \dfrac{4 \cot 2x}{\sin 2x}$

i) $\dfrac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x + \cos x} = \tan \dfrac{3}{2} x$

j) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin(n + 0{,}5)x - \sin x}{2 \sin x/2}$

k) $\sin^2(45^\circ + x) - \sin^2(30^\circ - x) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2x) = \sin 2x$

l) $32 \sin^2 x \cos^4 x = 2 + \cos 2x - 2 \cos 4x - \cos 6x$

m) $\dfrac{\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x}{\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x} = \cot(\pi - 3x) \cdot \tan^2 x$

Goniometrische Gleichungen

29. $\sin 2x = \tan x$

30. $\cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \qquad x \neq (2k+1)\pi; k \in G$

31. $\cos(x + 38^\circ) + \cos(x + 15^\circ) = 0{,}5$

32. $\sin 5x - \sin x = 0$

33. $3 \cos^2 x = \sin 2x$

34. $1 + \cos x = \cot x/2$

35. $\sin x - \cos(/2 + 3x) = 0$

36. $\sin x + \cos x = \cos 2x$

37. $\sin^4 x + \cos^4 x = 5/8$

Quadratische Gleichungen mit derselben Funktion des unbekannten Winkels (bzw. Gleichungen, die sich auf diesen Term zurückführen lassen):

38. $\sin x - \sqrt{3} \sin^2 x + \dfrac{3}{4} = 0$

39. $\cos 2x + \cos x = 0$

40. $\sin 3x - 2 \sin x = 0$

41. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

42. $3 \cos 2x - 20 \sin x = 9$

Gleichungen, die sich mit Hilfe von Polarkoordinaten lösen lassen:

43. $3 \cos x + \sin x = 1$

44. $\sin x + \cos x = 1$

45. $\cos x = \frac{1}{2} \tan x$

46. $\cos^2 x + \frac{1}{3} \sin x \cos x + \frac{2}{3} \sin^2 x = 1$

47. $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$

48. $2 \cos(x + 60^\circ) + \sin(x - 90^\circ) = 0$

49. $2 \cos(x + 30^\circ) - \sqrt{2} \sin(x - 45^\circ) = 2$

Goniometrische Gleichungssysteme

50. $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

$\cos x - \cos y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

51. $\sin x - \sin y = 1$

$\cos x + \cos y = \sqrt{3}$

52. $\cos x + \sin y = -1$

$x + y = 450^\circ$

53. $2 \sin x - 6 \sin y = -\sqrt{6}$

$\sin x + 3 \cos y = \sqrt{6}$

54. $\sin y = 5 \sin x$

$3 \cos x + \cos y = 2$

55. $\frac{\sin x}{\sin y} = 2$

$x + y = 480^\circ$

Näherungslösungen für Gleichungen $f(x) = cx$, f ist eine Winkelfunktion

---

56. $\cos x - \frac{1}{x} = 0$ $(-2\pi;\ 2\pi)$

57. $\sin x - x^2 = 0$

58. Ein Oeltank hat die Gestalt eines liegenden Zylinders vom Radius 1,00 m. Wie hoch steht das Oel, wenn der Tank zu $q = \frac{1}{4}$ seines Fassungsvermögens gefüllt ist?

59. Wie lang ist die Sehne, die den Kreis in zwei Teilflächen zerlegt, die sich wie 1 : 2 verhalten?