LEHRBUCH DER MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

SECHSTES SCHULJAHR

ZWEITER TEIL

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

00603

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

SECHSTES SCHULJAHR

Zweiter Teil

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1954

Verfaßt von Dr. Helmut Klein

Zeichnungen von Kurt Dornbusch

Redaktionelle Bearbeitung: Johannes Riedel und Kurt Grudner

Redaktionsschluß: 1. September 1953

Bestell-Nr.: 00 603-1 0,45 DM · 1.-310. Tausend · Lizenz-Nr. 203 · 1000/53 - AIa - 6/53
Satz: VEB Offizin Haag-Drugulin in Leipzig III/18/38
Druck: VEB Messe-Druck, Leipzig III/18/171
und „Volksstimme" Druckerei und Verlag Magdeburg IV/14/48

A. Achsensymmetrie

1. Einführung in die Achsensymmetrie

Die Abbildung 1 zeigt einen Schmetterling, die Abbildung 2 ein Blatt.

Die Flügel des Schmetterlings in Abbildung 1 sind – genaugenommen – Körper, jedoch ist die Dicke der Flügel so gering, daß man die Flügel als ebene Flächen ansehen kann. Wir wollen bei den folgenden Betrachtungen die Gegenstände als Zeichnung in unserer Zeichenebene, also als ebene Figuren ansehen.

Die betrachteten Figuren bestehen jeweils aus zwei Teilen, die untereinander die gleiche Form und Größe haben. Bei dem Schmetterling in der Abbildung 1

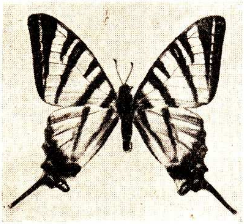


Abb. 1

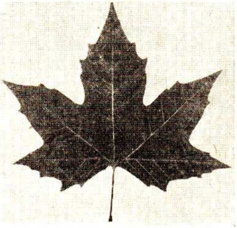


Abb. 2

kann man diese Eigenschaft leicht erkennen. Klappt nämlich der Schmetterling seine Flügel zusammen, so decken sich diese genau.

Zeichne die Umrisse des Schmetterlings und des Blattes auf durchsichtiges Papier! Falte die Zeichnungen so, daß sich die beiden Hälften decken!

Auch in der Technik werden häufig Teile so um eine Achse geklappt, daß sie sich decken. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das Scharnier in Abbildung 3.

Beschreibe seine Wirkungsweise!

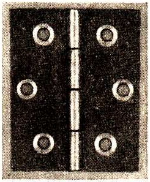


Abb. 3

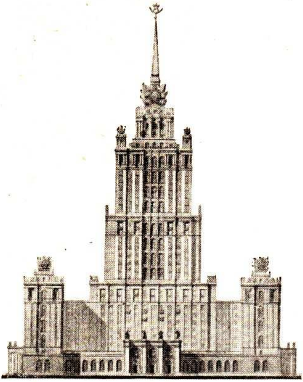


Abb. 4

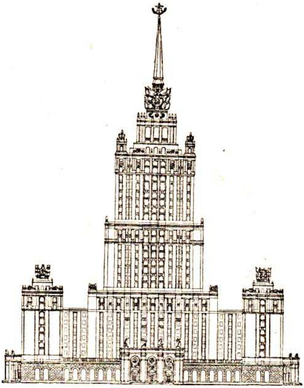


Abb. 5

Die Abbildung 4 zeigt eines der schönen, großen Gebäude, die in Moskau gebaut werden. In der Abbildung 5 sehen wir einen Teil des Bauplanes für dieses Gebäude. Die Abbildungen 6 und 7 stellen ein Segelflugmodell und einen Teil der vereinfachten Bauzeichnung dar. Das abgebildete Haus und das Segelflugmodell sind in Wirklichkeit Körper; die Pläne dagegen sind ebene Figuren, da sie auf ein Blatt Papier gezeichnet werden. Wir wollen jetzt die festgestellten Eigenschaften näher untersuchen.

Jeder der beiden Baupläne besteht aus zwei Teilen, die beim Umklappen um eine Gerade zur Deckung gebracht werden können. Die beiden Teile haben also gleiche Form und Größe.

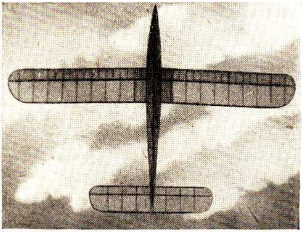


Abb. 6

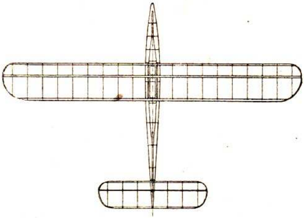


Abb. 7

Die Abbildung 8 stellt eine Figur dar, die man auf die folgende Weise herstellen kann: Man faltet ein Blatt Papier. Durch die Faltgerade entstehen auf dem Blatt Papier zwei Teilebenen. Auf den einen Teil des Blattes spritzt man einige Tintenkleckse, dann faltet man das Blatt um die Faltgerade und drückt dabei die noch feuchten Tintenkleckse breit.

Stelle eine solche Figur her und zeichne die Faltgerade ein!

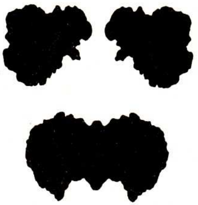


Abb. 8

Ebene Figuren, die die gleiche Eigenschaft wie die Abbildungen 5, 7 und 8 haben, können wir sehr leicht durch Falten erzeugen: Wir zeichnen zum Beispiel auf ein Zeichenblatt eine Gerade s und mit Tinte ein Rechteck $ABCD$ (Abb. 9), klappen das Zeichenblatt um die Gerade s und drücken dabei die noch tintenfeuchte Figur $ABCD$ auf den anderen Teil des Faltblattes ab. Dort entsteht das Rechteck $B'A'D'C'$ (sprich: B-Strich, A-Strich, D-Strich, C-Strich). Nach dem Zurückklappen sind auf dem Zeichenblatt zwei Figuren sichtbar (Abb. 10): die ursprüngliche Figur (das Rechteck $ABCD$) und die neue Figur (das Rechteck $B'A'D'C'$). Man nennt die ursprüngliche Figur auch Urfigur, während die neue Figur als Bildfigur bezeichnet wird. Die linke Seite der Urfigur entspricht der rechten Seite der Bildfigur. Man sagt daher: Die Urfigur ist gegenüber der Bildfigur seitenvertauscht. Jede der Abbildungen 1 bis 8 besteht aus zwei Teilfiguren, die ebenfalls seitenvertauscht zueinander sind.

Wir können das Rechteck $ABCD$ auch mit Bleistift zeichnen und nach dem Falten um die Gerade s die Eckpunkte mit einer Stecknadel durchstechen. Die Bildfigur läßt sich dann auf der zweiten Teilebene leicht einzeichnen. Auch die Abbildungen 2, 4, 5, 6 und 7 können wir uns durch Falten und Durchstechen der Punkte oder Abdrücken von tintenfeuchten Linien erzeugt denken. Die Faltgeraden können wir leicht finden, indem wir die Figuren auf durchsichtiges Papier pausen und das Blatt so um eine Gerade falten, daß sich die Figur auf der einen Seite der Geraden mit der Figur auf der anderen Seite genau deckt.

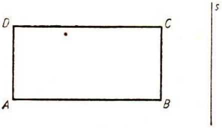


Abb. 9

Pause die Umrisse der Abbildungen 2, 4, 5, 6 und 7 auf ein durchsichtiges Blatt Papier, suche die Faltgerade in der angegebenen Weise und zeichne die Faltgerade ein!

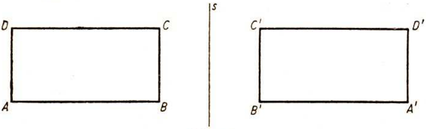


Abb. 10

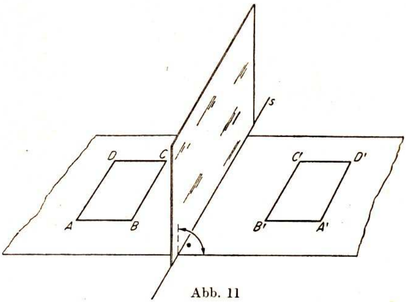


Abb. 11

Die Figuren in den Abbildungen 1 bis 8 nennt man **achsensymmetrisch** in bezug auf die Faltgerade. Die Gerade heißt deshalb auch **Symmetrieachse.** •

Es ist notwendig, die Eigenschaft der Symmetrie durch eine Erklärung genau festzulegen.

Erklärung:* *Zwei Punkte einer Ebene, die beim Umklappen der einen Teilebene um eine bestimmte Gerade auf die andere Teilebene genau aufeinanderfallen, nennt man achsensymmetrisch zueinander in bezug auf diese Gerade. Die Gerade heißt Symmetrieachse.

Zwei Figuren in einer Ebene, die beim Umklappen der einen Teilebene um eine Gerade auf die andere Teilebene genau aufeinanderfallen, nennt man achsensymmetrisch zueinander in bezug auf diese Gerade oder – kurz – achsensymmetrisch zueinander.

Wenn eine Figur aus zwei Teilfiguren besteht, die achsensymmetrisch zueinander sind, nennt man die ganze Figur achsensymmetrisch in sich.

Wir können achsensymmetrische Figuren nicht nur durch Falten, sondern auch auf die folgende Weise erzeugen:

Wir zeichnen auf ein Blatt Papier eine Gerade s und ein Rechteck $ABCD$. Nun stellen wir auf die Gerade s senkrecht zu der Zeichenebene eine Glasscheibe. Hinter der Glasscheibe entsteht das Spiegelbild des Rechtecks $ABCD$. Man kann dieses Spiegelbild leicht nachzeichnen als das Rechteck $B'A'D'C'$ (Abb. 11). Daß die Figuren $ABCD$ und $B'A'D'C'$ achsensymmetrisch zueinander in bezug auf s sind, prüfen wir durch Umklappen um s nach. $ABCD$ und $B'A'D'C'$ decken sich dann.

Wollen wir feststellen, ob zwei Punkte, zwei Geraden, zwei Figuren achsensymmetrisch zueinander sind, so müssen wir untersuchen, ob eine Symmetrieachse vorhanden ist. Wie wir wissen, ist das eine Gerade mit der Eigenschaft, daß sich beim Umklappen um sie die beiden Punkte, Geraden oder Figuren decken.

Zu zwei beliebigen Punkten kann man immer eine Symmetrieachse finden. Auch zu zwei beliebigen Geraden gibt es immer eine Symmetrieachse.

Abb. 12

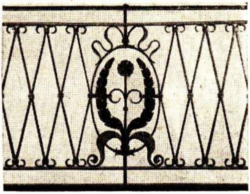


Abb. 13

Achsensymmetrie finden wir sehr häufig in der Natur, in der Technik und in der Kunst, zum Beispiel an Häuserfronten, am Flugzeug, am Auto, an Blättern und Blüten (vgl. die Abbildungen 1 bis 7 sowie 12 – Scherenschnitt aus der Volksrepublik China – und 13 – schmiedeeisernes Gitter). Es ist jedoch zu beachten, daß man diese Figuren nur in sehr grober Annäherung oder in zeichnerischer Darstellung als **ebene Figuren** bezeichnen kann. In der Wirklichkeit ist zum Beispiel auch eine Häuserfront nicht eben, sondern sie weist Vorsprünge auf. Wir haben nur die **Achsensymmetrie ebener Figuren** erklärt.

Aufgaben

1. Pause die Abbildungen 14, 15 und 16 durch! Suche die Symmetrieachsen durch Falten! Welche Punkte und Strecken sind achsensymmetrisch zueinander?
2. Wieviel Symmetrieachsen sind in den Figuren der Abbildungen 17, 18 und 19 vorhanden? Pause die Figuren ab, suche die Symmetrieachsen durch Falten und prüfe die Symmetrie!

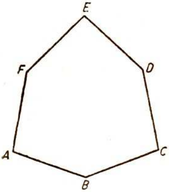


Abb. 14

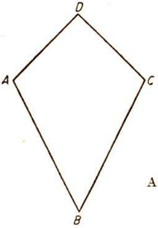


Abb. 15

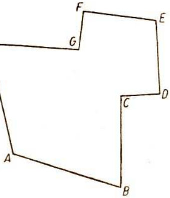


Abb. 16

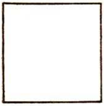


Abb. 17

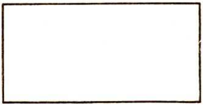


Abb. 18

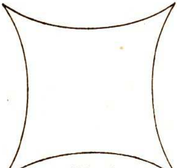


Abb. 19

Abb. 20

3. Suche bei dem in Abbildung 20 dargestellten Scherenschnitt die Symmetrieachsen! Wieviel sind es? Erkläre, wie man einen derartigen Scherenschnitt anfertigt! Stelle selbst solche Scherenschnitte her!
4. Gib Beispiele von Gegenständen aus dem Klassenzimmer, bei denen die Achsensymmetrie auftritt!
5. Hochspannungsmasten sind meist achsensymmetrisch in sich. Nenne weitere Beispiele aus Natur und Technik!

2. Eigenschaften der Achsensymmetrie

Mit Hilfe eines Modells wollen wir die Achsensymmetrie näher untersuchen. Auf ein Stück Karton zeichnen wir eine Gerade s. Wir falten den Karton um diese Gerade und durchbohren beide Teilebenen des Kartons mit einem Stich. Wir erhalten so zwei Punkte, die in bezug auf s achsensymmetrisch zueinander sind. Durch die beiden Löcher ziehen wir je ein Ende eines Bindfadens; an diese Enden binden wir kleine Gewichte, die den Bindfaden spannen. Fahren wir jetzt mit einem Bleistift auf der Faltgeraden entlang, so nimmt der Bleistift den Bindfaden mit (Abb. 21).

Dabei stellen wir durch Messen fest, daß der Bindfaden zwischen den Punkten A und B durch den Punkt auf der Faltgeraden halbiert wird. Bezeichnen wir den Punkt, der durch die Bleistiftspitze erzeugt wird, mit P, so ist stets $PA = PB$. Wir formulieren daher den

Satz 1: Für jeden Punkt der Symmetrieachse gilt: Die Abstände dieses Punktes von den beiden symmetrischen Punkten sind einander gleich.

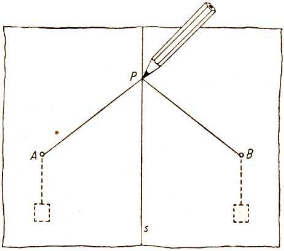


Abb. 21

Diesen Satz haben wir durch Messen gefunden. Dabei haben wir jedoch nur einen besonderen Fall betrachtet. Es ist aber von vornherein nicht sicher, daß man bei einer anderen Lage der Punkte A und B – zum Beispiel bei anderem Abstand – dasselbe Ergebnis erhält. Außerdem treten bei jeder Messung Ungenauigkeiten auf. Wir müssen deshalb die Richtigkeit des Satzes mathematisch beweisen, das heißt so, daß der Beweis bei jedem Abstand der achsensymmetrischen Punkte und unabhängig vom Messen gilt.

Klappen wir in Gedanken die linke Teilebene um die Symmetrieachse auf die rechte Teilebene, so müssen die symmetrisch zur Achse gelegenen Punkte A und B aufeinanderfallen. Sämtliche Punkte der Symmetrieachse und damit auch der Punkt P verändern die Lage nicht. Wenn aber die Endpunkte der Strecken AP und BP aufeinanderfallen, fallen auch die Strecken selbst aufeinander. Sie sind demnach gleich lang. Also ist stets $AP = BP$, wenn A und B zueinander achsensymmetrische Punkte und P ein Punkt der zugehörigen Symmetrieachse sind.

Zeichne zwei Punkte A und B! Falte das Blatt Papier so, daß die Punkte A und B sich decken! Bezeichne die Faltgerade mit s! Versuche eine zweite, von s verschiedene Faltgerade zu finden, so daß beim Umklappen um diese Faltgerade die Punkte A und B sich decken!

Man sieht leicht ein, daß es zu zwei festen Punkten A und B nur eine Symmetrieachse gibt.

Zeichne zwei Punkte A und B! Falte das Papier so, daß die beiden Punkte sich decken! Bezeichne die Symmetrieachse mit s! Versuche einen Punkt zu zeichnen, der von A und B gleich weit entfernt ist, aber nicht auf der Symmetrieachse s liegt!

Wir stellen fest, daß es keinen Punkt außerhalb der Symmetrieachse gibt, dessen Abstände von den beiden Punkten A und B einander gleich sind. Anders ausgedrückt heißt das: Jeder Punkt, der von den beiden Punkten A und B gleiche Abstände hat, liegt auf der Symmetrieachse.

Man kann daher formulieren:

Satz 1a: Wenn ein Punkt von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt ist, liegt er auf der Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

Außerdem beweisen wir den

Satz 2: Verbindet man einen beliebigen Punkt der Symmetrieachse mit den beiden symmetrischen Punkten, so entstehen an der Achse einander gleiche Winkel.

Nach Satz 1 decken sich beim Umklappen um die Gerade s für jede Lage von P die Strecken PA und PB, s bleibt unverändert. Demnach decken sich auch die Winkel, die von PA bzw. PB und s gebildet werden.

Läßt man den Punkt P auf der Symmetrieachse s wandern, so fällt er schließlich einmal auf die Verbindungsstrecke AB. Dann ergibt sich als Sonderfall der Sätze 1 und 2 der

Satz 3: Die Symmetrieachse halbiert die Verbindungsstrecke symmetrischer Punkte und steht auf ihr senkrecht.

Nach Satz 1 ist $PA = PB$. Diese Beziehung gilt für jede Lage des Punktes P – also auch für den Fall, daß P auf AB liegt.

Nach Satz 2 ist $\alpha = \beta$.

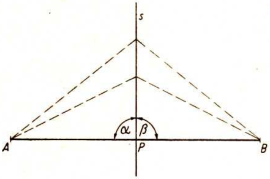


Abb. 22

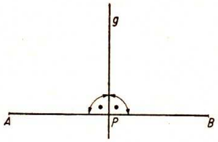


Abb. 23

Da die beiden Winkel als Nebenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel, nämlich die Gerade AB, bilden, ist $\alpha + \beta = 180°$, demnach auch $\alpha + \alpha = 180°$ und $\alpha = 90°$ (Abb. 22).

Für das Folgende ist es besonders wichtig, die Umkehrung des Lehrsatzes 3 zu bilden und die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen.

Satz 3a: Wird die Verbindungsstrecke zweier Punkte von einer Geraden so halbiert, daß diese Gerade auf der Strecke senkrecht steht, so ist die Gerade die Symmetrieachse zu den beiden Punkten.

Wir benutzen in Gedanken unser Faltblattmodell. Uns sind zwei Punkte A und B sowie eine Gerade g gegeben. Wir wissen, daß diese Gerade die Strecke AB halbiert und senkrecht auf AB steht. Wir wollen nachweisen, daß die Gerade die Symmetrieachse zu den Punkten A und B ist. Das heißt: Es ist zu zeigen, daß die Punkte A und B beim Umklappen um die Gerade g aufeinanderfallen (Abb. 23).

Klappt man die rechte Teilebene um die Gerade g, so muß die durch die Punkte P und B bestimmte Gerade auf die Gerade fallen, die durch die Punkte P und A bestimmt wird, da beide Geraden mit der Geraden g Winkel von 90° einschließen. Da $PB = PA$ ist, fallen auch die Punkte A und B aufeinander. Die Gerade g ist also die Symmetrieachse zu A und B.

Aufgabe

Der Punkt P auf dem Faltblattmodell (Abb. 21) bewege sich auf der Symmetrieachse s von der Strecke AB weg (nach oben oder nach unten).

a) Wie verändert sich die Größe der Abstände PA bzw. PB?

b) Wie verändert sich die Größe der Winkel, die von den Strecken PA bzw. PB mit der Achse gebildet werden?

3. Konstruktionen

Am Anfang dieses Abschnittes wurde häufig die Aufgabe gestellt, die Symmetrieachse zu finden. Wir lösten diese Aufgabe durch entsprechendes Falten des Papieres. Jetzt soll diese Aufgabe durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal gelöst werden.

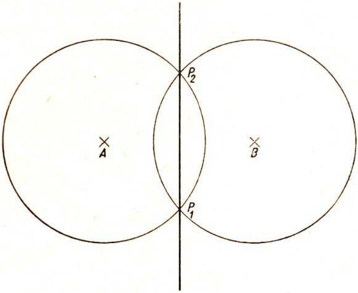


Abb. 24

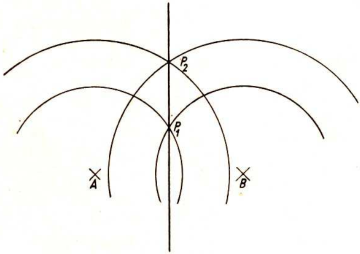


Abb. 25

Aufgabe I: Konstruiere zu zwei gegebenen Punkten die Symmetrieachse!

1. Lösung: A und B seien die gegebenen Punkte. Nach Satz 1a liegen alle Punkte, deren Abstände von A und B einander gleich sind, auf der Symmetrieachse. Durch zwei Punkte ist eine Gerade vollständig bestimmt. Wir müssen also zwei Punkte konstruieren, deren Abstände von A und B einander gleich sind. Wir schlagen um A und B mit dem gleichen Radius Kreisbogen, die einander in den Punkten P_1 und P_2 schneiden. (Damit die Kreise einander schneiden, müssen wir einen Radius wählen, der größer als die Hälfte der Strecke AB ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann er beliebig groß sein.) Alle Punkte eines Kreisbogens sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Die Punkte P_1 und P_2 haben also von A und B jeweils den gleichen Abstand. Die Gerade durch P_1 und P_2 ist die Symmetrieachse zu den Punkten A und B (Abb. 24).

2. Lösung: Wir schlagen um A und B zwei Kreisbogen mit hinreichend großem Radius, so daß sie einander im Punkte P_1 schneiden. Nun schlagen wir um A und B mit einem anderen, aber ebenfalls hinreichend großen Radius zwei Kreisbogen, die einander im Punkte P_2 schneiden. Es ist möglich, die Schnittpunkte so zu wählen, daß beide auf der gleichen Seite der Strecke AB liegen. Das ist vor allem dann notwendig, wenn die Strecke AB nahe am Rande des Zeichenblattes liegt. Die Punkte P_1 und P_2 gehören der Symmetrieachse zu A und B an, da $P_1A = P_1B$ und $P_2A = P_2B$ ist. Die Gerade durch P_1 und P_2 ist also die Symmetrieachse zu den Punkten A und B (Abb. 25).

Aufgabe II: Konstruiere den Punkt, der zu einem gegebenen Punkt A in bezug auf eine gegebene Gerade s symmetrisch ist!

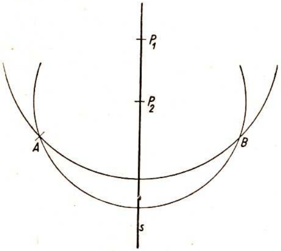


Abb. 26

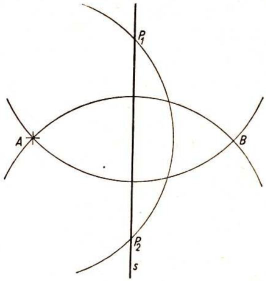


Abb. 27

Lösung (Abb. 26): Wenn wir auf der Geraden s zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 festlegen, so muß der gesuchte Punkt B nach Satz 1 die Eigenschaft haben, daß $P_1B = P_1A$ und $P_2B = P_2A$ ist. Wir schlagen also um P_1 mit dem Radius P_1A und um P_2 mit dem Radius P_2A Kreisbogen, die einander außer in A noch in B schneiden. B ist symmetrisch zu A in bezug auf die Gerade s.

Anmerkung: Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn man wie folgt verfährt: Man schlägt um A mit einem genügend großen, sonst aber beliebigen Radius einen Kreisbogen, der s in P_1 und P_2 schneidet. Mit dem gleichen Radius schlägt man um P_1 und P_2 Kreisbogen, die einander außer in A noch in B schneiden (Abb. 27).

Aufgaben

1. Vergleiche die beiden Lösungsmethoden für die Aufgabe I miteinander und erkläre, wann die zuerst beschriebene und wann die vereinfachte Konstruktion anzuwenden ist!

Bei den folgenden Konstruktionsaufgaben ist immer eine Konstruktionsbeschreibung zu geben:

2. Zeichne eine Strecke $AB = 6$ cm und konstruiere die Symmetrieachse zu den Endpunkten!

3. a) Zeichne ein beliebiges Dreieck! Betrachte eine Seite des Dreiecks als Symmetrieachse und konstruiere den achsensymmetrischen Punkt zu dem dritten Eckpunkt!

b) Zeichne ein beliebiges Viereck! Betrachte eine Seite des Vierecks als Symmetrieachse und konstruiere die symmetrischen Punkte zu den übrigen Eckpunkten!

4. a) Gegeben sind ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie eine den Kreis nicht schneidende Gerade g. Konstruiere den Kreis, der zu dem gegebenen Kreis in bezug auf die Gerade g symmetrisch ist!

Anleitung: Konstruiere den zu M in bezug auf die Gerade g achsensymmetrischen Punkt!

b) Löse die Aufgabe unter der Bedingung, daß die Gerade g den Kreis schneidet!

5. Dachgiebel haben oft symmetrische Form. Pause die Abbildungen 28, 29 und 30 ab und konstruiere die rechten Hälften der Dachgiebel! Die ganze Figur soll jeweils achsensymmetrisch in sich in bezug auf die Gerade s sein.

Anleitung: Führe diese Konstruktion punktweise durch! Wende auch den Satz 3 an!

6. Die Abbildung 31 zeigt den Grundriß einer Wohnung. Pause ihn ab und ergänze ihn so, daß eine andere Wohnung entsteht, die achsensymmetrisch zu der vorhandenen in bezug auf die Gerade s ist! (Wende den Satz 3 an!)

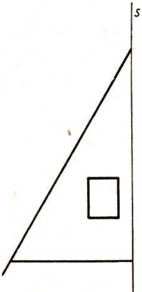


Abb. 28

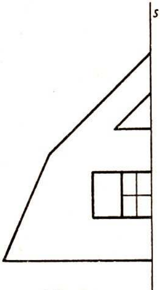


Abb. 29

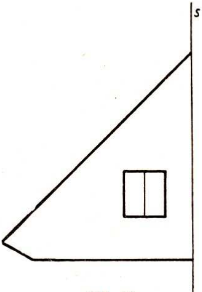


Abb. 30

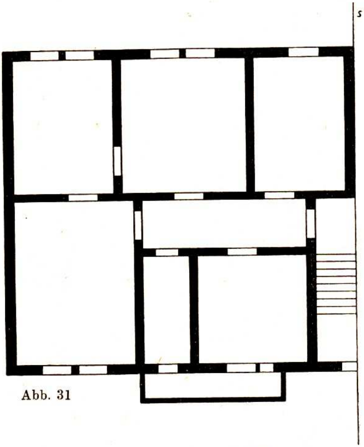


Abb. 31

4. Grundkonstruktionen

Die geometrischen Grundkonstruktionen bilden die Grundlage für das geometrische Zeichnen. Wir wollen diese – wenn es nicht ausdrücklich anders verlangt wird – nur mit Zirkel und Lineal durchführen.

1. Grundkonstruktion: Halbiere eine gegebene Strecke AB!

Uns ist bereits bekannt, daß die Symmetrieachse die Verbindungsstrecke symmetrischer Punkte halbiert (Satz 3). Wir konstruieren daher die Symmetrieachse zu den Endpunkten der Strecke AB.

Die Konstruktionsbeschreibung haben wir schon bei der Aufgabe I, Seite 11, erarbeitet.

Die Symmetrieachse zu einer Strecke bezeichnet man als **Streckensymmetrale.**

2. Grundkonstruktion: Errichte auf einer gegebenen Strecke in deren Mittelpunkt die Senkrechte!

Wir wissen bereits: Die Symmetrieachse zu zwei Punkten halbiert die Verbindungsstrecke dieser Punkte und steht auf ihr senkrecht (Satz 3). Wir konstruieren also die Symmetrieachse zu den Endpunkten der gegebenen Strecke, also die Streckensymmetrale zu AB.

Die Konstruktion der Symmetrieachse wurde schon auf Seite 11, Aufgabe I, beschrieben.

3. Grundkonstruktion: Halbiere einen gegebenen Winkel!

Wir schlagen um den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels mit einem beliebigen Radius einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B schneidet ($SA = SB$). Die Symmetrieachse zu den Punkten A und B muß durch S gehen (Satz 1a) und nach Satz 2 den gegebenen Winkel halbieren. Wir konstruieren also die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Mit einem hinreichend großen, sonst aber beliebigen Radius schlagen wir um A und B Kreisbogen, die einander unter anderem in P schneiden. Die Länge des Radius wählen wir zweckmäßig gleich AB. Die Gerade durch S und P halbiert den gegebenen Winkel (Abb. 32). Man nennt sie die **Winkelsymmetrale.**

4. Grundkonstruktion: Fälle das Lot von einem gegebenen Punkt P auf eine gegebene Gerade g!

Wir schlagen mit einem hinreichend großen, sonst aber beliebigen Radius um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in A und B schneidet ($AP = BP$). Konstruiert man die Symmetrieachse zu den Punkten A und B, so muß diese nach Satz 1a durch P gehen und nach Satz 3 auf der Geraden g senkrecht stehen, also das Lot von P auf g bilden. Wir schlagen daher um A und B mit einem hinreichend großen, sonst aber beliebigen Radius (zweckmäßig AP) Kreisbogen, die einander unter anderem in P_1 schneiden. Die Gerade PP_1 ist das gesuchte Lot (Abb. 33).

5. Grundkonstruktion: Errichte auf einer Geraden g in einem Punkt P die Senkrechte!

Wir schlagen mit einem beliebigen Radius um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet. Die Strecke AB wird durch P halbiert. Wir konstruieren also die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Nach Satz 3 steht die Symmetrieachse in P auf g senkrecht.

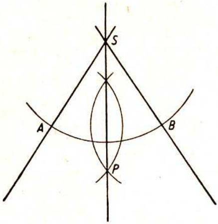


Abb. 32

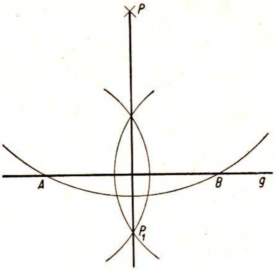


Abb. 33

Aufgaben

1. Halbiere eine Strecke a) $AB = 8$ cm, b) $AB = 3$ cm, c) $AB = 4{,}8$ cm, d) $AB = 10{,}4$ cm, e) $AB = 8{,}3$ cm, f) $AB = 6{,}7$ cm!

   Kontrolliere mit dem Lineal!

2. Halbiere einen Winkel a) $\alpha = 90°$, b) $\alpha = 180°$, c) $\alpha = 50°$, d) $\alpha = 30°$, e) $\alpha = 135°$, f) $\alpha = 88°$!

   Kontrolliere mit dem Winkelmesser!

3. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P außerhalb der Geraden! Fälle vom Punkt P auf die Gerade das Lot!

4. Zeichne ein beliebiges Dreieck und fälle von jedem Eckpunkt das Lot auf die gegenüberliegende Seite bzw. deren Verlängerung!

5. Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere die Winkelsymmetralen!

6. Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere die Streckensymmetralen der Dreiecksseiten!

7. Zeichne am unteren Heftrand eine Strecke AB und errichte die Streckensymmetrale!

8. a) Zeichne am unteren Heftrand die Gerade g und darüber einen Punkt P! Fälle das Lot von P auf g!

   b) Zeichne am oberen Heftrand die Gerade g und darunter einen Punkt P! Fälle das Lot von P auf g!

9. Teile eine gegebene Strecke AB in a) 2, b) 4, c) 8 gleiche Teile!

10. Konstruiere einen Winkel von a) 45°, b) 135°, c) 22,5°, d) 67,5°!
    Anleitung: Fälle auf eine Gerade ein Lot und gehe von dem entstehenden rechten Winkel aus!

11. Überlege, welche der 5 Grundkonstruktionen sich auch mit dem Zeichendreieck ausführen lassen! Untersuche, ob man mit dem Zirkel oder mit dem Zeichendreieck schneller zum Ziele kommt!

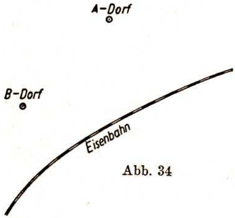


Abb. 34

12. Zwischen den Dörfern A und B soll an der Eisenbahnstrecke ein Bahnhof gebaut werden. Der Bahnhof soll möglichst nahe an dem Punkt liegen, der von beiden Dörfern gleich weit entfernt ist. Konstruiere den Punkt, der an der Bahnstrecke liegt und von den Dörfern A und B gleich weit entfernt ist (Abb. 34)!
Anleitung: Wende Satz 1a und die entsprechenden Grundkonstruktionen an!

13. Zeichne ein Dreieck, in dem alle Seiten a) 3 cm, b) 4 cm, c) 6,5 cm, d) 3,5 cm lang sind!
Anleitung: Zeichne die Seite AB des Dreiecks! Schlage mit dem Radius AB um A und B Kreise! Diese schneiden einander in zwei Punkten C und D, die beide auf der Symmetrieachse zu A und B liegen und von A und B die Entfernung AB haben. Prüfe nach, ob die Dreiecke ABC und ABD den in der Aufgabe gestellten Forderungen genügen!

14. Auf einem Werkstück aus Blech befinden sich zwei Bohrungen A und B, die 5 cm voneinander entfernt sind. Eine dritte Bohrung C soll so angebracht werden, daß sie von den beiden Bohrungen A und B gleich weit und von der Verbindungsgeraden AB 2,5 cm entfernt ist. Fertige eine Konstruktionszeichnung an!
Anleitung: Die Entfernung der Bohrung C von der Verbindungsgeraden AB wird auf dem Lot gemessen, das man von C auf AB fällt.

B. Körper und ebene Figuren

5. Das Prisma

Wir haben bisher nur den Quader und als einen besonderen Quader den Würfel untersucht. Wir wollen nun auch andere Körper betrachten, sie ihrer Form nach unterscheiden und ihre Namen kennenlernen.

Aufgaben zur Wiederholung

1. a) Wieviel Ecken, Kanten und Begrenzungsflächen hat ein Quader?
   b) Wieviel Kanten treffen sich in einem Eckpunkt eines Quaders?
   c) Welche Winkel schließen jeweils zwei Kanten eines Quaders an einem Eckpunkt miteinander ein?

2. Wir wissen, daß auch der Würfel ein Quader ist. Welche Besonderheit weist er auf?

Bei den folgenden Aufgaben soll der Verschnitt nicht berücksichtigt werden.

3. a) Die Kanten eines Würfels sind 4 cm lang. Wieviel Meter Draht benötigt man, wenn man ein Kantenmodell dieses Würfels anfertigen will?
   b) Löse dieselbe Aufgabe für einen Würfel, dessen Kanten 6,5 cm lang sind!
   c) Löse dieselbe Aufgabe für einen Würfel, dessen Kanten 9 cm lang sind!

4. Bei einem Quader sind die Kanten 3 cm, 4 cm und 5 cm lang. Wieviel Draht benötigt man, wenn man ein Kantenmodell dieses Quaders anfertigen will?

Fertige einen Quader aus Knetmasse, zerlege ihn durch einen Schnitt so in zwei Teile, wie es die Abbildung 35 zeigt! Beschreibe die Teilkörper! Zähle die Ecken, Kanten und Flächen! Welche Form haben die Begrenzungsflächen? Was können wir über die Größe der Winkel aussagen? Man kann den Quader auch noch anders zerschneiden, wenn man die gleichen Teilkörper erhalten will. Beschreibe, wie der Schnitt geführt werden muß!

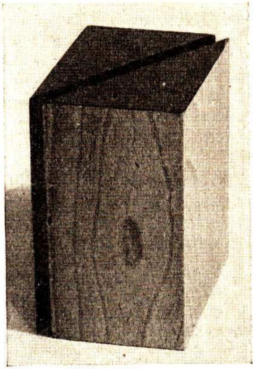


Abb. 35

Bei dem Teilkörper sind Grund- und Deckfläche Dreiecke, die zueinander parallel liegen und die gleiche Form und Größe haben. Die Seitenflächen sind Rechtecke von verschiedener Größe; sie stehen auf der Grundfläche senkrecht.

Die Abbildungen 36 bis 41 zeigen uns Körper, die im Bauwesen und in der Industrie, zum Beispiel als Holzbalken oder Stahlträger, vorkommen.

Bisher haben wir die Fläche, auf der ein Körper steht, als seine Grundfläche bezeichnet. In den Abbildungen 36 bis 41 ist je eine Fläche grau gezeichnet. Wir wollen hier jeweils die grau gezeichnete Fläche als Grundfläche bezeichnen, die gegenüberliegende als Deckfläche.

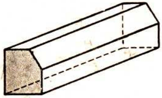


Abb. 36

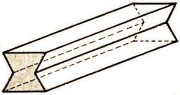


Abb. 37

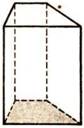


Abb. 38

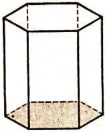


Abb. 39

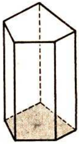


Abb. 40

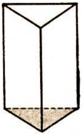


Abb. 41

Aufgaben

5. Wieviel Kanten, Ecken, Flächen haben jeweils die Körper in den Abbildungen 36 bis 41?
6. a) Beschreibe für jeden Körper in den Abbildungen 36 bis 41 die Form der Grund- und Deckfläche!

   b) Welche Form haben die übrigen Begrenzungsflächen?
7. Worin unterscheiden sich alle diese Körper von dem Quader und welche Eigenschaften haben sie mit ihm gemeinsam?

Wir nennen die in den Abbildungen 36 bis 41 gezeigten Körper **gerade Prismen.**

Wir müssen nun genau erklären, welche Eigenschaften ein Körper hat, der als gerades Prisma bezeichnet wird. Das sind alle jene Eigenschaften, die an jedem der Körper in den Abbildungen 36 bis 41 und auch am Quader auftreten.

Erklärung: Ein Körper wird gerades Prisma genannt, wenn er die folgenden Eigenschaften aufweist:

Grund- und Deckfläche sind Vielecke von gleicher Form und Größe. Sie liegen zueinander parallel. Die übrigen Begrenzungsflächen (Seitenflächen) sind Rechtecke. Sie stehen auf der Grundfläche senkrecht.

Die Prismen unterscheidet man nach der Anzahl der Seitenflächen. So gibt es zum Beispiel dreiseitige, vierseitige, fünfseitige gerade Prismen.

Benenne danach die geraden Prismen in den Abbildungen 36 bis 41! Wieviel Eckpunkte hat die Grundfläche eines dreiseitigen, wieviel die eines fünfseitigen und wieviel die eines siebenseitigen geraden Prismas?

Der Quader ist ein besonderes gerades Prisma, bei dem auch Grund- und Deckfläche die Form von Rechtecken haben. Die Kanten, die nicht die Grund- oder Deckfläche umschließen, werden Seitenkanten genannt.

Unabhängig von der Lage der geraden Prismen bezeichnen wir als Grund- und Deckflächen stets die Vielecke, die zueinander parallel liegen und auf denen alle übrigen Seitenflächen senkrecht stehen. Bei dreiseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen, siebenseitigen geraden Prismen gibt es stets nur zwei Begrenzungsflächen, die man nach dieser Erklärung als Grund- und Deckfläche bezeichnen kann. Bei einem vierseitigen geraden Prisma bestehen dagegen mehrere Möglichkeiten.

Aufgaben

8. Begründe, warum die Körper in den Abbildungen 42 und 43 keine geraden Prismen sind!
9. Begründe, warum auch der Würfel ein Prisma ist! Welche Eigenschaften weist er auf?

Außer geraden Prismen gibt es auch schiefe Prismen. Wir können uns ein schiefes Prisma aus Draht herstellen (vgl. Abb. 44).

Welche Flächen stehen auf der Grundfläche senkrecht und welche nicht? Beschreibe die Form der Seitenflächen!

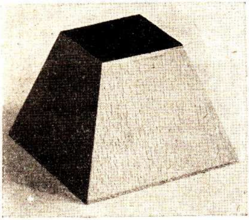


Abb. 42

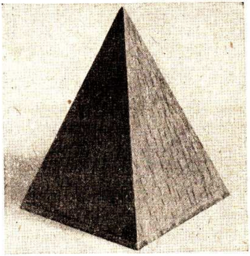


Abb. 43

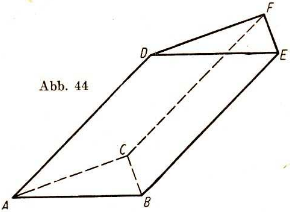


Abb. 44

Wir wollen uns nun aus steifem Papier oder Karton ein dreiseitiges gerades Prisma bauen. Dazu ist zunächst notwendig, daß wir das Netz dieses Prismas konstruieren. Die Seitenkanten sollen je 5 cm und die übrigen Kanten je 3 cm lang sein. Die Oberfläche dieses Prismas besteht dann aus zwei Dreiecken, deren Seiten sämtlich 3 cm, und aus drei Rechtecken, deren Seiten 3 cm und 5 cm lang sind. Ein Dreieck, in dem alle Seiten gleich lang sind, nennt man **gleichseitiges Dreieck.** Ein solches Dreieck können wir bereits konstruieren (siehe Aufgabe Nr. 13, Seite 16). Wir sind daher in der Lage, das Netz des Prismas zu zeichnen (Abb. 45).

Aufgaben

10. Wieviel Ecken, Kanten, Flächen hat ein a) fünfseitiges, b) sechsseitiges c) siebenseitiges gerades Prisma?
11. Nenne Gegenstände, die die Form von geraden oder schiefen Prismen haben!
12. Aus Draht wird das Kantenmodell eines fünfseitigen geraden Prismas hergestellt. Die Seitenkanten sind je 8 cm, die anderen Kanten je 6 cm lang. Wieviel Meter Draht werden benötigt? (Der Verschnitt soll unberücksichtigt bleiben.)

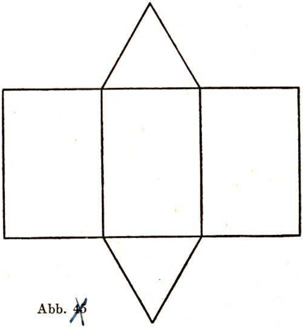


Abb. 45

Zeige an dem Netz, welche Punkte und Kanten beim Zusammenkleben aufeinanderfallen und welche Kanten aneinanderstoßen! Die Dreiecke kann man auch anders an die Rechtecke anlegen. Welche anderen Lagen sind noch möglich? Wo wird man am zweckmäßigsten den Klebefalz anbringen? Begründe, warum man aus dem Netz der Abbildung 45 kein schiefes Prisma herstellen kann!

Aufgaben

13. Konstruiere die Netze der folgenden dreiseitigen geraden Prismen!
    a) Die Kanten, die die Grund- und Deckfläche umschließen, sollen je 2,5 cm, die Seitenkanten je 6 cm lang sein.
    b) Die Kanten, die die Grund- und Deckfläche umschließen, sollen je 6 cm, die Seitenkanten je 4 cm lang sein.

14. Konstruiere auf Karton das Netz eines fünfseitigen geraden Prismas, dessen Seitenkanten je 5 cm lang sind! Die Seiten der Grundfläche sollen je 2,3 cm lang sein.

    Anleitung: Konstruiere zunächst die Grundfläche! Sie ist ein Fünfeck, in dem alle Seiten 2,3 cm lang sind. Die Seiten dieses regelmäßigen Fünfecks schließen an jedem der fünf Eckpunkte einen Winkel von 108° ein.

15. Wieviel Schweißnähte muß ein Schlosser mindestens ausführen, der ein oben offenes, vierseitiges gerades Prisma aus einem Stück Blech herstellen will?

16. a) Schneide aus Ton oder aus Knetmasse ein vierseitiges gerades Prisma aus!
    b) Baue aus Holzstäbchen und kleinen Knetmasseklumpen das Kantenmodell eines vierseitigen geraden Prismas!

In der Abbildung 46 ist ein dreiseitiges gerades Prisma durch einen parallel zur Grundfläche geführten Schnitt in zwei Teile zerlegt worden.

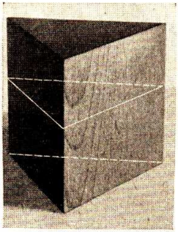


Abb. 46

Fertige aus Knetmasse ein dreiseitiges gerades Prisma an und zerschneide es wie in Abbildung 46! Klappe die Teile auseinander und beschreibe die Form der Schnittfläche! Führe noch andere Schnitte parallel zur Grundfläche! Wir stellen fest, daß alle Schnittflächen die gleiche Form und Größe wie die Grundfläche haben.

Fertige aus Knetmasse ein vierseitiges oder fünfseitiges gerades Prisma an und führe wieder Schnitte parallel zur Grundfläche! Beschreibe die Form der Schnittflächen!

Um über die Form solcher Schnittflächen etwas aussagen zu können, brauchen wir die Schnitte nicht wirklich durchzuführen. Wir stellen uns ein sechsseitiges, siebenseitiges oder achtseitiges Prisma vor und denken es uns parallel zur Grundfläche zerschnitten. Welche Eigenschaften haben in allen Fällen die Schnittflächen? Die Schnittflächen werden auch kurz **Schnitte** genannt.

Wir können feststellen:

Wird ein gerades Prisma parallel zur Grundfläche zerschnitten, so hat die Schnittfläche die gleiche Form und Größe wie die Grundfläche.

Ein Prisma können wir in verschiedenen Richtungen zerschneiden. Besonders einfach sind die Schnitte senkrecht zur Grundfläche. Abbildung 47 zeigt ein vierseitiges gerades Prisma. Durch dieses Prisma sind verschiedene Schnitte so geführt, daß die Kante AB der Schnittfläche angehört.

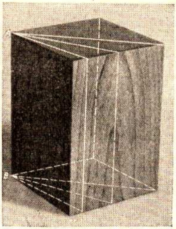


Abb. 47

Welche Form haben die Schnittflächen? Wie ändert sich die Größe der Schnitte, wenn wir sie der Reihe nach von der Fläche $ABCD$ aus betrachten? In welche Teilkörper wird das Prisma durch die einzelnen Schnitte zerlegt?

Welche Form hat die Schnittfläche, wenn wir irgendein gerades Prisma senkrecht zur Grundfläche zerschneiden? Führe auch senkrechte Schnitte, die so verlaufen, daß keine Körperkante der Schnittfläche angehört!

Wir stellen fest:

Wird ein gerades Prisma senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Rechtecke.

Fertige aus Knetmasse ein schiefes Prisma an und führe senkrecht zur Grundfläche mit einem Messer verschiedene Schnitte! Die Schnittflächen sind häufig keine Rechtecke.

6. Der Zylinder

Den in Abbildung 48 gezeigten Körper nennen wir einen **geraden Kreiszylinder.**

Untersuche, wo in den Abbildungen 49 bis 53 ein solcher Körper auftritt! (Die Abbildung 51 zeigt einen Traktor mit angehängten Wiesenwalzen, die Abbildung 52 einen Teil einer Druckmaschine und die Abbildung 53 den Anker eines kleinen Elektromotors.) Wieviel Flächen begrenzen einen geraden Kreiszylinder? Worin unterscheiden sich diese Flächen von den Begrenzungsflächen der Prismen? Welche Eigenschaften hat der gerade Kreiszylinder mit dem Prisma gemeinsam und worin unterscheidet er sich von ihm?

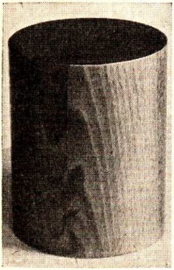


Abb. 48


Abb. 49

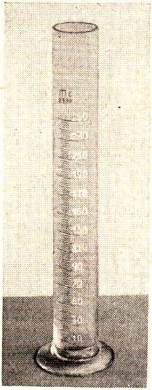


Abb. 50

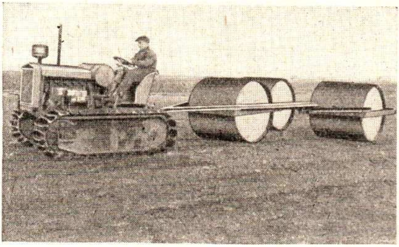


Abb. 51

Wenn man das Modell eines geraden Kreiszylinders mit einer Kreisfläche auf den Tisch stellt, kann man überall ein rechtwinkliges Zeichendreieck so an ihn anlegen, wie es die Abbildung 54 zeigt. Die gekrümmte Fläche steht also überall auf der Grundfläche senkrecht. Ein gerader Kreiszylinder wird von zwei gleichgroßen, zueinander parallelen Kreisflächen (Grund- und Deckfläche) und von einer gekrümmten Fläche, dem Mantel, begrenzt. Die Abbildung 55 zeigt, wie man den Mantel eines geraden Kreiszylinders auf der Zeichenebene abrollen kann. Man erhält dann ein Rechteck.

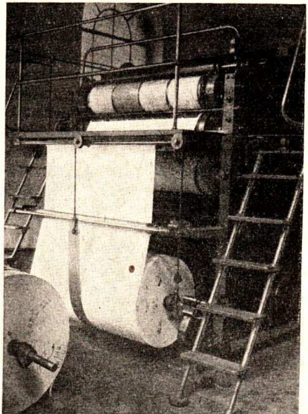


Abb. 52

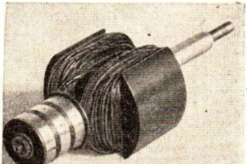


Abb. 53

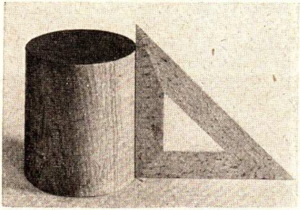


Abb. 54

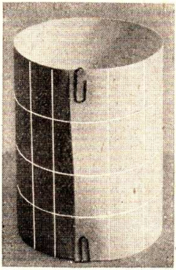


Abb. 56

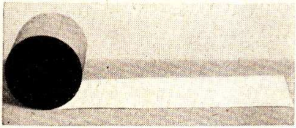


Abb. 55

Zeichne ein Rechteck $ABCD$ und in ihm einige Parallelen zu den Seiten! Schneide das Rechteck aus und rolle es so zu einem Zylindermantel zusammen, daß der Punkt A auf den Punkt B und der Punkt D auf den Punkt C fällt. Wie verlaufen auf dem Mantel des Zylinders die Parallelen zu der Seite AB und wie die Parallelen zu der Seite AD? Die Parallelen zu AD nennt man **Mantellinien** des Zylinders (Abb. 56).

Worin unterscheidet sich ein gerader Kreiszylinder von einem Faß?

Bei einem Faß ist es nicht möglich, gerade Linien zu finden, die ganz in der Mantelfläche verlaufen. Man kann den Mantel eines Fasses nicht auf einer ebenen Fläche abrollen.

Die Abbildung 57 zeigt einen schiefen Kreiszylinder. Man kann den Mantel dieses schiefen Kreiszylinders so aufschneiden und ausrollen, daß die in Abbildung 58 dargestellte Figur entsteht.

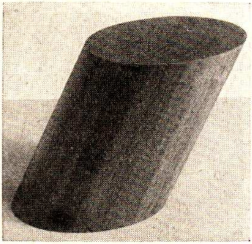


Abb. 57

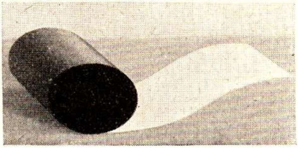


Abb. 58

Erklärung: Ein Körper heißt gerader Kreiszylinder, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

Er wird begrenzt von zwei gleich großen, zueinander parallelen Kreisflächen (Grund- und Deckfläche) und von einer gekrümmten Mantelfläche. Der Mantel kann auf einer ebenen Fläche zu einem Rechteck abgerollt werden.

Die geraden Kreiszylinder werden häufig auch kurz **Zylinder** genannt.

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände, die die Form eines Zylinders haben!
2. Lege um einen Zylinder, zum Beispiel um ein zylindrisches Trinkglas, einen Papiermantel! (Auf Genauigkeit achten!) Rolle den Papiermantel ab!
   a) Miß die Länge und Breite des ausgebreiteten Papiermantels!
   b) Miß den Umfang und stelle fest, wie hoch der Zylinder ist! Vergleiche die Ergebnisse!
3. Die Abbildung 59 zeigt das Netz eines geraden Kreiszylinders. Gib an, welche Linien in der Abbildung gleich lang sein müssen!
4. Beschreibe, wie man am einfachsten einen Zylinder aus Papier oder Pappe herstellt!
5. Eine Litfaßsäule ist über dem Sockel 2,80 m hoch und hat einen Umfang von 4,50 m. Wie groß ist die Fläche, die man bekleben kann?
6. Wieviel Quadratmeter Blech braucht man zur Anfertigung eines Ofenrohres von 31,4 cm Umfang und 1,20 m Länge? Für den Falz müssen zum Umfang 2,9 cm zugeschlagen werden.
7. Ein zylinderförmiger Maschinenteil (Walze) soll mit dünnem Gummi belegt werden. Die Stirnflächen (Grund- und Deckfläche) bleiben frei. Die Walze hat einen Umfang von 1,57 m und eine Länge von 1,28 m. Wieviel Quadratmeter Gummi benötigt man? Runde!

Die Abbildung 60 zeigt einen Zylinder, der in verschiedenen Richtungen zerschnitten worden ist. Alle Schnitte stehen auf der Grundfläche senkrecht und gehen durch die Mittelpunkte der Kreisflächen. Beschreibe die Form und die Größe dieser Schnitte!

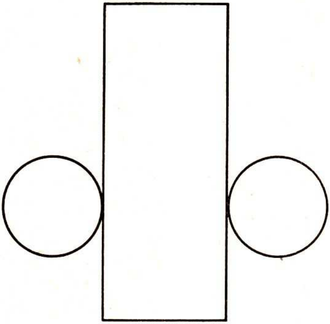


Abb. 59

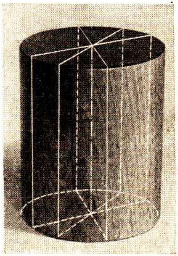


Abb. 60

Führe durch einen Zylinder auch solche Schnitte senkrecht zur Grundfläche, die nicht durch die Mittelpunkte der Kreisflächen gehen! Beschreibe die Form dieser Schnittflächen!

Wird ein gerader Kreiszylinder senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Rechtecke.

Die Abbildung 61 zeigt einen Zylinder, der in verschiedenen Abständen parallel zur Grundfläche zerschnitten worden ist. Untersuche Form und Größe der Schnittflächen!

Wird ein gerader Kreiszylinder parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreisflächen. Die Kreisflächen haben die gleiche Größe wie die Grundfläche.

Schneide aus Zeichenkarton ein Rechteck $ABCD$ aus! Halbiere die Seiten AD und BC! Befestige das Rechteck so an einer Stricknadel, daß diese durch die Mittelpunkte der Seiten AD und BC geht (Abb. 62)! Drehe jetzt die Stricknadel zwischen je zwei Fingern beider Hände möglichst schnell! Was beobachtet man?

Man kann sich also einen geraden Kreiszylinder durch die Drehung eines Rechteckes um seine Mittellinie entstanden denken.

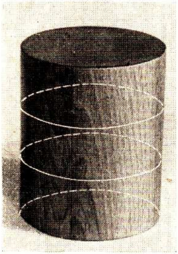


Abb. 61

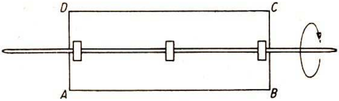


Abb. 62

7. Der Kreis und die Ellipse

Forme aus Knetmasse einen geraden Kreiszylinder! Schneide diesen wie in Abbildung 63 schräg durch! Stelle die Schnittfläche auf ein Zeichenblatt und umfahre sie mit einem Bleistift!

Die so entstandene Figur nennt man **Ellipse.**

Eine Ellipse kann man nicht so einfach zeichnen wie etwa einen Kreis. Abbildung 64 zeigt, wie ein Gärtner ein Beet in der Form einer Ellipse abgrenzt. Nach dem gleichen Verfahren können wir auch im Heft eine Ellipse konstruieren. Wir drücken je einen Reißnagel in die Punkte A und B auf das Zeichenblatt und legen um die Nägel eine Fadenschlinge. Dann

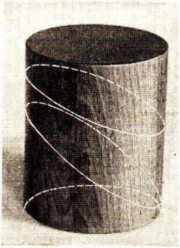


Abb. 63

stecken wir einen Bleistift in die Schlinge und führen ihn so herum, daß der Faden stets gespannt ist (Abb. 65).

Wir verändern nun die Länge der Fadenschlinge. Wie verändert sich die gezeichnete Ellipse?

Der Halbierungspunkt der Strecke AB wird **Mittelpunkt der Ellipse** genannt.

Zeichne eine Ellipse mit Hilfe der Fadenkonstruktion, wobei $AM = MB = 4$ cm ist! Drücke einen weiteren Reißnagel in den Mittelpunkt der Ellipse! Verkürze die Strecken AM und MB um je 1 cm und zeichne nun mit der gleichen Fadenschlinge die Ellipse! Was beobachtet man? Verkürze die Strecken AM und MB nochmals um 1 cm und zeichne wieder die Ellipse! Führe das Verfahren fort, bis A und B im Mittelpunkt M zusammenfallen! Welche Figur erhält man nun bei der Konstruktion?

Kreise können wir bereits sehr einfach mit dem Zirkel konstruieren. Wir nennen den Punkt, in dem der eine Zirkelfuß fest steht, den **Mittelpunkt des Kreises.** Die Linie, die von dem anderen Zirkelfuß gezeichnet wird, nennen wir **Kreislinie** oder Kreisumfang (Peripherie). Die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem Punkt der Kreislinie heißt **Radius.** Alle Radien eines Kreises sind gleich lang; es gibt in jedem Kreis unbegrenzt viele Radien.

Die Abbildung 66 zeigt einen Kreis, der von der Geraden g geschnitten wird. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, nennt man **Sekante** (Schneidende). Die innerhalb der Kreisfläche verlaufende Strecke AB auf der Sekante g heißt eine **Sehne** des Kreises.

Wie verändert sich die Größe der Sehne, wenn man die Gerade g parallel zu sich in Richtung M verschiebt? Wann hat die Sehne die größte Länge? Wie lang ist sie dann?

Der Durchmesser ist die größte Sehne.

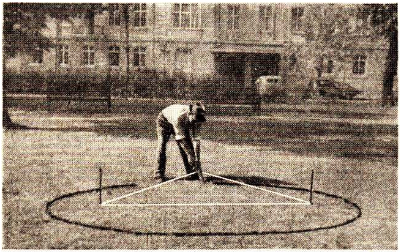


Abb. 64

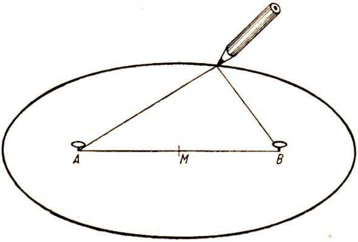


Abb. 65

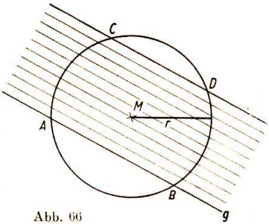


Abb. 66

Eine Sehne teilt die Kreislinie in zwei **Kreisbogen**, die Kreisfläche in zwei **Kreisabschnitte** (oder **Segmente;** vgl. Abb. 67). Zwei Radien, die nicht aufeinanderfallen, teilen die Kreisfläche in zwei **Kreisausschnitte** (oder **Sektoren**), die Kreislinie wieder in zwei Kreisbogen (Abb. 68).

Aufgaben

1. Von welchen Linien wird
   a) ein Kreisabschnitt,
   b) ein Kreisausschnitt begrenzt?
2. Die Gerade g in Abbildung 66 wird parallel zu sich bis in die Lage CD verschoben. Wie verändert sich die Größe
   a) der Sehne,
   b) der beiden Kreisabschnitte,
   c) der beiden Kreisbogen?

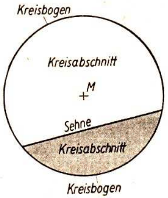


Abb. 67

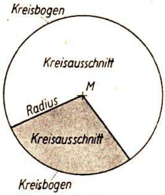


Abb. 68

3. Untersuche, wieviel Symmetrieachsen man in einem Kreis zeichnen kann! Beschreibe ihren Verlauf!
4. Zeichne mit dem Zirkel Kreise mit dem Radius
   a) 3 cm, b) 4 cm, c) 5 cm, d) 2,4 cm, e) 3,6 cm, f) 1,8 cm!
5. Wieviel Symmetrieachsen hat eine Ellipse?
6. Wie verläuft die Symmetrieachse a) eines Kreisabschnittes, b) eines Kreisausschnittes?
7. Zeichne einen Kreis und in ihm eine Sehne! Konstruiere zu dem größeren Kreisabschnitt die Symmetrieachse!
   Anleitung: Konstruiere die Symmetrieachse zu den Punkten A und B (Abb. 69)!

Satz 4: Die Mittelsenkrechte auf einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis: Wir wissen bereits, daß die Mittelsenkrechte einer Strecke die Symmetrieachse zu den Endpunkten dieser Strecke ist. Jeder Punkt, dessen Abstände von den beiden Endpunkten A und B der Sehne einander gleich sind, muß nach Satz 1a (S. 9) auf der Symmetrieachse liegen. Die Punkte A und B liegen auf der Kreislinie. Sie haben beide vom Mittelpunkt M des Kreises einen Abstand, der gleich dem Radius des Kreises ist. Daher muß M auf der Symmetrieachse zu den Punkten A und B, also auf der Mittelsenkrechten der Sehne AB, liegen.

Die Strecke PM nennt man den **Abstand** der Sehne von M (Abb. 69).

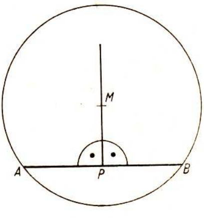


Abb. 69

Uns ist bekannt, daß die Mittelsenkrechte einer Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Wir können daher den nicht gezeichneten Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens konstruieren.

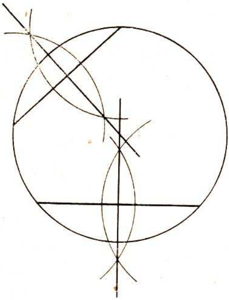


Abb. 70

Lege den Deckel eines Konservenglases auf ein Blatt Papier und umfahre ihn mit einem Bleistift! Zeichne zwei beliebige Sehnen und ihre Mittelsenkrechten!

Der gesuchte Mittelpunkt des Kreises muß sowohl auf der einen wie auf der anderen Mittelsenkrechten liegen. Der einzige Punkt, der diese Bedingung erfüllt, der also zugleich auf beiden Mittelsenkrechten liegt, ist der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreises (Abb. 70).

Wir wollen die Sekante g in Abbildung 66 parallel zu sich von M weg verschieben (Abb. 71). Dann wandern zunächst die Punkte A und B auf dem Kreisumfang aufeinander zu, der Abstand der Sehne von M wird größer, die Länge der Sehne wird kleiner. Die Gerade g schneidet aber den Kreis zunächst nach wie vor in zwei Punkten, und die Sehne ist stets vorhanden. Wird der Abstand der Sehne von M schließlich gleich der Länge des Radius, so hört die Gerade g auf, Sekante, also Schneidende, zu sein. Die Punkte A und B fallen in einem Punkt C zusammen, eine Sehne ist nicht mehr vorhanden. Die Gerade g schneidet den Kreis nicht mehr, sondern berührt ihn nur noch in dem Punkt C. Sie heißt jetzt Berührende oder **Tangente** an den Kreis.

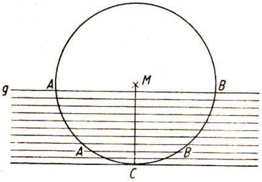


Abb. 71

Aufgaben

8. Bestimme mit Hilfe eines Lineals und zweier Zeichendreiecke den Durchmesser eines runden Bleistiftes, eines Geldstückes, eines Knopfes (Abb. 72)! In der Technik benutzt man für diese Aufgabe ein besonderes Gerät, die Schieblehre (Abb. 73). Der Abstand der Meßschenkel wird durch die Stellung des Nullstriches am Schieber angegeben. Wenn die beiden Meßschenkel einander berühren, zeigt dieser Nullstrich auf den Nullpunkt der Linealteilung. Das Lineal der abgebildeten Schieblehre hat an einem Rand eine Millimeterteilung.

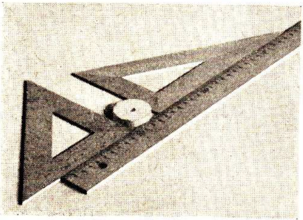


Abb. 72

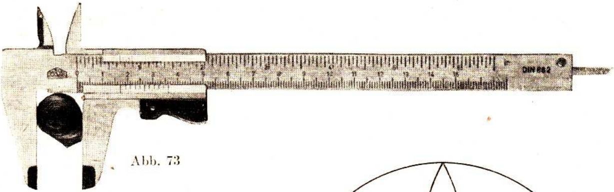


Abb. 73

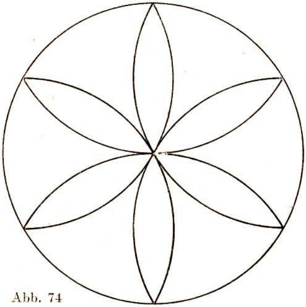


Abb. 74

9. a) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3 cm! Beschreibe um einen beliebigen Punkt auf der Kreislinie einen Kreisbogen mit demselben Radius! Nimm einen der auf dem ersten Kreis entstehenden Schnittpunkte als Mittelpunkt eines neuen Kreises derselben Größe usw.! Man erhält eine Rosette (Abb. 74). Wo kommen solche Verzierungen vor? Wieviel Symmetrieachsen hat die Rosette?

b) Verbinde die benachbarten Spitzen der Rosette, die innerhalb des ersten Kreises entstanden ist, durch Geraden! Welche Figur wird durch diese Strecken gebildet? Vergleiche die Länge der Strecken untereinander und mit dem Radius!

c) Konstruiere mit Hilfe eines Kreises ein regelmäßiges Sechseck, ohne erst die Rosette in den Kreis einzuzeichnen!

10. Stelle eine Kaffeetasse auf ein Blatt Papier! Umfahre sie mit einem Bleistift und konstruiere den Mittelpunkt dieses Kreises!

11. Umfahre die Tasse nur teilweise! Konstruiere von diesem Kreisbogen ausgehend den Mittelpunkt des ganzen Kreises! Vervollständige den Kreis und beschreibe die Konstruktion!

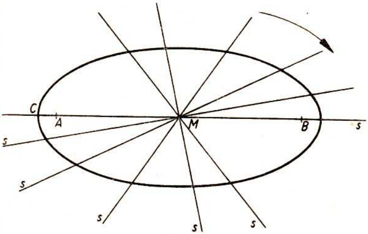


Abb. 75

12. Umfahre den Halbkreis eines Winkelmessers! Konstruiere den Mittelpunkt. Welche Konstruktionen sind möglich? Welche ist die einfachste Konstruktion?

13. Lege auf dem Zeichenblatt drei Punkte fest und konstruiere den Kreis, der durch diese Punkte geht! Begründe die Konstruktion!

Zeichne wie in Abbildung 65 (S. 26) eine Ellipse! Konstruiere ihren Mittelpunkt M durch Halbieren der Strecke AB! (Die Punkte A und B werden durch das Eindrücken der Reißnägel festgelegt.) Zeichne verschiedene Durchmesser ein, das heißt Strecken, die durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen! Was kannst du über die Größe dieser Durchmesser aussagen? Wir wollen uns eine Sekante s vorstellen, die im Mittelpunkt der Ellipse drehbar angebracht ist (Abb. 75). Wie ändert sich die Länge a) des Durchmessers, b) des Radius, wenn sich die Sekante aus der Lage MC um 360° dreht? Wann haben Durchmesser und Radius ihren größten und wann ihren kleinsten Wert?

Im Gegensatz zum Kreis sind bei der Ellipse die Radien bzw. Durchmesser nicht alle untereinander gleich lang. Den größten Durchmesser erhält man, wenn man die Strecke AB nach beiden Seiten bis zur Peripherie der Ellipse verlängert. Man nennt diese Strecke die **große Achse** der Ellipse. Die Hälfte des größten Durchmessers nennen wir die **große Halbachse** der Ellipse. Im Mittelpunkt des größten Durchmessers steht senkrecht auf ihm der kleinste Durchmesser **(kleine Achse).** Die Hälfte davon heißt **kleine Halbachse** (Abb. 76).

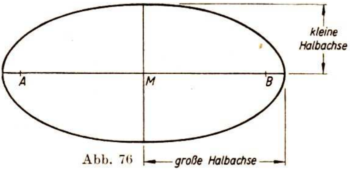


Abb. 76

8. Die Pyramide

Worin unterscheiden sich die in den Abbildungen 77 bis 80 gezeigten Körper von den Prismen und von den Zylindern? Wieviel Ecken und Kanten besitzen jeweils die Körper in den Abbildungen 77 bis 80, und von wieviel Flächen werden sie begrenzt? Beschreibe die Form der Begrenzungsflächen! Welche Fläche werden wir jeweils als Grundfläche bezeichnen? Welche Eigenschaften haben die Körper gemeinsam?

Wir nennen diese Körper **Pyramiden.** Pyramiden findet man oft an Bauwerken, zumeist als Aufsätze auf anderen Körpern.

Die Abbildung 81 zeigt uns Pyramiden von gewaltigen Ausmaßen, die noch heute in der Nähe der ägyptischen Stadt El Giza (Giseh) stehen.

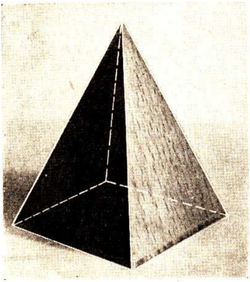


Abb. 77

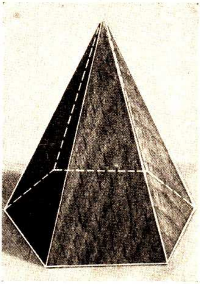


Abb. 78

Eine Pyramide können wir sehr leicht von einem Prisma unterscheiden. Zu der genauen Erklärung, wann ein Körper Pyramide genannt wird, benutzen wir wieder die Eigenschaften, die alle Körper in den Abbildungen 77 bis 80 gemeinsam besitzen.

Erklärung: Ein Körper heißt Pyramide, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt: Die Grundfläche ist ein Vieleck. Die von den Ecken der Grundfläche ausgehenden Seitenkanten schneiden sich alle in einem Punkt. Diesen nennen wir die Spitze der Pyramide. Die Seitenflächen der Pyramide sind also Dreiecke.

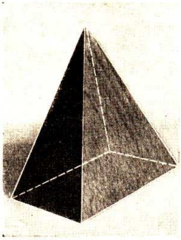


Abb. 79

Nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheiden wir auch hier dreiseitige, vierseitige, fünfseitige, ... Pyramiden.

Benenne danach die Pyramiden in den Abbildungen 77 bis 80!

Begründe, warum es bei Pyramiden mit mehr als drei Seitenflächen nur eine Fläche gibt, die man Grundfläche der Pyramide nennen kann! Eine dreiseitige Pyramide läßt dagegen mehrere Möglichkeiten zu. Wieviel gibt es?

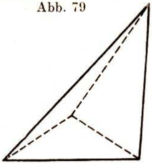


Abb. 80

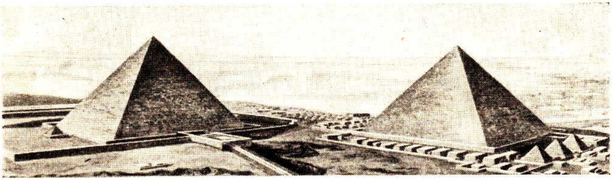


Abb. 81

Es gibt verschiedene Arten von Pyramiden. Wir werden uns vorwiegend mit einer besonderen Art von Pyramiden beschäftigen, und zwar mit den **regelmäßigen geraden Pyramiden** (Abb. 82). Wir wollen daher erklären, was wir unter einer regelmäßigen geraden Pyramide verstehen. Dazu ist zunächst eine Erläuterung darüber notwendig, was wir unter **regelmäßigen Vielecken** verstehen.

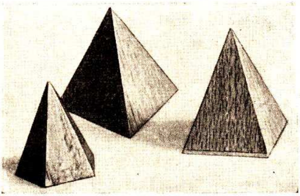


Abb. 82

***Erklärung:** Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich groß sind und alle von den Seiten eingeschlossenen Winkel gleich groß sind.*

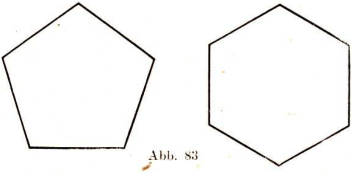


Abb. 83

Das regelmäßige Viereck haben wir schon früher als Quadrat bezeichnet. Die Abbildung 83 zeigt ein regelmäßiges Fünfeck und ein regelmäßiges Sechseck.

Wir können jetzt erklären, wann wir eine Pyramide **regelmäßig** nennen.

***Erklärung:** Eine Pyramide heißt regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.*

***Erklärung:** Eine regelmäßige Pyramide heißt gerade, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind.*

Fasse zusammen, welche besonderen Eigenschaften eine regelmäßige gerade Pyramide besitzt! (Vergleiche besonders die Seitenflächen!)

Welche der Abbildungen 77 bis 81 geben regelmäßige gerade Pyramiden wieder?

Aufgaben

1. Beschreibe und benenne die Grundfläche einer
   a) vierseitigen regelmäßigen geraden Pyramide,
   b) dreiseitigen regelmäßigen geraden Pyramide!
2. Vergleiche die Seitenflächen einer regelmäßigen geraden Pyramide nach Größe und Form!
3. a) Forme aus Ton oder aus Knetmasse eine vierseitige regelmäßige gerade Pyramide!
   b) Stelle aus Holzleisten und Plastilinklumpen oder aus Draht das Kantenmodell einer dreiseitigen geraden Pyramide her!
4. Wieviel Meter Draht benötigt man zur Anfertigung des Kantenmodells einer fünfseitigen regelmäßigen geraden Pyramide? Die Grundkanten sollen je 16 cm und die Seitenkanten je 24 cm lang sein. (Der Verschnitt soll nicht berücksichtigt werden.)
5. Aus welchen Figuren setzt sich die Oberfläche einer sechsseitigen geraden Pyramide zusammen?
6. Nenne Gegenstände, die die Form regelmäßiger gerader Pyramiden haben!

Die Oberfläche einer vierseitigen regelmäßigen geraden Pyramide besteht aus einem Quadrat und aus vier Dreiecken. Zwei Seiten jedes Dreiecks sind gleich lang, die dritte Seite ist so lang wie eine Seite des Quadrates. Durch diese Überlegung erhält man für eine vierseitige regelmäßige gerade Pyramide das in Abbildung 84 gezeichnete Netz. Ein solches Netz

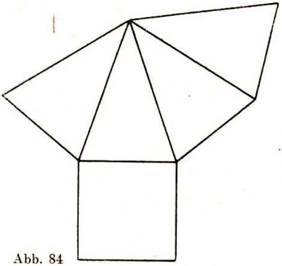


Abb. 84

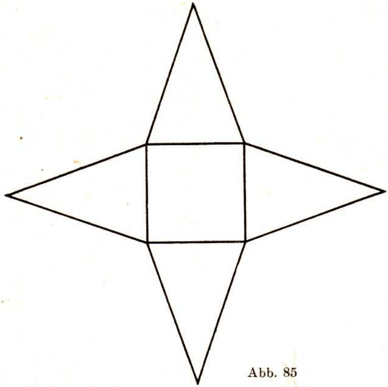


Abb. 85

läßt sich auch durch Abwickeln des entsprechenden Pyramidenmodells auf dem Zeichenblatt herstellen. Die Abbildung 85 zeigt das Netz derselben quadratischen geraden Pyramide, wobei die Seitenflächen um die Grundfläche gelegt sind.

Wie kann man nachprüfen, ob die beiden Netze zu derselben Pyramide gehören? Wo müßte man in Abbildung 84 bzw. 85 Klebefalze anbringen, um die Netze zu Pyramiden zusammenkleben zu können?

Wir wollen nun auch regelmäßige gerade Pyramiden zerschneiden. Zu diesem Zweck stellen wir uns aus Knetmasse eine quadratische gerade Pyramide her. Zunächst sollen Schnitte parallel zur Grundfläche vorgenommen werden.

Zerschneide die quadratische gerade Pyramide in verschiedenen Entfernungen von der Spitze parallel zur Grundfläche! Welche Form haben die Schnittflächen? Was kann man über die Größe der Schnittflächen aussagen? Vergleiche die Größe von solchen Schnittflächen untereinander, die in verschiedenen Entfernungen von der Spitze entstehen! Führe den gleichen Versuch in Gedanken für eine fünfseitige und für eine sechsseitige regelmäßige gerade Pyramide durch!

Wir stellen fest:

Wird eine regelmäßige gerade Pyramide parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Vielecke von der gleichen Form wie die Grundfläche. Diese Vielecke sind stets kleiner als die Grundfläche, und zwar um so kleiner, je weiter sie von der Grundfläche entfernt sind.

Durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche wird eine Pyramide in zwei Teilkörper zerlegt (Abb. 86). Der eine Teilkörper ist wieder eine Pyramide, den anderen bezeichnen wir als **Pyramidenstumpf.**

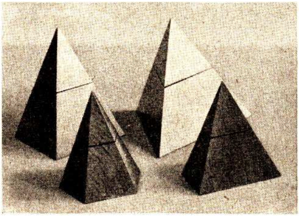


Abb. 86

Aufgaben

7. Pause die Netze der Abbildungen 84 und 85 punktweise durch, bringe Klebefalze an und fertige die Pyramidenmodelle an!

8. Stelle aus Karton das Modell einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide her, bei der auch die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind!

9. Gib an, worin sich eine Pyramide von einem Prisma unterscheidet!

10. Wieviel Symmetrieachsen haben die Grundflächen
   a) einer dreiseitigen regelmäßigen geraden Pyramide, 3
   b) einer vierseitigen regelmäßigen geraden Pyramide! 4

11. Wieviel Symmetrieachsen haben die Schnittflächen, die durch Schnitte parallel zur Grundfläche bei einer a) vierseitigen, b) sechsseitigen, c) dreiseitigen regelmäßigen geraden Pyramide entstehen?

9. Der Kegel

In den Abbildungen 87 bis 91 sind Körper dargestellt, die man als **Kegel** bezeichnet. Die Grundflächen dieser Kegel sind Kreise; solche Kegel werden **Kreiskegel** genannt. Es gibt auch Kegel, deren Grundfläche eine Ellipse ist. Im folgenden Abschnitt werden wir uns nur mit Kreiskegeln beschäftigen.

Worin unterscheidet sich der Kegelmantel von dem Zylindermantel? Erkläre die Unterschiede zwischen dem Kegel in der Abbildung 90 und dem in Abbildung 91!

Abb. 87

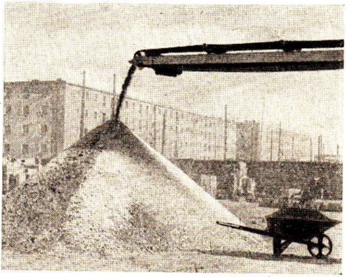


Abb. 88

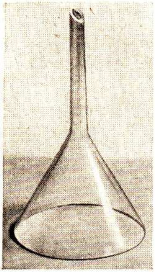


Abb. 89

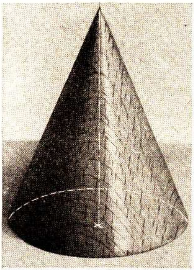


Abb. 90

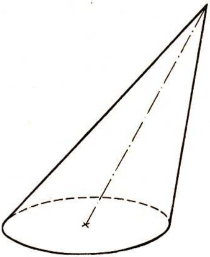


Abb. 91

Der Körper in Abbildung 90 heißt **gerader Kreiskegel,** der Körper in Abbildung 91 wird **schiefer Kreiskegel** genannt. Die Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt der Grundfläche und der Kegelspitze nennt man die **Kegelachse.** Diese steht bei einem **geraden** Kreiskegel auf der Grundfläche senkrecht.

Wir müssen jedoch noch genau erklären, was es heißt, daß eine Gerade auf einer Fläche senkrecht steht. Bisher haben wir nur das Senkrechtstehen einer Geraden auf einer anderen Geraden und einer Fläche auf einer anderen Fläche erklärt. Wenn wir feststellen wollen, ob eine Gerade in einem Punkt auf einer ebenen Fläche senkrecht steht, dann genügt es nicht, das Zeichendreieck nur in einer Richtung an die Gerade anzulegen. Abbildung 92 zeigt eine Gerade, die zwar in einer Richtung mit der Ebene einen rechten Winkel einschließt, in anderen Richtungen dagegen nicht. Wenn eine Gerade in einem Punkt auf einer ebenen Fläche senkrecht steht, muß man das Zeichendreieck in allen Richtungen an sie anlegen können, die Gerade muß also mit jeder Geraden, die durch den Punkt in der Ebene verläuft, einen rechten Winkel einschließen (Abb. 93). Es genügt aber, diese Messung für zwei derartige Geraden vorzunehmen, die nicht zusammenfallen.

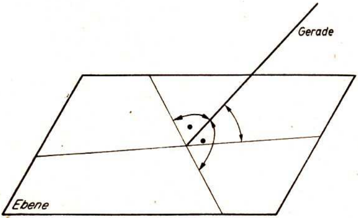


Abb. 92

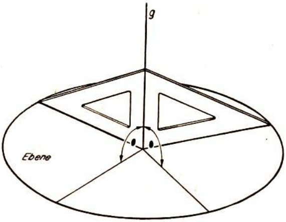


Abb. 93

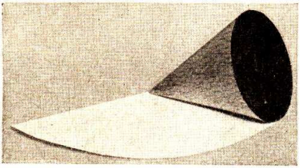


Abb. 94

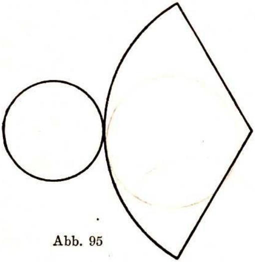


Abb. 95

Wir umwickeln das Modell eines geraden Kreiskegels mit einem Blatt Papier, schneiden die überstehenden Teile ab und rollen den so entstandenen Kegelmantel aus (Abb. 94).

Erklärung:* *Ein Körper heißt Kreiskegel, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

Die Grundfläche ist ein Kreis, die übrige Oberfläche (der Mantel) ist gekrümmt und läuft in einer Spitze aus. Der Mantel läßt sich auf einer ebenen Fläche abrollen.

Bei einem geraden Kreiskegel steht die Kegelachse auf der Grundfläche senkrecht. Der Mantel eines geraden Kreiskegels ergibt beim Abrollen einen Kreisausschnitt.

Die Abbildung 95 zeigt das vollständige Netz eines geraden Kreiskegels. Welche Linien müssen gleich lang sein?

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände von der Form gerader Kreiskegel!
2. Fertige aus steifem Papier das Modell eines geraden Kreiskegels an!
   Anleitung: Zeichne einen Kreisausschnitt, bringe einen Klebefalz an und klebe den Mantel zusammen! Stelle durch Probieren den Radius des zugehörigen Grundkreises fest und vervollständige den Kegel!
3. Ein Zimmermann hat auf einem waagerechten Dach eine Fahnenstange aufgestellt. Wie kann er mit dem Zimmermannswinkel prüfen, ob die Stange senkrecht steht?
4. Forme aus Ton einen geraden Kreiskegel!
   a) Zerschneide den Kegel senkrecht zur Grundfläche in verschiedenen Richtungen, wobei alle Schnitte durch die Spitze des Kegels gehen sollen!
   b) Zerschneide einen Kegel parallel zur Grundfläche in verschiedenen Höhen!
   c) Führe beliebige, auch schiefe Schnitte!
   Beschreibe die Form der Schnittflächen!

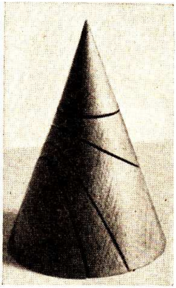


Abb. 96

Führen wir durch einen geraden Kreiskegel verschiedene schiefe Schnitte, so erhalten wir Schnittflächen von sehr verschiedenen Formen (Abb. 96).

Wir untersuchen besonders die Schnitte parallel zur Grundfläche. Ferner betrachten wir die Schnitte, die senkrecht zur Grundfläche und durch die Kegelspitze verlaufen.

Wir stellen fest:

Wird ein gerader Kreiskegel parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreise (Abb. 97 und 98).

Durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche entstehen zwei Teilkörper; der eine ist wieder ein Kegel, der andere heißt **Kegelstumpf.**

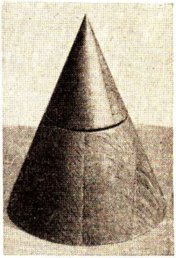


Abb. 97

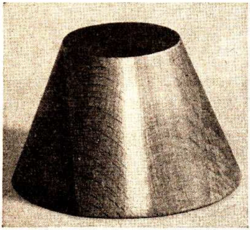


Abb. 98

Zerschneiden wir einen geraden Kreiskegel durch die Spitze senkrecht zur Grundfläche, so enthält der Schnitt die Kegelachse. Wir nennen ihn deshalb **Achsenschnitt.** Ganz gleich, in welcher Richtung wir schneiden, entstehen bei diesen Achsenschnitten stets gleich große Dreiecke. (Abb. 99).

Begründe, warum diese Dreiecke achsensymmetrisch in sich sind! Was folgt daraus für die Länge der Seiten?

Man nennt solche Dreiecke **gleichschenklig.**

Wir stellen fest:

Wird ein gerader Kreiskegel durch seine Spitze und senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets untereinander gleiche Dreiecke. Diese Dreiecke sind gleichschenklig.

Aufgabe

X 5. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck!

Anleitung: Zeichne einen Winkel mit dem Scheitelpunkt C! (Der Winkel muß kleiner als 180° sein.) Trage auf den Schenkeln von C aus gleiche Strecken ab! Verbinde die Endpunkte!

Fälle das Lot von C auf die gegenüberliegende Seite! Schneide das Dreieck aus und befestige es so an einer Stricknadel, daß die Nadel auf dem Lot liegt (Abb. 100)! Drehe die Stricknadel zwischen je zwei Fingern beider Hände möglichst schnell! Was beobachtet man?

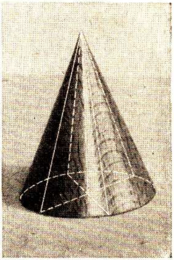


Abb. 99

Wir können uns einen geraden Kreiskegel auch durch Drehung (Rotation) eines gleichschenkligen Dreiecks entstanden denken. Die Drehachse (Rotationsachse) ist das Lot von der Spitze auf die gegenüberliegende Seite.

Aufgaben

6. a) Denke dir mehrere Schnitte parallel zur Grundfläche eines geraden Kreiskegels! Wie ändert sich von der Grundfläche zur Spitze die Größe der Schnittflächen?
b) Begründe, warum die Radien der Schnittflächen stets kleiner sind als der Radius der Grundfläche!

7. Auch bei einem geraden Kreiszylinder entstehen bei Schnitten parallel zur Grundfläche stets Kreisflächen. Zerschneide den geraden Kreiszylinder in verschiedenen Höhen parallel zur Grundfläche! Was kann man über die Größe der Schnittflächen aussagen? Führe die gleichen Operationen bei einem geraden Kreiskegel durch! Welcher Unterschied besteht gegenüber dem Zylinder?

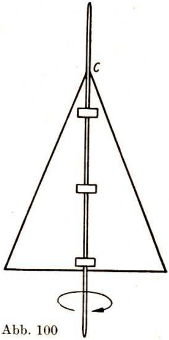


Abb. 100

10. Das Dreieck

Die Seitenflächen einer Pyramide sind stets Dreiecke. Dabei können Dreiecke von verschiedenen Formen auftreten. Dreiecke finden wir häufig in der Technik, zum Beispiel an Gebäuden, Brücken und Maschinen. (vgl. Abb. 101 bis 103).

Die Abbildung 102 zeigt die Konstruktion einer Brücke und die Abbildung 103 einen Dachstuhlbinder (so bezeichnet man Teile des Dachstuhles). In leeren Scheunen sind die Dachstuhlbinder besonders deutlich zu erkennen.

Abb. 101

Miß bei den Dreiecken in den Abbildungen 104 bis 106 die Winkel! Stelle fest, ob spitze, rechte und stumpfe Winkel vorkommen! Welche besonderen Eigenschaften haben die Dreiecke, die seitliche Begrenzungsflächen von regelmäßigen geraden Pyramiden sind?

Wir können feststellen: In den uns bekannten Dreiecken kommen spitze, rechte und stumpfe Winkel vor. In einem Dreieck können alle Seiten verschiedene Längen haben. Es können aber auch zwei oder alle drei Seiten gleich groß sein.

Probiere, ob man ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, zwei stumpfen Winkeln oder mit einem rechten und einem stumpfen Winkel zeichnen kann!

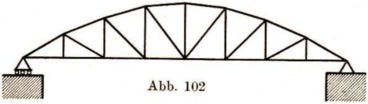


Abb. 102

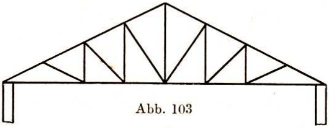


Abb. 103

Wir haben bei den bisherigen Untersuchungen die Körper stets in Arten eingeteilt. Zum Beispiel wurden die Prismen unterteilt in schiefe und gerade Prismen. Von den Zylindern haben wir nur die Kreiszylinder behandelt; bei den Kreiszylindern unterschieden wir wieder schiefe und gerade. In gleicher Weise gingen wir bei den Pyramiden vor, die wir in regelmäßige und unregelmäßige unterteilten. Von den regelmäßigen Pyramiden betrachteten wir wieder nur die geraden.

Wir wollen nun auch die Dreiecke einteilen. Diese Einteilung können wir nach den Winkeln oder nach den Seiten vornehmen.

Erklärungen:

I. Ein Dreieck, das nur spitze Winkel enthält, heißt spitzwinkliges Dreieck (Abb. 104).

II. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck (Abb. 105).

III. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinkliges Dreieck (Abb. 106).

Damit haben wir die Dreiecke nach der Größe der Winkel geordnet. Wir wollen nun die Dreiecke nach den Seiten einteilen. Dabei werden wir die Seiten eines Dreiecks untereinander vergleichen und die Dreiecke danach ordnen, ob zwei oder alle drei Seiten die gleiche Länge haben.

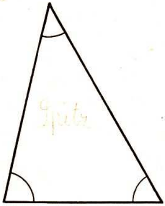


Abb. 104

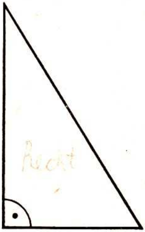


Abb. 105

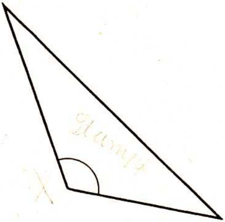


Abb. 106

Erklärungen:

I. Ein Dreieck, in dem zwei Seiten die gleiche Länge haben, heißt gleichschenkliges Dreieck (Abb. 107).

II. Ein Dreieck, in dem alle drei Seiten gleich lang sind, heißt gleichseitiges Dreieck (Abb. 108).

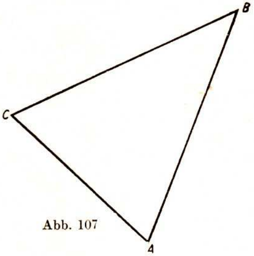


Abb. 107

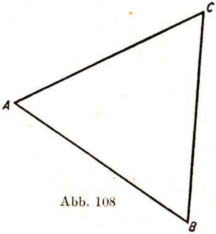


Abb. 108

Die Eckpunkte eines Dreiecks werden mit großen Buchstaben A, B, C, die Seiten (als Strecken) mit kleinen Buchstaben a, b, c bezeichnet. Dabei erhält die dem Eckpunkt A gegenüberliegende Seite die Bezeichnung a, die dem Eckpunkt B gegenüberliegende Seite die Bezeichnung b und die dem Eckpunkt C gegenüberliegende Seite die Bezeichnung c. Die Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben benannt, wobei der Winkel α den Punkt A, der Winkel β den Punkt B und der Winkel γ den Punkt C zum Scheitelpunkt hat. Die Winkel α, β und γ bezeichnet man als Innenwinkel des Dreiecks.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck werden die gleichlangen Seiten **Schenkel** genannt. Die dritte Seite erhält die Bezeichnung **Basis** (Abb. 107). Der Punkt des gleichschenkligen Dreiecks, der gegenüber der Basis liegt, heißt **Spitze.** Dabei ist zu beachten, daß durchaus nicht immer die Seite c die Basis zu sein braucht. In der Abbildung 107 sind die Seiten AB und BC gleich lang. Welche Seite ist die Basis? Die an der Basis liegenden Dreieckswinkel heißen **Basiswinkel.**

Aufgabe: Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis AB die Länge 4 cm und dessen Schenkel die Länge 6 cm haben!

Lösung: Wir zeichnen zunächst die Strecke $AB = 4$ cm. Der Punkt C muß von A und von B den gleichen Abstand 6 cm haben. Er muß also auf der Symmetrieachse zu den Punkten A und B liegen (vgl. S. 9, Satz 1a). Wir schlagen also um A und um B Kreise mit dem Radius 6 cm, die einander oberhalb AB in dem Punkt C schneiden. ABC ist das gesuchte Dreieck.

Aufgabe: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 3{,}5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm!

Lösung mit Hilfe von Pappstreifen: Zeichne zunächst die Seite $AB = c = 5$ cm in das Heft! Nun schneide aus Pappe zwei Streifen aus und zeichne auf dem einen Streifen die Strecke $AC = b = 4$ cm und auf dem anderen die Strecke $BC = a = 3{,}5$ cm! Befestige die Streifen mit Reißnägeln an den entsprechenden

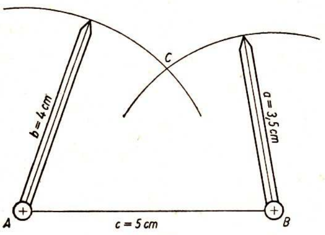


Abb. 109

Endpunkten der Strecke AB (Abb. 109)! Nun drehe die Pappstreifen so lange, bis ihre Enden zusammenfallen. So erhält man die Lage des Punktes C. Prüfe nach, daß oberhalb von AB nur eine Lage des Punktes C möglich ist!

Welches Zeichengerät kann man an Stelle der Pappstreifen benutzen?

Lösung mit Hilfe des Zirkels: Zeichne die Strecke $AB = c = 5$ cm! Der Punkt C muß von A den Abstand 4 cm und von B den Abstand 3,5 cm haben. Schlage um A mit dem Radius 4 cm einen Kreisbogen! Alle Punkte dieses Kreisbogens haben von A den Abstand 4 cm. Ebenso sind alle Punkte auf dem Kreisbogen um B mit dem Radius 3,5 cm von B 3,5 cm entfernt. Die Kreise schneiden einander in zwei Punkten. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die einzigen Punkte, die gleichzeitig von A 4 cm und von B 3,5 cm entfernt sind. Von diesen beiden Schnittpunkten wählen wir den oberhalb AB liegenden als dritten Dreieckspunkt und bezeichnen ihn mit C. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck (Abb. 110).

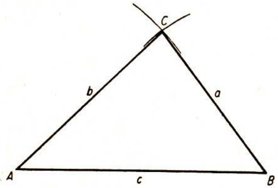


Abb. 110

Prüfe nach, ob die Seiten des Dreiecks die geforderte Länge besitzen! Miß die Winkel! Vergleiche diese Konstruktion mit dem Konstruktionsverfahren mit Hilfe der Pappstreifen! Was stellst du fest?

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten:
   a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm, b) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm,
   c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, d) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm!
2. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten:
   a) $a = b = 4$ cm, $c = 5$ cm, b) $a = 3$ cm, $b = c = 5$ cm,
   c) $b = 2{,}8$ cm, $a = c = 2{,}3$ cm, d) $a = b = 2{,}5$ cm, $c = 3{,}5$ cm!
3. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit den Seiten:
   a) 3 cm (beschreibe die Konstruktion!), b) 4 cm, c) 5,2 cm, d) 6,4 cm!

4. Dachgiebel sind oft gleichschenklige Dreiecke. Zeichne einen solchen Dachgiebel mit der Basis 10 m (6 m, 5 m) und den Schenkeln 8 m (7,5 m, 6 m) im Maßstab 1 : 100! Welchen Winkel schließen die Dachkanten am Dachfirst ein?

5. Konstruiere die Netze von dreiseitigen regelmäßigen geraden Pyramiden mit den folgenden Maßen:

	a)	b)	c)	d)
Grundkanten:	3,0 cm	4,2 cm	2,8 cm	3,5 cm
Seitenkanten:	5,0 cm	6,0 cm	2,5 cm	3,5 cm!

Anleitung: Konstruiere zunächst die Grundfläche! Gehe von der Grundfläche aus und konstruiere die Seitenflächen!

6. Konstruiere die Netze der folgenden vierseitigen regelmäßigen geraden Pyramiden:

	a)	b)	c)	d)
Grundkanten:	3,0 cm	2,5 cm	4,0 cm	6,0 cm
Seitenkanten:	4,8 cm	3,7 cm	4,0 cm	4,8 cm!

Anleitung: Konstruiere zunächst das Quadrat mit Lineal und Zeichendreieck! Verfahre dann wie bei Aufgabe 5!

7. Fertige aus Papier das Modell eines Turmdaches an! Das Dach soll eine quadratische gerade Pyramide sein, deren Grundkante 4 m und deren Seitenkanten je 6 m lang sind. Verwende den Maßstab 1 : 100!

8. Versuche ein Dreieck aus den Seiten $a = 3$ cm, $b = 2$ cm und $c = 6$ cm zu zeichnen! Was stellst du fest?

Aus den Seiten $a = 3$ cm, $b = 2$ cm und $c = 6$ cm läßt sich kein Dreieck konstruieren. Addiert man nämlich die Länge der Seiten a und b, so ist die Summe kleiner als die dritte Seite c. Betrachtet man ein beliebiges Dreieck, so sieht man sofort, daß stets die Summe von zwei Seiten größer als die dritte Seite sein muß. Die kürzeste Verbindung von A und B ist die Strecke c. Der Weg von A nach B über C, also die Summe der Seiten a und b, muß länger sein als die Strecke $AB = c$.

Entsprechendes gilt für alle Seiten. Wir formulieren daher den

Satz 5: Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.

Aufgabe

9. Untersuche, welche der folgenden Seitenlängen die Konstruktion eines Dreiecks ermöglichen:

a)	$a = 4{,}3$ cm,	$b = 3{,}8$ cm,	$c = 5{,}5$ cm,
b)	$a = 6{,}5$ cm,	$b = 2{,}5$ cm,	$c = 3{,}5$ cm,
c)	$a = 1{,}7$ cm,	$b = 4{,}3$ cm,	$c = 6{,}0$ cm,
d)	$a = 4{,}2$ cm,	$b = 12{,}2$ cm,	$c = 17{,}3$ cm,
e)	$a = 4{,}3$ cm,	$b = 5{,}7$ cm,	$c = 1{,}9$ cm!

Wir hatten schon festgestellt, daß unter den Innenwinkeln eines Dreiecks nur ein rechter oder nur ein stumpfer Winkel vorkommen kann. Wir wollen die Winkel des Dreiecks näher untersuchen.

Zeichne ein rechtwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck! Miß die Innenwinkel α, β, γ und bilde für jedes Dreieck die Summe $\alpha + \beta + \gamma$! Was ist festzustellen?

Wir messen bei irgendeinem Dreieck die Innenwinkel. Aus diesen Meßergebnissen bilden wir die Summe. Wir erhalten stets einen Wert, der nahe bei 180° liegt. Die Messungen mit dem Winkelmesser sind nicht genau. Wir werden im folgenden beweisen, daß in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel genau 180° beträgt, daß also die bei den Messungen festgestellten Abweichungen von dem Wert 180° auf Meßfehlern beruhen.

Satz 6: Im Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Beweis: Wir zeichnen durch den Punkt C des Dreiecks ABC die Parallele zu der Seite AB und bezeichnen die Winkel, wie es die Abbildung 111 zeigt (dabei muß beachtet werden, daß mit α und α_1 verschieden liegende Winkel gekennzeichnet werden; dasselbe gilt für β und β_1). Der Winkel α_1 ist ein Wechselwinkel zu dem Winkel α

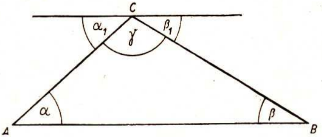


Abb. 111

(die schneidende Gerade verläuft in der Richtung AC). Entsprechend ist der Winkel β_1 Wechselwinkel zu β (die schneidende Gerade verläuft in Richtung BC). Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich. Folglich ist $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$. Im Punkte C bilden die Winkel α_1, γ und β_1 einen gestreckten Winkel.

Es ist also $\qquad \alpha_1 + \gamma + \beta_1 = 180°$

und demnach auch $\qquad \alpha + \gamma + \beta = 180°.$

Aufgaben

10. Begründe, warum in einem Dreieck von den drei Innenwinkeln nur einer 90° oder größer als 90° sein kann!

11. In einem Dreieck ist:
a) $\alpha = 49°$, $\beta = 72°$, b) $\gamma = 90°$, $\alpha = 60°$, c) $\alpha = 60°$, $\beta = 65°$,
d) $\gamma = 55°$, $\alpha = 72°$, e) $\beta = 112°$, $\alpha = 22°$, f) $\gamma = 74°$, $\beta = 93°$.
Stelle zeichnerisch fest, wie groß jeweils der dritte Winkel ist!

12. Löse die Aufgabe Nr. 11 rechnerisch und vergleiche diese Ergebnisse mit den zeichnerisch gewonnenen!

13. Begründe den Satz: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der spitzen Winkel 90°!

Erklärung: Verlängert man eine Dreieckseite über einen Eckpunkt hinaus, so entsteht zwischen der Verlängerung dieser Seite und der anderen Seite ein Außenwinkel des Dreiecks (Abb. 112).

Begründe, warum $\alpha_1 + \alpha = 180°$ ist! Am Punkt A gibt es noch einen zweiten Außenwinkel α_2. Begründe, warum $\alpha_1 = \alpha_2$ ist!

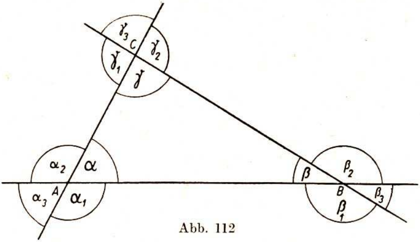


Abb. 112

Da die beiden Außenwinkel an einem Eckpunkt gleich groß sind, wird nur einer von ihnen betrachtet. Man sagt: Das Dreieck hat drei Außenwinkel.

Wie groß ist der Winkel α_3? Zeichne ein beliebiges Dreieck! Miß die drei Außenwinkel! Bilde ihre Summe! Vergleiche die Größe eines Außenwinkels mit den Innenwinkeln des Dreiecks!

Satz 7: Im Dreieck ist jeder Außenwinkel gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Satz 8: Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.

Beweis zu Satz 7: Der Außenwinkel α_1 ergänzt den Innenwinkel α zu 180° (Nebenwinkel; vgl. Abb. 112). Die Summe der α_1 nicht anliegenden Innenwinkel, also $\beta + \gamma$, ergänzt ebenfalls den Winkel α zu 180° (denn $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). Folglich ist $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Führe entsprechend den Beweis für die Außenwinkel β_1 und γ_1! Man erhält:

$$\beta_1 = \gamma + \alpha$$

und

$$\gamma_1 = \alpha + \beta.$$

Beweis zu Satz 8: Wir bilden die Summe der drei Außenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$. Nun ist $\alpha_1 = \beta + \gamma$, $\beta_1 = \gamma + \alpha$ und $\gamma_1 = \alpha + \beta$. Wir können also schreiben:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \beta + \gamma + \gamma + \alpha + \alpha + \beta.$$

In dieser Summe kommt jeder Innenwinkel zweimal vor. Die Summe der drei Innenwinkel ist 180°, das Doppelte davon 360°. Also ist

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°.$$

Aufgaben

14. In einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt:

a) $\alpha = 43°$, $\beta = 64°$, b) $\gamma = 113°$, $\beta = 24°$,
c) $\beta = 74°$, $\gamma = 83°$, d) $\alpha = 14°$, $\beta = 63°$.

Berechne den dritten Innenwinkel und die drei Außenwinkel! Mache die Probe!

15. Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck! Führe an dieser Figur die Beweise für die Sätze:

a) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Satz 6), b) $\alpha_1 = \beta + \gamma$ (Satz 7), c) $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$ (Satz 8)!

In der Abbildung 113 ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB und den Schenkeln AC und BC gezeichnet. Die Symmetrieachse zu den Punkten A und B steht im Punkt D, der in der Mitte von AB liegt, senkrecht auf AB (Satz 3, S. 9). Wie wir bereits im Abschnitt Achsensymmetrie gelernt haben, liegen alle Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten jeweils einander gleich sind, auf der Symmetrieachse zu den beiden Punkten. Der Punkt C des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist von A und B gleich weit entfernt. Die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks muß also auf der Symmetrieachse zu den Punkten A und B liegen. Anders ausgedrückt: Die Symmetrieachse zu den Punkten A und B geht durch C und ist also die Symmetrieachse zu dem ganzen Dreieck. Das Dreieck ist achsensymmetrisch in sich in bezug auf die Achse DC.

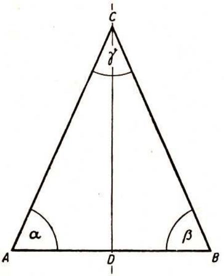


Abb. 113

Weise nach, daß sich beim Umklappen um die Gerade DC die Teildreiecke ADC und BDC decken! Was ergibt sich beim Umklappen für die Größe der Winkel ACD und BCD?

***Satz 9:* Das gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch in sich. Die Symmetrieachse geht durch die Spitze, halbiert den Winkel an der Spitze, halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.**

***Satz 10:* Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.**

Beweise die beiden Sätze durch Umklappen oder mit Hilfe der bekannten Sätze aus der Achsensymmetrie!

Aufgaben

16. a) Wieviel Symmetrieachsen hat ein gleichseitiges Dreieck?
    b) Wie groß ist jeder Winkel in einem gleichseitigen Dreieck?
17. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der Winkel an der Spitze 90° beträgt. Wie groß sind die anderen Innenwinkel?
18. Begründe den folgenden Satz: Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel!
19. In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Basiswinkel a) 28°, b) 49°, c) 76°, d) 64°. Wie groß sind die übrigen Innenwinkel und die Außenwinkel?
20. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt a) 132°, b) 98°, c) 67°. Bestimme die Innenwinkel und die anderen Außenwinkel!
21. Der Winkel γ an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nimmt folgende Werte an: 10°, 20°, 30°. Stelle die zugehörigen Werte von α fest! Wie groß ist jeweils der Winkel β?

11. Kegelstumpf

In einem der letzten Abschnitte dieses Buches haben wir die Kreiskegel unter anderem auch parallel zur Grundfläche zerschnitten. Dabei entstanden zwei Teilkörper, von denen der eine wieder ein Kegel war. Der andere Teilkörper wurde Kegelstumpf genannt.

Erklärung:* *Wenn man von einem Kegel durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche den Teil abtrennt, der in der Spitze ausläuft, entsteht als Restkörper ein Kegelstumpf.

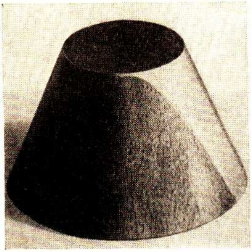


Abb. 114

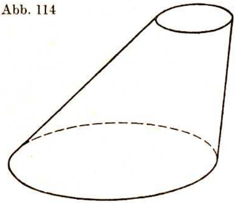


Abb. 115

Je nachdem, ob es sich um gerade oder schiefe Kreiskegel handelt, die parallel zur Grundfläche zerschnitten werden, entstehen auch gerade oder schiefe Kegelstümpfe (Abb. 114 und 115).

Die Abbildungen 116 (Blick von der Terrasse eines Hauses in der Stalinallee zu Berlin) und 117 (Betonmischmaschine) zeigen uns Gegenstände in der Form gerader Kegelstümpfe.

Nenne weitere Gegenstände dieser Art!

Wir beschäftigen uns hier nur mit geraden Kreiskegelstümpfen, also mit solchen, die man sich aus einem geraden Kreiskegel durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche entstanden denken kann.

Beschreibe die Oberfläche eines geraden Kreiskegelstumpfes! Welche Lage haben Grund- und Deckfläche zueinander? Den Mantel eines Kreiskegelstumpfes können wir auf einem Zeichenblatt abrollen. Schneide zu dem Modell eines geraden Kreiskegelstumpfes einen Papiermantel und breite diesen aus!

Die Abbildung 118 zeigt den ausgebreiteten Mantel eines Kegelstumpfes (der Mantel ist entlang der Mantellinie AB aufgeschnitten.)

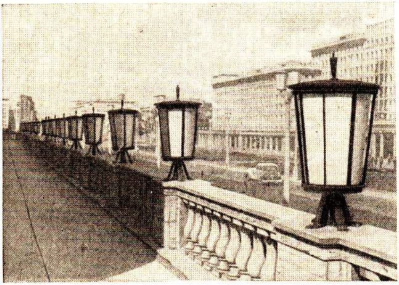


Abb. 116

Welche Linien in der Abbildung 114 müssen untereinander gleich lang sein? Wo muß man an dem ausgebreiteten Mantel den Klebefalz anbringen, wenn man ihn wieder zusammenkleben will?

Einen geraden Kegelstumpf kann man zu einem geraden Kegel ergänzen.

Wie kann man den Mantel in Abbildung 118 zu dem Mantel des zugehörigen Kegels vervollständigen?

Den Mantel eines geraden Kreiskegelstumpfes können wir zu einem

Kreissektor ergänzen. Es entsteht dann der Mantel des zugehörigen geraden Kreiskegels.

Begründe an Hand der Abbildung 118, warum man die ausgebreitete Mantelfläche eines geraden Kreiskegelstumpfes **Kreisringausschnitt** oder **Kreisringsektor** nennt!

Zusammenfassung: Zerschneidet man einen geraden Kreiskegel parallel zur Grundfläche, so entstehen ein gerader Kreiskegelstumpf und ein gerader Kreiskegel. Grund- und Deckfläche des geraden Kreiskegelstumpfes sind zueinander parallele, verschieden große Kreise. Der Mantel kann auf der Zeichenebene zu einem Kreisringsektor abgerollt werden.

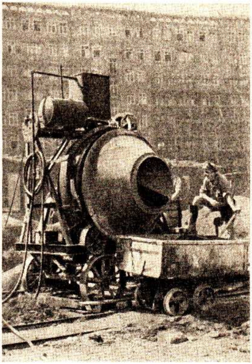


Abb. 117

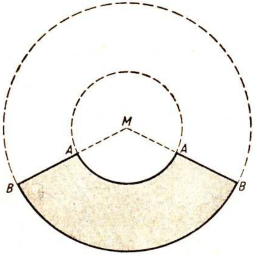


Abb. 118

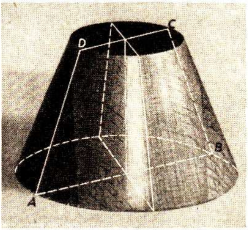


Abb. 119

Aufgaben

1. Denke dir einen geraden Kreiskegelstumpf parallel zur Grundfläche zerschnitten! Beschreibe die Form der Schnittfläche!
2. Forme aus Knetmasse einen Kegelstumpf! Führe mehrere Schnitte parallel zur Grundfläche in verschiedenen Höhen! Vergleiche die Größen der Schnittflächen mit der Grundfläche und untereinander!
3. Baue aus Papier oder Karton einen geraden Kreiskegelstumpf!

   Anleitung: Fertige zunächst den Mantel, indem du von einem Kreisring ausgehst! Stelle dann durch Probieren die Radien des Grund- und Deckkreises fest.
4. Begründe, warum bei einem geraden Kreiskegelstumpf die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche auf der Grundfläche senkrecht steht! (Diese Strecke nennt man wieder Achse; vgl. Abb. 119).

5. Forme aus Knetmasse einen geraden Kreiskegelstumpf! Zerschneide ihn so, daß der Schnitt durch den Mittelpunkt der Deckfläche und senkrecht zur Grundfläche verläuft (Achsenschnitt)! Beschreibe genau die Form der Schnittfläche (Achsensymmetrie)!

6. a) Denke dir mehrere Achsenschnitte! Vergleiche Form und Größe der verschiedenen Schnittflächen!

   b) Begründe, warum in Abbildung 119 die Strecken CD und AB zueinander parallel sind und warum die Strecken AD und BC die gleiche Länge haben!

7. Zeichne einen Kreis mit dem Radius 5 cm und um denselben Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius 1 cm! Schneide den entstandenen Kreisring aus! Zerlege den Kreisring durch zwei Schnitte in zwei nicht gleich große Kreisringausschnitte und füge sie zu Kegelstumpfmänteln zusammen! Worin unterscheiden sie sich? Vergleiche die Größen der jeweiligen Grund- und Deckflächen!

8. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck! Fälle das Lot von der Spitze auf die Basis! Ziehe durch einen Punkt eines Schenkels die Parallele zur Basis und zerschneide das Dreieck längs dieser Parallelen! Befestige das erhaltene Viereck so an einer Stricknadel, daß diese auf dem Lot liegt! Drehe die Stricknadel schnell zwischen den Fingern! Beschreibe, was man beobachtet!

12. Der Pyramidenstumpf

Erklärung:* *Zerschneidet man eine Pyramide parallel zur Grundfläche, so entstehen als Teilkörper ein Pyramidenstumpf (Abb. 120) und eine Pyramide.

Beschreibe die Form der Begrenzungsflächen beim Pyramidenstumpf! Wie liegen Grund- und Deckfläche zueinander?

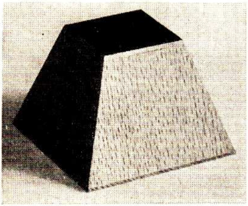


Abb. 120

Auch die Pyramidenstümpfe unterscheiden wir nach der Anzahl der Seitenflächen. Zum Beispiel gibt es dreiseitige, vierseitige und fünfseitige Pyramidenstümpfe.

Wir werden uns zunächst nur mit regelmäßigen geraden Pyramidenstümpfen beschäftigen, für die wir auch kurz Pyramidenstumpf sagen. Das sind also Körper, die wir uns aus einer regelmäßigen geraden Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche entstanden denken können.

Beschreibe die Oberfläche eines dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen geraden regelmäßigen Pyramidenstumpfes! Begründe, warum die Seitenflächen der regelmäßigen geraden Pyramidenstümpfe achsensymmetrisch in sich sind! Beschreibe den Verlauf der Symmetrieachse!

Zusammenfassung: Grund- und Deckfläche eines regelmäßigen geraden Pyramidenstumpfes sind zueinander parallele, aber verschieden große Vielecke. Die Seitenflächen sind stets untereinander gleiche, in sich achsensymmetrische Vierecke. Zwei Seiten dieser Vierecke sind zueinander parallel.

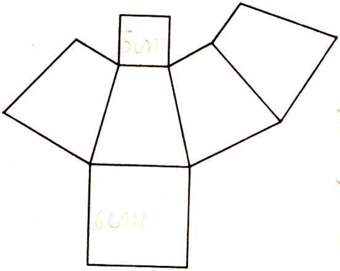


Abb. 121

Begründe, warum die Abbildung 121 das Netz eines vierseitigen regelmäßigen geraden Pyramidenstumpfes ist!

Aufgaben

1. Aus welchen Flächen setzt sich das Netz eines a) fünfseitigen, b) sechsseitigen, c) siebenseitigen Pyramidenstumpfes zusammen?

2. Welche Veränderungen muß man in der Abbildung 121 vornehmen, um das Netz einer Pyramide zu erhalten?

3. Wieviel Meter Draht benötigt man zur Herstellung eines Kantenmodells von einem sechsseitigen Pyramidenstumpf mit den Maßen:

Grundkanten:	4 cm,
Deckkanten:	3 cm,
Seitenkanten:	8 cm?

Denke dir die Drähte zusammengelötet!

4. Die Abbildungen 122 und 123 zeigen Gegenstände von der Form eines Pyramidenstumpfes. Nenne weitere Gegenstände dieser Art! Stelle fest, ob es sich um regelmäßige Pyramidenstümpfe handelt!

Abb. 122

5. Zerschneide einen quadratischen geraden Pyramidenstumpf parallel zur Grundfläche in verschiedenen Höhen!

   a) Beschreibe die Form der Schnittflächen!

   b) Vergleiche die Größe der verschiedenen Schnittflächen!

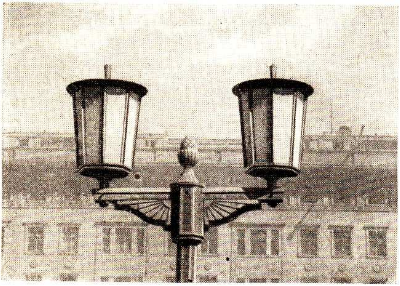


Abb. 123

6. Zerschneide einen quadratischen geraden Pyramidenstumpf so, daß der Schnitt senkrecht zur Grundfläche und parallel zu einer Deckkante verläuft!

   a) Beschreibe die Form der Schnittfläche!

   b) Führe verschiedene Schnitte! Vergleiche die Größe der Schnittflächen!

13. Das Trapez

Die Abbildungen 124 bis 127 zeigen verschiedene Pyramidenstümpfe. Wir untersuchen in jeder Abbildung das Viereck $ABCD$.

In welchen Vierecken sind einander gleiche Seiten und Winkel vorhanden? Welche Eigenschaften haben alle Vierecke $ABCD$ in den Abbildungen 124 bis 127 gemeinsam?

Wir können feststellen: Die Vierecke unterscheiden sich in der Länge ihrer Seiten und in der Größe der Winkel. Es treten spitze, rechte und stumpfe Winkel auf. In Abbildung 124 sind zwei Seiten gleich groß.

Alle gezeichneten Vierecke haben gemeinsam, daß die Seite DC parallel zu der Seite AB ist.

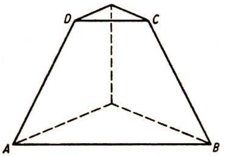


Abb. 124

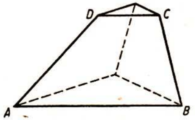


Abb. 125

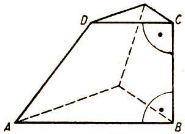


Abb. 126

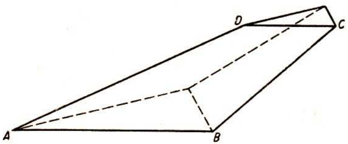


Abb. 127

Erklärung: Sind in einem Viereck zwei Seiten zueinander parallel, so heißt dieses Viereck Trapez.

In dem Trapez der Abbildung 124 sind die beiden nichtparallelen Seiten gleich lang. Wir nennen es daher **gleichschenkliges Trapez.** Das Trapez in der Abbildung 126 enthält zwei rechte Winkel und wird daher **rechtwinkliges Trapez** genannt.

Erklärungen: Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn die nichtparallelen Seiten gleich lang sind (Abb. 128). Ein Trapez heißt rechtwinklig, wenn es zwei rechte Winkel enthält (Abb. 129).

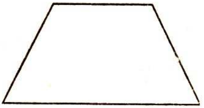
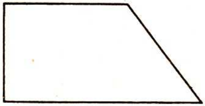
Abb. 128


Abb. 129


Begründe, warum in einem Trapez niemals nur ein rechter Winkel auftreten kann! Bei welchen Körperschnitten entstanden als Schnittflächen Trapeze? Welche Körper haben als seitliche Begrenzungsflächen gleichschenklige Trapeze?

Die zueinander parallelen Seiten eines Trapezes bezeichnet man als große und als kleine Grundseite. Errichtet man in irgendeinem Punkt der einen Grundseite eine Senkrechte, so schneidet diese die andere Grundseite oder deren Verlängerung ebenfalls rechtwinklig. Die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte voneinander ist die **Höhe** des Trapezes (die Strecke EF in Abb. 130).

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB und durch einen beliebigen Punkt eines Schenkels eine Parallele zu der Basis! Begründe, warum das Viereck $ABDE$ in der Abbildung 131 ein gleichschenkliges Trapez ist! Fälle in dem Dreieck ABC das Lot von C auf die Basis, schneide das Trapez $ABDE$ aus und falte es um die Strecke GF zusammen!

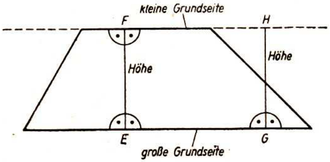


Abb. 130

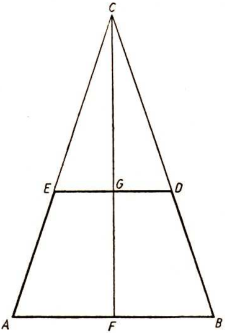


Abb. 131

Vergleiche untereinander die Größe der Strecken EG und GD bzw. AF und FB sowie die Größe der Winkel an den Punkten A und B bzw. E und D!

Aus dieser Symmetriebetrachtung ergibt sich der

Satz 11: Das gleichschenklige Trapez ist achsensymmetrisch in sich. Die Symmetrieachse halbiert die Grundseiten und steht auf ihnen senkrecht. Die Innenwinkel an den Endpunkten der großen Grundseite sind einander gleich. Entsprechend sind die Innenwinkel an den Endpunkten der kleinen Grundseite einander gleich.

Aufgaben

1. Zeichne a) ein beliebiges, b) ein rechtwinkliges, c) ein gleichschenkliges Trapez! Anleitung zu c): Gehe vom gleichschenkligen Dreieck aus!
2. Zeichne ein beliebiges Trapez und verlängere alle Seiten! Bestimme Scheitelwinkel, Nebenwinkel und Winkel an Parallelen (Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel)! Suche Winkel, die a) gleich groß sind, b) sich zu 180° ergänzen!
3. Zeichne ein beliebiges Trapez! Zeichne eine Höhe ein a) durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal, b) unter Verwendung eines Zeichendreiecks!

4. Wie mißt man am einfachsten die Höhe eines rechtwinkligen Trapezes?

5. Zeichne die Umrisse eines Siebes, wie es auf Bauplätzen zu finden ist, im Maßstab 1:10! Es hat häufig die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Die kleinere Grundseite soll 45 cm, die größere 80 cm und die Höhe 1 m lang sein.

Anleitung: Zeichne zunächst die große Grundseite! Halbiere diese und errichte in dem Halbierungspunkt die Senkrechte! Trage die Länge der Höhe auf der Senkrechten ab! Ziehe durch den Endpunkt eine Parallele zu der Grundseite! Auf der Parallelen trage nach beiden Seiten je die halbe Länge der kleinen Grundseite ab!

6. Zeichne gleichschenklige Trapeze mit den folgenden Maßen:

	große Grundseite	kleine Grundseite	Höhe
a)	9 cm	5 cm	5 cm
b)	6 cm	4 cm	3 cm
c)	17,5 cm	4,5 cm	4,0 cm
d)	5,5 cm	4,5 cm	3,0 cm!

Anleitung: Verfahre wie in der Aufgabe 5!

7. Fertige Modelle für folgende vierseitige regelmäßige gerade Pyramidenstümpfe an:

	Kantenlänge der Grundfläche	Kantenlänge der Deckfläche	Höhe der trapezförmigen Seitenflächen
a)	5 cm	3 cm	4 cm
b)	6,5 cm	4,0 cm	5,0 cm
c)	7,1 cm	6,3 cm	3,5 cm!

Anleitung: Grund- und Deckflächen sind Quadrate. Die Seitenflächen sind gleichschenklige Trapeze. Konstruiere das Netz und klebe es zusammen!

8. Der Querschnitt durch einen Eisenbahndamm ist häufig ein gleichschenkliges Trapez. Abbildung 132 gibt die Bezeichnungen an. Stelle durch eine Zeichnung in geeignetem Maßstab die nicht gegebenen Größen fest, wenn bekannt sind:
a) Dammsohle 13 m, Dammkrone 4 m, Dammhöhe 3,4 m,
b) Dammsohle 14 m, Böschungslänge 6 m, Böschungswinkel 42°!

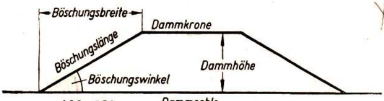


Abb. 132

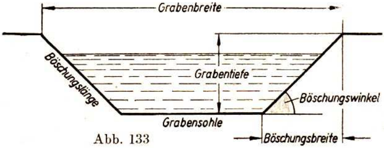


Abb. 133

9. Gräben und Kanäle werden häufig so angelegt, daß die Böschungslängen und -winkel auf beiden Seiten gleich sind (Abb. 133). Zeichne in geeignetem Maßstab den Querschnitt durch einen Graben nach folgenden Angaben und entnimm der Zeichnung die Größe der übrigen Stücke:

a) Grabenbreite 5,4 m, Grabentiefe 2,6 m, Böschungslänge 3,2 m,

b) Grabensohle 3,2 m, Grabentiefe 2,2 m, Böschungswinkel 52°!

10. Welche Körperform beobachtet man, wenn man ein gleichschenkliges Trapez um seine Symmetrieachse rotieren läßt? Zeichne ein gleichschenkliges Trapez, konstruiere dessen Symmetrieachse und befestige das Trapez entsprechend auf einer Stricknadel!

14. Die Kugel

Versuche einen Ball in ein Blatt Papier einzuwickeln, ohne dabei das Papier zu falten! Nenne Gegenstände von der Form einer Kugel! Forme eine Kugel aus Knetmasse! Wie muß man dabei vorgehen?

Kugeln finden oft in der Technik Verwendung, zum Beispiel in Kugellagern (Abb. 134). Gegenüber vielen anderen Körpern hat die Kugel den großen Vorzug, daß sie nach jeder Richtung hin sehr leicht rollt. Sie berührt die Unterlage (genaugenommen) nur in einem Punkt.

Auf dem Mantel eines Kegels oder eines Zylinders lassen sich in bestimmten Richtungen gerade Linien ziehen. Prüfe, ob sich auf der Kugelfläche auch gerade Linien zeichnen lassen! Worin unterscheidet sich die Oberfläche einer Kugel von dem Mantel eines Kegels und eines Zylinders?

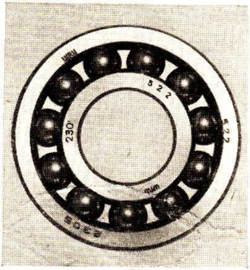


Abb. 134

Zusammenfassung: Die Kugel wird von einer nach allen Richtungen gleichmäßig gekrümmten Fläche begrenzt (Kugelfläche). Diese Kugelfläche läßt sich nicht auf einer ebenen Fläche ausbreiten. Auf der Kugelfläche lassen sich in keiner Richtung Geraden zeichnen.

Zeichne auf Pappe einen Kreis mit einem Durchmesser! Schneide die Kreisfläche aus und befestige sie so an einem Holzstab, daß dieser auf dem Durchmesser des Kreises liegt! Drehe den Holzstab schnell zwischen beiden Händen! Bei genügend schneller Drehung sieht man die Form einer Kugel. Der Mittelpunkt des Kreises wird dann zum **Mittelpunkt der Kugel.**

Die Verbindungsstrecke eines Punktes der Kugelfläche mit dem Mittelpunkt der Kugel heißt **Kugelradius.** Es gibt bei jeder Kugel beliebig viele Kugelradien. Sie sind alle untereinander gleich lang. Wir können daher sagen:

Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom Kugelmittelpunkt den gleichen Abstand.

Denke dir einen Kugelradius über den Kugelmittelpunkt hinaus verlängert, bis diese Verlängerung die Kugelfläche durchstößt!

Es sind zwei Punkte der Kugelfläche durch diese Strecke verbunden worden, die durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Diese Strecke heißt **Kugeldurchmesser.**

Überlege, ob zwei beliebige Punkte der Kugelfläche stets durch einen Kugeldurchmesser verbunden werden können! Wieviel Durchmesser hat eine Kugel?

Vergleiche die Länge des Kugeldurchmessers mit der Länge des dazugehörigen Kugelradius! Begründe, warum die Länge eines Kugeldurchmessers der größte Abstand ist, den zwei Punkte der Kugelfläche voneinander haben können!

Abb. 135

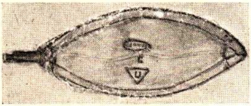


Abb. 136

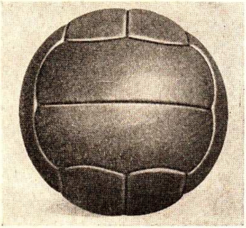


Abb. 137

Geographische Wandkarten, wie sie im Erdkundeunterricht benutzt werden, geben einen Teil der Erdoberfläche wieder.

Begründe, warum diese Darstellung durch Wandkarten ungenau ist!

Eine genauere Wiedergabe der Erdoberfläche ermöglicht der **Globus** (Abb. 135).

Wir hatten schon festgestellt, daß die Kugelfläche nicht in einer ebenen Fläche abgerollt werden kann. Deshalb ergeben sich Schwierigkeiten für die Herstellung von Kugelflächen, wie sie zum Beispiel für Bälle benötigt werden. Den Mantel eines Kegels konnten wir ohne weiteres aus einem Blatt Zeichenpapier ausschneiden und entsprechend zusammenkleben. Bei einer Kugel ist das nicht möglich. Diese Aufgabe läßt sich nur näherungsweise lösen. Darauf werden wir in den folgenden Aufgaben eingehen.

Aufgaben

1. Die Blase eines Fußballes ist meist aus vier gleichen ebenen Teilen zusammengeklebt, die von zwei Kreisbogen begrenzt sind (Abb. 136). Pause die Umrisse der Abbildung 136 durch! Stelle vier solcher Teile her! Versieh sie mit Klebezacken und klebe sie zusammen! Untersuche, ob man auf diese Weise eine Kugel erhält!
2. Viele Faust- und Fußbälle sind aus zwölf Teilen zusammengesetzt (Abb. 137). Pause die Umrisse eines solchen Teiles auf festes Papier durch! Stelle aus zwölf solchen Teilen ein Kugelmodell her!
3. Forme aus Ton oder Knetmasse große Kugeln!
   a) Zerschneide eine Kugel durch mehrere, zueinander parallele Schnitte!
   b) Führe an einer anderen Kugel beliebige Schnitte! Beschreibe die Form der Schnittflächen!

Wir stellen fest:

Satz 19: Wird eine Kugel zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreisflächen.

Wie muß man eine Kugel zerschneiden, um die größte Kreisfläche zu erhalten? Welche Teile entstehen dann?

***Erklärungen:* Durch einen beliebigen Schnitt wird eine Kugel in zwei Kugelabschnitte zerlegt. Die Kugelfläche wird dadurch in zwei Kugelkappen geteilt. Jeder Kugelabschnitt hat also als Begrenzungsfläche eine Kreisfläche und eine Kugelkappe. Wird der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel geführt, so entstehen zwei Halbkugeln. Die Schnittfläche ist ein größter Kreis. Zu ihm gehört auf der Kugelfläche eine Großkreislinie, die im folgenden stets nur Großkreis genannt wird. Auf einer Kugel gibt es beliebig viele Großkreise. Ihre Mittelpunkte fallen sämtlich mit dem Kugelmittelpunkt zusammen (Abb. 138).**

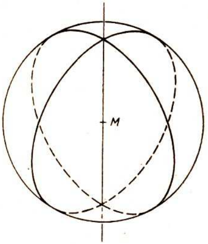


Abb. 138

Was kann man über die Länge der Großkreisradien aussagen?

Den Umfang einer Großkreisfläche bezeichnet man als Umfang der Kugel.

Durch zwei zueinander parallele Schnitte entstehen aus einer Kugel zwei Kugelabschnitte und eine Kugelschicht (Abb. 139). Unter einer Kugelschicht versteht man die Teile einer Kugel, die zwischen zwei zueinander parallelen Kreisen liegen. Der Teil der Kugeloberfläche, der zwischen zwei parallelen Kreisen liegt, heißt Kugelzone. Zueinander parallele Kreislinien auf einer Kugelfläche werden als Parallelkreise bezeichnet.

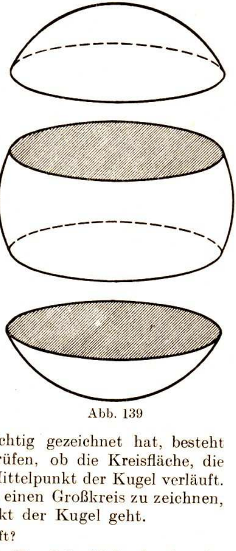


Abb. 139

Aufgaben

4. Welche Flächen begrenzen a) einen Kugelabschnitt, b) eine Kugelschicht?
5. Modelliere aus Knetmasse eine Kugel! Zerlege die Kugel durch einen Schnitt mit einem scharfen Messer a) in zwei ungleiche Kugelabschnitte, b) in Halbkugeln, c) in zwei Kugelabschnitte und zwei Kugelschichten!

Versuche auf einer Kugel, zum Beispiel auf einem großen Ball, einen Großkreis zu zeichnen!

Eine Kontrollmöglichkeit dafür, daß man richtig gezeichnet hat, besteht zunächst nicht. Man kann nämlich nicht nachprüfen, ob die Kreisfläche, die zu der gezeichneten Kreislinie gehört, durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Bei einem geographischen Globus wäre es leichter, einen Großkreis zu zeichnen, da er eine Achse hat, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Wie lang ist der Teil der Achse, der in der Kugel verläuft?

Die Punkte, in denen eine derartige Achse die Kugeloberfläche durchstößt, nennt man **Pole.**

Begründe, warum jeder Kreis, der durch die Pole verläuft, ein Großkreis ist!

Großkreise, die durch die Pole einer Kugel verlaufen, heißen **Längenkreise.** Es lassen sich beliebig viele Längenkreise auf einer Kugelfläche zeichnen.

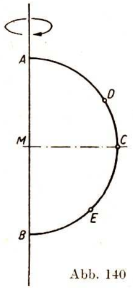


Abb. 140

Aufgaben

6. a) Zeichne auf einem großen Ball zwei Kreise, die einander schneiden! Wieviel Schnittpunkte erhältst du? b) Zeichne auf einem großen Ball zwei Kreise, die einander nicht schneiden! Wie liegen die Kreise zueinander?

7. Begründe, warum man die Teile der Kugelfläche, die durch zwei einander schneidende Großkreise entstehen, **Kugelzweiecke** nennt! Wodurch wird ein Kugelzweieck begrenzt?

8. Wie müssen die Schnitte beim Schälen einer Apfelsine geführt werden, wenn die Schale in Kugelzweiecke zerfallen soll?

9. Der Halbkreis in Abbildung 140 wird um die Achse AB gedreht. Welche bekannten Linien auf der entstehenden Kugelfläche werden durch die Punkte C, D, E erzeugt? Wie heißen die Punkte A und B auf der Kugelfläche?

10. Stelle alles, was du über die Kugel weißt, in einem kurzen Aufsatz zusammen!

11. Gib die wichtigsten Unterschiede an a) zwischen Kugel und Kegel, b) zwischen Kugel und Zylinder, c) zwischen Kegel und Zylinder!

12. a) Die Abbildung 141 stellt die Zeichnung einer Schraube dar. Derartige Schrauben werden in der holzverarbeitenden Industrie verwendet. In der Abbildung 142 ist die gleiche Schraube in vereinfachter Form in verschiedene Körper zerlegt. Aus welchen Körpern ist diese Schraube zusammengesetzt?
b) Suche ähnliche Beispiele aus der Technik (z. B die Niete) und untersuche sie in der gleichen Weise!


Abb. 141

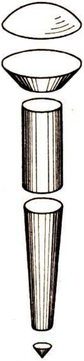


Abb. 142

13. Welche der uns bekannten Körper kann man sich durch Drehung einer ebenen Figur entstanden denken? Gib an, welche Figuren dabei jeweils gedreht werden müssen!

Von den in den vergangenen Abschnitten besprochenen Körpern konnten wir uns einige durch Drehung einer ebenen Figur entstanden denken. Bei anderen Körpern war das nicht möglich. Körper, die man sich durch Drehung einer ebenen Figur um eine Achse entstanden denken kann, heißen **Rotationskörper.** Wir haben die folgenden Rotationskörper kennengelernt: Den geraden Kreiszylinder, den geraden Kreiskegel, den geraden Kegelstumpf und die Kugel.

14. Welche Form haben bei den Rotationskörpern die Schnittflächen, die durch Schnitte senkrecht zur Rotationsachse entstehen? (Schnitte senkrecht zur Rotationsachse sind beim Kegel und Zylinder die Schnitte parallel zur Grundfläche.)

15. Welche Form haben die Achsenschnitte bei a) einem geraden Kreiskegel, b) einem geraden Kreiszylinder, c) einem geraden Kegelstumpf, d) einer Kugel?
Welche Eigenschaften haben alle diese Schnittflächen gemeinsam? (Achsensymmetrie!)

Inhaltsverzeichnis

Aufnahmen: DEWAG Photowerkstätten, Berlin: Abb. 88, 116, 117, 123; Deutscher Bauernverlag, Berlin (Bauernbild): Abb. 51; Fritz Kühn (Kunstschmiedemeister), Berlin-Grünau: Abb. 13; VEB AGFA Berlin: Abb. 2, 3, 6, 20, 35, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 72, 77, 78, 79, 82, 86, 89, 90, 94, 96, 97, 98, 99, 101, 114, 119, 120, 134, 135; VEB GASELAN, Berlin: Abb. 73; Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin: Abb. 87, 122, 136, 137; Zoologisches Museum der Humboldt-Universität, Berlin: Abb. 1.
Reproduktionen: VEB AGFA Berlin: Abb. 4, 5, 12; Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin: Abb. 81.
Die Abbildungen 4 und 5 wurden dem Werk Высотные здания в москве — проекты (Hochhäuser in Moskau — Projekte) entnommen (Moskau: Staatsverlag für Literatur über Aufbau und Architektur 1951. Herausgegeben von der Akademie für Architektur in der UdSSR — Institut für Geschichte und Theorie der Architektur).