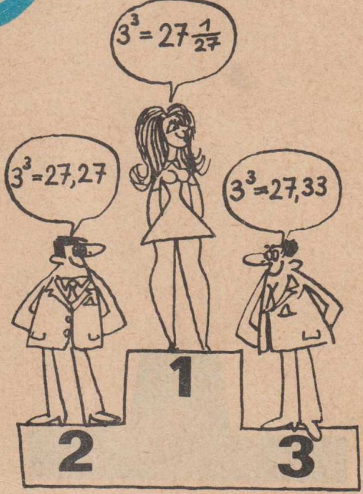
88

MATHE-AUFGABEN



3^3 plus

Spaß dabei

VERLAG LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

CQS
X

13 JAHRE MATHE + LVZ

▲ 13 Jahre Mathematik-Olympiaden in Leipzig. – Am 13. Juni 1960 ging die erste Stadtolympiade *Junger Mathematiker* zu Ende. Ein Kollektiv von Mathematiklehrern wählte aus über 200 interessierten Schülern auf Initiative und unter Leitung von StR J. Lehmann, V. L. d. V., die Besten aus, überreichte Preise sowie Urkunden und gab damit den Startschuß für eine intensive mathematische Förderung der Jugend in unserem Bezirk.

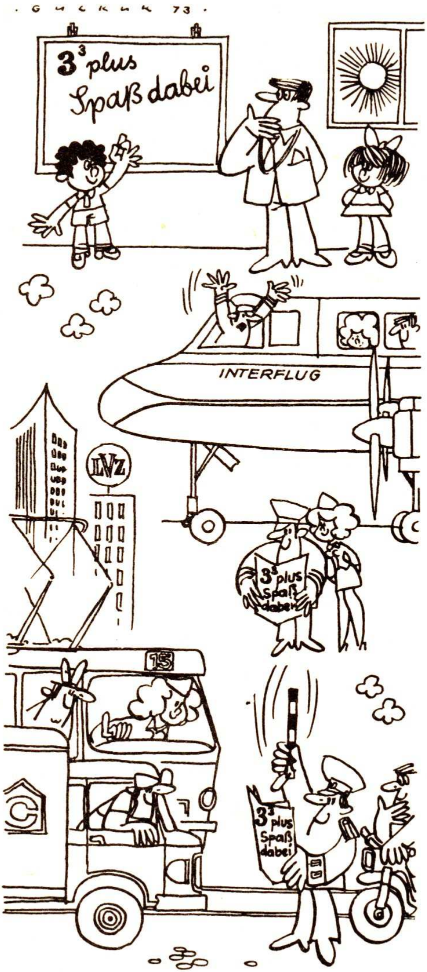
□ 13 Jahre aktive Unterstützung der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik durch die LVZ. – In ununterbrochener Folge gab die LVZ jeweils zu Ehren des Geburtstages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“ am 13. Dezember die nunmehr zur Tradition gewordene „Mathe-LVZ“ heraus (Gesamtauflage 800 000): Mit Zirkel und Rechenstab – Mathe heiter – Mathe-Rechenvorteile – Mathe unterhaltsam – Mathe-International – Mathe-Olympiaden – Mathe und Sport – Mathe Astronautik und Aeronautik – Mathe und Bauwesen – Mathe und Verkehrswesen – Mathe-Olympiade (zu Ehren der XVI. Internationalen Mathematikolympiade 1974 in der DDR).

▲100 Monate Mathe auf der Jugendseite der LVZ. – Seit über acht Jahren erscheint monatlich eine Aufgabe unter dem Motto: *Mathe-Quiz.* 100 000 Einsendungen zeugen vom großen Interesse unserer jungen Leser für die Mathematik.

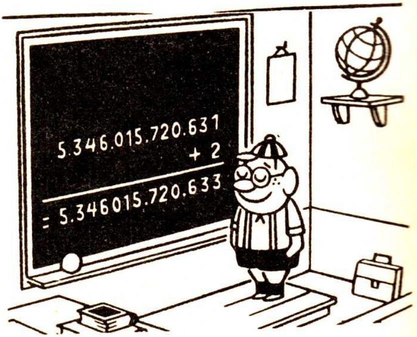
2 x 1000 Schüler auf dem Pressefest der LVZ betreut. – Jedes Jahr beteiligen sich rund 2000 Pioniere und Jugendfreunde an der Wissensstraße Mathematik, betreut vom *alpha-Club* der 29. OS Leipzig.

O Aus „Mathematik in der Schule“ (3/70) zitiert: Die LVZ hilft seit einigen Jahren in sehr anerkennungswerter Weise, den Mathematikbeschluß zu realisieren ... Sie ist m. E. die einzige Tageszeitung der DDR, die solche Initiative entfaltet ...

COS X



3³ plus Spaß dabei
INTERFLUG
LVZ
3³ plus Spaß dabei
15
3³ plus Spaß dabei



Ohne Worte

POSTLEITZAHLENSPIELEREI

Die Postleitzahlen von Suhl und Magdeburg addiert ergeben die von Karl-Marx-Stadt; die von Dresden ergibt sich, wenn man die Postleitzahl von Halle verdoppelt. Die zweifache Rostocker Postleitzahl ist gleich der Differenz der Postleitzahlen von Karl-Marx-Stadt und Halle, „4mal Karl-Marx-Stadt = 9mal Halle", und schließlich ist die zweifache Postleitzahl von Magdeburg gleich Suhl.
Zählt man alle Postleitzahlen der genannten Städte zusammen, ergibt sich 325 = Staßfurt. Wie lauten nun die Postleitzahlen der oben vorkommenden Städte?

DIETER v. BUNNAT
GERA

EIN WICHTIGER BERUF

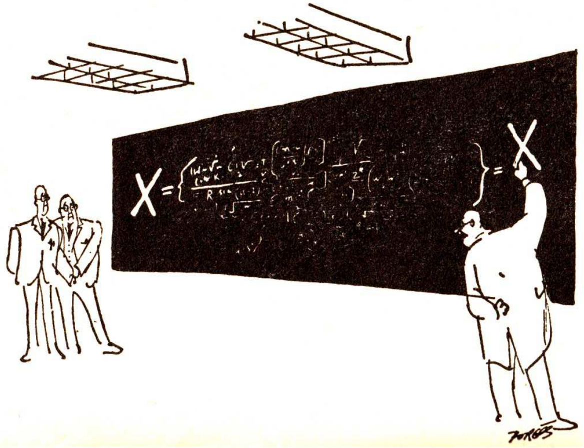
In welchem Zweig unserer Volkswirtschaft ist Herr Bumat tätig?

OBSTBAUMBESTAND

Eine Obstplantage hat einen Bestand von 480 Obstbäumen; 20 Prozent des Bestandes sind Apfel-, 30 Prozent des Bestandes Birnbäume. Die übrigen Bäume sind Pflaumen- und Kirschbäume. Mit wieviel Apfel-, Birn-, Pflaumen- und Kirschbäumen ist die Obstplantage bepflanzt, wenn sich die Anzahl der Pflaumenbäume zur Anzahl der Kirschbäume wie 1:3 verhält?

MÄHHÄCKSLER IN AKTION

Das Grünfutter eines rechteckigen Maisfeldes mit einer Länge von 360 m und einer Breite von 150 m wird mit dem Mähhäcksler abgeerntet, der eine Arbeitsbreite von 1,25 m zuläßt und in Längsrichtung arbeitet.
Wieviel Kilometer muß die Maschine zurücklegen, wenn das gesamte Feld abgeerntet werden soll und wenn für das Wenden der Maschine 2 Prozent des Gesamtweges zuzuschlagen sind?



. . . und das bringt uns genau dorthin,
von wo wir ausgegangen sind . . .

aufgepaßt – nachgedacht

(aus schriftlichen Abschlußprüfungen der DDR, Klasse 10)

1973 Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 6. Das Produkt dieser beiden Zahlen beträgt 216.
Ermittle diese beiden natürlichen Zahlen!

1972 Das Produkt aus der Differenz zweier verschiedener Zahlen und einer dritten Zahl sei gleich x.
Gib diesen mathematischen Sachverhalt in Form einer Gleichung mit Hilfe von Variablen an!

1971 Zur optimalen Auslastung des Transportraumes bei der Beförderung von Speisekartoffeln werden durch die Deutsche Reichsbahn Zielzüge eingesetzt. In einem solchen Zug laufen zwei Wagentypen mit einer Ladefähigkeit von 20 t bzw. 24 t Speisekartoffeln. Der Zug besteht aus 33 Wagen. Er befördert insgesamt 720 t Speisekartoffeln.
Berechne, wieviel Waggons des jeweiligen Typs in diesem Zug eingesetzt sind!

1970 Zwei Klassen planen eine Ferienwanderung. Für gute Leistungen im polytechnischen Unterricht erhalten sie dazu von ihrem Patenbetrieb 360 M. Dieser Betrag soll entsprechend der Schülerzahl auf beide Klassen aufgeteilt werden.
In der einen Klasse sind 26, in der anderen 22 Schüler.
a) Berechne den Teilbetrag, den jede Klasse erhält!
b) Wieviel Prozent der Gesamtsumme erhält die Klasse mit 26 Schülern?

GLEICHUNGEN – UNGLEICHUNGEN

(aus schriftlichen Abschlußprüfungen der DDR, Klasse 10)

1973 Gegeben ist die Ungleichung

$$7(3x - 2) < 3x + 22 \quad (x \in P)$$

a) Löse diese Ungleichung!
b) Gib die Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

1972 Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$\frac{8(2x + 1)}{5} < 3x + 2$$

a) Löse diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Gib folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:
1. Die Lösungsmenge L_1 obiger Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
2. Die Lösungsmenge L_2 obiger Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;

3. Die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen!

1971 Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 4x + q = 0$$

Ermittle die Lösungen dieser Gleichung für $q = 3$!
Gib für q eine solche Zahl an, daß die Gleichung eine Doppellösung (zweifache reelle Lösung) hat!

1970 Gegeben sind zwei Funktionen mit den Gleichungen

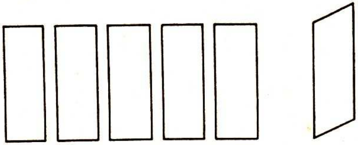
$$y = 2x$$

und $y = -x + 6$ (x reell).

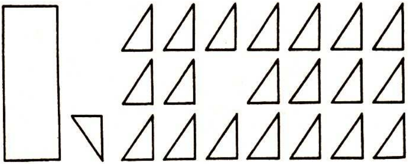
a) Die Bilder dieser Funktionen sind Geraden. Zeichne die zwei Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem! (Koordinatensystem: Einheit = 1 cm).
b) Die beiden Geraden schneiden die x-Achse in den Punkten P und Q. Gib die Koordinaten der Punkte P und Q an!

c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S der beiden Geraden!
d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQS (in Quadratzentimetern)!

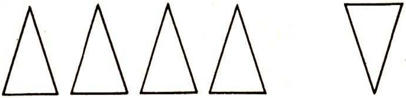
Geometrische Karrikaturen



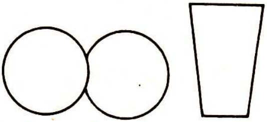
Er hatte schon immer einen Hang zum Besonderen!



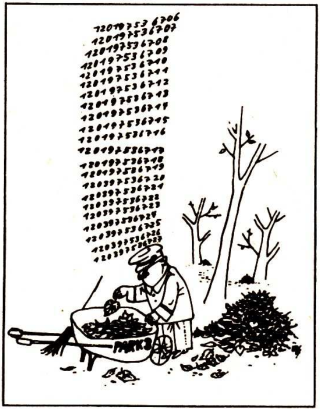
So, so – wieder mal ohne Hausaufgaben.



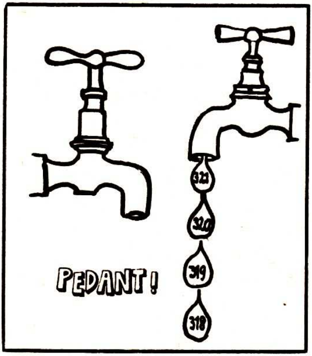
Sie will zum Ballett



Stellen wir erst einmal fest, wer Vorfahrt hatte!



Herbstzeitloser



Pedanten

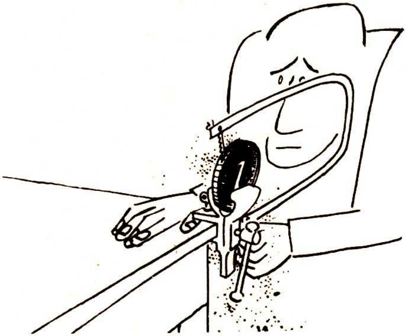
Vor- und Zuname gesucht

Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Ferner wissen wir folgendes:
a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.
b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.
c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familiennamen mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.
Welche Vor- und Zunamen haben die einzelnen Personen?

Ordnung muß sein!

Heinz, Gerd und Jochen haben sich in den Sommerferien in einem Zeltlager für Junge Pioniere kennengelernt. Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Wir wissen von diesen drei Jungen:
a) nur Heinz und der Berliner können schwimmen;
b) genau zwei dieser Jungen Pioniere, und zwar Gerd und der Leipziger, sind Handballspieler;
c) Jochen, der einzige Fußballspieler von diesen drei Freunden, ist älter als der Leipziger;
d) keiner der Jungen, die schwimmen können, spielt Fußball;
e) der Fußballspieler ist nicht der älteste von den drei Jungen.
Wo wohnen die drei Jungen, und welche Sportarten betreiben sie?
Ordne die drei Jungen nach ihrem Alter!

≈



Sparsamkeit

α Annerose hatte nach 18 Tagen erst die Hälfte ihres Taschengeldes, das sie monatlich von ihren Eltern erhielt, ausgegeben. Dies stellte sie bei einer Zwischenabrechnung fest. Bei gleichbleibender Sparsamkeit konnte sie im ganzen Monat (30 Tage) 2 Mark Ersparnisse zurücklegen.
Wieviel Mark betrug ihr monatliches Taschengeld?

β Die beiden Brüder Axel und Bernd haben fleißig gespart. In ihren Sparbüchsen befinden sich volle Markbeträge. Addiert man zur Summe ihrer Ersparnisse die Differenz ihrer Ersparnisse, so erhält man 50 Mark. Addiert man zur Differenz ihrer Ersparnisse noch die Ersparnisse von Axel und subtrahiert man danach die Ersparnisse von Bernd, so erhält man 10 Mark.
Wer der beiden Brüder hat mehr gespart, und wieviel Mark hat jeder gespart?

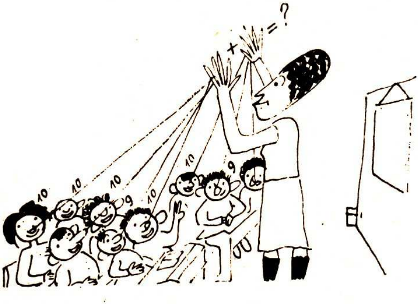
Auf Reisen geht Familie Schmitze
500 Kilometer, mit Trabant.
Dazu Beiwagenkrad (3 Sitze):
sieben Sitze insgesamt.

Opa mit dem kranken Beine
nur vorne rechts vom Fahrer sitzt,
während Oma Friederike
stets im Fond des Wagens schwitzt.

Vater, Mutter können beide
den Trabanten lenkend fahren.
Beide Söhne fahr'n Motorrad,
und das schon seit ein'gen Jahren.

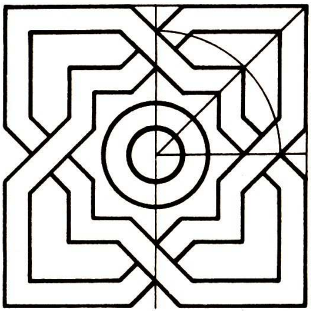
Einer davon hat vor Wochen
sich 'ne junge Frau genommen
und – nachdem man's abgesprochen –
ist diese auch noch mitgekommen.

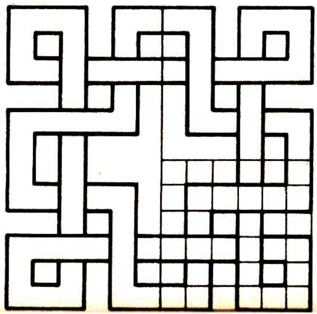
Wie oft muß nun die Familie wechseln
auf der langen Reise,
daß die Vor- und Sitznachteile
sich ausgleichen auf diese Weise?

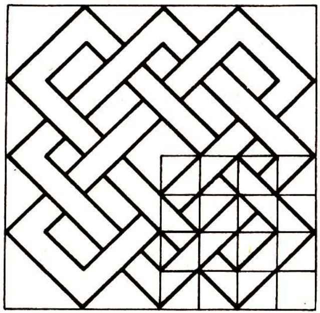


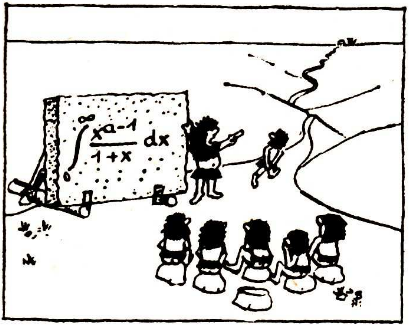
Achtung, alle im Chor!

Mach's mal nach!





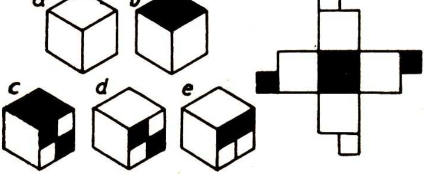




Marsch in die Ecke! In meiner Stunde gibt es keine Vorsagerei!

Würfeleien

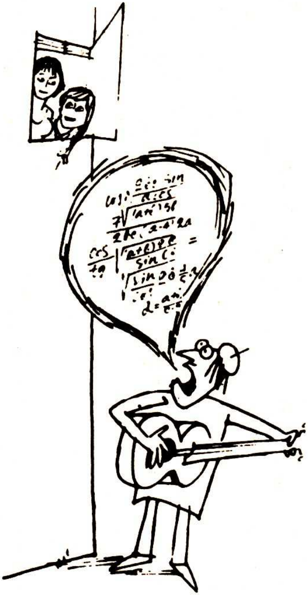
Die Abbildung links zeigt unter a bis e von fünf Würfeln je ein Schrägbild. Die Abbildung rechts zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.
Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht! (In den Fällen, in denen die Antwort „Ja" lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort „Nein" lautet, ist sie zu begründen.)



Pedanten

Marie-Luise bekommt den falschen Brief

Monika schreibt 5 Briefe und die 5 notwendigen Briefumschläge. Als die Briefe verschlossen sind, weiß sie nicht mehr genau, ob sie die Briefe richtig in die Umschläge gesteckt hat.
Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Briefe falsch einzustecken, so daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt?



Nächtlicher Spuk

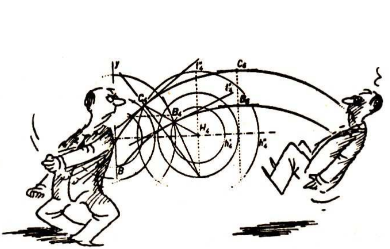
„. . . Plötzlich werde ich wach und erstaste den Knopf der Nachttischlampe. In Sekundenschnelle ist es hell. Doch gleich darauf geht das Licht aus. Endlich finde ich den Knopf der Lampe wieder. Nichts! Es bleibt dunkel. Fast verzweifelt suche ich meine unverwüstliche Taschenlampe. Erst gestern habe ich sie benutzt. Ich taste sogar mit dem Zeh nach ihr und reiße mir dabei einen Splitter ein . . .“
Im vorliegenden Text verbergen sich mehrere Zahlwörter. Wie lauten sie? Zur Kontrolle sei angegeben, daß die Summe der Zahlen, die sie darstellen, 1151 beträgt.

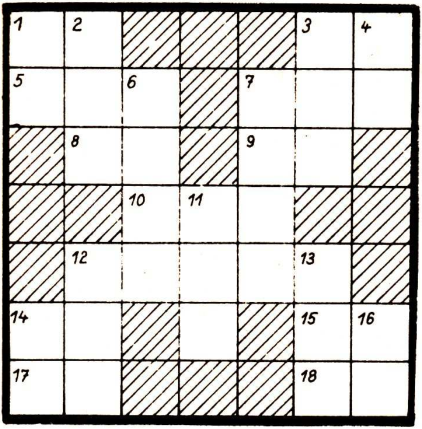
Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 17 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben ergeben einen aktuellen Begriff.

a-a-ab-ad-bel-ble-bruch-bus-chun di-di-eck-ein-el-ex-gen-gen-gen-gens-glei-glei-go-heit-in-le-le-lip-lung-mal-na-nent-nor-null-pa-po-ra-recht-rhom-ri-schach-se-stand-stel-tan-tan-te-te-ter-tion-un-va-vall

1. Eine Strecke, die 2 beliebige, nicht nebeneinanderliegende Eckpunkte eines n-Eckes verbindet. $(n > 3)$; 2. Rechenart; 3. Winkelfunktion; 4. Die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Entfernung von 2 festen Punkten konstant ist. 5. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse; 6. Allgemeines Symbol; 7. Wie nennt man n bei der Potenz a^n? 8. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel; 9. Entfernung zweier Punkte; 10. Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind; 11. Aus Zähler und Nenner bestehende Zahl; 12. Teil von Größenangaben; 13. Verfahren zur Einschließung einer Lücke; 14. Gerade, die den Kreis berührt; 15. Ausdrücke, in denen die Zeichen „ $<$ “, „ $>$ “, „ $\leqq$ “, „ $\geqq$ “ vorkommen; 16. Bild der Funktion $y = x^2$; 17. Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen „ = “ vorkommt.





KREUZZAHLENRÄTSEL

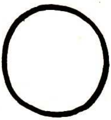
Waagerecht: 1. Teiler von $(10^5 - 1)$; 3. Eine „vollkommene Zahl"; 5. Vielfaches von 1. waagerecht; 7. Produkt von 9. waagerecht und 14. senkrecht; 8. Produkt von 2 Primzahlen; 9. Kubikzahl; 10. Vierte Potenz einer ganzen Zahl; 12. Das um 1 vermehrte Produkt der ersten 6 Primzahlen; 14. Quadrat der Quersumme von 8. waagerecht; 15. Produkt von 2 Primzahlen; 17. Teiler von $(10^4 + 1)$; 18. Teiler von $(10^{13} - 1)$.

Senkrecht: 1. Quadrat der Quersumme von 12. waagerecht; 2. Teiler von $(10^4 - 1)$; 3. Vielfaches von 9. waagerecht; 4. Primzahl, 6. Kleinstes gemeinsames Vielfaches der ganzen Zahlen 1 bis 10; 7. Eine um 2 vermehrte Kubikzahl; 11. Vielfaches einer Quadratzahl; 13. Teiler von $(10^4 + 1)$; 14. Primzahl; 16. Teiler von 7. senkrecht (oder: Teiler von 12. waagerecht).

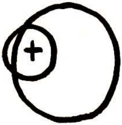
$\boxed{\%}$

ALLE AUFGABEN RICHTIG?

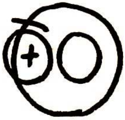
Eine Klasse schrieb eine Leistungskontrolle. Genau ein Drittel der beteiligten Schüler hatte eine Aufgabe falsch, genau ein Viertel hatte zwei Aufgaben und genau ein Sechstel drei Aufgaben falsch; genau ein Achtel hatte alle vier Aufgaben falsch. Wie viele Schüler hatten alle Aufgaben richtig gelöst, wenn dieser Klasse nicht mehr als 30 Schüler angehören?



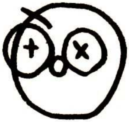
Null . . .



plus Null . . .



minus Null . . .



multipliziert mit Null . . .

minus Wurzel aus Null . . .

das Ganze geteilt durch Null

GESUCHT a

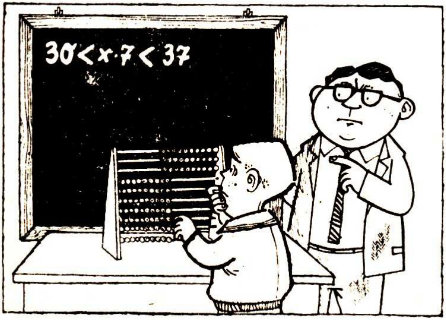
Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

GESUCHT n

In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „2“ und jeder sechste die Zensur „4“. Über die Schülerzahl n ist bekannt:

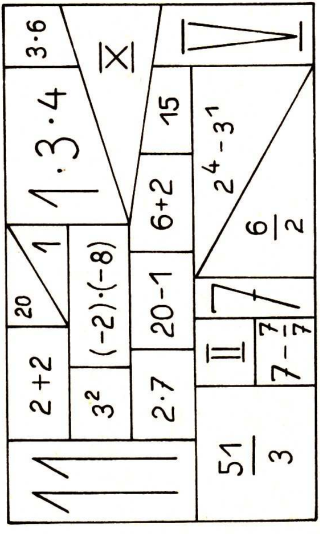
$$20 < n < 40.$$

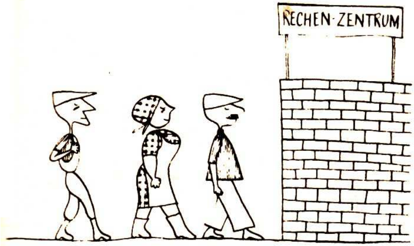
Wieviel Schüler erhielten die Zensur „3“?



TEST FÜR „ADLERAUGEN“

In jedem Feld steht eine Zahl oder ein Term. Sie sind den Zahlen von 1 bis 20 äquivalent.
Wer zählt am schnellsten von 1 bis 20? Das entsprechende Feld muß dabei gezeigt werden. Wer weniger als 60 Sekunden braucht, hat ein scharfes Auge!

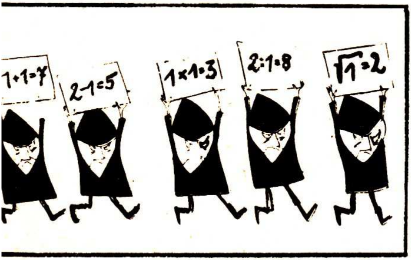


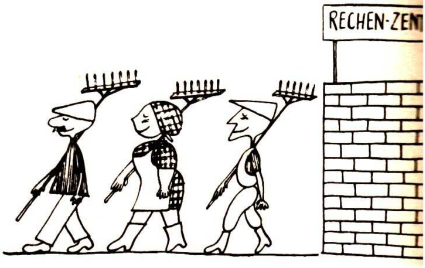


Drehwitz

γ Zerlegt die Zahl 45 so in vier Summanden, daß alle Resultate gleich sind, wenn ihr zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten 2 subtrahiert, den dritten mit 2 multipliziert und den vierten Summanden durch 2 dividiert.

Drehwitz



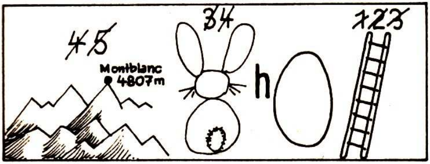


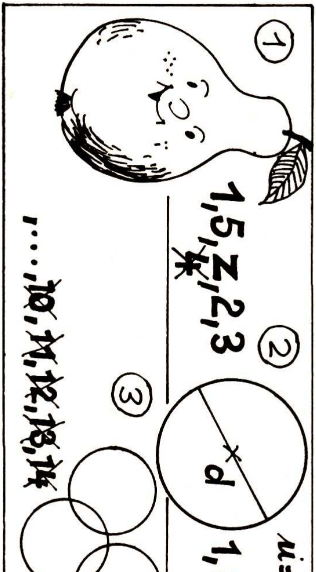
Drehwitz

δ Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
a) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.
b) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

Drehwitz

BILDERRÄTSEL

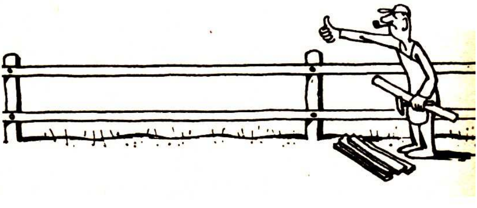




123456789

Zusammenhänge finden!

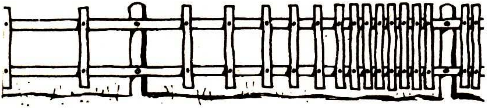
Es sind Begriffe zu finden, die mit der Ziffer in Zusammenhang stehen, in die sie eingesetzt werden müssen:
1 spezielle Menge; 2 Positionssystem zur Basis 2; 3 dreigliedriger Ausdruck; 4 Viereck mit 4 gleichen Seiten; 5 erstrebenswert im Lotto; 6 Musikstück für Gesangsstimmen; 7 der 7. Monat im römischen Kalender; 8 regelmäßiger Körper mit 8 kongruenten Seitenflächen; 9 ein spezielles Vieleck.



RÖSSELSPRUNG

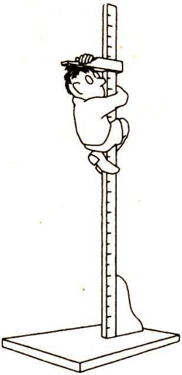
Die Lösung ist eine aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannte Definition.

	pez	je	nem	xe	
des	ei	ge	tra	pa	paar
gen	heißt	der	ve	len	vier
an	kon	mit	ten	zu	ral
	sei	ein	le	eck	



4

KONKRET



Ich bin Spezialist für Turmbau!

ABSTRAKT

(aus schriftlichen Abschlußprüfungen der DDR, Klasse 10)

ϵ Gib den Wert für die Variable a an, für den der Term $\frac{5}{6-3a}$ nicht definiert ist!

ζ Vereinfache so weit wie möglich!
$$5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2} \quad (k \geq 0,\ k \text{ reell})$$

η Forme nach a um!
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = b \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ a,\ b \text{ reell})$$

ϑ Bestimme x und y!
$$3ax + y = 7a$$
$$ax + y = 3a \qquad (a \text{ reell},\ a \neq 0)$$

ι Löse nach t auf!
$$s = p + p \cdot k \cdot t \qquad (p \neq 0,\ k \neq 0)$$

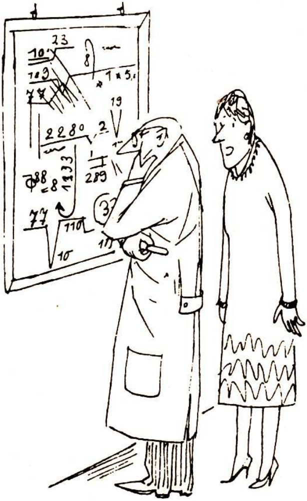
κ Bestimme d!
$$d : (d-2) = 4 : 3$$

λ Vereinfache!
$$\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54}$$

μ Löse folgende Gleichungen!
$$26 - (x+3)^2 = (x-1)^2$$
$$2x^2 + ax - a^2 = 0$$
$$4x^2 = 2 - 7x$$

γ Kürze den Bruch, und gib an, welchen Wert a in dem gegebenen Bruch nicht annehmen darf!
$$\frac{4a^2 - 1}{2a + 1}$$

ξ Fasse folgende Summe zusammen!
$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \qquad (a \neq -b;\ a \neq b)$$



„An was denkst du, Liebster?"

NACHGEDACHT – MITGEMACHT

Schriftliche Reifeprüfung, Fach Mathematik, Schuljahr 1972/73

PFLICHTAUFGABEN

1. Bei einer gemeinsamen Übung der Luft- und Seestreitkräfte unserer NVA ortet eine Radarstation der Küstenüberwachung ein Schiff nacheinander in den Punkten P_1 (30; 12; 0) und P_2 (22; 8; 0).
Der Kurs des Schiffes verlaufe geradlinig.
Zur Bekämpfung des Schiffes wird von einem Flugzeug aus im Punkt P_3 (10; 7; 3) eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen. Die Flugbahn der Rakete wird als geradlinig angenommen.
Richtungsvektor dieser Flugbahn ist $\mathfrak{a} = 6\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$.
(Koordinatenangabe in km)
a) Ermitteln Sie je eine Parametergleichung für den Schiffskurs und für die Flugbahn der Rakete!

b) Das Schiff wird von der Rakete im Punkt S getroffen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bahn der Rakete und dem Kurs des Schiffes!
d) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihre Flugzeit vom Abschußpunkt bis zum Treffpunkt 7 Sekunden beträgt?

2. Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Konstruieren Sie außer den Scheitelpunkten mindestens acht Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie die Ellipse!
b) Berechnen Sie die Länge der Sehne, die in einem Brennpunkt dieser Ellipse auf der x-Achse senkrecht steht!
c) Die Brennpunkte der Ellipse seien Scheitelpunkte einer Hyperbel. Eine Asymptote dieser Hyperbel hat den Anstieg $m = \sqrt{3}$.
Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel an!

3. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$y = f(x) = \sin 2x \qquad (x \in P).$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$!
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1\left(\frac{\pi}{2}; y_1\right)$!
c) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx!$$

4. Durch die Gleichung

$$y = f(x) = e^x(x^2 - a) \qquad (x \in P; a \in P)$$

sind nichtrationale Funktionen gegeben.
a) Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung!
b) Für $a = 3$ hat das Funktionsbild zwei lokale Extrempunkte.
Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes!
c) Weisen Sie nach, daß die Funktionen für $a < -1$ keine Extrema haben!

WAHLAUFGABEN

1. Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \qquad (x \in P) \text{ und}$$

$$y = g(x) = \ln \frac{x}{2} \qquad (x \in P;\ x > 0).$$

a) Ergänzen Sie die vorgegebene Wertetafel für y = g(x)!

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$
y			− 0,69	

b) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im Intervall $0{,}5 \leqq x \leqq 4{,}0$ in einem Koordinatensystem!

c) Schneidet eine Parallele zur y-Achse die Bilder der Funktion f und g in je einem Punkt, so stellt

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie diejenige Abszisse x_E für die dieser Abstand minimal wird!
Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

2. Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung

$$y^2 = 6x.$$

a) Konstruieren Sie mindestens sechs Punkte dieser Parabel!
Zeichnen Sie diese Parabel im Intervall

$0 \leqq x \leqq 7$!

b) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an diese Parabel im Punkt P_1 (6; 6) auf!

c) Durch den Brennpunkt F dieser Parabel verläuft eine Gerade, die senkrecht auf der unter b) bestimmten Tangente steht.
Stellen Sie die Gleichung dieser Geraden auf!

d) Für jede Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ gilt:
Die Tangente an die Parabel in einem beliebigen Punkt P_o $(x_o;\ y_o)$ mit $x_o \neq 0$ schneidet die y-Achse im Punkt $A(0; \frac{y_o}{2})$.
Weisen Sie nach, daß die Gerade durch A und F auf dieser Tangente senkrecht steht!

3. Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in P;\ x \neq 1).$$

a) Berechnen Sie die Stellen x_1 und x_2, an denen die erste Ableitung dieser Funktion den Wert 1 hat!

b) Weisen Sie nach, daß die Funktion f an der Stelle

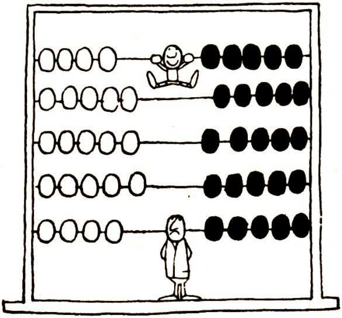
$x_0 = \frac{3}{2}$ lokal monoton wachsend ist!

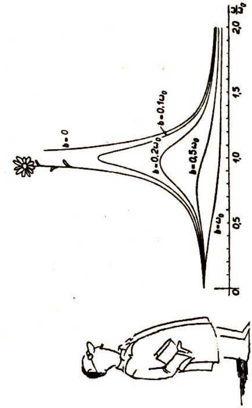
c) Bilden Sie die 2., die 3. und die 4. Ableitung der Funktion!

Geben Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ an!

(Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Fakultätschreibweise zu verwenden.)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß diese Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ richtig ist!





VOLLSTÄNDIGE ANLEITUNG ZUR ALGEBRA

Im Jahre 1770 gab *Euler,* der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus. Dieses Lehrbuch erschien zunächst in russischer Sprache in Petersburg, dem heutigen Leningrad, und wurde in viele Sprachen übersetzt. Das Buch war mehr als 100 Jahre lang eines der beliebtesten und meistgelesenen Lehrbücher. Es enthält zahlreiche schöne Aufgaben, leichtere und schwerere. In einer etwas modernisierten Fassung geben wir einige wieder:

θ Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1 000 Talern. Nach seinem Testament soll der erste Sohn 200 Taler mehr erhalten als der zweite, der zweite aber 100 Taler mehr als der dritte. Wieviel Taler erhält jeder der drei Söhne?

π Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere Summand 49 mal so groß wie der kleinere Summand ist.

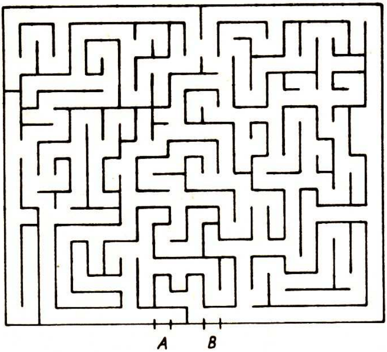
ς Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit einem Drittel multipliziert 24 ergibt.
Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

δ Zwei Bäuerinnen besitzen zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 8 teile, verbleibt ein Rest von 7." Da erwiderte die andere: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 10 teile, verbleibt noch ein Rest von 7."
Wieviel Eier besitzt jede Bäuerin?
Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

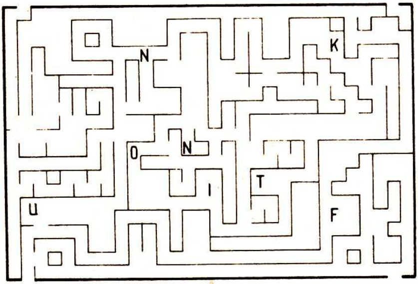
τ Man suche zwei positive reelle Zahlen mit den folgenden Eigenschaften: Die Summe dieser beiden Zahlen ist gleich ihrem Produkt und außerdem gleich der Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen.

υ Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1 770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen 21 Taler. Wieviel Pferde und wieviel Ochsen sind es gewesen?
Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

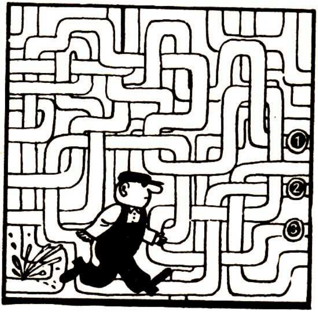
IRRGÄRTEN



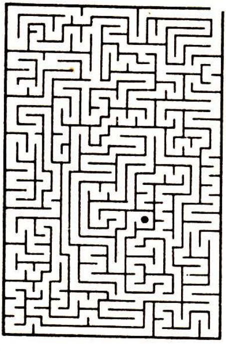
Wer findet den kürzesten Weg von A nach B?



Von einem der vier Eingänge führt ein Weg über alle angeführten Buchstaben zu einem anderen Ausgang. Bei richtiger Lösung findet ihr einen wichtigen mathematischen Begriff!



Bei Krauses gab es einen Rohrbruch. Herr Krause läuft so schnell er kann in den Keller, um den Haupthahn zu schließen. In seiner Aufregung betätigt er den falschen Hahn, und das Wasser schießt weiter aus der defekten Stelle im Rohr. Könnt Ihr helfen? Welchen der drei Hähne muß er schließen?



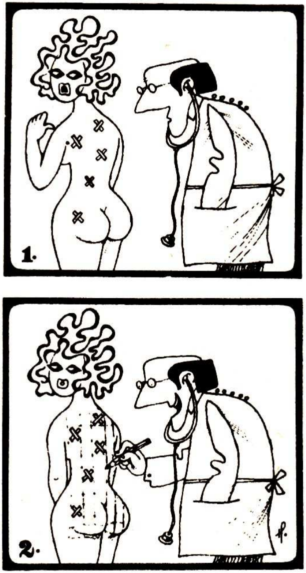
Der Engländer *W. W. Rouse Ball* hatte sich in seinem Garten ein mehrfach zusammenhängenden Garten gebaut. Das Ziel ist der Punkt im Innern des Labyrinths.

x Wieviel Tipscheine müßten ausgefüllt werden, um bei der Wettart „6 aus 49" mit Sicherheit „im ersten Rang" zu gewinnen?

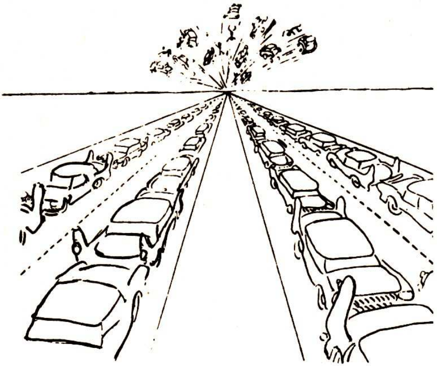
ψ In einer Schule sollten insgesamt 4 Fußballspiele ausgetragen werden. Dabei wurde vom Sportlehrer auch eine Wette nach dem System des VEB-Fußballtoto ausgeschrieben 1 0 2.
Fritz wollte unbedingt gewinnen und überlegte sich die Anzahl der möglichen Spielausgänge.
Wieviel Tipscheine müßte er abgeben?

φ Die Klasse 8 hat montags 2 Stunden Mathematik, 2 Stunden Deutsch und je 1 Stunde Russisch und Physik.
Wieviel Möglichkeiten für den Stundenplan gibt es, wenn das Physikzimmer für die Klasse 8 nur in der ersten Stunde frei ist?

ω Jörg fragt Monika, welche Zahlen sie bei „6 aus 49" getippt hat. Sie antwortet: „Die Summe der getippten Zahlen beträgt 175. Die zweite Zahl ist um fünf größer als die erste, die fünfte um zwei größer als die vierte. Die dritte Zahl ist eine Primzahl, größer als 20 und kleiner als 30. Die sechste Zahl ist dreimal so groß wie die erste. Die Summe der ersten und zweiten Zahl ist gleich der vierten."
Welche Zahlen hat Monika getippt?



lg



• Ein Kleinkraftrad-Fahrer möchte einen Traktor mit zwei Anhängern überholen. Das Kleinkraftrad fährt 50 km · h^{-1}, der Traktor 30 km · h^{-1}. Beide Fahrzeuge fahren während des Überholvorganges mit gleicher Geschwindigkeit weiter. Der Überholvorgang berechnet sich dann nach der Formel

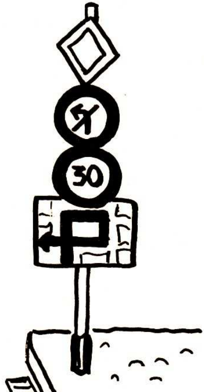
$$s_ü = \frac{L \cdot v2}{V_1 - V_2}$$

Anleitung: Der Sicherheitsabstand l_1 (in m) des Kleinkraftrades zum vorausfahrenden Traktor vor und nach dem Überholen sei gleich der halben Maßzahl der gefahrenen Geschwindigkeit. Das Kleinkraftrad weist eine Länge von 2 m und der Traktorzug eine Gesamtlänge l_2 von 20 m auf.

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_1 \text{ (in m)}$$

■ Bei einer Geschwindigkeitskontrolle durch die Verkehrspolizei durchfuhr ein PKW innerhalb einer geschlossenen Ortschaft (keine Schnellstraße) die Meßstrecke S von 200 m in einer Zeit von 11 Sekunden. Verhielt sich der Kraftfahrer entsprechend der Verkehrsordnung?

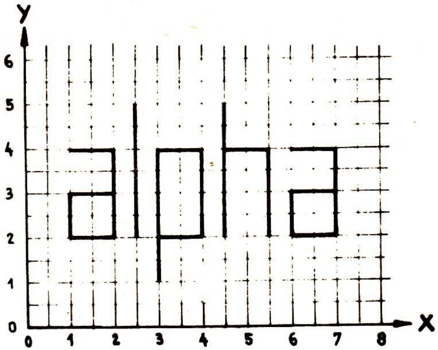
▲ Ein Motorradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf eine Mauer zu. Im Abstand D von der Mauer gibt er ein kurzes Hupsignal. Das reflektierende Signal empfängt er, nachdem er $\frac{1}{9}$ der Strecke D zurückgelegt hat. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Motorradfahrers, wenn die Schallgeschwindigkeit $V_s = 340 \frac{m}{s}$ ist?



■ Ein Kraftfahrer schaut auf den Kilometerzähler und stellt fest, daß sein Fahrzeug 15 951 km zurückgelegt hat. Er erkennt, daß 15 951 eine symmetrische Zahl ist (die erste Ziffer ist gleich der letzten, die zweite Ziffer ist gleich der vorletzten) und glaubt, daß eine weitere symmetrische Zahl nicht so bald wiederkommt. Doch nach genau 2 Stunden Fahrt sieht er auf dem Kilometerzähler wieder eine symmetrische Zahl.

a) Wie lautet die zweite symmetrische Zahl?

b) Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit ist er gefahren?



Ein Kunstwerk
Nenne zur gegebenen graphischen Darstellung alle Funktionsgleichungen, deren Definitionsbereiche und Wertebereiche!

alpha-Wettbewerb
Pro Heft gingen im Schuljahr 1972/73 rund 13 000 Lösungen in der Redaktion ein.

Aufgabe:
An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* wurden insgesamt 25 Antwortkarten „sehr gut gelöst“ von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte. Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, daß mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielten. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt. Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

Wer alpha liest, kann auch beta sagen!

$$\begin{array}{rr} & ALPHA \\ + & MATHE \\ \hline & HEITER \end{array}$$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern. Setze die Ziffern 0, 1, ..., 7, 8 so ein, daß eine wahre Aussage entsteht. Wieviele Lösungen sind möglich?

$\sqrt{ALPHA} = HHA$

$PPP \cdot PPP = ALPHA$

$\left| \begin{array}{l} (XY)^Y = ALPHA \\ X + Y = A \end{array} \right.$

$(AX)^3 = ALPHA$

$$\begin{array}{l} \underline{A\sqcup\sqcup \cdot A\sqcup\sqcup} \\ A\sqcup\sqcup \\ \quad \sqcup A \sqcup \\ \quad\;\; \underline{A\sqcup\sqcup A} \\ ALPHA \end{array}$$

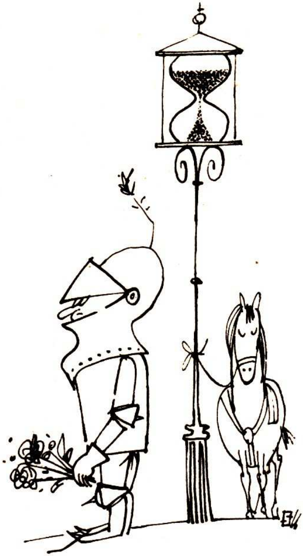
(In dieser Aufgabe kommt kein weiteres A vor.)

---

alpha ist *die* mathematische Schülerzeitschrift der DDR, die 60 000 interessierte Schüler (ab Klasse 5), aber auch Erwachsene anspricht.
Einen Teil der in „3^3 plus Spaß dabei" enthaltenen Aufgaben ist *alpha*, den Mathe-LVZ's und schriftlichen Abschlußprüfungen der DDR (OS und EOS) entnommen. Wer Lust hat, kontinuierlich weiter zu knobeln, bestelle alpha bei seinem zuständigen Postamt (Best.-Nr. Index 31 059).
Erscheinungsweise zweimonatlich (1 Heft), 0,50 Mark

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

RUND UM DIE UHR



X Der große Zeiger einer Uhr ist 12 cm lang.
Berechne den von der Spitze des großen Zeigers zurückgelegten Weg, wenn
a) eine Stunde,
b) 15 Minuten,
c) 5 Minuten,
d) 35 Minuten vergangen sind.

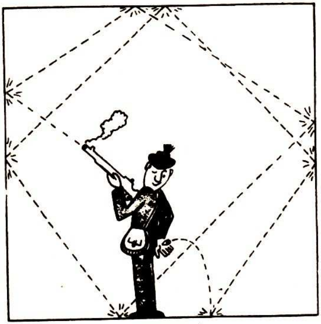
L Jürgen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf seinem Motorroller vom Ort A nach dem Orte B. Nachdem Jürgen den vierten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt hatte, zeigte seine Armbanduhr die Uhrzeit 6.45 Uhr an. Um 6.55 Uhr hatte Jürgen bereits den dritten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt.
a) Um wieviel Uhr startete Jürgen in A?
b) Um wieviel Uhr traf er in B ein?

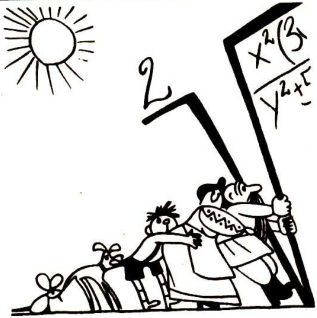
I Eine Turmuhr schlägt um 5 Uhr fünfmal und braucht zu diesen Schlägen 5 Sekunden Zeit.
Wieviel Zeit braucht diese Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr?

C Zwei Kerzen gleicher Länge sind aus verschiedenen Rohstoffen hergestellt. Werden beide Kerzen zur gleichen Zeit angezündet, so brennt die eine in drei, die andere in vier Stunden völlig ab. Um welche Uhrzeit müssen beide Kerzen zugleich angezündet werden, so daß um 16 Uhr ein Kerzenstumpf doppelt so lang wie der andere ist?

a) 13.24 Uhr b) 13.28 Uhr c) 13.36 Uhr
d) 13.40 Uhr e) 13.48 Uhr

UNSINN IM QUADRAT

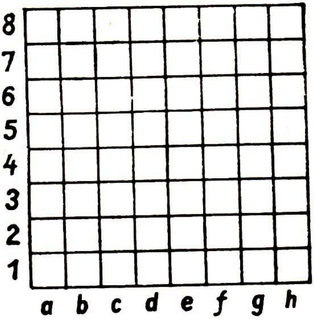




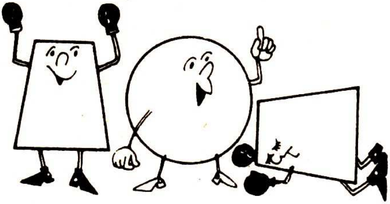
Ø

2^1	2^2	2^3
2^4	2^5	2^6
2^7	2^8	2^9

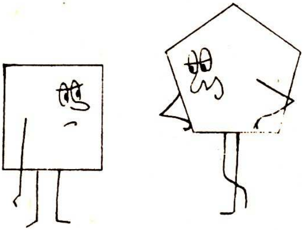
D Die Potenzen 2^1, 2^2 …, 2^9 sind so in das Quadrat einzutragen, daß in jeder Spalte, Reihe und Diagonale das Produkt 32 768 erscheint.



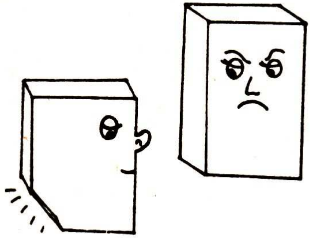
M Die nebenstehende Zeichnung stellt ein Schachbrett dar. Es besitzt bekanntlich 64 Felder. Jedes Feld stellt ein Quadrat dar. Nun bilden z. B. die vier Felder (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), oder die neun Felder (3, b), (3, c), (3, d), (4, b), (4, c), (4, d), (5, b), (5, c), (5, d) ebenfalls Quadrate, usw.
Wieviel Quadrate dieser Art gibt es auf dem Schachbrett?



. . . 8-9-10 . . . aus!



Sie sollten sich auch qualifizieren!



Wie oft habe ich dir schon gesagt, daß du das Treppengeländer nicht hinabrutschen sollst!

KRYPT-
ARITHMETIK

```
AB +  C = AC
 +    +    -
 C -  D =  A
 +    +    -
 D +  E = AB
------------
AF - AC =  D
```

```
  ABCDE        OPA
+ EDCBA      + OMA
-------      -----
  FFFFF       PAAR
```

```
2 * * : * * = * *
* 7
---
* 1 *
* * *
-----
    0
```

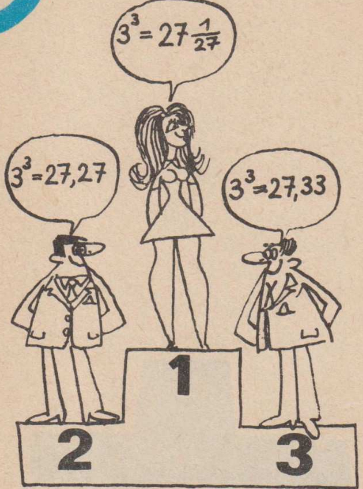
```
○ □ △ : ▯ = ◺ ⊗
  :     :     :
  ◿ △ : ○ =   ⊠
-----------------
  ⊗ ◿ : ○ =   □
```

WER IST DER TÄTER?

Sieben Mathe-Lehrer stehen in Verdacht, das vorliegende Heft „3 x 3 + Spaß dabei" zusammengestellt zu haben. „Täter" ist derjenige, von dem sich mit absoluter Sicherheit sagen läßt, wie er mit Vor- und Zunamen heißt. Einer heißt mit Zunamen Schulze, zwei heißen Meier und vier heißen Lehmann. Einer hört auf den Vornamen Peter, einer auf Günter, einer auf Heinz und vier haben den Vornamen Johannes. Wie heißt der Täter? (Unser Zeichner, K.-H. Guckuk, hat ihn für unsere Leser gezeichnet.)

88

LÖSUNGEN



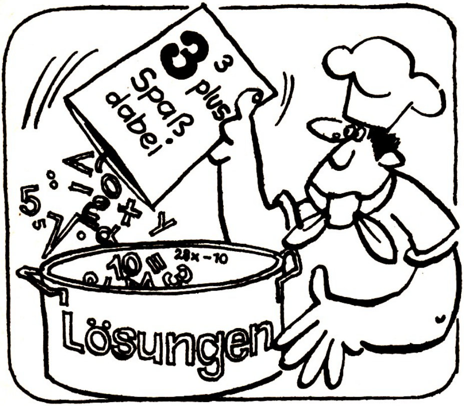
3^3 plus Spaß dabei

VERLAG LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

sin x

MATHEMATISCHE ZEICHEN

$=$	ist gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\neq$	nicht gleich, ungleich
$\sim$	proportional, ähnlich
$\approx$	angenähert, rund
$\triangleq$	entspricht
$<$	kleiner als
$>$	größer als
$\leqq$	kleiner oder gleich, höchstens gleich
$\geqq$	größer oder gleich, mindestens gleich
$+$	plus
$-$	minus
$\%$	Prozent
$^0/_{00}$	Promille
∞	unendlich
$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf
$\parallel$	parallel
$\nparallel$	nicht parallel
$\triangle$	Dreieck
$\cong$	kongruent
$\sphericalangle$	Winkel
AB	Gerade AB
$\overrightarrow{AB}$	gerichtete Strecke
$\overline{AB}$	Strecke AB
$\overset{\frown}{AB}$	Bogen AB
$\lvert z \rvert$	Betrag von z
$n!$	n Fakultät
$\to$	gegen, strebt nach, konvergiert nach
Σ	Summe
$\sqrt{}$	Wurzel
lg	Zehnerlogarithmus
ln	natürlicher Logarithmus
$\in$	Element aus
$\notin$	nicht Element aus
$\subseteq$	enthalten in
$\emptyset$	leere Menge
$\Rightarrow$	wenn ..., so...
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn
sin	Sinus
cos	Kosinus
tan	Tangens
cot	Kotangens
$\{a_n\}$	Folge a_n
lim	Limes (Grenzwert)
Δf	Delta f
$\ll$	liegt vor


3
3 plus
Spaß dabei
28x − 10
Lösungen

≡

= Postleitzahlenspielerei

Es ergeben sich folgende Gleichungen mit den Lösungen:

$$a + b = c$$
$$2e = d$$
$$c - e = 2f$$
$$4c = 9e$$
$$2b = a$$

Suhl ≙ $a = 60$

Magdeburg ≙ $b = 30$

Karl-Marx-Stadt ≙ $c = 90$

Dresden ≙ $d = 80$

Halle ≙ $e = 40$

Rostock ≙ $f = 25$

$$a + b + c + d + e + f = 325$$

Ein wichtiger Beruf

Herr Bunnat ist in der Datenverarbeitung tätig.

≡ Obstbaumbestand

Aus $x : 20 = 480 : 100$ folgt
$\underline{\underline{x = 96}}$

Aus $y : 30 = 480 : 100$ folgt

$\underline{\underline{y = 144}}$

Es sind 96 Apfel- und 144 Birnbäume angepflanzt.

Aus $a + b = 240$

und $a : b = 1 : 3$ ergibt sich $\underline{\underline{a = 60, b = 180}}$

Es sind 60 Pflaumen- und 180 Kirschbäume.

Mähhäcksler in Aktion

In Längsrichtung erfolgen 120 Fahrten.

360 m . 120 = 43 200 m   2 % davon $\hat{=}$ 864 m

44 064 m, das sind rund 44 km Fahrstrecke.

≠aufgepaßt – nachgedacht

1973 $\left| \begin{array}{l} x - y = 6 \\ xy = 216 \end{array} \right|$ $y = x - 6$ $x; y \in N$

$x(x - 6) = 216$ $\underline{\underline{y_1 = 12}}$

$\underline{\underline{y_2 = -18}}$

$x^2 - 6x - 216 = 0$

$x_{1;2} = +3 \pm \sqrt{9 + 216}$

$\underline{\underline{x_1 = 18}}$

$\underline{\underline{x_2 = -12}}$

Die Lösungsmenge ist x = 18 und y = 12.

1972 $(a - b)c = x$

1971 $\left| \begin{array}{l} x + y = 33 \\ 20x + 24y = 720 \end{array} \right|$ $\begin{array}{l} x = 33 - y \\ \underline{\underline{x = 18}} \end{array}$

$20(33 - y) + 24y = 720$ $\underline{\underline{y = 15}}$

Es sind 18 Waggons zu 20 t und 15 Waggons zu 24 t eingesetzt.

1970   a) 1. Klasse 26x   2. Klasse 22x

$26x + 22x = 360$

$\underline{\underline{x = 7{,}5}}$

Die 1. Klasse erhält 195 M, die 2. Klasse 165 M.

b) $x : 100 = 195 : 360$

$\underline{\underline{x = 54{,}2}}$

Die 1. Klasse erhält 54,2 % der Gesamtsumme.

$\boxed{<}$

< Gleichungen – Ungleichungen

1973 $7(3x-2) < 3x+22$

$21x - 14 < 3x + 22$

$\underline{\underline{x < 2}}$ $L = \{0;1\}$

1972 a) $\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$

$8(2x+1) < 5(3x+2)$

$\underline{\underline{x < 2}}$ $L = \{x \mid x < 2\}$

b) $L_1 = \{0;1;2\}$

$L_2 = \{-3;-2;-1;0\}$

$M = \{0\}$

1971 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_{1;2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$

$\underline{\underline{x_1 = -1}}$

$\underline{\underline{x_2 = -3}}$

in $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

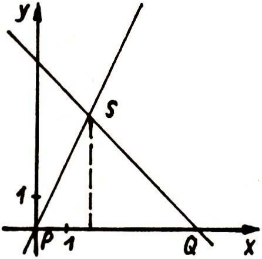
gilt:

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

$q = \frac{p^2}{4}$

$\underline{q = \frac{16}{4} = 4}$

1970 a)



b) P(0;0) Q(6;0)

c) $2x = -x + 6 \qquad y = 2x$

$\underline{\underline{x = 2}} \qquad \underline{\underline{y = 4}} \qquad S(2;4)$

$A = \frac{gh}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{12}}$

Der Flächeninhalt des Dreieckes PQS beträgt 12 cm^2.

Δ Vor- und Zuname gesucht

Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunamen bezeichnet. Für unbekannte Zunamen sei X, Y und Z gesetzt. Dann ergibt sich wegen c) der folgende Sachverhalt: BX, XY, YD. Wäre X = D, so müßte auch Y = D sein. Dann bliebe für die beiden anderen Personen nur die Kombination AC, CA übrig, was wegen b) ausgeschlossen ist. Daher ist $X \neq D$, und wegen a) gilt $X \neq B$, $Y \neq D$. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin $X \neq B$ gilt, ist wegen b) nur X = A, Y = C, Z = B möglich. Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

Ordnung muß sein!

Aus a) folgt: Heinz wohnt nicht in Berlin; er wohnt entweder in Leipzig oder in Rostock. Aus b) folgt: Gerd wohnt nicht in Leipzig; er wohnt entweder in Berlin oder in Rostock. Aus c) folgt: Jochen wohnt nicht in Leipzig; er wohnt entweder in Berlin oder in Rostock. Aus d) folgt: Jochen kann nicht schwimmen; also wohnt er nicht in Berlin.

Daraus folgt: Jochen wohnt in Rostock; Gerd wohnt in Berlin und Heinz in Leipzig. – Heinz und Gerd können beide schwimmen; sie spielen beide Handball. Jochen spielt nur Fußball. Heinz ist jünger als Jochen, aber wiederum jünger als Gerd.

≈ Sparsamkeit

α Das Taschengeld hätte bei gleichbleibender Sparsamkeit für 36 Tage gereicht. Da es nur für fünfzehn Tage bestimmt war, wurde der sechste Teil des Taschengeldes eingespart, das waren 2 M. Folglich beträgt Anneroses Taschengeld 6 . 2 M, das sind 12 M.

β Axel habe a Mark, Bernd b Mark gespart. Aus $(a + b) + (a - b) = 2a$ und $2a = 50$ folgt $a = 25$, das heißt, Axel hat 25 M gespart. Aus $(a - b) + a - b = 2(a - b)$ und $2(a - b) = 10$ folgt $a - b = 5$. Aus $a = 25$ und $a - b = 5$ folgt $b = 20$, d. h. Bernd hat 20 M gespart. Axel hat also mehr gespart.

≙ Familie Schmitze auf Reisen

Opa stets im Wagen vorn rechts.
Oma im Wagen hinten links oder rechts. (2 Fälle)
Vater oder Mutter am Lenkrad. (2 Fälle)
Sohn 1 oder 2 lenkt Motorrad. (2 Fälle)
Übrig bleiben 1 Elternteil, 1 Sohn und die Frau des einen Sohnes für drei Plätze. Das sind 6 Möglichkeiten.
Es sind 8 Fälle. 48 Verteilungen sind möglich.

Die Familie muß die Sitzordnung also insgesamt 47mal wechseln.

> Würfeleien

Die Abbildungen b und d zeigen die richtigen Ansichten.

$\leqq$ Marie-Luise bekommt den falschen Brief

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Es gibt 20 Möglichkeiten.

$\geqq$ Nächtlicher Spuk

hundert (... wach und ertastete), acht eins, tausend, elf, zwei, neun, sieben, zehn, drei.

+ Silbenrätsel

1. Diagonale; 2. Addition; 3. Tangens; 4. Ellipse; 5. Nullstelle; 6. Variable; 7. Exponent; 8. Rechteck; 9. Abstand; 10. Rhombus; 11. Bruch; 12. Einheit; 13. Intervallschachtelung; 14. Tangente; 15. Ungleichungen; 16. Normalparabel; 17. Gleichungen. Aktueller Begriff: Datenverarbeitung.

— Kreuzzahlenrätsel

4	1				2	8
9	0	2		9	9	9
	1	5		2	7	
		2	5	6		
	3	0	0	3	1	
3	6		9		3	5
7	3				7	9

% Alle Aufgaben richtig?

Die kleinste von Null verschiedene, durch 3, 4, 6 und 8 teilbare natürliche Zahl ist 24. Die nächst kleinere Zahl (48) ist bereits größer als 30. An der Leistungskontrolle waren also 24 Schüler beteiligt.

Aus $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ und $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ und $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ und $\frac{1}{8} \cdot 24 = 3$

und $8 + 6 + 4 + 3 = 21$ folgt, daß 21 Schüler ihre Aufgaben fehlerhaft hatten. Demnach hatten 3 Schüler alle Aufgaben richtig.

‰
Gesucht a

Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganzzahlig, und wegen (1) folgt $100 < 60 \cdot b < 1201$. Somit muß b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen. Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein. Also kommen für den Faktor b nur noch die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage. Es sind daher die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen. Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4). 420; 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

∞ Gesucht n

Die Anzahl n muß ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d. h. ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ kommt nur 36 in Frage:

Zensur	1	2	3	4	5
Schüler	4	12	14	6	–

$$a + b + c + d = 45$$
$$(a + 2) = (b - 2) = 2c = \frac{d}{2}$$

Daraus folgt: $a = 8$ $\quad \underline{\underline{a = 8}}$ $\quad c = \frac{a}{2} + 1$ $\quad \underline{\underline{c = 5}}$

$b = a + 4$ $\quad \underline{\underline{b = 12}}$ $\quad d = 2a + 4$ $\quad \underline{\underline{d = 20}}$

II

|| ∫ Da die Zahl zweistellig sein soll, muß sie größer sein als 9. Daraus folgt, daß ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muß als sie selbst. Wegen der 2. Bedingung besagt dies, daß bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muß ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite. Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein. Daraus ergibt sich, daß die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47. Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

Bilderrätsel

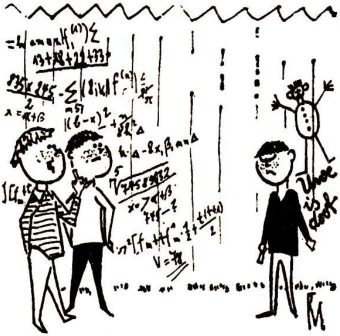
Bezirksolympiade – ALP HA HEI TER (Alpen, Hase, Ei, Leiter)

Δ Zusammenhänge finden!

Einermenge, Dualsystem, Trinom, Quadrat, Fünfertip, Sextett, September, Oktaeder, Neuneck.

≅ Rösselsprung

Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander parallelen Gegenseiten heißt <u>Trapez</u>.



„Was soll bloß aus dem mal werden?"

4 Abstrakt

ε $6 - 3a \neq 0$

$6 \neq 3a$

$\underline{\underline{a \neq 2}}$

ζ $5k - 7k = \underline{\underline{-2k}}$

η $\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = b$

$5 - 1 = 5ab$

$\underline{\underline{a = \frac{4}{5b}}}$

δ $3ax + y = 7a$

$ax + y = 3a$

$ax + 7a - 3ax = 3a$

$\underline{\underline{x = 2}}$

$y = 7a - 3ax$

$\underline{\underline{y = a}}$

ι $s = p + pkt$

$s - p = pkt$

$\underline{\underline{k = \frac{s - p}{pt}}}$

κ $d : (d - 2) = 4 : 3$

$3d = 4\,(d - 2)$

$\underline{\underline{d = 8}}$

λ $\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54} = \frac{4r^2 \cdot 54}{27t \cdot 16r^5} = \underline{\underline{\frac{1}{2r^3}}}$

$\mu\ 26 - (x+3)^2 = (x-1)^2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_{1;2} = -1 \pm \sqrt{9}$

$\underline{\underline{x_1 = 2}}$

$\underline{\underline{x_2 = -4}}$

$2x^2 + ax - a^2 = 0$

$x^2 + a\,x - a^2 = 0$

$x_{1;2} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{8a^2}{16}}$

$\underline{\underline{x_1 = \frac{a}{2}}}$

$\underline{\underline{x_2 = -a}}$

$4x^2 = 2 - 7x$

$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

$x_{1;2} = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{32}{64}}$

$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{4}}}$

$\underline{\underline{x_2 = -2}}$

$\nu\ \frac{4a^2 - 1}{2a+1} = \frac{(2a-1)(2a+1)}{(2a+1)}$

$= 2a - 1$

$2a + 1 \neq 0$

$\underline{\underline{a \neq -\frac{1}{2}}}$

$\xi\ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a(a-b) + b(a+b)}{a^2 - b^2} = \underline{\underline{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}}$

AB Nachgedacht – mitgemacht

Pflichtaufgaben

1. a) **Parametergleichung für den Schiffskurs**

$$g_S \equiv \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 22-30 \\ 8-12 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Parametergleichung für die Raketenbahn

$$g_R \equiv \underline{\underline{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

b) **Gleichsetzung beider Gleichungen:**

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = -s \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 20 &= 8s + 6r \\ 5 &= 4s - 2r \\ -3 &= -3r \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in g_R : $\mathfrak{x}_s = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten des Punktes sind S(16: 5: 0)

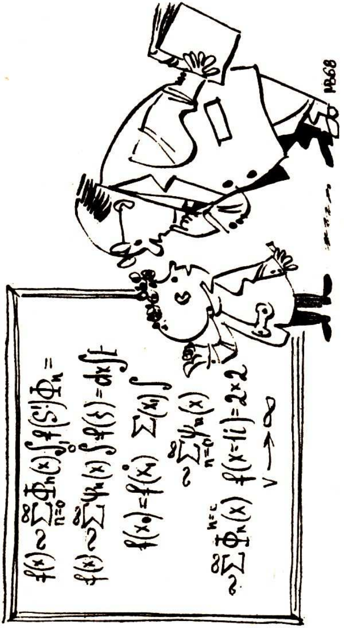
c) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}-8\\-4\\-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{80}\cdot\sqrt{49}} = \frac{-48+8}{4\sqrt{5}\cdot 7} = -0{,}63886$$

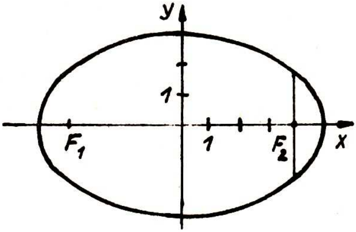
$$\varphi = 180° - 50{,}3° = \underline{\underline{129{,}7°}}$$

d) $\overline{P_3S} = \quad s = \sqrt{(16-10)^2 + (5-7)^2 + (0-3)^2} = 7$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{7\text{ km}}{7\text{ s}} = \underline{\underline{1\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$



„Glauben Sie nun, daß $2 \times 2 = 4$ ist?“



2. a) $a = 5 \qquad b = 3$

$e^2 = a^2 - b^2$

$\underline{\underline{e = 4}}$

b) Einsetzen von $x_1 = e = 4$ in die Ellipsengleichung

$$\frac{16}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$$y_1 = \pm \frac{9}{5}$$

Die Sehne ist $2y_1 = 3{,}6$

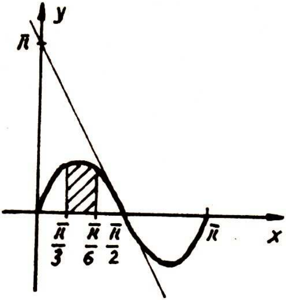
c) Hyperbel: $a = 4$ (entspricht e der Ellipse!)

$m = \sqrt{3} = \frac{b}{a}$ (Anstieg einer Asymptote)

$b = 4\sqrt{3}$

Daraus ergibt sich die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

3. a)



b) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos \pi = -2$

$y_1 = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ Tangentengleichung in P_1

$y - o = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{\underline{y = -2x + \pi}}$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\left[\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3\pi} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$

$\underline{\underline{= \frac{1}{2}}}$

$z = 2x$

$\frac{dz}{dx} = 2$

$dx = \frac{dz}{2}$

4. a) $f(x) = e^x(x^2 - a)$

$f'(x) = e^x(x^2 - a) + e^x \cdot 2x = \underline{e^x(x^2 + 2x - a)}$

$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - a) + e^x(2x + 2)$

$= \underline{\underline{e^x(x^2 + 4x + 2 - a)}}$

b) 1. Ableitung gleich 0 setzen: $a = 3$

$0 = e^x(x^2 + 2x - 3) \quad \big| \text{ Div. durch } e^x \neq 0$

$0 = x^2 + 2x - 3$

$x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$

$f''(1) = e^1(1^2 + 4 + 2 - 3) = 4e > 0$ (min.)

Somit: $\underline{\underline{x_{E1} = 1}}$; $\underline{\underline{y_{E1} = -2e}}$

c) Aus b) folgt: $x_E = -1 \pm \sqrt{1+a}$

Bedingung $1 + a < 0$ (neg. Radikand)

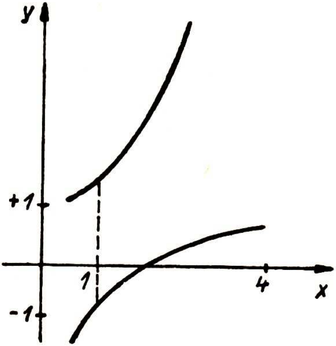
$\underline{\underline{a < -1}}$

Wahlaufgaben

1. a)

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$
y	0,69	0	-0,69	-1,39

b)



c)

$f\ (x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \qquad g\ (x) = \ln\frac{x}{2}$

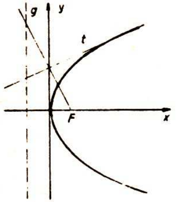
$f'\ (x) = x \qquad g'\ (x) = \frac{1}{x}$

$h'\ (x) = x - \frac{1}{x} \qquad h''\ (x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ (min.)

$0 = x - \frac{1}{x} \qquad y_E = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - \ln\frac{1}{2}$

$\underline{\underline{x_E = 1}} \qquad \underline{\underline{y_E = 2,1931}}$

2. a)



b) $y \cdot y_1 = p\,(x + x_1)$

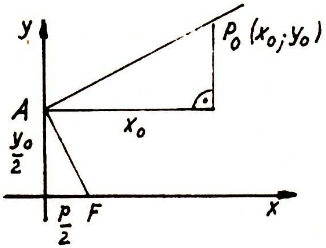
$y \cdot 6 = 3\,(x + 6)$

$y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $F\,(1{,}5;\,0)$ $m_g = -2$

$y - 0 = -2\,(x - 1{,}5)$

$y = -2x + 3$



$y^2 = 2px$

Anstieg AP_0 : $m_1 = \frac{y_0}{2x_0}$

Anstieg $\overline{FA}$: $m_2 = -\frac{y_0 \cdot 2}{2p}$

$y_0^2 = 2\,px_0 \rightarrow 2p = \frac{y_0^2}{x_0} \rightarrow m_2 = -\frac{2x_0}{y_0}$

Da $m_1 \cdot m_2 = -1$, folgt $\overline{AP_0} \perp \overline{FA}$

3. a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{1}{(1-X)^2}$

$1 = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$\underline{\underline{x_2 = 2}}$

b) Bedingungen:

1. f in x_o differenzierbar,

2. $f'(x_o) > 0$

$f'(x_o = \frac{3}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{3}{2})^2}$

$= 4 > 0$

d. h. f ist an dieser Stelle lokal monoton wachsend

c) $f''(x) = \frac{-2\,(1-x)\;(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2!}{(1-x)^3}$

$f'''(x) = \frac{-2 \cdot 3\;(1-x)^2\;(-1)}{(1-x)^6} = \frac{3!}{(1-x)^4}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6 \cdot 4\,(1-x)^3\;(-1)}{(1-x)^8} = \frac{4!}{(1-x)^5}$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Induktionsanfang:
H(n) für n = 1 ist wahr, weil

$$\frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2} = f'(x)$$

Induktionsvoraussetzung:
H(n) gelte für n = k

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Induktionsbehauptung:

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

Beweis der Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung: (Bildung der (k + 1)ten Ableitung aus der Induktionsvoraussetzung nach reziproker Funktion!)

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{-k!\,(k+1)\,(1-x)^k(-1)}{[(1-x)^{k+1}]^2}$$

$$= \frac{k!\,(k+1)\,(1-x)^k}{(1-x)^{2k+2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}}} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

O Wenn der dritte Sohn x Taler erhält, so erhält der zweite Sohn x + 100 Taler und der erste x + 300 Taler. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
x + x + 100 + x + 300 &= 1600 \\
x &= 400
\end{aligned}
$$

Der 3. Sohn erhält 400 Taler, der 2. Sohn 500 Taler, der 1. Sohn 700 Taler.

π Ist der kleinere Summand gleich x, so ist der größere Summand gleich 49 x, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
x + 49\,x &= 25 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Der kleinere Summand ist daher gleich $\frac{1}{2}$, der größere gleich $24\frac{1}{2}$.

Wir bezeichnen die gesuchte Zahl mit x und erhalten:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24 \qquad x^2 = 144.$$

Diese Gleichung hat aber zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 12$ und $x_2 = -12$. Daher hat sowohl die Zahl 12 als auch die Zahl −12 die verlangte Eigenschaft.

Die erste Bäuerin habe 8 x + 7 Eier und die zweite 10 y + 7 Eier. Dann ist

$$
\begin{aligned}
8\,x + 7 + 10\,y + 7 &= 100 \\
8\,x &= 86 - 10\,y, \\
4\,x &= 43 - 5\,y \\
&= 40 + 3 - 4\,y - y, \\
x &= 10 - y - \frac{y-3}{4}
\end{aligned}
$$

y − 3 ist also durch 4 teilbar; man setzt daher $y - 3 = 4\,z$ und erhält $y = 4\,z + 3$,

$x = 10 - (4\,z + 3) - z = 7 - 5\,z.$

Da x eine positive ganze Zahl ist, sind nur die Fälle $z = 0$ und $z = 1$ möglich. Man erhält daher:

I. $z = 0$: $x = 7$, $y = 3$.

Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37 Eier.

II. $z = 1$: $x = 2$, $y = 7$.

Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77 Eier.

121

Es seien x und y die gesuchten positiven reellen Zahlen; dann gilt:

$$x + y = xy \qquad (1)$$

$$x^2 - y^2 = x + y \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $(x + y)(x - y) = x + y$
und, da $x + y \neq 0$
ist, $x - y = 1$, d. h., $y = x - 1$.
Man erhält daher aus (1)

$$x + x - 1 = x(x - 1) \qquad (3)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Die quadratische Gleichung (3) ist erfüllt, wenn entweder

a) $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, d. h.,

$$y = x - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oder}$$

b) $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, d. h., $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ist.

Nur die Lösung zu a) entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Es sei x die Anzahl der Pferde und y die Anzahl der Ochsen.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
31x + 21y &= 1770 \\
21y &= 1770 - 31x \\
&= 1764 + 6 - 21x - 10x \\
y &= 84 - x - \frac{10x - 6}{21}
\end{aligned}$$

$10x - 6$ ist also durch 21 teilbar, mithin auch $5x - 3$.

Man setzt daher $21z = 5x - 3$

und erhält $y = 84 - x - 2z$

$$x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}$$

Man setzt ferner $5u = z + 3$, d. h., $z = 5u - 3$ und erhält

$$\begin{aligned}
x &= 4(5u - 3) + u = 21u - 12 \\
y &= 84 - 21u + 12 - 10u + 6 \\
&= 102 - 31u.
\end{aligned}$$

Da y eine positive Zahl ist und u wegen $z = 5u - 3$ nicht gleich Null sein kann, sind nur die Fälle $u = 1$, $u = 2$ und $u = 3$ möglich.

Man erhält daher die folgenden drei Lösungen

1. $u = 1$: $x = 9$, $y = 71$
2. $u = 2$: $x = 30$, $y = 40$
3. $u = 3$: $x = 51$, $y = 9$.

$\boxed{n!}$

Es handelt sich um eine Kombination von 49 Elementen zur 6. Klasse.

Aus $C_n^{(k)} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ folgt

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \binom{49}{6}$$

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \underline{\underline{13\,983\,816}}$$

Es müssen 13 983 816 Tipscheine ausgefüllt werden.

Es handelt sich um eine Variation mit Wiederholung von 3 Elementen zur 4. Klasse.

Aus $V_{w_n}^{(k)} = n^k$ folgt: $V_{w_3}^{4} = 3^4 = \underline{\underline{81}}$

Er müßte 81 Tipzettel ausfüllen.

Es handelt sich um eine Permutation mit Wiederholung; da die Physikstunde festliegt, ist sie von der Permutation ausgeschlossen.

$$P_{w_5}^{(2:2)} = \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \underline{\underline{30}}$$

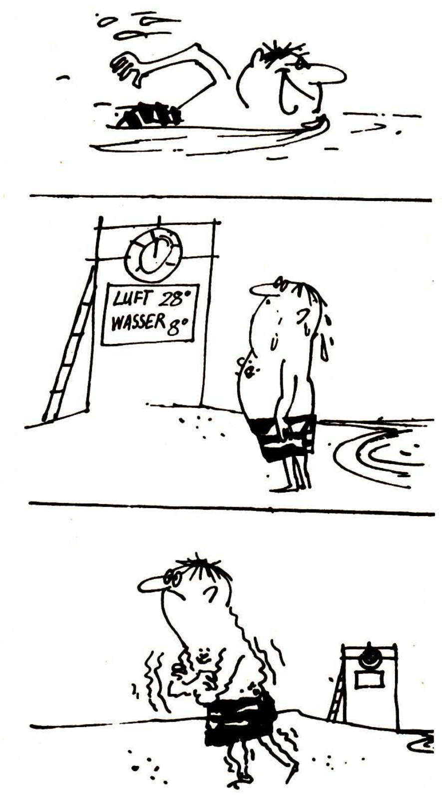
Es gibt 30 Möglichkeiten des Stundenplans.

1. Zahl x
2. Zahl x + 5
3. Zahl 23 oder 29
4. Zahl 2x + 5
5. Zahl 2x + 5 + 2
6. Zahl 3x

$9x = 135$ oder $9x = 129$

$\underline{x = 15}$

Die Zahlen lauten 15, 20, 23, 35, 37 und 45.


LUFT 28°
WASSER 8°

● Zum Überholen werden benötigt:

$$s_ü = \frac{(25 + 2 + 20 + 25) \cdot 50}{50 - 30}\ \text{m} = \underline{\underline{180\ \text{m}}}$$

■ Aus $v = \frac{s}{t} = \frac{200\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ folgt

$$V = 0{,}02 \cdot 60 \cdot 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = \underline{72\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

Nein, der Fahrer hat die zulässige Höchstgeschwindigkeit von $50\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ überschritten.

▲ In der Zeit t legt der Schall den Weg

$$s_S = D + \frac{8}{9}D = \frac{17}{9}D$$

und der Motorradfahrer den Weg $s_M = \frac{D}{9}$ zurück.

Aus

$v = \frac{s}{t}$ folgt: $t = \frac{s_S}{v_S}$ und $t = \frac{s_M}{v_M}$ und damit

$$\frac{s_S}{v_S} = \frac{s_M}{v_M} \quad \text{und} \quad v_M = \frac{s_M \cdot v_S}{s_S} = \frac{D \cdot 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9}{9 \cdot 17 \cdot D}$$

$$\underline{\underline{v_M = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Der Motorradfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (d. s. 72 km/h) auf die Mauer zu.

▮ Folgende Überlegung führt zur Beantwortung der Fragen: Die erste Ziffer kann sich in 2 Stunden Fahrt nicht ändern. Die zweite Ziffer kann sich von 5 auf 6 ändern, also 16 * 61. Die dritte, mittlere Ziffer der Zahl kann nun 0; 1; ...; 9 sein, aber bereits bei Annahme der Ziffer 1 ergibt sich für 2 Stunden Fahrt eine Strecke von

(16161 – 15951) km = 210 km,

was kaum möglich ist. Die mittlere Ziffer wird also 0 sein.

a) Die zweite symmetrische Zahl lautet 16061.
b) Es wurden (16061 – 15951) km = 110 km in 2 Std. zurückgelegt; die Durchschnittsgeschwindigkeit betrug somit 55 km/h.

Ein Kunstwerk

Funktionsgleichungen	Definitionsbereiche		
$y = 2$	$1 \leqq x \leqq 2$;	$3 \leqq x \leqq 4$;	$6 \leqq x \leqq 7$
$y = 3$	$1 \leqq x \leqq 2$;	$6 \leqq x \leqq 7$	
$y = 4$	$1 \leqq x \leqq 2$;	$3 \leqq x \leqq 4$;	$4{,}5 \leqq x \leqq 5{,}5$
			$6 \leqq x \leqq 7$

	Wertebereiche
$x = 1$	$2 \leqq y \leqq 3$
$x = 2$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x = 2{,}5$	$2 \leqq y \leqq 5$
$x = 3$	$1 \leqq y \leqq 4$
$x = 4$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x = 4{,}5$	$2 \leqq y \leqq 5$
$x = 5{,}5$	$2 \leqq y \leqq 4$
$x = 6$	$2 \leqq y \leqq 3$
$x = 7$	$2 \leqq y \leqq 4$

alpha-Wettbewerb

11 Teilnehmer erhielten je genau eine Antwortkarte.

alpha + mathe = heiter

$$\begin{array}{r} 58015 \\ +\ \underline{65412} \\ 123427 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67016 \\ +\ \underline{56412} \\ 123428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43014 \\ +\ \underline{84512} \\ 127526 \end{array}$$

$\sqrt{50625} = 225$

$222 \cdot 222 = 49\,284$

$$\left|\begin{array}{rl} 43^3 = & 79\,507 \\ 4 + 3 = & 7 \end{array}\right.$$

$28^3 = 21\,952$

$139 \cdot 139 = 19\,321$

X a) $u = 2\pi r = 2\pi \cdot 12 \text{ cm} = 75{,}36 \text{ cm}$

b) $\dfrac{u}{4} = 18{,}84 \text{ cm}$

c) $\dfrac{u}{12} = 6{,}28 \text{ cm}$

d) $\dfrac{7u}{12} = 43{,}96 \text{ cm}$

L Von 6.45 Uhr bis 6.55 Uhr sind zehn Minuten vergangen. Wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ hat Jürgen in dieser Zeit den zwölften Teil der Strecke zurückgelegt. Für die gesamte Fahrstrecke benötigte er demnach 12 · 10 Minuten, das sind 120 Minuten (oder 2 Stunden). Um drei Viertel der Strecke $\overline{AB}$ zu durchfahren, werden 90 Minuten benötigt. Um 6.45 Uhr hatte Jürgen ein Viertel der Strecke $\overline{AB}$ geschafft; 90 Minuten später, also um 8.15 Uhr, erreichte er sein Ziel B. Jürgen startete demnach um 6.15 Uhr in A.

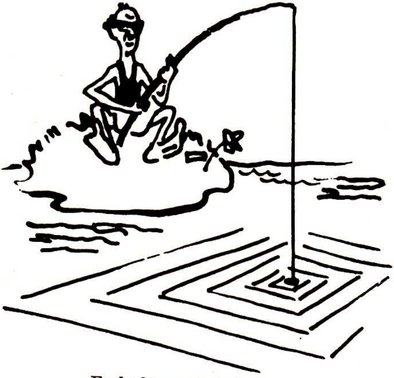
I Zwischen den 5 Schlägen der Uhr liegen vier Zeitintervalle von je $1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer, da $5 : 4 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Zwischen den 10 Schlägen liegen neun Zeitintervalle von je $1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer. Aus $9 \cdot 1\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$ folgt, daß die Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr die Zeit von $11\frac{1}{4}$ Sekunden benötigt.

C Beide Kerzen müssen 13.36 Uhr angezündet werden.

Unsinn im Quadrat

D $\begin{array}{ccc} 2^6 & 2^1 & 2^8 \\ 2^7 & 2^5 & 2^3 \\ 2^2 & 2^9 & 2^4 \end{array}$

M Wir führen „Schachbrettkoordinaten“ ein: längs der Horizontalen die Buchstaben a, b, . . . h, längs der Vertikalen die Zahlen 1 bis 8. Wir haben zunächst 64 1feldrige Quadrate. Um alle 4feldrigen Quadrate zu finden, betrachten wir je zwei Nachbarspalten. Wir haben ab, bc, cd, de, ef, fg, gh – insgesamt 7 Paare. Wenn wir alle diese Quadrate aufwärts verschieben, müssen wir folgende Zahlenpaare nehmen: 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, also auch 7 Paare. Daher betrüge die Anzahl der 4feldrigen Quadrate $7 \cdot 7 = 49$. Dann suchen wir alle 9feldrigen Quadrate, bilden also 6 Spaltentripel: abc, bcd, cde, def, efg und ebenso viele Zahlentripel: 123, 234, 345, 456, 567, 678. Wir erhalten also $6 \cdot 6 = 36$ 9feldrige Quadrate. Ganz analog erhalten wir $5 \cdot 5 = 25$ 16feldrige Quadrate, $4 \cdot 4 = 16$ 25feldrige Quadrate, $3 \cdot 3 = 9$ 36feldrige Quadrate, $2 \cdot 2 = 4$ 49feldrige Quadrate und endlich $1 \cdot 1 = 1$, also ein 64feldriges Quadrat.
$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$.
Auf dem Schachbrett gibt es also 204 Quadrate.



„Er denkt gradlinig.“

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcrcr} 10 & + & 5 & = & 15 \\ + & & + & & - \\ 5 & - & 4 & = & 1 \\ + & & + & & - \\ 4 & + & 6 & = & 10 \\ \hline 19 & - & 15 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 10 & + & 3 & = & 13 \\ + & & + & & - \\ 3 & - & 2 & = & 1 \\ + & & + & & - \\ 2 & + & 8 & = & 10 \\ \hline 15 & - & 13 & = & 2 \end{array}$$

Die Zahlen 30241, 34201, 41230 und 43210, auch 54321, 52341 usw. erfüllen die gestellten Bedingungen.

$$\begin{array}{l} 289 : 17 = 17 \\ \underline{17} \\ 119 \\ \underline{119} \\ \ \ - \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 378 & : & 9 & = & 42 \\ : & & : & & : \\ 18 & : & 3 & = & 6 \\ \hline 21 & : & 3 & = & 7 \end{array}$$

Wenn die Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl ergibt, so beginnt diese vierstellige Zahl stets mit der Ziffer 1, also P = 1.
Wenn A = 0, so R = 0, das widerspricht den gestellten Bedingungen.
Wenn A = 2, so R = 4 und M = 1; da P = 1, entfällt M = 1.
Wenn A = 3, so R = 6, M = 2; PA = 13 kann nicht erfüllt werden.
Wenn A = 4, so R = 8, M = 3, O = 7.
Wenn A = 5, so R = 0, M = 3; PA = 15 kann nicht erfüllt werden.
Wenn A = 6, so R = 2, M = 4, O = 8.
Wenn A = 7, so R = 4, M = 5; PA = 17 kann nicht erfüllt werden.
Wenn A = 8, so R = 6, M = 6; da R = 6, entfällt M = 6.
Wenn A = 9, so R = 8, M = 7; PA = 19 kann nicht erfüllt werden.
Es existieren genau zwei Lösungen:

$$\begin{array}{r} 714 \\ +\ 734 \\ \hline 1448 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 816 \\ +\ 846 \\ \hline 1662 \\ \hline\hline \end{array}$$

Wer ist der Täter?

Der Täter heißt Johannes Lehmann.

Vorliegende Zeichnungen wurden aus der Sammlung „alpha-heiter“ des alpha-Clubs der 29. OS (Leitung: StR J. Lehmann, V. L.d.V.) entnommen. Sie erschienen in: DLZ, Ungarische Rundschau, Schülerzeitschrift alpha, Für Dich, Eulenspiegel, Utschitcisko delo (VR Bulgarien), Urania, Magazin, Wochenpost, Wurzel, Zeit im Bild.
Die Zeichner sind: H. Pätzold, H. Szpilci, V. Rencin, R. Schwalme, A. Oehlen, G. Sprengel, H. Behling, M. Bofinger, H.-J. Starke, G. Hillinger, W. Moese, M. Simon, A. Jendrusch, H. Parschau, H. Büttner.

Die LVZ dankt den Zeichnern, welche freundlicherweise die Erlaubnis zum Nachdruck der in diesem Taschenbuch veröffentlichten Vignetten erteilten.

Satz u. Druck: Tastomat Eggersdorf
Druckgenehmigungs-Nr.: Lizenz-Nr. 607

Dieses Heft wurde im Schreibsatz hergestellt. Technologisch bedingt machten sich Ergänzungen durch Handeinzeichnungen erforderlich.

Idee, Gestaltung, Zusammenstellung der Aufgaben: Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes, 29. OS Leipzig
Umschlag und Typographie: K.-H. Guckuk, Leipzig
Satz und Druck:
EVP: 2,– M