A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 8.
"Analytische Geometrie und Vektorrechnung"

zusammengestellt und bearbeitet von A. Filler, B. Frank, M. Gieding, M. Nicol, L. Wagner an der Humboldt-Universität, Sektion Mathematik bzw. an der Spezialschule "Heinrich Hertz", Berlin 1989

Inhalt

x) Diese Teile werden erst später in der überarbeiteten Fassung der Aufgabensammlung vorliegen.

8.1.

Geradengleichungen

1. Ermitteln Sie, welche der Punkte M_1 (3; 1), M_2 (2; 3), M_3 (6; 3), M_4 (-3; -3), M_5 (3; -1) und M_6 (-2; 1) auf der Geraden (mit der Gleichung) $2x - 3y - 3 = 0$ liegen und welche nicht!

2. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden $2x - 3y - 12 = 0$ mit den Koordinatenachsen, und veranschaulichen Sie diese Gerade in einer Zeichnung!

3. Ermitteln Sie den Anstieg und den Schnittpunkt mit der y-Achse für die Gerade
   a) $5x - y + 3 = 0$ b) $2x + 3y - 6 = 0$
   c) $5x + 3y + 2 = 0$ d) $3x + 2y = 0$
   e) $y - 3 = 0$

4. Eine Gerade g geht durch den Punkt A (3; 1) und schneidet die x-Achse unter einem Winkel von 45°. Ermitteln Sie den Punkt B von g mit $y_B = 4$!

5. Die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC liegen entsprechend auf den Geraden
   $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$.
   Ermitteln Sie die Koordinaten von A, B und C !

6. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der Geraden
   g: $ax - 2y - 1 = 0$ und h: $6x - 4y - b = 0$ in Abhängigkeit von a und b !

7. Für welche Werte von a und b sind die Geraden
   g: $ax + 8y + b = 0$ und h: $2x + ay - 1 = 0$
   a) parallel, b) orthogonal, c) identisch ?

8. Gegeben sei die Gerade $2x + 3y + 4 = 0$. Geben Sie eine Gleichung an für die Gerade durch den Punkt M (2; 1), die zur gegebenen Gerade
   a) parallel, b) orthogonal verläuft !

9. Gegeben seien die Gleichungen
$x - 2y = 0$ und $x - 2y + 15 = 0$
zweier Seiten eines Rechtecks (genauer: der Geraden, auf denen diese Seiten liegen) sowie die Gleichung $7x + y - 15 = 0$ einer seiner Diagonalen. Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks!

10. Gegeben sind die Gleichungen
$8x + 3y + 1 = 0$ und $2x + y - 1 = 0$
zweier Seiten eines Parallelogramms sowie die Gleichung
$3x + 2y + 3 = 0$
einer seiner Diagonalen. Ermitteln Sie die Eckpunkte des Parallelogramms!

11. Ermitteln Sie die Orthogonalprojektion des Punktes $P\ (-6;\ 4)$ auf die Gerade $4x - 5y + 3 = 0$!

12. Ermitteln Sie den Punkt Q, der bezüglich der Geraden $2x - 3y - 3 = 0$ symmetrisch zum Punkt $P\ (-5;\ 13)$ liegt!

13. Gegeben seien die Punkte $A\ (x_A;\ y_A)$ und $B\ (x_B;\ y_B)$. Beweisen Sie, daß

a) der Punkt $M\ \left(\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist!

b) der Punkt $N\ \left(\frac{nx_A + mx_B}{m + n};\ \frac{ny_A + my_B}{m + n}\right)$ die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $m : n$ teilt!

<u>Hinweise</u>: Wählen Sie zunächst A und B im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems!

14. Gegeben seien die Mittelpunkte $M_1\ (2;\ 1)$, $M_2\ (5;\ 3)$ und $M_3\ (3;\ -4)$ der Seiten eines Dreiecks ABC. Geben Sie je eine Gleichung für die Seiten des Dreiecks an! Ermitteln Sie A, B und C !

15. Beweisen Sie, daß der Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden eines Dreiecks mit den Eckpunkten $A\ (x_A;\ y_A)$, $B\ (x_B;\ y_B)$ und $C\ (x_C;\ y_C)$ (der sogenannte Schwerpunkt des Dreiecks) die Koordinaten

$x_M = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ und $y_M = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

hat!

16. Ermitteln Sie den Schwerpunkt folgender Dreiecke ABC!

a) A (3; 1), B (-1; 4), C (1; 1),

b) A (-2; 3), B (5; -2), C (-3; -1),

c) A (7; 4), B (3; -6), C (-5; 2)

Veranschaulichen Sie sich Ihr Ergebnis in einer Zeichnung!

17. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten eines Punktes P (x; y) genügen, der von den Punkten A (7; -3) und B (-2; 1) gleichweit entfernt ist?

18. Beweisen Sie, daß die Gleichung der Geraden durch den Punkt M_1 (x_1; y_1), die zur Geraden $Ax + By + C = 0$ parallel ist, in der Gestalt $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ geschrieben werden kann.

19. Geben Sie eine Gleichung der Geraden durch den Punkt M_1 (2; -3) an, die parallel zur Geraden

a) $3x - 7y + 3 = 0$ b) $x + 9y - 11 = 0$

c) $16x - 24y - 7 = 0$ d) $2x + 3 = 0$

e) $3y - 1 = 0$

ist! Beachten Sie die vorhergehende Aufgabe!

20. Beweisen Sie, daß die Geraden

g: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und h: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

zueinander orthogonal sind gdw. gilt $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$!

21. Gegeben seien die Eckpunkte A (-10; 2) und B (6; 4) eines Dreiecks ABC und der Schnittpunkt N (5; 2) seiner Höhen. Ermitteln Sie den dritten Eckpunkt C des Dreiecks!

22. Geben Sie je eine Gleichung der Seiten des Dreiecks ABC an, von dem der Eckpunkt A (1; 3) und die Gleichungen $x - 2y + 1 = 0$ bzw. $y - 1 = 0$ zweier seiner Seiten gegeben sind!

23. Geben Sie je eine Gleichung der Seiten des Dreiecks ABC an, von dem der Eckpunkt B (-4; -5) und die Gleichungen $5x + 3y - 4 = 0$ bzw. $3x + 8y + 13 = 0$ zweier seiner Höhen gegeben sind!

24. Ermitteln Sie diejenige Gerade, die durch den Punkt P (3; 0) geht und für die der zwischen den Geraden $2x - y - 2 = 0$ bzw. $x + y + 3 = 0$ eingeschlossene Geradenabschnitt im Punkt P halbiert wird!

25. Ermitteln Sie einen Punkt P der x-Achse für den die Summe seiner Abstände von den Punkten M (1; 2) und N (3; 4) minimal ist!

26. Die Punkte A (-1; -9), B (9; 1) und C (-7; 9) sind Eckpunkte eines Dreiecks.
   a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt H der Höhen, den Umkreismittelpunkt U und den Schwerpunkt S des Dreiecks!
   b) Beweisen Sie, daß H, U und S auf ein und derselben Geraden liegen!

Abstand zweier Punkte, Abstand Punkt/Gerade

1. P (3; 5) und Q (1; -3) seien gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrates. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines regelmäßigen Dreiecks mit den Eckpunkten A (-3; 2) und B (1; 6)!

3. Für das Parallelogramm ABCD sind die Eckpunkte A (3;-7), B (5; -7) und C (-2; 5) bekannt. Ermitteln Sie die Länge seiner Diagonalen!

4. Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A (1; 1), B (0; 2) und C (2; -1) einen stumpfen Innenwinkel hat!

5. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks ABC genügen, damit
   a) es rechtwinklig ist mit dem rechten Winkel bei C?
   b) der Winkel bei A größer ist als bei B?

6. Vom Rhombus ABCD sind die Scheitel A (8; -3) und C (10; 11) bekannt sowie die Länge der Seite $\overline{AB}$. $\overline{AB}$ = 10 (Einheiten). Ermitteln Sie die Koordinaten von B und D!

7. Ermitteln Sie den Mittelpunkt M eines regelmäßigen Sechsecks, für das die zwei benachbarten Eckpunkte A (2; 0) und B (5; $3\sqrt{3}$) bekannt sind!

8. Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten A (x_A; y_A), B (x_B, y_B) und C (x_C; y_C) bis auf das Vorzeichen nach der Formel

$$F = \frac{1}{2}\left[(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right.$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

berechnet werden kann! Interpretieren Sie das Vorzeichen von F!

<u>Hinweis</u>: Beschränken Sie Ihre Betrachtungen zunächst auf den Fall, daß das Dreieck im 1. Quadranten liegt, und stützen Sie sich auf eine Zeichnung, die die Lote von A, B und C auf die x-Achse enthält!

9. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke mit folgenden Eckpunkten:
   a) A (2; -3), B (3; 2), C (-2; 5),
   b) P (-3; 2), Q (5; -2), R (1; 3),
   c) L (3; -4), M (-2; 3), N (4; 5) !

10. Berechnen Sie die Länge der Höhe h_c des Dreiecks mit den Eckpunkten
    A (3; 6), B (-1; 3) und C (2; -1) !

11. Gegeben seien die Punkte A (1; 3), B (4; 7), C (2; 8) und D (-1; 4).

Beweisen Sie, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, und ermitteln Sie seine Höhe über der Seite $\overline{AB}$!

12. Ermitteln Sie einen Punkt P der y-Achse, für den die Differenz seiner Abstände von den Punkten M (-3; 2) und N (2; 5) am größten ist!

13. Ermitteln Sie einen Punkt der Geraden $2x - y - 5 = 0$, für den die Summe seiner Abstände von den Punkten A (-7; 1) und B (-5; 5) am kleinsten ist!

14. Ist die Gleichung einer Geraden in der Gestalt

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - p = 0$$

geschrieben, wobei p die Länge der Strecke $\overline{OP}$ und der Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl O^P ist, so nennt man diese Gleichung die Hessesche Normalform der Geradengleichung.

Welche der folgenden Geradengleichungen sind Hessesche Normalformen?

a) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$ b) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$

c) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$ d) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$

e) $-x + 2 = 0$ f) $x - 2 = 0$

g) $y + 2 = 0$ h) $-y - 2 = 0$

15. Berechnen Sie den Abstand des Punktes von der Geraden!

a) A (2; -1) $4x + 3y + 10 = 0$

b) B (0; -3) $5x - 12y - 23 = 0$

c) P (-2; 9) $3x - 4y - 2 = 0$

d) Q (1; -2) $x - 2y - 5 = 0$

Veranschaulichen Sie in einer Zeichnung jeweils die gegenseitige Lage von Punkt und Gerade!

16. Der Punkt A (2; -5) ist Eckpunkt eines Quadrats, dessen eine Seite auf der Geraden $x - 2y - 7 = 0$ liegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

17. Prüfen Sie, ob das Viereck ABCD mit den Eckpunkten A (-1; 6), B (1; -3), C (4; 10) und D (9; 0) konvex ist!

18. Ermitteln Sie, ob die Punkte M (2; 3) und N (5; -1) bezüglich der sich schneidenden Geraden

a) $x - 3y - 5 = 0$ $\qquad$ $2x + 9y - 2 = 0$

b) $2x + 7y - 5 = 0$ $\qquad$ $x + 3y + 7 = 0$

c) $12x + y - 1 = 0$ $\qquad$ $13x + 2y - 5 = 0$

in ein und demselben Winkel, in Neben- bzw. in Scheitelwinkeln liegen!

19. Liegt der Punkt M (-3; 2) innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, dessen Seiten auf Geraden mit folgenden Gleichungen liegen:

$x + y - 4 = 0$, $\qquad$ $3x - 7y + 8 = 0$, $\qquad$ $4x - y - 31 = 0$?

20. Geben Sie jeweils eine Gleichung derjenigen Geraden an, die parallel zu den Geraden mit den folgenden Gleichungen ist und von beiden Geraden gleichen Abstand hat!

a) $3x - 2y - 1 = 0$ $\qquad$ $3x - 2y - 13 = 0$

b) $5x + y + 3 = 0$ $\qquad$ $5x + y - 17 = 0$

c) $2x + 3y - 6 = 0$ $\qquad$ $2x + 3y + 17 = 0$

d) $5x + 7y + 15 = 0$ $\qquad$ $5x + 7y + 3 = 0$

e) $3x - 15y - 1 = 0$ $\qquad$ $x - 5y - 2 = 0$

21. Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ weiß man:

(1) AB: $x + 2y = -10$ $\qquad$ (2) $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$

(3) A: x-Achse $\qquad$ (4) B liegt im 3. Quadranten

(5) $C = (1;\ y_C)$

a) Berechnen Sie die Koordinaten von A, B und C!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!

Kreis, Kreis/Gerade, Kreis/Kreis

1. Stellen Sie jeweils eine Gleichung des Kreises k (M ; r) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r auf!

a) M ist der Koordinatenursprung, $r = 3$;

b) $M = (2;\ 3)$, $r = 7$;

c) k geht durch O (0; 0) und hat den Mittelpunkt M (6;-8);

d) k geht durch A (2; 6) und hat den Mittelpunkt M (-1; 2);

e) Die Punkte A (3; 2) und B (-1; 6) sind Endpunkte eines Durchmessers von k;

f) M = O (0; 0) und die Gerade $3x - 4y + 20 = 0$ ist Tangente an den Kreis;

g) M = (1; -1) und die Gerade $5x - 12y + 9 = 0$ ist Tangente an den Kreis;

h) k geht durch A (3; 1) und B (-1; 3) und M liegt auf der Geraden $3x - y - 2 = 0$;

i) k geht durch A (-1; 5), B (-2; -2) und C (5; 5).

2. Der Punkt C (3; -1) ist Mittelpunkt eines Kreises, der mit der Geraden $2x - 5y + 18 = 0$ eine Sehne der Länge 6 gemeinsam hat. Gesucht ist eine Gleichung dieses Kreises.

3. Gesucht ist eine Gleichung des Kreises,

a) der die einander parallelen Geraden
$2x + y - 5 = 0$ bzw. $2x + y + 15 = 0$
berührt und zwar eine davon im Punkt A (2; 1);

b) der durch den Punkt A (1; 0) geht und die einander parallelen Geraden $2x + y + 2 = 0$ bzw. $2x + y - 18 = 0$ berührt;

c) dessen Mittelpunkt auf der Geraden $2x + y = 0$ liegt und der die Geraden $4x - 3y + 10 = 0$ bzw. $4x - 3y - 30 = 0$ berührt;

d) der durch den Punkt A (-1; 5) geht und die einander schneidenden Geraden $3x + 4y - 35 = 0$ bzw. $4x + 3y + 14 = 0$ berührt.

4. Wie liegt der Punkt A (1; -2) bezüglich folgender Kreise - innerhalb, außerhalb oder auf dem Kreis?

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 = 5$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

5. Berechnen Sie den Abstand des Punktes vom Kreis!

a) A (6; -8), $x^2 + y^2 = 9$;

b) B (3; 9), $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
c) C (-7; 2), $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 15 = 0$

6. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage von Gerade und Kreis!
   a) $y = 2x - 3$ bzw. $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
   b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ bzw. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$
   c) $y = x + 10$ bzw. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

7. Gegeben sei die Gerade $y = kx$. Für welche Werte von k
   a) schneidet die Gerade den Kreis $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$
   b) berührt sie diesen Kreis
   c) haben Gerade und Kreis keinen gemeinsamen Punkt?

8. Ermitteln Sie die Länge derjenigen Sehne des Kreises $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$, die im Punkt A (1; 2) halbiert wird!

9. Berechnen Sie den Abstand des Mittelpunktes des Kreises $x^2 + y^2 = 2x$ von der Geraden, die durch die Schnittpunkte der Kreise
   $x^2 + y^2 + 5x - 3y + 1 = 0$ bzw.
   $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0$ geht!

10. Berechnen Sie die Länge der Sehne, die die Kreise
   $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ und
   $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$ gemeinsam haben!

11. Ermitteln Sie den Punkt P des Kreises
   $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$, der der Geraden
   $8x - 4y + 73 = 0$ am nächsten liegt, und
   berechnen Sie den Abstand d von P zu dieser Geraden!

12. Der Punkt P_1 $(x_1; y_1)$ liege auf dem Kreis
   a) $x^2 + y^2 = r^2$ b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
   Ermitteln Sie je eine Gleichung der Tangente an den Kreis im Punkt P_1!

13. Vom Punkt C (-9; 3) aus sind an den Kreis
   $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$ die Tangenten gelegt.
   Berechnen Sie den Abstand d des Kreismittelpunktes zu

derjenigen Sehne, die die Tangentenberührungspunkte miteinander verbindet!

Erweiterung des kartesischen Koordinatensystems auf den dreidimensionalen Raum

1. Veranschaulichen Sie in einer Zeichnung die Lage folgender Punkte:
   A (3; 4; 6), B (-5; 3; 1), C (1; -3; -5),
   D (0; -3; 5), E (-3; -5; 0), F (-1; -5; -3)!

2. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, die zu den Punkten A (2; 3; 1), B (-3; 2; -1) und C (a; b; c) symmetrisch liegen bezüglich
   a) der xy-Ebene, b) der xz-Ebene, c) der yz-Ebene,
   d) der x-Achse, e) der y-Achse, f) der z-Achse,
   g) des Koordinatenursprungs!

3. In welchen Oktanten können die Punkte P (x; y; z) liegen, deren Koordinaten der folgenden Bedingung genügen?
   a) $x - y = 0$, b) $x + y = 0$, c) $x - z = 0$,
   d) $x + z = 0$, e) $y - z = 0$, f) $y + z = 0$,
   g) $xy > 0$, h) $xz < 0$, i) $yz > 0$,
   j) $xyz > 0$, k) $xyz < 0$

4. Zeichnen Sie einen im 1. Oktanten liegenden Quader ABCDEFGH, für den A (0; 0; 0), B (3; 0; 0) und E (0; 0; 4) Eckpunkte sind! Berechnen Sie die Längen seiner Flächen- und Raumdiagonalen! Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Seitenflächen des Quaders und des Mittelpunktes des Quaders an!

5. Beweisen Sie, daß das Dreieck mit den Eckpunkten A (3; -1; 2), B (0; -4; 2) und C (-3; 2; 1) gleichschenklig ist!

6. Beweisen Sie, daß das Dreieck mit den Eckpunkten A (3; -1; 6), B (-1; 7; -2) und C (1; -3; 2) rechtwinklig ist!

7. Ermitteln Sie den Mittelpunkt M und den Radius r einer Kugel, die durch den Punkt P (4; -1; -1) geht und alle drei Koordinatensysteme berührt!

8. Ermitteln Sie welcher Punkt der x-Achse vom Punkt A (-3; 4; 8) den Abstand 12 hat!

9. Veranschaulichen Sie die Menge aller der Punkte P (x; y; z), deren Koordinaten folgender Bedingung genügen:

a) $x = 4$, b) $x = -2$, c) $y = 5$, d) $y = -3$,
e) $z = 7$, f) $z = -3$, g) $x = y$, h) $y = -x$,
i) $z = 4y$, j) $z = 3x$,
k) $x^2 - y^2 = 0,\quad z = 0,$ l) $x^2 - z^2 = 0,\quad y = 0$

Hinweis: Zeichnen Sie der Übersichtlichkeit wegen jede dieser Punktmengen gesondert (bezogen auf ein räumliches kartesisches Koordinatensystem)!

10. Veranschaulichen Sie sich die Menge aller der Punkte P (x; y; z), deren Koordinaten folgender Bedingung genügen:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 25$
c) $x^2 + z^2 = 25$ d) $y^2 + z^2 = 25$
e) $x^2 + y^2 = 25,\quad z = 7$
f) $x^2 + y^2 = 25,\quad z = -3$
g) $x^2 + y^2 = 25,\quad y = 3$
h) $x^2 + y^2 = 25,\quad x = -4$

11. Veranschaulichen Sie sich die Menge aller der Punkte P (x; y; z), deren Koordinaten folgender Bedingung genügen:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ d) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad z = 7$
e) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad z = -3$
f) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad x = 0$
g) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad y = 0$

Andere Koordinatensysteme

1. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems axy der Ebene wird durch die Gleichung $y = ax$, $x \in R$, $a \in R$, für fest gewähltes a jeweils eine Kurve beschrieben. Ebenso beschreibt $r = a \cdot \varphi$; $\varphi > 0$; $\varphi, a \in P$; $a \neq 0$, für fest gewähltes a jeweils eine Kurve, bezogen auf ein Polarkoordinatensystem. Zeichnen Sie diese Kurve für (qualitativ) verschiedene Werte von a!

2. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems des Raumes bezeichnet man die Menge (n) der Punkte P (x; y; z), für die $x = 0$ (bzw. $y = 0$ bzw. $z = 0$) ist, als Koordinatenebene (n). Ermitteln Sie die "Koordinatenebenen"
   a) eines Zylinderkoordinatensystems,
   b) eines sphärischen Koordinatensystems!

3. Beschreiben Sie die Schnittfigur einer Kugel K (O; r) mit einer Ebene $z = z_0 = \text{const.}$ durch Bedingungen für die Koordinaten ihrer Punkte bezüglich
   a) eines kartesischen Koordinatensystems,
   b) eines Zylinderkoordinatensystems,
   c) eines sphärischen Koordinatensystems!

4. Gegeben sei die Parameterdarstellung
   $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 - 2$ einer Kurve γ.
   a) Liegen die Punkte M (-1; -1), N (4; 2) und P (1; 2) auf dieser Kurve?
   b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von γ mit den Koordinatenachsen!
   c) Ermitteln Sie die Punkte von γ mit der kleinsten Ordinate!
   d) Geben Sie eine Gleichung für γ in x und y an!

5. Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kreises $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ an, indem Sie als Parameter wählen:
   a) den Anstieg der Geraden, die durch den Koordinatenursprung und einen Punkt des Kreises geht;
   b) den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Geraden,

die durch den Mittelpunkt des Kreises geht!

6. Welche Kurven haben folgende Parameterdarstellung?

a) $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$

b) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$

c) $x = a \sin^2 t$, $y = b \cos^2 t$

d) $x = \frac{a}{1 + t^2}$, $y = \frac{at}{1 + t^2}$

e) $x = 3^t + 3^{-t}$, $y = 3^t - 3^{-t}$

f) $x = \frac{a - t}{a + t}$, $y = \frac{t}{a + t}$

g) $x = a \ln t$, $y = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$

h) $x = a + r\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = b + r\,\frac{2t}{1 + t^2}$

7. Welche Kurven haben folgende Polarkoordinatendarstellung:

a) $r = 4$ b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ c) $r = 2a \cos\varphi$

d) $r = \frac{a}{\cos\varphi}$ e) $r = \frac{b}{\sin\varphi}$ f) $r = \frac{2}{1 - \cos\varphi}$

i) $r^2 \cos 2\varphi = a^2$ j) $r = b \sin\varphi$

k) $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$ l) $r = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$

8. Durch die Gleichung

a) $r = a \cdot \varphi$ b) $r = \frac{a}{\varphi}$ c) $r = e^{a\varphi}$

ist für $a \in P$, $a = \text{const.} \neq 0$, jeweils eine Spirale gegeben (Archimedische Sp.; hyperbelische Sp.; logarithmische Sp.). Zeichnen Sie diese Kurve und diskutieren Sie ihren Verlauf für (qualitativ) verschiedene Werte von a !

9. Gegeben sei ein Kreis vom Radius a und auf ihm ein Punkt O, um den sich ein von O ausgehender Strahl dreht, der den Kreis in einem weiteren Punkt A schneidet. Auf diesem Strahl werden von A aus nach beiden Seiten $\overline{AM_1}$ und

$\overline{AM_2}$ der Länge 2a abgetragen.
Geben Sie eine Gleichung der Kurve an, die durch die Punkte M_1 und M_2 beschrieben wird (Kardioide)!

10. Die Endpunkte einer Strecke $\overline{AB}$ der Länge a gleiten auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems. Die Geraden AC und BC, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen, schneiden sich in C, von dem aus das Lot auf $\overline{AB}$ gefällt ist. Der Lotfußpunkt sei M. Geben Sie eine Gleichung für die Kurve an, die von M durchlaufen wird (Astroide).

11. Ein Kreis vom Radius a rollt ohne Reibung auf einer Geraden ab. M sei ein fester Punkt dieses Kreises. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Kurve an, die der Punkt M beschreibt (Zykloide).

12. Ein Kreis vom Radius a rollt ohne Reibung auf einer Geraden ab. Ein Punkt M liegt auf einem vom Mittelpunkt des Kreises ausgehenden und mit dem Kreis starr verbundenen Strahl im Abstand d vom Kreismittelpunkt aus. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Kurve, die von M durchlaufen wird. (Für $d < a$ spricht man von einer verkürzten Zykloide, für $d > a$ von einer verschlungenen oder verlängerten Zykloide.)

13. Zwei durch Parametergleichungen
$x = x_1(t), \quad y = y_1(t), \quad z = z_1(t), \quad t \in I_1$ (I_1 - Intervall) bzw.
$x = x_2(u), \quad y = y_2(u), \quad z = z_2(u), \quad u \quad I_2$ (I_2 - Intervall)
gegebene Kurven l_1 und l_2 heißen zueinander äquivalent gdw. (bei fester Wahl des Koordinatensystems) eine eineindeutige Abbildung
f von I_2 auf I_1 existiert mit $t = f(u)$ und
$x_1(f(u)) = x_2(u), \quad y_1(f(u)) = y_2(u),$
$z_1(f(u)) = z_2(u).$
Gegeben seien Parametergleichungen für vier Kurven:

l_1: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2, a \neq 0$

l_2: $x = a \cos(u^3 + 1)$, $y = a \sin(u^3 + 1)$, $-1 \leq u \leq$
$\leq \sqrt[3]{2\pi - 1}$, $a \neq 0$

l_3: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$,
$0 \leq t \leq 4\pi$

l_4: $x = \cos u^2$, $y = \sin u^2$, $z = 2u$
$0 \leq u \leq 2\pi$

Beweisen Sie, daß

a) l_1 und l_2 einander äquivalent sind,

b) l_3 und l_4 nicht zueinander äquivalent sind,

c) l_1 und l_3 nicht zueinander äquivalent sind!

8.2. Vektoren

1. Wann gilt für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Beziehung $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{a} - \vec{b}$?

2. Es sei ABCD ein Parallelogramm und O ein beliebiger Punkt der Ebene. Weisen Sie nach, daß dann $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ gilt! Beweisen Sie umgekehrt, daß, falls für fünf Punkte O, A, B, C, D die Beziehung $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ erfüllt ist, die Punkte A, B, C, D Eckpunkte eines Parallelogramms sind!

3. Beweisen Sie mit Hilfe von Vektoren:
Zwei Dreiecke, die durch eine Punktspiegelung auseinander hervorgehen, sind kongruent.

4. Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF. Weisen Sie nach, daß die Beziehung $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ gilt!

5. Es sei ein Viereck ABCD gegeben. Die Gerade, die durch A verläuft und parallel zu BC ist, schneidet die Diagonale BD in einem Punkt M, die zu AD parallele Gerade durch B schneide die Diagonale AC in N. Weisen Sie nach, daß die Geraden MN und DC parallel sind!

6. Es sei ABC ein Dreieck, M ein Punkt auf der Seite $\overline{AC}$ mit

$\overline{AM} = \frac{1}{3}\,\overline{AC}$ sowie N ein Punkt auf der Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ über B hinaus mit $\overline{BN} = \overline{BC}$. Ferner sei P der Schnittpunkt der Geraden AB und MN. Ermitteln Sie die Längenverhältnisse der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{PN}$ sowie $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$!

7. Weisen Sie nach:
Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen (nicht unbedingt ebenen) Vierecks sind Eckpunkte eines Parallelogramms.

8. Es sei ABCD $A_1B_1C_1D_1$ ein Parallelepiped mit dem Schnittpunkt O der Raumdiagonalen; M, N, P und Q seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ sowie $\overline{DD_1}$. Weisen Sie nach, daß folgende Beziehungen gelten:
a) $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$
b) $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON}$
c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

9. In einer geraden, vierseitigen Pyramide ABCDE mit rechteckiger Grundfläche sei M Mittelpunkt der Basisfläche ABCD, F der Halbierungspunkt der Kante $\overline{AB}$ sowie G der Schwerpunkt der Seitenfläche DCE. Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem $\overline{FG}$ und $\overline{ME}$ einander teilen!

10. Es sei ABCDEFGH ein Quader, M der Diagonalschnittpunkt der Deckfläche EFGH, N der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$ und P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MN}$. Beweisen Sie, daß P auf der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ liegt und $\overline{AP} : \overline{AG} = 3 : 4$ gilt!

11. Weisen Sie nach, daß sich die Verbindungsstrecken zwischen den Eckpunkten eines beliebigen Tetraeders und den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders in einem Punkt schneiden und jeweils im Verhältnis 1 : 3 teilen!
Bemerkung: Der Schnittpunkt dieser Strecken heißt Schwerpunkt des Tetraeders.

12. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Tetraeders mit den Eckpunkten A (0; 0; 2), B (1; -1; 8), C (-1; -1; -1), D (1; -2; 3)!

13. Von einem Tetraeder ABCD seien die Eckpunkte A (1; -1; 0), B (4; -3; 1) und C (0; 0; 5) gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes, falls der Koordinatenursprung Schwerpunkt des Tetraeders ist!

14. Es sei ABCD ein beliebiges Tetraeder, S sein Schwerpunkt. Welche Beziehung gilt zwischen $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ und $\overrightarrow{SD}$ unter Berücksichtigung aller vier Vektoren?

15. Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ und $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Ermitteln Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$!

16. Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ und $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Ermitteln Sie $|\vec{a} + \vec{b}|$!

17. Welche Bedingungen müssen für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllt sein, damit die Beziehung
a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
b) $|\vec{a} + \vec{b}| \quad |\vec{a} - \vec{b}|$ oder
c) $|\vec{a} + \vec{b}| \quad |\vec{a} - \vec{b}|$ gilt?

18. Ein Junge schwimmt in ruhendem Wasser mit einer Geschwindigkeit $|\vec{v}_1| = 1 \text{ m s}^{-1}$. Der 100 m breite Fluß, den der Junge überqueren will, hat die Strömungsgeschwindigkeit $|\vec{v}_2| = 0{,}8 \text{ m s}^{-1}$. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor (dessen Betrag und Richtung - Winkel zum Ufer), wenn der Junge
a) genau senkrecht zur Stromrichtung schwimmt,
b) unter einem Winkel von 45° mit dem Strom
c) unter einem Winkel von 60° gegen den Strom schwimmt!
Wo und nach welcher Zeit erreicht er jeweils das gegenseitige Ufer?
d) Unter welchem Winkel gegen die Strömungsrichtung müßte er schwimmen, um auf dem kürzesten Wege quer über den Fluß zu gelangen? Entspricht dem kürzesten

Weg auch die kürzeste Zeit?

e) Unter welchem Winkel gegen die Strömungsrichtung muß der Junge schwimmen, wenn er die genau gegenüberliegende Stelle des anderen Ufers in kürzester Zeit erreichen will, falls seine Laufgeschwindigkeit $2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ beträgt? Welche Gesamtzeit benötigt er?

19. Gegeben sei ein System von drei Punktmassen, von denen bekannt ist:

(1) $m_1 = m_2 = \frac{m_3}{2} = 1$

(2) Der Schwerpunkt des Systems sei S, die Punktmasse m_1 befindet sich im Punkt A, m_2 in C und m_3 in B.

Welche Beziehung gilt zwischen $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$ unter Berücksichtigung aller 3 Vektoren?

Bemerkung: Der Begriff des Schwerpunktes wird hier in physikalischem Sinne verwendet.

20. Weisen Sie mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion nach, daß für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, ... $\vec{a}_n$ und beliebige reelle Zahlen x, x_1, ..., x_n die folgenden Beziehungen gelten:

a) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,\vec{a} = x_1\vec{a} + x_2\vec{a} + \ldots + x_n\vec{a}$

b) $x\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = x\vec{a}_1 + x\vec{a}_2 + \ldots + x\vec{a}_n$

21. Beweisen Sie auf Grundlage der Vektorraumaxiome:
Es existiert genau ein Vektor $\vec{o}$, der die Forderung des Axioms 3. erfüllt.

22. Beweisen Sie auf Grundlage der Vektorraumaxiome:
Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ existieren genau ein Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$! Beweisen Sie umgekehrt, daß aus diesem Satz die Axiome 3. und 4. folgen!

23. Weisen Sie nach, daß die Menge der in einem Intervall $\langle a;\ b \rangle$ differenzierbaren Funktionen bezüglich der Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen einen Vektorraum bildet. Überlegen Sie dazu zunächst, wie diese beiden Operationen exakt definiert werden können!

24. Nennen Sie den Nullvektor des Vektorraumes der

a) n - Tupel

b) Polynome höchstens n-ten Grades und

c) in einem Intervall $\langle a; b \rangle$ differenzierbaren Funktionen!

8.3. Lineare Abhängigkeit; Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren

1. In einem Tetraeder ABCD liegt der Punkt E auf der Strecke $\overline{AB}$ mit $\overline{AE} = 3\,\overline{EB}$. Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{EC}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ dar!

2. Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = \vec{i} - 8\vec{j}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 10\vec{j}$ dar! Ist diese Darstellung eindeutig? Geben Sie eine Bedingung an, die erfüllt sein muß, damit ein Vektor der Ebene eindeutig als Linearkombination einer Menge von Vektoren darstellbar ist!

3. Weisen Sie nach, daß jeder Vektor $\vec{x}$ der Ebene als Linearkombination zweier beliebig vorgegebener, nicht paralleler Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ darstellbar ist!

4. Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit für

   a) zwei Vektoren der Ebene,

   b) drei Vektoren des Raumes,

   ohne den Begriff der linearen Abhängigkeit zu verwenden!

5. Weisen Sie nach!

   Ist eine Menge M von Vektoren linear abhängig, so existiert in dieser Menge ein Vektor, der sich als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen läßt.

6. Beweisen Sie, daß eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, stets linear abhängig ist!

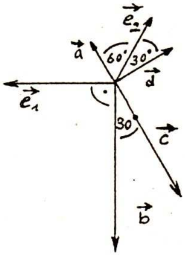
7. Es seien M und N Mengen von Vektoren, wobei $M \subseteq N$ und M linear abhängig ist. Zeigen Sie, daß dann auch N linear abhängig sein muß!

8. Weisen Sie nach, daß zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$ sowie $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j}$ genau dann linear abhängig sind, falls $x_a y_b - x_b y_a = 0$ gilt!

9. Weisen Sie nach, daß die Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des Raumes mit den Koordinaten $(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $(x_b;\ y_b;\ z_c)$ sowie $(x_c;\ y_c;\ z_c)$ bezüglich einer orthogonalen Basis genau dann linear abhängig sind, wenn die Beziehung
$x_a y_b z_c + y_a z_b x_c + z_a x_b y_c - x_c y_b z_a - y_c z_b x_a - z_c x_b y_a = 0$
erfüllt ist!

10. Es seien $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ und $\vec{c} = \vec{i} - 7\vec{k}$ drei Vektoren im Raum.
    a) Weisen Sie nach, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis bilden!
    b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j}$ und $\vec{y} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ bezüglich der Basis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar!

11. Es sei eine Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ der Ebene mit $/\vec{e}_1/ = 2$ und $/\vec{e}_2/ = 3$ gegeben, wobei die Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ einen Winkel von 120° einschließen. Weiterhin seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ Vektoren derselben Ebene mit der in der nebenstehenden Abbildung angegebenen Lage bezüglich $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sowie mit $/\vec{a}/ = 1$, $/\vec{b}/ = 4$, $/\vec{c}/ = 3$ und $/\vec{d}/ = 2$. Stellen Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dar!



12. Es sei ABCDEF ein regelmäßiges Sechseck. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{EF}$ bezüglich der Basis $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ an!

13. Gegeben sei ein Tetraeder ABCS mit den Mittelpunkten A', B' und C' der Seiten AS, BS und CS. Ferner seien O und O' die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und A'B'C'.

a) Bilden die Vektoren $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ und $\overrightarrow{O'C'}$ eine Basis des Raumes?

b) Geben Sie – falls dies erfüllt ist – die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{O'A}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BE'}$ und $\overrightarrow{AE'}$ bezüglich dieser Basis an, wobei E' der Mittelpunkt der Strecke A'C' sein soll!

14. Es sei ABCD ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt O und es seien E, F die Mittelpunkte der (gegenüberliegenden) Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{EA}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ mit $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ an!

15. Es seien A, B, C, D die Eckpunkte der Grundfläche eines Quaders, E, F, G, H die entsprechenden Eckpunkte der Deckfläche. Stellen Sie fest, ob die Vektoren

a) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EH}$

eine Basis des Raumes bilden! Beweisen Sie Ihre Aussage!

16. Gegeben seien vier Punkte A (-2; 3), B (2; -1), C (6; -1) und D (2; 3).

a) Was für ein spezielles Viereck bestimmen diese vier Punkte?

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes dieses Vierecks und das Maß des Winkels $\sphericalangle$ DAB !

17. Gegeben sei ein Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$. Ergänzen Sie diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis, d. h. geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so daß $\vec{a}; \vec{b}$ eine Orthonormalbasis ist!

<u>Hinweis</u>: Setzen Sie $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$ an, und bestimmen Sie die Koeffizienten x und y. Ist $\vec{b}$ dadurch eindeutig bestimmt? Interpretieren Sie Ihre Antwort geometrisch!

18. Entwickeln Sie ein zu Aufgabe 17. analoges Verfahren für den räumlichen Fall!

19. In einem Tetraeder schneiden sich die Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten und den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen in einem Punkt (dem Schwerpunkt - s. 8.2., Aufgabe 11). Unter welchem Winkel schneiden sich je zwei dieser Linien bei einem regulären Tetraeder? (Bindungswinkel von Methan, CH_4)

20. Es sei $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ein Kartesisches Koordinatensystem des Raumes, P ein Punkt des Raumes. Leiten Sie die Beziehungen zwischen den Kartesischen Koordinaten x, y, z des Punktes P und seinen sphärischen Koordinaten $r = |\overrightarrow{OP}|$, $\lambda = \sphericalangle(\vec{i}, x\vec{i} + y\vec{j})$ und $\varphi = 90^\circ - \sphericalangle(\vec{k}, \overrightarrow{OP})$ her!

21. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten des Punktes P mit den sphärischen Koordinaten $r = 0{,}7$; $\lambda = 145^\circ$ und $\varphi = -35^\circ$! (Koordinatensysteme entsprechend Aufgabe 20)

22. Ist die Zuordnung der sphärischen Koordinaten zu einem beliebigen Punkt des Raumes eindeutig bzw. sogar eineindeutig?

8.4. Geraden und Ebenen

1. Ein Sender S wird von zwei Funkmeßfahrzeugen I und II angepeilt. Im Augenblick der Erfassung von S hat der Funkmeßwagen I den Standort P_1 (-300; 800). Er peilt S auf einer Geraden durch P_1 im Winkel $146{,}3^\circ$ an (gemessen gegen N über O). Der Wagen II am Ort P_2 (-400; -300) mißt $26{,}6^\circ$. Wo befindet sich S?
   Bemerkung: Die Koordinaten beziehen sich auf ein Koordinatensystem mit x-Achse in Ost-West- , y-Achse in Nord-Süd-Richtung. Die Erdkrümmung wird vernachlässigt.

2. Ermitteln Sie je eine Gleichung der Geraden, auf denen

die Seiten eines Rhombus liegen, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und dessen Diagonalen auf den Koordinatenachsen liegen. Die Länge der Diagonalen auf der x-Achse betrage 2a und der auf der y-Achse 2b. Welche Längen haben die Seiten des Rhombus?

3. Eine Gerade g habe die Parametergleichung
$\overrightarrow{OP} = t_1\vec{a}_1$ mit $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j}$,
$\overrightarrow{OP} = t_2\vec{a}_2$ mit $\vec{a}_2 = -4\vec{i} - 4\vec{j}$ und
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_o + t_3\vec{a}_3$ mit P_o (-2; -2) und $\vec{a}_3 = \vec{i} + \vec{j}$.
Bestimmen Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen den Parametern t_1 und t_2, t_1 und t_3 sowie t_2 und t_3 !

4. Gegeben sei das Ähnlichkeitszentrum M (-4; -1) zweier ähnlicher und Ähnlichkeitslage befindlicher Dreiecke ABC und DEF sowie die Eckpunkte des kleineren der beiden Dreiecke A (-3; -2), B (2; 0) und C (-1; 1). Der Ähnlichkeitsfaktor sei k = 3. Geben Sie für die Geraden, die die Seiten des zweiten Dreiecks enthalten, je eine Gleichung an!

5. Gegeben seien die Eckpunkte A (3; 0), B (0; 3) und C (-3; -1) sowie A' (6,5; 2,5), B' (5; 4), C' (4; 2) zweier Dreiecke ABC und A'B'C'. Beweisen Sie, daß die Seiten dieser Dreieckspaarweise parallel zueinander sind und daß sich die Geraden, die jeweils durch zwei einander entsprechende Punkte beider Dreiecke gehen, in einem Punkt schneiden.

6. a) Weisen Sie nach, daß die Raumdiagonalen eines Parallelepipeds einander halbieren!
   b) Es seien A (1; 1; 1), B (2; 3; 4), C (-1; 6; 7) und A' (3; 5; 10) Eckpunkte eines Parallelepipeds ABCDA'B'C'D'. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Raumdiagonalen!

7. Der Schwerpunkt S eines (nicht unbedingt ebenen) n-Ecks $P_1P_2 \ldots P_n$ hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP}_i$. Weisen

Sie nach: Wird jeder Eckpunkt P_i mit dem Schwerpunkt S_i der restlichen Eckpunkte verbunden, so gehen n Verbindungslinien durch S.

8. Geben Sie Parametergleichungen für
   a) die x-y-Ebene,
   b) die x-z-Ebene,
   c) die durch $2x - y + 3z - 2 = 0$ gegebene Ebene und
   d) die durch $x + 7 = 0$ gegebene Ebene an!

9. Geben Sie parameterfreie Gleichungen für die durch folgende Parametergleichungen gegebenen Ebenen an:
   a) $\overrightarrow{OP}(t, s) = t(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + s(6\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j})$,
   b) $\overrightarrow{OP}(t, s) = 3\vec{i} - 10\vec{j} + 8\vec{k} + t(\vec{i} + \vec{j}) + s(\vec{j} + \vec{k})$!

10. In einem Parallelepiped ABCDA'B'C'D' wurden alle Punkte der Seitendiagonalen BD mit allen Punkten der Seitendiagonalen A'C' verbunden. Weisen Sie nach, daß die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken in einer Ebene liegen!
    Liegen Sie sogar auf einer Geraden?

11. Geben Sie eine Parameterdarstellung des Durchschnitts der durch
    (1) $x + y + z - 2 = 0$ sowie (2) $x + 2y + z - 1 = 0$
    gegebenen beiden Ebenen an!

12. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P\,(11;\ -\frac{1}{2};\ 9)$ und $Q\,(\frac{1}{2};\ 3;\ \frac{5}{16})$ den durch die Gleichungen
    a) $\overrightarrow{OP}(t, s) = 3\vec{j} - \vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j}) + s(3\vec{i} + 4\vec{k})$,
    b) $3x - y + 8z - 1 = 0$
    beschriebenen Ebenen angehören!

13. Bestimmen Sie die Lage der durch
    (1) $x + y - z = 0,\quad 2x - y - z = 0$ bzw.
    (2) $x + 2y - z = 0,\quad x + 2y + 2z + 4 = 0$
    gegebenen Geraden zueinander!

14. Gibt es einen Schnittpunkt zwischen der Ebene ε mit $\overrightarrow{OP}(s, t) = \vec{i} - \vec{k} + t(\vec{j} + 3\vec{k}) + s(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ und

der Strecke mit den Endpunkten Q_1 (0; 0; 10) und Q_2 (6; 0; 12) ? Bestimmen Sie diesen, falls er existiert! Bestimmen Sie anderenfalls den Abstand des Schnittpunktes der Ebene ε mit der Geraden Q_1Q_2 von demjenigen der beiden Punkte Q_1 und Q_2, der näher an der Ebene ε liegt, als der andere!

15. In welchem Verhältnis λ teilt die Ebene, die durch den Punkt P_0 (1; 0; 2) und die Gerade g mit $\overrightarrow{OP}(t) = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} + t(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ geht, die Strecke $\overrightarrow{AB}$ mit A (-1; 2; 3) und B (0; 0; 1) ?

16. Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten a, b, c der Ebene ε : $ax + by + cz = d$ bestehen, damit die Ebene die gerichtete Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit P_1 $(x_1; y_1; z_1)$ und P_2 $(x_2; y_2; z_2)$ im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt ?

17. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P (2; 0; 3) geht und die beiden Geraden

g_1: $\overrightarrow{OP}(t) = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} + t(\vec{i} + 3\vec{j})$ sowie

g_2: $\overrightarrow{OQ}(s) = 7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} + s(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

schneidet! Weisen Sie nach, daß eine derartige Gerade existiert und daß es nur eine Gerade gibt, die die Bedingung erfüllt!

18. Untersuchen Sie für beliebige reelle Zahlen die Lagerelation zwischen der Ebene

ε: $\overrightarrow{OP}(r, s) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + r(\vec{i} + \vec{k}) + s(\vec{i} + \vec{j})$

und der Geraden

$$g : \overrightarrow{OQ}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + t\left[(1 + \lambda^2)\,\vec{i} + (2\lambda^2 - 1)\,\vec{j} + \vec{k}\right]$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes!

19. Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g durch den Punkt P_0 (1; 0; 0) mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ und der Ebene α durch Q_0 (0; 1; 0) mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{a}_2 = \vec{j} + \vec{k}$! Bestimmen Sie - falls vorhanden - die Koordinaten des Schnittpunktes!

20. Es sei die Ebene α_1 durch P_0 (1; 1; 0), $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{a}_2 = \vec{j} + \vec{k}$, α_2 durch $2x - y + 3k = 2$ gegeben. Ermitteln Sie die Lage der beiden Ebenen zueinander. Geben Sie eine Gleichung für die Schnittgerade - falls vorhanden - an!

21. Wie ließe sich der Winkel zwischen
a) zwei Ebenen,
b) einer Geraden und einer Ebene
sinnvoll definieren? Berechnen Sie die Maße der entsprechenden Winkel für die Beispiele aus den Aufgaben 19. und 20. !

22. Bestimmen Sie für beliebige reelle Zahlen λ die Lagebeziehung zwischen den beiden angegebenen Ebenen, und ermitteln Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden!

a) ε_1 : $\overrightarrow{OP}(r, s) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + r(\vec{i} + \vec{j}) + s(\vec{j} + \vec{k})$
ε_2 : $\overrightarrow{OP}(r, s) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + r(\lambda^2\vec{i} + \vec{j}) + s(\lambda^2\vec{j} + \vec{k})$

b) ε_1 : $x + y + z = 1$
ε_2 : $x + \lambda^2 y + z = \lambda$

8.7. Parallelprojektion ebener Schnitte durch einen geraden Kreiskegel
Einteilung der Kegelschnitte

1. Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der Grundkreisebene einen Winkel von 60 Grad bilden, und eine den Kegel schneidende Ebene, die mit dessen Grundkreisebene einen Winkel von 45 Grad bildet. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß des Kegels, der Ebene und der Schnittfigur sowie deren wahre Gestalt
a) mit Hilfe von Erzeugenden des Kegels,
b) mit Hilfe von Parallelebenen zur Grundkreisebene des Kegels!

2. Ein gerader Kreiskegel werde von einer Ebene so geschnitten, daß die Schnittfigur eine Ellipse ist. Wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn
   a) bei gleichbleibendem Kegel die Neigung der Schnittebene,
   b) bei gleichbleibender Ebenenneigung der Neigungswinkel der Erzeugenden des Kegels zur Grundkreisebene des Kegels kontinuierlich geändert wird?

3. Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der Grundkreisebene einen Winkel von 60 Grad bilden, und eine den Kegel schneidende Ebene, die mit dessen Grundkreisebene einen Winkel von 85 Grad bildet. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß der Schnittfigur sowie deren wahre Gestalt
   a) mit Hilfe von Erzeugenden des Kegels,
   b) mit Hilfe von Parallelebenen zur Grundkreisebene des Kegels!

4. Untersuchen Sie das in Aufgabe 2 genannte Problem für den Fall, daß die Schnittfigur eine Hyperbel ist!

5. Ein Kegel werde von einer Ebene so geschnitten, daß eine Parabel entsteht. Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!

6. Ein gerader Kreiskegel wird von einer parallel zur Achse verlaufenden Ebene geschnitten. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß der Schnittfigur sowie deren wahre Gestalt.
   Wählen Sie dabei den Neigungswinkel der Erzeugenden des Kegels zur Grundkreisebene
   a) 60 Grad,
   b) 30 Grad,
   c) 45 Grad!

Eigenschaften der Kegelschnitte mittels Dandelinscher Kugeln; Punktkonstruktionen

1. Konstruieren Sie eine Schar konfokaler Ellipsen!
   (Anleitung: Unter konfokalen Ellipsen versteht man Ellipsen mit gleichen Brennpunkten und unterschiedlichen Achsenlängen.)

2. Wie ändert sich die Gestalt einer Ellipse, wenn bei gleichbleibendem a die lineare Exzentrizität e kleiner wird?
   Was ergibt sich im Grenzfall $e = 0$?
   Zeichnen Sie eine solche Ellipsenschar!

3. Zeichnen Sie zwei kongruente Ellipsen mit gleichem Mittelpunkt, deren Hauptachsen aufeinander senkrecht stehen!

4. Lösen Sie die Aufgaben 2), 3), 4) des nächsten Abschnittes entsprechend für Hyperbeln!

5. Konstruieren Sie zwei gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamen Brennpunkten!

6. Wie ändert sich die Gestalt einer Hyperbel, wenn bei gleichbleibendem e die Größe a kleiner wird? Zeichnen Sie eine solche Hyperbelschar!

7. Konstruieren Sie zwei Parabeln, deren Scheitel und Achsen zusammenfallen und deren Parameter $2p = 8$ bzw. $2p = 4$ sind! Beschreiben Sie das Verhalten der Parabeln bei weiterer Verkleinerung des Parameters!

8. Beweisen Sie mit Hilfe Dandelinscher Kugeln und der Ortsdefinition der Ellipse, daß beim Schnitt des geraden Kreiszylinders mit einer nicht orthogonal und nicht parallel zur Achse verlaufenden Ebene die Schnittfigur eine Ellipse ist!

9. Beweisen Sie, daß das Bild einer Kugel bei senkrechter Parallelprojektion ein Kreis und bei schräger Parallelprojektion eine Ellipse ist!

10. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel K und eine Ebene E, die zur Achse des Kegels parallel liegt. Der Schnitt von E und K ist eine Hyperbel H. Es sei 2a die Länge der Hauptachse, e die Brennweite. Beweisen Sie, daß der Radius der Dandelinschen Kugeln $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ ist!

11. Ein gerader Kreiskegel werde von einer Ebene E geschnitten. Die Schnittfigur sei eine Ellipse. Außerdem sei eine der beiden Dandelinschen Kugeln vorhanden. Sie berührt den Kegelmantel längs eines Kreises K und in die Ebene E in einem Brennpunkt F der Ellipse. Die Ebene des Kreises K schneidet E in einer Geraden l. Zeigen Sie, daß l eine Leitlinie der Ellipse ist, d. h., daß das Verhältnis der Abstände jedes Ellipsenpunktes von F und l konstant ist.

Mittelpunktsgleichung der Ellipse und Hyperbel; Scheitelgleichung der Parabel

1. Stellen Sie eine Gleichung der Ellipse auf, für die folgendes gilt:
   a) $a = 5$; $b = 4$ b) $2e = 8$; $2a = 10$
   c) $b = 2$; $2e = 6$ d) $a + b = 10$; $2e = 4{,}5$
   e) $2a = 26$; F1 (-10; 0); F2 (14; 0)
   f) $2b = 2$; F1 (- 1; 1); F2 (1; 1)

2. Berechnen Sie die Achsenlänge der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ sowie die Koordinaten ihrer Brennpunkte!

3. Stellen Sie fest, welche der Punkte A1 (-2; 3); A2 (2; -2); A3 (2; -4); A4 (-1; 3); A5 (-4; -3); A6 (3; -1); A7 (3; -2); A8 (2; 1); A9 (0; 15); A10 (0; -16) auf, welche außerhalb und welche innerhalb der Ellipse $8x^2 + 5y^2 = 77$ liegen!

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks, dessen Eckpunkte mit den Brennpunkten und den Nebenscheiteln der Ellipse
   a) $x^2 + 5y^2 = 20$
   b) $9x^2 + 5y^2 = 1$
   zusammenfallen!

5. Die Abszissen der Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ mögen
   a) verdoppelt,
   b) halbiert werden.
   Ermitteln Sie die entstandene Kurve, und veranschaulichen Sie diese!

6. Stellen Sie die Mittelpunkte der Hyperbel, von der
   a) $2a = 6$; $2b = 8$,
   b) $2a = 24$; $2e = 26$,
   c) $2a = 8$; $F1\ (-6;\ 0)$; $F2\ (6;\ 0)$
   gegeben ist, auf!

7. Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf, für die bekannt ist, daß die Abstände eines ihrer Scheitelpunkte von den Brennpunkten 9 bzw. 1 betragen!

8. Gegeben sei die Ellipse $x^2/8 + y^2/5 = 1$. Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf, deren Scheitel sich in den Brennpunkten und deren Brennpunkte sich in den Scheiteln der gegebenen Ellipse befinden!

9. Stellen Sie die Scheitelgleichung der Parabel auf, deren Scheitel im Ursprung liegt und für die bekannt ist:
   a) Sie ist symmetrisch bezüglich der x-Achse, liegt in der rechten Halbebene und für sie ist $p = 3$.
   b) Sie ist symmetrisch bezüglich der x-Achse, liegt in der linken Halbebene und für sie ist $p = 0{,}5$.
   c) Sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, liegt in der unteren Halbebene und für sie ist $p = 0{,}25$.

10. Stellen Sie die Gleichung der Parabel auf, die durch den Ursprung geht, den Brennpunkt $F\ (0;\ -3)$ hat und symmetrisch bezüglich der y-Achse ist!

11. Welche Kurven haben die folgenden Gleichungen?

a) $y = 3/4 \sqrt{16 - x^2}$

b) $x = -5 \sqrt{-y}$

c) $x = 4/3 \sqrt{y^2 + 9}$

d) $y = \sqrt{-x}$

e) $y = \sqrt{-3 - 2x}$

f) $x = + - \sqrt{49 - y^2}$

Veranschaulichen Sie diese Kurven!

12. Berechnen Sie den Wertevorrat der Funktion

a) $x = 2 \sqrt{1 - y^2}$

b) $x = - \sqrt{9 + y^2}$

c) $x = 1/7 \sqrt{49 - y^2}$

d) $x = - \sqrt{-3y}$

e) $y = -3 \sqrt{-2x}$

f) $y = 2/5 \sqrt{x^2 + 25}$!

13. Von einer Strecke konstanter Länge mögen die Eckpunkte auf verschiedenen Koordinatenachsen liegen. Welche Kurve beschreibt ein beliebiger Punkt dieser Strecke, wenn die Endpunkte auf den Achsen gleiten?

14. Gesucht ist die Seite eines Quadrates, dessen Eckpunkte auf der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ liegen. Für welche Hyperbeln kann man ein solches Quadrat finden?

15. Wie lautet die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, die durch den Punkt P (5; 3) hindurchgeht und deren Achsen in den Achsen des Koordinatensystems liegen? Man bestimme auch die Brennpunkte und die Scheitelpunkte der Hyperbel!

16. Von einer Ellipse sind die Brennpunkte F1 (3; 0), F2 (-3; 0) sowie ein Punkt P (4; 12/5) gegeben. Gesucht sind die Längen der Ellipsenachsen und die Gleichung der Ellipse!

17. Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Der Ellipse soll ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind und sich wie $\lambda : 1$ verhalten. Die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechtecks sind zu bestimmen.

18. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben Kurven zweiter Ordnung? Welche beschreiben insbesondere entartete Kurven zweiter Ordnung, und um was für einen Entartungsfall handelt es sich dabei jeweils?

a) $x^2 + y^2 = a^2$

b) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

c) $x^2 + y^2 = -1$

d) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$

Kegelschnitte in achsenparalleler Lage

1. Eine Ellipse berührt die x-Achse im Punkt P1 (8; 0) und die y-Achse in P2 (0; -5); ihre Achsen sind den Koordinatenachsen parallel. Geben Sie für die Ellipse eine Gleichung an!

2. Berechnen Sie für folgende Kurven a, b, e, M, F1 und F2

a) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

b) $x = 5 - 3/4y^2 - 4y - 12$

c) $y = -7 + 2/5\ (16 + 6x - x^2)$

d) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

3. Ermitteln Sie die Scheitel- und Brennpunkte folgender Kegelschnitte, und veranschaulichen Sie ihre Lage im Koordinatensystem!

a) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 72 = 0$

b) $4x^2 - y^2 + 24x + 4y + 31 = 0$

4. Welche Koordinaten hat der Brennpunkt der Parabel

a) $y^2 = 6x^2$

b) $y^2 = -5x$

c) $(y - 3)^2 = 9(x - 1)$

d) $x^2 = -6y$

e) $(x - 4)^2 = -y$?

5. Wie lautet die Gleichung der Parabel mit der Achse $y = 2$, die durch den Punkt P (5; 7) geht und deren Scheitel die Abszisse $x \quad = 4$ hat?

6. Eine Ellipse berühre die y-Achse in P1 (0; 5) und schneide die x-Achse in P2 (5; 0) und P3 (11; 0). Ihre Achsen seien zu den Koordinatenachsen parallel. Geben Sie eine Gleichung für die Ellipse an!

7. Von einer Hyperbel seien zwei Punkte P1 und P2 bekannt. Berechnen Sie jeweils ihre Mittelpunktsgleichung!

a) P1 (5; 9/4), P2 (2 6; 3 2/2)

b) P1 (3; 2), P2 (4; 3)

c) P1 (3; 4), P2 (0; -2)

8. Eine Hyperbel liege symmetrisch zu den Koordinatenachsen, gehe durch P (6; -2 2), und es sei $b = 2$. Stellen Sie ihre Mittelpunktsgleichung auf, und berechnen Sie die Abstände des Punktes P von den Brennpunkten!

9. Wie groß ist der Halbparameter der Parabel $y^2 = 2px$, wenn diese durch den Punkt P (5; 6) geht?

10. Von einer Ellipse sind ein Brennpunkt F1 (3; 0), die zu diesem gehörende Leitlinie $x = 0$ und die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 1/2$ gegeben. Gesucht ist die Gleichung der Ellipse.

Lageverhältnisse von Kegelschnitt und Gerade, Tangenten und Asymptoten

1. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 18$, die durch den Ursprung geht und den Winkel $\sphericalangle(i;\ j)$ halbiert!

2. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Kurven!

   a) (1) $x^2/25 + y^2/9 = 1$ (2) $y = 2x + 3$

   b) (1) $x^2 + 4y^2 = 16$ (2) $y - 1/3x = 5$

   c) (1) $x^2/36 + y^2/16 = 1$ (2) $y = 2x$

3. Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ und des Kreises, der durch die Brennpunkte der Ellipse geht und seinen Mittelpunkt in deren "oberen" Scheitel hat!

4. Wieviele Tangenten an die Ellipse $x^2/9 + y/4 = 1$ gehen durch den Punkt P1 (1; 1), P2 (3; 1), P3 (0; 2)? Stellen Sie ihre Gleichungen auf!

5. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der durch folgende Gleichungen gegebenen Kurven!

   a) (1) $2x - y - 3 = 0$ (2) $x^2/16 + y^2/9 = 1$

   b) (1) $2x + y - 10 = 0$ (2) $x^2/9 + y^2/4 = 1$

   c) (1) $3x + 2y - 20 = 0$ (2) $x^2/40 + y^2/10 = 1$

6. An die Ellipse $(x - 5)^2/16 + (y - 3)^2/4 = 1$ seien vom Ursprung aus die Tangenten gelegt. Berechnen Sie den Winkel, den sie miteinander bilden!

7. Gegeben sei die Ellipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Legen Sie durch den Punkt P (-2; 1) die Sehne der Ellipse, die

von P halbiert wird!

8. Zeichnen Sie die Hyperbel

a) $x^2 - 4y^2 = 18$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

und ihre Asymptoten! Gesucht sind Brennpunkte, Scheitel und der Winkel zwischen den Asymptoten.

9. Unter welchem Winkel schneiden einander die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel?

10. Von einer Hyperbel seien die Asymptoten und die Lage der Scheitel bekannt. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Hyperbel!

11. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Asymptoten der Hyperbel $x^2 - 3y^2 = 12$ mit dem Kreis, dessen Mittelpunkt im rechten Brennpunkt der Hyperbel liegt und der durch den Ursprung geht!

12. Berechnen Sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Koordinaten des Mittelpunktes und die Halbachsen der Hyperbel

a) $4x^2 - 48x - 16y^2 + 128y - 166 = 0$

b) $x^2 + 4x - 4y^2 - 24y - 36 = 0$

c) $2x^2 - 2x - y^2 + y = 0$

d) $4x^2 + x - y^2 + 2y = 12$!

13. Stellen Sie die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ und der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ auf!

14. Berechnen Sie den Punkt der Parabel $y^2 = 12x$, in dem die Tangente an die Parabel mit der Symmetrieachse der Parabel einen Winkel von 30 Grad bildet!

15. Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an die Parabel $x^2 = 4x$ auf, die durch den Punkt P (3; -4) gehen!

16. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 2x$ auf, die
a) parallel zur Geraden $2x - y + 5 = 0$,
b) senkrecht zur Geraden $x + y - 7 = 0$ verläuft!

17. Das Drahtseil einer Hängebrücke habe die Form einer Parabel. Ihr tiefster Punkt liege 17 m über dem Wasserspiegel, die Aufhängepunkte seien 95 m voneinander entfernt und mögen sich 33 m über dem Wasserspiegel befinden. Wie groß sind die Anstiegswinkel des Drahtseils in den Aufhängepunkten?

18. In die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, von dem ein Eckpunkt in den Scheitel S_1 $(-a; 0)$ fällt. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden anderen Eckpunkte des Dreiecks!
(Hinweis: Im gleichseitigen Dreieck betragen die Innenwinkel jeweils 60 Grad!)

19. Beschreiben Sie einer gegebenen Ellipse mit $a = 5$ und $b = 3$ ein Quadrat ein, und legen Sie durch die Eckpunkte desselben die Tangenten an die Ellipse. Wie lang sind die Seiten des durch die Tangentenabschnitte bestimmten Rhombus?

20. Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ auf, die auf den Koordinatenachsen gleiche positive Strecken abschneidet!

21. Zwei Ellipsen seien durch die Gleichungen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ und $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ gegeben. Stellen Sie die Gleichungen für die gemeinsamen Tangenten beider Ellipsen auf, und berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Schnittpunkte der Tangenten bestimmten Rhombus!

22. Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse $(x - c)^2/a^2 + (y - d)^2/b^2 = 1$ im Ellipsenpunkt P_0 $(x_0; y_0)$ auf!

23. Berechnen Sie den Abstand der Brennpunkte der Hyperbel

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ von den Asymptoten und den Winkel zwischen den Asymptoten!

24. Wie lautet die Gleichung der Parabel, die die gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ in dem Scheitelpunkt S_1 (1; 0) vierpunktig berührt?

25. Um den Punkt P_0 (x_0; 0) mit $0 \leq x_0 < a$ soll ein Kreis beschrieben werden, der die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ von innen in zwei reellen Punkten berührt. Wie groß ist der Radius des Kreises, und für welchen Punkt P_0 rücken die beiden Berührungspunkte im Scheitel S_1 (a; 0) der Ellipse zusammen? Für welche Punkte P_0 des gegebenen Intervalls ist ein solcher Kreis nicht vorhanden?

26. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Fußpunkte der Lote vom Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel auf deren Tangenten!

27. Beweisen Sie, daß der Fußpunkt des Lotes am Brennpunkt einer Parabel auf eine ihrer Tangenten auf der Scheiteltangente liegt.
Hinweis: Man bestimme den Schnittpunkt der Tangente in einem Parabelpunkt mit der Scheiteltangente.

28. Beweisen Sie, daß die Gerade $ax + by + c = 0$ genau dann Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ ist, wenn $pb^2 = 2ac$ gilt!

29. Beweisen Sie, daß die Entfernung des Scheitelpunktes einer Parabel vom Schnittpunkt einer Tangente mit der Achse der Parabel gleich der Entfernung des Scheitelpunktes vom Fußpunkt des vom Berührungspunkt dieser Tangente auf die Achse gefällten Lotes ist!

30. Zeigen Sie, daß zwei zueinander senkrechte Tangenten einer Parabel sich auf der Leitlinie schneiden!

31. Zeigen Sie, daß der Abstand des Fußpunktes des von einem Parabelpunkt S auf die Parabelachse gefällten Lotes vom Schnittpunkt der Normalen in S gleich dem Abstand des Scheitelpunktes der Parabel von ihrer Leitlinie ist.

32. Zeigen Sie, daß die Gerade $c_1x + c_2y + c_3 = 0$ Tangente an die Kurve $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ genau dann ist, wenn $b^2c_2^2 + a^2c^2 - c^2 = 0$ gilt.

33. Beweisen Sie, daß die Mittelpunkte der zu einer Hauptachse einer Ellipse der Hyperbel parallelen Sehne dieser Kurve immer auf der anderen Hauptachse liegen!

34. Beweisen Sie, daß die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Parabel alle auf einer Parallelen in ihrer Achse liegen!

35. Beweisen Sie: Schneidet eine Gerade eine Hyperbel in den beiden Punkten T_1 und T_2 und die Asymptoten in den Punkten S_1 und S_2, so haben die Strecken S_1S_2 und T_1T_2 dieselben Mittelpunkte!

36. Beweisen Sie: Der Berührungspunkt einer Tangente an eine Hyperbel halbiert die Strecke zwischen den Schnittpunkten dieser Tangente mit den Asymptoten!

37. Beweisen Sie, daß jede in den Asymptoten einer Hyperbel parallele Gerade diese Hyperbel in genau einem Punkt schneidet!

38. Beweisen Sie, daß der Umkreis des Dreiecks, das von drei Tangenten einer Parabel begrenzt wird, durch den Brennpunkt dieser Parabel geht!
Hinweis: Man zeige zunächst, daß die Fußpunkte der von einem Punkt aus auf die Seitengeraden eines Dreiecks gefällten Lote genau dann auf einer Geraden liegen, wenn der Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks liegt und verwende dann Aufgabe 27.

Charakteristische Eigenschaften und Besonderheiten der Kegelschnitte

1. Beweisen Sie, daß die Mittelpunkte jeder Schar paralleler Sehnen einer Ellipse auf einer Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!

2. Die Spiegeloberfläche eines Scheinwerfers werde durch die Rotation einer Parabel um ihre Symmetrieachse gebildet. Der maximale Durchmesser des Spiegels betrage 80 cm, seine Tiefe 10 cm. In welcher Entfernung vom Scheitel der Parabel muß man die Lichtquelle anbringen, wenn sie zur Erzeugung eines parallelen Strahlenbündels im Brennpunkt liegen muß?

3. Es sei M der Mittelpunkt einer Ellipse mit der großen Halbachse a. F_1 sei der Schnittpunkt einer ihrer Tangenten mit der Geraden durch ihre Brennpunkte und P_2 der Fußpunkt des Lotes vom Tangentenberührungspunkt auf diese Gerade. Beweisen Sie, daß $MP_1 \cdot MP_2 = a^2$ ist!

4. Beweisen Sie, daß der Abstand eines Brennpunktes der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ von ihren Asymptoten gleich b ist!

5. Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von der Asymptote der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ und den durch einen beliebigen Punkt derselben parallel zu den Asymptoten geführten Geraden bestimmt wird, konstant ist und ab/2 beträgt!

6. Beweisen Sie, daß das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ von ihren beiden Asymptoten konstant ist und $a^2b^2/a^2 + b^2$ beträgt!

7. Gegeben seien eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten. Beweisen Sie, daß die Tangenten im Schnittpunkt beider Kurven senkrecht aufeinander stehen!

8. Beweisen Sie, daß die Tangenten zweier Parabeln mit gemeinsamer Achse und einem gemeinsamen, zwischen ihren Scheiteln gelegenen Brennpunkt, im Scheitelpunkt beider Kurven senkrecht aufeinander stehen!

9. Bestimmen Sie die Menge der Punkte, die beim Spiegeln eines (des) Brennpunktes eines Kegelschnittes an den Kegelschnittangenten entsteht!

10. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Fußpunkte der von den Brennpunkten einer Ellipse auf ihre Tangenten gefällten Lote!
Hinweis: Hierzu benutze man die Tatsache, daß jede Ellipsentangente den Winkel halbiert, den die Brennstrahlen nach ihrem Berührungspunkt miteinander bilden, und außerdem, daß bei Verkürzung aller von einem Punkt in der Ebene ausgehenden Strecken um die Hälfte ihrer Länge irgendein Kreis mit dem Radius r in einen Kreis mit dem Radius r/2 übergeht.

11. Gegeben sind eine Ellipse mit der großen Achse 2a, den Brennpunkten F_1, F_2 und dem Mittelpunkt M sowie ein Punkt P außerhalb der Ellipse. Der Kreis mit dem Durchmesser F_1P schneidet den Kreis um M mit dem Radius a in zwei Punkten Q_1 und Q_2. Zeigen Sie, daß PQ_1 und PQ_2 Tangenten an die Ellipse sind!
Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 10.

12. Wie läßt sich die in Aufgabe 11 gegebene Konstruktion einer Ellipsentangente in die Konstruktion einer Tangente von einem Punkt P aus an eine Parabel übertragen?

13. Beweisen Sie: Das Produkt der Abstände der Brennpunkte einer Ellipse bzw. Hyperbel von ihren Tangenten ist gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse!

14. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, von denen aus zwei zueinander senkrechte Tangenten an die durch die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ gegebene Ellipse (Hy-

perbel) gelegt werden können.

Hinweis: Die Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkt P seien Q_1 und Q_2. Man setze das skalare Produkt der Vektoren $\overrightarrow{PQ_1}$ und $\overrightarrow{PQ_2}$ gleich 0. Die Berechnung der Koordinaten von Q_1 und Q_2 ist dabei nicht nötig; es genügt, die Koeffizienten der quadratischen Gleichung für sie heranzuziehen.

15. Beweisen Sie: Haben eine Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ und eine Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ dasselbe Paar von Brennpunkten, so schneiden sie einander in allen vier Schnittpunkten rechtwinklig (d. h. so, daß in jedem Schnittpunkt die Tangente an die Ellipse senkrecht auf der Tangente an die Hyperbel steht).

Gemeinsame Scheitelgleichung

1. Konstruieren Sie nach folgenden Angaben einen Kegelschnitt!

a) F_1 (-9; 0), $\varepsilon = 3/2$, l_1 hat die Gleichung $x = -4$

b) F_1 (-9/4; 0), $\varepsilon = 3/4$, l_2 hat die Gleichung $x = 4$

c) F_2 (1; 0), $\varepsilon = 1/3$, l_2 hat die Gleichung $x = 9$

d) F (5; 0), $\varepsilon = 1$, l hat die Gleichung $x = -5$

2. Stellen Sie eine Gleichung des Kegelschnittes auf, dessen Brennpunkte auf der x-Achse symmetrisch zum Ursprung liegen und für den gilt:

a) $\varepsilon = 3/5$, $e = 3$

b) $\varepsilon = 5/4$, $a = 8$

c) $\varepsilon = 3/2$, $e = 3$

d) $\varepsilon = 12/13$, $b = 5$!

3. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität e der Ellipse, für die gilt:

a) ihre Nebenachse erscheint von den Brennpunkten aus gesehen unter einem Winkel von 60 Grad,

b) die Strecke F_1F_2 sieht man vom Nebenscheitel aus unter einem rechten Winkel!

4. Ermitteln Sie die numerische Exzentrizität einer gleichseitigen Hyperbel!

5. Ermitteln Sie die numerische Exzentrizität der Ellipse, für die der Abstand der Brennpunkte gleich dem Abstand der Endpunkte der großen und der kleinen Halbachse ist!

6. Stellen Sie eine Gleichung der Bahnkurve des Punktes P (x; y) auf, bei dessen Bewegung sein Abstand vom Punkt A (1; 0) stets gleich
   a) einem Drittel,
   b) dem Dreifachen seines Abstandes von der Geraden $x = 9$
   bleibt!

7. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne in Sonnennähe (Perihel) und in Sonnenferne (Aphel) näherungsweise sich wie 29 : 30 verhalten!

8. Stellen Sie die Gleichung der Parabel und ihrer Leitlinie auf, wenn die Parabel durch die Schnittpunkte der Geraden $x + y = 0$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 + 4y = 0$ geht und symmetrisch zur y-Achse liegt! Zeichnen Sie den Kreis, die Gerade und die Parabel!

9. Der Abstand zwischen den Leitlinien einer Ellipse betrage 36 Einheiten, die Abstände eines Ellipsenpunktes von den Brennpunkten dieser Ellipse 9 bzw. 15. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ellipse auf!

10. Ermitteln Sie die Menge der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren!