

PHYSIK

Ergänzungen
für Klasse 12

Spezialschulen
mathematisch-
naturwissenschaftlich-
technischer Richtung

P H Y S I K

Ergänzungen für Klasse 12

Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer
Richtung



Volk und Wissen

Volkseigener Verlag Berlin

1990

Autor:

Dr. Christian Hache

An der Auswahl der Aufgaben, der Ausarbeitung von Lösungen und der Erprobung dieses Materials waren Physiklehrer aller Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung beteiligt.

ISBN 3-06-021256-2

1. Auflage

© Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1990

Lizenz-Nr. 203-1000/90 (E 02 12 56-1)

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

Redaktion: Bärbel Grimm

Zeichnungen: Brigit Werwig

Einband: Manfred Behrendt

Redaktionsschluß: 23. November 1989

LSV 0681

Bestell-Nr. 731 427 7

Schulpreis DDR: 4,00

Inhalt

8.2.	Praktikum Klasse 12	5
<u>9.</u>	<u>Atomphysik</u>	17
9.1.	Elektronenhülle	17
9.2.	Atomkerne	24
<u>10.</u>	<u>Astrophysik</u>	34
10.1.	Sonne	34
10.2.	Sterne	35
10.3.	Sternsysteme	39
<u>11.</u>	<u>Mechanik</u>	
11.1.	Mechanik des Massepunktes	42
11.2.	Mechanik des starren Körpers	53
<u>12.</u>	<u>Elektrodynamik</u>	60
12.1.	Statisches elektrisches Feld	60
12.2.	Statisches magnetisches Feld	66
12.3.	Elektromagnetische Induktion	71
<u>Anhang</u>		75
	Lösungen ausgewählter Aufgaben	75
	Tabellen	79

Inhalt der Ergänzungen für Kl. 9, 10 und 11

1.	Elektrizitätslehre
2.	Mechanik
3.	Praktikum (Klasse 10)
4.	Schwingungen und Wellen
5.	Optik
6.	Thermodynamik
7.	Spezielle Relativitätstheorie
8.	Praktikum
8.1.	Praktikum Klasse 11

8.2. Praktikum Klasse 12

1. Bestätigung der Zustandsgleichung des idealen Gases mit dem p-V-T-Gerät

Aufgaben

1. Bestätigen Sie die Anwendbarkeit der Zustandsgleichung des idealen Gases für das Gasgemisch Luft mit dem p-V-T-Gerät!
2. Ermitteln Sie dazu den Spannungskoeffizienten bei isochorer Erwärmung und den Volumenausdehnungskoeffizienten bei isobarer Erwärmung!
3. Diskutieren Sie die Abweichungen der Meßwerte vom erwarteten Wert!

Hinweise

Sie finden das p-V-T-Gerät aufgebaut an Ihrem Arbeitsplatz vor. Prüfen Sie, ob das Wasser im Gefäß den Luftbehälter vollständig umgibt!

Geräte und Hilfsmittel

p-V-T-Gerät	Schülerstromversorgungsgerät
Stativmaterial	Verbindungsleitungen

Literatur

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

Physik Schülerexperimente. Kl. 11 und 12.

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981

2. Bestimmen der spezifischen Kondensationswärme des Wasserdampfes

Aufgabe

Bestimmen Sie die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes auf kalorimetrischem Wege!

Hinweise

Füllen Sie das Kalorimeter nur etwa bis zur Hälfte mit Wasser und leiten Sie den Dampf erst ein, wenn er ohne Flüssigkeit dem Rohr entweicht!

Leiten Sie solange Dampf ein, bis die Temperatur der Kalorimeterflüssigkeit um etwa 50 K gestiegen ist!

Achten Sie auf einen genügend großen Abstand zwischen Verdampfer und Kalorimeter (Begründung?)!

Geräte und Hilfsmittel

1 Stativheizplatte	1 Kalorimetergefäß
2 Erlenmeyerkolben	Waage, Becherglas
2 Thermometer	Stativmaterial
Stopfen und Gummischlauch	

Literatur

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

3. Bestimmen der spezifischen Schmelzwärme von Eis

Aufgaben

1. Bestimmen Sie experimentell die Wärmekapazität des verwendeten Kalorimeters!
2. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Kalorimeters die spezifische Schmelzwärme von Eis!

Hinweise

Achten Sie darauf, daß nur gut abgetrocknete Eisstücke aus der Wasser-Eis-Mischung in das Kalorimeter gebracht werden!

Verwenden Sie ein Thermometer mit 0,1 K-Teilung!

Geräte und Hilfsmittel

1 Kalorimeter	Stativmaterial
1 Thermometer (0,1 K-Teilung)	Waage
1 Becherglas	Fließpapier
Stativheizplatte	Thermogefäß mit Eisstücken

Literatur

Physik Schülerexperimente Kl. 11 und 12.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

4. Bestimmen der linearen Ausdehnungskoeffizienten verschiedener Stoffe

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Anfangslängen und die Längenzunahmen von Rohren aus Stahl, Aluminium und Glas bei Temperaturerhöhung von Zimmertemperatur bis zur Temperatur des ausströmenden Wasserdampfes!
2. Berechnen Sie aus den Meßdaten die linearen Ausdehnungskoeffizienten der betreffenden Materialien!

Hinweis

Schützen Sie sich vor Verbrennungen an den heißen Rohren!

Geräte und Hilfsmittel

1 Meßuhr	1 Stativheizplatte
1 Thermometer	Gummischlauch
1 Erlenmeyerkolben	Meßstab 1 m
Rohre aus Stahl, Aluminium und Glas	
Stativmaterial zum Einspannen der Rohre	

Literatur

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

5. Bestimmen der spezifischen Wärmekapazität einer Flüssigkeit

Aufgaben

1. Bestimmen Sie zunächst die einer bekannten Wassermenge durch eine elektrische Heizwendel zugeführte Wärme und den Wirkungsgrad der Anordnung!
2. Führen Sie der gleichen Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit annähernd die gleiche Wärme zu, indem Sie die gleiche elektrische Arbeit verrichten! Messen Sie die Temperaturzunahme!
3. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit durch Vergleich mit der bekannten spezifischen Wärmekapazität des Wassers!

Hinweis

Bleiben Sie beim Experimentieren genügend weit unterhalb des Siedepunktes der Flüssigkeit!

Geräte und Hilfsmittel

1 Kalorimeter	1 Thermometer
1 Heizwendel	1 Waage
2 Vielfachmeßgeräte (z. B. UNI 23)	1 Stoppuhr
1 Stromversorgungsgerät	Meßzylinder
Verbindungsleitungen	

Literatur

Physik Schülerexperimente Kl. 11 und 12.

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981

6. Bestimmen der spezifischen Wärmekapazität eines Metalls

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Wärmekapazität des verwendeten Kalorimeters!
2. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität des Metalls durch kalorimetrische Messungen! Der verwendete Metallkörper soll aus mehreren Teilen bestehen.

3. Schließen Sie aus der ermittelten spezifischen Wärmekapazität auf das Material des Probekörpers!

Hinweise

Achten Sie darauf, daß der gesamte Metallkörper die Temperatur des siedenden Wassers annimmt! Überführen Sie die Metallstücke möglichst rasch und unter Vermeidung von Wassertransport in das Kalorimeter!

Geräte und Hilfsmittel

1 Kalorimeter	1 Waage
1 Thermometer (0,1 K-Teilung)	1 Stativheizplatte
Bechergläser, Fließpapier	

Literatur

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

7. Abschätzen eines Moleküldurchmessers

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Größenordnung des Durchmessers eines Ölsäuremoleküls durch die Bestimmung der Dicke einer monomolekularen Ölschicht auf einer Wasseroberfläche!
2. Geben Sie einen Tropfen auf die (zur besseren Abgrenzung mit Schwefelpuder oder Lycopodium bestäubte) Wasseroberfläche und berechnen Sie aus der Größe des Ölflecks den Moleküldurchmesser!
3. Ändern Sie das Experiment so ab, daß Sie 2 oder 3 oder 4 Tropfen auf die Wasseroberfläche geben!
Vergleichen Sie die Schichtdicken bei unterschiedlicher Tropfenanzahl!

Hinweise

Die Fotoschale muß vor jeder Messung gründlich gereinigt werden, damit sie fett- und spülmittelfrei ist.

Stellen Sie eine Lösung von Ölsäure in Leichtbenzin her, damit der Ölfleck beim Auftropfen auf die Wasseroberfläche nicht zu groß wird!

Bestimmen Sie das Volumen der Ölsäure, die sich in einem Tropfen befindet!

Geräte und Hilfsmittel

2 Tropfbüretten	1 Becherglas
2 Trichter	Ölsäure und Leichtbenzin
1 Meßstab	1 Fotoschale
Lykopodium (Bärlappsporen) oder Schwefelpuder	

Literatur

Physik Schülerexperimente Kl. 11 und 12.

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981

8. Untersuchen des Wasserstoffspektrums mit dem Spektralapparat, bestimmen der Rydbergkonstante und des Planckschen Wirkungsquantums

Aufgaben

1. Eichen Sie den Spektralapparat, falls notwendig, unter Nutzung von optischen Filtern bekannter Wellenlänge!
2. Ermitteln Sie damit die Wellenlängen der Balmerlinien (H_{α} , H_{β} , H_{γ}) des Wasserstoffspektrums!
3. Berechnen Sie aus jeder der erhaltenen Wellenlängen die Rydbergkonstante R_H für Wasserstoff!
4. Berechnen Sie unter Verwendung des Mittelwertes von R_H das Plancksche Wirkungsquantum!

Geräte und Hilfsmittel

1 Spektralapparat	1 Lampe
3 optische Filter (Interferenzfilter)	1 Spektralröhre mit Wasserstoff 1 Hochspannungsquelle

Literatur

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Kretschmar u. a.: Physikalisches Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1984

9. Aufnehmen der Dispersionskurve des Spektralapparates mit Hilfe des Heliumspektrums und bestimmen der Wellenlängen für die sichtbaren Linien der Neonspektralröhre

Aufgaben

1. Justieren Sie den vorgegebenen Prismen-Spektralapparat!
2. Nehmen Sie die Dispersionskurve des Spektralapparates mit Hilfe des Heliumspektrums auf!
3. Bestimmen Sie die Wellenlängen für die sichtbaren Linien der Neonspektralröhre!
4. Untersuchen Sie das Spektrum eines unbekannten Stoffes (Spektralröhre) und entnehmen Sie die Wellenlängen der Spektrallinien der Dispersionskurve!

Geräte und Hilfsmittel

1 Spektralapparat	1 Hochspannungsquelle
3 Spektralröhren (Helium, Neon, unbekannter Stoff)	

Literatur

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Kretschmar u. a.: Physikalisches Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1984

10. Bestimmen des Planckschen Wirkungsquantums mit Hilfe des äußeren und des inneren lichtelektrischen Effektes

Aufgaben

1. Planen und realisieren Sie ein Experiment zur Bestimmung der maximalen kinetischen Energie der beim äußeren lichtelektrischen Effekt in einer Vakuumfotозelle herausgelösten Elektronen!
2. Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Anordnung die Abhängigkeit der Energie der emittierten Elektronen von der Frequenz des verwendeten Lichtes und stellen Sie den Zusammenhang grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffektes in dieser Fotозelle sowie das Plancksche Wirkungsquantum!
4. Messen Sie mittels einer vorgegebenen Experimentieranordnung jeweils Flußspannung und Frequenz des emittierten Lichtes an zwei verschiedenen Leuchtdioden (LED), und ermitteln Sie aus den Meßwerten das Plancksche Wirkungsquantum!

Geräte und Hilfsmittel

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1 Lichtquelle | 1 Galvanometer und 1 Potentiometer |
| 1 Satz Interferenzfilter | 2 Vielfachmesser |
| 1 Vakuumfotозelle | 1 Stromversorgungsgerät |
| 2 LED (rot, gelb oder grün) | Verbindungsleitungen |
| 1 Spannungsmesser mit hohem Innenwiderstand und 1 Kondensator | |

Literatur

Physik Schülerexperimente Kl. 11 und 12.

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Wilke: Experimentelle Einsatzmöglichkeiten von Lichtemitter-Anzeigebau-elementen im Physikunterricht.

Physik in der Schule, Berlin 21(1983)H. 7/8

11. Aufnehmen einer Zählrohrcharakteristik

Aufgaben

1. Erarbeiten Sie sich Kenntnisse über Aufbau und Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohres sowie über die Begriffe: Einsatzspannung, Proportionalitätsbereich, Plateau, Arbeitsspannung!
2. Nehmen Sie die Zählraten eines Geiger-Müller-Zählrohres bei verschiedenen Spannungen und konstantem Abstand zur Strahlungsquelle auf!
3. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Zählrate und Spannung grafisch dar und kennzeichnen Sie charakteristische Werte und Intervalle (entsprechend 1.)!

Geräte und Hilfsmittel

- 1 Zählrohr mit Adapter bzw. Netzgerät
- 1 elektronischer Zähler (z. B. Polydigit)
- 1 umschlossenes radioaktives Präparat (Kr-85 aus dem Salz radioaktiver Strahlungsquellen oder Uranglaswürfel)
- 1 Spannungsmesser

Literatur

Wilke: Physikalische Schulversuche Teil 11.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

12. Bestimmen der Halbwertszeit von Ba-137m

Aufgaben

1. Bestimmen Sie zunächst den Nulleffekt am vorgegebenen Meßplatz!

2. Bestimmen Sie die Veränderung der Zählrate des Ba-137m-Generators und stellen Sie die Zählrate (unter Berücksichtigung des Nulleffektes) in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar!
3. Ermitteln Sie aus den Meßdaten die Halbwertszeit des Radionuklids Ba-137m!

Hinweise

Erzeugen Sie zur Bestimmung des Nulleffektes eine möglichst große statistische Gesamtheit (Impulse während 30 min erfassen)! Zur Bestimmung der Zählraten bei der Untersuchung des Radionuklids muß die Meßzeit zunächst sehr kurz (ca. 15 s) gehalten werden und kann erst später auf eine Minute ausgedehnt werden.

Geräte und Hilfsmittel

- 1 Cs-137 - Ba-137m - Radionuklidgenerator
- 1 Meßplatz mit Geiger-Müller-Zählrohr und Impulzzähler (z. B. Impo)
- Abschirmungsmaterial Stativmaterial

Literatur

Lincke/Peter: Ein Radionuklidgenerator für kernphysikalische Experimente in der Schule. Physik in der Schule 20(1982)H. 6

Damm/Peter: Messung der Halbwertszeit von Ba-137m mit schulischen Mitteln. Physik in der Schule 20(1982)H. 6

13. Bestimmen der Ladung eines Kondensators mit Hilfe der Entladungskurve $I(t)$

Aufgaben

1. Leiten Sie die notwendigen Gleichungen zur Bestimmung der Ladung eines Kondensators her!
2. Ermitteln Sie die Abhängigkeit der Entladestromstärke eines Kondensators von der Entladezeit für drei verschiedene ohmsche Widerstände im Entladestromkreis!
3. Bestimmen Sie Anfangsstromstärke und Anfangsladung des Kondensators!

Geräte und Hilfsmittel

1 Gleichspannungsquelle	3 ohmsche Bauelemente
1 Strommesser	1 Umschalter
1 Spannungsmesser	1 Uhr oder Metronom
1 Kondensator (z. B. 2000 μ F)	Verbindungsleitungen

Literatur

Physik Schülerexperimente Kl. 11 und 12.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1981
Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

14. Messen von Frequenzen mit dem Katodenstrahloszillografen

Aufgaben

1. Bauen Sie unter Verwendung eines Operationsverstärkers einen Wien-Generator zur Erzeugung einer harmonischen Wechselspannung auf!
2. Messen Sie die Frequenz der mit diesem Generator erzeugten Wechselspannung durch:
 - a) Vergleich mit der am Oszillografen eingestellten Kippfrequenz,
 - b) Vergleich mit der einem Meßgenerator entnommenen Wechselspannung bekannter Frequenz mit Hilfe Lissajousscher Figuren auf dem Bildschirm,
 - c) das Verfahren der Hellsteuerung durch die dem Meßgenerator entnommene Wechselspannung bekannter Frequenz!
3. Werten Sie die Verfahren hinsichtlich Aufwand und Genauigkeit!

Geräte und Hilfsmittel

1 Operationsverstärker mit Stromversorgung und Wien-Brücke
1 Oszillograf ED 2
1 Meßgenerator (GF 22 oder UVG 2)
Verbindungsleitungen

Literatur

Mende/Kretschmar/Wollmann: Physik-Praktikum.

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

Müller: Oszillograf ED 2, Teil 3. Beiheft zum Demonstrations-
oszillografen ED 2

15. Bestimmen von ohmschen Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten mit einer Meßbrücke

Aufgaben

1. Erklären Sie die Wirkungsweise einer Wheatstoneschen Meß-
brücke zur Bestimmung von ohmschen Widerständen und einer
geeigneten Wechselstrombrücke zur Bestimmung von kapazitiven
und induktiven Widerständen!
Realisieren Sie je eine Variante!
2. Messen Sie 2 ohmsche Bauelemente, 2 Kondensatoren und
2 Spulen mit den Meßbrücken aus und bestimmen Sie ohmschen
Widerstand, Kapazität bzw. Induktivität der Bauelemente!

Geräte und Hilfsmittel

1 Potentiometer	Kondensatoren mit bekannter
1 Gleichspannungsquelle	Kapazität, Spulen mit
1 Generator (z. B. UVG 2)	bekannter Induktivität,
1 Strommesser	6 Meßobjekte
1 Kopfhörer	Verbindungsleitungen
1 Satz Dekadenwiderstände	

Literatur

Eder: Moderne Meßmethoden der Physik, Teil 3.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

Ilberg: Physikalisches Praktikum für Anfänger.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

Mende/Kretschmar/ Wollmann: Physik-Praktikum.

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987

9. ATOMPHYSIK

9.1. Elektronenhülle

Grundlagen

Strahlungsgesetze:

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

Die gesamte Strahlungsleistung P eines schwarzen Körpers der Fläche A ist:

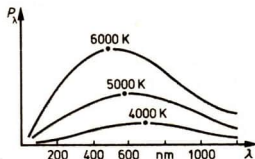
$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4.$$

Die Leistung ist also proportional zur Oberfläche A und zur vierten Potenz der Temperatur T des Strahlers. Der Proportionalitätsfaktor σ hat den Wert $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ und muß bei nicht-schwarzen Strahlern noch mit einem Faktor zwischen Null und Eins (Emissionsgrad) multipliziert werden.

Wiensches Verschiebungsgesetz:

Die Wellenlänge λ_{max} , bei der die in eine bestimmte Raumrichtung je Fläche abgestrahlte Leistung maximal wird, ist indirekt proportional zur Temperatur T des Strahlers:

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{konstant} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$



Das im Jahre 1900 von M. Planck formulierte Strahlungsgesetz $E_\lambda(\lambda)$ für die Hohlraumstrahlung (schwarzer Körper) führte zu der Erkenntnis:

Oszillatoren können nur Energiebeträge aufnehmen oder abgeben, die ein Vielfaches N der mit einer Konstanten h multiplizierten Eigenfrequenz f des Oszillators sind:

$$E = N \cdot h \cdot f \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

($h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$: Plancksches Wirkungsquantum)

Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz lassen sich das Stefan-Boltzmann-Gesetz und das Wiensche Verschiebungsgesetz herleiten.

Äußerer lichtelektrischer Effekt:

Wird eine Metallelektrode mit geeignet kurzwelligem Licht bestrahlt, so werden mehr oder weniger schnelle Elektronen aus dem Material herausgelöst. Bei der quantitativen Auswertung des Experiments zeigt sich:

Elektronen werden erst von Licht mit einer bestimmten, für das Material charakteristischen Mindestfrequenz herausgelöst.

Die kinetische Energie dieser Elektronen wächst linear mit der Frequenz des Lichtes.

Die Anzahl der Elektronen (der Fotostrom) ist proportional zur Lichtintensität.

A. Einstein deutete diese Befunde, indem er die von M. Planck festgestellte Quantisierung der Energie bei Oszillatoren auf die Lichtstrahlung übertrug und Licht hinsichtlich des Energietransportes als Strom von Quanten, Photonen genannt, jeweils mit der Energieportion $h \cdot f$ auffaßte. Eine solche Energieportion kann sich auf ein Elektron in der Metallelektrode übertragen. Von einem Teil dieser Energie wird die notwendige Austrittsarbeit W_A aufgebracht, der Rest verbleibt als kinetische Energie E_{kin} beim Elektron:

$$h \cdot f = W_A + E_{\text{kin}}$$

Energieniveaus der Hüllenelektronen:

Das Franck-Hertz-Experiment und die Linienspektren bei Emission und Absorption von Licht und charakteristischer Röntgenstrahlung sind Belege dafür, daß die Elektronen der Atomhülle nur in diskreten Energiezuständen existieren können.

So zeigt sich beim Franck-Hertz-Experiment, daß von einer Glühkathode emittierte und anschließend durch ein elektrisches Feld beschleunigte Elektronen erst nach Erreichen einer charakteristischen kinetischen Energie unelastisch auf die Atome stoßen und ihre Energie auf ein Hüllenelektron übertragen können. Das Abklingen dieser Anregung des Hüllenelektrons erfolgt mit einer gewissen Häufigkeit durch Abstrahlen der beim Stoß aufgenommenen Energie in Form eines Lichtquants mit $\Delta E = h \cdot f$.

Die von Balmer (für $m = 2$) und anderen aus empirischem Material herausgelesene Formel $f = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ (m, n : natürliche Zahlen. R : Rydbergfrequenz des Wasserstoffatoms $3,2898 \cdot 10^{15}$ Hz) für die Frequenzen des Wasserstofflinienspektrums lassen sich als Differenzen von Energietermen deuten.

Im Jahre 1913 gelang es N. Bohr in einem halbklassischen Modell der Atomhülle das Rutherfordsche Atommodell mit der Quantenvorstellung zu verknüpfen und damit eine theoretische Deutung des Wasserstoffspektrums und gewisser Gesetzmäßigkeiten des Periodensystems der Elemente zu geben.

Atome und Moleküle in verdünnten Gasen zeigen bei Emission und Absorption von Licht jeweils charakteristische Linien- bzw. Bandenspektren. Bei wachsendem Druck, Verflüssigung und Kondensation führt die zunehmende Verbreiterung der Energieniveaus schließlich zu kontinuierlichen Spektren.

Dringen Elektronen mit großer kinetischer Energie in eine Metallschicht ein, so werden sie bei der Wechselwirkung mit den Hüllen der Metallatome abgebremst. Der Verlust an kinetischer Energie führt zu der im Jahre 1895 von W. K. Röntgen entdeckten Bremsstrahlung. Elektronen mit geeigneter Geschwindigkeit können dabei auch Elektronenübergänge in den inneren Schalen hervorrufen. Dadurch entsteht energiereiche, für dieses Material "charakteristische" Strahlung (im Sinne eines Linienspektrums). Für Röntgenstrahlen bildet der Gitteraufbau kristalliner Festkörper ein Beugungsgitter. Die Auswertung entsprechender Interferenzbilder ermöglicht die Bestimmung der Wellenlänge der Röntgenstrahlung bzw. der Gitterkonstanten in Kristallen.

Die Verweilzeit der Hüllenelektronen in energetisch angeregten Zuständen ist im allgemeinen kleiner als 10^{-8} s, und die Rückkehr in energetisch tiefere Niveaus erfolgt (sofern dort noch Platz ist) spontan.

Neben dieser spontanen Emission kann durch Photonen der entsprechenden Energie eine stimulierte Emission (in Phase zum auslösenden Photon) auftreten.

Stimulierte Emission findet beim Laser Anwendung. Dabei wird durch sogenanntes Pumpen der angeregte Zustand gegenüber dem Grundzustand stärker besetzt. Ist die Verweilzeit für die angeregten Elektronen dort relativ groß (metastabiler Zustand) und befindet sich das System in einem optischen Resonator (abgestimmt auf die Photonen), so sind die Voraussetzungen für das Funktionieren des Lasers gegeben. Dabei entsteht eine kohärente, monochromatische Strahlung mit sehr geringer Divergenz.

Beispiel 1

An einem Sommertag hat sich kurz nach Sonnenuntergang bei einer Umgebungstemperatur von 30°C in der Oberfläche einer Asphaltstraße eine Temperatur von 60°C eingestellt.

Welche Leistung wird von jedem Quadratmeter der Straßendecke abgestrahlt?

Lösung:

Gegeben: $T_1 = 303\text{ K}$, $T_2 = 333\text{ K}$ Gesucht: P_{ab}

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz strahlt die als schwarzer Strahler angenommene Oberfläche die Leistung $P_2 = \sigma \cdot A \cdot T_2^4$ ab.

Gleichzeitig wird von der Umgebung die Leistung

$P_1 = \sigma \cdot A \cdot T_1^4$ auf die Straßendecke gestrahlt, so daß effektiv nur $P_{ab} = P_2 - P_1$ abgestrahlt wird:

$$P_{ab} = \sigma \cdot A \cdot (T_2^4 - T_1^4).$$

Mit den gegebenen Werten erhält man:

$$P_{ab} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \cdot 1 \cdot \text{m}^2 (3,33^4 - 3,03^4) \cdot 10^8 \text{ K}^4$$

$$P_{ab} = 220 \text{ W}$$

Ergebnis: Von jedem Quadratmeter der auf 60°C erwärmten Straßendecke werden effektiv 220 W abgestrahlt.

Beispiel 2

Bei der Untersuchung des äußeren lichtelektrischen Effektes in einer Vakuumfotозelle wird nach der Gegenfeldmethode der durch Licht der Wellenlänge 540 nm hervorgerufene Fotostrom bei einer Gegenspannung von 0,50 V zum Erliegen gebracht.

Wie groß sind die Austrittsarbeit für das betreffende Katodenmaterial, die Gegenspannung, die notwendig ist, um bei Licht der Wellenlänge 450 nm den Fotostrom zum Erliegen zu bringen, sowie die Grenzfrequenz, von der ab Elektronen herausgelöst werden können?

Lösung:

Gegeben: $\lambda_1 = 540 \text{ nm}$, $U_1 = 0,50 \text{ V}$ Gesucht: W_A, U_2, f_G
 $\lambda_2 = 450 \text{ nm}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ W} \cdot \text{s}^2$

In der Gleichung nach A. Einstein für den äußeren lichtelektrischen Effekt

$$h \cdot f = W_A + E_{\text{kin}}$$

ersetzen wir (wegen der Gegenfeldmethode) E_{kin} durch $U \cdot e$, da die kinetische Energie E_{kin} des Foto-Elektrons zum Verrichten der Arbeit $U \cdot e$ gegen das elektrische Gegenfeld benötigt wird. Die Frequenz f kann durch den Quotienten aus Vakuumlichtgeschwindigkeit c und Wellenlänge λ ausgedrückt werden:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_A + e \cdot U. \quad (1)$$

Demzufolge ist die Austrittsarbeit

$$W_A = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - e \cdot U_1.$$

$$W_A = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ W} \cdot \text{s}^2 \cdot \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ m}}{5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot 0,5 \text{ V}$$

$$W_A = 2,88 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,8 \text{ eV}$$

=====

Die notwendige Gegenspannung U_2 bei $\lambda_2 = 450 \text{ nm}$ ergibt sich nach (1)

$$h \cdot c \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = e \cdot (U_2 - U_1)$$

$$U_2 = \frac{h \cdot c}{e} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + U_1$$

$$U_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ W} \cdot \text{s}^2 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{s}} \left(\frac{1}{4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - \frac{1}{5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \right) + 0,5 \text{ V}$$

$$U_2 = 0,87 \text{ V}$$

=====

Die Grenzfrequenz ist dadurch zu charakterisieren, daß die Elektronen nur herausgelöst werden; ihre kinetische Energie ist Null.

Aus (1) folgt für diesen Fall:

$$W_A = h \cdot f_G \text{ und } f_G = W_A : h.$$

$$f_G = \frac{2,88 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}$$

$$f_G = 4,34 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

=====

Ergebnis: Aus der Katode können Elektronen ab der Grenzfrequenz $4,34 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ durch den äußeren lichtelektrischen Effekt herausgelöst werden. Dabei ist die Austrittsarbeit von $2,88 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ (1,8 eV) aufzubringen. Bei Verwendung von Licht der Wellenlänge 450 nm muß die Gegenspannung auf 0,87 V erhöht werden.

Aufgaben

=====

9.1.1. Ein schwarzer Körper besitzt eine Fläche von 25 mm^2 und gibt Strahlung mit einer Leistung von 1,5 W ab. Bei welcher Wellenlänge besitzt das Spektrum die größte Intensität?

9.1.2. Welche Temperatur erreicht eine elektrische Kochplatte von 20 cm Durchmesser bei einer Leistung von 2000 W und einer Umgebungstemperatur von 25°C , wenn man davon ausgeht, daß 50 % der erzeugten Leistung emittiert werden?

9.1.3. Bei der Untersuchung des äußeren lichtelektrischen Effektes mit der Gegenfeldmethode wurden folgende Ergebnisse erzielt:

Frequenz	Gegenspannung
$5,19 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	0,13 V
$6,88 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	0,83 V
$7,08 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	0,91 V

Ermitteln Sie das Plancksche Wirkungsquantum und die Austrittsarbeit rechnerisch und grafisch!

9.1.4. Beim Franck-Hertz-Experiment mit Argondampf erfolgte das erste Absinken der Stromstärke-Spannungskennlinie bei 11,6 V. Welche Frequenz und welche Wellenlänge besitzt das entstehende Licht? In welchem Spektralbereich liegt die Linie?

9.1.5. Eine Linie der Balmerserie besitzt die Wellenlänge 486,1 nm. Von welchem Energieniveau erfolgte der Übergang und wie groß ist die Energiedifferenz zwischen beiden Niveaus?

9.1.6. Kann ein Wasserstoffatom Strahlungen mit den Wellenlängen 11,7 μm , 121,6 nm, 521,4 nm und 397,0 nm absorbieren?

9.1.7. Ein Rubinlaser strahlt mit einer Wellenlänge von 694,3 nm.

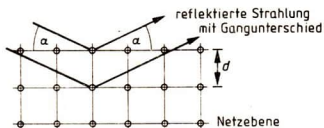
a) Wie groß ist die Energie der Photonen?

b) Wieviele Photonen müssen je Sekunde emittiert werden, damit der Laser eine Leistung von 2,0 W erreicht?

9.1.8. Eine Röntgenröhre wird bei einer Anodenspannung von 35 kV betrieben. Welches ist die kleinste mögliche Wellenlänge der Röntgenstrahlung?

Welchen Einfluß hätten unterschiedliche Katodenmaterialien auf diese kurzwellige Grenze?

9.1.9. Ein Kochsalzkristall mit dem Netzebenenabstand $d = 0,282 \text{ nm}$ wird nach dem Bragg-Verfahren mit Röntgenstrahlung der Wellenlänge 152 pm (K_{α} -Linie des Kupfers) untersucht. Bei welchen Glanzwinkeln führt die Röntgenstrahlinterferenz nach Reflexion an benachbarten Netzebenen zur Verstärkung?



9.2. Atomkerne

Grundlagen

Aufbau der Atomkerne:

Die Rutherfordschen Streuversuche waren ein experimenteller Beweis für den Aufbau eines Atoms aus Elektronenhülle und Atomkern. Auch der Kern weist eine innere Strukturiertheit auf. Als Kernbausteine (Nukleonen) der bisher bekannten über 1500 Kerne (Nuklide) wurden Protonen und Neutronen festgestellt.

Obwohl sich Protonen und Neutronen in ihren Ruhmassen geringfügig unterscheiden ($m_p = 1,67252 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1,67482 \cdot 10^{-27}$ kg) werden beide durch die Massenzahl 1 charakterisiert. In der Kernphysik bezieht man sich häufig auf $1/12$ der Masse des Kohlenstoffatoms $^{12}_6\text{C}$ und nennt diesen Wert atomare Masseneinheit $u = 1,660277 \cdot 10^{-27}$ kg.

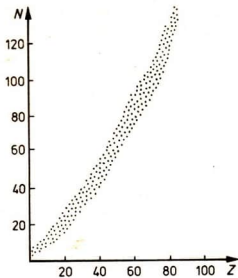
Während das Neutron elektrisch neutral ist (Kernladungszahl 0), trägt das Proton die positive Elementarladung (Kernladungszahl 1).

Die Massenzahl A eines Kernes ist die Summe aus Protonenanzahl Z und Neutronenanzahl N . Die Protonenanzahl stimmt mit der Kernladungszahl und der Ordnungszahl des betreffenden Elements im Periodensystem überein.

Trägt man in einem N - Z -Kerndiagramm die Neutronenanzahl über der Kernladungszahl auf, so erkennt man:

Das Verhältnis $N : Z$ wächst von 1 bei leichten Kernen bis 1,6 bei den schwersten.

Kerne mit gleicher Protonenanzahl heißen zueinander isotop, solche mit gleicher Massenzahl isobar und solche mit gleicher Neutronenanzahl isoton.



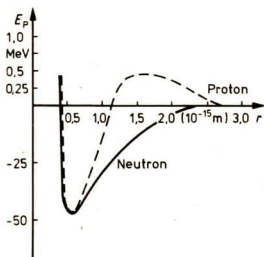
Die Nukleonen werden durch die starke Wechselwirkungskraft (Kernkraft) zusammengehalten. Ihre Reichweite ist allerdings gering (ca. 10^{-15} m). Treten Nukleonen zu einem Kern zusammen, so ist seine Ruhmasse m_K geringer als die Summe der Ruhmassen der Nukleonen (Massendefekt):

$$\Delta m = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_K$$

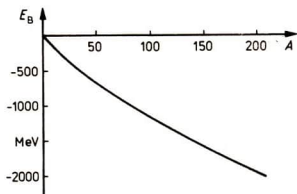
Die dabei frei werdende Kernbindungsenergie ist:

$$E_B = \Delta m \cdot c^2$$

Im Diagramm ist die potentielle Energie E_{pot} als Funktion des Abstandes r bei Annäherung eines Neutrons bzw. eines Protons an ein Proton dargestellt.



Trägt man die Bindungsenergie E_B über der Massenzahl A auf, so entsteht folgendes Diagramm:



Zur Beschreibung der Kerne werden derzeit verschiedene Kernmodelle benutzt. Das sogenannte Tröpfchenmodell vermag die Abhängigkeit des Kernradius r_K von der Massenzahl zu beschreiben:

$$r_K = r_0 \cdot \sqrt[3]{A} \quad (r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m bis } 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}).$$

Spontane Kernumwandlungen:

Die meisten Kerne (etwa 1000 der 1500 bekannten) wandeln sich nach gewisser Zeit unter Aussendung radioaktiver Strahlung spontan um.

Man unterscheidet α - (Heliumkerne), β - (Elektronen oder Positronen) und γ - (energiereiche, der Röntgenstrahlung verwandte) Strahlung.

Als Nachweis werden vorwiegend Halbleiterdetektoren, Ionisationskammern, Zählrohre und Fotoemulsionen sowie für spezielle Untersuchungen Nebel-, Blasen- und Funkenkammern verwendet.

Der Spontanzerfall unterliegt dem statistischen Gesetz:

$$N_1 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (N_0: \text{Zahl der zur Zeit } t = 0 \text{ vorhandenen Kerne,}$$

$$N_1: \text{Zahl der zur Zeit } t \text{ noch vorhandenen Kerne,}$$

$$\lambda: \text{Zerfallskonstante})$$

bzw.

$$N_2 = N_0 (1 - e^{-\lambda \cdot t}) \quad (N_2: \text{Zahl der zur Zeit } t \text{ bereits umgewandelten Kerne}).$$

Statt der Zerfallskonstante λ wird meist die anschaulichere Größe Halbwertszeit $T_{1/2}$ mit $N(T_{1/2}) = N_0 : 2$ verwendet.

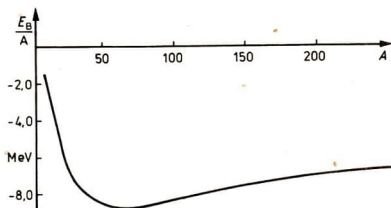
Es gilt: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Künstliche Kernumwandlungen:

Durch kernaktive Geschosse (n , p , γ , α , leichte Kerne) mit geeigneter Energie können Kernumwandlungen ausgelöst werden. Dabei gelten für die ablaufenden Kernreaktionen Erhaltungssätze - u. a. für die Massen- und Ladungszahlen, für den Gesamtimpuls und die Gesamtenergie (unter Einbeziehung der Ruhenergien $m_0 \cdot c^2$) sowie für den Gesamtdrehimpuls. Bei Kernreaktionen zeigt sich, daß Nukleonen im Kern verschiedener diskreter Energiezustände fähig sind.

Da beim Verschmelzen von Nukleonen bzw. leichten Kernen zu größeren Kernen Bindungsenergie frei wird, verlaufen solche Fusionen unter Energieabgabe. Allerdings muß zuvor die coulombsche Abstoßung überwunden werden. Das erfordert hohe Geschwindigkeit (hohe Temperaturen) und zugleich hohe Konzentration der Reaktionspartner (hohen Druck).

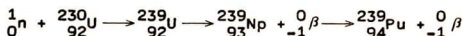
Da in den sehr schweren Kernen die Bindungsenergie je Nukleon etwas geringer ist als bei mittleren Kernen, wird bei der Spaltung der schwersten Kerne ebenfalls Energie abgegeben.



Die Spaltungsreaktion beim $^{235}_{92}\text{U}$ wird durch ein eindringendes thermisches Neutron ausgelöst. Da unter den Spaltprodukten auch 2 bis 3 Neutronen sind, ist eine Kettenreaktion möglich. Dazu ist notwendig, daß genügend spaltbare Kerne vorhanden sind (kritische Masse) und die Neutronen nicht absorbiert werden. Der größte Anteil der insgesamt frei werdenden Energie von etwa 200 MeV tritt in Form kinetischer Energie der Spaltstücke auf (thermische Energie).

In Kernreaktoren laufen gesteuerte Spaltungsreaktionen ab. Moderatoren sorgen für eine geeignete Geschwindigkeit der Neutronen. Absorber verhindern eine ungewollte Zunahme der Anzahl der Reaktionen.

Mit Hilfe der Brutreaktion:



kann aus dem häufigsten Uranisotop durch Beschuß mit schnellen Neutronen das in thermischen Reaktoren spaltbare (aber sehr giftige) Plutonium gewonnen werden.

Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Stoffen:

α -Strahlen haben, abhängig von ihrer Energie und der Art des Stoffes eine bestimmte Reichweite. Entweder werden alle α -Teilchen einer bestimmten Energie in der Materialschicht absorbiert, oder alle durchfliegen die Schicht.

Trifft β - oder γ -Strahlung auf Materialschichten, so tritt eine Schwächung der Anfangsintensität I_0 ein. Nach Durchdringen der Schichtdicke x ist die Intensität auf

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \quad (\mu: \text{Schwächungskoeffizient})$$

abgesunken. In diesem Zusammenhang heißt diejenige Schichtdicke x_H mit $I(x_H) = I_0 : 2$ Halbwertsdicke.

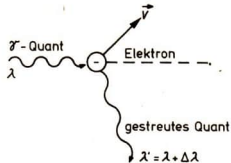
Bei γ -Strahlung läßt sich μ in Anteile aufspalten, die im äußeren lichtelektrischen Effekt, im Comptoneffekt und in der Paarbildung begründet liegen. Den Quanten der Gammastrahlung kommen die Energie $h \cdot f$ und der Impuls $h \cdot \lambda^{-1}$ zu.

Als Comptoneffekt bezeichnet man die Erscheinung, daß ein γ - oder Röntgenquant an einem Elektron gestreut wird und dabei Energie verliert. Die Energieabnahme bzw. Wellenlängenzunahme hängt nur vom Streuwinkel ab:

$$\Delta\lambda = \frac{2 \cdot h}{m_0 \cdot c} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\varphi: \text{Streuwinkel}).$$

Die Konstante $\frac{h}{m_0 \cdot c}$ heißt Comptonwellenlänge.

Bei der Paarbildung kann sich in Kernnähe ein γ -Quant mit $E = h \cdot f > 1,02 \text{ MeV}$ in ein Elektron-Positron-Paar umwandeln. Paarbildung ist der umgekehrte Prozeß zur Paarzerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares in (meist) 2 γ -Quanten zu je 0,51 MeV.



Beispiel

Mit Hilfe der Erhaltungssätze für Energie und Impuls ist die Wellenlängenzunahme eines an einem Elektron gestreuten γ -Quants zu bestimmen (Comptoneffekt).

Lösung:

Die Gesamtenergie vor dem Stoß ist die Summe aus der Energie $h \cdot f = h \cdot c / \lambda$ des γ -Quants und der Ruhenergie $m_0 \cdot c^2$ des Elektrons. Nach der Wechselwirkung ist $h \cdot c / \lambda'$ die Energie des gestreuten Quants und $m \cdot c^2$ die Energie des weggestoßenen Elektrons. Seine Geschwindigkeit sei v .

Der Energiesatz liefert die Gleichung (1):

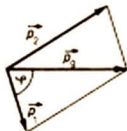
$$(1) \quad h \cdot c / \lambda + m_0 \cdot c^2 = h \cdot c / \lambda' + m \cdot c^2 \quad \text{mit}$$

$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 \cdot c / \sqrt{c^2 - v^2}$, nach Division durch c , auflösen nach $m \cdot c$ und quadrieren:

$$(2) \quad m^2 \cdot c^2 = (h/\lambda - h/\lambda')^2 + 2(h/\lambda - h/\lambda') m_0 \cdot c + m_0^2 \cdot c^2.$$

Der Gesamtimpuls $\vec{p}_g$ vor dem Stoß wird nur vom γ -Quant getragen. Sein Betrag ist $h \cdot f/c = h/\lambda$. Nach dem Stoß hat das Quant den Impuls $\vec{p}_1$ vom Betrage h/λ' und das Elektron trägt den Impuls $\vec{p}_2$ vom Betrage $m \cdot v$.

Mit Hilfe des Kosinussatzes kann für die Beträge die Impulsbilanz aufgeschrieben werden:



$$(3) (m \cdot v)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2 \cdot h^2}{\lambda \cdot \lambda'} \cdot \cos \varphi, \text{ nach Umformen:}$$

$$(4) m^2 \cdot v^2 = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2 \cdot h^2}{\lambda \cdot \lambda'} (1 - \cos \varphi).$$

Seitenweises Bilden der Differenz der Gleichungen (2) und (4) und Subtraktion von $m_0^2 \cdot c^2$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$$(5) m^2 \cdot c^2 - m^2 \cdot v^2 - m_0^2 \cdot c^2 =$$

$$2(h/\lambda - h/\lambda') m_0 \cdot c - 2 \frac{h^2}{\lambda \cdot \lambda'} (1 - \cos \varphi).$$

Für die relativistischen Impulsmassen $m = m_0 \cdot c / \sqrt{c^2 - v^2}$ eingesetzt, ergibt die linke Seite von (5):

$$\frac{m_0^2 \cdot c^4}{c^2 - v^2} - \frac{m_0^2 \cdot c^2 \cdot v^2}{c^2 - v^2} - m_0^2 \cdot c^2, \text{ zusammengefaßt:}$$

$$\frac{m_0 \cdot c^4 - m_0^2 \cdot c^2 \cdot v^2 - m_0^2 \cdot c^4 + m_0^2 \cdot c^2 \cdot v^2}{c^2 - v^2} = 0.$$

Damit folgt aus (5):

$$(1/\lambda - 1/\lambda') h \cdot m_0 \cdot c = \frac{h^2}{\lambda \cdot \lambda'} (1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \cdot \lambda'} = \frac{h}{\lambda \cdot \lambda' \cdot m_0 \cdot c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{und } \lambda' - \lambda = \Delta \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \varphi).$$

Die Wellenlängenzunahme eines an einem Elektron gestreuten γ -Quants beträgt mit $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$:

$$\Delta \lambda = \frac{2h}{m_0 \cdot c} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Aufgaben

9.2.1. Uran ($^{238}_{92}\text{U}$) zerfällt unter Aussendung von α -Teilchen mit einer Halbwertszeit von $4,5 \cdot 10^9$ Jahren.

a) Welcher Stoff entsteht?

b) Nach welcher Zeit ist noch ein Hundertstel der konstanten Ausgangsmenge Uran vorhanden?

9.2.2. Berechnen Sie die Halbwertszeit von Radon, wenn bekannt ist, daß nach einem Jahr noch $1,88 \cdot 10^{-29} \%$ im Ausgangsstoff vorhanden sind!

9.2.3. Das Isotop $^{40}_{19}\text{K}$ zerfällt mit einer Halbwertszeit von $1,25 \cdot 10^9$ Jahren und kommt zu 0,012 % im natürlichen Gemisch vor.

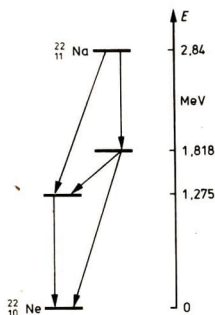
Wie hoch war der prozentuale Anteil vor $5 \cdot 10^9$ Jahren?

9.2.4. Die Abbildung zeigt

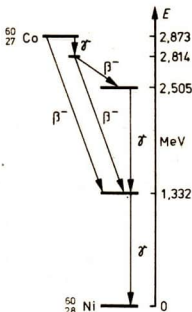
das Zerfallsschema von

$^{22}_{11}\text{Na}$. Stellen Sie die Energiebilanz auf!

Welche Arten von Strahlung treten auf?

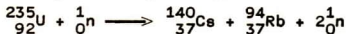


9.2.5. Die Abbildung zeigt das Zerfallsschema von $^{60}_{27}\text{Co}$. Ermitteln Sie alle auftretenden Energien der γ - und β -Strahlung! Welcher Folgekern entsteht?

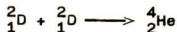


9.2.6. Vergleichen Sie die freigesetzte Energie bei folgenden Prozessen:

- a) Verbrennung von 1 kg Steinkohle
- b) Kernspaltung von 1 kg Uran gemäß der Reaktion



- c) Kernfusion von 1 kg Helium gemäß der Reaktion



- d) Paarzerstrahlung von 1 kg Materie (Elektronen/Positronen).

9.2.7. Zwischen zwei Deuteronen soll eine Fusionsreaktion stattfinden. Bei welcher Temperatur würde die kinetische Energie der Deuteronen zur Überwindung des elektrostatischen Walls der potentiellen Energie reichen, wenn man annimmt, daß sie sich dazu bis auf 10^{-14} m nähern müssen?

9.2.8. Berechnen Sie die Bindungsenergien der Kerne

- a) Deuterium
- b) Kupfer
- c) Uranium

9.2.9. Ein Röntgenquant der Wellenlänge 5 pm wird an einem locker gebundenen Elektron gestreut (Comptoneffekt), wobei das Elektron eine Energie von 0,09 MeV aufnimmt.

- a) Wie groß sind Wellenlänge und Frequenz des gestreuten Röntgenquants?
- b) Unter welchem Winkel wird das Röntgenquant gestreut?

9.2.10. Ein Röntgenquant der Wellenlänge 50 pm trifft auf ein ruhendes freies Elektron, wobei es infolge des Comptoneffekts um 90° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung bewegt sich das Elektron?

9.2.11. Welche Schichtdicken aus Blei, Beton oder Wasser sind jeweils erforderlich, um γ -Strahlung der Energie 0,8 MeV auf den hundertsten Teil zu schwächen ($\mu_{\text{Pb}} = 0,55 \text{ cm}^{-1}$,

$\mu_{\text{Beton}} = 0,068 \text{ cm}^{-1}$, $\mu_{\text{Wasser}} = 0,024 \text{ cm}^{-1}$)?

10. ASTROPHYSIK

10.1. Sonne

Grundlagen

Die Sonne ist eine stabile, rotierende Gaskugel. Die mittlere siderische Rotationsdauer ist 25,4 d, der Sonnendurchmesser $1,392 \cdot 10^9$ m und die Gesamtmasse beträgt $1,989 \cdot 10^{30}$ kg. Im Inneren der Sonne herrscht an jeder Stelle Gleichgewicht zwischen den nach außen gerichteten Gas- und Strahlungsdruckkräften und der nach innen gerichteten Gravitationskraft. Im Sonneninneren erreicht die Dichte Werte um $160 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ und der Druck wächst auf etwa 10^{16} Pa.

Die Sonne bezieht ihre Energie aus Kernfusionsreaktionen. Am häufigsten sind die Reaktionen:

${}^1_1\text{H}(p; e, \nu_e){}^2_1\text{D}(p; \gamma){}^3_2\text{He}({}^3_2\text{He}; 2p){}^4_2\text{He}$ mit einer Energiefreisetzung von 26 MeV und

${}^{12}_6\text{C}(p; \gamma){}^{13}_7\text{N}(-; e^+, \nu_e){}^{13}_6\text{C}(p; \gamma){}^{14}_7\text{N}(p; \gamma){}^{15}_8\text{O}(-; e^+, \nu_e){}^{15}_7\text{N}$
($p; \alpha$) ${}^{12}_6\text{C}$ mit einer Energiefreisetzung von 25 MeV.

Die Temperatur im Sonneninneren beträgt $1,6 \cdot 10^7$ K.

Durch Strahlung und Konvektion gelangt diese Energie an die Oberfläche. Das Sonneninnere wird von der etwa 400 km dicken Photosphäre umgeben. In dieser Zone nimmt die Temperatur von 7500 K auf 4500 K ab. Störungsgebiete in dieser Zone heißen Sonnenflecken. Die Schicht über der Photosphäre mit stark abnehmender Dichte und einer Dicke von etwa 10000 km heißt Chromosphäre. Störungen treten hier in Form von Fackeln, Eruptionen und Protuberanzen auf. Die Temperatur steigt in dieser Zone von 4500 K bis auf 10^6 K. Die äußeren Schichten im Übergangsgebiet zum interstellaren Raum verändern sich ständig in Form und Struktur. Man bezeichnet dieses Übergangsgebiet als Korona.

Die Abstrahlung der Sonnenergie erfolgt als Teilchenstrom (e, p, ν) und als Strahlung elektromagnetischer Natur vom Radiowellenbereich bis in den Bereich der Röntgenstrahlen. Den größten Anteil hat das Licht (vom nahen Ultraviolett bis zum fernen Infrarot).

Dieser im wesentlichen von der Photosphäre ausgehende Energiestrom hat eine Strahlungsleistung (Leuchtkraft) $P_{\odot}$, die man mit Hilfe der Solarkonstante E_S ermitteln kann:

$$P_{\odot} = 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot E_S.$$

Die Solarkonstante $E_S = 1,395 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ gibt die auf jeden Quadratmeter der Erdoberfläche auftreffende Strahlungsleistung (Bestrahlungsstärke) an. Der mittlere Abstand Erde-Sonne $a = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ wird auch als astronomische Einheit AE bezeichnet.

Mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes kann die für diese Strahlung effektive Temperatur der Sonne zu $T_e = 5770 \text{ K}$ berechnet werden.

Das Wiensche Verschiebungsgesetz gestattet es, damit die Wellenlänge des Strahlungsmaximums zu berechnen.

Es liegt bei 500 nm .

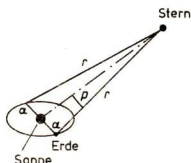
10.2. Sterne

Sterne sind (wie unsere Sonne) selbstleuchtende Himmelskörper. Während des größten Teiles ihrer Entwicklungszeit entsteht die von ihnen abgestrahlte Energie aus Kernfusionsreaktionen. Zwischen den Sternen treten z. T. sehr große Entfernungen auf. Deshalb sind neben der astronomischen Einheit AE folgende Entfernungsmaße üblich:

Lichtjahr: $1 \text{ ly} = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$ (Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt)

Parsec: $1 \text{ pc} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

Die Einheit Parsec ist aus der trigonometrischen Parallaxe abgeleitet. Der Skizze entnimmt man: $\tan p = a/r$ und da r viel größer als a ist, gilt $\tan p = p$. Mißt man den Winkel in Winkelsekunden, so erhält man die Entfernung $r = 1/p$ in Parsec.



Die von einem Stern auf der Erde hervorgerufene Beleuchtungsstärke ergibt sich zu:

$$E = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (P: \text{Leuchtkraft, } r: \text{Entfernung}).$$

In der Praxis wird als Maß für die Beleuchtungsstärke (Helligkeit) die scheinbare Helligkeit m verwendet, die in Größenklassen angegeben wird. (Schreibweise z. B. $0^m,03$). Da die Helligkeitsbeurteilung von der spektralen Empfindlichkeit des Detektors abhängt, muß zwischen visueller (die wir hier betrachten), fotografischer und bolometrischer Helligkeit unterschieden werden.

Die Differenz der scheinbaren Helligkeiten zweier Sterne (in Größenklassen) wird folgendermaßen definiert:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \cdot \lg \frac{E_2}{E_1} \text{ bzw. wegen } E \sim P/r^2$$

$$m_1 - m_2 = 2,5 \cdot \lg(P_2/P_1) + 5 \cdot \lg(r_1/r_2).$$

Für eine Helligkeitsdifferenz von einer Größenklasse sagt man 1 mag (vom lat. magnitudo: Größe).

Setzt man z. B. die Helligkeit des Polarsterns mit $2^m,12$ fest, so kann im Vergleich dazu die scheinbare Helligkeit beliebiger anderer Sterne angegeben werden.

Die Bestrahlungsstärke hängt allerdings von Leuchtkraft und Entfernung des Sterns ab. Deshalb definiert man als absolute Helligkeit M die Helligkeit, die der Stern in einer gedachten Normentfernung $r_0 = 10 \text{ pc}$ hätte. Dann gilt:

$$M - m = -5 \cdot \lg(r/r_0) \quad \text{oder}$$

$$m - M = 5 \cdot \lg\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) - 5 \quad (r \text{ wird meist in pc gemessen}).$$

Die Differenz $m - M$ heißt Entfernungsmodul.

Bezieht man die Strahlungsleistung eines Sterns auf die der Sonne $P_\odot$, so kann

$M = 4^m,86 - 2,5 \cdot \lg(P/P_\odot)$ bzw. bei Verwendung der bolometrischen Helligkeit

$$M = 4^m,62 - 2,5 \cdot \lg(P/P_\odot) \text{ geschrieben werden.}$$

Trägt man in einem Diagramm die Leuchtkraft (absolute Helligkeit) über der effektiven Temperatur (Spektralklassen) auf und markiert die bekannten Sterne, so spiegelt sich in diesem Hertzsprung-Russell-Diagramm wider, daß es langdauernde, stabile Zustände der Sternentwicklung gibt. An das relativ langlebige Stadium als Hauptreihenstern schließt sich eine Phase als Riese an. Ist die Masse des Sterns kleiner als 1,4 Sonnenmassen (evtl. nach Masseausstoß-Nova), so ist das Endstadium ein Weißer Zwerg.

Massereichere Sterne (bis zwei Sonnenmassen) sind im Endstadium Neutronensterne. Bei noch größeren Massen endet der Stern als "Schwarzes Loch".

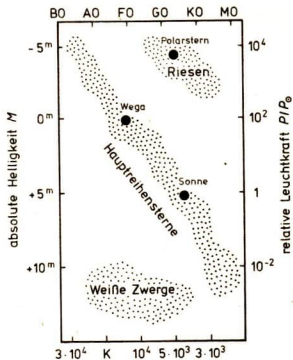
Sternmassen lassen sich bei Doppelsternen auf Grund der beobachteten Bahnbewegung ermitteln:

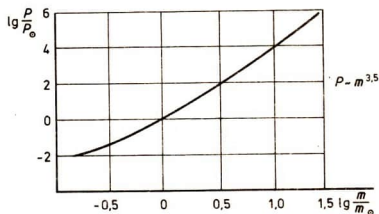
$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{a^3}{T_U^2} \quad \text{und}$$

$$m_1/m_2 = a_2/a_1$$

($m_{1;2}$: Sternmassen, γ : Gravitationskonstante, $a_{1;2}$: große Halbachsen der Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt, $a = a_1 + a_2$, T_U : Umlaufzeit des Systems).

Die Masse von Einzelsternen, die der Hauptreihe des Hertzsprung-Russell-Diagramms angehören, kann mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung $P \sim m^{3,5}$ bestimmt werden.





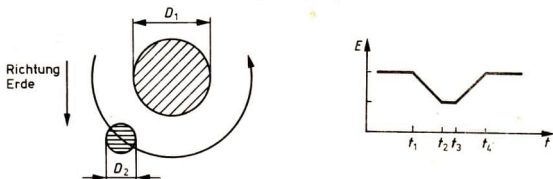
Die Beobachtung von Bedeckungsternen ermöglicht die Ermittlung der Durchmesser der beteiligten Sterne:

$$\frac{D_1 + D_2}{t_4 - t_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{T_U} = \frac{D_1 - D_2}{t_3 - t_2} = v$$

($D_{1,2}$: Sterndurchmesser, a : große Halbachse des Systems,

T_U : Umlaufzeit des Systems, v : Bahngeschwindigkeit, $t_{1,2,3,4}$: Kontaktzeiten).

Lichtkurve eines Bedeckungsterns



Bei Kenntnis von Leuchtkraft und effektiver Temperatur kann der Durchmesser eines Sterns auch aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ermittelt werden. Die effektive Temperatur erhält man mit Hilfe des Wienschen Verschiebungsgesetzes aus der Wellenlänge des Strahlungsmaximums, während die Leuchtkraft bei bekannter Entfernung (aus trigonometrischen Messungen) durch Helligkeitsmessungen zu gewinnen ist.

10.3. Sternsysteme

Ansammlungen von einigen Milliarden Sternen und interstellare Materie (Staub - Gas und Molekülwolken) bilden eine Galaxis.

Die Masse unserer Galaxis kann abgeschätzt werden, wenn man annimmt, die Gesamtmasse m , unter deren Einfluß die Sonne ihre Bahn im Abstand r um das galaktische Zentrum beschreibt, sei in diesem Zentrum konzentriert:

$$v^2 = \gamma \cdot \frac{m}{r}$$

(v : Kreisbahngeschwindigkeit der Sonne, $v = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$,
 $r = 8,5 \text{ kpc}$).

Die Rotverschiebung der Absorptionslinien in den Spektren der Galaxien ist eine Folge ihrer Radialgeschwindigkeit v_r (Fluchtgeschwindigkeit):

$$f = f_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - v_r/c}{1 + v_r/c}}$$

(f ; f_0 : beobachtete bzw. Laborfrequenz der Spektrallinie;
 v_r : Radialgeschwindigkeit; c : Lichtgeschwindigkeit).

Alle Galaxien zeigen eine Fluchtbewegung voneinander, deren Geschwindigkeit proportional zu ihrer Entfernung ist:

Hubble-Gesetz:

$$v_r = H_0 \cdot r$$

(H_0 : Hubble-Konstante, $H_0 = 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, dieser Wert ist zur Zeit noch sehr unsicher)

Beispiel

Der Stern Sirius ($\propto$ Cabis Maioris) besitzt 23fache Sonnenleuchtkraft, seine effektive Temperatur beträgt 9500 K.

Wie groß ist der Radius des Sterns? Wie groß ist seine mittlere Dichte, wenn seine Masse zu 2,2 Sonnenmassen angenommen wird?

Berechnen Sie auch die Entfernung des Sterns unter der Annahme, daß seine scheinbare Helligkeit $-1,4$ beträgt!

Lösung:

$$\text{Aus } P = 4 \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_e^4 \text{ folgt } R = 1,2 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\text{und aus } \bar{\rho} = 3 \cdot m / 4 \pi \cdot R^3 \text{ folgt } \bar{\rho} = 570 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Mit $M = m + 5 - 5 \cdot \lg(r/\text{pc})$ und $M = 4,62 - 2,5 \cdot \lg(P/P_\odot)$ erhält man

$$\lg \frac{r}{\text{pc}} = (m - (4,62 - 2,5 \cdot \lg \frac{P}{P_\odot}) + 5) \cdot \frac{1}{5}$$

$$\text{und daraus } r = 3 \text{ pc.}$$

Ergebnis: Der Stern Sirius hat einen Radius von $1,2 \cdot 10^9 \text{ m}$ und eine mittlere Dichte von $570 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Er ist 3 pc von der Erde entfernt.

Aufgaben

10.1. Wie können die Masse der Sonne und ihre mittlere Dichte bestimmt werden?

10.2. Berechnen Sie die Strahlungsleistung der Sonne und ihren relativen Masseverlust in 5 Milliarden Jahren!

10.3. Wie groß ist die effektive Oberflächentemperatur der Sonne, wenn ihr Radius zu $7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$ bestimmt wurde?
Bei welcher Wellenlänge liegt das Strahlungsmaximum?

10.4. Der Stern ρ -Geminorum hat die Parallaxe $0,053''$ und die scheinbare Helligkeit $m = 4,17$. Wie groß ist seine Entfernung von der Erde? Welche absolute Helligkeit und welche Leuchtkraft (in Vielfachen der Sonnenleuchtkraft) besitzt der Stern?

10.5. Berechnen Sie die absolute Helligkeit des Sterns Antares (Skorpion), dessen Entfernung 230 ly und dessen scheinbare Helligkeit 0^{m}_{98} betragen!

10.6. Der Hauptreihenstern Wega (α -Lyrae) besitzt die scheinbare Helligkeit 0^{m}_0 und die effektive Temperatur $T_e = 9900 \text{ K}$. Er ist 8,0 pc von der Erde entfernt. Berechnen Sie aus diesen Angaben den Radius des Sterns! Entnehmen Sie aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung einen Näherungswert für die Masse und berechnen Sie damit die mittlere Dichte des Sterns!

10.7. Die scheinbare Helligkeit des Bedeckungssterns Algol (β -Persei) nimmt im Verlaufe von 5 h von 2^{m}_2 auf 3^{m}_5 ab, bleibt dann 20 min konstant und erreicht in 5 h die Ausgangshelligkeit. Von einem Minimum bis zum nächsten vergehen 2,867 d. Zeichnen Sie die vereinfachte Lichtkurve und berechnen Sie die Durchmesser der beiden Komponenten unter folgenden Annahmen:

- a) Die Komponente B umlaufe die Komponente A auf einer Kreisbahn;
- b) die Bahngeschwindigkeit sei (spektroskopisch) zu $v = 172 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ermittelt worden!

10.8. Der Riesenstern Aldebaran (α -Tauri) hat eine absolute Helligkeit von -0^{m}_{77} ; er gehört zur Spektralklasse K 5. Ordnen Sie diesen Stern in das Hertzsprung-Russell-Diagramm ein und bestimmen Sie damit die Leuchtkraft und die effektive Temperatur des Sterns! Berechnen Sie mit den erhaltenen Werten einen Näherungswert für den Radius des Sterns!

10.9. Für das Doppelsternsystem α -Centauri wurden eine Umlaufzeit von 80 Jahren, ein Abstand von $1,11 \cdot 10^{-4} \text{ pc}$ und ein Verhältnis ihrer Abstände vom gemeinsamen Schwerpunkt $a_1/a_2 = 0,848$ bestimmt. Berechnen Sie die Massen der beiden Komponenten!

10.10. Nehmen Sie eine Abschätzung für die Masse unserer Galaxis vor!

11. MECHANIK

11.1. Mechanik des Massenpunktes

Grundlagen

Bewegung auf einer Geraden:

Die Lage eines Massenpunktes auf einer Geraden (einer x-Achse beispielsweise) kann zu jeder Zeit durch Angabe der Ortskoordinate $x = x(t)$ beschrieben werden.

Die zeitliche Ableitung der Ort-Zeit-Funktion wird definiert als Geschwindigkeitskoordinate längs der x-Achse:

$$v(t) = dx : dt = \dot{x}.$$

Aus dieser Festlegung folgt, daß umgekehrt die Ort-Zeit-Funktion $x(t)$ eine Stammfunktion der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v(t)$ ist:

$$\int v(t) \cdot dt = x(t) + C.$$

Dabei ist $\int v(t) dt$ die Menge aller Ort-Zeit-Funktionen, die zu einer bestimmten Zeit die gleiche Geschwindigkeit (Ableitung) aufweisen. Die Integrationskonstante C muß aus den Anfangsbedingungen festgelegt werden. Sie hat die physikalische Bedeutung der Ortskoordinate x_0 zur Zeit $t = 0$.

Hat $v(t)$ in einem Intervall $(t_1; t_2)$ keine Nullstellen, so ist der im Zeitintervall zurückgelegte Weg mit folgender Gleichung bestimmbar:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt = x(t_2) - x(t_1) = s.$$

Differenziert man die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nach der Zeit (bildet also die zweite Ableitung der Ort-Zeit-Funktion), so erhält man die Beschleunigungskoordinate längs der x-Achse:

$$a(t) = dv : dt = \ddot{x}.$$

Integration der Funktion $a(t)$ liefert die Menge aller Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen, die zu einer bestimmten Zeit die gleiche Beschleunigung (Ableitung) haben:

$$\int a(t) \cdot dt = v(t) + C.$$

Die Integrationskonstante C muß wieder aus den Anfangsbedingungen festgelegt werden und bedeutet hier die Geschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$.

Bewegung in der Ebene:

In der Ebene (und analog im Raum durch Hinzufügen einer z-Achse) kann die Lage eines Massepunktes in einem kartesischen Koordinatensystem $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ durch Angabe des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ beschrieben werden:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ ergibt sich aus dem Ortsvektor durch (koordinatenweise) Differentiation nach der Zeit:

$$\vec{v}(t) = d\vec{r} : dt = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j},$$

$$\vec{v}(t) = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}.$$

Auf analoge Weise entsteht der Vektor der Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = d\vec{v} : dt = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j},$$

$$\vec{a}(t) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}.$$

Bei einer Kreisbewegung (Kreis in Mittelpunktslage) gilt

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t) \text{ und } y(t) = r \cdot \sin \varphi(t),$$

(φ : Drehwinkel, r : Radius, $r = \text{konst.}$).

Mit der Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = d\varphi : dt = \dot{\varphi} \text{ gilt:}$$

$$\vec{v}(t) = -\omega \cdot y \cdot \vec{i} + \omega \cdot x \cdot \vec{j}.$$

Das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{r}$ wird Null, also stehen die Vektoren von $\vec{v}$ und $\vec{r}$ senkrecht zueinander.

Für die gleichförmige Kreisbewegung ($\omega = \text{konst.}$) gilt:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Kennzeichnend für die gleichförmige Kreisbewegung ist also eine vom Betrage konstante, stets zum Zentrum gerichtete, radiale Beschleunigung.

Bewegungsgleichung:

Formuliert man zu einem Bewegungsproblem die Kräftebilanz, d. h. drückt man im Newtonschen Grundgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ die Kraft $\vec{F}$ durch die Resultierende der konkret angreifenden Kräfte aus, so erhält man die Bewegungsgleichung.

Dabei ist die Vektorgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bei Verwendung kartesischer räumlicher Koordinaten identisch mit drei skalaren Gleichungen (gewöhnlichen Differentialgleichungen) bezüglich der drei Koordinaten:

$$F_x = m \cdot \ddot{x}, \quad F_y = m \cdot \ddot{y}, \quad F_z = m \cdot \ddot{z}.$$

Durch einmalige Integration kann daraus eine Aussage über die Geschwindigkeits- und durch nochmalige Integration eine Aussage über die Ortskoordinaten gewonnen werden.

Kraftstoß und Impuls:

Wirkt auf ein mechanisches System im Zeitintervall $(t_1; t_2)$ eine Kraft $\vec{F}(t)$, so kann dieser Prozeß durch die Größe Kraftstoß beschrieben werden:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt.$$

Aus $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (bei konstantem m) folgt:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \cdot \vec{a} \cdot dt = m \cdot \vec{v}(t_2) - m \cdot \vec{v}(t_1).$$

Mit der Definition der Zustandsgröße Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ kann

$$\vec{S} = \Delta \vec{p} \text{ und } \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \text{ geschrieben werden.}$$

Impulserhaltungssatz:

Wenn $\vec{F} = \vec{0}$ (abgeschlossenes System), so gilt: $\vec{p} = \text{konstant}$. Der Gesamtimpuls ist also eine Erhaltungsgröße.

Arbeit und Energie:

Eine andere Möglichkeit, den Prozeß der Krafteinwirkung auf ein mechanisches System zu beschreiben, ist durch die skalare Größe Arbeit gegeben:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Die Arbeit W führt zur Änderung der Zustandsgröße Energie:

$W = \Delta E$. Das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ bewirkt, daß nur die Kraftkomponente in Wegrichtung bedeutsam wird.

Das Gravitationsfeld einer Masse M bewirkt auf eine Masse m die Kraft:

$$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot (-\vec{e})$$

($\vec{e}$: Einheitsvektor vom Mittelpunkt von M zum Mittelpunkt von m gerichtet).

Eine Kraft $\vec{F}' = -\vec{F}_G$ verrichtet gegen das Gravitationsfeld die Arbeit:

$$W = -\gamma \cdot m \cdot M (1/r_2 - 1/r_1)$$

(r : Abstand zwischen den Massenmittelpunkten von m und M).

Entsprechend $W = \Delta E$ definiert man als potentielle Energie:

$$E_p = -\gamma \cdot m \cdot M / r + E_{\text{pot}0}$$

Meist wird $E_{\text{pot}0} = 0$ gesetzt, d. h., die potentielle Energie eines Körpers der Masse m im Gravitationsfeld der Masse M ist negativ und verschwindet im Unendlichen. Der Term $-\gamma \cdot M / r$ heißt Gravitationspotential.

Wird an einer Masse m durch eine beschleunigende Kraft $\vec{F}$ die Arbeit W verrichtet, so kann mit $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{a} = d\vec{v} / dt$ und $d\vec{r} = \vec{v} dt$ für W geschrieben werden:

$$W = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Entsprechend $W = \Delta E$ setzt man $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 + E_{\text{kin}0}$ (und abhängig vom Bezugssystem oft $E_{\text{kin}0} = 0$) für die kinetische Energie.

Die zum Spannen einer Feder an ihr verrichtete Arbeit ist:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2).$$

Die gespannte Feder besitzt die potentielle Energie:

$$E_p = \frac{k}{2} x^2 + E_{\text{pot}0}$$

Für abgeschlossene Systeme ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße.

Beispiel

Bei einem horizontalen Federschwinger ändert sich die momentane Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit nach der Funktionsgleichung

$$\vec{x}(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{I}$$

Die Feder habe die Federkonstante k und der schwingende Körper die Masse m , die Amplitude $\hat{x}$ und die Schwingungsdauer T .

- a) Man ermittle das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $\vec{v}(t)$ und den Impuls $\vec{p}$ des Körpers zu den Zeiten $t_0 = 0, t_1 = T/4$ und $t_2 = T/2$
- b) Wie groß ist der Kraftstoß gegen die Feder im Zeitintervall von 0 bis $T/4$?

Lösung:

Gegeben: $\hat{x}, T, k, m$

Gesucht: a) $\vec{v}(t),$
 $\vec{p}(0), \vec{p}(T/4), \vec{p}(T/2)$
b) $\vec{S}$ für $(0; T/4)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- a) Für die Funktion $\vec{v}(t)$ gilt:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{I} = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{I}$$

Für den Impuls gilt nach Definition: $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$.

Also ist $\vec{p}(0) = m \cdot \hat{x} \cdot \omega \cdot \vec{I}$,

$$\vec{p}(T/4) = \vec{0} \text{ und}$$

$$\vec{p}(T/2) = -m \cdot \hat{x} \cdot \omega \cdot \vec{I}.$$

- b) Für den Kraftstoß gilt nach Definition: $\vec{S} = \int_{t_0}^{t_a} \vec{F}(t) \cdot dt$.

Mit der Bewegungsgleichung (dem Kraftansatz) $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ entsteht:

$$\vec{S} = \int_0^{T/4} -k \cdot \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{I} \cdot dt.$$

Die Integration liefert:

$$\vec{s} = \left[\frac{k \cdot \dot{x}}{\omega} \cdot \cos \omega \cdot t \right]_0^{T/4} \cdot \vec{i} = - \frac{k \cdot \dot{x}}{\omega} \cdot \vec{i},$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ kann auch $\vec{s} = -m \cdot \dot{x} \cdot \omega \cdot \vec{i}$ geschrieben werden.

Das gleiche Ergebnis erhält man unmittelbar, wenn $\vec{s} = \Delta \vec{p}$ genutzt wird:

$$\vec{s} = \vec{p}(T/4) - \vec{p}(0) = -m \cdot \dot{x} \cdot \omega \cdot \vec{i}.$$

Aufgaben:

11.1.1. Durch eine Notbremsung, die zur Zeit $t_0 = 0$ bei x_0 beginnt, wird ein mit der Geschwindigkeit $v_{0x} = 87,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ fahrender Zug zum Stehen gebracht. Die Bremsbeschleunigung beträgt $a_{0x} = -0,6 (\text{m} \cdot \text{s}^{-3}) \cdot t$. Berechnen Sie die Bremszeit t_1 und den Ort x_1 , an dem der Zug zum Stehen kommt. Nach welcher Zeit t_2 liegt nur noch die halbe Anfangsgeschwindigkeit vor und wo befindet sich der Zug bei t_2 ?

Mit welcher konstanten Beschleunigung a_{1x} müßte die Bremsung erfolgen, wenn der Zug ebenfalls bei x_1 zum Stehen kommen soll? Vergleichen Sie die beiden Bremszeiten miteinander!

11.1.2. Ein Güterzug passiert einen Bahnhof mit der Geschwindigkeit v_{01} . Zur gleichen Zeit fährt ein Personenzug in derselben Richtung ab. Die Beschleunigung des Personenzuges nimmt von a_0 (zur Zeit t_0) linear mit der Zeit bis auf Null (zur Zeit t_1) ab. Dann fährt er mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter und überholt den Güterzug.

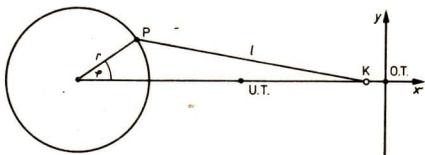
Zu welcher Zeit t_2 fährt der Personenzug am Güterzug vorbei? In welcher Entfernung s_2 vom Bahnhof geschieht das?

Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit $\Delta v = v_1 - v_{01}$ beim Überholen?

Skizzieren Sie das $a(t)$ -, das $v(t)$ - und das $s(t)$ -Diagramm!

$$(v_{01} = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, t_0 = 0, t_1 = 50 \text{ s}, a_0 = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$$

11.1.3. Ermitteln Sie für ein zentrisches Schubkurbelgetriebe die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kolbens K in Abhängigkeit von der Zeit, wenn sich die Kurbel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt!

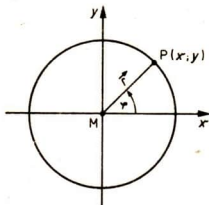


Stellen Sie zunächst x als Funktion des Drehwinkels φ und der Zeit t dar!

Für welche Drehwinkel beträgt die Verschiebung des Kolbens $x_1 = r$, wenn $\lambda = 0,2$ gegeben ist? (Pleuelstangenverhältnis $\lambda = r/l$)

Formulieren Sie mit Hilfe eines Kleincomputers die funktionale Beziehung zwischen der Kolbengeschwindigkeit v_x und dem Drehwinkel φ , und bestimmen Sie denjenigen Winkel, bei dem die Kolbengeschwindigkeit maximal wird!

11.1.4. Ein als Massepunkt P angenommener Körper bewegt sich auf einer Kreisbahn (Radius r) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1,2 \cdot s^{-1}$ im mathematisch positiven Drehsinn. Dabei gilt $\vec{r}(0) = 5,0 \text{ cm} \cdot \vec{i}$.



a) Ermitteln Sie die Vektoren $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ des Massepunktes zur Zeit $t_1 = 2,0 \text{ s}$!

b) Nach welcher Zeit t_2 liegt erstmals der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2 = 5,23 \text{ cm} \cdot s^{-1} \cdot \vec{i} - 2,94 \text{ cm} \cdot s^{-1} \cdot \vec{j}$ vor?

11.1.5. Ein Ball soll von einem Punkt $P_0 (0;0)$ aus unter einem Winkel α zur Horizontalen schräg nach oben geworfen werden. Wie groß muß die Abwurfgeschwindigkeit v_0 sein, wenn bei $\alpha = 45^\circ$ der Punkt $P_1 (6,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m})$ erreicht werden soll?

Welcher Winkel α_1 und welche Abwurfgeschwindigkeit v_{01} müssen gewählt werden, wenn der Ball in horizontaler Richtung in P_1 eintreffen soll?

Vergleichen Sie die Zeiten, nach welchen der Punkt P_1 jeweils erreicht wird!

11.1.6. Die Ort-Zeit-Funktion eines Faden-Pendelkörpers lautet für kleine Ausschläge $x(t) = x_0 \cdot \cos \omega \cdot t$. Bestimmen Sie die Radialbeschleunigung und die Bahnbeschleunigung zu den Zeiten $t_1 = 0$ und $t_2 = t/4$, wenn $x_0 = 2 \text{ cm}$ und die Pendellänge $l = 100 \text{ cm}$ gegeben sind!

11.1.7. Ein als Massepunkt angenommener Körper m bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft $F = k \cdot t$ auf einer Geraden. Die Bewegung beginnt zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$.

Gegeben sind weiterhin $m = 2,0 \text{ kg}$ und $k = 20 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ermitteln Sie den Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von m nach $t_1 = 2,0 \text{ s}$!

11.1.8. Ein Seil mit der Masse m und der Länge l liegt gestreckt auf einer Tischplatte und hängt ein Stück der Länge x über.

Die Gleitreibungszahl μ ist gegeben.

Formulieren Sie die Bewegungsgleichung!

Mit welcher Beschleunigung rutscht das Seil vom Tisch? Welche Zugkraft muß das Seil an der Tischkante übertragen? Welche Länge x_0 des Seiles muß anfangs mindestens überhängen, wenn das Seil von selbst ins Rutschen kommen soll und die Haftreibungszahl μ_0 bekannt ist?

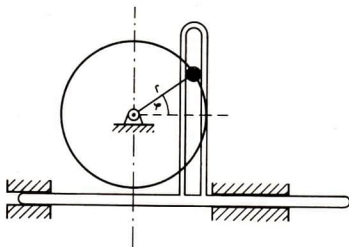
11.1.9. Ein Körper mit der Masse m hat die Geschwindigkeit v_0 und bewegt sich geradlinig. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v_1 , wenn von der Zeit $t_0 = 0$ an bis $t_1 = 0,01 \text{ s}$

a) eine konstante Kraft des Betrages F_0 entgegen der Bewegungsrichtung auf ihn einwirkt oder

b) die Kraft $F = -(F_0 + bt)$ wirksam wird?

Gegeben: $F_0 = 400 \text{ N}$; $b = -5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $m = 1 \text{ kg}$

11.1.10. Die Kurbel einer Kreuzschubkurbel rotiert mit konstanter Drehzahl $n = 600 \text{ min}^{-1}$ und hat einen Drehradius $r = 6,0 \text{ cm}$.

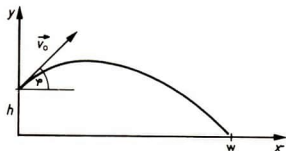


Das hin und her bewegte Gleitstück habe die Masse $m = 10 \text{ kg}$. Wie groß ist die maximale am Kurbelzapfen wirkende Kraft?

11.1.11. Ein Körper mit der Masse $m = 20 \text{ kg}$ gleitet auf einer geneigten Ebene (Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$; Reibungszahl $\mu = 0,1$) herab. Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich der Körper in Ruhe. In welcher Zeit t_1 wird der Weg $s_1 = 60 \text{ cm}$ zurückgelegt?

11.1.12. Ein Massepunkt m hat zur Zeit $t_0 = 0$ im Punkt P_0 ($40 \text{ mm}; 0$) die Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{x} = -F_0/m \cdot \omega$. Auf m wirken die Kräfte $F_x = F_0 \cdot \sin \omega t$ und $F_y = F_0 \cdot \cos \omega t$. Geben Sie die Gleichung für die Bewegungsbahn an und zeichnen Sie für $F_0 = 100 \text{ N}$, $m = 50 \text{ kg}$ und $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ die Bahnkurve!

11.1.13. Ein Körper mit der Masse m wird von der Höhe h aus mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α abgeworfen. Bestimmen Sie den Winkel α_0 , für den die größte Wurfweite w_0 erreicht wird und berechnen Sie auch w_0 !



Gegeben: $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 2 \text{ m}$

Nutzen Sie für die Berechnungen einen Kleincomputer!

11.1.14. Ein Körper mit der Masse m soll durch eine konstante Zugkraft F_1 auf einer geneigten Ebene emporgezogen werden (Neigungswinkel α , Reibungszahl μ). In der Zeit T wird er dabei von der Geschwindigkeit v_0 auf die Geschwindigkeit v_1 gebracht. Berechnen Sie F_1 !

11.1.15. Ein Körper gleitet zunächst auf einer geneigten Ebene ($\alpha = 30^\circ$, $\mu_1 = 0,1$) und anschließend auf einer horizontalen Ebene ($\mu_2 = 0,05$). Zur Zeit $t_0 = 0$ hat der Körper eine Höhe $h = 1 \text{ m}$ über der horizontalen Ebene und eine Geschwindigkeit $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ hangabwärts.

Berechnen Sie den auf der horizontalen Ebene zurückgelegten Weg s_2 , wobei die Stoßverluste an der Übergangsstelle beider Ebenen vernachlässigt werden!

11.1.16. Ein Körper mit der Masse $m = 10 \text{ kg}$ bewegt sich unter dem Einfluß einer veränderlichen Kraft $\vec{F} = k \cdot (q - t) \cdot \vec{i}$, wobei $k = 100 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$ und $q = 1 \text{ s}$ ist. Nach wieviel Sekunden kommt der Körper zum Stillstand, wenn er zur Zeit $t_0 = 0$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \vec{i}$ hatte?

Welchen Weg legte der Körper bis zu seinem Stillstand zurück? Wie groß ist der Kraftstoß für den Gesamtprozeß?

11.1.17. Welche Bahngeschwindigkeit v muß ein Erdsatellit haben, der eine kreisförmige Bahn in der Höhe h über der Erdoberfläche beschreiben soll? Welche Arbeit muß aufgebracht werden, um diesen Satelliten der Masse $m = 200 \text{ kg}$ auf seine Bahn zu heben und ihm die erforderliche Geschwindigkeit zu verleihen (Luftreibung und Rotation der Erde vernachlässigen, $h = 1000 \text{ km}$, $R_E = 6370 \text{ km}$, $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$)?

11.1.18. Eine an einer Seite fest eingespannte, waagerechte Feder ($k = 10 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$) wird durch eine Druckkraft von 50 N vorgespannt. Am Ende dieser Feder liegt ein Holzklotz ($m = 5,0 \text{ kg}$) auf waagerechter Unterlage. Die Reibung zwischen Klotz und Unterlage wird durch den Reibungskoeffizienten $0,3$ beschrieben. Die Feder werde nun freigegeben.

Welche Energieumwandlungen finden in der Folge statt?

Ermitteln Sie die kinetische Energie des Holzklotzes als Funktion seines Ortes und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion!

11.1.19. Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = 0,60 \text{ kg}$ und $m_2 = 0,40 \text{ kg}$ haben die Geschwindigkeiten $v_1 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ und $v_2 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Die Geschwindigkeitsvektoren bilden einen rechten Winkel zueinander. Die Kugeln stoßen ideal unelastisch zusammen. Bestimmen Sie die Impulse und die Geschwindigkeit der Kugeln nach dem Stoß und den Verlust an mechanischer Energie!

11.1.20. Ein Soldat schießt aus einer Maschinenpistole. Das Geschoß mit der Masse $m = 10 \text{ g}$ verläßt den Lauf horizontal mit der Geschwindigkeit $v = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Die Maschinenpistole der Masse $M = 5,0 \text{ kg}$ wird dabei um $s = 1,5 \text{ cm}$ zurückgestoßen. Wie groß ist die auf den Schützen wirkende (als konstant angenommene) Kraft?

11.1.21. Zwei elastische Kugeln mit den Massen $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ und $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ hängen so an langen Fäden, daß sie sich auf gleicher Höhe befinden und berühren. Die Kugel mit der Masse m_1 wird am gespannten Faden nach der Seite ausgelenkt, dabei um $5,0 \text{ cm}$ angehoben und losgelassen. Welche Höhe erreicht jede der Kugeln nach dem vollkommen elastischen, geraden Stoß?

11.1.22. Verschaffen Sie sich einen Überblick über Verfahren zur Bestimmung von Geschoßgeschwindigkeiten und die dabei genutzten physikalischen Gesetze!

11.1.23. Für einen Sportbogen gilt annähernd $F \sim s^2$, also $F = D \cdot s^2$. Wird er um 5 cm gespannt, ist dazu eine Kraft von $F = 10 \text{ N}$ aufzuwenden.

Berechnen Sie die Kraft, wenn der Bogen um 25 cm gespannt wird! Welche Energie ist dann gespeichert? Welche Höhe würde ein Pfeil mit der Masse $m = 50 \text{ g}$ beim senkrechten Abschuß nach oben durch die errechnete potentielle Energie erreichen? Unter welchem Winkel α müßte der Pfeil abgeschossen werden, wenn ein Ziel vom Abschußpunkt $28,9 \text{ m}$ horizontal und $30,4 \text{ m}$ vertikal entfernt ist?

11.1.24. Eine Rakete soll von der Erdoberfläche aus so abgeschossen werden, daß sie das Gravitationsfeld der Erde verläßt. Welche Geschwindigkeit muß man ihr erteilen?

11.2. Mechanik des starren Körpers

Statik des starren Körpers:

Die physikalische Größe Drehmoment (Kraftmoment) kann als axialer Vektor $\vec{M}$ eingeführt werden und ergibt sich dann als vektorielles Produkt aus Radiusvektor $\vec{r}$ (von der Drehachse zum Angriffspunkt der Kraft) und dem Kraftvektor $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Ein starrer Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die Vektorsumme aller angreifenden Kräfte als auch die Vektorsumme aller Drehmomente gleich dem Nullvektor sind:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}.$$

Bei Verwendung kartesischer Koordinaten ist das genau dann erfüllt, wenn jeweils zugleich die Summen der x-, y- und z-Koordinaten aller Kraft- und Drehmoment-Vektoren Null werden.

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes (Massemittelpunktes) eines starren Körpers gilt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m} \int_0^m \vec{r} \cdot dm = \frac{1}{m} \int_0^V \vec{r} \cdot \rho \cdot dV.$$

Hieraus folgen bei kartesischen Koordinatensystemen die drei skalaren Gleichungen:

$$x_s = \frac{1}{m} \int_0^m x \cdot dm, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_0^m y \cdot dm \quad \text{und} \quad z_s = \frac{1}{m} \int_0^m z \cdot dm.$$

Kinematik der Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Achse:

Führt man einen axialen Einheitsvektor $\vec{e}$ (Rechtsschraubung) ein, so können ein Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}$ und ein Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \dot{\omega} \cdot \vec{e} = \ddot{\varphi} \cdot \vec{e}$ eingeführt werden.

Der Vektor der Bahngeschwindigkeit läßt sich dann als vektorielles Produkt aus Winkelgeschwindigkeits- und Radiusvektor bilden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Alle Punkte eines starren Körpers (mit Ausnahme der Punkte auf der Achse) weisen gleiche Drehwinkel, gleiche Winkelgeschwindigkeiten und gleiche Winkelbeschleunigung auf. Für die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung ($\alpha = \text{konst.}$) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\omega = \int \alpha \cdot dt = \alpha \cdot t + \omega_0 \quad (\text{Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Gesetz}),$$

$$\varphi = \int (\alpha \cdot t + \omega_0) \cdot dt = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad (\text{Drehwinkel-Zeit-Gesetz}).$$

Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Besteht ein starrer Körper aus n Masseelementen Δm_i ($i = 1 \dots n$), die sich jeweils mit den Bahngeschwindigkeiten v_i bewegen, so ist die gesamte kinetische Energie des rotierenden Systems:

$$E_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2.$$

Mit $v_i = \omega \cdot r$ gilt: $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2.$

Die skalare Größe $J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2$ heißt Trägheitsmoment.

Handelt es sich um einen kontinuierlich mit Masse ausgefüllten starren Körper, so ist für $\Delta m_i \rightarrow 0$ (bei $n \rightarrow \infty$)

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot \Delta m_i = \int_0^m r^2 dm.$$

Mit dieser Größe, welche die Trägheit des starren Körpers gegenüber der Drehung um die gewählte Achse beschreibt und die Masse und deren Verteilung berücksichtigt, entsteht für die Rotationsenergie die Gleichung:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2.$$

Satz von Steiner:

Ist das Trägheitsmoment J_s bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden Achse bekannt, so ist das Trägheitsmoment bezüglich einer um a parallelverschobenen Achse:

$$J_a = J_s + m \cdot a^2.$$

Aus dem Newtonschen Grundgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ folgt für die Rotation des starren Körpers:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}.$$

Vollführt ein Drehpendel harmonische Drehschwingungen, so ist der Betrag des rückdrehenden Moments proportional zum Drehwinkel $M = k \cdot \varphi$. Der Proportionalitätsfaktor k heißt Direktionskonstante (der Spiralfeder oder des Torsionsfadens). Die Schwingungsdauer der Drehschwingung ist:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{J : k}.$$

Daraus ergibt sich die Möglichkeit zur experimentellen Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe eines Drehpendels.

Drehimpuls und Drehimpulserhaltungssatz:

Die Größe $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ bezeichnet man (in Analogie zu $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$) als Drehimpuls.

$$\text{Es gilt: } \frac{d}{dt} \vec{L} = J \cdot \vec{\alpha} = J \cdot \vec{\alpha} = \vec{M}.$$

Verschwindet (in einem abgeschlossenen System) das resultierende Drehmoment $\vec{M} = \vec{0}$, so ist $\vec{L} = \text{konst.}$

Der Gesamtdrehimpuls ist also eine Erhaltungsgröße.

Beispiel

Eine homogene Kugel mit dem Radius $r = 2,5$ cm rollt auf zwei Schienen, deren Abstand ebenfalls r ist, eine geneigte Ebene hinab. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist $\pi/6$ und ihre Länge $l = 100 \cdot r$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Kugel am Fuße der geneigten Ebene?

Lösung:

Gegeben: $r = 2,5 \text{ cm}$

$$\alpha = \pi / 6$$

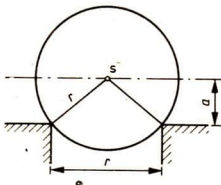
$$l = 100 \cdot r$$

Gesucht: v

Nach dem Energiesatz ist

$$\Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{rot}} = 0.$$

Wobei E_{rot} die gesamte Bewegungsenergie der Kugel (bei Rotation um die aktuelle Drehachse) ist.



$$\text{Nun ist } \Delta E_{\text{pot}} = -m \cdot g \cdot h \text{ und } \Delta E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_a \cdot \omega^2.$$

Nach dem Satz von Steiner erhält man das Trägheitsmoment, bezüglich der aktuellen Drehachse, durch die Auflagepunkte gemäß:

$$J_a = J_s + m \cdot a^2$$

(a : Abstand des Schwerpunktes der Kugel von der aktuellen Drehachse, J_s : Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt).

$$\text{Aus der Skizze entnimmt man } a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot r^2.$$

$$\text{Für } J_s \text{ gilt: } \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2. \text{ Damit erhält man } J_a = \frac{23}{20} \cdot m \cdot r^2.$$

Mit $h = l \cdot \sin \alpha$ folgt aus dem Energieerhaltungssatz

$$m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{20} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2. \text{ Daraus erhält man}$$

$$\omega^2 = \frac{40 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha}{23 \cdot r^2} \quad \text{und mit } \omega = \frac{v}{a},$$

$$\text{schließlich } v^2 = \frac{30 \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha}{23}. \text{ In unserem Falle gilt}$$

$$l \cdot \sin \alpha = 50 \cdot r.$$

Die Translationsgeschwindigkeit der Kugel am Fuße der geneigten Ebene ist

$$v = \sqrt{\frac{1500}{23} \cdot r \cdot g} = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Aufgaben

11.2.1. An einer homogenen 3,0 m langen Stange mit der Masse 6,0 kg sind in gleichen Abständen voneinander vier Lasten angebracht, wobei sich die beiden jeweils äußeren an den Enden der Stange befinden. Die erste Last von links hat die Masse 2,0 kg, jede folgende ist jeweils um 1,0 kg größer. In welchem Abstand von links muß die Stange gestützt werden, wenn sie in waagerechter Lage im Gleichgewicht bleiben soll?

11.2.2. Eine 2,0 m hohe Leiter lehnt mit einem Winkel von 60° zur Horizontalen an einer senkrechten Wand. Wie hoch darf eine Person klettern, ohne daß die Leiter wegrutscht? Zwischen Leiter und Boden sei der Reibungskoeffizient 0,4. Die Reibung zwischen Wand und Leiter darf vernachlässigt werden. Die Masse der Leiter sei gegenüber der Masse der Person vernachlässigbar klein.

11.2.3. Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeiten der Drehbewegung der Erde um die eigene Achse und der Bewegung der Erde um die Sonne? Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit des Massemittelpunktes der Erde bei seiner Bewegung um die Sonne? Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Äquator, und wie groß ist die eines Punktes auf dem 50. Breitengrad?

11.2.4. Die Bewegung eines Stößels eines Kurvenscheibengetriebes ($\omega = \text{konst.}$) kann für $0 \leq \varphi \leq \pi$ durch die Funktion

$$h(\varphi) = \frac{1}{2} h_0 (1 - \cos 2\varphi)$$

beschrieben werden.

Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung des Stößels in Abhängigkeit vom Winkel φ ?

Für welche Winkel φ sind die Geschwindigkeiten extremal?

11.2.5. Das Drehwinkel-Zeit-Gesetz eines starren Körpers wird durch die Gleichung $\varphi(t) = 0,82 + 8 \text{ s}^{-1} \cdot t - 2 \text{ s}^{-2} \cdot t^2$ beschrieben.

Nach welcher Zeit t_1 ist die Winkelgeschwindigkeit Null?

Stellen Sie $\varphi(t)$, $\omega(t)$ und $\alpha(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq t_2$ mit $\varphi(t_2) = 0$ grafisch dar!

11.2.6. Die Winkelbeschleunigung einer beschleunigten Drehbewegung eines starren Körpers wird durch die Funktion

$$\alpha(t) = \alpha_0 - bt \text{ bestimmt (} b = \text{konst.}).$$

Ermitteln Sie die Funktionen $\omega(t)$ und $\varphi(t)$, wenn für $t_0 = 0$ die Anfangsbedingungen $\omega(t) = \omega_0$ und $\varphi(t) = \varphi_0 = 0$ gelten. Nach welcher Zeit ist $\alpha = 0$, und wie groß sind dann ω und φ ? Welche Zeit vergeht bis zum Stillstand des Körpers?

11.2.7. Welche Steigung kann ein Kleinkrafttrad S 50 bei Fahrt im 1. Gang maximal bewältigen? Welche Geschwindigkeit muß dabei gefahren werden? (Die Haftreibung zwischen Rad und Boden sei ausreichend groß.)

Die Gesamtmasse betrage 175 kg, das maximale Drehmoment an der Kurbelwelle von $5,0 \text{ N} \cdot \text{m}$ wird bei der Drehzahl 4800 min^{-1} erreicht. Die Gesamtübersetzung im 1. Gang beträgt 31,59 und der dynamische Radius des Hinterrades ist 26,3 cm.

11.2.8. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Stabes bezüglich einer senkrecht zum Stab liegenden und durch den Schwerpunkt verlaufenden Drehachse!

Die Drehachse werde an das Ende des Stabes verlegt. Berechnen Sie das Trägheitsmoment für diesen Fall unter Nutzung des Satzes von Steiner!

11.2.9. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel! (Hinweis: Nehmen Sie die Zerlegung der Kugel in dünne zylindrische Scheibchen senkrecht zur Drehachse vor.)

11.2.10. Bestimmen Sie experimentell das Trägheitsmoment eines unregelmäßig geformten Körpers. Befestigen Sie den Körper hierzu an einem Drehpendel und messen Sie die veränderte Schwingungsdauer. (Hinweis: Eliminieren Sie das Trägheitsmoment des Gerätes durch Messung an einem Körper mit bekanntem Trägheitsmoment.)

11.2.11. Eine anfänglich senkrecht stehende 3,0 m lange, dünne Stange fällt um. Mit welcher Bahngeschwindigkeit trifft ihr Endpunkt auf den Boden?

11.2.12. Eine Schwungscheibe mit dem Trägheitsmoment $1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ wird 20 s lang durch ein konstantes Drehmoment von $2000 \text{ N} \cdot \text{m}$ in Drehung versetzt. Skizzieren Sie das Drehwinkel-Zeit-Diagramm und das Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Wie groß ist die kinetische Energie der Scheibe nach der Beschleunigungszeit? Wie groß ist die Leistung am Ende des Beschleunigungsvorganges?

11.2.13. Eine Eiskunstläuferin beginnt eine Pirouette mit einer Winkelgeschwindigkeit von 15 s^{-1} . Durch Heranziehen der Arme verringert sie das Trägheitsmoment um 12 %. Welche Drehzahl hat sie nun?

11.2.14. Eine Kugel, ein Zylinder und ein Hohlzylinder mit jeweils gleichen Massen und gleichen (äußeren) Radien rollen, aus der Ruhe beginnend, eine geneigte Ebene hinab. In welchem Verhältnis stehen die Ablaufzeiten der drei Körper, wenn alle aus der gleichen Höhe starten und für den Hohlzylinder $r_a : r_i = 2$ gilt?

11.2.15. Um den Umfang einer Seiltrommel (in der Form eines homogenen Zylinders der Masse $m_Z = 2,0 \text{ kg}$) ist eine dünne Schnur gewickelt. Die Trommel ist an ihrer Symmetrieachse um eine raumfeste Achse drehbar gelagert. Am freien Ende der Schnur hängt ein Körper der Masse $m_K = 0,5 \text{ kg}$. Wie groß ist die Beschleunigung, mit der der Körper nach unten sinkt?

12. ELEKTRODYNAMIK

12.1. Statisches elektrisches Feld

Grundlagen

Jede elektrische Ladung Q läßt sich als ganzzahliges Vielfaches n der Elementarladung e darstellen:

$$Q = n \cdot e, \quad e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}.$$

In abgeschlossenen Systemen ist die Gesamtladung eine Erhaltungsgröße. Positive Ladungen sind Quellen und negative Ladungen Senken des statischen elektrischen Feldes. Eine vektorielle Feldgröße, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ zur Beschreibung der Wirkung elektrischer Felder auf Ladungen erhält man, wenn die Kraft $\vec{F}$ auf die Probeladung q bezogen wird:

$$\vec{E} = \vec{F} : q.$$

Eine andere Möglichkeit zur Feldbeschreibung ergibt sich durch die (ebenfalls vektorielle) Größe elektrische Verschiebung D . Dabei geht man von der felderzeugenden Ladung Q aus und bezieht diese auf eine sie umfassende Fläche A . Am Ort dieser Fläche ist:

$$D = Q : A.$$

In isotropen Medien gilt: $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$.
(ϵ : Dielektrizitätskonstante, $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$).

Bei Verschiebung einer punktförmigen Ladung q im Feld der Stärke $\vec{E}$ vom Punkt P_1 nach P_2 tritt die Arbeit:

$$W = q \cdot \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \text{ auf } (\vec{r}: \text{Ortsvektor von } P).$$

Der Wert des Integrals $\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ heißt Spannung U zwischen

P_1 und P_2 und eine Stammfunktion zu $\vec{E}(r)$ heißt Potential φ .

Die Spannung U_{12} ist daher gleich der Potentialdifferenz $\varphi(P_1) - \varphi(P_2)$. Es gilt:

$$U_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{und}$$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

In homogenen Feldern ergibt sich mit $\vec{E} = \text{konst.}$ und $\overline{P_1 P_2} = d$:

$$U = E \cdot d.$$

Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 (r_1 bzw. r_2 von der Mitte von Q entfernt) in der Umgebung einer Punktladung Q (oder mit Q geladenen Kugel) ist:

$$U = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Transportiert man von einem Belag eines Kondensators die Ladung Q zum anderen Belag, so muß gegen das elektrische Feld die Verschiebungsarbeit W verrichtet werden. Das führt zur Änderung der Energie des elektrischen Feldes des Kondensators $W = \Delta E$.

Aus $dW = U \cdot dQ$ folgt mit $C = Q/U$ und

$$W = \frac{1}{C} \int Q \cdot dQ \quad \text{für die Energie } E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U.$$

Beispiel

Wie groß ist die Kapazität des Kugelkondensators, der durch die Erde gegenüber dem Fixsternhimmel gebildet wird?

Lösung:

Gesucht: C Gegeben: Erdradius $r_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Die Erdkugel trage die Ladung Q . Befindet man sich mit einer Probeladung q in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt, so erfährt die Probeladung im elektrischen Feld die Kraft

$$F = \frac{q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (\text{Coulombsches Gesetz}).$$

Die Feldstärke in einer solchen Entfernung r ist wegen

$$E = F / q: \quad E = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}.$$

Die Spannung zwischen einem Punkt an der Erdoberfläche $r_1 = r_E$ und dem Fixsternhimmel $r_2 \rightarrow \infty$ ist:

$$U = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \int_{r_1=r_E}^{r_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_E}$$

Die Kapazität $C = Q/U$ der Anordnung ergibt sich deshalb zu:

$$C = 4 \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_E$$

$$C = 4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot F \cdot m^{-1} \cdot 6,37 \cdot 10^6 m$$

$$C = 708 \mu F$$

=====

Ergebnis: Betrachtet man die Erde als Kugelkondensator (gegenüber dem Fixsternhimmel), so hat sie eine Kapazität von 708 μF .

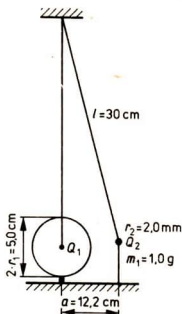
Aufgaben

12.1.1. Elektrische Feldlinien treten stets senkrecht aus der Oberfläche eines elektrisch geladenen Leiters aus. Begründen Sie diese Aussage!

12.1.2. Geben Sie das Potential $\varphi(r)$ zu einer Punktladung Q an, ausgehend vom Coulombschen Gesetz, und veranschaulichen Sie es in einem Diagramm!

12.1.3. Eine große, feststehende Kugel wurde aufgeladen. Anschließend wurde eine an einem isolierten Seidenfaden aufgehängte kleine Kugel mit ihr in Kontakt gebracht. Es stellt sich dann die skizzierte Gleichgewichtslage ein.

Wie groß sind Q_1 und Q_2 ?



12.1.4. Zwei kleine Kugeln mit einer Gewichtskraft von je $0,16 \text{ N}$ hängen jeweils an 20 cm langen Fäden. Auf Grund elektrostatischer Abstoßungskräfte zwischen den geladenen Kugeln bilden die Fäden einen Winkel von 60° miteinander.

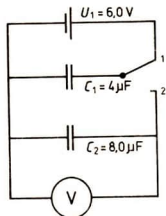
Wie groß sind die Ladungen $Q_1 = Q_2$?

12.1.5. Auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1,0 \text{ m}$ sind zwei Ladungen Q_1 und Q_2 befestigt. Eine dritte Ladung q ist auf dem Kreis reibungsfrei beweglich. Wie groß ist Q_2 , wenn $Q_1 = 6,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ und die Abstände zwischen Q_1 und q $1,3 \text{ m}$ sowie zwischen Q_2 und q $1,8 \text{ m}$ betragen?

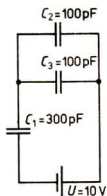
12.1.6. An den Eckpunkten eines Quadrates befinden sich vier Ladungen von jeweils $2,33 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Im Mittelpunkt des Quadrates soll eine negative Ladung derart angebracht werden, daß die resultierende Kraft auf jede Ladung Null wird! Wie groß muß diese Ladung sein?

12.1.7. Ist es möglich, die beiden Kapazitäten C_2 und C_3 in der skizzierten Schaltung so zu vergrößern, daß die Ladung Q_2 auf C_2 zwar größer, die Ladung Q_3 auf C_3 jedoch kleiner wird?



12.1.8. Gegeben sei folgende Schaltung: C_1 wird in Schalterstellung 1 mit $U_1 = 6,0 \text{ V}$ aufgeladen. Danach wird der Schalter in Stellung 2 gebracht. Welchen Wert U_2 zeigt der Spannungsmesser dann an? C_2 war ursprünglich ungeladen.



- a) Zeigen Sie, daß folgender Lösungsvorschlag unter Verwendung einer Energiebilanz auf einen Widerspruch zum Ladungserhaltungssatz führt:

$$\frac{1}{2} C_1 \cdot U_1^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \cdot U_2^2$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U_1$$

$$U_2 = 3,5 \text{ V}$$

=====

- b) Geben Sie die richtige Lösung an!

- c) Worin besteht der Fehler in a)?

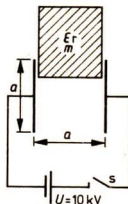
12.1.9. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die punktförmige, mit $q = -5,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ geladene Masse von $1,0 \text{ g}$ auf eine mit der Ladung $Q = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ geladene Kugel vom Radius $0,5 \text{ m}$? Die punktförmige Masse startet $2,5 \text{ m}$ von der Oberfläche der Kugel entfernt. Die Gravitation bleibe unberücksichtigt.

12.1.10. Vollständig ionisierte Heliumkerne treten mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 4,0 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ durch eine Bohrung in einer Platte in das homogene Feld eines Plattenkondensators ein. Die Platten des Kondensators haben den Abstand $1,0 \text{ m}$ voneinander, es ist eine Spannung von $1,0 \text{ kV}$ angelegt und es gilt $\vec{v}_1 \parallel \vec{E}$.

- a) Wie groß ist die Flugzeit eines Heliumkerns zwischen den Platten?
- b) Mit welcher Geschwindigkeit v_2 trifft der Kern auf die gegenüberliegende Platte?

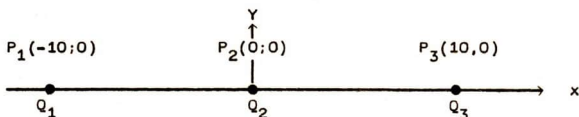
12.1.11. In einem Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge 10 cm soll ein Keramikwürfel (Kantenlänge ebenfalls 10 cm , $\epsilon_r = 10^4$, $m = 1,6 \text{ kg}$) hineinfallen. Die Spannungsquelle hat die Klemmenspannung 10 kV . Berechnen Sie die jeweils erreichten Geschwindigkeiten für die Fallwege $s_1 = 10 \text{ cm}$ und $s_2 = 20 \text{ cm}$ in folgenden Fällen:

- der Kondensator ist ungeladen,
- der Kondensator ist geladen und Schalter S bleibt geschlossen,
- der Kondensator ist geladen, Schalter S aber geöffnet!



12.1.12. Gegeben sei die unten skizzierte Anordnung punktförmiger, geladener Körper. Die beiden Randkörper sind 20 cm voneinander entfernt befestigt, der mittlere kann reibungsfrei längs der x-Achse verschoben werden. Die Ladung auf den drei Körpern ist jeweils 10^{-6} C und die Masse des mittleren 10 g.

Beweisen Sie: Für kleine Auslenkungen der mittleren Ladung Q_2 aus ihrer Gleichgewichtslage gilt näherungsweise $|F| \sim x$. Die Ladung kann folglich (näherungsweise) harmonisch schwingen. Berechnen Sie die Frequenz!



12.1.13. In einer Oszillografenröhre werden Elektronen der Geschwindigkeit $v = 14,5 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ in einem elektrischen Querfeld abgelenkt. Die felderzeugenden Platten haben einen Abstand $d = 1,2 \text{ cm}$ und eine Länge $l = 2,5 \text{ cm}$; der Abstand Auffangschirm - Ablenkkondensator (Mitte der Plattenlänge) beträgt $s = 12 \text{ cm}$.

Berechnen Sie die Ablenkung y des Elektronenstrahls auf dem Aufgangschirm, wenn eine Ablenkspannung $U_A = 40 \text{ V}$ angelegt ist! Berechnen Sie die Beschleunigungsspannung der Oszillografenröhre! Untersuchen Sie, ob der Einfluß der Schwerkraft und die relativistische Massenzunahme auf die Ergebnisse Einfluß haben!

12.1.14. Das Bohrsche Atommodell ist eine halbklassische Theorie. Bohr nahm an, daß beim Wasserstoffatom:

(1) die Energie des Elektrons auf der n -ten strahlungsfreien Bahn gleich der Summe aus elektrostatischer und kinetischer Energie ist ($E_n = E_{el} + E_{kin}$),

(2) die Radialkraft durch die Coulombkraft realisiert wird ($F_r = F_C$),

(3) der Drehimpuls "gequantelt" ist ($D = n \cdot h/2\pi$).

Leiten Sie aus diesen drei Bedingungen die (in 9.1. angegebene) Balmerformel her!

12.1.15. Ein auf die Spannung U_0 aufgeladener Kondensator mit der Kapazität C wird über einen Widerstand R entladen.

Ermitteln Sie die Funktion $U = f(t)$ für diesen Entladevorgang!

12.1.16. Erläutern Sie die theoretischen Ansätze und beschreiben Sie die Durchführung des Experiments zur Bestimmung der Elementarladung nach Milikan!

12.2. Statisches magnetisches Feld

Grundlagen

Auch im Magnetfeld lassen sich zwei vektorielle Feldgrößen definieren. Die magnetische Flußdichte $\vec{B}$ erfaßt die Wirkung eines Magnetfeldes auf ein vom elektrischen Strom der Stärke I durchflossenes Leiterstück der Länge l . $B = F/(I \cdot l)$ liefert den Betrag von $\vec{B}$, wobei das Stromelement, $\vec{B}$ und $\vec{F}$ ein Rechtssystem bilden.

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ hingegen beschreibt das Magnetfeld von seiner Ursache ausgehend. Beispielsweise erzeugt der elektrische Strom I , der durch die N Windungen einer Spule der Länge l fließt, in deren Innerem ein Magnetfeld der Feldstärke mit dem Betrag: $H = I \cdot N : l$.

In isotropen Medien gilt:

$$\vec{H} = \vec{B} : \mu. (\mu: \text{magnetische Feldkonstante, } \mu = \mu_{rel} \cdot \mu_0).$$

Die relative magnetische Feldkonstante μ_{rel} ist in bestimmten Stoffen eine Funktion von H . Die Feldlinien des magnetischen Feldes sind stets geschlossene Wirbel, es existieren keine magnetischen Monopole.

Lorentzkraft:

Während auf ruhende elektrische Ladungen q nur die Kraftwirkung durch ein elektrisches Feld $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ beobachtet wird, entsteht bei Bewegung mit der (Relativ-)Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Magnetfeld der Flußdichte $\vec{B}$ die Kraft $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Durch das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$ wird die Tatsache berücksichtigt, daß die Kraft $\vec{F}_L$ jeweils senkrecht zu den Richtungen von $\vec{v}$ und $\vec{B}$ wirkt. Wegen der Rechtwinkligkeit zwischen $\vec{F}_L$ und $\vec{v}$ können sich in solchem Falle der Betrag der Bahngeschwindigkeit und damit die kinetische Energie des die Ladung q tragenden Objektes nicht verändern.

In homogenen Feldern wirkt $\vec{F}_L$ als Radialkraft.

Für den Radius der sich einstellenden Kreisbahn gilt:

$r = m \cdot v : (q \cdot B)$ und für die Winkelgeschwindigkeit

$\omega = q \cdot B : m$. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten muß für m die relativistische Impulsmasse gesetzt werden.

Beispiel

Ein Elektron gelangt mit $\vec{v}(0) = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \vec{i}$ in das zeitlich konstante homogene Magnetfeld der Flußdichte $\vec{B} = 1,5 \text{ T} \cdot \vec{j}$.

Man berechne Radius und Umlaufdauer der sich einstellenden Kreisbahn des Elektrons und zeige, daß es dabei in der x-z-Ebene verbleibt.

Lösung:

Gegeben: $\vec{v} = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \vec{i}$

$\vec{B} = 0,25 \text{ T} \cdot \vec{j}$

$\frac{e}{m_0} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Gesucht: r, T

Nachweis, daß Kreisbahn in x-z-Ebene

Auf das Elektron wirkt die Lorentzkraft $\vec{F}_L = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ bzw.

$\vec{F}_L = -e \cdot v_z \cdot B_y \cdot \vec{i} + e \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{k}$. Die Lorentzkraft hat also keine Komponente in y-Richtung. Da das Elektron in Richtung der x-Achse eingeschossen wurde, bleibt es in der x-z-Ebene.

Die Radialkraft der Kreisbahn mit dem Betrag $m \cdot \frac{v^2}{r}$ wird durch die Lorentzkraft mit dem Betrag $e \cdot v \cdot B$ realisiert. Da das Elektron (relativ zur Vakuumlichtgeschwindigkeit) eine hohe Geschwindigkeit hat, muß die Impulsmasse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

in der Gleichung $m \cdot \frac{v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$ verwendet werden. Löst man nach r auf, so entsteht:

$$r = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{e}{m_0} \cdot B}}$$

$$r = \frac{2,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,342 \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 0,25 \cdot \text{T}}$$

$$r = 3,4 \text{ mm}$$

=====

Mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$ und $T = 2\pi \cdot \frac{r}{v}$ erhält man $T = 1,06 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

=====

Ergebnis: Das Elektron bewegt sich in der x-z-Ebene auf einer Kreisbahn mit dem Radius von 3,4 mm und der Umlaufdauer 10^{-10} s .

Aufgaben

12.2.1. Im Vakuum werden Elektronen zunächst durch eine Spannung von 6,0 kV beschleunigt. Anschließend dringen sie unter einem Winkel $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{B}) = 30^\circ$ in ein homogenes Magnetfeld ein. Der Betrag der magnetischen Induktion ist $B = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Berechnen Sie den Radius einer Windung der sich einstellenden schraubenlinienförmigen Bahn sowie die Ganghöhe der Schraubenlinie!

12.2.2. In dem skizzierten Gebiet existiert für $0 \leq x \leq x_1$ ein homogenes Magnetfeld mit $\vec{B} = B_z \cdot \vec{k}$. Ein geladenes Teilchen mit der Masse m und der Ladung q wird mit $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i}$ im Koordinatenursprung in das Feld eingeschossen und im Punkt P_2 auf einem Schirm aufgefangen.

- a) Untersuchen Sie, ob die Ablenkung der Flußdichte proportional ist, ob also $y_2 \sim B$ gilt!
- b) Geben Sie eine Bedingung für B an, damit das Teilchen überhaupt auf dem Schirm auftrifft!

12.2.3. Bei der Bewegung zweier Teilchen in einem Magnetfeld werden die im folgenden skizzierten Bahnen registriert:

Für $y \geq 0$ existiere ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{k}$. Die zwei Teilchen haben gleiche Massen

und gleiche Ladungen. Sie werden im Koordinatenursprung in y -Richtung in das Feld eingeschossen.

- a) Wie sind die unterschiedlichen Bahnen zu erklären?
- b) Mit welcher Laufzeitdifferenz treten die Teilchen aus dem Magnetfeld aus?

12.2.4. Ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q wird unter einem Winkel $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{i})$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = v_{0x} \cdot \vec{i} + v_{0y} \cdot \vec{j}$ in ein homogenes Magnetfeld eingeschossen. Das Magnetfeld mit der Flußdichte $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{k}$ existiere nur für $0 \leq y \leq y_B$.

Wie groß muß der Winkel α gewählt werden, damit die Laufzeit des Teilchens durch das Feld minimal wird?

12.2.5. Die rechteckige Spule eines Drehspulinstruments ist 10 mm breit und 15 mm hoch und besteht aus 30 Windungen. Sie befindet sich in einem konstanten, radialen Magnetfeld der Flußdichte $B = 0,2 \text{ T}$. Um die Spule um die vertikale Drehachse um ein Grad zu drehen, ist gegen das Kraftmoment einer Spiralfeder ein Drehmoment von $3,0 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$ notwendig. Wie groß ist der Strom durch die Spule, wenn der Zeigerausschlag 60° beträgt?

12.2.6. Bei Untersuchungen zum HALL-Effekt wird eine n-leitende, quaderförmige Probe senkrecht zur Flußrichtung des elektrischen Stromes von einem Magnetfeld der Flußdichte $B = 2,5 \text{ T}$ durchsetzt. Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen unter den gegebenen Bedingungen beträgt $10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) Wie groß ist die HALL-Spannung, die an den Breitseiten der $5,0 \text{ mm}$ breiten Probe abgenommen werden kann?
- b) Informieren Sie sich über Anwendungen des HALL-Effektes!

12.2.7. Beschreiben Sie den Aufbau eines Zyklotrons und erklären Sie seine Funktion!

- a) Begründen Sie, warum dieser Beschleuniger nicht auf Elektronen angewandt wird!
- b) Leiten Sie die Gleichung für den Radius der Teilchenbahn her! Interpretieren Sie diese Gleichung!
- c) Nennen Sie Anwendungen des Zyklotrons!
- d) Deuteronen sollen im Zyklotron beschleunigt werden. Bei einem Magnetfeld mit der Flußdichte $B = 1,0 \text{ T}$ soll ein Bahnradius von $0,9 \text{ m}$ erreicht werden. Wie groß ist dann die Geschwindigkeit des Deuterons?

12.2.8. Berechnen Sie das Verhältnis q/m für α -Teilchen, wenn diese mit einer Geschwindigkeit $v = 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ senkrecht in ein homogenes Magnetfeld der Feldstärke $H = 2,0 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ eintreten und sich dort auf einer Kreisbahn mit dem Radius $8,3 \text{ cm}$ bewegen. Wie groß wäre der Radius, wenn sich Protonen mit der gleichen Geschwindigkeit in diesem Magnetfeld bewegen würden? Vergleichen Sie die q/m -Werte von α -Teilchen, Protonen und Elektronen!

12.9.9. Mit dem Fadenstrahlrohr und Helmholtz-Spulen kann die spezifische Ladung des Elektrons bestimmt werden (Versuch nach Schuster). Erläutern Sie die Grundlagen und die Durchführung des Experimentes; entwickeln Sie die zur Berechnung von e/m zu nutzende Gleichung!

Bei einem Experiment wurde eine Beschleunigungsspannung von 300 V eingestellt und ein Durchmesser der Elektronen-Kreisbahn (mit dem Spiegelmaßstab) von $11,6 \text{ cm}$ ermittelt. Der Strom durch die Helmholtz-Spulen des Induktionsgerätes betrug dabei $I = 0,67 \text{ A}$.

Die magnetische Feldstärke H kann für Helmholtz-Spulen nach der Gleichung $H = \frac{n \cdot R^2 \cdot I}{\sqrt{(R^2 + s^2)^3}}$ errechnet werden, wenn

n : Windungszahl einer Spule, I : Spulenstromstärke,
 R : mittlerer Radius einer Spule, s : halber wirksamer Abstand der Spulen bedeuten. Es gilt also $H = k \cdot I$ (k : Geometriefaktor).
 Bei dem Experiment hat der Geometriefaktor den Wert 1200 m^{-1} .
 Berechnen Sie die sich aus den Meßwerten ergebende spezifische Ladung der Elektronen!

12.3. Elektromagnetische Induktion

Grundlagen

Umfaßt eine Leiterschleife eine Fläche $\vec{A}$ und wird diese Fläche von dem homogenen magnetischen Feld der Flußdichte $\vec{B}$ durchsetzt, so definiert man die skalare Größe magnetischer Fluß:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A}.$$

Jede zeitliche Veränderung der Größe ϕ läßt in der Leiterschleife eine Induktionsspannung U_1 entstehen:

$$U_1 = - \frac{d\phi}{dt} = - (\vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}).$$

Unterliegen alle N Windungen einer Spule der gleichen Änderung $d\phi / dt$, so entsteht an den Enden der Spule die Induktionsspannung

$$U_1 = - N \cdot d\phi / dt.$$

Das negative Vorzeichen ist Ausdruck des Lenzschen Gesetzes (einer Spezialisierung des Energieerhaltungssatzes), nach dem die induzierte Spannung und der dadurch entstehende elektrische Strom immer so gerichtet sind, daß sie ihrer Ursache entgegen wirken.

Selbstinduktion:

Wird die zeitliche Änderung von ϕ durch Stromstärkeänderung in einer Spule erzeugt, so unterliegen die Windungen dieser Spule selbst dem Induktionsvorgang. Mit $B = \mu \cdot H$ und $H = I \cdot N/l$ wird:

$$U_1 = - \frac{d\phi}{dt} = - \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Die Material- und Geometrie Größen der Spule faßt man zur Größe Induktivität L zusammen. Deshalb kann für die Selbstinduktionsspannung $U_1 = -L \cdot dI/dt$ geschrieben werden. Als Folge der Selbstinduktion wächst beim Einschaltvorgang die Stromstärke durch die Spule nicht sprunghaft an, sondern es gilt

$$i(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}).$$

Beim Anlegen einer harmonischen Wechselspannung bewirkt die Selbstinduktion eine um eine viertel Periode nachteilende Stromstärke und den induktiven Widerstand $X_L = \omega \cdot L$.

Beispiel

Die 1000 Windungen einer 10 cm langen Luftspule umfassen jeweils eine Fläche von 10 cm^2 . Durch die Spule fließt ein harmonischer Wechselstrom mit der Amplitude 1,4 A und der Frequenz 50 Hz. Über die Windungen dieser Erregerspule sind auf einer Länge von 2 cm 10 Windungen einer zweiten Spule gewickelt. An den Enden dieser zweiten Spule ist ein Spannungsmesser angeschlossen. Welchen Effektivwert zeigt das Voltmeter an?

Lösung:

Gegeben: $N_e = 1000$, $N_1 = 10$

Gesucht: U

$$l_e = 10 \text{ cm}$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$\hat{i} = 1,4 \text{ A}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Im Induktionsgesetz $U_1(t) = - N_1 \cdot \frac{d}{dt} (B \cdot A)$

setzen wir für $B(t)$: $B(t) = \frac{\mu_0 \cdot N_e}{l} \cdot i(t)$

$$\text{und } i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Damit ergibt sich:

$$u_1(t) = - N_1 \cdot A \cdot \frac{\mu_0 \cdot N_e}{l} \cdot \hat{I} \cdot \frac{d}{dt} \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_1(t) = - N_1 \cdot A \cdot \frac{\mu_0 \cdot N_e}{l} \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Der zeitunabhängige Faktor ist die Amplitude U der induzierten Spannung.

Mit $U = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \hat{U}$ erhält man:

$$U = \frac{\mu_0 \cdot \omega \cdot A \cdot N_1 \cdot N_e \cdot \hat{I}}{\sqrt{2} \cdot l}$$

$$U = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \text{ A}}{2 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}}$$

$$U = 39 \text{ mV}$$

=====

Ergebnis: In der auf die Erregerspule gewickelten Induktionsspule wird eine harmonische Wechselspannung mit dem Effektivwert von 39 mV induziert.

Aufgaben

12.3.1. Eine Spule mit 100 Windungen und einer Windungsfläche $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ werde von einem veränderlichen Magnetfeld durchsetzt.

Es gelte $B(t) = k_1 \cdot t^2 + k_2 \cdot t$.

Es sind zwei Wertepaare $(t; B)$ bekannt: (1 s; 1 T) und (2 s; 0 T).

Ermitteln Sie die in dieser Spule induzierte Spannung $u(t)$ und zeichnen Sie (gegebenenfalls unter Verwendung eines Kleincomputers) den Graphen der Funktion $u(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$.

12.3.2. Mit Hilfe eines (als ideal zu betrachtenden) Transformators soll aus der Netzwechselspannung von 220 V eine Kleinspannung von 12 V gewonnen werden. Welches Übersetzungsverhältnis $\bar{U} = N_1/N_2$ muß gewählt werden?

Die Sekundärseite werde mit einem ohmschen Widerstand von 5,0 Ohm belastet. Welchen Eingangswiderstand weist unter diesen Bedingungen die Primärseite auf?

12.2.2. Stellen Sie eine Übersicht über Bauformen und Anwendungen von Transformatoren zusammen!

Leiten Sie die Gesetze für die Spannungs- und Stromstärkeübersetzung an einem idealen Transformator her!

12.3.4. Beschreiben Sie den Aufbau und erläutern Sie die Wirkungsweise eines Wechselstromgenerators!

Leiten Sie die Gleichung für die Induktionsspannung $u_1(t)$, die beim Drehen einer Spule in einem homogenen Magnetfeld bei konstanter Winkelgeschwindigkeit entsteht, aus dem Induktionsgesetz her!

12.3.5. Für eine supraleitende Magnetspule sind folgende Daten bekannt:

$B = 5,0 \text{ T}$, $I = 100 \text{ A}$, $N = 1000$, $A = 10 \text{ cm}^2$.

- a) Wie groß ist die Energie des Magnetfeldes der Spule?
- b) Welchen Wert hat die Induktivität dieser Spule?
- c) Um den Spulenstrom von 100 A zu erreichen, war die supraleitende Spule an eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $0,01 \text{ Ohm}$ und dem Kurzschlußstrom 120 A angeschlossen. Wie lange dauerte der Einschaltvorgang bis zum Erreichen des Spulenstromes 100 A ?

12.3.6. Eine 2 mm dicke Aluminiumscheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ zwischen zwei Magnetpolen in einem Feld mit $B = 0,4 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$. Die Pole haben quadratische Form ($a = 2 \text{ cm}$) und liegen im mittleren Abstand $r = 8 \text{ cm}$ von der Drehachse.

Näherungsweise wird angenommen, daß der Widerstand der gesamten Strombahn gleich dem zweifachen Widerstandswert des im Feld liegenden Teiles der Scheibe ist. Berechnen Sie die durch die Wirbelströme verursachte Bremsleistung P_{wi} und das Bremsmoment!

12.3.7. Gestalten Sie einen Vortrag über Leben und Werk von:

- a) M. Faraday b) J. Cl. Maxwell c) H. Hertz.

Anhang

Ausgewählte Lösungen

=====

- 9.1.1. $\lambda_{\max} = 2,86 \text{ } \mu\text{m}$
9.1.2. $T = 869 \text{ K}$
9.1.3. $W_A = 2,02 \text{ eV}$
9.1.4. $\lambda = 106,9 \text{ nm}$, ultraviolett
9.1.5. $m = 4$, $\Delta E = 2,55 \text{ eV}$
9.1.6. $11,7 \text{ } \mu\text{m}$ ($E_7 - E_6$), $121,5 \text{ nm}$ ($E_2 - E_1$),
 397 nm ($E_6 - E_2$)
9.1.7. a) $E = 1,787 \text{ eV}$ b) $N = 10^{19}$
9.1.8. $\lambda_g = 35,45 \text{ pm}$
9.1.9. bei Vielfachen von $15,66^\circ$

9.2.1. a) Thorium b) $t = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ a}$
9.2.2. $T_{1/2} = 3,825 \text{ d}$
9.2.3. $0,1919 \%$
9.2.4. $E = 2,84 \text{ MeV}$, Paarbildung $1,022 \text{ MeV}$, Betastrahlung
 $0,543 \text{ MeV}$ und Gammastrahlung $1,275 \text{ MeV}$
9.2.5. Folgekern: Nickel
9.2.6. a) $3,2 \cdot 10^7 \text{ J}$ b) $8,2 \cdot 10^{13} \text{ J}$
c) $5,7 \cdot 10^{14} \text{ J}$ d) $9,0 \cdot 10^{16} \text{ J}$
9.2.7. $T = 5,6 \cdot 10^8 \text{ K}$
9.2.8. a) $2,2 \text{ MeV}$ b) $535,5 \text{ MeV}$ c) $1785,5 \text{ MeV}$
9.2.9. $\lambda' = 7,8 \text{ pm}$, $f = 3,8 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$
 $\varphi = 49,5^\circ$
9.2.10. $v = 2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $\varphi = 46,42^\circ$
9.2.11. Blei: $8,36 \text{ cm}$ Wasser: $190,3 \text{ cm}$ Beton: $67,6 \text{ cm}$

10.2. $P = 3,86 \cdot 10^{23} \text{ kW}$, rel. Masseverl. $0,033 \%$
10.3. $T = 5770 \text{ K}$, $\lambda_{\max} \approx 500 \text{ nm}$
10.4. $r = 18,9 \text{ pc}$ $M = 2,8$ $P = 5,3 P_\odot$
10.5. $M = -3,26$
10.6. $R = 1,6 \cdot 10^9 \text{ m}$ $m = 2 \cdot m_\odot$
mittlere Dichte $250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
10.7. $D_1 = 3,3 \cdot 10^6 \text{ km}$ $D_2 = 3,1 \cdot 10^6 \text{ km}$
10.8. $T_e = 3900 \text{ K}$ $P = 250 \cdot P_\odot$ $R = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ m}$

- 10.9. $m_1 = 2,08 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ $m_2 = 1,76 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- 10.10. $m = 6,67 \cdot 10^{40} \text{ kg}$
- 11.1.1. $t_1 = 9 \text{ s}$, $x_1 = 146 \text{ m}$, $t_2 = 6,4 \text{ s}$, $x_2 = 129 \text{ m}$
 $a_{x1} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_3 = 12,2 \text{ s}$
- 11.1.2. $t_2 = 67 \text{ s}$, $s_2 = 1 \text{ km}$, $\Delta v = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- 11.1.3. $\varphi_1 = 1,47 + 2 \text{ k}\pi$ $\varphi_2 = 4,81 + 2 \text{ k}\pi$
- 11.1.4. b) $t_2 = 3,5 \text{ s}$
- 11.1.5. $v_0 = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha_1 = 26,6^\circ$ $v_{01} = 12,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 $t_1 = 0,95 \text{ s}$, $t_2 = 0,55 \text{ s}$
- 11.1.6. bei $t_1 = 0$: $a_{r1} = 0$ $a_{s1} = -19,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$
bei $t_2 = T/4$: $a_{r2} = 0,39 \text{ cm/s}^2$ $a_{s2} = 0$
- 11.1.7. $a_1 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ $v_1 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $x_1 = 13,3 \text{ m}$
- 11.1.8. $x_0 = \frac{\mu_0 \cdot l}{1 + \mu_0}$
- 11.1.9. $v_1 = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 11.1.10. $F_m = 2,37 \text{ kN}$
- 11.1.11. $t_1 = 0,44 \text{ s}$
- 11.1.12. Kreisbahn mit $r = 20 \text{ mm}$ um den Mittelpunkt (40 mm; 20 mm)
- 11.1.13. $w_0 = 12,03 \text{ m}$ $\alpha_0 = 40,3^\circ$
- 11.1.15. $s_2 = 20,6 \text{ m}$
- 11.1.16. $t_1 = 2,02 \text{ s}$ $x_1 = 7,07 \text{ m}$ $\vec{S} = 2,0 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \vec{i}$
- 11.1.17. $v = 7,35 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ $W = 7,1 \cdot 10^9 \text{ J}$
- 11.1.18. $E_k(0) = 0,5 \text{ J}$ $x_2 = 3,5 \text{ cm}$
- 11.1.19. $\Delta E = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 11.1.20. $F = 167 \text{ N}$
- 11.1.21. $h_1 = 2 \text{ mm}$ $h_2 = 72 \text{ mm}$
- 11.1.23. $F_1 = 250 \text{ N}$ $E_p = 20,85 \text{ J}$ $v_0 = 28,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 $\alpha_1 = 76,5^\circ$ $\alpha_2 = 60^\circ$
- 11.1.24. $v_{II} = 11,18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- 11.2.1. $x = 1,75 \text{ m}$
- 11.2.2. $x = 1,4 \text{ m}$
- 11.2.3. $v_1 = 463 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $v_2 = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ $v(50^\circ) = 298 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 11.2.4. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ $\varphi_2 = \frac{3}{4}\pi$
- 11.2.7. $v = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ Steigung 35 %
- 11.2.8. $J = m \cdot l^2 / 12$ $J_e = m \cdot l^2 / 3$
- 11.2.9. $J = \frac{2}{5} m \cdot R^2$

$$\begin{aligned}
 11.2.11. \quad v &= 9,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\
 11.2.12. \quad E_{\text{rot}} &= 6,7 \cdot 10^5 \text{ J} \quad P(20 \text{ s}) = 6,7 \cdot 10^4 \text{ W} \\
 11.2.13. \quad n_2 &= 2,71 \text{ s}^{-1} \\
 11.2.14. \quad t_K/t_Z &= \sqrt{14/15} \quad t_K/t_{\text{HZ}} = \sqrt{56/65} \quad t_Z/t_{\text{HZ}} = \sqrt{12/13} \\
 11.2.15. \quad a &= 3,27 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

$$12.1.3. \quad Q_1 = 44 \cdot 10^{-7} \text{ C} \quad Q_2 = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$12.1.4. \quad Q_1 = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$12.1.5. \quad Q_2 = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$12.1.6. \quad Q_2 = 2,23 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$12.1.8. \quad \text{b) } U_2 = 2,0 \text{ V}$$

$$12.1.9. \quad v = 54,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$12.1.10. \quad v_2 = 5,1 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad t = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$12.1.11. \quad \text{a) } v_1 = 1,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_2 = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{b) } v_1 = 1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_2 = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{c) } v_1 = 1,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_2 = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$12.1.12. \quad f = 9,5 \text{ Hz}$$

$$12.1.13. \quad y = 0,84 \text{ cm} \quad U = 600 \text{ V}$$

$$12.1.14. \quad f = \frac{m \cdot e^4}{8 \epsilon_0^2 \cdot h^3} (1/m^2 - 1/n^2)$$

$$12.1.15. \quad U = U_0 \cdot \exp(-t/RC)$$

$$12.2.1. \quad r = 1 \text{ cm} \quad l = 11 \text{ cm}$$

$$12.2.3. \quad \text{b) } \Delta t = 0$$

$$12.2.5. \quad I = 2,0 \text{ mA}$$

$$12.2.6. \quad U_H = 0,125 \text{ mV}$$

$$12.2.8. \quad q/m = 4,8 \cdot 10^6 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$12.3.2. \quad U_1/U_2 = 18,3 \quad R_1 = 1,68 \text{ k}\Omega$$

$$12.3.5. \quad \text{a) } E = 250 \text{ J} \quad \text{b) } L = 0,05 \text{ H} \quad \text{c) } t = 9 \text{ s}$$

$$12.3.6. \quad P = 1,43 \text{ W} \quad M = 0,143 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Tabellen

=====

Naturkonstanten (die in diesem Material benötigt werden)

Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,62618 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Konstante im Wienschen Verschiebungsgesetz	$2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
Rydbergfrequenz des Wasserstoffes	$R_H = 3,289842 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
Elementarladung	$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Ruhmasse des Elektrons	$m_e = 9,10963 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Vakuumllichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Atommasseneinheit	$u = 1,660566 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Comptonwellenlänge des Elektrons	$\lambda = 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Astronomische Entfernungseinheiten:

- Astronomische Einheit	$1 \text{ AE} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- Parallaxensekunde	$1 \text{ pc} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$
- Lichtjahr	$1 \text{ ly} = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Solarkonstante	$E = 1,395 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$
Hubble-Konstante	$H_0 = 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,25663706 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Spezifische Elektronenladung	$e/m = 1,7588047 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$

Wellenlängen wichtiger Spektrallinien in nm

Quecksilber	404,66	Wasserstoff	410,17	Helium	447,15
	435,83		434,05		492,19
	546,07		486,13		587,56
	576,96		656,27		667,81
	579,07	Natrium	588,995		706,52
			589,592		

Ruhmassen der Nukleonen und einiger Nuklide (als Vielfache der Atommasseneinheit)

Proton	1,0072764	Eisen (56)	55,9349
Neutron	1,0086650	Uran (235)	235,0439
Deuterium	2,014102		
Tritium	3,01649		
Helium (3)	3,01700		
Helium (4)	4,002603		
Lithium (7)	7,01600		

Kurzwort: 021256 Phys.KI12 Erg.SPS
ISBN 3-06-021256-2