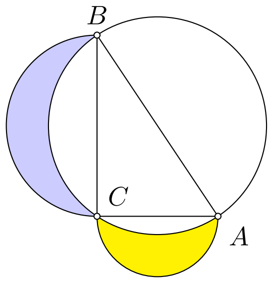
Polygonmöndchen

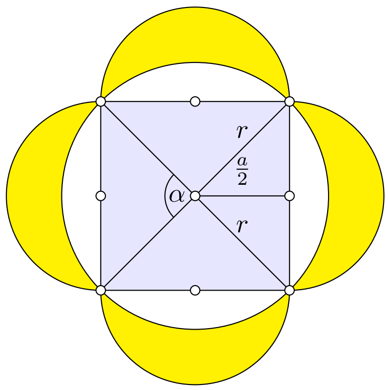


Auf den griechischen Mathematiker Hippokrates geht das Problem der „Möndchen“ zurück.

Über den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise gezeichnet. Zusätzlich wird der Umkreis des Dreiecks eingetragen. Dabei entstehen zwei Flächen in Form eines zunehmenden Mondes, die sogenannten ”Möndchen”.

Überraschend ist nun, dass die Summe der Flächeninhalte dieser Möndchen gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist. Diese Tatsache war Hippokrates und anderen antiken griechischen Mathematikern bekannt und eine wesentliche Ursache dafür, dass man glaubte eine Möglichkeit für die Quadratur des Kreises zu finden.

Die Idee der Möndchen kann auf beliebige regelmäßige N-Ecke erweitert werden.



Angenommen das regelmäßige Vieleck hat n Ecken, so ergibt sich der Gesamtflächeninhalt der Möndchen als

$$A = nA_{\text{Halbkreise über den Seiten}} - (A_{\text{Umkreis des Vielecks}} - A_{\text{Fläche des Vielecks}})$$

Ist r der Umkreisradius des Vielecks, so wird für den Flächeninhalt eines der n Dreiecke im Vieleck

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} ab \sin\left(\text{Zentriwinkel}\right) = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

wobei der Zentriwinkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ist. Für das Vieleck wird damit

$$A_{\text{Vieleck}} = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

Die Umkreisfläche ist

$$A_{\text{Vieleckumkreis}} = \pi r^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse r und der halben Seitenlänge $\frac{a}{2}$ als Kathete wird weiterhin

$$\frac{\frac{a}{2}}{r} = \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Die Seitenlänge ist somit $a = 2r \sin \frac{\pi}{n}$. Die n Halbkreise über den Seiten besitzen die Gesamtfläche

$$A_{\text{Halbkreise}} = \frac{n}{2} \pi \left(r \sin \frac{\pi}{n} \right)^2$$

Für die Möndchen ergibt sich

$$A = r^2 \frac{n}{2} \sin \frac{2n}{\pi} + \frac{n}{2} \pi \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} - \pi \right)$$

Für $n = 8$ und $r = 4$ wird damit zum Beispiel $A = \pi(16 - 16\sqrt{2}) + 32\sqrt{2} = 24{,}4341\ldots$. Hinweis: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin 22{,}5° = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

c.: Steffen Polster, Dezember 2019