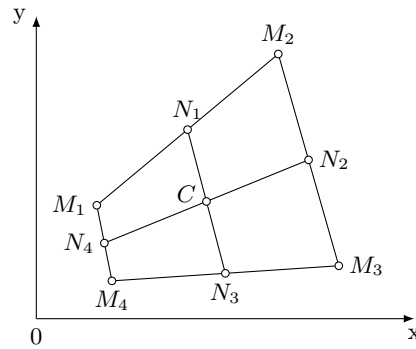


Eine Extremaleigenschaft des Schnittpunktes der Mitteltransversalen gegenüberliegender Seiten im Viereck und der Diagonalen im Parallelogramm

Mitteltransversalen gegenüberliegender Seiten im Viereck wollen wir die Strecken (Geradenabschnitte) nennen, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten verbinden.

Man kann leicht nachprüfen, dass dann folgendes gilt:

Satz: Die Mitteltransversalen gegenüberliegender Seiten im Viereck werden durch ihren Schnittpunkt halbiert.



Beweis: Es sei das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ gegeben (siehe Fig. 1). Die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte seien x_i, y_i (mit $i = 1, 2, 3, 4$). Die Seitenmitten wollen wir mit N_i bezeichnen ($i = 1, 2, 3, 4$). Ihre Koordinaten sind dann gleich:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \quad \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right) \quad \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2} \right) \quad (1)$$

Wir konstruieren die genannten Mitteltransversalen. Angenommen C sei Schnittpunkt dieser Mitteltransversalen. Seine Koordinaten sind dann

$$x_C = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad y_C = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (2)$$

Wir wollen nun annehmen, dass sich die Mitteltransversalen halbieren. Dann müssen die Koordinaten des Punktes C als der Mitte der Strecken N_1N_3 und N_2N_4 im einzelnen wie folgt lauten:

$$x_C = \frac{1}{2}(x_{N_1} + x_{N_3}) = \frac{1}{2}(x_{N_2} + x_{N_4}) \quad y_C = \frac{1}{2}(y_{N_1} + y_{N_3}) = \frac{1}{2}(y_{N_2} + y_{N_4}) \quad (3,4)$$

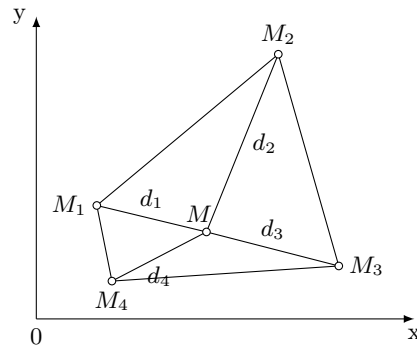
Wenn wir die Formeln (1) benutzen; können wir uns davon überzeugen, dass die Berechnungen von x_C und y_C nach den Formeln (3) und (4) zu demselben Ergebnis (2) führen; Damit ist dieser Satz bewiesen.

Die Behauptung folgt auch aus dem bekannten Satz, dass die Seitenmitten eines Vierecks Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Es ist bemerkenswert, dass der Schnittpunkt der Mitteltransversalen die folgende Extremaleigenschaft besitzt:

Satz: Der Punkt, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Eckpunkten eines Vierecks minimal wird, ist der Schnittpunkt der Mitteltransversalen gegenüberliegender Seiten in diesem Viereck.

Beweis: Wir wählen einen Punkt $M(x, y)$ und bezeichnen mit d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) seinen Abstand zu den jeweiligen Eckpunkten des Vierecks (siehe Fig. 2)



Nun bilden wir die Summe der Quadrate seiner Abstände zu den Eckpunkten:

$$I = \sum_{i=1}^4 d_i^2 = \sum_{i=1}^4 \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] \quad (5)$$

Wir suchen Punkte $M(x, y)$, für die I minimal erreicht wird. Dafür müssen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial y} = 0$$

Man erhält dann

$$\sum_{i=1}^4 (x - x_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^4 (y - y_i) = 0$$

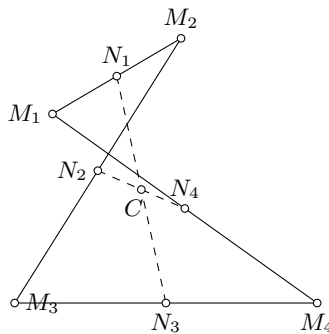
Hieraus ergeben sich die gesuchten Koordinaten

$$x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i$$

Nun wollen wir noch die hinreichende Bedingung und den Charakter des eventuellen Extremums untersuchen. Weil

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} > 0$$

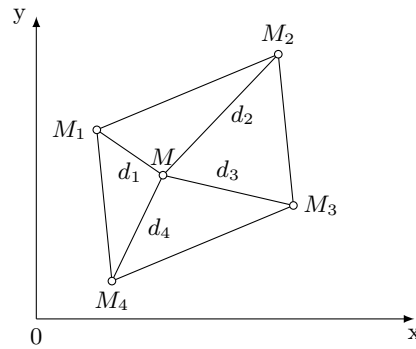
gilt, erhalten wir tatsächlich $\min I$. Wenn wir (2) und (6) vergleichen; so stellen wir fest; dass der Satz damit bewiesen ist. Das ist auch für den Fall eines entarteten (überschlagenen) Vierecks richtig, wenn sich zwei gegenüberliegende Seiten schneiden (siehe Fig. 3):



Hierbei kann auch der Fall eintreten, dass $N_2N_4 = 0$ ist. Weiterhin gilt folgendes:

Satz: Der Punkt, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu den Eckpunkten eines Parallelogramms minimal ist, ist der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogramms.

Beweis: Wir wählen wieder einen Punkt $M(x, y)$ und bezeichnen mit d_1, d_2, d_3 und d_4 seinen jeweiligen Abstand zu den Eckpunkten des Parallelogramms (siehe Fig. 4):



Die Summe I der Quadrate dieser Abstände wird durch die Beziehung (5) ausgedrückt. Analog dazu finden wir, dass die Koordinaten dieses Punktes M durch die Beziehungen (6) gegeben sind. Dabei wird $\min I$ erreicht. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass das die Koordinaten des Schnittpunktes C der Diagonalen sind. Es gilt:

$$x_C = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = \frac{1}{2}(x_2 + x_4) \quad ; \quad y_C = \frac{1}{2}(y_1 + y_3) = \frac{1}{2}(y_2 + y_4) \quad (7,8)$$

Wenn wir (7) und (8) zusammenfassen, so erhalten wir:

$$2x_C = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad ; \quad 2y_C = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (9)$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$x_C = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad ; \quad y_C = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Diese Werte stimmen mit den in der Beziehung (6) angegebenen überein. Der Satz ist damit bewiesen.

Quelle: "Mathematik in der Schule" 1963/2, Seiten 316-319
 Abschrift, Bearbeitung und LaTeX-Satz: Steffen Polster 2020
<https://mathematikalpha.de>

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons "Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland" Lizenz.

