Aufgabensammlung

"Unsere Mathematikaufgabe"

982 Aufgaben
aus der Zeitschrift
Wissenschaft und Fortschritt
von 1961 bis 1990

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2018-2020

Inhaltsverzeichnis

1 Unsere Mathematikaufgabe

Die ”Wissenschaft und Fortschritt” war eine populärwissenschaftliche Zeitschrift für Naturwissenschaften und Mathematik des Zentralrates der Freien Deutschen Jugend und später der Akademie der Wissenschaften der DDR von Mai 1951 bis Dezember 1990.

Die Zeitschrift beinhaltete in jeder Ausgabe mehrere Aufsätze und Artikel, Buchbesprechungen wissenschaftlicher und auch populärwissenschaftlicher Literatur, aktuelle Kurzmeldungen aus der Wissenschaft und weitere mathematisch-naturwissenschaftliche Beiträge. Als Autoren wurden namhafte Wissenschaftler der DDR und anderer Länder gewonnen.

Ab der Ausgabe von März 1961 enthielt die Zeitschrift jeweils drei bzw. zwei anspruchsvolle Mathematikaufgaben. In nachfolgenden Heften wurden Lösungen veröffentlicht.

Auszüge aus dem Vorwort zu ”Unsere Mathematikaufgabe” im Heft März 1961:

”Liebe Leser!
An dieser Stelle werden Sie in Zukunft mathematische Aufgaben und Probleme finden, die Ihnen als Material für eine ”mathematische Freizeitgestaltung” dienen sollen. Wir wollen Ihnen Gelegenheit geben, Ihre mathematischen Fähigkeiten, Ihr logisches Denkvermögen selbst zu prüfen und zu entwickeln. Die Aufgaben sollen den Prinzipien mathematischer Olympiaden entsprechen: Nicht das Gedächtnis soll geprüft werden, sondern die Fähigkeit, sich selbständig in ein mathematisches Problem einzuarbeiten. ...
Wir bitten ... unsere Leser, uns selbstverfasste Aufgaben und Problemstellungen sowie Ideen einschließlich Lösungen zur Verfügung zu stellen. ...
Darüber hinaus bitte wir alle Leser, uns durch Anregungen, Hinweise und Berichte über außerunterrichtliche Arbeit auf mathematischem Gebiet zu unterstützen.”(Red.)

Nachfolgend werden alle in den 30 Jahren von 1961 bis 1990 veröffentlichten 982 Aufgaben bereitgestellt.
Die Autoren der Aufgaben werden am Ende des Textes aufgelistet.

Hinweise auf evtl. vorhandene Fehler sind gern willkommen.
EMail-Adresse: kontakt@mathematikalpha.de

Steffen Polster, 2020

Hinweis:
2016 wurde von ”Wurzel e.v.” eine Begleitschrift zur Bundesrunde der 55. Mathematik-Olympiade in Jena herausgegeben.
Das Buch enthält ausgewählte Aufgaben mit Lösungen, die in der Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt” (WiFo) veröffentlicht wurden. Das Buch ist keine reine Wiedergabe der Aufgaben und Lösungen, sondern vermittelt an Beispielaufgaben allgemeine Lösungsstrategien und auch zusätzlich wertvolle Hinweise zum Bearbeiten entsprechender Aufgaben.
siehe `http://www.wurzel.org/zeitschrift/buecher.php?artikel=2016-250`

2 Aufgaben

2.1 Aufgaben 1961

Aufgabe 1/61

Bestimme alle dreiziffrigen Zahlen, die, durch 11 geteilt, eine Zahl ergeben, die gleich ist der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl!

Aufgabe 2/61

Für welche Werte der Veränderlichen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9 \quad (1)$$

Aufgabe 3/61

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n eine ungerade Zahl).
Ist α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so zeige, dass

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

Aufgabe 4/61

Konstruiere ein Dreieck ABC, wenn h_a, h_b und s_a bekannt sind.
h_a ist die auf der Seite a errichtete Höhe, h_b die auf der Seite b und s_a ist die Seitenhalbierende der Seite a.

Aufgabe 5/61

Gegeben ist der Würfel $ABCDA'B'C'D'$.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecke XV, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke AC und V ein beliebiger Punkt der Strecke $B'D'$ ist.

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte Z der Strecke XV, die die Beziehung $ZV = 2XZ$ erfüllen.

Aufgabe 6/61

Gegeben ist ein Kegel, die dem Kegel eingeschriebene Kugel und der der Kugel umschriebene Zylinder, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels in einer Ebene liegt. V_1 ist der Rauminhalt des Kegels und V_2 der Rauminhalt des Zylinders.

a) Beweise, dass die Gleichung $V_1 = V_2$ nicht bestehen kann.

b) Bestimme die kleinste Zahl k, für die $V_1 = kV_2$ gilt, und konstruiere für diesen Fall den Winkel an der Spitze des Kegels.

Aufgabe 7/61

Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien a und b und der Höhe h.

a) Konstruiere den Punkt P auf der Symmetrieachse, von dem aus die beiden Schenkel unter einem rechten Winkel erscheinen.

b) Bestimme die Entfernung des Punktes P von einer der beiden Grundlinien rechnerisch.

c) Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion des Punktes P möglich? (Diskussion der möglichen Fälle)

Aufgabe 8/61

In einer Abteilung eines volkseigenen Betriebes sollen Massenbedarfsartikel hergestellt werden. Eine Vorkalkulation ergibt, dass die Produktion insgesamt $b = 1650{,}00$ DM fixe Kosten im Monat (Pflege, Wartung und Amortisation der Produktionsanlagen. Verwaltungskosten usw.) und $m_1 = 6{,}50$ DM variable Kosten (je gefertigtes Stück, Materialkosten, Arbeitslöhne usw.) verursacht.
Der Werkabgabepreis (zuzüglich Produktionsabgabe) beträgt auf Grund preisrechtlicher Bestimmungen $m_2 = 11{,}50$ DM je Stück.

a) Es sind die Gesamtkosten y_1 der Produktion und der Gesamterlös y_2 (unter der Voraussetzung, dass die Produktion restlos abgesetzt wird) in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß x rechnerisch und graphisch darzustellen.

b) Von welchem Produktionsausstoß x_r an wird die Produktion rentabel?

c) Durch welche Maßnahmen kann die Rentabilität erhöht werden?

d) Welche Schlussfolgerungen ergeben sich, wenn die variablen Kosten m_l den Werkabgabepreis m_2 übersteigen?

Aufgabe 9/61

Es ist $a^2 \geq 0$.
Beweis: Ist $a = 0$, so ist auch $a^2 = 0$, und die Behauptung richtig. Ist $a \neq 0$, so ist a^2 das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen, also positiv, und die Behauptung ist ebenfalls richtig.
Dann ist auch $a^2 - 2a + 1 \geq -2a + 1$.
Beweis: Es wurde auf beiden Seiten der Ungleichung Gleiches subtrahiert beziehungsweise addiert. Durch Radizieren erhält man

$$a - 1 \geq \pm\sqrt{-2a + 1}$$

Setzt man nunmehr $a = \frac{1}{2}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} - 1 \geq \pm\sqrt{-1 + 1} \to -\frac{1}{2} \geq 0$$

Das bedeutet, dass eine negative Zahl größer als oder gleich Null sein soll. Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 10/61

In einem Geschäft für Photoartikel fragt ein Kunde: "Wieviel kostet dieses Objektiv?" Die Verkäuferin antwortet: "Mit Lederetui 115,00 DM, mein Herr!" - "Und wieviel kostet das Objektiv ohne Etui?" fragt der Kunde weiter. "Genau 100,00 DM mehr als das Etui!" sagt lächelnd die Verkäuferin. Wieviel kostet das Objektiv?

Aufgabe 11/61

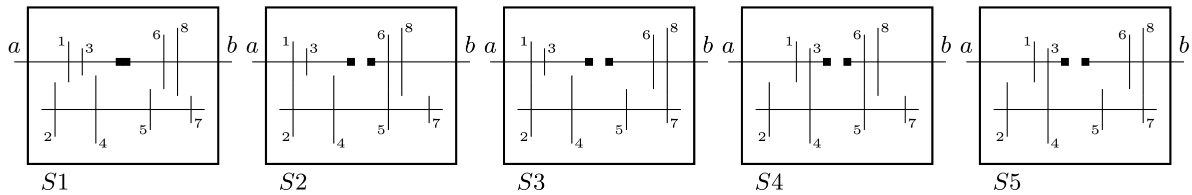
Eine Türöffnung von 90 cm Breite soll mit Brettern zugenagelt werden. Zur Verfügung stehen Bretter passender Länge von 8 cm, 10 cm und 12 cm Breite.
Welche Möglichkeiten gibt es, wenn kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll?

Aufgabe 12/61

In einem Konstruktionsbüro sollen die Konstruktionsunterlagen für die Spezialanfertigung einer Laboratoriumszentrifuge ausgearbeitet werden. Zwischen Antriebsmotor und Zentrifuge wird ein Stufengetriebe eingebaut, das folgenden Anforderungen genügen soll:

1. Die erste Stufe ist Direktkupplung der Zentrifuge an den Motor, der eine Drehzahl $a_1 = 6400\ \text{min}^{-1}$ hat.
2. Das Getriebe soll insgesamt fünf verschiedene Drehzahlen ermöglichen.
3. Die Drehzahl a_2 soll 75% der Drehzahl a_1 betragen, ebenso die Drehzahl a_3 75% von a_2 und so fort.

Das Getriebe erhält den in der Abbildung schematisch dargestellten Aufbau. (a Antrieb, b Abtrieb, S Schaltstellung)



a) Es ist die Folge a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 der Drehzahlen aufzustellen.

b) Welche Übersetzungen müssen die Räderpaare $(3, 4), (5, 6), (7, 8)$ erhalten, wenn das Räderpaar $(1, 2)$ im Verhältnis $1 : 1$ übersetzt?

c) Wie groß müssen die Radien der Räder $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ gewählt werden? Der Abstand der Vorgelegewelle von der Antriebs- beziehungsweise Abtriebswelle beträgt 175 mm (von Wellenmitte zu Wellenmitte gemessen).

Aufgabe 13/61

Man denke sich den Erdäquator genau kreisförmig und um ihn ein überall anliegendes Band gespannt. Anschließend werde das Band um 1 m verlängert; es stehe nun überall gleich weit von der Erdoberfläche ab.

a) Wie groß ist der Abstand? Ob wohl eine Maus zwischen Erdoberfläche und Band durchschlüpfen könnte? Der Erdradius werde mit $r = 6370$ km angenommen.

b) Man löse die gleiche Aufgabe für eine Kugel von der Größe einer Apfelsine ($r = 4$ cm)!

Aufgabe 14/61

Auf ihrem Flug um den Mond näherte sich die sowjetische Raumstation Lunik 3 dem Erdtrabanten bis auf etwa 7000 km. Für die folgenden Berechnungen werde der Mondradius r mit $r \approx 1750$ km angenommen, der Flächeninhalt F einer Kugelkappe mit dem Kugelradius r und der Kappenhöhe h ist $F = 2\pi rh$, wobei $\pi \approx \frac{22}{7}$ gesetzt werde.

a) Wie groß ist das Gebiet des Mondes, das aus dieser Entfernung übersehen werden könnte?

b) Wieviel Prozent der Mondoberfläche sind dies?

c) Unter welchem Sehwinkel φ wäre der Mond aus dieser Entfernung zu beobachten?

d) Wie breit muss ein Gegenstand sein, der aus 100 m Entfernung unter demselben Sehwinkel gesehen werden soll?

Aufgabe 15/61

Es sind alle vierziffrigen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:
1. Die Summe aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich dem Quadrat aus der ersten Stelle.
2. Die Differenz aus der zweiten und der dritten Stelle ist gleich der ersten Stelle.
3. Die Summe aus der dritten und der vierten Stelle ist gleich der zweiten Stelle.
Wie kann man diese Zahlen allgemein darstellen?

Aufgabe 16/61

A sagt zu B: "Diesen Anzug habe ich im Winterschlussverkauf um 20 % verbilligt gekauft." Da antwortet B: "Dann hast du 25 % gespart." Da wendet C ein: "Wenn er nur um 10 % im Preis gesenkt worden wäre, hättest du rund 11,1 % gespart."
Wie erklärt sich diese kuriose Rechnung?

Aufgabe 17/61

Das Passagierflugzeug IL 14 P der Deutschen Lufthansa wiegt einschließlich voller Nutzlast etwa 18000 kp. Es benötigt beim Start vom Beginn des Rollens bis zum Abheben vom Boden ungefähr 30 s und hat im Augenblick des Abhebens eine Geschwindigkeit von rund 160 $\frac{km}{h}$.
Bei den folgenden Berechnungen werde von der Reibung und vom Luftwiderstand abgesehen und die Bewegung des Flugzeugs als gleichförmig beschleunigt betrachtet.

1. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Rollen?
2. Wie groß ist die Rollstrecke?
3. Wie groß ist die Beschleunigung des Flugzeugs?
4. Welche Kraft ist notwendig, um diese Beschleunigung hervorzurufen?
5. Welche Arbeit wird von den beiden Motoren während des Rollens für die Beschleunigung vollbracht?
6. Welche Leistung (in PS) muss jeder der beiden Motoren dazu abgeben?

Aufgabe 18/61

Konstruiere ein Dreieck aus $s_a = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $h_c = 7cm$!

Aufgabe 19/61

Ein schmiedeeiserner Rundstab von 4 m Länge und ein schmiedeeiserner Ring von 4 m Umfang sollen in je zehn gleich große Stücke zersägt werden. Ring und Stab sind gleich dick.
Bei welchem der beiden Werkstücke erfordert das Zersägen mehr Zeit?

Aufgabe 20/61

Für das Kraftwerk Klingenberg in Berlin-Rummelsburg wurden zwei neue Schornsteine gebaut. Jeder von ihnen besteht aus einem Betonmantel, der die Form eines hohlen Kreiskegelstumpfs mit den folgenden Maßen hat:
Unterer lichter Durchmesser $d_u = 10{,}00$ m, oberer lichter Durchmesser $d_o = 7{,}50$ m, unterer äußerer Durchmesser $D_u = 11{,}20$ m, oberer äußerer Durchmesser $D_o = 7{,}80$ m, Höhe $H = 140{,}00$ m.
Dieser Mantel erhielt eine Auskleidung von Glaswolle, Kieselgur und Klinkersteinen.

a) Wieviel Kubikmeter Beton wurden für jeden der beiden Schornsteinmäntel benötigt?

b) Wie groß ist das Gewicht G jedes der beiden Schornsteinmäntel? Die Wichte γ des verwendeten Betons werde mit $\gamma = 2{,}4\frac{Mp}{m^3}$ angenommen.

c) Welchen Druck übt der Schornsteinmantel auf das Fundament aus?

Aufgabe 21/61

Jörg kann "zaubern". Gestern kam Jörg mit einer Sensation in die Schule; er könne mathematisch zaubern! Wir waren natürlich alle sehr gespannt, wie er das wohl fertigbringen wolle, und gleich in der ersten Pause musste er mit der Zauberei beginnen.
Nachdem er mit dem Gesicht zur Wand gestellt worden war, damit er ja nicht sähe, was ich schrieb, forderte er mich auf, eine dreistellige Zahl zu wählen, deren Ziffer in der Hunderterstelle um 2 höher sein müsse als die Einerstelle; die Zehnerstelle könne eine beliebige Zahl sein.
Ich schrieb 5 1 3 und sollte nun die Zahl "umgedreht" daruntersetzen 3 1 5 und von der ersten abziehen, der Differenz 1 9 8 (die Jörg nicht kannte!) 1 2 hinzuzählen und die Summe 210 : 70 teilen; der Quotient 3 musste mit 12 multipliziert werden, was 36 ergab.
Jetzt glänzte Jörg noch mit dem neuesten Wissen, das wir seit der letzten Mathematikstunde hatten, und verlangte, aus dem Produkt die Quadratwurzel zu ziehen: $\sqrt{36} = 6$.

Damit war das Kunststück zu Ende. und er verkündete, dass wir 6 erhalten hätten.
Unser Erstaunen war groß! Er wurde bestürmt zu sagen, wie er das mache, und er möchte vor allem noch einmal seine Kunst unter Beweis stellen, was er auch gern tat.
Mir ließ die Sache den ganzen Tag keine Ruhe, und am Nachmittag setzte ich mich hin und grübelte so lange, bis ich die mathematische Gesetzmäßigkeit entdeckt und algebraisch bewiesen hatte, die Jörg dieses "Rechenkunststück" ermöglichte.
Wie muss man das wohl anstellen? Unsere Aufgabe lautet also:

Man schreibe eine beliebige dreistellige Zahl, deren Hunderterstelle um zwei größer ist als die Einerstelle. Von ihr subtrahiere man die Zahl, die man erhält, wenn man in der ursprünglichen Zahl die Reihenfolge der Ziffern umkehrt. Zum Ergebnis addiere man 12; der Reihe nach sind dann mit den jeweiligen Ergebnissen folgende weitere Rechenoperationen auszuführen: Division durch 70; Multiplikation mit 12 und man ziehe die Wurzel! Das Ergebnis ist 6.

1. Wie ist es möglich, dass bei einer beliebigen Zahl als Ausgangsgröße das Ergebnis der Rechenoperationen vorausgesagt werden kann?

2. Ist eine allgemeine Lösung möglich, bei der die Hunderterstelle um n größer ist als die Einerstelle? $(n = 1, 2, ..., 9)$

Aufgabe 22/61

Der Trog eines Schiffhebewerkes wiegt im leeren Zustand a Mp, die Wasserfüllung wiegt b Mp. Zum Ausgleich sind Gegenmassen mit einem Gesamtgewicht $(a + b)$ Mp angebracht.
Wie groß ist Übergewicht des Troges samt Inhalt, wenn sich ein Schiff mit einem Gewicht (einschließlich Ladung) von c Mp im Trog befindet?

Aufgabe 23/61

Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen während der Zeit von 8^h bis 16^h die Wagenzüge in beiden Richtungen in 10-min-Folge verkehren. Die ersten Züge dieser Betriebszeit verlassen 8^h die beiden Endhaltestellen. Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit (einschließlich der Haltezeiten) beträgt $18 \frac{km}{h}$. Das Fahrpersonal soll an den Endhaltestellen eine Pause von mindestens 10 und höchstens 20 min haben.

1. Wann verlässt der erste von Endhaltestelle A abfahrende Wagenzug diese Endhaltestelle zum zweitenmal?
2. Wieviel Wagenzüge müssen auf dieser Strecke in der Betriebszeit von 8^h bis 16^h eingesetzt werden? Dabei sollen Züge, die aus dem Berufsverkehr vor 8^h noch auf der Strecke sind und aussetzen, sowie Züge, die für den 16^h beginnenden Berufsverkehr bereits vorher zusätzlich auf die Strecke gehen, nicht mitgerechnet werden.
3. In welchen Zeitabständen begegnen sich die Wagenzüge?

Aufgabe 24/61

Beweis für die Behauptung, dass weniger mehr ist: Es ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Durch Logarithmieren ergibt sich daraus

$$\lg \left(\frac{1}{2}\right)^n > \lg \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Nach einem Logarithmengesetz ist $\lg a^m = m \cdot \lg a$; also folgt

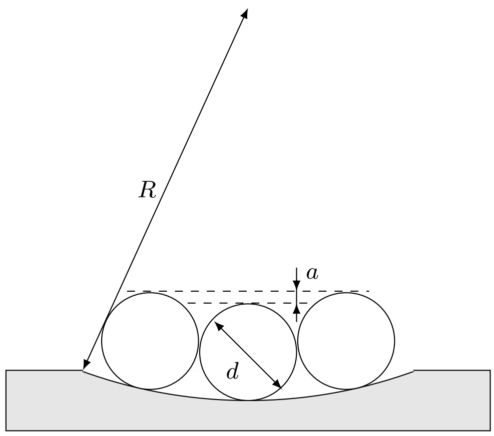
$$n \cdot \lg \frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg \frac{1}{2}$$

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch $\lg \frac{1}{2}$, so erhält man $n > n+1$. Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 25/61

Ein Schüler kürzt den Bruch $\frac{16}{64}$ fälschlicherweise, indem er in Zähler und Nenner jeweils die Ziffer 6 streicht. Er erhält damit das richtige Ergebnis $\frac{1}{4}$.
Es ist festzustellen, für welche Brüche mit zweiziffrigem Zähler und zweiziffrigem Nenner dieses fehlerhafte Verfahren ebenfalls zum richtigen Ergebnis führt.

Aufgabe 26/61

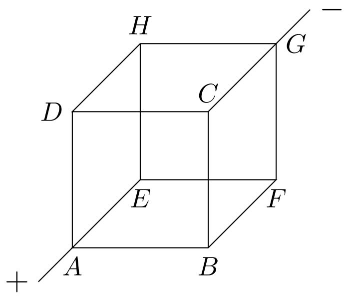


Der geometrische Mittelpunkt der kreiszylinderförmigen Ausfräsung (Abbildung) sei nicht bekannt. Zur Ermittlung des Durchmessers $D = 2R$ werden in die Ausfräsung genau geschliffene Bolzen mit dem Durchmesser $d = 2r = 30$ mm gelegt und a zu $a = 12$ mm bestimmt.
Welchen Durchmesser D hat die Ausfräsung?

Aufgabe 27/61

Auf einer Feier stößt jeder Anwesende mit jedem anderen an; die Gläser erklingen 120 mal. Als es zum Tanzen geht, sagt jemand: "Wenn jeder Herr mit jeder Dame tanzt, so können wir insgesamt 60 verschiedene Paare bilden."
Wie viele Damen und wie viele Herren waren anwesend? Die Herren war in der Überzahl.

Aufgabe 28/61



Das Kantenmodell eines Würfels besteht aus zwölf Kupferdrähten gleicher Dicke. Diese haben also alle den gleichen Ohmschen Widerstand R. An den Ecken A und G werde eine Spannung U angelegt.
Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_g des Kantenmodells?

Aufgabe 29/61

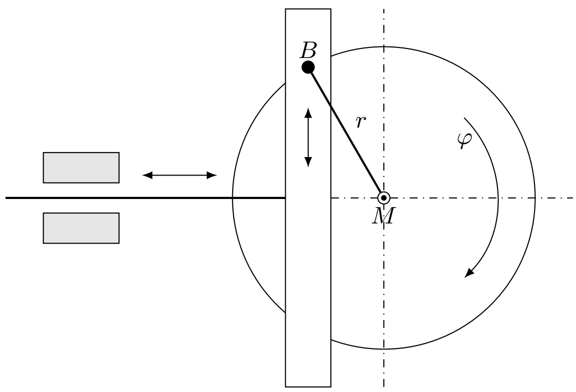
Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Endpunkte je auf einer der gegebenen Geraden liegen.

Aufgabe 30/61

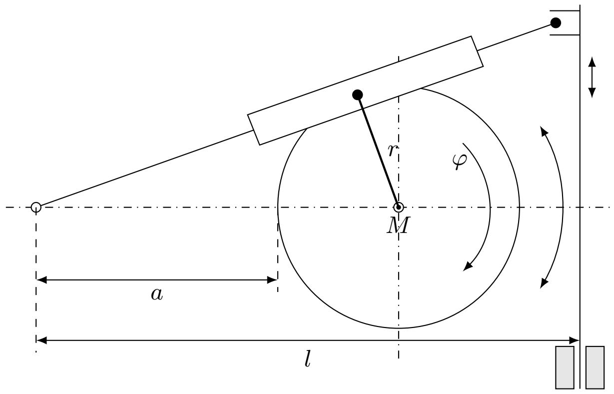
Fünf Hausfrauen wollen Schrippen kaufen. Als der Bäcker die vorrätigen gezählt hatte, erlaubt er sich einen Scherz: "Wenn jede von Ihnen die Hälfte der jeweils vorhandenen Schrippen und eine halbe dazu kauft, bleibt keine übrig!" Wieviel Schrippen hatte der Bäcker, und wieviel hätten nach diesem Vorschlag die einzelnen Kundinnen erhalten?

Aufgabe 31/61

Zur Umsetzung von Drehbewegungen in geradlinige Bewegungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei Werkzeugmaschinen werden häufig die Kreuzschleife (Konstruktionsprinzip siehe erste Abbildung) und die schwingende Kurbelschleife (Konstruktionsprinzip siehe zweite Abbildung angewendet.



Der Radius r der Drehbewegung ist der Abstand vom Drehpunkt M zum Mittelpunkt des Bolzens B



a) Es ist die Auslenkung s des schwingenden Maschinenteils (Werkzeug oder Werkstück) in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ anzugeben und die Funktion $s = f(\varphi)$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit $r = 1, a = 0{,}5$ und $l = 3$ darzustellen. Welcher wesentliche Unterschied besteht hinsichtlich der Bewegung des schwingenden Maschinenteils zwischen den beiden Antriebsarten?

b) Für die Kreuzschleife sind die Geschwindigkeit $v = v(t)$ und die Beschleunigung $b = b(t)$ des schwingenden Maschinenteils zu ermitteln; die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant: $\omega = \frac{\varphi}{t}$ = konstant.

c) Wie groß ist der absolute Extremwert der Beschleunigung bei der Kreuzschleife? Welchen Durchmesser d muss der Bolzen B mindestens haben, wenn τ die Scherfestigkeit des Bolzenwerkstoffs und m die Masse des schwingenden Maschinenteils ist?
Es gilt $\tau = \frac{P}{F}$, wobei F der Querschnitt des Materials und P die zum Abscheren (gegenseitiges Verschieben zweier "benachbarter" Querschnitte) erforderliche Kraft ist. Die Reibung werde vernachlässigt.

d) Für die schwingende Kurbelschleife ist aus der graphischen Darstellung der Weg-Zeit-Funktion der annähernde Verlauf der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion und der Beschleunigung-Zeit-Funktion abzulesen und graphisch darzustellen. Auch dabei gelte $\omega = \frac{\varphi}{t}$ = konstant.

e) Für welche Arten von Maschinen kommen diese beiden Antriebsarten auf Grund ihrer Eigenschaften vorwiegend in Frage?

In den Heften des Jahrgangs 1961 wurden 31 Aufgaben veröffentlicht.

2.2 Aufgaben 1962

Aufgabe 1/62

Auf ein hölzernes Rad mit einem Durchmesser $d = 75$ mm soll ein schmiedeeiserner Reifen bei einer Temperatur $t \approx 500°$C aufgezogen werden. Nach dem Abkühlen soll der Durchmesser D des Reifens um 0,5 mm kleiner sein als der Durchmesser d des Rades, so dass der Reifen das Rad fest zusammenpresst.
Wie groß muss der Durchmesser D' des Reifens bei Anfertigung sein, damit er nach dem Abkühlen des geforderte Maß hat?
Der Ausdehnungskoeffizient von Schmiedeeisen werde mit $\alpha \approx 0{,}000012$ je Grad angenommen.

Aufgabe 2/62

Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu ermitteln, bei denen das Verhältnis

$$\frac{PP_1}{PP_2}$$

der Abstände PP_1 und PP_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 den konstanten Wert c hat.

Aufgabe 3/62

Wie lautet das Bildungsgesetz (das allgemeine Glied) der Zahlenfolge

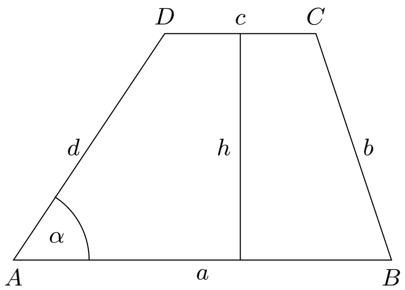
$$(v_n) = 0, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 11, 11, ...$$

Aufgabe 4/62

Welchen Rest lässt die Zahl 2^n beim Teilen durch 3?

Aufgabe 5/62

Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und c, der Höhe h und dem Winkel α (Abbildung). Gesucht ist die Parallele zu a und c, die die Fläche des Trapezes halbiert.
Lösung 1. durch Berechnung, 2. durch Konstruktion.



Aufgabe 6/62

Der kleine Zeiger der Uhr wird während eines Umlaufs mehrmals von großen Zeiger überholt.

1. Es sind die Winkel zu berechnen, die beide Zeiger beim Überrunden mit der Zeigerstellung um 0^h bilden.

2. Es ist die Gleichung anzugeben, aus der man die Zeit (in min) errechnen kann, die der große Zeiger von einer beliebigen Stunde bis zum Erreichen des kleinen Zeigers benötigt.

Aufgabe 7/62

Auf einer Eisenbahnstrecke begegnen sich ein D-Zug und ein Schnelltriebwagen. Der D-Zug hat eine Länge von $l_d = 260$ m und eine Geschwindigkeit von $v_d = 90\ \frac{km}{h}$, der Schnelltriebwagen ist $l_s = 30$ m lang und hat eine Geschwindigkeit von $v_s = 144\ \frac{km}{h}$.
Wie lange dauert für einen Reisenden im D-Zug die Vorbeifahrt des Triebwagens und für einen Reisenden im Triebwagen die Vorbeifahrt des D-Zuges?

Aufgabe 8/62

Zwei Primzahlen, deren Differenz dem absoluten Betrag nach gleich 2 ist, nennt man Primzahlzwillinge. Man beweise, dass oberhalb von 3 die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 9/62

a) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d = 2r$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem gleichen Teilkreisdurchmesser ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

b) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit einem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = 3d_2$ ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

c) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = \frac{1}{3}d_2$ ab. Wie oft muss es umlaufen, bis es sich genau einmal um seine eigene Achse gedreht hat?

Aufgabe 10/62

Es ist

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \\ 5^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{9}{2} &= 4^2 - 2\cdot 4\cdot \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{9}{2}\right)^2$, so ergibt sich

$$5^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 4^2 - 2\cdot 4\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, liefert

$$5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2} \qquad \text{und mit beidseitiger Addition von } \frac{9}{2} \text{ somit} \qquad 5 = 4$$

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 11/62

Berechnung der Jahreszahl 1962 aus dem Geburtstag
Schreiben Sie Ihren Geburtstag auf. Verdoppeln Sie die Nummer des Tages und addieren Sie die Nummer des Monats zum Ergebnis.
(Beispiel: Geburtstag 27.8., Nummer des Tages 27, Nummer des Monats 8, Rechnung: $2\cdot 27 + 8 = 62$.)
Multiplizieren Sie dieses neue Ergebnis mit 5 und addieren Sie 400. Subtrahieren Sie davon das Zehnfache der Tagesnummer. Vom Doppelten dieses Ergebnisses subtrahieren Sie das Zehnfache der Monatsnummer. Wenn Sie die so errechnet Zahl mit 2,5 multiplizieren und schließlich noch 38 subtrahieren, so erhalten Sie die Zahl 1962. Wie ist das bei so verschiedenen Ausgangswerten möglich?

Aufgabe 12/62

Drei Damen, alle unter 50 Jahre alt, treffen sich zur Geburtstagsfeier der jüngsten.
"Ich habe ein seltsames Alter erreicht", sagt das Geburtstagskind, "ich bin $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie meine Tochter und 11 mal so alt wie mein Sohn. Wenn mein Sohn so alt sein wird, wie meine Tochter jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie er und 4 mal so alt wie meine Tochter."
"Merkwürdig", erwiderte die zweite, "mit mir und meinen zwei Kindern steht es ebenso!"
"Das ist doch aber ein Zufall!" sagte die dritte nach einigem Nachdenken, "die gleiche Rechnung stimmt bei mir und meinen zwei Kindern! Und dabei sind wir drei Frauen doch verschieden alt!"
Wie alt sind die Mütter und ihre Kinder?

Aufgabe 13/62

Warum kann eine Quadratzahl oberhalb von 9 niemals aus lauter ungeraden Ziffern bestehen?

Aufgabe 14/62

Das Dreieck ABC sei bei C rechtwinklig. Es sei $CD = h_c$ die Höhe der Hypotenuse; ferner seien ρ der Radius des Inkreises im Dreieck ABC, ρ_1 und ρ_2 die Radien der Inkreise in den Teildreiecken ADC und BDC.
Man beweise, dass die Summe σ der Inkreisradien ρ, ρ_1 und ρ_2 gleich der Höhe h_c ist!

Aufgabe 15/62

Es sei $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Beweisen Sie, dass dann auch gilt (Voraussetzung: $a, b, c, d > 0$)

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Aufgabe 16/62

Als "magisches Quadrat" bezeichnet man eine quadratische Anordnung von Zahlen, bei der die Summe aller in einer Zeile bzw. Spalte (oft auch Diagonalen) stehenden Zahlen konstant ist.
Manche magischen Quadrate sind zentralsymmetrisch, d.h., die Summe ie zweier zum Mittelpunkt des Quadrats symmetrisch gelegener Zahlen ist konstant.
Man beweise, dass in diesem Fall zwei Zeilen bzw. Spalten, die zu einer Mittellinie des Quadrats symmetrisch liegen, die gleiche Quadratsumme ergeben. Beispiel:

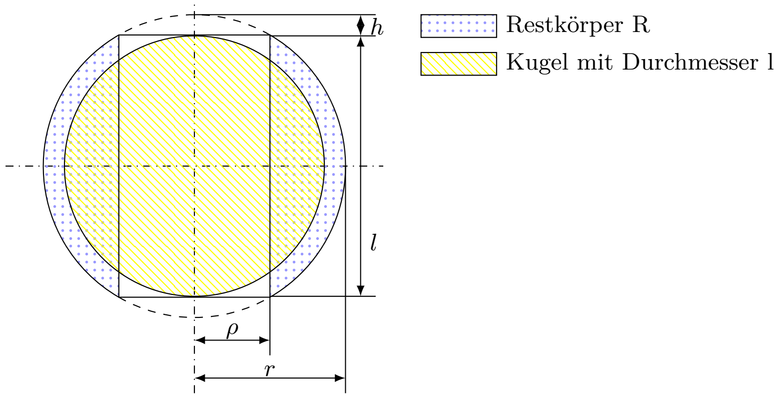
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Aufgabe 17/62

Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte $A(-4;5)$ und $B(4;5)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x + 15$. Gesucht sind die Kreise K, die durch A und B gehen und g berühren.
Lösung a) analytisch, b) konstruktiv.

Aufgabe 18/62

Bei zentrisch-zylindrischer Durchbohrung einer Kugel verbleibt ein ringförmiger Restkörper R. Es soll nachgewiesen werden, dass der Rauminhalt V_R dieses Restkörpers gleich dem Rauminhalt V_K einer Kugel mit dem Durchmesser l ist, wenn l die Länge der zylindrischen Bohrung ist (Abbildung).



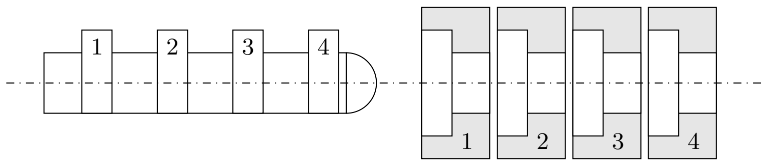
Aufgabe 19/62

Elli und Gerda erhalten das gleiche Monatsgehalt. "Als ich noch mein Anfängergehalt bekam, wurden mir einmal 13 Geldscheine ausgezahlt, und zwar doppelt soviel 50-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch einige 10-DM-Scheine; heute kann ich dasselbe sagen", erklärt Elli.
Da erwidert Gerda: "Ich bekam 5 mal soviel 20-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch 5-DM-Scheine, im ganzen doppelt so viele wie du. Wenn ich erst über 400 DM verdienen werde, spare ich doppelt soviel wie jetzt."
Wieviel Gehalt wurde jeder gezahlt, und wieviel Scheine jeder Sorte erhielten sie?

Aufgabe 20/62

Gegeben sind a und b mit $a > b$. Es ist $\frac{ab}{a-b}$ zu konstruieren.

Aufgabe 21/62



Bei einem schlüssellosen Vorhängeschloss wird der Riegelteil mit vier einseitig gelegenen, gleichen und gleichabständigen Zähnen in eine Hülse mit vier gleichen, unabhängig voneinander um die Riegelachse drehbaren Ringen eingeführt (Abbildung). Das ist aber nur bei einer bestimmten Stellung der Ringe möglich, ebenso das Öffnen des Schlosses.
Auf den Ringen sind je sechs Buchstaben eingeprägt; vier davon (je Ring einer) geben bei der Öffnungsstellung das dem Besitzer bekannte Schlüsselwort.

a) Wieviel verschiedene Schlüsselwörter sind bei dieser Konstruktion an jedem Schloss möglich? Als "Schlüsselwort" gilt jede (auch sinnlose) Zusammenstellung von vier Buchstaben.

b) Es ist die Sicherheit dieses Schlosses mit der eines nach demselben Prinzip gebauten zu vergleichen, das aber sechs Ringe mit je vier Buchstaben aufweist.

c) Wieviel verschiedene Ringe mit je sechs verschiedenen aus den 26 Buchstaben des Alphabets kann der Herstellerbetrieb anfertigen?
Dabei gelten Ringe dann als gleich, wenn sie - ohne Rücksicht auf die Reihenfolge - nur gleiche Buchstaben aufweisen und der Einschnitt unter demselben Buchstaben ist.

d) Wieviel Schlösser mit verschiedenen Schlüsselwörtern kann man aus diesen Ringen herstellen?

Aufgabe 22/62

Gesucht sind die Ellipse und die Hyperbel mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die lineare Exzentrizität ist $e = 20$.
2. Die senkrecht aufeinanderstehenden Brennstrahlen l_1 und l_2 stehen zueinander im Verhältnis $l_1 : l_2 = 4 : 3$.

Es sind a) die Längen der Brennstrahlen l_1 und l_2 zu bestimmen und b) die Gleichungen der Kegelschnitte aufzustellen.

Aufgabe 23/62

Eine Gesellschaft von 12 Personen wollte nach einem 20 km entfernten Ort gelangen. Ihr stand jedoch nur eine Taxe zur Verfügung, die außer dem Fahrer drei Personen befördern kann. Man arbeitete einen "Transportplan" aus, der garantierte, dass bei gleichzeitigem Aufbruch aller Personen auch alle gleichzeitig am Ziel anlangten. Dabei wurde eine Durchschnittsgeschwindigkeit der Taxe von 65 $\frac{km}{h}$ und der Fußgänger von 5 $\frac{km}{h}$ vorausgesetzt.
Wie sah der Transportplan aus?

Aufgabe 24/62

Die Zahlenfolgen $(s_n) = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$ und $(t_n) = \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; ...$ haben die Bildungsgesetze $s_n = \frac{1}{n}$ und $t_n = \frac{n-1}{n}$.
Welches Bildungsgesetz hat die aus beiden zusammengesetzte Folge

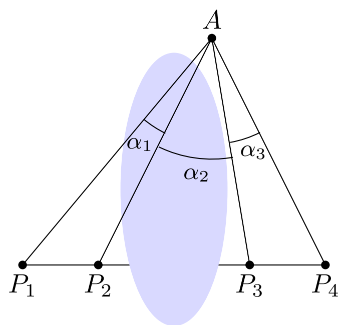
$$(u_n) = \frac{1}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; ...$$

Anmerkung: Oft wird angegeben: Es ist $u_{2n} = t_n$ und $u_{2n-1} = s_n$. Das ist nicht die gewünschte Lösung. Gesucht wird vielmehr ein einheitliches Bildungsgesetz u_n, das für $n = 1; 2; 3; ...$ die Glieder der zusammengesetzten Folge ergibt.

Aufgabe 25/62

Ein Lehrling soll in einer Kugellagerfabrik 1000 Kugeln mit einem Durchmesser von 1 cm abzählen. Um diese Arbeit zu beschleunigen, nimmt er ein Gefäß mit den Innenmaßen 10 cm x 10 c m x 10 cm; er legt die erste Schicht sauber ein und füllt dann weiter auf.
Zum Schluss stellt er fest, dass entgegen seinen Erwartungen der Innenraum des Gefäßes nicht völlig gefüllt wird. Er zählt deshalb die Kugeln ab. Überraschenderweise sind es mehr als tausend.
Wie viele waren es, und wieviel Zentimeter fehlten von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes?

Aufgabe 26/62



Die Länge der nicht zugänglichen Strecke P_2P_3 (Abbildung) soll ermittelt werden. Messbar sind auf Grund der Geländeverhältnisse die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 (wobei P_1 und P_4 auf den Verlängerungen von P_2P_3 liegen) und die Winkel α_1, α_2 und α_3.

Aufgabe 27/62

Ein Quadrat ist in $3 \cdot 3 = 9$ quadratische Felder geteilt. In diese 9 Felder sind 9 verschiedene Zahlen aus der Folge $1, 2, 3, ..., 30$ so einzutragen, dass das Produkt aus den drei Zahlen einer jeden Zeile und einer jeden Spalte stets gleich 270 ist.

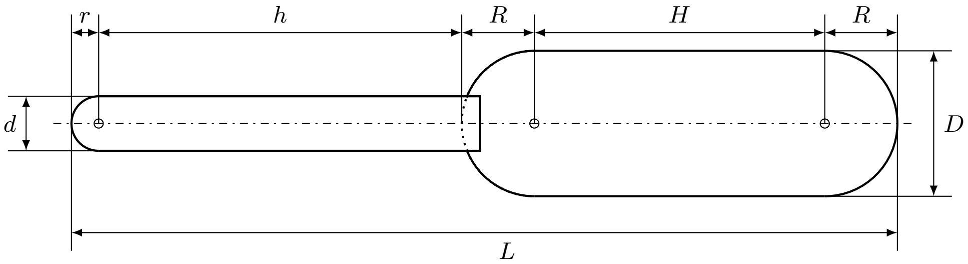
Aufgabe 28/62

a) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen sechs kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und vier der kleineren Kugel berührt. Wie groß muss der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln gewählt werden?

b) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen acht kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugeln von innen und drei der kleineren Kugeln berührt. Es ist der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln zu bestimmen.

c) Der Hohlkugel sind vier einander gleiche Kugeln so einzulagern, dass jede Kugel jede andere Kugel berührt. Wie groß ist ihr Durchmesser $d = 2r$?

Aufgabe 29/62



Es sind die Maße eines Aräometers zu bestimmen, an das folgende Forderungen gestellt werden:
1. Messbereich von $\rho_1 = 1{,}00 \frac{g}{cm^3}$ bis $\rho_2 = 2{,}00 \frac{g}{cm^3}$;
2. $d = 2r = 1$ cm;
3. $D = 2R = 2$ cm;
4. Die Skalenteilung soll so eingerichtet werden, dass im Mittel 2 mm Skalenlänge einer Differenz von $0{,}01 \frac{g}{cm^3}$ entsprechen.

Wie sind die Werte für h, H, L und für die Masse m des Aräometers zu wählen?

Aufgabe 30/62

Zu untersuchen sind Kreiskegelstümpfe mit gleicher Höhe und flächengleichen Achsschnitten. Wie groß muss der Deckkreisradius sein, damit das Volumen möglichst groß wird?
Lösung a mit Hilfe, b ohne Verwendung der Differentialrechnung.

Aufgabe 31/62

Es sei K_l ein Halbkreis mit dem Radius r_1, K_2 ein Kreis mit dem Radius $r_2 = 0{,}5r_1$, der den Durchmesser und die Peripherie von K_l berührt, und K_3 ein Kreis mit dem Radius r_3, der sowohl den Durchmesser und die Peripherie von K_l als auch die Peripherie von K_2 berührt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen für r_3 gilt $4r_3 = r_1$!

Aufgabe 32/62

Der Durchmesser d eines Kreises wird von einer Sehne unter einem Winkel von 30° so geschnitten, dass er im Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ geteilt wird.
a) Wie lang ist die Sehne?
b) Welchen Abstand hat die Sehne vom Mittelpunkt des Kreises?

Aufgabe 33/62

Gegeben sind die Achse einer Parabel mit dem Brennpunkt F und dem Parameter OF sowie eine Gerade g, die die Parabelachse im Punkt S so schneidet, dass $SO > SF$ ist. Es sind die Schnittpunkte von g mit der Parabel zu konstruieren.

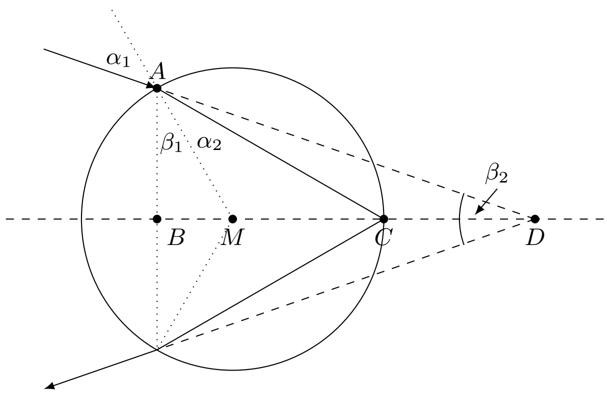
Aufgabe 34/62

Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr zwei Punkte A und B.
Man beweise: Die Länge CT einer Tangente von einem auf g liegenden Punkt C an einen durch A und B gehenden Kreis (T ist der Berührungspunkt) ist nur von der Lage von C, nicht aber vom Radius r des Kreises abhängig.

Aufgabe 35/62

Welchen Neigungswinkel α muss eine schiefe Ebene mit der Basis c haben, wenn eine Kugel auf ihr in kürzester Zeit herabrollen soll? Die Reibung und das Drehmoment werden vernachlässigt.

Aufgabe 36/62



Ein Lichtstrahl werde in einem kugelförmigen Flüssigkeitstropfen einmal partiell reflektiert. Der Brechungsindex Luft-Flüssigkeit sei n_{LF}.

1. Welchen Winkel können einfallender und ausfallender Strahl maximal miteinander bilden (vgl. Abbildung)?

2. Welche Werte ergeben sich, wenn die Flüssigkeit Wasser ist? Für den Brechungsindex Luft-Wasser gilt $n_{LF} = \frac{4}{3}$.

3. Welche Folgerung lässt das Ergebnis auf den Regenbogen zu?

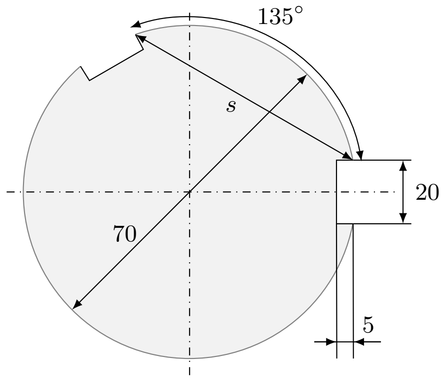
2.3 Aufgaben 1963

Aufgabe 1/63

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels (also ohne Verwendung eines Lineals) ein Quadrat, in dem A und B benachbarte Eckpunkte sind.

Aufgabe 2/63

In eine Welle sollen zwei Längsnuten eingefräst werden (Querschnittszeichnung siehe Abbildung). Ein Verdrehen der Welle um 135° ist mit den vorhandenen technischen Mitteln nicht zu erreichen. Daher ist die Einstellung mittels eines Sehnenmaßes erforderlich. Wie groß ist das Sehnenmaß s?
Die erforderlichen Maße sind der Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 3/63

In dem linearen Gleichungssystem

$$0{,}9x - 3{,}2y + 10{,}1 = 0 \qquad , \qquad 1{,}1x - 1.0y + 0{,}7 = 0$$

sind für die Koeffizienten der Unbekannten und für die absoluten Glieder Abweichungen von $\pm 0{,}05$ zulässig. Man bestimme für die Lösungen $x = 3$ und $y = 4$ die größtmöglichen Abweichungen nach oben und nach unten!

Aufgabe 4/63

Vorhanden sind eine Balkenwaage, ein 3-g-Gewichtsstück und ein 8-g-Gewichtsstück. Es ist zu zeigen, dass man damit alle ganzzahligen Grammmengen $1g, 2g, ..., ng$ mit höchstens n Wägungen bestimmen kann, wenn $n \geq 4$ ist.

Aufgabe 5/63

Gegeben sind vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in einer Ebene. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, dessen Seitenmittelpunkte die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sind.
a) Welche Bedingung ist für die Lage der Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 notwendig, damit die Aufgabe lösbar ist?
b) Wieviel Lösungen sind möglich, wenn die Aufgabe lösbar ist?

Aufgabe 6/63

Man zeige, dass der Ausdruck $n^7 - n$ für jede natürliche Zahl n ohne Rest durch 42 teilbar ist.

Aufgabe 7/63

Zehn Eimer von gleicher Größe und gleichem Aussehen sind mit Münzen gefüllt, die sich äußerlich durch nichts voneinander unterscheiden. In neun von diesen Eimern wiegt jede Münze 10 g, in einem dagegen 11 g.
Wie kann man durch eine einzige Wägung ermitteln, in welchem Eimer sich die Münzen mit der Masse 11 g befinden?

Aufgabe 8/63

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Gesucht ist die Gerade g, deren Schnittpunkte X mit AB und Y mit AC die Bedingung $BX = XY = YA$ erfüllen.

Aufgabe 9/63

Für die Aufgabe
"Wie lautet die Gleichung des Kreises, der den Mittelpunkt $M(3;-5)$ hat und der die Gerade $2x+6y=3$ berührt?"
wir der folgende analytische Lösungsweg angegeben:
Die Gerade $2x+6y=3$ (1) ist Tangente an den Kreis mit der Gleichung

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = r^2$$

Wenn $(x_1; y_1)$ die Koordinaten des Berührungspunktes sind, lautet die Gleichung der Kreistangente

$$(x_1-3)(x_1-3) + (y_1+5)(y_1+5) = r^2 \to (x_1-3)x + (y_1+5)y = r^2 + 3(x_1-3) - 5(y_1+5) \quad (3)$$

Da die Gleichungen (1) und (3) die Gleichungen ein und derselben Tangente an den Kreis (2) sind, ergeben sich die Koordinaten des Berührungspunktes und der Radius des Kreises durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} x_1 - 3 = 2; &\quad \text{also} \quad x_1 = 5 \\ y_1 + 5 = 6; &\quad \text{also} \quad y_1 = 1 \\ r^2 + 3(x_1-3) - 5(y_1+5) = 3; &\quad \text{also} \quad r^2 = 27 \end{aligned}$$

Die Kreisgleichung lautet daher $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 27$.
Die Probe (die Koordinaten des Berührungspunktes müssen die Gleichung (1) befriedigen) ergibt, dass das Ergebnis falsch ist.
Andere Lösungsmethoden liefern tatsächlich ein anderes Ergebnis. Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 10/63

Es ist

$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}; \qquad \sqrt{17\frac{17}{288}} = 17\sqrt{\frac{17}{288}}; \qquad \sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$$

Unter welchen Bedingungen für die in den Ausdrücken enthaltenen Zahlen gelten die Gleichungen allgemein?

Hinweis: Die Schreibweise $\sqrt{3\frac{3}{8}}$ ist als gemischte Zahl zu verstehen, d.h. $\sqrt{3\frac{3}{8}} = \sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

Aufgabe 11/63

Der folgende Satz ist zu beweisen: In jedem Viereck ist die Summe aus den Quadraten der Seiten gleich der Summe aus den Quadraten der Diagonalen und dem vierfachen Quadrat des Abstands der Diagonalmitten.

Aufgabe 12/63

Es sei a eine reelle Zahl. Dann gilt $-\frac{1}{a} = 0$.
Beweis:

$$\int \tan(ax)dx = \int \sin(ax)(\cos(ax))^{-1}dx$$

Durch partielle Integration mit

$$\sin(ax) = u'; \qquad u = -\frac{1}{a}\cos(ax); \qquad (\cos(ax))^{-1}) = v; \qquad v' = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^2} \cdot a$$

folgt

$$\int \tan(ax)dx = u \cdot v - \int (v' \cdot u)dx = -\frac{1}{a} + \int \left(\frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^2} \cdot a \cdot \frac{1}{a}\cos(ax)dx \right)$$

$$\int \tan(ax)dx = -\frac{1}{a} + \int \tan(ax)dx$$

Durch Subtraktion von $\int \tan x dx$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich die Behauptung. Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 13/63

Einem Mathematiker wurde das Fahrrad gestohlen. Als man ihn nach seiner Fahrradnummer fragt, antwortet er: "Sie können die Nummer aus den folgenden Angaben errechnen:

a) Addiert man zum Quadrat der ersten Stelle das Quadrat der zweiten Stelle, so erhält man das Quadrat der dritten Stelle.

b) Subtrahiert man von der ersten Stelle die zweite Stelle, so erhält man die um 1 vergrößerte fünfte Stelle.

c) Die zweite Stelle ist gleich der vierten, die dritte Stelle ist gleich der sechsten und gleich der siebenten."

Welche Fahrradnummer hatte der Mathematiker?

Aufgabe 14/63

Zur Nachprüfung, ob der Querschnitt eines Bolzens genau kreisförmig ist, wird der Bolzen zwischen den angeschobenen Messbacken einer Schiebelehre gedreht und die Veränderung des Messbackenabstandes beobachtet. Zweifellos ermöglicht eine Veränderung des Messbackenabstandes einen Schluss dahingehend, dass der Querschnitt nicht kreisförmig ist.
Lässt umgekehrt die Unveränderlichkeit des Messbackenabstands den Schluss auf einen genau kreisförmigen Querschnitt zu?

Aufgabe 15/63

Es ist zu beweisen, das für $a,b \geq 0; n \geq 2$, ganz, gilt:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

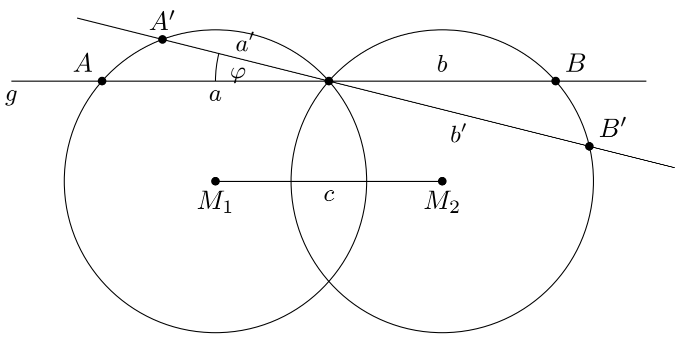
Aufgabe 16/63

Folgendes "Kartenkunststück" ist mathematisch zu begründen:
Man lässt einen Mitspieler aus einem Kartenspiel von 32 Blatt eine beliebige Karte ziehen und verdeckt niederlegen. Es sei dies beispielsweise (ohne Rücksicht auf die Farbe) eine Sieben.
Der Mitspieler legt nun weitere Karten auf die gezogene, indem er von der Augenzahl der gezogenen an bis 11 weiterzählt (im Beispiel also "acht, neun, zehn, elf"). Damit erhält man einen Kartenhaufen.
Das Verfahren wird mit weiteren Kartenhaufen fortgesetzt, bis ein Rest an Karten verbleibt, der keinen vollständigen Haufen mehr ergibt (wird dabei ein As gezogen, so bildet dies alleine einen Haufen).
Aus der Anzahl der Haufen und der Anzahl der Karten im Rest kann man, ohne beim Bilden der Haufen zugesehen zu haben, die Summe der Augen auf den gezogenen Karten ermitteln.
Man gebe die Rechnung an.

Aufgabe 17/63

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r. Der Kreis soll so in drei flächengleiche Teile zerlegt werden, dass der Umfang eines jeden Teils gleich dem Kreisumfang ist.

Aufgabe 18/63



Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien $r_1 = r_2 = r$. Der Abstand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 sei c, und es gelte die Beziehung $r < c < 2r$. Durch einen Schnittpunkt der beiden Kreise werden eine Gerade g gezogen.
Wenn g parallel zu M_1M_2 verläuft, sind die in den Kreisen entstehenden Sehnen a und b gleich lang: $a = b$. Wird g aus dieser Lage um den Winkel φ gedreht, so entstehen die Sehnen a' und b' mit $a' \neq b'$.
Folgende Fragen sind zu beantworten:

1. In welchem Verhältnis stehen die Kreisbögen AA' und BB'?
2. Welches der Produkte ab und $a'b'$ ist kleiner?
3. Für welche Lage von g ist $a'b'$ ein Maximum, wenn $r_1 > r_2$ gilt? (In diesem Fall soll entsprechend gelten $r_1 < c < r_1 + r_2$)

Bezüglich der Bezeichnungen vgl. die Abbildung. Die Gerade g soll sich nur so weit drehen, dass die beiden Sehnen noch beiderseits des Drehpunktes liegen.

Aufgabe 19/63

Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen unter anderem eine Schafherde. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihm auftragen, er solle ein Schaf für soviel Mark verkaufen, wie die Herde Schafe hat.

Der Mittelsmann bringt dem Erlös in lauter 10-Mark-Scheinen und einem Rest an Kleingeld, der keinen vollen 10-Mark-Schein mehr ergibt. Die Brüder teilen das Geld so, dass beide gleich viele 10-Mark-Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10-Mark-Schein und der Kleingeldrest übrig. Da sagt der ältere zum jüngeren Bruder: "Ich nehme den Schein, und du bekommst den Rest und ein von mir soeben gekauftes Taschenmesser, dann haben wir beide gleich viel bekommen."
Wie teuer war das Taschenmesser?

Aufgabe 20/63

Es ist ein Dreieck aus $h_c = 3{,}5$ cm, $w_\gamma = 4$ cm und $c = 12$ cm zu konstruieren, wobei h_c die Höhe des Dreiecks auf der Seite c und w_γ die Halbierende des Winkels γ ist.

Aufgabe 21/63

Von einem konvexen Polyeder mit 53 Ecken und 19 Flächen werden sämtliche Ecken so durch ebene Schnitte abgeschnitten, dass jeder Schnitt genau eine Ecke erfasst und kein Schnitt einen anderen trifft oder berührt.
Wieviel Kanten, Ecken und Flächen hat das dadurch entstehende Polyeder?

Aufgabe 22/63

Gesucht sind drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, deren Quadratsumme eine aus vier gleichen Ziffern bestehende Zahl ist.

Aufgabe 23/63

Ein Dreiecke ist aus den drei Höhen zu konstruieren.

Aufgabe 24/63

Vier nicht benachbarte Ecken eines Quaders $V = abc$ werden durch ebene Schnitte so abgestumpft, dass von jeder Kante die Strecke x wegfällt. Mit den übrigen Ecken wird entsprechend verfahren, und zwar werden dort die Schnitte so geführt, dass an jeder Ecke genau die dort zusammenstoßenden, bei der Abstumpfung der ersten Ecken stehengebliebenen Kantenreste entfernt werden.
Wie groß muss man die Strecke x wählen, wenn der so entstehende, von acht Dreiecken und sechs Parallelogrammen begrenzte Vierzehnflächner einen extremen Inhalt haben soll?

Aufgabe 25/63

Aus einem Brett sind ein Kreis mit dem Durchmesser $d = 2r$, ein Quadrat mit der Seite $a = 2r$ und ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $a = 2r$ und der Höhe $b = 2r$ ausgeschnitten.
Welcher Körper lässt sich durch jede der drei Öffnungen hindurchschieben so, dass er sie dabei vollständig ausfüllt?

Aufgabe 26/63

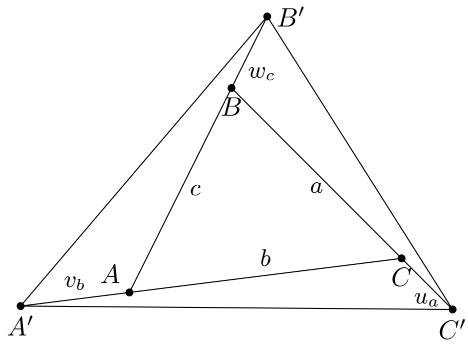
Im Jahre 1604 hatte zum ersten Mal seit Einführung des gregorianischen Kalenders der Februar fünf Sonntage. In welchen Jahren wiederholt sich diese Eigenschaft?

Aufgabe 27/63

Man beweise, dass es unendliche viele Primzahlen der Form $6m-1$ gibt (wobei m eine natürliche Zahl sei).

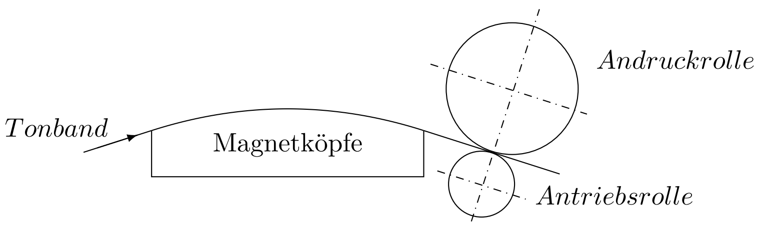
Aufgabe 28/63

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Die Seite $a = BC$ werde über C hinaus um u_a bis C' verlängert, die Seite $b = CA$ über A hinaus um v_b bis A' und die Seite $c = AB$ über B hinaus um w_c bis B'.
Wie groß ist der Flächeninhalt F' des Dreiecks $A'B'C'$, gemessen in Flächeninhalten F des Dreiecks ABC? (Abbildung)



Aufgabe 29/63

Bei einem Magnettongerät wird das Tonband nach der in der Abbildung schematisch gezeigten Konstruktion an den Magnetköpfen vorbeigezogen.



Infolge von Herstellungsungenauigkeiten schwankt die Drehzahl n der Antriebsrolle um maximal ±0,1%. Ferner ist der Radius r der Antriebsrolle mit einem Fehler von maximal ±0,01 mm behaftet. Mit diesem Magnettongerät wird ein 1000-Hz-Ton aufgenommen und anschließend abgespielt.
Um wieviel Hertz schwankt der abgespielte Ton maximal, wenn außer den angegebenen Ungenauigkeiten keine weiteren Fehler vorhanden sind? Dabei sei $n = 600\text{min}^{-1}$ und $r = 3$ mm.
Anleitung: Die Frequenz f ist der Tonbandgeschwindigkeit v proportional; d.h. $f = k \cdot v$, wobei k ein konstanter Faktor ist.

Aufgabe 30/63

Auf einer schiefen Ebene verstellbarer Neigung α liegt eine Masse m. Zwischen der Masse und der Ebene besteht Haftreibung. Der Haftreibungskoeffizient sei μ_0. Die Masse ist durch einen Faden am oberen Rand der schiefen Ebene befestigt. Dieser Faden reißt bei einer Belastung L_r. Die Neigung der Ebene wird nun (bei 0° beginnend) vergrößert.
Bei welcher Neigung α_r reißt der Faden?

a) Man löse die Aufgabe in allgemeinen Größensymbolen, d.h., man stelle $\alpha_r = f(m; \mu_0; L_r; g)$ explizit dar.

b) Man berechne α_r zahlenmäßig für $m = 3$ kg, $\mu_0 = 0{,}3$, $L_r = 8$ N und $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$.

Aufgabe 31/63

Gegeben sei eine vierziffrige Zahl Z mit der folgenden Eigenschaft: Streicht man die ersten beiden Ziffern weg, so erhält man die Quadratwurzel von Z. Wie heißt die Zahl Z?

Aufgabe 32/63

Die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps wurde experimentell ermittelt. Bei Montage auf dem Hinterrad ergaben sich durchschnittlich 15000 km Fahrtstrecke bis zum vollständigen Verschleiß, bei Montage auf dem Vorderrad dagegen 25000 km.

a) Nach welcher Fahrtstrecke müssen zwei gleichzeitig aufmontierte Räder ausgewechselt (Vorder- und Hinterreifen vertauscht) werden, wenn beide nach der gleichen Fahrtstrecke vollständig verschleißt sein sollen?

b) Welche Fahrtstrecke kann man maximal mit zwei Reifen zurücklegen?

Es werde angenommen, dass der Verschleiß proportional zur Fahrtstrecke ist.

Aufgabe 33/63

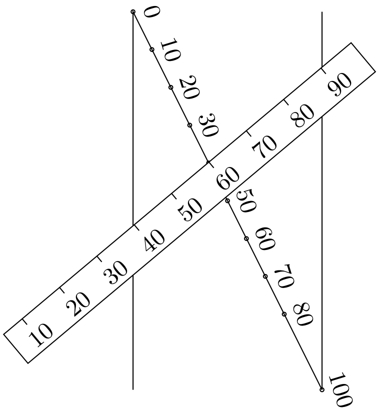
Es sollen u Teile einer x-prozentigen Lösung mit v Teilen einer y-prozentigen Lösung derselben Chemikalie gemischt werden, so dass sie $u+v$ Teile einer z-prozentigen Lösung ergeben.
1) Man berechne aus den Werten, wobei $u:v$ das Mischungsverhältnis darstellt,
a) x, y und $u:v$ den Wert z
b) x, z und $u:v$ der Wert y
c) x, y und z den Wert $u:v$

2) In der Praxis wird zur Vereinfachung der Rechnung häufig das sogenannte "Mischungskreuz" angewendet: Die Differenzen aus der Prozentigkeit einer der Ausgangslösungen und der Prozentigkeit der Mischung ergeben jeweils die erforderlichen Anteile der anderen Ausgangslösung.
Beispiel: Aus einer 96-prozentigen und einer 89-prozentigen Lösung soll eine 85-prozentige Lösung hergestellt werden. Das Mischungskreuz erhält folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccc} 96 & & & & 5 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 85 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 80 & & & & 11 \end{array}$$

Es sind also 5 Teile der 96-prozentigen Lösung mit elf Teilen der 80-prozentigen Lösung zu mischen.
Man beweise die Richtigkeit dieses Verfahrens.

3) Misst man u und v in Prozenten der gewünschten Gesamtmenge, so kann man auch das folgende Nomogramm (Abbildung) verwenden.



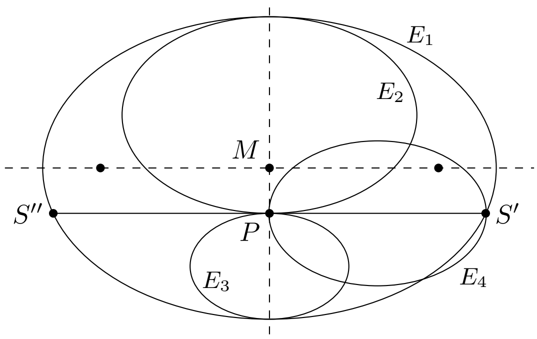
Der Mittelteil des N-förmigen Nomogramms trägt eine Einteilung von 0 bis 100, die die Anteile u und v an der gewünschten Gesamtmenge liefert. Auf einem beweglichen Stab ist die Prozentigkeit der Lösungen aufgetragen.
Soll z.B. durch Mischung einer 40-prozentigen mit einer 90-prozentigen eine 60-prozentige Lösung entstehen, so sind Punkte 40 und 60 der beweglichen Skala auf die Parallelen zu legen; der Stab ist nun so lange parallel zu sich selbst zu verschieben, bis er von der schrägen Skala bei 60 geschnitten wird.
Dieser Schnittpunkt teilt die schräge Skala im Verhältnis der zu mischenden Anteile; in unserem Beispiel wären also 40 Teile der 90-prozentigen mit 60 Teilen der 40-prozentigen Lösung zu mischen.
Man beweise die Richtigkeit dieses Verfahrens.

Aufgabe 34/63

Gesucht werden die drei positive ganze Zahlen, die nicht sämtlich gerade sind und für die folgende weitere Bedingungen gelten:
1. Ihre Summe beträgt 102.
2. Ihr Produkt ist 24024.

Aufgabe 35/63

Gegeben ist eine Ellipse E_1 mit den Halbachsen a_1 und b_1, deren kleine (bzw. große) Achse durch den Punkt P in zwei Teilstrecken zerlegt ist. Diese Teilstrecken seien die kleinen (bzw. großen) Achsen zweier weiterer Ellipsen E_2 und E_3, die der Ellipse E_1 ähnlich seien.



Durch P sei die Parallele zur großen (bzw. kleinen) Achse von E_1 gezogen; deren Schnittpunkte mit E_1 sind mit S' und S'' bezeichnet. Wird $PS' = PS''$ als große (bzw. kleine) Achse einer den Ellipsen E_1, E_2 und E_3 ähnlichen Ellipse E_4 gewählt, so gilt

$$F(E_1) - F(E_2) - F(E_3) = 2F(E_4)$$

wobei mit $F(E_i)$ der Flächeninhalt der Ellipse F_i bezeichnet ist. Man führe den Beweis für diese Behauptung!

Aufgabe 36/63

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die Ungleichung gilt:

$$(n+1)^n < n^{(n+1)}$$

2.4 Aufgaben 1964

Aufgabe 1/64

Es gibt in der Folge der natürlichen Zahlen zwei Gruppen von je vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Primzahlen, die symmetrische zu einem Primzahlzwilling angeordnet sind. Der Abstand zwischen der kleinsten und der größten dieser Primzahlen beträgt 70, ihr Produkt ist gleich 3959.
Welches sind die acht dieser Primzahlen und der Primzahlzwilling?

Aufgabe 2/64

Man beweise die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Dabei beträgt n die Anzahl der Faktoren.

Aufgabe 3/64

Auf jeder Ecke eines Rechtecks $F = ab$ wird eine Strecke x abgetragen, und zwar

a) von jeder Ecke im entgegengesetzten Uhrzeigersinn,

b) von zwei gegenüberliegenden Ecken aus in beide Richtungen

Die sich dadurch ergebenden Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms. Für welche Strecke x wird dessen Inhalt extrem?

Aufgabe 4/64

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Der Kreisumfang ist unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels in vier gleiche Teile zu teilen.

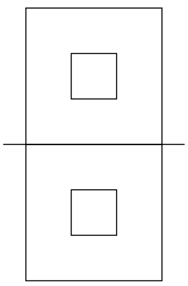
Aufgabe 5/64

Es ist zu beweisen, dass stets mindestens eine der drei natürlichen Zahlen x, y und z, die der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen (pythagoreische Tripel), durch 5 teilbar ist!

Aufgabe 6/64

Man zeichne eine Gerade durch die zwei gegebenen Punkte P und Q, die etwa 37 cm voneinander entfernt sind. Zur Verfügung stehen ein Lineal (ohne Maßeinteilung) von 20 cm Länge und ein Winkeldreieck mit einer Hypotenusenlänge von 15 cm Länge. Nicht erlaubt ist das Einvisieren des Lineals zwischen den beiden Punkten (etwa so, wie man im Gelände ein Bandmaß zwischen zwei Fluchtstäben einvisiert).

Aufgabe 7/64



Welche Form hat ein Körper mit dem in der Abbildung gezeigten Grund- und Aufriss?
Dabei sind alle Vierecke Quadrate, alle Kanten, die nicht sichtbar sind, werden im Grund- und Aufriss von den Quadratseiten vollständig überdeckt.

Aufgabe 8/64

Ein gleichschenkliges Dreieck ist aus der Basis a und der Winkelhalbierenden w eines Basiswinkels zu konstruieren.

Aufgabe 9/64

Es sei p eine weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbare ganze Zahl.
Welchen Rest lässt p^4 beim Teilen durch 240?

Aufgabe 10/64

Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 und ein Kreis K. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit A auf g_1, B und D auf g_2 und C auf K. Ferner gebe man eine vollständige Determination.

Aufgabe 11/64

Von einem Viereck $ABCD$ seien die folgenden Stücke gegeben: $AB = a$, $\measuredangle BCA = \gamma_1$, $\measuredangle ACD = \gamma_2$, $\measuredangle CDB = \delta_1$, $\measuredangle BDA = \delta_2$.
a) Das Viereck ist zu konstruieren.
b) Wie groß ist die Seite $CD = c$, wenn $AB = a = 1$ (LE), $\gamma_1 = 30°$, $\gamma_2 = 30°$, $\delta_1 = 45°$ und $\delta_2 = 60°$ ist? (Lösung durch Berechnung)

Aufgabe 12/64

Es gelte $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = n^n$. Man beweise, dass dann gilt

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \geq n^3$$

Aufgabe 13/64

Es ist zu beweisen: Sind U der Umfang und $s_a; s_b; s_c$ die Seitenhalbierenden eines Dreiecks, so gilt die Ungleichung

$$\frac{U}{2} < s_a + s_b + s_c < U$$

Aufgabe 14/64

Gegeben sind eine Strecke AB und eine dazu parallele Gerade g. Die Strecke ist ausschließlich mit Hilfe eines Lineals zu verdoppeln, d.h., zur Konstruktion ist nur das Ziehen von Geraden zugelassen.

Aufgabe 15/64

Ein Exportauftrag über 1500 Stück Type 1 und 800 Stück Type 2 eines Gerätes soll auf zwei Werke I und II verteilt werden. Der maximale Produktionsausstoß beträgt für
- Werk I: 30 Stück/Tag Type 1 oder 20 Stück/Tag Type 2,
- Werk II: 50 Stück/Tag Type 1 oder 40 Stück/Tag Type 2.

Wie muss der Auftrag auf die beiden Werke verteilt werden, wenn er in möglichst kurzer Zeit erfüllt werden soll?

Aufgabe 16/64

Welche zweistelligen Zahlen erfüllen folgende Bedingung: Das um die Quersumme verminderte Produkt der beiden Stellen ist 3?

Aufgabe 17/64

Es ist ein Dreieck aus der Seite a, dem ihr gegenüberliegenden Winkel α und der Winkelhalbierenden w_α zu konstruieren.

Aufgabe 18/64

Man stelle die beiden Funktionen graphisch dar:

$$\text{a)} \quad y_1 = \sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}; \qquad \text{b)} \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2} + \sqrt{(1-x)^2}}$$

Aufgabe 19/64

Welcher Rest ergibt sich, wenn man eine Quadratzahl durch 8 teilt?

Aufgabe 20/64

Ein Rennwagen durchfährt im fliegenden Start dreimal eine Teststrecke s, wobei die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 gemessen werden ($v_1 \neq v_2 \neq v_3$). Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit v_m aus den drei Versuchsfahrten?

Aufgabe 21/64

Gegeben ist ein Viereck $ABCD$, bei dem die Verlängerungen der Seiten AB und CD einander rechtwinklig schneiden. Es ist zu beweisen:
Teilt man die Seiten BC und DA im Verhältnis der anliegenden Seiten, so schneidet die Gerade die Verlängerungen von AB und CD unter einem Winkel von 45°.

Aufgabe 22/64

Gesucht sind zwei natürliche Zahlen a und b mit $a \neq b; a; b \neq 0$, für die die folgende Beziehung gilt: $a^3 + b^3 = (a+b)^2$.
Es ist zu zeigen, dass es (bis auf die Reihenfolge) genau ein derartiges Zahlenpaar a; b gibt.

Aufgabe 23/64

Gegeben sei ein Kreis mit zwei zueinander senkrechten, sonst aber beliebigen Sehnen PQ und RS. Es ist zu beweisen, dass für den Radius r des Kreises die Gleichung gilt:

$$4r^2 = PR^2 + QS^2$$

Aufgabe 24/64

Man gebe eine Summenformel für die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b \cdot e^{\nu(a+bx)}$$

Aufgabe 25/64

Gegeben ist eine dreiseitige regelmäßige Pyramide mit der Seitenkante $s = 10$ cm und dem Winkel $\alpha = 75°$ zwischen der Seiten- und Grundkante.
Wie lang ist der kürzeste Weg auf dem Mantel der Pyramide, der von einem Eckpunkt der Grundfläche ausgehend einmal um die Pyramide herum zum Ausgangspunkt führt?

Aufgabe 26/64

Es ist zu beweisen, dass in jedem Parallelogramm jede Seitenhalbierende ein Drittel einer Diagonale abschneidet (unter Seitenhalbierender ist die Verbindungsstrecke einer Seitenmitte mit einer Ecke zu verstehen.)

Aufgabe 27/64

Man bestimme die Folge (x_n) derjenigen x_n-Werte, für die gilt: $\sin \frac{1}{x_n} = 1$.

Aufgabe 28/64

Man suche eine dreistellige Zahl, für die die folgenden Bedingungen gelten:
1. Ihre Quersumme ist 17.
2. Multipliziert man die erste Stelle mit 4, so erhält man die aus den letzten beiden Stellen bestehende Zahl.

Aufgabe 29/64

In ein gegebenes Dreieck ABC ist ohne Benutzung äußerer Punkte eine Parallele $B'C'$ zur Seite BC so zu konstruieren (B' auf AC, C' auf AB), dass der Umfang des Dreiecks $AB'C'$ gleich der Seite AB des gegebenen Dreiecks ist.

Aufgabe 30/64

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Ungleichung gilt:

$$n! > \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1}$$

Aufgabe 31/64

Gegeben sind drei gleichgroße Kreise in einer Ebene, von denen jeder die beiden anderen berührt. Die (kleineren) Bögen zwischen den Berührungspunkten bilden ein Bogendreieck, dessen Spitzen die Berührungspunkte sind. Zeichnet man in dieses den Inkreis, so entstehen drei neue Bogendreiecke.
Man berechne und konstruiere die Radien der Inkreise für alle vier Bogendreiecke.

Aufgabe 32/64

Welche Kubikzahlen unter 10^9 enden mit ihren letzten drei Ziffern wieder mit einer Kubikzahl?

Aufgabe 33/64

Zur näherungsweisen Berechnung des Rauminhalts von Körpern in der Form von Pyramiden- und Kegelstümpfen, wie sie oft in der Technik vorkommen, wird oft die Faustformel

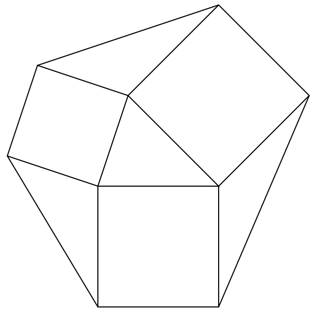
$$V \approx V_N = \frac{h}{2}(G_1 + G_2)$$

angewandt. Dabei bedeuten h die Höhe des Stumpfkörpers, G_1 und G_2 die Inhalte der beiden parallelen, zur Höhe h senkrecht verlaufenden Begrenzungsflächen.
Bei großen prozentualen Unterschieden der parallelen Begrenzungsflächen wird der Fehler bei der Verwendung dieser Formel beträchtlich (bis zu 50 %). Daher ist die Lösung der folgenden Aufgabe wichtig: Wieviel Prozent darf der Unterschied der Größen G_1 und G_2 höchstens betragen, wenn der Fehler der Näherungsformel 1 % bzw. n % nicht überschreiten soll?

Aufgabe 34/64

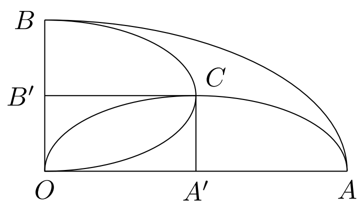
Von einem Würfel soll durch einen ebenen Schnitt ein Körper abgeschnitten werden, dessen Volumen $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens beträgt. Dabei ist jegliche Messung ausgeschlossen.

Aufgabe 35/64



Über den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks seien die Quadrate gezeichnet. Ja zwei benachbarter Ecken dieser Quadrate seien (vgl. Abbildung) geradlinig miteinander verbunden. Die dadurch entstehenden Dreiecke heißen pythagoreische Ergänzungsdreiecke.
Es ist zu beweise, dass jedes der pythagoreischen Ergänzungsdreiecke dem ursprünglichen Dreieck inhaltsgleich ist.

Aufgabe 36/64



In einen Quadranten einer Ellipse mit den Halbachsen a und b sind gemäß Abbildung zwei Halbellipsen mit den Halbachsen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ eingezeichnet.

1. Es ist der Flächeninhalt des Flächenstücks zu ermitteln, das den beiden Halbellipsen gemeinsam ist.

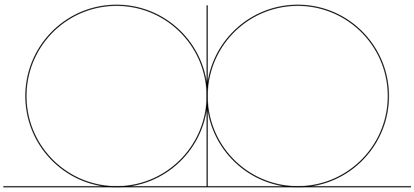
2. Es ist zu beweisen, dass dieses Flächenstück inhaltsgleich dem Flächenstück des Quadranten ist, das von keiner der beiden Halbellipsen überdeckt wird.

2.5 Aufgaben 1965

Aufgabe 1/65

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a. Es ist zu zeigen, dass man aus diesem Würfel ein Loch so herausschneiden kann, dass ein Würfel mit der Kantenlänge $b > a$ hindurchpasst.

Aufgabe 2/65



In der Abbildung sind Aufriss und Seitenriss eines nicht kugelförmigen Körpers dargestellt (der Grundriss braucht demnach kein Kreis zu sein!).
Welche Form kann der Körper haben?

Aufgabe 3/65

Die Gleichung $a^x = ax$ hat für jede reelle positive Zahl a eine Lösung $x_1 = 1$. Welche Bedingung muss die Zahl a erfüllen, damit die Gleichung

a) eine weitere Lösung $x_2 < 1$

b) eine weitere Lösung $x_2 > 1$

c) keine von 1 verschiedene Lösung hat?

Aufgabe 4/65

Es seien p_1 und p_2 zwei Primzahlzwillinge mit $p_1; p_2 > 3$. Man beweise, dass $p_1p_2 + 1$ durch 36 teilbar ist.

Aufgabe 5/65

Welche dreistelligen natürlichen Zahlen haben die folgende Eigenschaft:
Zerschneidet man ihr im Dezimalsystem dargestelltes Quadrat in zwei je dreistellige Abschnitte, so ist der rechte Abschnitt um 1 größer als der linke.

Aufgabe 6/65

Ein Radfahrer auf regennasser Straße sieht Tropfen vom höchsten Punkt des Vorderrades wegfliegen. Welche Geschwindigkeit haben diese bezüglich der Straße?

Aufgabe 7/65

Gesucht sind drei Quadratzahlen a, b und c so, dass $a - b = b - c = 24$ ist.

Aufgabe 8/65

a) Man bestimme die kleinsten beiden natürlichen Zahlen, für die die Zahl $Z = 248011n - 1$ durch 36 teilbar ist.
b) Man weise nach, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für welche die Zahl $Z' = 248001n - 1$ durch 36 teilbar ist.

Aufgabe 9/65

Man weise die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n nach:

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

Aufgabe 10/65

Ein Herr löst auf der Bank einen Scheck ein und kontrolliert nicht den ausgezahlten Betrag. In einem Geschäft bezahlt er von diesem Geld eine Rechnung über 26,66 MDN. Zu seiner Verwunderung verbleibt nun ein Rest, der doppelt so groß ist wie der Betrag, über den der Scheck ausgestellt war. Der Herr geht deshalb wieder zur Bank, wo sich herausstellt, dass der Kassierer die Zahlen für Mark und Pfennig verwechselt hat.
Über welchen Betrag lautete der Scheck?

Aufgabe 11/65

Es sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck. D, E und F seien Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c. Es ist zu beweisen, dass die Höhen gleichzeitig Winkelhalbierende im Dreieck DEF sind.

Aufgabe 12/65

Eine gut brauchbare Iterationsformel für die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{a}$ ist

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

wobei u_n ein n-ter Näherungswert ist. Es ist zu beweisen:

1. Ist $u_0 \neq 0$ ein zu kleiner Näherungswert für $\sqrt{a}$, so ist $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right)$ ein zu großer Näherungswert.
2. Ist u_n ein zu großer Näherungswert für $\sqrt{a}$, so ist $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ ein besserer zu großer Näherungswert.
3. Die Folge $\{u_n\}$, die man durch wiederholte Anwendung der Iterationsformel gewinnt, konvergiert tatsächlich gegen $\sqrt{a}$.

Aufgabe 13/65

Gegeben sind drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Man konstruiere einen vierten Punkt D, der die folgende Eigenschaft hat:
Legt man durch D einige beliebige Gerade und fällt man auf sie die Lote von den gegebenen Punkten, so ist das Lot von C gleich der Summe der Lote von A und von B.

Aufgabe 14/65

Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen $(a; n > 0$; ganz), wenn $m = \sqrt{a^n + a^{n+1}}$ eine natürliche Zahl sein soll?

Aufgabe 15/65

Welcher Beschränkung unterliegt μ, wenn die Ungleichung für alle reellen a, b und λ gelten soll:

$$a^4 + \lambda^2 b^4 \geq \mu a^2 b^2$$

Aufgabe 16/65

Der Unterschied zwischen der Differenz der Kuben und der Differenz der Quadrate zweier benachbarter natürlicher Zahlen beträgt 114. Um welche Zahlen handelt es sich?

Aufgabe 17/65

Man bestimme den geometrischen Ort für den Mittelpunkt einer Kugel mit gegebenem Radius r, die zwei einander unter dem Winkel 2α schneidende Geraden berührt.

Aufgabe 18/65

Es ist zu beweisen, dass für beliebige positive Zahlen a, b, c, d die Ungleichung

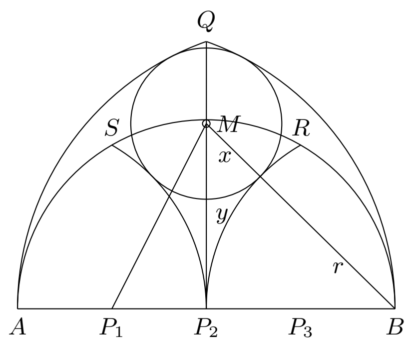
$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

gilt. In welchem Fall tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 19/65

In einer Ebene seien vier Punkte A, B, C, D gegeben, von denen nicht mehr als zwei auf derselben Geraden liegen. Man konstruiere in dieser Ebene ein Quadrat so, dass auf jeder Quadratseite (oder ihrer Verlängerung) je einer der gegebenen Punkte liegt.

Aufgabe 20/65



Eine Strecke $AB = 2r$ wird durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 in vier gleiche Teile geteilt. Kreisbögen mit den Radien $\frac{3}{2}r$ um P_1 und P_3 schneiden einander über AB in Q. Kreisbögen um A, P_2 und B mit dem Radius r schneiden einander auf derselben Seite von AB in den Punkten R und S.
Wie groß ist der Radius x des Kreises, der die Spitzbögen ARP_2 und P_2SB von außen und den Spitzbogen AQB von innen berührt (vgl. Abbildung)? Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?

Aufgabe 21/65

Es sei $S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r}}$. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Ungleichung gilt:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < S_n < 2\sqrt{n} - 1$$

Aufgabe 22/65

Gesucht ist eine natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Die letzte Ziffer ist z; streicht man diese Ziffer weg und setzt sie als erste Stelle vor die übrigen Ziffern, so entsteht das Siebenfache der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 23/65

Gegeben sind die beiden Punkte A und B. Gesucht ist der Halbierungspunkt der Strecke AB. Zur Konstruktion ist nur der Zirkel zugelassen.

Aufgabe 24/65

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \cos \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n} = 0$$

Aufgabe 25/65

Gesucht ist ein Paar natürlicher Zahlen m und n mit $m \neq n$, $m; n \neq 0$, das die Gleichung

$$\left(\frac{m}{4}\right)^m = \left(\frac{n}{4}\right)^n$$

erfüllt. Es ist weiter zu zeigen, dass es (bis auf die Reihenfolge) genau ein derartiges Paar gibt.

Aufgabe 26/65

Man beweise den folgenden Satz: Ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c und dem Umkreisradius r ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$$

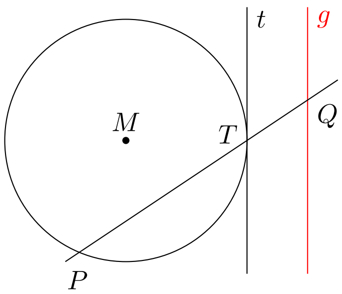
Aufgabe 27/65

Die Kurve der Funktion $y = f(x) = a^x$ soll die Kurve der Funktion $y = g(x) = x^n$ im 1.Quadranten berühren.
Für welche Werte von a und n ist dies möglich? Man bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufgabe 28/65

Eine zweistellige Zahl ist zu finden, bei der das Produkt aus den beiden Ziffern gleich der Differenz aus dem fünffachen Quadrat der letzten Ziffer und der um 10 vermehrten Quersumme ist.

Aufgabe 29/65



Gegeben sind ein Kreis k mit einer Tangente sowie dem Berührungspunkt T von k mit t und eine zu t parallele Gerade g. Jede Gerade durch T schneidet k in einem Punkt P und g in einem Punkt Q.
Es ist zu beweisen: Der Produkt $p = TP \cdot TQ$ ist konstant, d.h., p ist unabhängig von der speziellen Lage der Geraden durch T.

Aufgabe 30/65

Man beweise den folgenden Satz:
Ist p eine Primzahl und $p > 5$, so ist jede aus $p-1$ gleichen Ziffern n bestehende Zahl z durch p teilbar.
Beispiele: 444444 ist durch 7 teilbar, 1111111111 ist durch 11 teilbar.

Aufgabe 31/65

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise. Es ist eine gemeinsame Sekante zu konstruieren, so dass die Sehne des äußeren Kreises doppelt so groß ist wie die Sehne des inneren Kreises.

Aufgabe 32/65

Man zeige, dass die beiden Ungleichungen

$$xyz(x+y+z) > 0 \qquad \text{und} \qquad xy+yz+xz > 0$$

mit $x;y;z \neq 0$ genau dann gelten, wenn $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$ ist. Dabei ist $\operatorname{sgn} a = 0$, wenn $a = 0$, $\operatorname{sgn} a = 1$, wenn $a > 0$ und $\operatorname{sgn} a = -1$, wenn $a < 0$ ist.

Aufgabe 33/65

Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl. Man beweise:

a) Ist $x \neq \sqrt[n]{a}$ und $a > 0$, so ist

$$y = \frac{a+(n-1)x^n}{nx^{n-1}} > \sqrt[n]{a}$$

b) Ist

$$y_1 > \sqrt[n]{a}; \quad y_k = \frac{a+(n-1)y_{k-1}^n}{ny_{k-1}^{n-1}} \quad \text{und} \quad z_k = \frac{a}{y_k^{n-1}}$$

so konvergiert die Folge $\{y_k\}$ monoton fallend (also von oben) und die Folge $\{z_k\}$ monoton steigend (also von unten) gegen $\sqrt[n]{a}$.

Aufgabe 34/65

Es gibt vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen gilt:
Die Summe der Kuben der beiden kleineren ist gleich der Differenz der Kuben der beiden größeren. Diese vier Zahlen sind zu finden.

Aufgabe 35/65

Es seien A, B, C und D die Eckpunkte eines ebenen Vierecks. Man beweise, dass dann gilt

$$\sin\measuredangle CAB \cdot \sin\measuredangle DBC \cdot \sin\measuredangle ACD \cdot \sin\measuredangle BDA = \sin\measuredangle ABD \cdot \sin\measuredangle BCA \cdot \sin\measuredangle CDB \cdot \sin\measuredangle DAC$$

Aufgabe 36/65

Es ist zu beweisen: Wenn $|x_i| \leq 1$ und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

2.6 Aufgaben 1966

Aufgabe 1/66

Es ist zu beweisen, dass man unter n ganzen Zahlen stets k Zahlen mit $k \leq n$ so auswählen kann, dass ihre Summe durch n teilbar ist. Dabei gelte auch eine einzelne Zahl als Summe.

Aufgabe 2/66

Es ist ein Dreieck aus dem Winkel α, der Halbierenden s_a seiner Gegenseite a und der Höhe h_a auf der Gegenseite a zu konstruieren!

Aufgabe 3/66

Man löse die Gleichung

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

Aufgabe 4/66

Welches reguläre Polyeder hat folgende Eigenschaften?

1. Werden die Flächenmitten untereinander entsprechend verbunden, so entsteht wieder ein reguläres Polyeder.
2. Werden die Kantenmitten dieses zweiten Polyeders untereinander entsprechend verbunden, so entsteht ein drittes reguläres Polyeder.
3. Werden die Flächenmitten dieses dritten Polyeders untereinander entsprechend verbunden, so entsteht ein viertes reguläres Polyeder. Welches Polyeder ist das?

Aufgabe 5/66

Man beschreibe einem Kreis ein Viereck ein. Welche Bedingungen müssen die Diagonalen erfüllen, wenn die Summe der Kreisbögen über zwei nicht benachbarten Seiten gleich dem halben Kreisumfang sein sollen?

Aufgabe 6/66

In der Gaußschen Zahlenebene wird eine komplexe Zahl

$$z = u + i \cdot v = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

durch einen Punkt mit den Koordinaten $u = r\cos\varphi$ und $v = r\sin\varphi$ abgebildet. Dabei wird die u-Achse als reelle und die v-Achse als imaginäre Achse bezeichnet.
Zwischen der Geraden, die den Winkel zwischen den Achsen im ersten Quadranten halbiert und der positiven reellen Achse liegt eine Punktmenge, deren Elemente ganzzahlige Koordinaten $u; v$ haben. Diese Elemente haben die Eigenschaft, dass jedem von ihnen ein pythagoreisches Zahlentripel eindeutig zugeordnet ist; die Zahlen des Tripels entsprechen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Ecken der Ursprung, der Punkt z^2 und der Fußpunkt des Lotes von z^2 auf die reelle Achse sind.
Weshalb gehören die Punkte der erwähnten Winkelhalbierenden mit ganzzahligen Koordinaten $u; v$ nicht zu der genannten Punktmenge?

Aufgabe 7/66

Welche Bedingungen muss ein Viereck erfüllen, damit um jeden seiner Eckpunkte ein Kreis existiert, der die Kreise um die ihm benachbarten Eckpunkte berührt?

Aufgabe 8/66

Man beweise: Gilt für zwei Zahlenpaare $(a;b)$ und $(c;d)$ die folgende Gleichung

$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$$

so gilt auch die Gleichung

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$$

Aufgabe 9/66

Man berechne

$$\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$$

Aufgabe 10/66

"Beweis" dafür, dass der Gewicht einer Lokomotive gleich dem Gewicht eines Ziegelsteins ist:
Das Gewicht der Lokomotive betrage m, das Gewicht des Ziegelsteins z.
Dann sei $m + z = es$ die Summe beider. Damit gilt $m - 2s = -z$ und $m = -z + 2s$. Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$m^2 - 2ms = z^2 - 2zs$$

oder, nach Addition von s^2 auf beiden Seiten

$$m^2 - 2ms + s^2 = z^2 - 2zs + s^2 \rightarrow (m-s)^2 = (z-s)^2 \rightarrow \text{ also } m = z$$

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 11/66

Es sind die fünf Zahlen einer Lottoziehung (1 bis 90) gesucht, über die folgendes ausgesagt wird:

a) Es treten alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal auf.

b) Nur die drei mittleren Zahlen sind gerade.

c) Die kleinste Zahl hat mit der größten einen (von ihr selbst verschiedenen) gemeinsamen Teiler.

d) Die Quersumme einer Zahl ist ein Viertel der Quersumme der größten Zahl.

e) Die Quersummen zweier anderer Zahlen verhalten sich wie 1:2.

Aufgabe 12/66

Die Summe

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)^2 + (-1)^{n-1}n^2$$

soll berechnet werden!

Aufgabe 13/66

Man beweise, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für dass $z = x^y - 4$ eine Primzahl ist, wenn y eine gerade Zahl ist!

Aufgabe 14/66

Von einem Dreieck ABC sind festgelegt der Eckpunkt A, der Mittelpunkt M_i des Inkreises und der Mittelpunkt M_u des Umkreises. Das Dreieck ist zu konstruieren.

Aufgabe 15/66

Für die Berechnung der Quadratwurzel aus einer Zahl $z = p^2 + a$ mit $0 \leq a \leq 2p + 1$ gilt die Näherungsformel

$$\sqrt{z} = \sqrt{p^2 + a} \approx p + \frac{a}{2p + 1}$$

Wir groß ist der maximale Fehler dieser Näherung in Abhängigkeit von a? Wie ändert sich dieser in Abhängigkeit von p?

Aufgabe 16/66

In der Zeitung "Neues Deutschland" vom 29. Juni 1965 fand sich folgende Notiz:
Als dieser Tage ein Kleintierhalter in Christdorff im Kreis Wittstock ein Huhn schlachtete, gab es neben dem Sonntagsbraten auch noch eine Summe Bargeld als Zusatz. Im Magen des Huhns befanden sich 17 Münzen, insgesamt 34 Pfennig ...
Angenommen, es handelte sich um Münzen, die gegenwärtig im Umlauf sind. Welche Münzen waren es in welcher Anzahl?

Aufgabe 17/66

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Wie lang ist der kürzeste der Streckenzüge $AXYB$, wobei X ein beliebiger Punkt im Innern der Strecke BC und Y ein beliebiger Punkt im Innern der Strecke AC ist?

Aufgabe 18/66

Zeichnet man über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC gleichseitige Dreiecke nach außen und verbindet man die dadurch entstehenden Eckpunkte mit den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks, so gelten für die Verbindungsstrecken die folgenden Sätze:

1. Die drei Verbindungsstrecken sind gleich lang.
2. Die drei Verbindungsstrecken schneiden einander unter Winkeln von je 60°.
3. Die drei Verbindungsstrecken schneiden einander in einem einzigen Punkt im Innern des Dreiecks.

Diese Sätze sind zu beweisen.

Aufgabe 19/66

Man beweise: Die letzten beiden Ziffern der Quadrate zweier natürlicher Zahlen, für die gilt $a \pm b = 50n$ mit $n = 1, 2, 3,...$ stimmen überein.

Aufgabe 20/66

Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist in einen flächengleichen Kreis umzuformen.

Aufgabe 21/66

Zu lösen ist das Gleichungssystem

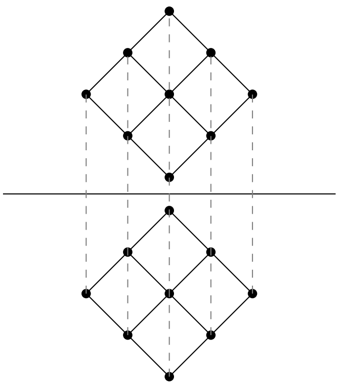
$$xy(x+y) = 20 \qquad , \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}$$

Aufgabe 22/66

Man beweise: Sind a, b und c drei nicht negative, voneinander verschiedene Zahlen, so gilt stets

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Aufgabe 23/66



Der in der Abbildung im Zweitafelbild dargestellte Körper soll um eine Achse, die senkrecht auf der Aufrisstafel steht, um 45° gedreht werden. Wie sieht das Zweitafelbild nach der Drehung aus? Um welchen Körper handelt es sich?
(Stellt man sich den Körper als Drahtmodell vor, so werden alle "hinten" bzw. "unten"liegenden Kanten in den Rissen verdeckt.)

Aufgabe 24/66

Beweis, dass $\pi = 1$ ist: Es wird das Integral $I = \int \frac{dx}{x \ln x^\pi}$ auf zwei Arten bestimmt.

1. Substitution $t = \ln x^\pi, dx = \frac{x}{\pi} dt$. Es ergibt sich
$$\int \frac{dx}{x \ln x^\pi} = \int \frac{xdx}{\pi xt} = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi} \ln|t| + C = \frac{1}{\pi} \ln|\ln x^\pi| + C$$
2. Substitution $t = \ln x, dx = xdt$. Es ergibt sich
$$\int \frac{dx}{x \ln x^\pi} = \int \frac{dx}{\pi x \ln x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi} \ln|t| + C = \frac{1}{\pi} \ln|\ln x| + C$$

Demnach ist $x^\pi = x$, also $\pi = 1$. Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 25/66

Welches ist das größte Vielfache von 11, in dem keine der Zehn mehr als einmal vorkommt?

Aufgabe 26/66

Eine Fläche, die sich aus einem Rechteck mit den Seiten a und b und einem Halbkreis mit dem Radius $r = \frac{b}{2}$ zusammensetzt, habe einen Flächeninhalt $A = 100$ cm^2.
Ohne Benutzung der Differentialrechnung ermittle man die Seiten a und $b = 2r$ so, dass der Umfang der Fläche minimal wird. Wie groß ist U_{min}?
(Der Halbkreis grenzt mit seiner geraden Begrenzungslinie an die Seite b des Rechtecks an.)

Aufgabe 27/66

Welche Bedingungen müssen die Diagonalen eines ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt S erfüllen, wenn die Flächensumme der Dreiecke ABS und DSC gleich der Flächensumme der Dreiecks BCS und ASD sein soll?

Aufgabe 28/66

Ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\frac{\pi}{3}$ werde so durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierende geteilt, dass der Umfang des einen Teils gleich dem Umfang des anderen Teils ist.
Welcher der beiden Teile hat den größeren Flächeninhalt?

Aufgabe 29/66

In einem Würfel mit der Kantenlänge a sind neun möglichst große gleiche Kugeln derart einzulagern, dass eine davon als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Körperdiagonalen hat, während die übrigen acht in die Ecken des Würfels gelegt werden.
Wie groß ist der Durchmesser d der Kugeln, ausgedrückt durch die Würfelseite a?

Aufgabe 30/66

Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$$

Man gebe $f(x+1)$ als Polynom in x an.

Aufgabe 31/66

Ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$ und g eine beliebige Gerade durch A, die BC oder die Verlängerung von BC in D und den Umkreis des Dreiecks in E schneidet, so ist stets $AD \cdot AE = AB^2 = AC^2$.
Dieser Satz ist zu beweisen.

Aufgabe 32/66

Eine elektrischer Heizofen enthält zwei Widerstände R_1 und R_2, die in vier Schaltstufen A, B, C und D geschaltet werden können.
In der Stufe A werden R_1 und R_2 parallel geschaltet, in den Stufen B und C ist je einer der beiden Widerstände in Betrieb, in der Stufe D liegen R_1 und R_2 in Reihe.
Die Widerstände sollen so bemessen werden, dass bei einer Spannung von 22 V eine maximale Leistung von 6000 W auftritt und die Leistungen in den verschiedenen Stufen eine geometrische Folge bilden.
Wie groß müssen die Widerstände sein und welche Leistungen treten bei den einzelnen Schaltstufen auf?

Aufgabe 33/66

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen z mit $100 \leq z < 1000$, die folgende Eigenschaft haben:
Bei jeder beliebigen Potenz z^k mit natürlichem k werden die letzten drei Stellen von den Ziffern von z in derselben Reihenfolge gebildet.

Aufgabe 34/66

Wieviel Raumdiagonalen hat ein Rhombendodekaeder?

Aufgabe 35/66

Es ist zu beweisen: Jede ganze Zahl $n > 1$, die nicht durch 2 oder durch 5 teilbar ist, ist ein Teiler mindestens einer Zahl der Form $10^n - 1$.

Aufgabe 36/66

Es sei $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ein Polynom n-ten Grades ($n \geq 1$, ganz), und es gelte weiterhin $|a_n| \geq |a_1|$ für $i = 0{,}1{,}2{,}...n$.
Man zeige: Für jede Nullstelle x_0 gilt $|x_0| \leq n$.

2.7 Aufgaben 1967

Aufgabe 1/67

Unter welchen Voraussetzungen ist die folgende Aufgabe lösbar?
In einem Kreis mit dem Radius r soll durch einen gegebenen Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt M gleich a ist, eine Sehne gelegt werden, so dass P die Sehne im Verhältnis $m : n$ teilt ($m < n$).

Aufgabe 2/67

Gegeben sind eine Gerade g sowie zwei Punkte A und B, die beide in der gleichen von g begrenzten Halbebene liegen. Man konstruiere einen Punkt P auf g derart, dass die Strecke AP mit g den doppelten Winkel bildet wie die Strecke BP mit g.

Aufgabe 3/67

Man beweise die Identität durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

Aufgabe 4/67

Gegeben sind zwei parallele Geraden g_1 und g_2, sowie ein Punkt P, der weder zwischen noch auf diesen Geraden liegt.
Man konstruiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck so, dass P der Scheitelpunkt des rechten Winkels ist und die beiden anderen Eckpunkte je einer auf g_1 und g_2 liegen!

Aufgabe 5/67

Gegeben sind drei Punkte A, B, C, die nicht sämtlich auf der gleichen Geraden liegen. Man konstruiere einen vierten Punkt D, der die folgende Eigenschaft hat:
Legt man durch D eine beliebige Gerade und fällt man auf sie die Lote von den gegebenen Punkten und bezeichnet man die Fußpunkte dieser Lote mit A', B' und C', so ist $DC' = DA' + DB'$.

Aufgabe 6/67

Bestimme alle reellen Zahlen x, für die gilt

$$\frac{\sqrt{x} - 0{,}5x}{0{,}5\sqrt{x} - x} \leq 15\sqrt{x}$$

Aufgabe 7/67

Man halbiere einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt M und dessen Endpunkte P und Q gegeben sind, nur mit Benutzung des Zirkels durch Schlagen von Kreisbögen.

Aufgabe 8/67

Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 und einen Punkt P, der weder auf g_1 noch auf g_2 liegt. Gesucht ist eine gerade durch P, auf der die durch g_1 und g_2 begrenzte Strecke von P halbiert wird.

a) Der Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 liege auf dem Zeichenblatt.

b) Der Schnittpunkt S der beiden Geraden g_2 und g_2 liege nicht auf dem Zeichenblatt, die Konstruktion ist jedoch auf das Zeichenblatt beschränkt.

Aufgabe 9/67

In einer Klasse haben drei Schüler in Mathematik die Note sehr gut, zwölf die Note gut und die übrigen befriedigend und ausreichend. Um die besten Schüler zu fördern, stellt der Lehrer jedem der sehr guten Schüler ein eigenes mathematisches Problem zur Lösung; jeder dieser Schüler soll sich vier der guten Schüler zur Mitarbeit auswählen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, die zwölf Mitarbeiter in Gruppen zu je vier auf die drei sehr guten Schüler zu verteilen?

Aufgabe 10/67

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen z mit der folgenden Eigenschaft:
Setzt man als weitere Stelle an ihr Ende die Ziffer 1, so erhält man das Siebenfache der Zahl, die sich durch Erhöhung der höchsten Stelle von z um 1 ergibt.

Aufgabe 11/67

Gegeben sind zwei Kreise $K(A)$ und $K(B)$ mit den Mittelpunkten A bzw. B, die einander in S und S' schneiden. P_A und P_B seien Punkte auf $K(A)$ bzw. $K(B)$ derart, dass S auf der Strecke P_AP_B liegt.
Gesucht ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller möglichen Strecken P_AP_B.

Aufgabe 12/67

Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung mit $0 < x < 1$, n eine natürliche Zahl:

$$(1+x)^n < 1 + (2^n - 1)x$$

Aufgabe 13/67

Zwei Brüder haben am selben Tage Geburtstag. Als sie ihn das letztemal feierten, waren sie zusammen 48 Jahre alt. Das Alter des einen wurde durch eine Kubikzahl angegeben. Teilte man sein Alter und das Alter des anderen durch die Basis dieser Kubikzahl, so ergaben die Resultate in dieser Reihenfolge das Datum des Geburtstages.
Wie alt waren die beiden Brüder und an welchem Tage hatten sie Geburtstag?

Aufgabe 14/67

Ohne Benutzung der Differentialrechnung ist zu beweisen:
Unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang U und gegebener Seite $BC = a$ hat das gleichschenklige den maximalen Flächeninhalt.

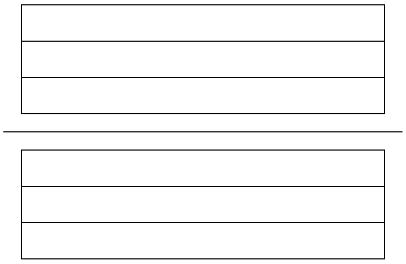
Aufgabe 15/67

Man beweise, dass

a) die 5. Potenz einer natürlichen Zahl a die gleiche Endziffer hat wie a selbst.

b) die 21. Potenz einer zu 10 teilerfremden natürlichen Zahl a die gleiche Zehner- und die gleiche Einerziffer hat wie a selbst.

Aufgabe 16/67



Das in der Abbildung gegebene Zweitafelbild stellt Grund- und Aufriss von Profilstäben dar und hat (außer an den äußeren Begrenzungen) keine verdeckten Kanten. Sämtliche Flächen sind eben.
Die Darstellung ist nicht eindeutig. Es sind Querschnitte (Seitenrisse) aller auf Grund dieser Darstellung möglichen Profilstäbe zu finden.

Aufgabe 17/67

Gesucht ist eine (im dekadischen System) vierstellige Zahl, von der folgendes bekannt ist:

1. Die Summe aller zweistelligen Zahlen, die sich aus je zwei Ziffern der gesuchten Zahl darstellen lassen, ist 594.
2. Dividiert man die gesuchte Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man eine Zahl, die gleich dem Siebenfachen der letzten Ziffer der gesuchten Zahl ist.
3. Alle Ziffern der gesuchten Zahl sind voneinander verschieden und nicht gleich Null.

Aufgabe 18/67

Gegeben ist ein beliebiges Viereck mit den Seiten a, b, c, d.
Man konstruiere ein Trapez aus den Seiten des Vierecks so, dass die Reihenfolge der Seiten unverändert bleibt.

Aufgabe 19/67

Zwei Kinder spielen mit einer Fünf-Pfennig-Münze und mit einem Würfel. Sie vereinbaren: A wirft einmal die Münze, B wirft dreimal den Würfel. Gewinnen soll, wer eine "Fünf" wirft.
Wie sind die Gewinnchancen verteilt?

Aufgabe 20/67

Man trage vom Ursprung O eines räumlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems auf den Achsen die Strecken a, b und c bis zu den Punkten A, B bzw. C ab. Dann fälle man von O das Lot auf die Ebene ABC. Sein Fußpunkt sei M. Es ist zu beweisen, dass das Lot die Länge hat:

$$h = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Aufgabe 21/67

Es seien A, B, a_0, b_0, a_1, b_1 und x natürliche Zahlen und es gelte

$$x \mid A^{a_0} + B^{b_0} \qquad \text{sowie} \qquad x \mid A^{a_1} - B^{b_1}$$

wobei $c \mid d$ bedeutet, dass c Teiler von d ist). Man weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen auch

$$x \mid Z_n = A^{a_1 n + a_0} + B^{b_1 n + b_0}$$

für jede natürliche Zahl n gilt.

Aufgabe 22/67

Gegeben ist eine Strecke mit der Länge a Längeneinheiten (LE) sowie die Längeneinheit selbst.
Wie kann man daraus eine Strecke mit der Länge $\sqrt[4]{a^3}$ LE konstruieren?

Aufgabe 23/67

Man beweise: Ist n eine natürliche Zahl und $2^n - 1$ eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl.

Aufgabe 24/67

Bei der serienmäßigen Montage von 1000 Geräten, die 100 MDN je Gerät kostet, werden 300 Widerstände je Gerät eingebaut, deren Prüfung auf Einhaltung der Toleranz 0,12 MDN je Widerstand entstehen.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Widerstand die Toleranz nicht einhält, beträgt (nach statistischen Unterlagen) 0,1 %. Das Gerät funktioniert nur dann einwandfrei, wenn alle Widerstände maßhaltig sind.
Eine Endkontrolle ist auf jeden erforderlich.
Was ist ökonomisch vorteilhafter - eine Kontrolle der Widerstände vor der Montage oder ein Verzicht darauf?
Die Materialkosten für fehlerhafte Geräte können außer Betracht bleiben, da das Material verwertbar bleibt.

Aufgabe 25/67

Gesucht sind alle Primzahlen p, für die gilt $3p + 4 = a^2$ (wobei a eine natürliche Zahl ist).

Aufgabe 26/67

Es seien a, b und c die Seiten eines beliebigen ebenen Dreiecks, r dessen Umkreisradius und ρ der Inkreisradius. Man beweise die Richtigkeit der Formel

$$2r \cdot \rho = \frac{abc}{a+b+c}$$

Aufgabe 27/67

Beweisen Sie, dass die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$$

für jedes positive, reelle $a; b; c$ gilt!

Aufgabe 28/67

Gegeben sei ein beliebiges regelmäßiges n-Eck mit dem Inkreisradius r. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Summe der Abstände von den n-Eckseiten bzw. deren Verlängerungen gleich dem n-fachen des Inkreisradius r ist.

Aufgabe 29/67

Die Gleichung $\sin(x + y)\sin(x - y) - \cos(x + y)\cos(x - y) = 0{,}5$ ist zu lösen.

Aufgabe 30/67

Gesucht ist die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

von der folgendes bekannt ist:

1. Die Glieder der Reihe bilden eine monotone Folge.
2. Es ist $a_1 = 1, a_n > 0$ für jedes n.
3. Es ist $\prod_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \prod_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.
4. Es ist $a_{2k} = a_{2k-2} - a_{2k-1}$.

Aufgabe 31/67

Fällt man von einem beliebigen Punkt P der Ebene die Lote auf die Verbindungsgeraden AB, BC und CA dreier nicht auf derselben Geraden liegender Punkte A, B und C dieser Ebene, so entstehen die Fußpunkte X, Y bzw. Z. Man beweise, dass stets gilt:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = BX^2 + CY^2 + AZ^2$$

Aufgabe 32/67

Man bestimme an Hand einer geometrischen Überlegung den exakten Wert von $\sin 18°$!

Aufgabe 33/67

Man beweise: Erfüllen drei natürliche Zahlen $x; y; z$, die keinen gemeinsamen Teiler haben, die Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ (sogenannte pythagoreische Grundtripel), so können x und y nicht beide ungerade sein.

Aufgabe 34/67

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Die Verlängerungen der Strecken AP, BP und CP schneiden die Dreiecksseiten in den Punkten A_1, B_1 und C_1. Man beweise, dass gilt

$$\frac{A_1P}{AA_1} + \frac{B_1P}{BB_1} + \frac{C_1P}{CC_1} = 1$$

Aufgabe 35/67

Man zeige, dass man unter $(n + 1)$ verschiedenen natürlichen Zahlen, die sämtlich kleiner als $2n$ sind, stets drei finden kann, bei denen die Summe zweier stets gleich der dritten Zahl ist.

Aufgabe 36/67

Weisen Sie durch elementare Umformungen nach, dass die Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 63x^2 - 102x + 85 = 0$$

keine reellen Lösungen hat!

2.8 Aufgaben 1968

Aufgabe 1/68

In einem Punkt A befinden sich n Scheiben S_i mit den Durchmessern d_i ($i = 1; 2; ...; n$) so übereinander-gestapelt, dass $d_j < d_k$ für $j < k$ gilt.
Sie sollen einzeln nach einem Punkt B gebracht werden, wobei ein Punkt C als Äblageplatz"benutzt werden darf.
Dabei ist die Bedingung zu beachten, dass niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen darf.
Wie viele Transportschritte sind mindestens erforderlich?

Aufgabe 2/68

Ein rechtwinkliges Dreieck ist aus einer Kathete und dem Hypotenusenabschnitt, der zur anderen Kathete gehört zu konstruieren.

Aufgabe 3/68

Man bestimme sechs Primzahlen so, dass sie eine arithmetische Folge bilden und ihre Summe ein Minimum ist.

Aufgabe 4/68

Es sei $0 < a < 1$, n eine natürliche Zahl. Welche Zahlen a unterscheiden sich von n von ihrer reziproken Zahl?
Welcher Wert ergibt sich speziell für $n = 1$?

Aufgabe 5/68

Auf der Seite $\overline{AB}$ des beliebigen Dreiecks ABC liege ein Punkt P.
Ferner sei Q ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ und R ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$.
Wird P mit Q und R verbunden, so zerfällt das Dreieck in drei Teilstücke.

a) Wie müssen die Lagen von Q und R gewählt werden, wenn die drei Teilstücke flächengleich sein sollen?

b) Unter welchen Bedingungen sind alle drei Teilstücke Dreiecke?

Aufgabe 6/68

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $k > 0$ die Zahl $x_k = 7^{2k} + 343$ ohne Rest durch 392 teilbar ist!

Aufgabe 7/68

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, für die $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern ist.

Aufgabe 8/68

Eine Ebene werde von n Geraden in 56 Teile geteilt. Keine der n Geraden sei parallel zu einer anderen, und in keinem Punkt schneiden einander mehr als zwei Geraden.
Wie groß ist n?

Aufgabe 9/68

Man beweise, dass alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 < k \leq n-1$ durch n ohne Rest teilbar sind, wenn n eine Primzahl ist, und dass für jede Nichtprimzahl n mindestens ein Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $0 < k \leq n-1$ nicht durch n ohne Rest teilbar ist!

Aufgabe 10/68

Beim Schachspiel kann man mit den Türmen Züge beliebiger Länge (sofern kein Feld besetzt ist) in seitlicher Richtung und senkrecht dazu ausführen.
Auf wieviel Wegen kann ein Turm von einem Eckfeld in das diagonal gegenüberliegende Eckfeld überführt werden, wenn keine rückläufigen Züge zugelassen sind.

Aufgabe 11/68

Ist von drei natürlichen Zahlen a, b, c, die ein pythagoreisches Tripel bilden (für die also gilt $a^2+b^2=c^2$), einer der beiden Zahlen a oder b eine Primzahl, so sind die beiden anderen zwei aufeinanderfolgende Zahlen, und die Primzahl ist die kleinste der drei Zahlen.
Dieser Satz ist zu beweisen. Es ist ferner zu prüfen, ob umgekehrt auch gilt:
Sind unter drei pythagoreischen Zahlen zwei aufeinanderfolgende Zahlen, so ist die dritte Zahl die kleinste und Primzahl.

Aufgabe 12/68

Man berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$

Aufgabe 13/68

Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $\sqrt{y^2-80} = 2(x+2)$.

Aufgabe 14/68

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind.

Aufgabe 15/68

Unter welcher Bedingung liegen in einem Dreieck ABC die Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H, der Umkreismittelpunkt U und der Inkreismittelpunkt I auf einem Kreis?
Radius und Lage des Mittelpunktes dieses Kreises sind zu bestimmen.

Aufgabe 16/68

Beweise: Der Ausdruck $3n^2-1$ ergibt für kein ganzzahliges n eine Quadratzahl!

Aufgabe 17/68

Im Raum seien $2n$ Punkte gegeben ($n \leq 1$, ganz). Wir verbinden diese Punkte paarweise derart durch 2^{n-1} Strecken, dass jeder Punkt genau einmal Endpunkte einer Strecke ist.
Mit den 2^{n-1} Mittelpunkten dieser Strecken verfahren wir analog usw. Nach dem n-ten Schritt erhalten wir genau einen Mittelpunkt, dieser heiße A. Es ist zu beweisen, dass die Lange von A unabhängig von der Bildung der Punktepaare ist.

Aufgabe 18/68

Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n} < \sqrt[n]{3} - 1$$

gilt (wobei $\sqrt[1]{a} = a$ bedeute)!

Aufgabe 19/68

Im Jahre 1968 ist jemand genau so alt, wie die Quersumme seines Geburtsjahres angibt. In welchem Jahr ist er geboren?

Aufgabe 20/68

Gesucht ist der Flächeninhalt des kleinstmöglichen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse c, dessen Seiten a, b und c sowie dessen Höhe h_c ganzzahlig sind.

Aufgabe 21/68

Man löse das System folgender Gleichungen

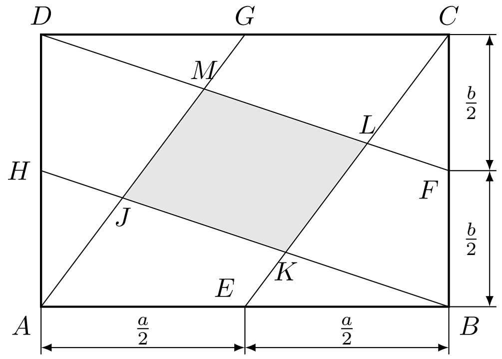
$$\log_2 x \cdot \log_x (x - 3y) = 2 \qquad (I)$$
$$x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}} \qquad (II)$$

Aufgabe 22/68

Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen ($m, n > 0$), so treten beim Teilen von m^n durch n^2 höchstens n verschiedene Reste auf.

Aufgabe 23/68

Wie groß ist die in der Abbildung gefärbte Parallelogrammfläche?



Aufgabe 24/68

Es ist zu beweisen: Sind a und b natürliche Zahlen, die teilerfremd sind, und ist p eine ungerade Primzahl, die ein Teiler von $a + b$ ist, so ist $a^p + b^p$ ohne Rest durch p^2 teilbar.

Aufgabe 25/68

Man beweise, dass es keine Primzahl der Form $a^4 + 4$ (mit $a \neq 0; 1$, a eine natürliche Zahl) gibt.

Aufgabe 26/68

Unter welchen Bedingungen ist in einem Dreieck das Quadrat des Umkreisdurchmessers gleich der Summe aus den Quadraten zweier Dreiecksseiten?

Aufgabe 27/68

Es ist zu beweisen, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sie besteht (in der dekadischen Schreibweise) aus drei verschiedenen Ziffern, von denen keine gleich 1 ist.
2. Je zwei ihrer Ziffern bezeichnen zueinander teilerfremde Zahlen.
3. Sie ist durch jede der von ihren Ziffern bezeichneten Zahlen teilbar.

Wie sich weiter zeigt, besteht die Zahl n aus Primzahlziffern.

Aufgabe 28/68

Man beweise, dass für jede Primzahl $p \geq 7$ der Term

$$T = p^4 - 20p^2 + 64$$

durch 45 ohne Rest teilbar ist!

Aufgabe 29/68

Es sind die kleinsten sechs natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften zu bestimmen:

1. Jede Zahl besteht mindestens aus den an beliebiger Stelle stehenden und in beliebiger Reihenfolge angeordneten Ziffer 3, 5 und 9.
2. Jede Zahl ist wenigstens durch 3, 5 und 8 teilbar.

Aufgabe 30/68

In der Ebene seien zwei rechte Winkel mit den Schenkeln h_1 und h_2 bzw. k_1 und k_2 so gegeben, dass kein Schenkel des einen Winkels zu irgendeinem Schenkel des anderen Winkels parallel verläuft.
Man zeige, dass man allein mit einem Parallelenlineal (einem Instrument, des über ein gewöhnliches Lineal hinaus noch die Parallelverschiebung von Geraden ermöglicht) zu jedem Punkt P und zu jeder Geraden g die zu g senkrechte Gerade durch P konstruieren kann!

Aufgabe 31/68

Beweisen Sie: Wenn die Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen durch 11 teilbar ist, so ist jede der Zahlen durch 11 teilbar.

Aufgabe 32/68

Man zeige, dass für $n \geq 3$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

Aufgabe 33/68

Gegeben sind eine Symmetrieachse g und zwei bezüglich derselben symmetrische Punkte P und P'.
Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Lineals (d.h. nur durch Ziehen von Geraden) zu einem beliebigen Punkt X den bezüglich g symmetrischen Punkt X'.

Aufgabe 34/68

Es ist zu beweisen: Wenn die Summe dreier gegebener Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so sind unter ihnen zwei, die beim Teilen durch 9 den gleichen Rest lassen.

Aufgabe 35/68

Verbindet man die Eckpunkte eines Parallelogramms mit den Mittelpunkten benachbarter Seiten, so begrenzen die acht Verbindungsstrecken ein Achteck.
Es ist zu beweisen, dass dessen Flächeninhalt ein Sechstel des Parallelogramminhalts ist.

Aufgabe 36/68

Man beweise, dass für jede ungerade Zahl $n > 1$ die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} [n^2 - (2k-1)^2] = (n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2) \cdots [n^2 - (n-2)^2] = 2^{n-1}(n-1)!$$

erfüllt ist!

2.9 Aufgaben 1969

Aufgabe 1/69

An zwei einander nicht schneidende, verschieden große Kreise seien die gemeinsamen Tangenten gelegt. Der Winkel zwischen den äußeren Tangenten sei α, der zwischen den inneren sei β.
Gesucht ist der Winkel zwischen den Tangenten vom Zentrum des größeren Kreises an den kleineren Kreis.

Aufgabe 2/69

Man geben alle Werte für x und y an, die dem Gleichungssystem

$$[x] + 2y = \frac{9}{2}, \qquad [2x] + 3y = \frac{31}{4}$$

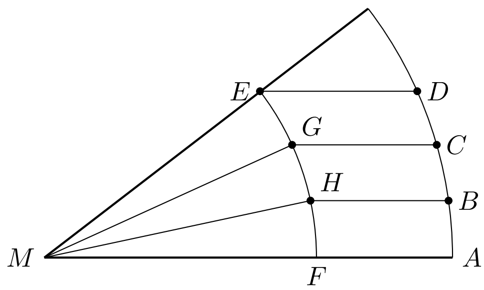
mit $x \geq 0$ genügen. Dabei ist $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.

Aufgabe 3/69

Man beweise: Ist die Summe von n ganzen Zahlen $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n$ ohne Rest durch 5 teilbar, so ist auch die Summe der 5.Potenzen dieser Zahlen ohne Rest durch 5 teilbar.

Aufgabe 4/69

Man zeichne um den Scheitelpunkt eines beliebigen spitzen Winkels einen Kreisbogen mit beliebigem Radius MA und trage darauf drei gleich lange Kreisbögen AB, BC und CD ab (Abbildung).
Dann zeichne man durch B, C und D Parallele zu MA. E sei der Schnittpunkt der Parallelen durch D mit dem freien Schenkel des Winkels. Mit dem Radius ME schlage man den Kreisbogen um M, der die Parallelen durch B und C in H und G und MA in F schneidet.



Warum ist die Behauptung falsch, MG und MH würden den Winkel in drei gleiche Teile teilen? Bekanntlich ist die Trisektion eines beliebigen Winkels allein mit Zirkel und Lineal unmöglich!

Aufgabe 5/69

Gegeben ist ein Parallelogramm mit dem Umfang $u = 30$ LE, dessen Winkel sämtlich nicht kleiner als $60°$ sind. In dieses Parallelogramm sei ein gleichseitiges Dreieck derart einbeschrieben, dass eine Seite des Dreiecks mit der Parallelogrammseite $AB = a$ übereinstimmt und die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks auf der gegenüberliegenden Parallelogrammseite liegt.
Wie groß sind die Parallelogrammseiten a und b, wenn ihre Maßzahlen ganzzahlig sind?

Aufgabe 6/69

Gegeben sind die rationalen Zahlen a, b, c, d. Man beweise:
Ist $ad - bc = 0$, so ist $q = \frac{ap+b}{cp+d}$ rational für jede beliebige reelle Zahl p.
Ist $ad - bc \neq 0$, so ist $q = \frac{ap+b}{cp+d}$ irrational für jede irrationale Zahl p.

Aufgabe 7/69

Für welche ganzen Zahlen n ist der Ausdruck $3n^2 + 3n - 1$ durch 5 teilbar?

Aufgabe 8/69

Man beweise: In jedem Dreieck ist der obere Abschnitt einer Höhe doppelt so groß wie die Länge des Lotes vom Umkreismittelpunkt auf die Seite, auf der die Höhe steht.

Aufgabe 9/69

Es sei $f(x)$ eine Funktion 3.Grades und $q(x)$ eine Funktion 2.Grades. An den Stellen $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h$ mögen die Funktionswerte beider Funktionen übereinstimmen, also $f(x_0) = q(x_0), f(x_1) = q(x_1), f(x_2) = q(x_2)$.
Man beweise, dass dann die Gleichung gilt

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_2} q(x)dx$$

Aufgabe 10/69

Bekanntlich gibt es Primzahlzwillinge; das sind Primzahlen, die in der Folge der ungeraden natürlichen Zahlen unmittelbar aufeinanderfolgen. Es ist zu beweisen, dass es außer (3; 5; 7) keine Primzahldrillinge gibt.

Aufgabe 11/69

Man beweise: Es gibt unendlich viele ganze Zahlen, die sich nicht als Summe dreier Kubikzahlen darstellen lassen.
Welche Zahlen sind dies?

Aufgabe 12/69

Es sind alle Paare $(x; y)$ zu finden, die das Gleichungssystem

$$|y - x| = |x + 1|$$
$$\frac{y-3}{4} = \left[\frac{x-1}{5}\right]$$

befriedigen, wobei $[a]$ eine ganze Zahl mit $a - 1 < [a] \leq a$ ist.

Aufgabe 13/69

Gesucht sind die fünf kleinsten, nicht einstelligen aufeinanderfolgenden Zahlen z_i (mit i = 1;2;3;4;5), für die gilt: z_i ist durch $i + 4$ teilbar und hat die Endziffer $i + 4$.

Aufgabe 14/69

Man beweise, dass der Bruch
$$B = \frac{34z+5}{51z+8}$$
für keine natürliche Zahl z gekürzt werden kann!

Aufgabe 15/69

Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Zahl 30030 als Produkt dreier natürlicher Zahlen (von 1 verschiedener) Faktoren schreiben (wobei die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle spielt)?

Aufgabe 16/69

Zwei Freunde A und B treffen sich. Nach dem Alter seiner Kinder befragt, sagt A: "Du kannst es selbst ausrechnen. Meine vier Kinder sind zusammen 15 Jahr alt. Das Produkt ihrer ganzzahligen Altersangaben ist gleich deiner Postleitzahl."
B rechnet. Nach einer Weile fragt er: "Sind unter deinen Kindern Zwillinge?" A antwortet darauf, sofort gibt B das Alter der Kinder an.
Wie lautete A's Antwort? Wie alt sind die Kinder?

Aufgabe 17/69

Von einem geraden Kreiskegel seien die Oberfläche A und das Verhältnis k der Höhe h zum Radius r gegeben ($k = \frac{h}{r}$).
Gesucht ist eine Formel, die das Volumen V in Abhängigkeit von A und k angibt.

Aufgabe 18/69

Gegeben ist eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, der die (im allgemeinen komplexen) Zahlen x_1 und x_2 genügen. Gesucht ist eine quadratische Gleichung
$$x^2 + f(p;q)x + g(p;q) = 0$$
der die Zahlen x_1^2 und x_2^2 genügen. Die Koeffizienten p und q seien reell, f und q seien irgendwelche Funktionen.
In welchen Fällen sind die beiden Gleichungen identisch? Man bestimme alle derartigen Fälle!

Aufgabe 19/69

Gegeben ist ein beliebiges n-Eck, das zwei Symmetrieachsen s_1 uns s_2 besitzt. Man beweise, dass sich s_1 und s_2 im Inneren des n-Ecks schneiden!

Aufgabe 20/69

Welche natürlichen Zahlen sind als Differenz der Quadrate zweier von 0 verschiedener natürlicher Zahlen darstellbar?

Aufgabe 21/69

Es ist die Gleichung
$$\sqrt[x]{16} + \sqrt[x]{20} = \sqrt[x]{25}$$
im Bereiche der reellen Zahlen zu lösen.

Aufgabe 22/69

Lässt man vom Geburts- und vom Todesjahr eines berühmten deutschen Gelehrten die erste Ziffer weg, so erhält man zwei Zahlen a und b, für die folgendes gilt:

1. Beide Zahlen lassen sich in ein Produkt von je drei von einander verschiedenen Faktoren (die sämtlich größer als 1 sind) zerlegen, wobei unter den 6 Faktoren 5 Primzahlen sind.
2. Die beiden kleineren Faktoren von a sind je um 2 kleiner als die entsprechenden Faktoren von b.
3. Der größte Faktor von a ist gleich der Summe aus dem Zehnfachen des kleinsten Faktors und dem mittleren Faktor von a.
4. Der größte Faktor von b ist gleich der Summe aus dem Doppelten des kleinsten Faktors und dem mittleren Faktor von b und um 1 größer als das Doppelte des mittleren Faktors.

Man bestimme die beiden Jahreszahlen und nenne den Gelehrten!

Aufgabe 23/69

Für die reellen Zahlen a, b, x, y gelte

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad ay - bx = 1$$

Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen $ax + by = 0$ ist!

Aufgabe 24/69

Man beweise, dass das Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzen Koeffizienten für kein ganzes x der Wert Null annimmt, wenn es für $x = 0$ und für $x = 1$ ungerade Werte hat.

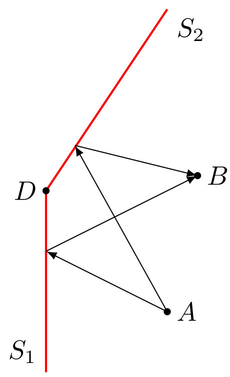
Aufgabe 25/69

Für welche ganzen, positiven Zahlen n ist die Zahl $2^n \pm 1$ das Quadrat einer ganzen Zahl?

Aufgabe 26/69

Aus den Strecken a und b konstruiere man die Strecke $c = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$!
Bemerkung: Dabei sei der Einfachheit halber auf die - streng genommen notwendige - Unterscheidung zwischen Strecke und Maßzahl der Strecke verzichtet.

Aufgabe 27/69



Zwei von einem Punkt A ausgehende Strahlen werden an zwei Spiegeln S_1 und S_2 so reflektiert, dass sie sich in einem Punkt B schneiden. Die beiden Spiegel stoßen im Punkt D aneinander. S_1 sei fest, S_2 sei um D drehbar. Man bestimme durch Konstruktion die Stellung des Spiegels S_2 so, dass die beiden Strahlenwege gleich lang sind.

Aufgabe 28/69

Gegeben sei ein Dreieck, dessen Seitenlängen eine arithmetische Folge erster Ordnung bilden. Man beweise, dass dann der Inkreisradius gleich $\frac{1}{3}$ einer der Dreieckshöhen ist.

Aufgabe 29/69

Man beweise, dass für alle positiven Zahlen a; b; c die folgende Ungleichung gilt:

$$a+b+c \leq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

Aufgabe 30/69

Mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat ist zu beweisen, dass $a^p - a$ stets durch $6p$ ohne Rest teilbar ist, wenn a eine natürliche Zahl und p eine Primzahl mit $p > 3$ ist.

Aufgabe 31/69

Die Breiten des nördlichen Polarkreises und des nördlichen Wendekreises sind $\alpha = 66°33'$ bzw. $\beta = 23°27'$ nördlicher Breite.
Man beweise, dass der Abstand h der beiden Breitenkreisebenen gleich der Differenz der Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise ist (wobei Kugelgestalt der Erde angenommen werde).

Aufgabe 32/69

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die durch 7, 11 und 13 restlos teilbar sind und deren drei Endziffern eine vorgegebene dreistellige natürliche Zahl q bilden.

Aufgabe 33/69

Man beweise: Unter der Voraussetzung, dass a, b und c rationale Zahlen sind, ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

genau dann gleich null, wenn a, b und c gleich null sind.

Aufgabe 34/69

Gesucht ist die kleinste, natürliche, vierstellige Zahl x (deren erste Ziffer nicht null ist) mit der folgenden Eigenschaft:
Vertauscht man in $x+1$ die beiden mittleren Ziffern miteinander und streicht man anschließend die letzte (vierte) Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl y derart, dass x ohne Rest durch $11y$ teilbar ist.

Aufgabe 35/69

Gesucht ist eine natürliche Zahl n mit vierstelliger Dezimaldarstellung, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Ihre Quersumme ist eine ungerade Quadratzahl.

2. Sie ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.
3. Die Summe der beiden Primzahlen ist das Zehnfache der Zahl, die man erhält, wenn man bei der Zahl n die Einerstelle und die Zehnerstelle streicht.
4. Die Differenz aus dem einen Primfaktor und dem Zehnfachen des anderen ist gleich der Zahl, die man erhält, wenn man bei der Zahl n die Hunderterstelle und die Tausenderstelle streicht.

Aufgabe 36/69

Gesucht ist eine natürliche, vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Summe aus der Tausenderstelle und der Hunderterstelle ist gleich der Zahl, die sich ergibt, wenn man in in der gesuchten Zahl die beiden mittleren Stellen streicht.
2. Diese Summe ist kleiner als das Doppelte der Zehnerstelle.
3. Genau einer der vier Stellenwerte ist eine Primzahl.

2.10 Aufgaben 1970

Aufgabe 1/70

In einem Dreieck ABC seien a, b und c die Maßzahlen der Seiten und s_a, s_b sowie s_c die Maßzahlen der entsprechenden Seitenhalbierenden. Man beweise, dass gilt

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Aufgabe 2/70

Man beweise, dass die Gleichung

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x} = a$$

für jedes ganze a genau eine reelle Lösung hat, die ganzzahlig ist!

Aufgabe 3/70

Es ist $x^0 = 1$ und $0^x = 0$ für $x \neq 0$. Welchen Wert hat $\lim_{x\to 0} x^x$?

Aufgabe 4/70

Von einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c und den Höhen h_a, h_b und h_c seien der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel γ sowie die Strecken $a + b$ und $h_a + h_b$ gegeben.
Man zeige, dass aus diesen drei Bestimmungsstücken das Dreieck nicht konstruierbar ist!

Aufgabe 5/70

Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $x^2 - a^2y^2 = b$ mit a, b ganzzahlig, $b > 0$, höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen $(x; y)$ haben kann.

Aufgabe 6/70

Man ermittle alle positiven reellen Zahlen x und y, die der Gleichung

$$\frac{\log_a y \cdot \log_x y}{(\log_{2x} y)^2} = \frac{9}{2}$$

Aufgabe 7/70

Gesucht sind alle Primzahlen p, die der Gleichung $c^3 - c^2 - 11c - 1452 = p$ für irgendein positives, ganzzahliges c genügen.

Aufgabe 8/70

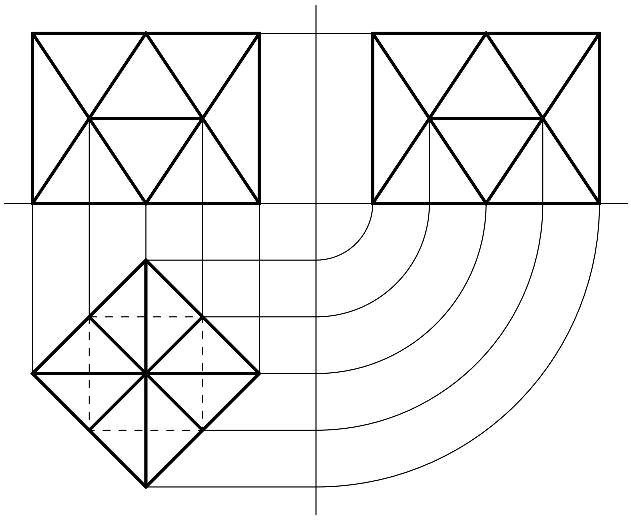
Es ist zu beweisen, dass die Höhen jeden beliebigen spitzwinkligen Dreiecks gleichzeitig Winkelhalbierende im zugehörigen Fußpunktdreieck sind.

Aufgabe 9/70

Gesucht sind alle wachsenden arithmetischen Folgen 1.Ordnung aus 9 nichtnegativen ganzzahligen Gliedern, bei denen das letzte Glied gleich dem Quadrat des zweiten ist.
Welche bemerkenswerte Eigenschaft hat eine davon?

Aufgabe 10/70

In der Abbildung sind Grund-, Auf- und Seitenriss eines Körpers dargestellt. Man beschreibe diesen Körper eindeutig in einem Satz und gebe eine Skizze in schräger Parallelprojektion.



Aufgabe 11/70

In welchem Dreieck sind die Maßzahlen der Höhe h_b und der Dreiecksseiten a, b und c in dieser Reihenfolge vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen?

Aufgabe 12/70

Ohne Verwendung der Differentialrechnung bestimme man den kleinsten und größten Wert der Funktion

$$y = f(x) = 2 - 2\cos^2 x - \sin x$$

Aufgabe 13/70

Gesucht ist das rechtwinklige Dreieck, dessen Seitenlängen a, b, c sämtlich ganzzahlig sind und bei kleinstmöglichem a der Relation $4a = \frac{b+c}{2}$ genügen.
Dabei bezeichne a eine Kathete.

Aufgabe 14/70

Eine n-stellige Dualzahl habe die Quersumme m (wobei n und m natürliche Zahlen mit $1 \leq m \leq n$ sind).
Wieviel solche Zahlen gibt es bei vorgegebenem n und m?

Aufgabe 15/70

Man finde alle Primzahlen, die sowohl als Summe als auch als Differenz von je zwei Primzahlen darstellbar sind.

Aufgabe 16/70

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie eine Strecke x beliebiger Länge.
Man zeige: Wenn A die kleinere der Strecken a und x, B die kleinere der Strecken b und x und C die kleinere der Strecken c und x ist, so ist aus A, B und C mit Sicherheit ein Dreieck konstruierbar.

Aufgabe 17/70

Für welche natürlichen Zahlen n ist $z_n = 4^n - 3^n$ durch 7 teilbar?

Aufgabe 18/70

Gesucht ist die Menge aller Paare von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersummen beide geradzahlig sind.

Aufgabe 19/70

Ein Prisma mit n-eckiger Grundfläche habe $10n$ Diagonalen (Körper- und Flächendiagonalen).
Wie groß ist n?

Aufgabe 20/70

Sind in einem nicht überschlagenen, konvexen Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleichlang und sind alle Winkel paarweise voneinander verschieden, so liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den beiden ungleich langen Seiten stets außerhalb des Vierecks.
Dieser Satz ist zu beweisen.

Aufgabe 21/70

Man beweise: Wenn $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ beliebige komplexe Zahlen sind, die den Gleichungen

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$
$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3$$

genügen, dann sind die Mengen $\{a_1; a_2; a_3\}$ und $\{b_1; b_2; b_3\}$ einander gleich.

Aufgabe 22/70

Verbindet man benachbarte Seitenmitten eines regelmäßigen n-Ecks miteinander, so entsteht ein neues regelmäßiges n-Eck, das dem ursprünglichen ähnlich ist. Es sei $\triangle\ A = A - A'$ die Differenz der Flächeninhalte beider n-Ecke.
Für welche n gilt $\triangle\ A = \frac{A}{10}$?

Aufgabe 23/70

Man beweise den Tangenssatz

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

mit geometrischen Mitteln!

Aufgabe 24/70

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit drei Würfeln die Augenzahl 12 zu erzielen?

Aufgabe 25/70

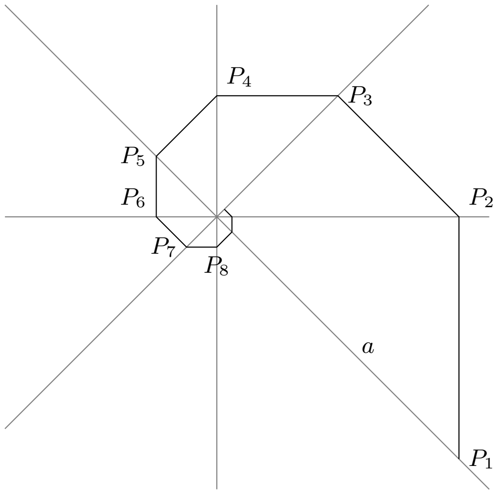
Man beweise, dass es keine arithmetische Folge erster Ordnung aus mehr als zwei Gliedern gibt, deren Differenz $d = 1000$ ist und deren Glieder sämtlich Primzahlen sind.

Aufgabe 26/70

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, die genau 10 Teiler haben.

Aufgabe 27/70

Acht Geraden schneiden einander so in einem Punkt, dass je zwei benachbarte Geraden einen Winkel von $\frac{\pi}{8}$ einschließen. Auf einer beliebigen dieser Geraden liege im Abstand a vom Schnittpunkt der Punkt P_1.
Von ihm fälle man das Lot auf eine benachbarte Gerade, der Fußpunkt sei P_2. Setzt man das Verfahren von P_2, P_3, ... aus fort, so erhält man einen Streckenzug (Abbildung nächste Seite), dessen Streckenzahl über alle Grenzen wächst.
Man ermittle die Länge dieses Streckenzuges.



Aufgabe 28/70

Es seien a und b positive reelle Zahlen mit $a, b \neq 1$. Gesucht sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$[(\log_b x) - 1] \cdot \log_a b = 1$$

Aufgabe 29/70

Es ist nachzuweisen, dass $z = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ genau dann ohne Rest durch 5 teilbar ist, wenn n nicht ohne Rest durch 4 teilbar ist (wobei n eine natürliche Zahl bedeutet).

Aufgabe 30/70

Man beweise: Wenn p eine Primzahl, k und n natürliche Zahlen sind, dann folgt aus $p^k \mid n!$ sogar $(p!)^k \mid n!$.

Aufgabe 31/70

Man ermittle sämtliche gemeinsame Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

ohne ein Näherungsverfahren zu verwenden!

Aufgabe 32/70

Man gebe die kleinste natürliche Zahl k an, die mit der Ziffer 7 beginnt (falls man sie im Dezimalsystem darstellt) und die folgende weitere Eigenschaft aufweist:
Streicht man die vorderste Ziffer 7 weg und hängt man sie hinten an, so ist die neu entstehende Zahl $z = \frac{1}{3}k$.

Aufgabe 33/70

Es ist zu beweisen, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \sin \frac{360°}{n} = \pi$$

Aufgabe 34/70

Von einer arithmetischen Folge 1. Ordnung sei bekannt, dass alle Glieder nichtnegative ganze Zahlen sind. Genau 1 Glied ist einstellig, 9 Glieder sind zweistellig, 81 sind dreistellig und 819 sind vierstellig. Man bestimme die Folge!

Aufgabe 35/70

Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ aus natürlichen Zahlen mit kleinstmöglichem z, welche die Gleichung

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

erfüllen.

Aufgabe 36/70

Man beweise, dass in keinem Dreieck die Beziehung

$$(a + b) \cos \gamma + c = 0$$

gilt, wenn mit a, b und c die Dreieckseiten und mit γ der Winkel zwischen den Seiten a und b bezeichnet sind.

2.11 Aufgaben 1971

Aufgabe 1/71

Man bestimme das Dreieck maximalen Flächeninhaltes, das den Bedingungen $0 < a \leq 2 \leq b \leq 4 < c < 5$ unterliegt.

Aufgabe 2/71

Man beweise: Bei einer kontinuierlich laufenden Uhr (d.h., die Zeiger springen nicht auf diskrete Zifferblattstellen) mit Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger auf einer Achse können außerhalb des Zeitpunktes 0 h 00 m 00 s die drei Zeiger niemals genau übereinanderstehen.

Aufgabe 3/71

Gesucht sind drei Lösungspaare $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^{2\sin y+1} + (\sin y)^{\frac{4}{3}\sqrt{3x}} &= 1 \\ \cos y - x &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4/71

Es ist zu zeigen, dass für jede gerade Zahl n, die Summe zweier Quadratzahlen ist, auch die Zahl $\frac{n}{2}$ Summe zweier Quadratzahlen ist.

Aufgabe 5/71

Man beweise, dass für natürliche Zahlen $a, b, c, d > 0$ die Ungleichung gilt

$$(ab + cd)^{a+c} \geq (ab + bc)^a (ad + cd)^d$$

Aufgabe 6/71

Die kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten p, q und r

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

habe drei reelle Lösungen. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten p, q und r genügen, wenn die Lösungen Maßzahlen der Seiten eines ebenen Dreiecks sein sollen?

Aufgabe 7/71

Es sei p_n die n-te Primzahl. Gesucht sind alle i, für die gilt $p_i = 2i + 1$.

Aufgabe 8/71

Es sei bekannt, dass das Polynom mit ganzen Koeffizienten a, b, c, d

$$P(m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

für beliebiges ganzes x durch 5 teilbar ist. Zu zeigen ist, dass dann alle Koeffizienten durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 9/71

Für welche reellen Zahlen a hat das Gleichungssystem

$$2x^3 - 2ay^3 = (a+1)^2$$
$$x^3 + ax^2y + xy^2 = 1$$

genau eine reelle Lösung $(x; y)$ mit $x = -y$?

Aufgabe 10/71

Es ist nachzuweisen, dass die beiden Produkte $505055 \cdot 8808$ und $808088 \cdot 5505$ einander gleich sind, ohne dass die Produkte ausgerechnet werden. Das Beispiel ist: zu verallgemeinern.

Aufgabe 11/71

Für welche reellen Zahlen a hat die Gleichung

$$\sin^2(ax) - \cos x + 1 = 0$$

genau eine Lösung?

Aufgabe 12/71

Gegeben ist die Determinante einer Matrix vom Typ 3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dabei seien die a_{ik} $(i; k = 1{,}2{,}3)$ natürliche Zahlen. Es ist zu zeigen:
Wenn die Zahlen $z_i = 100a_{i1} + 10a_{i2} + a_{i3}$ jede ohne Rest durch eine Primzahl p mit $p \neq 2; 5$ teilbar ist, so ist auch D ohne Rest durch p teilbar.

Aufgabe 13/71

Man gebe mit Hilfe einer modifizierten Quersumme eine Teilbarkeitsregel für Division durch 17 an, die für bis zu sechsstellige Zahlen brauchbar ist.

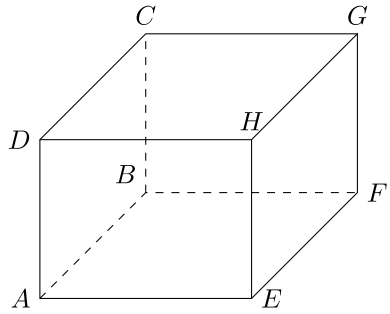
Aufgabe 14/71

Es ist zu beweisen, dass jede Primzahl $P > 5$ von der Form $P = p + k \cdot 30$ ist, wobei p eine Primzahl mit $7 \leq p \leq 31$ und k eine natürliche Zahl ist ($k = 0$ eingeschlossen).

Aufgabe 15/71

Die natürlichen Zahlen a und b seien in einem Zahlensystem mit der Basis n dargestellt. Dabei gehe b aus a dadurch hervor, dass man die erste Ziffer a streicht und am Ende anfügt.
Man ermittle n und die kleinstmöglichen Zahlen a und b aus der Tatsache, dass $a - b = 1211$ ist (wobei auch 1211 im System mit der Basis n dargestellt ist).

Aufgabe 16/71



Gegeben ist ein Quader mit den Kanten $AB = a$, $AD = b$ und $AE = c$ (Abbildung). Gesucht sind
a) der Abstand der Ecke A von der Flächendiagonalen BD,
b) der Abstand der Kante AE von der Raumdiagonalen BH.

Aufgabe 17/71

Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:
Teilt man die vierstellige Zahl in der Mitte in zwei zweistellige Zahlen, bildet man die Summe dieser beiden zweistelligen Zahlen und erhebt man die Summe ins Quadrat, so ergibt sich die gesuchte vierstellige Zahl.

Aufgabe 18/71

Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem

$$x^{2n} + y^{2n} = 1000 \qquad , \qquad x^n + y^n = t$$

mit natürlichem n positive reelle Lösungen?

Aufgabe 19/71

Zwei Personen A und B vertreiben sich die Zeit mit einem Glücksspiel. Den Einsatz soll derjenige erhalten, der dabei als erster drei Gewinnpunkte erreicht (bei jedcm Spiel wird ein Gewinnpunkt vergeben; ein Unentschieden eines Spiels ist unmöglich). Gewisse Umstände erfordern den Abbruch beim Stande von 1 : 0 für A.
Wie ist der Einsatz unter den beiden Spieler zu verteilen?

Aufgabe 20/71

Man bestimme alle Lösungen der goniometrischen Gleichung

$$\sin^{70} x + \frac{1}{13} \cos^{13} x = 1$$

Aufgabe 21/71

Gesucht sind zwei natürliche Zahlen mit vierstelliger Dezimaldarstellung, die folgende Eigenschaften haben:

1. Ihre Differenz beträgt 1000.
2. Jede ist das Produkt von genau zwei voneinander verschiedenen Primzahlen.
3. Bei der kleineren der beiden Zahlen ist das Dreifache des einen Faktors um 8 größer, bei der größeren um 8 kleiner als der andere Faktor.

Aufgabe 22/71

Gegeben seien zwei Paare paralleler Geraden mit gleichen Abständen, die auch untereinander parallel sind. Gesucht ist das Rechteck mit kleinstem Flächeninhalt, dessen vier Eckpunkte auf je einer der vier Geraden liegt.

Aufgabe 23/71

Man beweise, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ außer der Triviallösung $x = y = z = 0$ keine Lösung in natürlichen Zahlen hat.

Aufgabe 24/71

Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $2^{n-1} - 1$ und $2^{n+1} - 1$ für $n = 2; 3; ...$!

Aufgabe 25/71

Man beweise, dass für natürliche Zahlen n die Zahl

$$z_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

ohne Rest durch 133 teilbar ist!

Aufgabe 26/71

Es ist zu beweisen, dass die Summe aus den Quadraten der Abstände irgendeines Punktes auf dem Umkreis von den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks unabhängig von der speziellen Lage des Umkreispunktes konstant ist.

Aufgabe 27/71

Man beweise: Für keine natürliche Zahl n gibt es ein Paar $(x; y)$ natürlicher Zahlen so, dass gilt

$$x^2 + y^2 = (n + 4)! - 1$$

Aufgabe 28/71

In einem Rechteck mit den Seitenlängen $a = 6$ und $b = 10$ seien 16 Punkte beliebig verteilt. Man beweise: Mindestens 2 dieser 16 Punkte haben einen Abstand voneinander, der kleiner als $2\sqrt{2}$ ist!

Aufgabe 29/71

Es ist zu beweisen: Wenn $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\tan\alpha \tan\beta + \tan\beta \tan\gamma + \tan\alpha \tan\gamma = 1$.

Aufgabe 30/71

Gegeben seien die Strecken a und b. Man beweise, dass es möglich ist, mit Zirkel und Lineal aus ihnen die Strecke

$$c = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

zu konstruieren und man gebe eine kurze Konstruktionsbeschreibung!

Aufgabe 31/71

Es ist zu beweisen, dass bei pythagoreischen Zahlentripeln die mittlere Zahl niemals geometrisches Mittel der beiden anderen Zahlen sein kann.

Aufgabe 32/71

Es sei m eine natürliche Zahl. Ist die Zahl $z = (m-1)! + 1$ durch m ohne Rest teilbar, so ist m eine Primzahl. Dieser Satz ist zu beweisen.

Aufgabe 33/71

Unter welchen Bedingungen existiert zu einem Tetraeder eine Kugel, die sämtliche Tetraederkanten berührt (Verlängerungen ausgeschlossen)?

Aufgabe 34/71

Man beweise: Wenn

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$

drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge erster Ordnung sind, dann sind auch a^2, b^2, c^2 aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge.

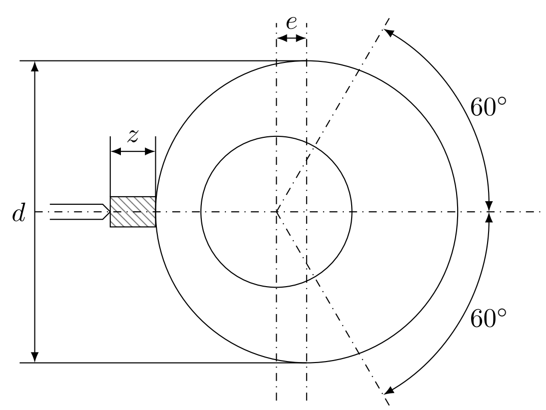
Aufgabe 35/71

Gegeben ist ein Kreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden, einander schneidenden Sehnen. Der Schnittpunkt teilt die Sehnen in je zwei Abschnitte. Es ist zu beweisen: Sind a, b, c, d diese Abschnitte, so ist (wobei r der Radius des gegebenen Kreises ist)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2$$

Aufgabe 36/71

Auf einer Drehmaschine mit zentrisch spannendem Dreibackenfutter soll an einem kreisrunden Teil mit dem Durchmesser d ein exzentrischer Ansatz mit kreisrundem Querschnitt gedreht werden.
Die Achse des Ansatzes soll zur Achse des Teils um e vorsetzt sein (Abbildung).
Damit das Teil exzentrisch eingespannt wird, soll unter eine Spannbacke ein Metallzwischenstück der Dicke z gelegt werden. Man bestimme z als Funktion von d und e: $f = f(d; e)$!



2.12 Aufgaben 1972

Aufgabe 1/72

Das Symbol $*$ kennzeichne eine Operation, die für natürliche Zahlen $x; y$ folgendermaßen definiert sei: $x * y = (x + y)^2$.
Es ist zu prüfen, ob

a) die Operation kommutativ ist, d.h., ob gilt $x * y = y * x$,

b) die Operation assoziativ ist, d.h., ob gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$,

c) die Operation distributiv bezüglich der Addition ist, d.h. ob gilt $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$,

d) für die Operation ein neutrales Element existiert, d.h., ob es ein Element e gibt so, dass $x*e = e*x = x$ für jedes x und e eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2/72

Aus drei Strecken mit den Maßzahlen a, b und c $(a, b, c > 0)$ sei ein Dreieck konstruierbar. Man beweise, dass man dann auch aus den Strecken mit den Maßzahlen $\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}$ ein Dreieck konstruieren kann.

Aufgabe 3/72

Gegeben seien die vier Scheitelpunkte einer Ellipse. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal das der Ellipse umbeschriebene Quadrat.

Aufgabe 4/72

Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2, weiterhin auf g_1 ein Punkt A. Gesucht ist der Punkt X auf g_1, für den der Abstand zur Geraden g_2 gleich dem Abstand zu A ist.

Aufgabe 5/72

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Zahl n ist das Produkt von genau drei verschiedenen Primzahlen, die je größer als 10 sind.
2. Die Zahl n kann man so als Produkt zweier natürlicher Zahlen darstellen, dass deren Summe einmal 600, ein zweites Mal 240 ist.

Aufgabe 6/72

In der Gleichung
$$\cot(m \cos(2\pi x)) = \sqrt{3}$$
ist der Koeffizient $m > 0$ so zu bestimmen, dass die Gleichung die Lösungen $x_{1;2} = \pm\frac{1}{6}$ hat. Ferner sind alle übrigen Lösungen der Gleichung zu bestimmen.

Aufgabe 7/72

Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte der Ebene, und es sei $AB + CD = BC + AD$. Man beweise, dass die Strecken AB, BC, CD, DA ein nicht überschlagenes Viereck bilden.

Aufgabe 8/72

Man bestimme alle reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$\sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) = 0$$

bei beliebigem reellem x gilt.

Aufgabe 9/72

Es seien a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0, |a| \neq 1$. Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, für die für jedes reelle $x \neq 0$ die Beziehung gilt:

$$ax \cdot f(x) + \frac{1}{ax} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = b$$

Aufgabe 10/72

Man beweise, dass für zwei verschiedene reelle Zahlen x und y stets die Ungleichung gilt:

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 < (x-y)^2$$

Aufgabe 11/72

Gesucht sind alle geometrischen Folgen $\{a_k\}$ mit $a_k = a_1 q^{k-1}$, die den folgenden vier Bedingungen genügen:
1. Die Glieder a_k sind natürliche Zahlen.
2. Das 1. Glied a_1 ist einstellig.
3. Das 11. Glied $a_1 1$ ist sechsstellig.
4. Das 15. Glied $a_1 5$ ist siebenstellig.

Aufgabe 12/72

Man untersuche, ob es eine reelle Zahl x gibt, mit

$$x = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \cdot \cot \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 13/72

Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden AM und BN, deren Schnittpunkt P sei. Von dem Dreieck ABC sei bekannt, dass $AP = MP\sqrt{3}$ und $NP = BP(\sqrt{3}-1)$ ist. Gesucht sind die Winkel des Dreiecks.

Aufgabe 14/72

Gegeben seien vier Kreise mit gleichen Radien, die einander sämtlich in einem Punkt S schneiden. Je zwei dieser Kreise heißen "benachbart", wenn bei Drehung eines Strahls um S ihre Mittelpunkte unmittelbar nacheinander von dem Strahl überstrichen werden.
Man beweise: Die vier Schnittpunkte je zweier benachbarter Kreise bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.

Aufgabe 15/72

Man beweise: Ist p eine von 2 verschiedene Primzahl und m eine beliebige natürliche Zahl, so ist die Summe ohne Rest durch p^m teilbar.

$$z = \sum_{k=1}^{p^m} k^p$$

Aufgabe 16/72

In der Ebene sei die Strecke $AB = 1$ gegeben. Man finde die Menge aller der Punkte M, für die sich die Längen der Strecken MA und MB durch ganze Zahlen ausdrücken lassen.

Aufgabe 17/72

Gegeben sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt unbekannt ist. Gesucht sind zwei beliebige, aber gleichlange Sehnen dieses Kreises ohne gemeinsamen Punkt, wobei zur Konstruktion nur das Lineal (ohne Maßstab!) und ein einziger Zirkelschlag zugelassen sind.

Aufgabe 18/72

Man berechne die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1}$$

Aufgabe 19/72

In einer Klasse einer EOS haben 75 % der Schüler die Zeitschrift "Wissenschaft und Fortschritt", 35 % die Zeitschrift "Urania" abonniert.
Es ist der Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen festzustellen (wahr, falsch, nicht entscheidbar).

a) Alle Schüler der Klasse haben eine der beiden Zeitschriften, aber nicht beide abonniert. item Die meisten der Schüler, die "Urania" abonniert haben, sind auch Abonnenten von "Wissenschaft und Fortschritt".

b) Der kleinere Teil der Abonnenten von "Wissenschaft und Fortschritt" hat auch "Urania" abonniert.

Aufgabe 20/72

In einer orientierten Ebene fallen die Spitzen C_1 und C_2 von zwei gleichsinnig umlaufenden, einander ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zusammen.
Man beweise: Verbindet man die Mittelpunkte A' und B' der Verbindungsstrecken A_1A_2 und B_1B_2 miteinander und mit $C' = C_1 = C_2$, so erhält man ein Dreieck $A'B'C'$, das den gegebenen Dreiecken ähnlich ist.

Aufgabe 21/72

Gegeben sei die Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + (62 - k)x + k = 0$ mit den reellen Lösungen x_i $(i = 1; 2; 3; 4)$. Welche reellen Werte kann k annehmen, wenn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} > 5$$

sein soll?

Aufgabe 22/72

Man beweise: Es existieren keine ganzen Zahlen a_k mit $k = 0; l; 2; ...; n$ so, dass das Polynom

$$P(x)a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

für $x = 12$ den Wert 3 und für $x = 7$ den Wert 2 annimmt.

Aufgabe 23/72

Es bedeute $[d]$ die größte ganze Zahl x mit $x \leq d$. Zu zeigen ist, dass

$$\left[\frac{n}{p^a q^b}\right] \geq \left[\frac{n}{p^{a+c}}\right] \cdot \left[\frac{p^c}{q^b}\right]$$

für alle positiven reellen Zahlen n, p, q, a, b, c gilt.

Aufgabe 24/72

Man bestimme im Bereich der natürlichen Zahlen sämtliche Lösungen des Gleichungssystems

$$\binom{y+1}{x+1} - \binom{y}{x+1} = 6$$
$$\binom{x}{x-2} \cdot \frac{2}{x-1} + \binom{y}{y-1} \cdot \frac{1}{y} = 3$$

Aufgabe 25/72

Gegeben sind zwei Geraden a und b, die einander unter einem spitzen Winkel schneiden, und ein im "spitzen Winkelraum" liegender Punkt C. Man konstruiere ein Dreieck ABC derart, dass A auf a und B auf b liegt und der Umfang minimal ist.

Aufgabe 26/72

Gegeben seien zwei Zahlenfolgen $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ mit

$$a_k = 4^{2k+1} + 4^{k+1} + 7 \qquad \text{und} \qquad b_k = 4^{2k+1} - 4^{k+1} + 7$$

Man zeige, dass für natürliches k a_k oder k_k ein Vielfaches von 5 ist!

Aufgabe 27/72

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen m und n, für die die Proportion gilt:

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5 : 5 : 3$$

Aufgabe 28/72

Welche Zahl ist größer, 99! oder $33^9 9$?

Aufgabe 29/72

Gegeben sei das Dreieck ABC mit unterschiedlich langen Seiten, wobei AC die kürzeste sei. Auf den Seiten AB und CB liegen im Abstand AC von A und C die Punkte A' bzw. C'. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Diagonalen im Viereck $AA'C'C$. Es ist zu beweisen, dass unter diesen Bedingungen die Flächen der Dreiecke $Aa'P$ und $CC'P$ niemals gleich sein können.

Aufgabe 30/72

Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b mit $ab > 0$ die Ungleichung

$$a^4 + 2a^3b - 6a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 > 0$$

erfüllt ist.

Aufgabe 31/72

Man beweise: Erfüllten die reellen Zahlen a, b, c, d die vier Ungleichungen

$$\begin{aligned} a + b + c + d &> 0, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &> 0, \\ abc + abd + acd + bcd &> 0, \\ abcd &> 0 \end{aligned}$$

so sind a, b, c, d positive Zahlen.

Aufgabe 32/72

Ist n eine natürliche Zahl mit der Quersumme m, so ist die Differenz $n - m$ bekanntlich stets ohne Rest durch 9 teilbar.
Es erhebt sich die Frage, ob umgekehrt jede durch 9 teilbare Zahl $k \leq 900$ eine Darstellung der Form $n - m$ besitzt?

Aufgabe 33/72

Man finde alle positiven ganzzahligen Lösungen $(a; b; k)$ des Systems

$$a = b^{k+1} \quad (1) \qquad ; \qquad a^b = b^a \quad (2)$$

Aufgabe 34/72

Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $k = 46^{2n} - 12^{2n}$ durch 1972 teilbar ist.

Aufgabe 35/72

Man beweise, dass $1973^{1973} - (1 + 9 + 7 + 3)$ keine Primzahl ist!

Aufgabe 36/72

Gesucht sind alle vierstelligen Primzahlen mit; den folgenden Eigenschaften:

1. Alle Ziffern der dezimalen Darstellung sind voneinander verschieden.
2. Zerlegt man die Zahl in der Mitte in zwei zweistellige Zahlen, so sind beide Zahlen Primzahlen, deren jede die Quersumme 10 hat.
3. Die letzten beiden Stellen sind; jede für sich; ebenfalls Primzahlen.

2.13 Aufgaben 1973

Aufgabe 1/73

Fällt man in einem gegebenen Kreisausschnitt von einem beliebigen Punkt des Bogens Lote auf die den Ausschnitt begrenzenden Radien, so ist der Abstand der Fußpunkte voneinander unabhängig von der Wahl des Punktes. Man beweise diesen Satz!

Aufgabe 2/73

Man zeige, dass $971^{130} + 970^{65}$ keine Quadratzahl ist!

Aufgabe 3/73

Es ist zu untersuchen, für welche reelle Zahl a das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = z \qquad ; \qquad x + y + z = a$$

genau eine reelle Lösung $(x; y; z)$ hat. Diese Lösung ist zu finden.

Aufgabe 4/73

Einem Kreis sei ein regelmäßiges Dreieck ABC einbeschrieben, CD sei eine Sehne des Kreises, die die Dreieckseite AB schneidet. Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen $AB + BD = CD$ ist.

Aufgabe 5/73

Man bestimme alle Primzahlen der Form $p = x^4 + 4y^4$, wobei x und y natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 6/73

Man gebe alle reellen Lösungen des Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \quad (1) \\ x^2y^2 - z^2 &= 16 \quad (2) \\ \sin(x^2 - 2y) &= z \quad (3) \end{aligned}$$

Aufgabe 7/73

Es ist zu beweisen: Fällt man von einem beliebigen Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks Lote auf die Dreiecksseiten (bzw. deren Verlängerungen), so liegen die Fußpunkte der Lote auf einer Geraden.

Aufgabe 8/73

Man beweise, dass die Ungleichung

$$\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n + \ln n! \leq n[\ln(x_1 + 2x_2 + ... + n_x) - \ln n]$$

für beliebige positive, reelle Zahlen $x_1; x_2; ...; x_n$ (mit $n \geq 1$) gilt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 9/73

Man bestimme das Minimum der Funktion $y = x^{10} - 1 - \sqrt{2x^{10} - 1}$ ohne dazu Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden.

Aufgabe 10/73

Gegeben sei eine natürliche Zahl n, die in dezimaler Schreibweise k-stellig sei. 300 dieser k Stellen seien mit Einsen besetzt, der Rest mit Nullen. Man beweise, dass n keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 11/73

Ein Eisenbahnzug fährt an einem Kilometerstein mit einer zweistelligen Kilometerzahl vorüber. Nach der Zeit Δt_1 fährt er an einem weiteren Kilometerstein vorbei, auf dem die gleichen Ziffern mit vertauschter Reihenfolge stehen.
Schließlich trifft er nach der weiteren Zeit $\Delta t_2 = \Delta t_2$ auf einen dritten Kilometerstein, dessen Angabe gleich der ersten Zahl mit dazwischengesetzter Null ist.
Die Durchschnittsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 während der Zeiten Δt_1 bzw. Δt_2 sind die gleichen: $v-1 = v_2$.
Wie lauten die Zahlen auf den Kilometersteinen?

Aufgabe 12/73

Man zeige, dass es kein Polynom $P(x)$ zweiten Grades gibt, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{array}{llll} P(x) \equiv 0 \pmod 8 & \text{für} & x \equiv 1 \pmod 2 & (1) \\ P(x) \equiv 1 \pmod 8 & \text{für} & x \equiv 0 \pmod 2 & (2) \end{array}$$

Aufgabe 13/73

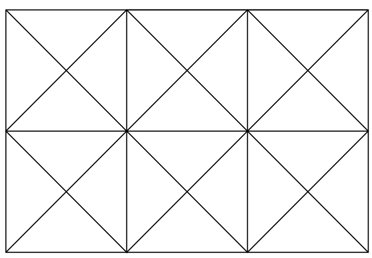
Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c. Gesucht ist das gleichseitige Dreieck PQR so, dass $QR \parallel a$ ist und P auf a, Q auf b, R auf c liegt.

Aufgabe 14/73

Es seien a und b je eine der zehn Ziffern $0; 1; ...; 9$. Wieviele verschiedene Zahlen der Form $ababab$ sind möglich? Welche Primzahlen sind Teiler jeder dieser Zahlen?

Aufgabe 15/73

Wieviele verschiedene Streckenzüge sind notwendig, wenn man das in der Abbildung dargestellte Muster nachzeichnen will, ohne eine Strecke zweimal zu zeichnen?



Aufgabe 16/73

Man beweise ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung, dass für beliebiges reelles c die Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$$

Aufgabe 17/73

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$$

ein Polynom 5.Grades. Man bestimme ganzzahlige Koeffizienten $a_k > 0$ derart, dass höchstens einer von ihnen durch 120 teilbar ist, $f(x)$ aber für alle ganzzahligen $x >= 1$ durch 120 teilbar ist.

Aufgabe 18/73

Man finde die Menge aller der Punkte in einer Ebene, von denen aus zwei gegebene Kreise der Ebene unter gleichen Winkeln erscheinen.

Aufgabe 19/73

Man bestimme alle Primzahlen p, für $P = 20p^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 20/73

Gegeben sind ein Kreis mit dem Radius r und ein dem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck. Gesucht ist die Summe aus den Quadraten der Abstände eines beliebigen Punktes A auf der Peripherie des Kreises von den Eckpunkten des n-Ecks.

Aufgabe 21/73

Man bestimme ein Polynom $P(x)$ kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, das für ungeradzahliges x stets durch 8 teilbar ist. Dabei soll $P(x)$ nicht für jedes ganzzahlige x durch 2 teilbar.

Aufgabe 22/73

Es ist zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl $n > 2$ gilt

$$5! \mid n^6 - 2n^5 - n^2 + 2n$$

Aufgabe 23/73

Man beweise: Wenn das Dreieck ABC mit den Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ bei C einen stumpfen Innenwinkel hat, dann hat die Gleichung $c = a \sin x + b \cos x$ keine Lösung in reellen Zahlen x.

Aufgabe 24/73

Eine Funktion $f(x)$ habe die folgenden Eigenschaften:

1. Für reelle x ist $f(x) > 0$.
2. Für reelle x_i ist $f(x_1 + x_2) = 2 \cdot f(x_1)f(x_2)$.
3. Es ist $f(2) = 2$.

Man bestimme die Funktionswerte $f(1)$, $f(0)$, $f(3)$ und $f(6)$! Um welche Funktion handelt es sich?

Aufgabe 25/73

Man zeige, dass die Funktion
$$f(x) = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1$$
keine reelle Nullstellen hat!

Aufgabe 26/73

Man konstruiere ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC aus den Strecken $AC = b$ und $c - a$ (wobei $c = AB, a = BC$ ist)!

Aufgabe 27/73

Gegeben seien n positive Zahlen $a_1; a_2; ...; a_n$, so dass
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$$
ist. Man beweise, dass dann gilt
$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 2^n$$

Aufgabe 28/73

Für welche reellen Zahlen a und b hat die Gleichung
$$\frac{a}{b-x} - \frac{x}{b+x} = 1$$
genau eine reelle Lösung $x = 2$?

Aufgabe 29/73

Gegeben sei das Dreieck ABC. Auf der Strecke AB liege ein beliebiger Punkt D, durch den zwei Dreiecke ADC und BDC bestimmt sind.
Man beweise, dass das Verhältnis der Umkreisradien dieser Dreiecke konstant ist, also nicht von der Lage des Punktes D abhängt.

Aufgabe 30/73

Gegeben sind zwei Strecken a und b. Man konstruiere ein Rechteck $ABCD$ so, dass a sein Umfang und b Durchmesser des Umkreises ist.

Aufgabe 31/73

Gesucht sind alle Primzahlen p, für die $p^4 - 1$ nicht durch 15 teilbar ist.

Aufgabe 32/73

Zu konstruieren ist ein Dreieck aus den Höhen h_a und h_b und der Winkelhalbierenden w_γ (wobei die übliche Bezeichnungsweise verwendet wird.)

Aufgabe 33/73

Die diophantische Gleichung $ax + by = c$ mit $a; b; c; x; y$ ganzzahlig und $ggT(a,b) = 1$ habe zwei Lösungen $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$, für die gilt $x_1 = x_2 + 1$.
Man zeige, dass dann gilt $|b| = 1$ und $|a| = |y_2 - y_1|$.

Aufgabe 34/73

Bei welchem der fünf platonischen Körper ist es möglich, alle Kanten in einem Zug (ohne Wiederholung einer Kante) zu durchlaufen?

Aufgabe 35/73

Es ist zu beweisen, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Zahl der Gestalt 111...111000...000 gibt, die durch n teilbar ist.

Aufgabe 36/73

Aus einer Urne, in der sich insgesamt 53 schwarze und weiße Kugeln befinden, werden willkürlich vier Kugeln gezogen.
Dabei werden gezogene Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt. Wieviel Kugeln jeder Sorte müssten in der Urne sein, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder vier schwarze Kugeln oder zwei schwarze und zwei weiße Kugeln gezogen werden, einander gleich sein sollen?

2.14 Aufgaben 1974

Aufgabe 1/74

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die der Term

$$T(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

ohne Rest durch 10 teilbar ist.

Aufgabe 2/74

Es sind alle Rechtecke mit folgender Eigenschaft zu finden: Die Seitenlängen kann man durch ganze Zahlen ausdrücken, deren Summe zahlenmäßig gleich der Fläche des Rechtecks ist.

Aufgabe 3/74

Gesucht ist eine quadratische Matrix vom Typ 3 mit folgender Eigenschaft:
1. Ihre Elemente sind aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
2. Die Matrix stellt ein magisches Quadrat dar.
3. Die Determinante der Matrix ist gleich null.

Aufgabe 4/74

In einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem sei eine Kurve durch die Gleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{12}$$

gegeben. Gesucht sind alle Punkte der Kurve mit ganzzahligen Koordinaten.

Aufgabe 5/74

Es sei n eine natürliche Zahl. Wieviel Stellen hinter dem Komma (ohne nachfolgende Nullen) hat die Zahl 4^{-n}?

Aufgabe 6/74

Es ist zu beweisen, dass aus der Gültigkeit der Beziehung

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos y \quad (1)$$

die Gültigkeit der Beziehung folgt

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(ny) \quad (2)$$

Aufgabe 7/74

Man beweise, dass für $p \neq 3$ der Term $14p^2 + 1$ keine Primzahl liefert.

Aufgabe 8/74

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\measuredangle BAC = \alpha \neq 90°$, $\measuredangle ABC = \beta \neq 90°$. Man beweise, dass

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$

Aufgabe 9/74

Gesucht ist der Grenzwert derjenigen Zahlenfolge $\{a_n\}$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $a_n = \frac{b_n}{c_n}$
2. $b_1; c_1$ sind natürliche Zahlen
3. $b_{n+1} = 2b_n$
4. $c_{n+1} = b_n + c_n$

Aufgabe 10/74

Gesucht sind alle reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung gilt:

$$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$$

Aufgabe 11/74

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 sowie ein reguläres n-Eck, dessen Umkreis K_1 ist. Es ist zu beweisen, dass die Summe aus den Quadraten der Abstände eines beliebigen Punktes P auf K_2 von den Eckpunkten des n-Ecks unabhängig von der speziellen Lage des Punktes P ist.

Aufgabe 12/74

Es sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Man zeige, dass die Bedingung $a^2 - 3b < 0$ hinreichend für die Existenz komplexer Nullstellen von $f(x)$ ist.

Aufgabe 13/74

Für welche positiven reellen Zahlen a und b hat das Gleichungssystem

$$(y-a)^2 = 1 - x^2 \qquad ; \qquad x^2 = by$$

genau drei reelle Lösungen?

Aufgabe 14/74

Man konstruierte ein Rechteck $P_1P_2P_3P_4$ mit dem Seitenverhältnis $m : n$, dessen drei Eckpunkte P_1, P_2, P_3 beziehungsweise auf den drei gegebenen Parallelen p_1, p_2, p_3 liegen.

Aufgabe 15/74

Es ist zu beweisen: Erfüllen die reellen Zahlen a, b, c, x, y, z die Bedingungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad ; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

so gilt $|ax + by + cz| \leq 1$.

Aufgabe 16/74

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Über der Seite AB sei ein beliebiges Parallelogramm $ABDE$ errichtet, über der Seite BC ein beliebiges Parallelogramm $BCFG$. Der Schnittpunkt von DE und FC sei H.
Man beweise: Die Summe der Flächeninhalte beider Parallelogramme ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms über der Seite AC, dessen zweite Seite gleich der Strecke BH und dieser parallel ist.

Aufgabe 17/74

Man beweise, dass für den Flächeninhalt $A(ABC)$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt: $A(ABC) = m \cdot n$, wenn mit m und n, die vom Berührungspunkt des Inkreises erzeugten Hypotenusenabschnitte bezeichnet sind.

Aufgabe 18/74

Man beweise mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=0}^{10^n-1} 2^{Q(i)} = 1023^n$$

für jedes natürliche n gilt, wenn $Q(i)$ die Quersumme der Zahl i bezeichnet.

Aufgabe 19/74

Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $a^b + 7 = c$, wobei a, b und c Primzahlen sind.

Aufgabe 20/74

Gegeben sind zwei Kreise mit verschiedenen Radien, so dass sich die Kreise in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Durch einen der Schnittpunkte ist eine Gerade so zu konstruieren, dass die Kreise auf ihr zwei gleich lange Sehnen ausschneiden.

Aufgabe 21/74

In einem Dreieck seien u der Umfang, r der Umkreisradius und A der Flächeninhalt. Man zeige, dass stets gilt:

$$\frac{u^3}{rA} \geq 108$$

Aufgabe 22/74

Auf verschiedenen Seiten eines geradlinig verlaufenden Kanals mit parallelen Ufern liegen in verschiedenen Abständen und nicht auf gleicher Höhe zwei Orte A und B. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B so, dass der Kanal rechtwinklig gekreuzt wird.

Aufgabe 23/74

Man ermittle sämtliche reellen Lösungen der Gleichung

$$\left[x^3\right] = [x]^4$$

(wobei mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet ist, die nicht größer als x ist).

Aufgabe 24/74

Man beweise, dass keine Zahl der Form $4^n(4k+3)$ mit $n;k \in N$ als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar ist!

Aufgabe 25/74

Es sind die Maße aller Zylinder anzugeben, bei denen die Maßzahlen von Radius und Höhe natürliche Zahlen sind und bei denen Oberfläche und Volumen den Maßzahlen nach übereinstimmen.

Aufgabe 26/74

Es sei ABC ein bei A rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c (wobei die Seiten den gleichbezeichneten Ecken gegenüberliegen). Welche Werte kann das Verhältnis der Seitenhalbierenden $s_c : s_b$ annehmen?

Aufgabe 27/74

Nach Wieferichs Beweis der Waringschen Vermutung kann man jede Zahl als Summe von höchstens neun Kuben darstellen. Man zeige, dass jedes Vielfache von 6 schon durch höchstens vier Kuben darstellbar ist!

Aufgabe 28/74

Man beweise: Ist a eine irrationale Zahl, so ist die Funktion $y = \cos(ax) + \cos x$ nicht periodisch.

Aufgabe 29/74

Gesucht sind alle Kegel, bei denen die Maßzahlen von Radius, Höhe und Mantellinie natürliche Zahlen sind und bei denen die Maßzahlen von Oberfläche und Volumen einander gleich sind.

Aufgabe 30/74

Es sind alle Paare dreistelliger natürlicher Zahlen $(x;y)$ gesucht, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Zahlen eines Paares unterscheiden sich in den letzten beiden Stellen genau durch die Reihenfolge der Ziffern.
2. Die Differenz $x - y$ beträgt 18.
3. Jede der beiden Zahlen eines Paares ist das Produkt von genau zwei je zweistelligen Primzahlen.

Aufgabe 31/74

Man zeige, dass das Produkt aus den Ziffern einer mehrstelligen natürlichen Zahl n stets kleiner ist als die Zahl n selbst.

Aufgabe 32/74

Für welche natürlichen Zahlen n ist $z = 4^n + 4^4 + 4^8$ eine Quadratzahl?

Aufgabe 33/74

Gegeben sei ein konvexes, sonst aber beliebiges Viereck $ABCD$. Gesucht ist der geometrische Ort aller der Punkte P im Inneren des Vierecks, für die die Vierecke $ABPD$ und $BCDP$ flächengleich sind.

Aufgabe 34/74

Man wähle eine mindestens zweistellige natürliche Zahl n, deren dezimale Darstellung keine Null enthält. Vertauscht man in ihr beliebig die Stellen, so ergibt sich eine zweite natürliche Zahl n'.
Streicht man in der Differenz $n - n'$ eine Ziffer, so kann man aus der Summe der verbliebenen Ziffern die gestrichene ermitteln. Wie ist das möglich?

Aufgabe 35/74

Für die Koeffizienten a_i der Gleichung $x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ gelte

$$\frac{a_2a_1}{a_0} < 9$$

Man zeige, dass dann nicht alle Lösungen der Gleichung positiv reell sind.

Aufgabe 36/74

Es seien $(x; y)$ Paare reeller Zahlen. Man stelle die Abbildung

$$\begin{aligned}\{(m;y) : y = x + 4 \text{ für } 0 \leq x < 2;\\ 0 \leq y \leq 6 \text{ für } x = 2;\\ (x-5)^2 + (y-4)^2 = 4; y = 4 - \sqrt{7 - x^2 + 6x} \text{ für } 3 \leq x \leq 7;\\ y = 6 \text{ und } y = 2x - 16 \text{ für } 8 \leq x \leq 11;\\ 4 \leq y \leq 6 \text{ für } x = 12;\\ y = 6 \text{ und } (x-14)^2 + (y-2{,}5)^2 = 6{,}25 \text{ für } 12 \leq x \leq 16{,}5\}\end{aligned}$$

in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem graphisch dar!

2.15 Aufgaben 1975

Aufgabe 1/75

Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 + px + q$, dessen Koeffizienten p, q reell sind, und es sei $q \neq 0$. Es ist zu beweisen: Sind alle Nullstellen des Polynoms reell, so ist $p < 0$.

Aufgabe 2/75

Man bestimme alle nicht negativen ganzen Zahlen m und n, die der Gleichung $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$ genügen.

Aufgabe 3/75

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c (wobei $a \geq b \geq c$ sei) und dem Flächeninhalt A. Man zeige, dass $b \geq \sqrt{2A}$ gilt.

Aufgabe 4/75

Es seien h_c die Höhe auf der Hypotenuse c und ρ der Inkreisradius eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC. Man beweise, dass dann gilt

$$2 < \frac{h_c}{\rho} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Aufgabe 5/75

Gesucht sind alle Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen, für die die Gleichung $\frac{x+y}{x-y} = z$ gilt.

Aufgabe 6/75

Ein Gärtner will 25 Rosen so auf eine Fläche verteilen, dass in 15 Reihen je 5 Rosen stehen. Dabei sollen die Rosen rotationssymmetrisch so angeordnet werden, dass mehr als $\frac{3}{4}$ davon weniger als halb so weit vom Symmetriezentrum entfernt sind wie die äußersten und dass das Symmetriezentrum selbst unbepflanzt bleibt. Wie ist eine solche Anordnung möglich?

Aufgabe 7/75

Es sei $p = ABC$ eine in dekadischer Schreibweise dargestellte dreistellige Zahl, wobei $0 \leq A, B, C \leq 9$, A, B, C natürlich gilt, also A, B, C die Ziffern der entsprechenden Stellen angeben. Es ist zu beweisen: Wenn $p = ABC$ durch 37 teilbar ist, dann sind auch die Zahlen $q = BCA$ und $r = CAB$ durch 37 teilbar.

Aufgabe 8/75

Es ist zu beweisen, dass die Zahl $23 \cdot 52^n + 102 \cdot 27^n$ für jede ungerade natürliche Zahl n durch 1975 teilbar ist.

Aufgabe 9/75

Man ermittle, ohne das Integral zu berechnen, den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x t \sin t dt$$

Aufgabe 10/75

Gegeben sei eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Jede Seitenfläche schließe mit der Grundfläche den Winkel α ein. In diese Pyramide werden zwei Kugeln so einbeschrieben, dass eine Kugel alle fünf Flächen der Pyramide, die andere aber die vier Seitenflächen der Pyramide und die Oberfläche der ersten Kugel berührt.
In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Kugeln zueinander?

Aufgabe 11/75

Gesucht sind alle positiven dreistelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Multipliziert man die Zahl mit der Zahl, die sich durch Umkehrung der Ziffernfolge ergibt, so erhält man ein sechsstelliges Produkt, das mit zwei Nullen endet.

Aufgabe 12/75

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{\sum a_i^{\sum a_i + 1}}{(\sum a_i + 1)^{\sum a_i}} > \sqrt[n]{\prod a_i}$$

für n positive reelle Zahlen a_i, wobei $n > 2$ ist.

Aufgabe 13/75

Es seien n und m natürliche Zahlen. In welchem Zahlensystem mit der Basis k gilt, dass m beim Teilen durch n denselben Rest lässt wie die Quersumme $Q(m)$?

Aufgabe 14/75

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $a^{2x} + a^x b^x = b^{2x}$, wobei a und b positive reelle Zahlen sind. Welche zusätzliche Bedingung muss für a und b gelten?

Aufgabe 15/75

Man zeige für das gleichseitige Dreieck ABC und einen beliebigen Punkt P derselben Ebene die Gültigkeit der Ungleichung $PA \leq PB + PC$.

Aufgabe 16/75

Gegeben seien ein Winkel $\varphi < 180°$ mit dem Scheitel O und ein fester Punkt M innerhalb des Winkelraums. Eine veränderliche Gerade g durch M schneide die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B. Man beweise, dass dann

$$\frac{1}{F(AMO)} + \frac{1}{F(BMO)} = \text{ konstant}$$

gilt, wobei mit $F(XMO)$ der Flächeninhalt des Dreiecks XMO bezeichnet ist.

Aufgabe 17/75

Gegeben ist die Funktion

$$y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$$

Gesucht sind diejenigen Werte von x, für die y einen Extremwert annimmt. Die Aufgabe ist ohne Verwendung der Differentialrechnung zu lösen!

Aufgabe 18/75

Man ermittle sämtliche Tripel reeller Lösungen $(x; y; z)$ der Gleichung

$$x^2 + y^4 + z^6 + 14 = 2x + 4y^2 + 6z^3$$

Aufgabe 19/75

Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen mit je fünf unterschiedlichen Ziffern haben die Quersumme 18? (Anmerkung: Vierstellige Zahlen mit einer vorgesetzten Null sollen nicht als fünfstellig gelten.)

Aufgabe 20/75

Die Seiten eines Dreiecks seien mit a, b, c, der Umfang mit u, der Umkreisradius mit R und der Inkreisradius mit r bezeichnet. Man beweise, dass die beiden Ungleichungen äquivalent sind:

$$R^2 \geq \frac{abc}{u} \qquad \text{und} \qquad R^2 \geq 4r^2$$

Aufgabe 21/75

Gegeben ist das Quadrat $M_1M_2M_3M_4$ mit der Seitenlänge $2a$. In der Ebene des Quadrate liege ein beliebiger Punkt P. Mit l_i sei der Abstand PM_i bezeichnet ($i = 1; 2; 3; 4$).

1. Gesucht ist die Menge der Punkte P, für die gilt
$$\sum_{i=1}^{4} l_i^4 = 4na^4$$
wobei n eine nicht negative reelle Zahl ist.
2. Für welches kleinste n ist die gesuchte Menge nicht leer?
3. Die Menge ist für $n = 13$ und für $n = 24$ konkret anzugeben.

Aufgabe 22/75

Wie viele verschiedene Dreiecke gibt es, bei denen die Maßzahl des Umfangs 50 ist und die Maßzahlen der Seiten natürliche Zahlen sind?

Aufgabe 23/75

Es ist zu beweisen, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{a_i^2} = 1$$

keine Lösung in natürlichen Zahlen a_i hat.

Aufgabe 24/75

Aus einer Tabelle der Fakultäten will jemand den Wert für 20! entnehmen. Dabei stellt er fest, dass zwei Ziffern unleserlich sind:

$$20! = 2 \bullet \bullet 2902008176640000$$

Wie kann man die unleserlichen Ziffern ermitteln, ohne das Produkt auszurechnen?

Aufgabe 25/75

Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz aus der Summe ihrer Ziffern ist.

Aufgabe 26/75

Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$, bei dem sich die Verlängerungen der Seiten $AB = a$ und $CD = b$ unter einem rechten Winkel schneiden. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD seien E bzw. F. Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$EF^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$$

Aufgabe 27/75

Man beweise, dass die Gleichung $x^2 - 777y^2 = 6$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt!

Aufgabe 28/75

Es ist die Gleichung zu lösen:

$$\sqrt[3]{1 + \lg \tan x} + \sqrt[3]{1 - \lg \tan x} = 2$$

Aufgabe 29/75

Es sei $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$. Man zeige, dass unter dieser Voraussetzung die Zahlen x, y und z eine geometrische Folge bilden!

Aufgabe 30/75

Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, auf dessen Seiten beliebige, aber einander ähnliche Dreiecke errichtet wurden.
Man zeige, dass die Fläche des Dreiecks über der Hypotenuse gleich der Summe der Dreiecksflächen über den Katheten ist (wobei unter "Fläche" der Flächeninhalt zu verstehen ist).

Aufgabe 31/75

Gegeben seien eine Gerade g und zwei beliebige Kreise, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von g liegen.
Zu konstruieren ist ein Quadrat so, dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf g, die beiden anderen Eckpunkte je auf einem der beiden Kreise liegen.

Aufgabe 32/75

Gesucht ist die kleinste Primzahl p, für die gilt

$$p + 1 \equiv 0 \pmod 2; \qquad p + 1 \equiv 0 \pmod 3; \qquad p + 1 \equiv 0 \pmod 4;$$

$$p + 1 \equiv 0 \pmod 5; \qquad p + 1 \equiv 0 \pmod 6;$$

Aufgabe 33/75

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i(i+2)}\right)<2$$

Aufgabe 34/75

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c und die Höhe auf der Hypotenuse mit h_c bezeichnet, so gilt $a+b<c+h_c$. Man beweise diesen Satz!

Aufgabe 35/75

Gesucht sind alle Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise), die folgende Bedingungen erfüllen :
l. Es ist $a=9$ Längeneinheiten, b und c sind ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit.
2. Es ist $\alpha=2\beta$.

Hinweis: Die abgedruckte Aufgabe war durch einen Druckfehler unlösbar. In korrigierter Form wurde die Aufgabe als 10/76 im Aprilheft 1976 erneut gestellt.

Aufgabe 36/75

Man wähle eine beliebige zweistellige Primzahl mit der Quersumme 10 und subtrahiere von ihr so oft die Zahl 18, bis die Differenz zwischen 10 und 20 liegt. Die Differenz vervierfache man! Vor dieses Produkt setze man die Differenz!
Wie viele "Ausgangszahlen"für die Rechnung gibt es, und warum ist das Ergebnis eindeutig?

2.16 Aufgaben 1976

Aufgabe 1/76

Es sei P ein konvexes Polyeder mit f Flächen und k Kanten. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung $3f \leq 2k$.
In welchem Fall gilt die Gleichheit?

Aufgabe 2/76

Man bestimme alle ganzen Zahlen $x; y$, die der Gleichung $3x - 2y = 1$ genügen!

Aufgabe 3/76

Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen x_i mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ und $0 \leq x_i \leq 1$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n} + \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)} \geq 2^{n+1}$$

Aufgabe 4/76

Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $x + ax - b = 0$ für reelle $a; b$ und $b > 0$ eine und nur eine positive Wurzel hat.

Aufgabe 5/76

Man beweise: In jedem konvexen Viereck gilt die Ungleichung $\frac{u}{2} < s < u$, wobei mit u der Umfang und mit s die Summe der Diagonalenlängen bezeichnet ist.

Aufgabe 6/76

Man finde die Basis x des Zahlensystems, in dem die Gleichung gilt: $(211)_x^2 = (100021)_x$.

Aufgabe 7/76

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass sowohl die Quersumme $Q(n)$ der Zahl n als auch die Quersumme $Q(n+1)$ des Nachfolgers von n durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 8/76

Es sei $\log_{90} 3 = a$, $\log_{90} 5 = b$. Man berechne daraus $\log_{90} 8 = f(a; b)$.

Aufgabe 9/76

Die Maßzahlen der Winkel eines Dreiecks seien α, β, γ. Man zeige, dass man aus den Strecken der Länge $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ ein Dreieck konstruieren kann!

Aufgabe 10/76

Gesucht sind alle Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise), die folgende Bedingungen erfüllen: 1. Es ist $a = 9$ Längeneinheiten, b und c sind ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit.
2. Es ist $\beta = 2\alpha$

Aufgabe 11/76

Man beweise die Richtigkeit der Äquivalenz

$$a = b = c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = bc + ca + ab$$

Aufgabe 12/76

Frau Quidam erzählt: "Mein Mann, ich und unsere vier Kinder haben sämtlich am gleichen Tag Geburtstag. An unserem letzten Geburtstag addierten wir unsere Alterszahlen, und wir erhielten unsere Hausnummer. Als wir sie multiplizierten, ergab sich der Kilometerstand unseres Trabants vor der letzten Generalüberholung: 180 523."
Wie alt sind die sechs Quidams? Welche Hausnummer haben sie?

Aufgabe 13/76

Man beweise: Für alle positiven reellen Zahlen a_i gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$$

Aufgabe 14/76

Gegeben sei die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke ABC über einer (konstanten) Hypotenuse $AB = c$. Es ist zu beweisen:
Verlängert man bei jedem dieser Dreiecke eine Kathete über C hinaus um die andere Kathete, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen sämtlich auf dem gleichen Kreisbogen.

Aufgabe 15/76

Welche natürlichen Zahlen n sind als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar, welche nicht?

Aufgabe 16/76

Gegeben sei die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 17x + a_0 = 0$, von der bekannt ist, dass die Summe zweier Lösungen gleich 1 ist. Gesucht ist a_0.

Aufgabe 17/76

Man bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen i, m und n, für die $2^l + 2^m = n!$ gilt.

Aufgabe 18/76

Gegeben seien ein Kreisring und in ihm n Kreise derart, dass jeder von ihnen den inneren und den äußeren Begrenzungskreis und zwei weitere Kreise berührt. Wie groß ist n, wenn das Verhältnis aus der Kreisringfläche A_1 und der Summe der n Kreisflächen A_2 gleich $\sqrt{2}$ ist?

Aufgabe 19/76

Bei einem Würfelspiel mit 6 Würfeln sollen nur diejenigen Würfe gewertet werden, bei denen mindestens eine 1 oder mindestens eine 5 oder mindestens 3 gleiche (beliebige) Zahlen auftreten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Wertung erfolgt?

Aufgabe 20/76

Man beweise, dass für $n > 2$ die Ungleichung $5^n > 4^n + 3^n$ gilt, ohne dabei das Prinzip der vollständigen Induktion zu verwenden!

Aufgabe 21/76

Man berechne das Produkt: $\prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} j^2$.

Aufgabe 22/76

Man beweise, dass die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen hat, wenn a, b, c die Maßzahlen der Seiten eines Dreiecks sind!

Aufgabe 23/76

Man bestimme alle reellen Zahlentripel $\{a; b; c\}$ für die $a; b; c$ die drei Lösungen der Gleichung $x^3 - abx^2 + bcx - ca = 0$ sind.

Aufgabe 24/76

Es ist zu beweisen: Sind im Raum $n = 2k$ Punkte ($k \in N$) derart gegeben, dass keine drei Punkte auf derselben Geraden liegen, so sind zwischen diesen Punkten höchstens k^2 Verbindungsstrecken möglich, ohne dass diese Strecken ein Dreieck mit Eckpunkten aus der gegebenen Punktmenge bilden.

Aufgabe 25/76

Man löse die Gleichung $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$ für reelle Zahlen x.

Aufgabe 26/76

Gesucht sind alle Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$p_1^2 + p_2^2 = p_3 \quad (1) \qquad ; \qquad p_1^2 - p_2^2 = p_4 \quad (2)$$

Aufgabe 27/76

Man zeige, dass das Polynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

für gegebenes n keine mehrfachen Nullstellen besitzt!

Aufgabe 28/76

In einem Dreieck mit den Winkeln α, β, γ und den ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c gelte

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3 \qquad ; \qquad \tan\beta \cdot \tan\gamma = 6$$

Man berechne die Winkel α, β, γ sowie die Seitenverhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$.

Aufgabe 29/76

Für den Transport von 416 Personen stehen Omnibusse mit 7, 21 und 31 Sitzplätzen zur Verfügung. Der Transport soll mit der geringsten Anzahl von Fahrten durchgeführt werden, wobei jedoch kein Sitzplatz frei bleiben soll. Welche Omnibusse sind mit wieviel Fahrten einzusetzen?

Aufgabe 30/76

Man bestimme alle Paare $(n;m)$ natürlicher Zahlen, die der Gleichung $4^n + 65 = 9^m$ genügen.

Aufgabe 31/76

Man bestimme alle ganzzahligen Paare $(x;y)$ die der Gleichung $16x^2 + 2xy + y^2 = 85$ genügen.

Aufgabe 32/76

Man beweise: Haben die Seitenflächen eines Tetraeders sämtlich den gleichen Umfang, so sind sie kongruent.

Aufgabe 33/76

Man beweise: Ist $(a;b;c)$ ein (paarweise) teilerfremdes pythagoreisches Zahlentripel und b ungerade, so sind

$$u = \sqrt{\frac{c+b}{2}} \qquad \text{und} \qquad v = \sqrt{\frac{c-b}{2}}$$

natürliche Zahlen.

Aufgabe 34/76

In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie der Höhe h_c auf c gelte $2a2 - 3ab + 2b^2 = ch_c$.
Man bestimme die den Seiten a, b und c gegenüberliegenden Winkel α, β, γ.

Aufgabe 35/76

Gegeben seien Kantenmodelle regulärer Tetraeder, bei denen die Kanten mit sechs Farben unterschiedlich gefärbt seien. Zwei derartige Modelle sollen als gleich gelten, wenn man sie so aufstellen kann, dass die Paare paralleler Kanten gleiche Farbe haben. Wie viele verschiedene Modelle sind möglich?

Aufgabe 36/76

Man beweise, dass die Zahl

$$z = \sum_{i=1}^{1977} i^{1977}$$

keine Primzahl ist!

2.17 Aufgaben 1977

Aufgabe 1/77

Man beweise: Wenn $\cos(\alpha+\beta)=0$ ist, dann gilt $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

Aufgabe 2/77

Man beweise, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse mindestens so groß wie die vierfache Dreiecksfläche ist!

Aufgabe 3/77

Auf wieviel Nullen endet die Zahl 1000! ?

Aufgabe 4/77

Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt gleich dem Produkt aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der beiden Hypotenusenabschnitte, die von der Höhe auf der Hypotenuse erzeugt werden.

Aufgabe 5/77

Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $3^x \equiv 1 \pmod{13}$?

Aufgabe 6/77

Man zeige, dass für reelle $a;b$ mit $0<b\leq a$ die Ungleichungskette gilt:

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$$

Aufgabe 7/77

Man beweise, dass es kein Zahlensystem mit der Basis x gibt ($x\in N, x>1$), in dem die Zahl $(10004)_x$ Primzahl ist.

Aufgabe 8/77

Gesucht sind alle echt fünfstelligen natürlichen Zahlen z (also $10000 \leq z < 100000$) mit folgenden Eigenschaften:

1. Jede Ziffer kommt höchstens einmal vor.
2. Die Quersumme ist 10.
3. Addiert man zu der Zahl z die Zahl z', die aus den gleichen Ziffern wie z, jedoch in umgekehrter Reihenfolge besteht, so enthält die Summe nur gleiche Ziffern.

Aufgabe 9/77

Gegeben sei eine nicht konstante arithmetische Folge 1. Ordnung mit 6 Gliedern, die sämtlich Primzahlen sind.
Man beweise, dass der Absolutbetrag der Differenz aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge nicht kleiner als 30 ist!

Aufgabe 10/77

Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i} = 1$$

in natürlichen Zahlen x_i, für die gilt $x_i \geq x_j$, wenn $i > j$ ist.

Aufgabe 11/77

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Würfeln mit einem gewöhnlichen (einwandfreien) Würfel der zweite Wurf eine höhere Augenzahl hat als der erste?

Aufgabe 12/77

Gesucht sind (bis auf Ähnlichkeit) alle Dreiecke, bei denen die Tangenswerte der Innenwinkel sämtlich ganzzahlig sind.

Aufgabe 13/77

Gegeben sei ein Winkel von 17°. Mit Zirkel und Lineal konstruiere man daraus einen Winkel von 11°.

Aufgabe 14/77

Es seien a, b, c von null verschiedene natürliche Zahlen. Man zeige, dass es keine mehrstelligen Primzahlen p, q, r gibt, die der Gleichung genügen:

$$p^{2a} + q^b = r^{2c}$$

Aufgabe 15/77

Auf welche Weise kann man die Zahl 92 in zwei Summanden natürlicher Zahlen zerlegen, von denen der eine durch 5 teilbar ist und der andere bei Division mit 7 den Rest 3 lässt?

Aufgabe 16/77

In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c, den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ und den Höhen h_a, h_b bzw. h_c gelte $h_a \geq a$ und $h_b \geq b$. Wie groß sind die Winkel?

Aufgabe 17/77

Es ist zu beweisen: Sind p_1, p_2, p_3 drei Primzahlen mit $p_i > 3$, von denen zwei ein Primzahlzwillingspaar bilden, so ist das Produkt

$$\prod_{i=1}^{3} (p_i - 1) = P$$

durch ein Vielfaches von 48 ohne Rest teilbar.

Aufgabe 18/77

Gegeben sei ein zylindrisches Becherglas der Höhe H. Der (homogene) Mantel habe die Masse M, die Masse des Bodens werde vernachlässigt. Das Glas sei mit einer (homogenen) Flüssigkeit der Masse m_H bis zum Rand gefüllt, aus einer Öffnung im Boden tropfe die Flüssigkeit jedoch bis zur völligen Leerung aus.
Gesucht sind eine Funktion, die die Lage des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Füllstandshöhe h angibt, sowie der kleinste Abstand desselben vom Boden.

Aufgabe 19/77

Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass Quersumme und Querprodukt übereinstimmen.

Aufgabe 20/77

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für reelle $a \geq 1$:

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a-1}$$

Aufgabe 21/77

Man beweise, dass ein Dreieck genau dann gleichseitig ist, wenn für seine Seiten a, b, c gilt

$$(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 \quad (1)$$

Aufgabe 22/77

Auf welche Weise kann man einen Würfel so in 6 Pyramiden zerlegen, dass sich deren Volumina wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ verhalten?

Aufgabe 23/77

Bei einem Fußballturnier, an dem vier Mannschaften A, B, C und D teilnahmen und bei dem jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielte, ergab sich nach Abschluss der folgende Stand:

Platz	Mannschaft	gewonnen	unentschieden	verloren	Tore
1.	A	2	1	0	4:1
2.	B	2	0	1	4:1
3.	C	0	2	1	1:2
4.	D	0	1	2	0:5

Man ermittle die Resultate der sechs Spiele!

Aufgabe 24/77

Gegeben seien n Brüche $\frac{a_i}{b_i}$ $(i = 1; 2; 3; ...; n)$, die sämtlich in einem beliebigen Intervall $I = [a; b]$ liegen und deren Nenner b_i sämtlich positiv sind. Man zeige, dass dann auch der nachfolgende Bruch in I liegt:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}$$

Aufgabe 25/77

Es ist zu beweisen: Sind a, b, c die Maßzahlen eines Dreiecks, so gilt $a^2 < 2(b^2 + c^2)$.
Ferner ist zu zeigen, dass der Absolutbetrag der Differenz zwischen den beiden Seiten der Ungleichung beliebig klein werden kann.

Aufgabe 26/77

Man schreibe auf jedes Feld eines Schachbrettes die Anzahl, der verschiedenen Wege, auf denen es von einem auf dem Feld A1 befindlichen Turm erreicht werden kann (wobei sich der Turm nur in der Richtung der Brettseiten und nicht rückwärts bewegen darf).
Wieso ist das auf diese Weise entstehende Zahlenfeld ein Teil des Pascalschen Dreiecks?

Aufgabe 27/77

Man bestimme die größte natürliche Zahl z, die aus 10 verschiedenen Ziffern besteht (im dekadischen Positionssystem) und durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 28/77

Man gebe für die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit reellen Koeffizienten $a; b; c$ $(a \neq 0)$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass für genau eine reelle Zahl x_0 gilt $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 29/77

Es ist zu beweisen, dass für beliebige positiv-reelle Zählen n und k die Ungleichung

$$\left(\frac{ne}{k}\right)^k \leq e^n$$

gilt (wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist).

Aufgabe 30/77

Gesucht ist ein geordnetes Quadrupel von vier höchstens zweistelligen Primzahlen p_i mit $i = 1; 2; 3; 4$, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. Es ist $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$.
2. p_3 und p_4 bilden ein Primzahl-Zwillingspaar.
3. Die Summe der beiden kleineren Primzahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden größeren und gleich dem doppelten Quadrat einer fünften Primzahl.
4. Das Produkt $p_1 \cdot p2$ ist maximal.

Man bilde die Tripel $(p_1; p_2; 100p_3 + p_4)$ und $(p_1; p_2; 100p_3 + p_1p_2)$!

Aufgabe 31/77

Man zerlege die Zahl 100 auf alle möglichen Weisen so in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:
Wird zum ersten Summanden eine natürliche Zahl addiert, vom zweiten Summanden dieselbe Zahl subtrahiert, der dritte Summand mit dieser Zahl multipliziert und der vierte Summand durch sie dividiert, so sind die Resultate sämtlich einander gleich.

Aufgabe 32/77

Von einem rechtwinkligen Dreieck seien der Umfang U und der Umkreisradius r bekannt. Man berechne daraus die Fläche A!

Aufgabe 33/77

Man beweise, dass die Gleichung $a^k + a^l = a^m$ für $a \in N; a \geq 3$ keine Lösung $(k; l; m)$ im Bereich der natürlichen Zahlen hat!

Aufgabe 34/77

Gegeben sei ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a und b (wobei $b > a$ sei) und der Hypotenuse c. Auf $AC = b$ sei ein Punkt D so festgelegt, dass $AD = BD$ ist. Man beweise, dass dann gilt

$$\cos \measuredangle ADB = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Aufgabe 35/77

Wie viele nichtnegative reelle Nullstellen hat die Funktion

$$y = f(x) = x - 1978 \sin \pi x$$

Aufgabe 36/77

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $n > 1$, so dass

$$z_n = 1977 + n^{462}$$

durch 1978 teilbar ist.

2.18 Aufgaben 1978

Aufgabe 1/78

Gesucht sind vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Produkt gleich 110 355 024 ist.

Aufgabe 2/78

Man ermittle die Anzahl $A(n)$ der mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen (in dezimaler Schreibweise), die die folgende Eigenschaft haben:
Jede Stelle mit höherem Stellenwert ist kleiner als jede Stelle mit kleinerem Stellenwert.

Aufgabe 3/78

Es ist die Gleichung $x^{\lg x} = 100x$ für reelle Zahlen x zu lösen!

Aufgabe 4/78

Man beweise: Sind die Größen $a; b; c$ die Seitenlängen eines ebenen Dreiecks, so gilt die Ungleichung

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Aufgabe 5/78

Man beweise, dass es nicht möglich ist, Primzahlen als Summen aus aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen darzustellen!

Aufgabe 6/78

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die nachfolgende Zahl eine ganze Zahl ist:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Aufgabe 7/78

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl der Form $2^n - 1$ (mit $n \in N, n > 0$), die ohne Rest durch 1001 teilbar ist.

Aufgabe 8/78

Man beweise: Sind a, b und x positive reelle Zahlen, für die $ab = x^2$ gilt, so gilt $(a + x)(b + x) \geq 4x^2$.

Aufgabe 9/78

Man beweise, dass kein Paar rationaler Zahlen $(x; y)$ existiert, das die Gleichung erfüllt:

$$\arctan x + \arctan y = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 10/78

Gesucht sind alle Tripel natürlicher Zahlen $(a; b; c)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Keine der Zahlen $a; b; c$ ist Primzahl.
2. Die Summe $a + b + c$ liegt zwischen 1900 und 2000: $1900 \leq a + b + c+ \leq 2000$
3. Das Produkt abc liegt zwischen 7600 und 8000: $7600 \leq abc \leq 8000$
4. Die Summe aller in den Zahlen $a; b; c$ auftretenden Ziffern ist 30, wobei in keiner Zahl eine Ziffer mehrfach vorkommt (was nicht bedeutet, dass keine Ziffer in verschiedenen Zahlen mehrfach auftreten könnte).
5. Es ist $a \leq b \leq c$.

Aufgabe 11/78

Ein Mathematiker schreibt einem anderen: "In diesem Jahr werde ich 100 Jahre alt, im nächsten 200." Offenbar beziehen sich die Altersangaben nicht auf das Dezimalsystem. Wie alt ist der Mathematiker?

Aufgabe 12/78

Auf die Frage, wie alt er sei, antwortet jemand, dass er im Jahr x^2 genau x Jahre alt war. In welchem Jahr ist er geboren?

Aufgabe 13/78

Es ist zu beweisen: Sind p und q die beiden Projektionen zweier Dreieckseiten auf die dritte und α sowie β die beiden der dritten Seite anliegenden Winkel ($\alpha; \beta \neq 90°$), so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2}pq(\tan\alpha + \tan\beta)$.

Aufgabe 14/78

Man beweise die Regel für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 7: Eine natürliche Zahl n ist genau dann ohne Rest durch 7 teilbar, wenn der Absolutbetrag der Differenz aus dem Doppelten der Einerstelle und der nach Abtrennen der Einerstelle verbleibenden Zahl durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 15/78

1. Gegeben sei ein Kreisring, in den n Kreise derart einbeschrieben sind, dass jeder Kreis die innere und die äußere Ringbegrenzung sowie zwei benachbarte Kreise berührt. Gesucht ist das Verhältnis aus der Summe der Kreisflächen und der Kreisringfläche.

2. Entsprechend ist die Aufgabe für das Verhältnis a) der Oberflächen, b) der Volumina bei einem Kreistorus zu lösen, in den n Kugeln in der gleichen Weise einbeschrieben sind.

3. Man bilde in jedem Fall den Grenzwert des Verhältnisses für $n \to \infty$.

Aufgabe 16/78

Es ist zu beweisen, dass kein konvexes Sechseck mehr als drei spitze Innenwinkel haben kann.

Aufgabe 17/78

Von der Gleichung $x^n + px - q = 0$, $n \geq 2$, sei bekannt, dass sie eine positive rationale Lösung hat und dass p und q Primzahlen sind. Man bestimme die Lösung sowie p und q!

Aufgabe 18/78

Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen z, die sich in der Form $z = n^{4m+1} - n$ mit $m; n \in N$ darstellen lassen!

Aufgabe 19/78

Man beweise: Das Quadrat über der Raumdiagonale eines Quaders ist mindestens gleich der Hälfte der Quadratoberfläche.

Aufgabe 20/78

Man bestimme alle Paare natürlicher Zahlen $(m; n)$, die der Gleichung genügen: $\sum\limits_{i=1}^{n} i! = m^2$

Aufgabe 21/78

Man zeige, dass das Produkt P für jede natürliche Zahl n eine ungerade natürliche Zahl ist!

$$P = \frac{(n+1)(n+2)...(2n+1)}{2^n}$$

Aufgabe 22/78

Es sei $ABCD$ ein einem Kreis einbeschriebenes Quadrat, P sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen zwischen A und B. Man beweise, dass PC und PD den Winkel APB dritteln!

Aufgabe 23/78

Für welche Dreiecke mit den Seiten a, b, c gilt: $a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Aufgabe 24/78

Es ist zu beweisen, dass kein Glied der Folge $\{a_k\} = \{11; 111; 1111; 11111; ...\}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl x ist.

Aufgabe 25/78

Man ermittle alle Paare ganzer Zahlen $(m; n)$, die der Gleichung $\sqrt{2^n + 1} = m$ genügen.

Aufgabe 26/78

Sind a, b und c die Seiten eines ebenen Dreiecks mit dem Flächeninhalt A, so gilt die Ungleichung $A < \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc}^2$.
Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 27/78

Es ist zu zeigen, dass für jede natürliche Zahl n gilt $\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right]^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k$

Aufgabe 28/78

Man beweise: Jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ ist als harmonisches Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen darstellbar.

Aufgabe 29/78

Man zeige (ohne die Potenz auszurechnen), dass die Fermatzahl $F_5 = 2^{2^5} + 1$ ohne Rest durch 641 teilbar ist!

Aufgabe 30/78

Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ die Ungleichung $\sqrt[x]{x} < 1{,}45$ gilt!

Aufgabe 31/78

Man ermittle alle Primzahlen $p_l; p_2; p_3$, die die Gleichung $p_1^{p_2} + p_2^{p_1} = p_3$ erfüllen.

Aufgabe 32/78

Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $$2\sin^2(\pi x + y)\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 33/78

Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, wobei a und b beliebige positive reelle Zahlen mit $a \geq b$ sind.

Aufgabe 34/78

Auf einem gewöhnlichen Schachbrett kann man bekanntlich einen Springer so ziehen, dass er jedes Feld genau einmal betritt und auf das Ausgangsfeld zurückkehrt. Das ist auf verschiedene Weisen möglich.
Auf wie viele verschiedene Weisen ist das auf einem (hypothetischen) Schachbrett mit $9 \cdot 9 = 81$ Feldern möglich?

Aufgabe 35/78

In der UdSSR ist es üblich, in den Stadtverkehrsmitteln nach dem Abreißen des Fahrschein-Kontrollabschnittes zu prüfen, ob man einen "Glücksfahrschein" hat. Dies ist dann der Fall, wenn die Quersumme der ernten drei Stellen gleich der Quersumme der letzten drei Stellen der sechsstelligen Kontrollzahl ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein "Glücksfahrschein" die Quersummen 7 hat?

Aufgabe 36/78

Man wähle irgendeine 1979stellige natürliche Zahl a, die durch 9 teilbar ist, und bilde die Quersumme z aus der Quersumme y der Quersumme x von a. Wie groß ist z?

2.19 Aufgaben 1979

Aufgabe 1/79

Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit dem Mittelpunkt M. Es sei P ein Punkt auf der Strecke EA, Q sei ein Punkt auf der Strecke AB. Man zeige:
Existiert für das Viereck $MPQA$ ein Umkreis, so ist die Summe der Strecken PA und AQ gleich der Seitenlänge des Fünfecks.

Aufgabe 2/79

Man beweise, dass die Zahl $A = 1 + 2^m + 4^m$ mit $m = 2^n, n \in N$ durch 7 ohne Rest teilbar ist.

Aufgabe 3/79

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die Ungleichung $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ gilt?

Aufgabe 4/79

Ist $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit dem Umfang u und der Summe d der Diagonalenlängen, so gilt $0{,}5d < u < d$. Diese Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 5/79

Man berechne die Summe!
$$s_n = 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - ... - \frac{n-1}{n!}$$

Aufgabe 6/79

Es ist zu beweisen: Ist $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so ist die Zahl 111...1555...56 mit n Einsen und $n - 1$ Fünfen das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 7/79

Man beweise (ohne Verwendung der Differentialrechnung) den Satz: Unter allen Sehnenvierecken eines gegebenen Kreises hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Aufgabe 8/79

Man bestimme alle Primzahlen a, b, c, d, für die die folgenden Gleichungen gelten: $a+b = c$ und $2a+b = d$.

Aufgabe 9/79

Es ist die Gültigkeit der Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ zu beweisen:
$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) < 2$$

Aufgabe 10/79

Man zeige, dass für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung $\log_n (n+1) > \log_{n+1} (n+2)$ gilt.

Aufgabe 11/79

Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c, so gilt für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Ungleichung $a^n + b^n < c^n$.

Aufgabe 12/79

Es sind alle positiven Zahlen x und y zu bestimmen, die den beiden Gleichungen genügen:

$$x^{x+y} = y^6 \qquad ; \qquad y^{x+y} = x^{12}y^6$$

Aufgabe 13/79

Es sind alle natürlichen Zahlen x und y zu bestimmen, für die die Gleichung $5^x - 2^y = 3$ gilt.

Aufgabe 14/79

Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks, so gilt die Ungleichungskette

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3$$

Aufgabe 15/79

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass sowohl $n+100$ als auch $n-100$ Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Aufgabe 16/79

Man zeige, dass die Gleichung $x^2 - y^2p = 1$ für jede natürliche Zahl p rationale Lösungen $x; y$ hat.

Aufgabe 17/79

Man untersuche ohne numerische Rechnung, welche der beiden Zahlen e^π und π^e die größere ist!

Aufgabe 18/79

Die Maßzahlen des Inkreisradius und der Seiten seien bei einem Dreieck ganzzahlige Glieder einer arithmetischen Folge 1. Ordnung. Wie groß sind sie, wenn sie so klein wie möglich sind?

Aufgabe 19/79

Es gibt Primzahlen p_{1k} für die gilt, dass $p_{2k} = p_{1k} + 100$ ebenfalls Primzahl ist (Beispiele: $p_{1k} = 3; p_{1k} = 7; p_{1k} = 13$).
Es ist zu beweisen, dass für $p_{1k} > 3$ keine Primzahl p_{2k} größere Zahl eines Primzahl-Zwillingspaares ist.

Aufgabe 20/79

Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, aber in der gleichen Halbebene liegen. Man ermittle alle Punkte C_i auf g, für die g Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC_i ist.

Aufgabe 21/79

Es sind alle Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen zu bestimmen, die den beiden Bedingungen genügen:

$$x + y + z = \pi \quad (1) \qquad ; \qquad \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 z \quad (2)$$

Aufgabe 22/79

Es ist zu beweisen: Aus $a + b + c = 0$ folgt $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Aufgabe 23/79

Gegeben sei die Folge

$$\{a_k\} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$$

(k Wurzeln). Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \{a_k\}$.

Aufgabe 24/79

Gegeben sei ein Schachbrett mit n^2-Feldern, die in üblicher Weise schwarz und weiß gefärbt seien (falls n ungerade ist, seien die Eckfelder schwarz). $A(n)$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, n gleichfarbige Türme so anzuordnen, dass kein Turm das Feld eines anderen beherrscht; $B(n)$ sei die Anzahl der entsprechenden Möglichkeiten, wenn die Türme nur auf schwarzen Feldern stehen dürfen.
Es ist zu zeigen, dass das Verhältnis $A(n) : B(n)$ für beliebiges natürliches $n > 1$ stets eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 25/79

Man bestimme alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, bei denen die Differenz der Quadrate gleich 1000 ist.

Aufgabe 26/79

Durch den Eckpunkt A eines konvexen Vierecks ist eine Gerade zu legen, die das Viereck in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

Aufgabe 27/79

Man beweise: Ist bei der Zahl $z = 111...111$ die Anzahl der Stellen ein Vielfaches von 66, so ist z ein Vielfaches von 363.

Aufgabe 28/79

Es sind alle Primzahlpaare $(p; P)$ zu ermitteln, die der Gleichung $P = 14p^2 + 1$ genügen.

Aufgabe 29/79

Welche Glieder der Folge $\{a_k\} = \{8; 88; 888; 8888; ...\}$ sind Quadratzahlen?

Aufgabe 30/79

Man löse das folgende System diophantischer Gleichungen

$$\begin{aligned} 135x_1 + 100x_2 - x_3 &= -4 \quad (1)\\ 97x_1 + 132x_2 - x_4 &= 20 \quad (2)\\ 7x_1 + 193x_2 - x_4 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

mit den Bedingungen $x_1; x_2; x_3; x_4 \in N$, $x_2 \leq 30$ und bilde die Tripel $(x_1; x_2, x_3)$ und $(x_1; x_2, x_4)$.

Aufgabe 31/79

In der Folge der natürlichen Zahlen gibt es Primzahlen, die unmittelbarer Nachfolger des Quadrates einer natürlichen Zahl sind.
Beispiele: $2 = 1^2 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 4^2 + 1$, $37 = 6^2 + 1$.
Man beweise, dass im Gegensatz dazu keine Primzahl (ausgenommen die Primzahl 3) das Quadrat einer natürlichen Zahl als unmittelbaren Nachfolger hat!

Aufgabe 32/79

Es gilt $9 \cdot 45 = 405$. Für welche Produkte aus einer einstelligen und einer zweistelligen Zahl gilt, dass man sie durch Einfügen einer Null zwischen die erste und die zweite Stelle des zweistelligen Faktors erhält?

Aufgabe 33/79

Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen $x; y$ mit $x + y = 1$ die Ungleichung gilt:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

Aufgabe 34/79

Es sei $x_i \in \{+1; -1\}$ mit $i = 1; 2; 3; ...; 1980$ und $\prod_{i=1}^{1980} x_i > 0$. Man beweise, dass dann gilt: $\prod_{i=1}^{990} x_{2i-1}x_{2i} \neq 0$

Durch einen Druckfehler (Behauptung ist eine Summe kein Produkt) wurde die Aufgabe unlösbar. Daher wurde sie als Aufgabe 10/80 erneut gestellt.

Aufgabe 35/79

Im vergangenen Jahr ergab sich mein Alter als Quersumme meines Geburtsjahres. Wie alt war ich?

Aufgabe 36/79

Man löse die Gleichung

$$\binom{4k}{k} \cdot k^2 = \binom{4k}{k+1} \cdot (k+1)$$

mit $k \in N, k > 0$, und berechne für die gefundene(n) Lösung(en) den Wert der beiden Terme.

2.20 Aufgaben 1980

Aufgabe 1/80

Es sei P ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a; ferner gelten die folgenden Beziehungen: $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$; A, B, C seien die Eckpunkte des Dreiecks. Man beweise, dass die Ungleichungen gelten: $1{,}5a < x + y + z + < 2a$.

Aufgabe 2/80

Es sind alle Primzahlen p zu ermitteln, die der Gleichung $2p + 1 = m^3$ mit $m \in N$ genügen.

Aufgabe 3/80

Man finde alle nicht konstanten, überall stetigen Funktionen f mit $f(x) = f(2x)$ für alle reellen Zahlen x.

Aufgabe 4/80

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen Zahlen $x > 0$: $e^x > 1 + \ln(1 + x)$.

Aufgabe 5/80

Wieviele natürliche Zahlen gibt es, deren Darstellung im Dezimalsystem genau aus den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 besteht (wobei jede auch nur ein Mal auftritt) und die restlos durch 11 teilbar sind?

Aufgabe 6/80

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus dessen Hypotenuse AB und dem Punkt D, in dem die Halbierende des rechten Winkels die Hypotenuse schneidet!

Aufgabe 7/80

Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt die Ungleichung $a + b \leq c\sqrt{2}$. In welchem Fall gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 8/80

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $n = p_1 \cdot p_2$; das Produkt zweier (echt) zweistelligen Primzahlen p_1 und p_2.
2. Für die Quersumme $Q(n)$ gilt $Q(n) = p_1$ mit $p_1 < p_2$.
3. Die Einerstellen von p_1 und p_2 sind einander gleich.
4. Auch $p_1 \pm 6$ ist (echt) zweistellige Primzahl.

Aufgabe 9/80

Für welche reellen Zahlen x bilden die Zahlen $\log_a 2$, $\log_a(2^x - 1)$, $\log_a(2^x + 3)$ eine arithmetische Folge 1. Ordnung?

Aufgabe 10/80

Es sei $x_i \in \{+1; -1\}$ mit $i = 1; 2; 3; ...; 1980$ und $\prod_{i=1}^{1980} x_i > 0$. Man beweise, dass dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{990} x_{2i-1}x_{2i} \neq 0$$

Aufgabe 11/80

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n+1)$$

Aufgabe 12/80

Ein gewisser Herr Quidam macht über sein Alter die folgenden Angaben:
1. Mein Geburtsjahr kann man als doppeltes Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen.
2. Wenn ich 36 Jahre alt sein werde, kann man die Jahreszahl als vierfaches Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen.
3. Die größte Zahl des Tripels unter 2. ist mit der kleinsten Zahl des Tripels unter 1. identisch.
Es ist zu beweisen, dass dies ein Aprilscherz ist!

Aufgabe 13/80

Aus einer beliebig gewählten natürlichen Zahl n_1 bilde man eine natürliche Zahl n_2, indem man eine dreistellige natürliche Zahl "anhängt". Für welche Zahlen n ist die Summe $s = n_1 + n_2$ restlos durch 77 teilbar?

Aufgabe 14/80

Es ist zu beweisen, dass die Summe $100101102...199 + 800801802...899$ ohne Rest durch 999 teilbar ist!

Aufgabe 15/80

Gegeben seien $2n$ positive, reelle Zahlen $a_i; b_i$ mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$$

Aufgabe 16/80

Man beweise die Richtigkeit der folgenden Behauptung: Dividiert man eine Primzahl durch 24, so ist der Rest entweder 1 oder eine Primzahl.

Aufgabe 17/80

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen Zahlen x:

$$\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) \geq \sin^4 x$$

Aufgabe 18/80

Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die der Gleichung für beliebige reelle Zahlen a genügen:

$$\log_{a^2+4}\left(2a^4x^2 - 60a^4x + \sqrt{9x^2 - 27x - 7289}\right) = \log_{a^2+16}\left(ax^2 + 6x - 7379\right)$$

Aufgabe 19/80

Man ermittle alle Lösungen der Gleichung $p^2 + 576 = n^2$, wobei p eine beliebige Primzahl und n eine beliebige natürliche Zahl bedeuten.

Aufgabe 20/80

Gesucht ist eine Menge von Funktionen f, die der Gleichung $f(x+1) = c \cdot f(x)$ für jede reelle Zahl x genügen (wobei c eine positive reelle Konstante ist).

Aufgabe 21/80

Man beweise den Satz: Ein ebenes Dreieck ist genau dann spitzwinklig, wenn die Ungleichung
$\tan\alpha \cdot \tan\beta > 1$ für jedes Winkelpaar α, β gilt.

Aufgabe 22/80

Man verwandle die Fläche eines regulären Pentagramms in ein flächengleiches Quadrat (wobei nur Zirkel und Lineal als Konstruktionshilfsmittel zugelassen sind)!

Aufgabe 23/80

Man beweise, dass die Zahl $11^{10} - 1$ restlos durch 600 teilbar ist; ohne die Potenz auszurechnen.

Aufgabe 24/80

Es ist eine hinreichende, von n unabhängige Bedingung für die natürliche Zahl a anzugeben, durch die garantiert wird, dass die Zahl $z = n^8 + a$ für keine natürliche Zahl n eine Primzahl ist.

Aufgabe 25/80

Man beweise, dass die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine ganzzahligen Lösungen hat, wenn p und q Primzahlen sind und $p \neq 3; q \neq 2$ ist.

Aufgabe 26/80

Gegeben ist eine Ebene, in der alle Punkte entweder schwarz oder rot gefärbt seien. Man weise die Existenz wenigstens eines gleichseitigen Dreiecks in dieser Ebene nach, dessen Eckpunkte sämtlich die gleiche Farbe haben!

Aufgabe 27/80

Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Funktion minimal wird

$$f(x) = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$$

Aufgabe 28/80

Man widerlege die Behauptung, dass das Polynom $P(x) = 1 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 1$ fünf reelle Nullstellen habe!

Aufgabe 29/80

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel $(a; b; c)$ ist wenigstens eine der drei natürlichen Zahlen a; b; c restlos durch 5 teilbar.

Aufgabe 30/80

Ein Fünfeck setze sich aus einem Rechteck mit den Seiten a und b und einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a zusammen.
Ohne Verwendung der Differentialrechnung ermittle man den maximalen Flächeninhalt A bei gegebenem Umfang U und den minimalen Umfang U bei gegebenem Flächeninhalt A!

Aufgabe 31/80

Gegeben sei die in x quadratische Gleichung $x^2 + px + 2 = 0$ mit $p \in N$, und es seien x_1 und x_2 die Lösungen dieser Gleichung. Es sind alle p zu ermitteln, für die $x_1^2 + x_2^2$ Primzahl ist.

Aufgabe 32/80

Es ist zu beweisen: Aus $\sin(\alpha + \beta) = 0$ folgt $\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha$.

Aufgabe 33/80

Es sei f eine für alle reellen Zahlen x stetige Funktion, für die gilt $f[f(x)] = x$. Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung mindestens eine reelle Zahl x_0 existiert, für die $f(x_0) = x_0$ gilt.

Aufgabe 34/80

Man ermittle s_{40} einer arithmetischen Reihe 1.Ordnung mit:
1. $a_1 = 10a + b = x$ mit $a; b \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$,
2. $a_{40} = 10c + d = y$ mit $c; d \in N; 0 \leq c; d \leq 9$,
3. $s_{40} = \sum\limits_{i=1}^{40} a_i = 1000a + 100b + 10c + d$

Aufgabe 35/80

Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften :
1. Das Quadrat der zweiten Ziffer ist gleich der Zahl n_1, die man erhält, wenn man in n die ersten zwei Stellen streicht.
2. Die Quersumme $Q(n)$ ist gleich der Zahl n_2, die man erhält, wenn man in n die letzten zwei Stellen streicht.
3. Die Summe aus den Zahlen n_1 und n_2 ist 100.

Aufgabe 36/80

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt

$$n \equiv 1 \pmod 2; \quad n \equiv 1 \pmod 3; \quad n \equiv 1 \pmod 5; \quad n \equiv 0 \pmod 7; \quad n \equiv 1 \pmod{11}$$

2.21 Aufgaben 1981

Aufgabe 1/81

Man bestimme alle Paare $(n; m)$ nichtnegativer ganzer Zahlen, für die gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 25^m + 2$$

Aufgabe 2/81

Es sei $n = \sum\limits_{i=0}^{k} 10^i a_i > 0$ mit $0 \leq a_i \leq 9; a_i \in N$ eine $(k+1)$-stellige natürliche Zahl und $Q(n) = \prod\limits_{i=0}^{k} a_i$ ihr "Querprodukt". Wie groß ist die Anzahl r der höchstens (k+1)-stelligen natürlichen Zahlen n, bei denen $Q(n)$ Primzahl ist?

Aufgabe 3/81

Es sei $P(x)$ ein reelles Polynom beliebigen Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, und es seien sowohl $P(0)$ als auch $P(1)$ ungerade ganze Zahlen. Man weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen $P(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen hat.

Aufgabe 4/81

Es seien 100 natürliche Zahlen a_k mit $1 \leq k \leq 100$ gegeben. Man beweise, dass eine Summe

$$\sum_{i=j}^{n} a_i \text{ mit } 1 \leq j \leq n \leq 100$$

existiert, die ohne Rest durch 100 teilbar ist!

Aufgabe 5/81

Man beweise: Es existieren unendlich viele Primzahlen p, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen.

Aufgabe 6/81

Gegeben sei ein beliebiges Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$. Seine vier Seiten werden im mathematisch positiven Drehsinn um ihre Mittelpunkte gedreht, bis sie senkrecht auf den Ausgangslagen stehen.
Dabei gehen die Punkte P_i in die Punkte P_i' bzw. P_i'' über. Man beweise: Die Vierecke $P_1'P_2'P_3'P_4'$ und $P_1''P_2''P_3''P_4''$ sind Quadrate.

Aufgabe 7/81

Man beweise, dass in jedem konvexen Elfeck stets wenigstens zwei Diagonalen einen Richtungsunterschied von weniger als 5° haben!

Aufgabe 8/81

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Aufgabe 9/81

Man ermittle alle (geordneten) Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$1 - xy = \ln(xy) \quad (1) \qquad ; \qquad x + 3y = 4 \quad (2)$$

Aufgabe 10/81

Gesucht sind 5 verschiedene dreistellige Zahlen, die (im Dezimalsystem) mit denselben voneinander verschiedenen drei Ziffern darstellbar sind und deren Summe 1209 beträgt.

Aufgabe 11/81

Gesucht ist die kleinste Potenz 11^n $(n \in N, n > 0)$ in dekadischer Schreibweise, die auf die Ziffernfolge 001 endet.

Aufgabe 12/81

Es seien a_i mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ reelle Zahlen $(n \geq 2)$ mit $0 < a_i \leq a_{i+1}$. Man zeige, dass dann gilt

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \leq \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}$$

Aufgabe 13/81

Auf die Frage nach dem Alter ihrer drei Kinder antwortete eine Mathematikerin: "Die Summe ihrer ganzen Alterszahlen ergibt unsere Hausnummer, das Produkt derselben ist 72, und um das Ergebnis eindeutig zu machen, erwähne ich noch, dass mein jüngstes Kind ein Mädchen ist."
Wie alt sind die Kinder? Dem Fragenden war die Hausnummer bekannt.

Aufgabe 14/81

In einer Ebene seien gleichseitige Dreiecke D_i mit den Seitenlängen $a_i = 2i - 1$, $i = 1; 2; 3; ...$ längs einer Geraden g so angeordnet, dass der "rechte" Eckpunkt des Dreiecks D_k mit dem "linken" Eckpunkt des Dreiecks D_{k+1} zusammenfällt und dass die dritten Eckpunkte sämtlich in der gleichen von g erzeugten Halbebene liegen. Man bestimme die Kurve, auf der die dritten Eckpunkte liegen!

Aufgabe 15/81

Es ist der Satz, zu beweisen: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist

$$k = \left(1 + \frac{2n-3}{1}\right)\left(1 + \frac{2n-5}{3}\right) ... \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

eine restlos durch n teilbare natürliche Zahl.

Aufgabe 16/81

Man bestimme alle geordneten Paare natürlicher Zahlen $(n; m)$, die der Gleichung $2^n + 65 = m^2$ genügen!

Aufgabe 17/81

Es sei a die 144-stellige natürliche Zahl, die (in dezimaler Schreibweise) ausschließlich mit der Ziffer 1 dargestellt wird. Man gebe 8 verschiedene Primfaktoren von a an!

Aufgabe 18/81

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

für jede nichtnegative reelle Zahl x. Für welche x-Werte gilt die Gleichheit?

Aufgabe 19/81

Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x} < 2$ für alle reellen Zahlen x mit $0 < x \leq 1$.

Aufgabe 20/81

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die $n^3 + 1 = 4p$ gilt; dabei bedeute p eine Primzahl.

Aufgabe 21/81

Gegeben sei ein ebenes, gleichseitiges Dreieck ABC. Man ermittle die Menge aller der Punkte P in der Ebene des Dreiecks, für die gilt $AP^2 + BP^2 = CP^2$.

Aufgabe 22/81

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, die der Gleichung $p_2^3 - 2 = p_1 \cdot n$ genügen; dabei ist $p_1; p_2$ ein Primzahl-Zwillingspaar.

Aufgabe 23/81

Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und die Bedingung

$$f(x - x_0) = f(x) + f(x_0) - 2xx_0 + 1$$

für beliebige reelle Zahlen x und x_0 erfüllen.

Aufgabe 24/81

Man zeige: Gilt für n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1; 2; ...; n)$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \qquad \text{, so ist} \qquad \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 2^n$$

Aufgabe 25/81

Man beweise, dass die Gleichung $2x^3 - 7y = 1$ keine ganzzahligen Lösungspaare $(x; y)$ hat!

Aufgabe 26/81

Es seien p und q zwei ungerade Primzahlen. Man beweise: Es gibt kein Tripel $(a;b;c)$ paarweise teilerfremder natürlicher Zahlen $a;b;c$ mit $a+b=q$, für das die Gleichung $a^p+b^p=c^p$ gilt.

Aufgabe 27/81

Welche Werte nimmt die Funktion $y=\sin(x^8-x^6-x^4+x^2)$ an, wenn x eine ganze Zahl ist?

Aufgabe 28/81

Gegeben sei eine Menge von flächengleichen Dreiecken ABC mit gleicher Seite AB. Man ermittle daraus das Dreieck ABC mit dem kleinsten Umfang U, ohne dazu Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden!

Aufgabe 29/81

Gesucht sind alle (echt) dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aus den i-ten Potenzen der i-ten Stelle (von links her gezählt) gleich der ursprünglichen Zahl ist.

Aufgabe 30/81

Man bestimme alle Paare reeller Zahlen $(x;y)$, die den Gleichungen genügen:

$$xe^y+x^2e^{2y}=6 \qquad ; \qquad xe^{-y}+x^2e^{-2y}=20$$

Aufgabe 31/81

Gesucht sind alle pythagoreischen Zahlentripel $(a;b;c)$, für die auch $(c;ab;4a-b)$ ein pythagoreisches Zahlentripel ist.

Aufgabe 32/81

Man gebe eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die natürliche Zahl n an, die garantiert, dass die Gleichung $x+y+xy=n$ genau eine Lösung in natürlichen Zahlen $x;y$ mit $0\leq x<y$ hat.

Aufgabe 33/81

Man beweise die Richtigkeit der Behauptung

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

ohne einen der Kosinus zahlenmäßig zu ermitteln!

Aufgabe 34/81

Man ermittle alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen a und b, für die gilt $a^2-b^2=1981$.

Aufgabe 35/81

In einer Schauvitrine sind 60 (nicht notwendig reguläre) konvexe Polyeder ausgestellt, die ausschließlich Dreiecke als Begrenzungsflächen haben. Die Summe ihrer Eckenzahlen ist 1111. Man bestimme die Gesamtzahl der Begrenzungsflächen.

Aufgabe 36/81

Gegeben ist das Kryptogramm $abcd = bba \cdot d$, wobei $a; b; c; d$ Ziffern im dekadischen Positionssystem bedeuten (gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern).
Man ermittle alle Lösungen des Kryptogramms.

2.22 Aufgaben 1982

Aufgabe 1/82

Von 100 Papierbögen wurde eine nicht bekannte Anzahl in je 10 Teile zerschnitten. Danach zählte man die Papierblätter; man ermittelte die Anzahl 864. Es ist zu beweisen, dass beim Zählen ein Fehler unterlaufen ist.

Aufgabe 2/82

Gesucht, sind alle Paare von Primzahlen $(p_1; p_2)$ mit $p_1 \leq p_2$, für die gilt $(4p_1)^2 + (4p_2)^2 = 100000$.

Aufgabe 3/82

Man beweise, dass für jedes ebene Dreieck mit den Seiten a, b und c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ die Gleichung gilt:

$$\sqrt{a \sin\alpha} + \sqrt{b \sin\beta} + \sqrt{c \sin\gamma} = \sqrt{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(a+b+c)}$$

Aufgabe 4/82

Man beweise: Das Produkt aus den drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen eines jeden pythagoreischen Zahlentripels ist durch die Summe dieser Zahlen ohne Rest teilbar.

Aufgabe 5/82

Man ermittle alle Trapeze $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:
1. Die Länge c der Seite CD ist eine ganze Anzahl von Längeneinheiten LE.
2. Die Länge der Seite AB ist um 3 LE größer als die Länge c der dazu parallelen Seite CD.
3. Die Länge d der Seite DA ist um 1 LE, die Länge b der Seite BC um 2 LE größer als c.
4. $\measuredangle BAD = 90°$

Aufgabe 6/82

Gegeben ist die Ungleichung $|x| + |y| \leq n$ mit $n \in N, x; y \in G$ (wobei mit G die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet ist). Man bestimme die Anzahl der geordneten Lösungspaare $(x; y)$.

Aufgabe 7/82

Es seien a; b; c; d vier von null verschiedene reelle Zahlen, für die die Gleichungen

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a} = d$$

gelten. Man ermittle alle möglichen Werte von d.

Aufgabe 8/82

Man bestimme die kleinste Zahl n, die im Dezimalsystem die Form

$$n = \sum_{i=1}^{k} 10^{2i-1}x + \sum_{i=0}^{k} 10^{2i}y$$

hat ($x; y \in N$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $x \neq y$, $k > 0$) und die restlos durch 264 teilbar ist.

Aufgabe 9/82

Volumen und Oberfläche einer Kugel seien zahlenmäßig einander gleich. Wie groß ist unter dieser Voraussetzung die Oberfläche eines der Kugel einbeschriebenen Würfels?

Aufgabe 10/82

Die Kante eines Würfels sei die Raumdiagonale eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c. In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen des Quaders zueinander, wenn das Würfelvolumen das $3\sqrt{3}$-fache des Quadervolumens ist?

Aufgabe 11/82

Man bestimme alle geordneten Quadrupel $(k;l;m;n)$ positiver ganzer Zahlen k,l,m,n, für die folgende Gleichung gilt: $k^{2l}-4=m^n$.

Aufgabe 12/82

Man beweise die Richtigkeit der folgenden Behauptung: Sind fünf Punkte einer Ebene so gegeben, dass keine drei davon auf einer Geraden liegen; so kann man stets vier von ihnen auswählen, die Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind.

Aufgabe 13/82

Durch welche Funktion $y=f(x)$ werden die Glieder der Folge $\{y_k\}=\{3;8;13;18;...\}$ den Gliedern der Folge $\{x_k\}=\{2;5;8;11;...\}$ zugeordnet?

Aufgabe 14/82

Man bestimmte alle Tripel $(x;y;z)$ ganze Zahlen $x;y;z$, welche die Gleichung erfüllen:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}=3$$

Aufgabe 15/82

Man beweise: Gilt in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b, der Hypotenuse c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ, dass $\cos\alpha=\tan\alpha$ ist, so bilden die Maßzahlen der Höhe h_c auf c und der Seiten a, b und c eine geometrische Folge.

Aufgabe 16/82

In einer Ebene seien zwei (nicht zusammenfallende) Punkte A und B festgelegt. Gegeben sei die Menge aller Dreiecke ABC dieser Ebene (wobei die Eckpunkte im mathematisch positiven Drehsinn bezeichnet seien), für die $\measuredangle BCA=\gamma=$konstant gilt. Gesucht ist die Menge der Inkreismittelpunkte M.

Aufgabe 17/82

Man finde alle zweistelligen natürlichen Zahlen n, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind.

Aufgabe 18/82

Es ist zu beweisen: Gilt für eine natürliche Zahl n die Kongruenz $(n-1)!+1 \equiv 0 \pmod{n}$, so ist n eine Primzahl.

Aufgabe 19/82

Man löse die Gleichung $25^x - 30^x = 36^{x+0,5}$.

Aufgabe 20/82

Es seien x; y; z drei reelle Zahlen, die der Ungleichung $x^2 + xy + xz < 0$ genügen. Man zeige, dass dann die Ungleichung $y^2 > 4xz$ gilt!

Aufgabe 21/82

Gesucht sind alle (in dekadischer Schreibweise) vierstelligen Zahlen mit der Ziffernfolge $\{a;b;c;d\}$ mit $a;b;c;d \in N$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b;c;d \leq 9$, deren sechsfaches die Ziffernfolge $\{a;a;c;b;d\}$ hat.

Aufgabe 22/82

Nina und Sascha haben Pilze gesammelt, Nina sagt zu Sascha: "Die eine Hälfte meiner Pilze sind Steinpilze, die andere Rotkappen und Birkenpilze. Mathematisch interessant ist aber, dass das Produkt aus der Anzahl der Steinpilze, der Anzahl der Rotkappen und der Anzahl der Birkenpilze gleich dem Quadrat aus der Summe ist."
Da antwortet Sascha: "Das ist seltsam - dasselbe trifft bei mir zu. Nur ich habe eine Rotkappe mehr als du."
Wie viele Pilze der verschiedenen Sorten hat jedes der beiden Kinder?

Aufgabe 23/82

In einer Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben. Unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels konstruiere man zwei Punkte C und D derart, dass $ABCD$ ein Quadrat mit der Seite $AB = a$ ist.

Aufgabe 24/82

Es sei $k+1$ eine Primzahl mit $k > 2$. Man beweise, dass dann $S = \sum_{i=0}^{4k-1} 19^i$ ohne Rest durch $8(k+1)$ teilbar ist!

Anmerkung: Die Einschränkung $k+1 \neq 19$ wurde in der ursprünglichen Aufgabenstellung versehentlich weggelassen.

Aufgabe 25/82

Man löse die Gleichung $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt[2]{12-x} = 6$, wobei x eine reelle Zahl sei!

Aufgabe 26/82

Man bestimme alle Glieder der Folge

$$\{a_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} 9 \cdot 10^i \right\} = \{9; 99; 999; ...\}$$

die man als Summe aus drei Quadraten natürlicher Zahlen x; y; z darstellen kann!

Aufgabe 27/82

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise). Gesucht ist der Punkt P auf der Seite c, für den die Summe der Abstände von den beiden anderen Seiten ein Minimum ist.

Aufgabe 28/82

Man ermittle alle Primzahlpaare $(p; q)$, für die $\binom{p}{q}$ ebenfalls Primzahl ist!

Aufgabe 29/82

Man bestimme alle Möglichkeiten, die Zahl 1000 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darzustellen.

Aufgabe 30/82

Man berechne das Produkt

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \left(2^{2i} + 1\right)$$

Aufgabe 31/82

In einem spitzwinkligen Dreieck betrage eine Seite 3 LE, eine andere Seite 9 LE (wobei mit LE die Längeneinheit bezeichnet ist). Von der dritten Seite sei bekannt, dass sie eine ungerade ganze Zahl von Längeneinheiten enthält. Man ermittle diese Anzahl.

Aufgabe 32/82

Gesucht sind alle Primzahlen p, für die $z = 2^p + p^2$ ebenfalls Primzahl ist.

Aufgabe 33/82

Man beweise: Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ gibt es wenigstens eine natürliche Zahl m in der Gestalt $m = 111...111000...000$, die restlos durch n teilbar ist (wobei die Anzahl der mit 1 belegten Stellen nicht gleich der Anzahl der mit 0 belegten Stellen sein muss). Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Aufgabe 34/82

Herr X teilt über das Alter seiner Verwandten folgendes mit:

1. Meine Mutter ist doppelt so alt wie ich.
2. Mein Vater ist um die Quersumme meines Alters älter als meine Mutter.
3. Das Alter meiner jüngsten Tante erhält man als Summe aus dem Alter meiner Mutter und meinem Einer-Zehner-vertauschten Alter.
4. Meine älteste Tante ist um die Quersumme meines Alters älter als die jüngste Tante.
5. Mein Onkel ist ein Jahr älter als meine älteste Tante und feiert einen "runden" Geburtstag.
6. Alle meine Verwandten sind jünger als 100 Jahre.

Wie alt sind die sechs Personen?

Aufgabe 35/82

In einer Ebene seien ein Einheitskreis und 1983 Punkte A_i $(i = 1; 2; 3; ...; 1983)$ beliebig vorgegeben. Es ist zu beweisen, dass es auf der Peripherie dieses Einheitskreises beliebig viele Punkte P_k gibt, für die die Summe der Abstände von den Punkten A_i mindestens gleich 1983 ist.

Aufgabe 36/82

Es ist Silvester, wenige Minuten vor Mitternacht. Auf einer Uhr kann man die folgenden Feststellungen treffen:

1. Der Stundenzeiger und die Verbindungslinie der Zeigerspitzen sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Minutenzeiger ist.
2. Die Seitenlängen dieses Dreiecks (in cm gemessen) sind ganzzahlig und paarweise zueinander teilerfremd.
3. Für den Umfang U und den Flächeninhalt A dieses Dreiecks gilt $A : U = A : U = 1$ cm.
4. Die kleinste Seite des Dreiecks ist die Verbindungslinie der Zeigerspitzen.

Wie lange dauert noch das alte Jahr?

2.23 Aufgaben 1983

Aufgabe 1/83

Auf einer Würfelecke sitzt eine mathematisch geschulte Raupe. Sie will alle Wege längs der Kanten ausprobieren, die zur diametral gegenüberliegenden Ecke führen, ohne dabei eine Ecke zweimal anzulaufen. Um eine Kante zu durchkriechen, benötigt sie einen Tag; nachts ruht sie. Am Ziel angekommen, rutscht sie in der folgenden Nacht auf der Würfeldiagonalen, zum Ausgangspunkt zurück, um am folgenden Morgen einen neuen Weg zu beginnen.
Sie startet am Morgen des 1. 1. 1983. Am Morgen welchen Tages ist sie wieder am Ausgangspunkt, nachdem sie alle Wege durchkroch?

Aufgabe 2/83

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, für die 3^n in dezimaler Schreibweise genau $0{,}5n$ Stellen hat?

Aufgabe 3/83

Für welche natürlichen Zahlen n gilt, dass der Flächeninhalt A_{2n} des regulären $2n$-Ecks gleich dem doppelten Flächeninhalt A_n des regulären n-Ecks mit gleichem Umkreisradius ist?.

Aufgabe 4/83

Man zeige:

1. Es existiert ein ebener Schnitt durch einen Würfel so, dass die Schnittfigur ein Fünfeck ist.
2. Kein als Schnittfigur einer Ebene mit einem Würfel entstandenes Fünfeck ist regulär.

Aufgabe 5/83

Es sei $n = \sum\limits_{i=0}^{5} a_i \cdot 10^i$ eine 6stellige natürliche Zahl, wobei $0 \leq a_i \leq 9$, $a_i \in N$ sei, und $Q(n) = \sum\limits_{i=0}^{5} a_i$ ihre Quersumme, und es gelte: 1. $a_i > a_k$ für $i > k$; 2. $10^{98} < n^{Q(n)} < 10^{99}$.
Welche Zahlen n erfüllen diese Bedingungen?

Aufgabe 6/83

In jedem Rechteck schneiden die Winkelhalbierenden einander in vier Punkten, die ein Quadrat aufspannen (ist das Rechteck ein Quadrat, so fallen diese vier Punkte zusammen).
Der Flächeninhalt A_Q dieses Quadrates ist als Funktion des Seitenverhältnisses $x = a : b$ darzustellen (wobei $a > b$, b konstant sei). Für welches Seitenverhältnis ist die Quadratfläche A_Q gleich der Rechteckfläche A_R?

Aufgabe 7/83

In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Seitenlängen ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit. Außerdem gelte, dass der Umfang zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt ist. Man ermittle alle derartigen Dreiecke!

Aufgabe 8/83

Wie viele restlos durch 4 teilbare natürliche Zahlen kann man aus den 9 Ziffern $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ bilden, wenn in jeder Zahl jede dieser Ziffern genau einmal vorkommen soll (dekadische Schreibweise vorausgesetzt)?

Aufgabe 9/83

Man ermittle Maximum und Minimum der Funktionen

$$y = x_1 x_2 \pm \sqrt{(1-x_1)^2(1-x_2)^2}$$

für $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden!

Aufgabe 10/83

Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Mantellinien um 60° gegen die Grundfläche geneigt seien und für dessen Grund- und Deckfläche die Beziehung $A_G = 4A_D$ gilt. Zwischen einem Randpunkt P der Grundfläche und einem Randpunkt Q der Deckfläche sei ein Gummifaden straff gespannt.
Wie lang kann der Gummifaden höchstens sein, wenn er die Mantelfläche nirgends verlassen soll?

Aufgabe 11/83

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, bei denen die Summe s aus den echten Teilern gleich 39 ist.

Aufgabe 12/83

Man beweise, dass alle Zahlen der Folge $\{a_k\} = \{49; 4489; 444889; ...\}$ (Bildungsvorschrift: Es wird jedes mal die Zahl 48 "in die Mitte eingefügt") Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Aufgabe 13/83

Gesucht sind alle Tripel $(a; b; c)$ positiver ganzer Zahlen mit $c > 1$, die der diophantischen Gleichung $a^{2c} - b^{2c} = 665$ genügen.

Aufgabe 14/83

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB und dem Thaleskreis-Mittelpunkt M schneide die Mittelsenkrechte auf der Hypotenuse die Kathete AC bzw. deren Verlängerung im Punkt K und die Kathete BC bzw. deren Verlängerung im Punkt L. Das Dreieck ist aus den gegebenen Strecken MK und ML zu konstruieren.

Aufgabe 15/83

Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: 133 ist Teiler von $T_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Aufgabe 16/83

Es ist zu beweisen: In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem Umkreisradius R und dem Inkreisradius r gilt: $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

Aufgabe 17/83

Gesucht sind alle Lösungen $(x;y;z)$ in natürlichen Zahlen $x;y;z$ des Gleichungssystems:

$$2x^2 - 2y^2 - 3z + 5949 = 0 \quad (1)$$
$$\lg^2 y^2 + \lg y^{(x-1)(x-y)} + (x-y)^2 = 0 \quad (2)$$
$$\lg y^{(y-x)} + x - y = 0 \quad (3)$$

Aufgabe 18/83

Bekanntlich existiert auf der Erdoberfläche wenigstens ein Punkt (nämlich der Südpol) mit der folgenden Eigenschaft:
Geht man von ihm aus eine Strecke a nach Norden, dann dieselbe Strecke a nach Osten (oder Westen) und schließlich die Strecke a nach Süden, so kommt man zum Ausgangspunkt zurück.
Es ist zu untersuchen, welche weiteren Punkte auf der Erdoberfläche dieselbe Eigenschaft haben (dabei soll $a = 0{,}5\pi R$ gelten; R sei der Radius der als Kugel angenommenen Erde).

Aufgabe 19/83

Man beweise den Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe aus Inkreis- und Umkreisradius gleich dem arithmetischen Mittel der Katheten.

Aufgabe 20/83

Gesucht sind alle Tripel aufeinanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen, bei denen die Summe aus den Quadraten eine (in dekadischer Schreibweise echt) vierstellige Zahl mit vier gleichen Ziffern ist.

Aufgabe 21/83

Es ist zu beweisen: Jede natürliche Zahl $n > 27$ ist in der Form $n = 5k + 8m$ darstellbar, wobei k und m natürliche Zahlen sind (mit $0 \in N$).

Aufgabe 22/83

Es sei n eine natürliche Zahl, die (im Dezimalsystem) mit 150 Ziffern 4 und k Ziffern 0 ($k \in N$) dargestellt wird, Man beweise, dass n keine Quadratzahl ist!

Aufgabe 23/83

Man löse das Gleichungssystem für beliebige reelle Zahlen $x;y;z$:

$$x + y + \sin^2 z = 12 \quad (1) \qquad ; \qquad xy = 36 \quad (2)$$

Aufgabe 24/83

Es seien p_1 und p_2 zwei benachbarte Primzahlen mit $p_1 < p_2$ und $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades in x mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $(i = 0;1;2;...;n)$. Man bestimme p_1 und p_2 aus $f(p_1) = 1234$ und $f(p_2) = 4321$.

Aufgabe 25/83

Es ist die Gültigkeit der Ungleichung für beliebige positive ganze Zahlen n zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Aufgabe 26/83

Wie viele (echt) vierstellige natürliche Zahlen gibt es, die durch 11 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 11 teilbar ist?

Aufgabe 27/83

Auf einer Ebene sind 9 Punkte so angeordnet, dass 4 von ihnen die Eckpunkte eines Quadrats bilden, 4 die Quadratseiten halbieren und der neunte den Mittelpunkt dieser Figur markiert.
Gesucht ist der längste geschlossene Streckenzug, der alle Punkte verbindet, ohne dass eine Verbindung doppelt durchlaufen wird. Dabei sind nur Strecken zulässig, die parallel zu Quadratseiten oder -diagonalen verlaufen.

Im Jahr 1983 wurden nur neun Hefte "Wissenschaft und Fortschritt" und somit 27 Mathematikaufgaben veröffentlicht.

2.24 Aufgaben 1984

Ab 1984 wurden monatlich zwei Mathematikaufgaben veröffentlicht.

Aufgabe 1/84

Man löse in reellen Zahlen x die Gleichung $1984^{\lg x} = 2 \cdot 1984^2 - x^{\lg 1984}$.

Aufgabe 2/84

Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser $d = 2r = AB$. Eine zu AB senkrechte Gerade schneidet den Durchmesser in P und den Kreis in C und D. Die Umfänge der Dreiecke APC und BPD verhalten sich zueinander wie $\sqrt{3} : 1$.
Wie groß ist das Verhältnis $AP : PB$?

Aufgabe 3/84

Es seien a und b ganze Zahlen, und die Summe $c = a^2 + b^2$ sei ohne Rest durch 231 teilbar. Man beweise, dass dann c sogar durch 53361 teilbar ist.

Aufgabe 4/84

Gesucht sind alle rationalen Lösungen $(x; y)$ der Gleichung

$$4x^2y^2 - 4x^2y - x^2 + 4x = 2$$

Aufgabe 5/84

Man beweise die Richtigkeit der Behauptung: Für jedes beliebige ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem halben Umfang s gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}$$

Aufgabe 6/84

Gesucht sind alle (evtl. auch nichtreellen) Lösungen des Gleichungssystems

$$16x^2 - 30xy + 9y^2 = 0 \qquad ; \qquad -xy + 3y^2 = 6$$

Aufgabe 7/84

Ein Mann erzählt: "Das Geburtsjahr meines Enkels ist ein Produkt xy zweier natürlicher Zahlen x und y. Im Jahre x^2 wird er x Jahre alt sein."
In welchem Jahr ist der Enkel geboren?

Aufgabe 8/84

Klaus soll gegen Peter und Rolf abwechselnd Schach spielen und einen Preis gewinnen, wenn er von drei Partien zwei aufeinanderfolgende gewonnen hat. Er schätzt Peter spielstärker ein als Rolf.
Gegen wen wird er zuerst antreten? Die Wahl liegt bei ihm!

Aufgabe 9/84

Man bestimme alle Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, die der Gleichung genügen:

$$x^2y + xy^2 = 2xy + x + y + 1$$

Aufgabe 10/84

Man beweise die Richtigkeit des folgenden Satzes: Die Gleichung $2^n + 1 = k^{2m+3}$ hat keine Lösung in natürlichen Zahlen k; m; n.

Aufgabe 11/84

Einem Dreieck ABC sei ein Quadrat $DEFG$ derart einbeschrieben, dass die Punkte D und E auf der Seite AB, F auf der Seite BC und G auf der Seite AC liegen. Man bestimme das Maximum des Quotienten $Q = \frac{A(ABC)}{A(DEFG)}$, wobei mit $A(X)$ die Fläche der Figur X bezeichnet ist. Für welche Dreiecke wird das Maximum angenommen?

Aufgabe 12/84

Gesucht ist diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

in natürlichen Zahlen x; y; z, für die das Produkt xyz minimal ist.

Aufgabe 13/84

Man berechne die Summe aller derjenigen natürlichen Zahlen, die in ihrer dezimalen Darstellung jede der fünf Ziffern $1; 2; 3; 4; 5$ genau einmal enthalten.

Aufgabe 14/84

Für welche natürlichen Zahlen n existiert kein Polyeder mit genau n Kanten?

Aufgabe 15/84

In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $BC = DA$ seien auf BC und DA zwei Punkte E und F so festgelegt, dass $EC = FA$ ist.
Man beweise: EF ist genau dann minimal, wenn EF Mittelparallele ist.

Aufgabe 16/84

Gesucht sind alle Paare $(p;q)$ von Primzahlen, für die $P = p^2 + q^2 - 167$ und $Q = p^2 - q^2 + 167$ ebenfalls Primzahlen sind.

Aufgabe 17/84

Es sei a eine 1984stellige natürliche Zahl, die durch 3 teilbar ist. Weiter seien b die Quersumme von a, c die Quersumme von b und d die Quersumme von c. Welche Werte kann d annehmen?

Aufgabe 18/84

Gesucht sind alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, bei denen die Zahlenwerte von Flächeninhalt und Umfang übereinstimmen.

Aufgabe 19/84

Unter welcher Bedingung kann man in zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 ein Dreieck derart einbeschreiben, dass der größere Kreis Umkreis und der kleinere Kreis Inkreis des Dreiecks ist?

Aufgabe 20/84

Es sind alle Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen p_i zu ermitteln, die Lösung der Gleichung $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2 = 999$ sind (Rechengeräte sind zur Lösung nicht zugelassen!).

Aufgabe 21/84

Es seien $q_1 = p_1^2$, $q_2 = p_2^2$ und $q_3 = p_3^2$ die Quadrate beliebiger mehrstelliger Primzahlen p_i und q eine Zahl, die man durch Aneinanderreihen der Ziffern der q_i in beliebiger Reihenfolge unter Berücksichtigung ihrer Mehrfachheit erhält. Man beweise, dass q keine Primzahl ist.

Aufgabe 22/84

Gegeben sei die Menge aller Folgen $\{x_k(n)\}$, die der Rekursionsformel

$$x_{k+1}(n) = 2x_k(n) + 1; \qquad x_0(n) = 2n$$

mit $n \in N$ genügen. Man zeige, dass jede ungerade natürliche Zahl $2i + 1$ $(i = 0; 1; 2; ...)$ in genau einer dieser Folgen enthalten ist.

Aufgabe 23/84

Es ist zu beweisen: Für alle natürlichen Zahlen n ist $z_n = 2^n \cdot 1985$ als Summe aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen darstellbar.

Aufgabe 24/84

Man ermittle alle (im dekadischen System) vierstelligen natürlichen Zahlen n, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Quersumme ist 23.
2. Die alternierende Quersumme ist -5.
3. Das Querprodukt ist 360.
4. Die Summe aus den an erster und an dritter Stelle stehenden Ziffern ist gleich der Ziffer an der zweiten Stelle.

2.25 Aufgaben 1985

Aufgabe 1/85

Man finde alle Lösungen der Gleichung $3^x + 4^x = 5^x$ in reellen Zahlen x.

Aufgabe 2/85

Man konstruiere ein Dreieck ABC aus der Höhe h_c auf der Seite $AB = c$, der Seitenhalbierenden s_c der Seite c und der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels $\gamma = \measuredangle ACB$!

Aufgabe 3/85

In einem ebenen Dreieck mit den Seiten a, b und c sollen die Maßzahlen der Seiten eine nichtkonstante arithmetische Folge l. Ordnung bilden (O.B.d.A. sei $a < b < c$). Die Differenz sei d (also $d > 0$). Für welche Verhältnisse $d : a$ ist das Dreieck 1. spitzwinklig, 2. rechtwinklig, 3. stumpfwinklig?

Aufgabe 4/85

Man ermittle den Wert des Terms

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

ohne Tabellen, Rechengeräte oder ähnliches zu Hilfe zu nehmen!

Aufgabe 5/85

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, dem Radius r und einer Sehne $AB = s$. Um wieviel muss man AB über B hinaus verlängern, wenn die vom Endpunkt E der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente die Länge t haben soll?

Aufgabe 6/85

Wieviele verschiedene reelle Lösungen hat das Gleichungssystem

$$x^2 + y = a \qquad ; \qquad x + y^2 = a$$

in Abhängigkeit vom Parameter a?

Aufgabe 7/85

Der etwas zerstreute Mathematiker A klagt seinem Kollegen B: "Ich habe meine Safenummer vergessen; ich weiß nur noch, dass ihre Ziffernfolge symmetrisch war und dass sie gleich dem Quadrat aus dem Geburtsjahr eines Gelehrten der neueren Zeit war, aber nicht mehr, von wem."
Nach kurzer Überlegung antwortet B: "Das kann nicht sein, du musst dich irren!"
Welche Überlegung hatte er angestellt?

Aufgabe 8/85

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, die sowohl als Summe von 10 als auch als Summe von 794 aufeinanderfolgenden (nicht notwendig natürlichen) ganzen Zahlen darstellbar ist!

Aufgabe 9/85

Gegeben seien zwei einander ähnliche, rechtwinklige Dreiecke, die dem gleichen Kreis ein- bzw. umbeschrieben sind. Man ermittle das minimale Ähnlichkeitsverhältnis $k > 1$!

Aufgabe 10/85

Gesucht sind alle Quadrupel $(n_1; n_2; n_3; n_4)$ natürlicher Zahlen n_i $(i = 1; 2; 3; 4)$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ (wobei $0 \in N$ sei), für die

$$z = n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4! - 32$$

eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 11/85

Es sei $n \in N$, $n \equiv 0 \pmod 9$. Man beweise, dass dann n^2 durch drei verschiedene Summen aus je drei Quadralen natürlicher Zahlen darstellbar ist (wobei die Zahl Null ausgenommen sei).

Aufgabe 12/85

Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = x^n - x^{n-1}$ mit $n \in N$, $n \neq 0$ bei der Division durch das Polynom $Q(x) = (x - 1)^2$?

Aufgabe 13/85

Es seien x_1, x_2, m und n ganze Zahlen und m kein Teiler von n. Ferner seien y_1 und y_2 reelle Zahlen, und es gelte

$$x_2 = x_1 + m \qquad ; \qquad y_2 = y_1 + n$$

Man zeige: Es gibt keine quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten b und c derart, dass $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gilt.

Aufgabe 14/85

Man ermittle alle Primzahl-Zwillingspaare $(p_1; p_2)$ der Form $p_1 = 2p - 1$, $p_2 = 2p + 1$, bei denen auch p eine Primzahl ist!

Aufgabe 15/85

Es seien durch die Zahlen $a; b; c$ die Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Umfang U und durch a^2; b^2; c^2 die Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Umfang U' gegeben. Man ermittle die untere Grenze des Verhältnisses $U^2 : U'$!

Aufgabe 16/85

Man beweise die Gültigkeit der Fermatschen Behauptung
"Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ hat für positive ganze Zahlen $a; b; c; n$ mit $n > 2$ keine Lösung"
für den speziellen Fall, dass $a; b; c; n$ Primzahlen sind!

Aufgabe 17/85

Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen $x; y; z$ (wobei $0 \in N$ sei), die der Gleichung $5x! = y! + z! + 1$ genügen.

Aufgabe 18/85

Einem Kreis sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben, dessen Seiten von Halbkreisbögen überspannt sind. Welches n-Eck erfüllt die Bedingung, dass die Summe der von den Halbkreisbögen und den zugehörigen Umkreisbögen begrenzten sichelförmigen Flächen gleich der n-Ecksfläche ist?

Aufgabe 19/85

Es sei p eine Primzahl; deren k Stellen (in dezimaler Schreibweise) sämtlich gleich 1 sind. Man beweise, dass dann k ebenfalls eine Primzahl ist. (Wie das Beispiel 111 zeigt, ist diese Behauptung nicht umkehrbar.)

Aufgabe 20/85

Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck und F der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man berechne das Verhältnis $DF : BF$.

Aufgabe 21/85

Zu zwei reellen Zahlen a und b sind alle dritten reellen Zahlen x_i derart zu bestimmen, dass die drei Produkte aus einer der drei Zahlen und der Summe der beiden anderen eine arithmetische Folge 1.Ordnung bilden.

Aufgabe 22/85

Es ist zu beweisen: Für jede natürliche Zahl n existiert ein Intervall von n natürlichen Zahlen, das keine Primzahl enthält ($n \geq 2$ vorausgesetzt).

Aufgabe 23/85

Gegeben sei die n-stellige natürliche Zahl $z_n = 1985!$. Man bilde daraus die natürliche Zahl z_{n-1}, indem man die Einerstelle von z_n streicht und von der verbleibenden $(n-1)$-stelligen Zahl subtrahiert. Das Verfahren setze man solange fort, bis sich eine einstellige Zahl z ergibt. Wie groß ist z?

Aufgabe 24/85

Es sei ein Rechteck $ABCD$ mit einem inneren Punkt P gegeben. Man ermittle PA in Abhängigkeit von PB, PC und PD.
Welchen Wert erhält man für $PB = 33$ LE, $PC = 28$ LE, $PD = 41$ LE?

2.26 Aufgaben 1986

Aufgabe 1/86

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, die das Produkt von 3 Primfaktoren $p_1; p_2; p_3$ ist und es gilt: $p_3 = 55 \cdot p_1 \cdot p_2 + 1$ und $p_3 > p_2 > p_1$.

Aufgabe 2/86

Eine Zahlenfolge sei durch $a_k = 3a_{k-1} + 2a_{k-2}$ mit $a_i \in N$ für jedes $i \in N$; $k \geq 3; a_1 \geq 1; a_2 \geq a_1$ gegeben. Man zeige, dass dann gilt: $a_k > 2^{k-2}$.

Aufgabe 3/86

Man beweise: Es gibt keine Menge aus n voneinander verschiedenen Primzahlen p_i $(i = 1; 2; 3; ...; n)$ derart, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = c$$

mit natürlichen Zahlen a_i und c erfüllt wird.

Aufgabe 4/86

Man ermittle ein Verfahren, mit dessen Hilfe man jede Kubikzahl als Differenz aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen darstellen kann, und entwickle daraus eine Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen!

Aufgabe 5/86

Gesucht sind alle Paare reeller Zahlen $(x; y)$, die der Gleichung genügen:

$$2 \sin\left(2\pi x^2 + y\right) = \sqrt{2(x^2 + x^{-2})}$$

Aufgabe 6/86

Es ist die Anzahl 2 der natürlichen Zahlen zu bestimmen, bei denen die Folge der Ziffern (im dekadischen System von links beginnend) streng monoton wächst.

Aufgabe 7/86

In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c gelte für den Flächeninhalt

$$A = 0{,}5(a^2 - ab + b^2)$$

Wie groß sind die Seiten?

Aufgabe 8/86

Es ist zu beweisen, dass

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}} = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...}}}$$

ist (wobei als Wurzeln nur nichtnegative Werte gelten)!

Aufgabe 9/86

Gesucht sind alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x; y; z, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Summe der drei Zahlen ist 107.
2. Mindestens zwei der drei Zahlen sind Quadrate natürlicher Zahlen.
3. Mindestens zwei der drei um 13 verminderten Zahlen sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Aufgabe 10/86

Es seien $a; n \in N$ und $n \geq 2$. Welchen Rest lässt a^n beim Teilen durch $(a+1)$?

Aufgabe 11/86

Man zeige, dass jede mehrstellige natürliche Zahl $n = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$ größer ist als ihr Querprodukt $Q(n) = \prod\limits_{i=0}^{k} a_i$ (mit $a_i \in N; a_i \leq 9; a_k > 0$).

Aufgabe 12/86

Für wie viele natürliche Zahlen $n = \sum\limits_{i=0}^{3} 10^i a_i$, mit $a_i \in N; 1 \leq a_3 \leq 9; 0 \leq a_0; a_1; a_2 \leq 9$ gilt $a_i \leq a_j$ für $i < j$?

Aufgabe 13/86

Es ist zu beweisen: Ist eine sechsstellige natürliche Zahl ohne Rest durch die Zahlen 1; 11; 13; 27 oder 37 teilbar, so ist auch jede durch zyklische Vertauschung der Ziffern entstehende natürliche Zahl durch diese Zahlen restlos teilbar (dekadisches System vorausgesetzt).

Aufgabe 14/86

Es seien N die Menge der natürlichen Zahlen und P die Menge der Primzahlen. Gesucht sind alle Lösungstripel $(x; y; z)$ mit $x; y \in P; z \in N$ der Gleichung

$$\frac{x+y}{x-y} = z$$

Aufgabe 15/86

Man beweise: Sind bei einem Tetraeder die gegenüberliegenden Kanten gleich lang, so stehen die drei Verbindungsstrecken gegenüberliegender Kantenmitten senkrecht auf den zugehörigen Kanten.

Aufgabe 16/86

Die Winkelhalbierenden eines Parallelogrammes bestimmen ein weiteres Parallelogramm. Man ermittle das Verhältnis aus den Flächeninhalten dieses und des ursprünglichen Parallelogramms.

Aufgabe 17/86

Einem Kreis mit dem Radius r sei ein gleichschenkliges Trapez umbeschrieben, bei dem die Längen der zueinander parallelen Seiten im Verhältnis 1 : 4 stehen. Man gebe den Flächeninhalt des Trapezes in Abhängigkeit von r an!

Aufgabe 18/86

Es ist die kleinste Zahl $n \in N$ mit folgenden Eigenschaften zu ermitteln:
Ihre Einerstelle (in dezimaler Schreibweise) ist 7. Streicht man diese und setzt man sie als höchste Stelle voran, so ergibt sich $5n$.

Aufgabe 19/86

Man suche, ohne irgendwelche Hilfsmittel zu verwenden, alle (im dekadischen System echt) vierstelligen natürlichen Zahlen, die Quadrat einer natürlichen Zahl sind und bei denen sowohl die ersten beiden Stellen als auch die letzten beiden Stellen einander gleich sind.

Aufgabe 20/86

Es sind alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y zu ermitteln, für die die beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$x^4 + y^4 = 12(x^2 + y^2) - 6x^2y^2 + 16 \qquad (1)$$
$$xy = 3 \qquad (2)$$

Aufgabe 21/86

Gegeben sei die Folge $\{a_k\}$ mit $k \in N; a_0 = 1$ und $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$. Man zeige, dass nur die ersten beiden Glieder natürliche Zahlen sind!

Aufgabe 22/86

Man beweise: Die Gleichung $x^2 + x^2 = 3z^2$ hat außer der trivialen Lösung $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ keine Lösung in natürlichen Zahlen $x; y; z$.

Aufgabe 23/86

Auf einer Silvesterfeier sind insgesamt 23 Personen anwesend. Nach Mitternacht behauptet ein Gast, jeder der Anwesenden habe mit genau elf Personen angestoßen. Man überprüfe diese Behauptung!

Aufgabe 24/86

Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler a von $b = 19^{87} + 2$ und $c = 86 \cdot 19^{86} + 9$, ohne den Euklidischen Algorithmus zu verwenden!

2.27 Aufgaben 1987

Aufgabe 1/87

Es seien α, β und γ die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks. Man beweise, dass dann die Ungleichung gilt:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Aufgabe 2/87

Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1 + p_2 = p_3^m \qquad ; \qquad p_1 - p_2 = p_3^n$$

wobei die p_i $(i = 1; 2; 3)$ Primzahlen und m sowie n natürliche Zahlen sind. Welche Werte können m und n annehmen?

Aufgabe 3/87

Gesucht ist die kleinste positive reelle Zahl r, für die die Gleichungen

$$r = p + q \qquad ; \qquad (r+1)^2 = (p+1)^2 + (q+1)^2$$

mit positiven reellen Zahlen p und q gelten. Man gebe p und q an!

Aufgabe 4/87

Gegeben sei eine Menge M aus 9 voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen x_i mit $1 \leq x_i \leq 60$, $i = 1; 2; ...; 9$.
$S(T)$ bezeichne für jede Teilmenge T von M die Summe der in T enthaltenen Zahlen, sofern T nicht leer ist (die Vereinbarung $S(\varnothing) := 0$ wirkt ordnungserhaltend; d.h., für beliebige Teilmengen T_1 und T_2 gilt: $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow S(T_1) \leq S(T_2)$).
Man beweise, dass es wenigstens zwei disjunkte Teilmengen T_1 und T_2 gibt, für die $S(T_1) = S(T_2)$ gilt.

Aufgabe 5/87

Man ermittle alle im Dezimalsystem (echt) dreistelligen Zahlen $z \in N$, die im Zahlensystem mit der Basis $n \in N$ durch genau n Ziffern 1 dargestellt werden.

Aufgabe 6/87

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AD = BC = a$ und $AB = CD = b = 3a$. Mit E sei der Punkt auf CD bezeichnet, für den $DE = 2a = 2EC$ gilt. Die Winkelhalbierende von $\measuredangle EAC$ schneide CD im Punkt F. Man beweise, dass $\measuredangle FAB = 22{,}5°$ ist!

Aufgabe 7/87

Man untersuche, wieviele Wege der Länge 7 auf den Kanten eines Einheitswürfels von einer vorgegebenen Ecke zur diametral gegenüberliegenden Ecke führen; dabei darf keine Kante mehrmals (auch nicht in umgekehrter Richtung!) durchlaufen werden (für Ecken gilt diese Einschränkung nicht).

Aufgabe 8/87

Man ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung $5^x - 3^y = 2$.

Aufgabe 9/87

Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die mit voneinander verschiedenen Ziffern $1; 2; 3; ...; 9$ dargestellt werden.

Aufgabe 10/87

Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen x, y und z, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (2)$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \qquad (3)$$

Aufgabe 11/87

Wieviele Klebefalze sind (mindestens) erforderlich, wenn ein einfach zusammenhängendes ebenes Netz eines konvexen Polyeders mit f Flächen und 9 Ecken zum Körper "zusammengeklebt" werden soll?

Aufgabe 12/87

Aus einem Tripel $(a_0; b_0; c_0)$ positiver reeller Zahlen $a_0; b_0; c_0$ bilden wir eine Folge von Tripeln $(a_k; b_k; c_k)$ nach dem Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-1}b_{k-1}; \qquad b_k = b_{k-1}c_{k-1}; \qquad c_k = c_{k-1}a_{k-1}$$

Man beweise: Ist die Tripelfolge periodisch, so enthält eine Periode höchstens 6 verschiedene Tripel.

Aufgabe 13/87

Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ hat für keine reelle Zahl r drei reelle Nullstellen. Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 14/87

Es gelte die Gleichung

$$2^{n+1} \prod_{i=0}^{n} \cos 2^i \alpha = 1$$

mit $n \in N, \alpha \geq 0$, reell. Man ermittle die kleinste Zahl α, die diese Gleichung erfüllt (abhängig von n).

Aufgabe 15/87

Man bestimme alle Primzahlen p_1, für die

$$p_2 = p_1 + 2^n; \qquad p_3 = p_1 + 2^{n+1}; \qquad p_4 = np_1 - 3$$

ebenfalls Primzahlen sind. Welche Werte kann n annehmen?

Aufgabe 16/87

Es ist zu zeigen, dass kein Polynom n-ten Grades $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $(i \in N; 0 \leq i \leq n)$ existiert, für das $P(7) = 5$ und $P(15) = 9$ gilt.

Aufgabe 17/87

Man ermittle alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen p und q, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Ihre Summe P ist ebenfalls Primzahl.
2. Das Produkt aus den drei Primzahlen $p; q; P$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 18/87

Man beweise: Eine natürliche Zahl $n > 8$ ist genau dann Primzahl, wenn n nicht als Summe aus wenigstens drei Gliedern einer nicht konstanten arithmetischen Folge 1. Ordnung aus natürlichen Zahlen darstellbar Ist (dabei sei die Zahl 0 keine natürliche Zahl).

Aufgabe 19/87

Welche natürlichen Zahlen n kann man nicht in der Form $n = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ mit $x; y; z \in N$ darstellen?

Aufgabe 20/87

In einem Zahlensystem mit der Basis $n \in N$, $n \geq 10$ sei die Zahl $z = 123546789$ gegeben. Man beweise, dass z keine Primzahl ist!

Aufgabe 21/87

In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt. Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Vierecksfläche?

Aufgabe 22/87

Gesucht ist die kleinste Zahl $n \in N$, bei der die Quersumme eine dreistellige Primzahl p_3 ist. Die Quersumme dieser Zahl p_3 sei eine zweistellige Primzahl p_2 und schließlich sei deren Quersumme eine einstellige ungerade Primzahl p_1.

Aufgabe 23/87

Es gibt Primzahlen p_i, die folgende Eigenschaften haben:

1. Sie sind (in dezimaler Schreibweise) echt vierstellig.
2. Ihre Quersumme ist $Q(p_i) = 25$.
3. Addiert man zu ihnen 4, so ergibt sich eine "Spiegelzahl".

Unter einer "Spiegelzahl" sei eine Zahl zu verstehen, deren Ziffernfolge bezüglich einer gedachten Mittellinie symmetrisch ist. Man bestimme alle derartigen Primzahlen p_i!

Aufgabe 24/87

Für welche Primzahlen p besitzt das Gleichungssystem

$$x + \log_2 y = 11p \qquad (1)$$
$$2p - \log_2 p = 11 - z \qquad (2)$$
$$z + \log_2 y = x - 8 \qquad (3)$$

ganzzahlige Lösungstripel $(x; y; z)$ und wie lauten diese?

2.28 Aufgaben 1988

Aufgabe 1/88

Es seien x die Quersumme von 1988^{8891}, y die Quersumme von x und z die Quersumme von y. Man gebe z an!

Aufgabe 2/88

Gesucht sind die kleinsten zwei natürlichen Zahlen n, die Summe sowohl von zwei als auch von drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen sind.

Aufgabe 3/88

Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $a^2 + b^2 = c^k$ für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ ganzzahlige Lösungstripel $(a; b; c)$ hat.

Aufgabe 4/88

Man bestimmte alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = (x - y)^3$

Aufgabe 5/88

Man beweise: Ist n eine (in dekadischer Schreibweise) 30-stellige Zahl, bei der alle Stellen ausschließlich mit 1 oder mit 8 (in beliebiger Anordnung) besetzt sind, so ist n keine Primzahl.

Aufgabe 6/88

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n, deren Querprodukt $Q_p(n) = 120$ ist und deren Quersumme $Q_s(n) = 2^m$ eine Zweierpotenz mit $m \in N$ ist.

Aufgabe 7/88

Man ermittle alle Paare $(m; n)$ mit $m; n \in N$, für die $p = m^3 + n^3$ Primzahl ist!

Aufgabe 8/88

Gesucht ist die um 8 vergrößerte Anzahl aller geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die Lösung der Ungleichungen

$$8 \cdot \sqrt{8+8} + 8 + \frac{8}{8} \leq |x| + |y| \leq 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{8+8} + \sqrt{8+8} + 8 + \frac{8}{8}$$

sind. Man füge hinter die erste und hinter die zweite Stelle je einen Punkt ein!

Aufgabe 9/88

Man beweise, dass die Funktion

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x - 1$$

mit $a_i \in G$ für $i = 1; 2; ...; n1$ keine rationale Nullstelle hat, falls $f(\pm 1) \neq 0$ ist (G sei die Menge der ganzen Zahlen).

Aufgabe 10/88

Gesucht sind alle Zahlen $n \in N$, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die dekadische Darstellung erfordert genau drei paarweise voneinander verschiedene Ziffern a, b und c.
2. Dabei treten a und b genau c-mal auf; c dagegen tritt $(a-b)$-mal auf.
3. Quersumme und Querprodukt von n sind einander gleich.

Aufgabe 11/88

Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die $n^4 + 4$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 12/88

Gegeben sei ein Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen p_i, die folgende Bedingungen erfüllen:
1. Die p_i sind (im Dezimalsystem) mindestens dreistellig.
2. Es ist $p_2 = p1 + m; p_3 = p_2 + m, p_4 = p_3 + m$ mit $m \in N, m \geq 1$.
3. Die höchsten Stellen von m sind sämtlich restlos durch m teilbar.
Man beweise, dass dann gilt:

$$m! \mid 2(p_4^2 - p_1^2)$$

Aufgabe 13/88

Man ermittle alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen p und q, für die gilt:

$$3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$$

Aufgabe 14/88

Gesucht ist die kleinste Zahl $n \in N$, bei der sowohl die Quersumme $q(n)$ als auch die Quersumme $q(n+1)$ des Nachfolgers $n+1$ durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 15/88

In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c und der Höhe h auf b gelte für den Inkreisradius $\rho = \frac{1}{3}h$. Man zeige, dass dann die Seitenlängen eine arithmetische Folge 1. Ordnung bilden!

Aufgabe 16/88

Es sei $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades, das bei Division durch $(x-1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x-2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x-3)$ den Rest 3 lässt.
Welchen Rest lässt es bei Division durch $(x-1)(x-2)(x-3)$?

Aufgabe 17/88

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n, die gleich dem Fünffachen ihres Querprodukts sind!

Aufgabe 18/88

Es sei $f(n)=\frac{(n-1)!}{n}$ mit $n\in N, n>0$.
Man beweise, dass $f(n)$ mit einer Ausnahme genau dann eine ganze Zahl ist, wenn n keine Primzahl ist!
Für welche Zahl n gilt die Ausnahme?

Aufgabe 19/88

Es sei $P(x;y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten $x;y$.
Man zeige, dass dann der Term $\sqrt{0{,}5+xy}$ eine irrationale Zahl liefert!

Aufgabe 20/88

Gegeben sei das Intervall $[1;10^n]\subset N, n\in N, n\geq 1$. Echte Teilmengen dieses Intervalls sind die Menge M_1 der darin enthaltenen geraden Zahlen sowie die Menge M_2 derjenigen Zahlen in ihm, die (in dezimaler Schreibweise) ohne die Ziffer 1 dargestellt werden.
Welche der Teilmengen M_1 und M_2 enthält mehr Elemente?

Aufgabe 21/88

Man zeige, dass das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (außer im trivialen Fall 0; 1; 2) nicht gleich der dritten Potenz einer natürlichen Zahl ist!

Aufgabe 22/88

Man ermittle alle Paare $(p;n)$, in denen p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl ist und für die die Lösungen der Gleichung

$$x^2+2(p^n+2)x+p^{2n}=0$$

ganzzahlig sind!

Aufgabe 23/88

Man ermittle alle Primzahl-Zwillingspaare $(p_1;p_2)$, für die

$$P=p_1^2-p_1p_2+p_2^2$$

entweder Primzahl oder eine Potenz x^y mit $x;y\in N, x;y>1$ ist!

Aufgabe 24/88

Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen. Dabei seien n_1 und n_2 natürliche Zahlen, die $p_i (i=1,2,...,6)$ seien Primzahlen.

$$\begin{aligned}
n_1 &= p_1^2p_2p_3 && (1)\\
n_2 = n_1+1 &= p_4^2p_5p_6 && (2)\\
p_2 &= p_3-p_1^6 && (3)\\
p_3 &= p_1p_4^3+p_6 && (4)\\
p_5 &= p_2+p_1p_4 && (5)\\
p_6 &= p_1^2+p_2+p_1p_4 && (6)
\end{aligned}$$

2.29 Aufgaben 1989

Aufgabe 1/89

Gesucht sind alle Paare $(p_1; p_2)$ von (im Dezimalsystem) zweistelligen Primzahlen p_1 und p_2 mit $p_1 < p_2$, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Weder die Einer- noch die Zehnerstellen von p_1 und p_2 sind Primzahlen.
2. Die Zehnerstellen von p_1 und p_2 sind nicht durch 3 teilbar.
3. Die Summe $p_1 + p_2$ ist weder durch 10 noch durch 13 teilbar.

Aufgabe 2/89

Man suche natürliche Zahlen n, für die näherungsweise gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1989$$

Aufgabe 3/89

Es seien A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c. Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$.
Für welche Dreiecke wird es angenommen?

Aufgabe 4/89

Es seien $p; q; p^2 + q^2; 2p + q^2$ sämtlich Primzahlen. Man ermittle p und q sowie das Produkt

$$q^2(p^2 + q^2)(2p^2 + q^2)$$

Aufgabe 5/89

Man bestimme alle Paare $(n; k)$ mit $n; k \in N$, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

Aufgabe 6/89

Man beweise: Im Dualsystem gibt es unter den Zahlen $11; 111; 1111; ...$ keine Potenz a^k mit $a; k \in N, a; k > 1$.

Aufgabe 7/89

Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die $f(x) = x^5 - x + 5$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 8/89

Jede Zahl $n \in N$ mit einer geraden Anzahl echter Dezimalstellen kann man "in der Mitte" trennen, wodurch zwei Zahlen $n_1; n_2 \in N$ entstehen.
Man ermittle alle geraden Zahlen n, die der Bedingung $n = (n_1 + 2)(n_2 + 2)$ genügen!

Aufgabe 9/89

Man ermittle alle nicht negativen reellen Zahlen x, die der Gleichung genügen:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = 6\sqrt[6]{x}$$

Aufgabe 10/89

Es sind wenigstens zwei der vier Primzahlen $p_1; p_2; p_3; p_4$ mit $p_1 < p_2; p_3; p_4$ zu ermitteln, für die $P = p_1^{p_2} + p_3^{2p_4}$ Primzahl sein kann.

Aufgabe 11/89

Gesucht sind alle Paare $(n; k)$ natürlicher Zahlen n und k, für die gilt: Die Summe aus den Quadraten von n und von seinen k unmittelbaren Vorgängern ist gleich der Summe aus den Quadraten der k unmittelbaren Nachfolger von n.

Aufgabe 12/89

Bei welchen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen a, b, c, bei denen b die Quersumme von a und $c = \sqrt{2a - b}$ (zahlenmäßig) ist, gilt für die größte Höhe $h_{max} > 0{,}5 \cdot (a + 1)$?

Aufgabe 13/89

Man beweise die Richtigkeit des Satzes: Für jede Zahl $n \in N, n > 0$ gilt, dass das geometrische Mittel aller ihrer positiven Teiler (einschließlich der trivialen) gleich $\sqrt{n}$ ist.

Aufgabe 14/89

Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit E als Halbierungspunkt der Seite CD. In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie BE die Diagonale AC?

Aufgabe 15/89

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, die der Gleichung $n! + 1 = (10n + 1)^2$ genügen!

Aufgabe 16/89

Gesucht sind alle arithmetischen Folgen 1. Ordnung, bei denen alle Glieder ganzzahlig sind und das 1., das 3. und das 4. Glied mit den gleich nummerierten Gliedern einer geometrischen Folge übereinstimmen.

Aufgabe 17/89

Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g. Gesucht ist die Menge aller Punkte Q in der von g und P aufgespannten Ebene, für die es einen Punkt R auf der Geraden g derart gibt, dass das Dreieck QPR gleichseitig ist.

Aufgabe 18/89

Es ist zu beweisen, dass $2^9 9 + 1$ ohne Rest durch 683 teilbar ist.

Aufgabe 19/89

Man schreibe alle Lösungen der Gleichung

$$x^4 - (2D + R - 4)x^3 + D(d + 2R - 8)x^2 - D^2(R - 4)x = 0$$

mit $D + 4 < R < 4$ in nicht fallender Folge ohne zwischengesetzte Interpunktionszeichen auf!

Aufgabe 20/89

Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y, z, für die die Gleichung $x+y+z+2 = xyz$ gilt.

Aufgabe 21/89

Man beweise: Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so sind in der Dezimalbruchentwicklung von $(\sqrt{26}+5)^n$ die ersten n Stellen nach dem Komma mit Nullen besetzt.

Aufgabe 22/89

Es ist das Gleichungssystem

$$x + yz = y + xz = z + xy = a$$

für eine fest vorgegebene reelle Zahl a in Tripeln $(x; y; z)$ reeller Zahlen x; y; z zu lösen!

Aufgabe 23/89

Eine Folge sei durch das Bildungsgesetz

$$a_k = p \cdot k \cdot (k + 1) + 1$$

gegeben, wobei p eine Primzahl und $k > 0$ ist. Das 7. Glied sei das Quadrat einer Primzahl P. Man ermittle alle möglichen Paare $(p; P)$.

Aufgabe 24/89

Es sei $n \in N$ eine im Dezimalsystem echt vierstellige Zahl; ihre Darstellung im Positionssystem mit der Basis $b \neq 10 \quad (b \in N, b \geq 2)$ ist 1549.
Diese Darstellung unterscheidet sich von der im Dezimalsystem genau an den beiden mittleren Stellen. Man berechne b und n.

2.30 Aufgaben 1990

Aufgabe 1/90

Ein Ehepaar gab eine Silvesterparty mit n Gästen ($n \in N, n < 100$). Wenn jeder der Anwesenden mit jedem anderen genau einmal angestoßen hätte, wären die Gläser genau m-mal erklungen. ($m = k^2, k \in N$). Wieviele Gäste waren anwesend?

Aufgabe 2/90

Das Viereck $ABCD$ mit den festliegenden Seiten $AB = a, BC = b, CD = c$ und $DA = d$ sowie den noch nicht bestimmten Winkeln $\measuredangle DAB = \alpha, \measuredangle ABC = \beta, \measuredangle BCD = \gamma$ und $\measuredangle CDA = \delta$ sei ein Tangentenviereck.
Welche Bedingungen müssen die Seiten erfüllen, wenn es zugleich ein Sehnenviereck sein soll?

Aufgabe 3/90

Es ist zu untersuchen, ob es Polynome m-ten Grades

$$P(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i gibt, bei denen für jede natürliche Zahl n (0 eingeschlossen) die Kongruenz gilt:

$$|3^n - P(0)| \equiv 0 \pmod 8$$

Aufgabe 4/90

Es sei a eine reelle Zahl. Man löse das folgende Gleichungssystem in reellen Zahlen x, y, z. Welche Werte von a sind ausgeschlossen?

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5/90

Wenn eine Primzahl p in der Form $p = a^n + b^n$ mit $a; b; n \in N, a; b; n > 1$ darstellbar ist, muss $n = 2^k$ mit $k \in N, k > 0$ sein.
Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 6/90

Welche Bedingungen müssen die reellen Konstanten $a; b > 0$ erfüllen, wenn die Funktion

$$f(x) = \frac{a^x - b^x}{a - b}$$

für $x_0 \geq 0$ ein Maximum haben soll?

Aufgabe 7/90

Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde beisammen. Einer von ihnen sagt: "Soeben waren es noch h Stunden, m Minuten und s Sekunden bis Mitternacht, wobei h, m und s drei Primzahlen sind, die der Gleichung $3s = h+m$ genügen." Darauf antwortet der zweite: "Auch die Anzahl der Minuten bis Mitternacht war eine Primzahl." Und der dritte sagt nach einem Blick auf den Taschenrechner: "Sogar die Anzahl der Sekunden war Primzahl."
Wie spät war es?

Aufgabe 8/90

Es sei n eine im Dezimalsystem echt m-stellige ($m \geq 2$) natürliche Zahl, die restlos durch 11 teilbar ist. Durch Umkehr der Ziffernfolge entsteht aus ihr die (nicht notwendig echt m-stellige) natürliche Zahl n'. Wie viele Summen $n + n'$ sind restlos durch 11 teilbar?

Aufgabe 9/90

Es seien a, b und c die Seitenlängen eines ebenen Dreiecks. Man beweise:
Gilt $a^4 + b^4 = c^4$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 10/90

Welche Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen genügen der Gleichung $x^3 - y^3 - z^3 = 6y(y + 2)$?

Aufgabe 11/90

Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a LE und b LE ($a \neq b, a; b > 0$), bei denen die Differenzen der Rauminhalte und der Grundflächeninhalte zahlenmäßig einander gleich sind.
Welche Bedingung müssen a und b erfüllen?

Aufgabe 12/90

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) nichtnegativer ganzer Zahlen x, y und z, die der diophantischen Gleichung $3x + 4y + 5z = 30$ genügen und deren Summe $s = x + y + z$ eine Primzahl ist, durch logisches Schließen (der Lösungsweg über systematisches Probieren ist also ausgeschlossen!).

Aufgabe 13/90

Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1^2 + p_2^2 = p_3(p_1 + p_2) \quad (1) \qquad ; \qquad p_1p_2p_3 - 8 = p_4 \quad (2)$$

in Primzahlen $p_i (i = 1; 2; 3; 4)$.

Aufgabe 14/90

Gegeben sei ein gleichseitiges Bogendreieck, dessen Bogen einander in den Ecken tangieren. Wie groß ist sein Flächeninhalt A, wenn der Bogenradius $r = 1$ LE beträgt?

Aufgabe 15/90

Es ist zu untersuchen, ob die Gleichung $3^n = 10^4 m + 1$ mit $m; n \in N, m; n > 0$ Lösungen hat!

Aufgabe 16/90

Gesucht sind alle Primzahlen $p_i = 1000 + i$ mit der Quersumme $Q(p_i) = 4$ (dabei sei i die Nummer der Primzahl in der nach der Größe geordneten Primzahlfolge).

Aufgabe 17/90

Es ist zu beweisen, dass die reellen Zahlen x; y; z genau dann positiv sind, wenn für sie die Ungleichungen gelten:

$$x + y + z > 0 \qquad (1)$$
$$xy + yz + xz > 0 \qquad (2)$$
$$xyz > 0 \qquad (3)$$

Aufgabe 18/90

Man ermittle alle (im Dezimalsystem) vierstelligen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Multipliziert man sie mit der Zahl, die genau dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so ergibt sich eine durch 1000 teilbare achtstellige Zahl.

Aufgabe 19/90

Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ habe drei reelle Nullstellen. Man zeige, dass es kein Intervall der Länge 6 gibt, in dem alle drei Nullstellen liegen.

Aufgabe 20/90

Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n(n+3)$$

für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt!

Aufgabe 21/90

Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das an 5 voneinander verschiedenen ganzzahligen Stellen x_i ($i = 1; ...; 5$) den Wert $f(x_i) = p$ annimmt (wobei p eine Primzahl ist). Man beweise, dass $f(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen hat!

Aufgabe 22/90

Man ermittle alle im Dezimalsystem vierstelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:
1. Alle Ziffern a_i und die Quersumme Q von n sind Primzahlen.
2. Es gilt $n = Q \cdot P + 2$, wobei P das Querprodukt von n ist.

Aufgabe 23/90

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $n > 1000$ mit folgenden Eigenschaften:
1. Die Ziffernfolge von n ist symmetrisch.
2. Die Primfaktorzerlegung von n enthält genau zwei Primfaktoren p_1 und p_2 in 1. Potenz.
3. Bei Division durch p_1 lässt p_2 den Rest 5.

Aufgabe 24/90

$$\begin{array}{cccccc} & P & R & O & S & T \\ - & & & N & E & U \\ \hline & & J & A & H & R \end{array}$$

Es sind alle Belegungen der 11 Variablen mit allen 10 Ziffern $0, ..., 9$ zu finden, die eine richtige Rechnung ergeben. Zur Beschränkung der Lösungsmenge wird festgelegt: Die Ziffern für E und H werden bei der Angabe des Silvesterdatums benötigt.

3 Autoren der Aufgaben

- W.-G. Ackermann, Halle: 34/78, 2/82, 24/83, 4/84, 21/84, 7/85, 10/85, 16/85, 23/85, 3/86, 7/86, 14/86, 22/86, 15/87, 18/87, 5/88, 18/88, 23/88, 7/89, 5/90, 13/90
- P. Altanzog, Halle: 30/79, 4/81
- R. Anders, Bufleben: 7/77, 33/77, 34/77, 9/78, 17/78, 25/78, 9/81, 32/81, 34/81, 7/82
- L. Andrews, Rostock: 32/82, 23/83, 26/83, 9/87, 15/88
- L. Bachmann, Karl-Marx-Stadt: 8/86
- H. Bamberger, Arnstadt: 20/65
- H.-J. Bartlakowski, Berlin: 12/76
- W. Barz, Berlin: 27/70, 15/72
- M. Bautz, Zeitz: 8/63, 10/63, 17/63, 31/63
- G. Becker, Leipzig: 16/68
- K. Becker, Lübtheen: 5/68
- R. Bendrath, Berlin: 33/69
- W. Bennewitz, Radebeul: 27/69
- R. Bergmann, Döbeln: 5/69, 35/69, 13/70, 21/71, 5/72
- W. Berlin, Schmalkalden: 19/63, 15/82, 19/83
- J. Berndt, Burkersdorf: 1/63, 6/63
- J. Beulich, Berlin: 11/89
- W. Bockel, Erfurt: 10/66, 33/66, 10/67, 29/67, 35/67, 7/68, 21/68, 25/68, 1/69, 25/69, 26/70, 17/71, 26/71, 29/71, 6/72, 13/72, 27/72, 3/73, 10/73, 20/73, 29/73, 2/74, 6/74, 1/75, 7/75, 10/75, 17/75, 25/75, 28/75, 4/76, 8/77, 19/85, 4/90, 18/90
- C. Boenkost, Falkenberg: 32/68
- O. Böhme, Dresden: 7/71, 27/71, 9/72, 35/72, 6/73, 8/73, 31/73
- A. Böttcher, Brand-Erbisdorf: 17/73
- A. Böttcher, Freiberg: 23/64, 30/71, 16/72, 24/72, 31/72, 7/73, 18/73, 30/81, 23/87, 12/88, 20/88, 4/89, 8/89, 15/89, 24/89, 8/90, 16/90
- J. Breme, Köthen: 22/90
- J. Brinckmann, Jördensdorf: 2/78, 26/82
- H. Büchel, Zella-Mehlis: 16/71, 19/71, 34/71, 1/72, 19/72, 25/72, 13/73, 24/73
- W. Burmeister, Dresden: 22/68, 16/70, 5/71, 7/72, 10/72, 18/74
- G. Caspar, Potsdam: 31/62
- J. Chascanskij, Dzersinsk: 15/71, 22/73, 11/74, 6/75, 21/75, 29/77, 4/78, 11/78, 15/78, 15/79, 24/79, 6/80, 18/80, 6/81, 18/81, 35/81, 3/82, 22/82, 36/82, 14/83, 17/83, 3/84, 19/89, 21/90
- G. Dähnert, Berlin: 5/89, 23/89, 10/90
- U. Deparade, Halle: 13/71, 24/71
- M. Derpa, Hoyerswerda: 30/78, 20/79
- E. Donath, Senftenberg: 14/73
- V. Drenk, Rostock: 32/74
- K. Ehrhardt, Stolberg: 34/67, 8/69, 23/69, 4/70
- J. Elschner, Triptis: 34/68, 11/69, 18/69, 24/69, 28/69, 15/70, 25/70, 8/71
- K. Engel, Rostock: 21/74, 33/75
- L. Engelmann, Dresden: 27/79
- B. Erward, Magdeburg: 4/74, 12/75, 32/75, 19/79
- E. Fabian, Forst: 25/67
- V. Färber, Berge: 30/73, 32/73
- G. Fickelscher, Nordhausen: 13/64, 6/65, 23/66
- F. Fischer, Magdeburg: 10/74, 15/74, 28/74, 33/74, 11/75
- J. Fischer, Karl-Marx-Stadt: 33/72
- A. Fittke, Berlin: 8/78, 4/79, 31/80, 2/81, 5/81, 36/81, 16/84
- G. Franz, Dresden: 18/63, 5/64
- M. Freitag, Schwarzheide: 31/70, 12/72, 26/72, 22/76
- U. Freitag, Cottbus: 26/76
- H. Fritzsch, Reinsdorf: 5/63, 12/63, 21/63, 27/63, 2/64, 12/64, 19/64, 30/64, 9/65, 11/65, 27/65, 32/65, 9/66, 12/66, 30/66, 3/67, 12/67
- T. Fritzsche, Lützschena: 23/67
- M. Fruth, Berlin: 33/76
- J. Gäbler, Radebeul: 19/76
- M. Gärtner, Berlin: 20/84
- J. Gerber, Magdeburg: 23/80, 33/80, 3/81, 14/81, 24/81, 20/82
- O. Geupel, Dresden: 24/86
- K. Gierth, Freiberg: 32/63
- H. Glienke, Neuwürschnitz: 18/79
- P. Glöckner, Neulobeda: 15/76
- K. Göldner, Dresden: 30/62
- D. Gollé, Wien: 16/88, 6/89, 21/89, 15/90
- H.-J. Görner, Karl-Marx-Stadt: 5/87, 12/89
- H.G. Gräbe, Erfurt: 4/75, 15/75, 20/75, 29/75, 11/76, 21/76, 23/76, 1/77, 21/77, 14/79, 3/80, 4/80, 25/80, 29/80, 7/81, 17/82, 28/82, 12/84, 1/85, 14/85, 15/86, 21/86, 1/87, 7/87, 21/87, 22/89, 14/90
- H. Grabowski, Dresden: 30/63, 36/63, 2/65, 10/65, 21/65, 33/65, 26/66, 9/67, 26/67, 12/68, 9/69, 17/69, 30/80
- S. Graubner, Wittgensdorf: 25/82, 19/86
- H.-D. Gronau, Neustrelitz: 18/68, 1/70, 34/70, 6/78
- G. Gruber, Gotha: 32/62
- T. Gundermann, Weidhausen: 32/77
- C.-J. Hamann, Dresden: 26/69
- H. Haase, Jarmen: 36/70, 14/72, 29/72, 23/73
- F. Haberland, Eilenburg: 2/62
- R. Haftmann, Zittau: 30/72

- A. Hanke, Löbau: 12/70, 3/71
- J. Hans, Dresden: 28/65, 7/69
- G. Haring, Großörner: 23/71, 16/73
- G. Hartung, Gerstungen: 14/65, 35/65, 15/66, 27/66, 35/66, 22/67
- O. Häßner, Wildau: 30/74
- W. Hegenwald, Schönebeck: 26/62
- G. Heinig, Zschopau: 4/65, 7/65, 25/65, 13/66
- H. Heinrich, Dresden: 22/84
- R. Heinrich, Dresden: 29/64
- J. Helbig, Babelsberg: 7/76, 22/78, 3/83
- A. Hempler, Rüdnitz, 8/85, 12/86
- S. Hennig, Dahme: 18/62
- G. Herbst, Schmalkalden: 5/77
- G. Hesse, Radebeul: 9/62, 14/62, 27/62, 28/62, 3/63, 6/64, 15/64, 18/64, 8/65, 8/67, 36/67, 10/68, 14/68, 28/68, 3/69, 10/69, 15/69, 32/69, 14/70, 18/70, 35/70, 10/71, 33/71, 20/72, 14/74, 19/75, 35/76, 5/78, 31/79, 5/80, 13/80, 11/81, 13/82, 8/83, 19/84, 11/85, 4/86
- W. Hilbert, Berlin: 15/81, 18/82, 4/83, 21/83, 10/84, 4/87
- T. Hirschmann, Leipzig: 21/79
- J. Hopfe, Merseburg: 6/70, 30/70, 6/71, 20/71, 24/75
- R. Höppner, Prösen: 19/69
- B. Hübner, Berlin: 27/68, 29/68
- R. Huscher, Dresden: 17/70
- E. Huth, Schulpforte: 23/63, 7/64, 33/64, 18/66, 31/66, 7/67, 20/67, 33/67, 9/68, 11/68, 24/68, 36/68, 4/69, 22/69, 30/69, 31/69, 11/70, 22/80, 35/80, 13/81, 26/81, 28/81, 13/83, 15/84, 3/85, 5/86, 9/88, 10/89, 2/90, 11/90
- F. Ihlenburg, Wismar: 27/82, 16/87, 3/88
- A. Israel, Karl-Marx-Stadt: 35/82, 20/87, 1/88, 1/90, 7/90
- H. Jacobi, Neulobeda: 2/76
- D. Jäger, Jena: 32/70, 12/71
- R. Jahn, Ilmenau: 13/89
- B. Jesiak, Leipzig: 13/63, 30/67, 36/77, 10/78
- H. Junghans, Grillenburg: 19/66
- P. Kanther, Schmalkalden: 2/63
- T. Kasper, Meißen: 3/62, 24/62, 24/63, 3/64, 31/64, 15/65, 34/66
- W. Kauder, Gardelegen: 13/86
- H. Keller, Schleiz: 26/61, 25/63
- A. Kirsten, Leuna: 27/78
- G. Kiy, Babelsberg: 18/76, 18/78
- J. Kleinert, Freiberg: 5/83, 22/87, 6/90
- W. Kniep, Schkopau: 17/62, 33/62
- A. Koch, Blankenhain: 34/63, 1/64, 16/67
- S. Koch, Leipzig: 34/69, 31/71, 2/84
- U. Köhler, Freiberg: 21/67, 21/69, 21/70
- J. Kohlmann, Ballstädt: 22/75, 29/76, 32/76, 9/77, 16/77, 20/78
- H. König, Karl-Marx-Stadt: 17/66
- W. Körner, Dresden: 14/63
- W. Körper, Annaberg: 25/62
- A. Kramer, Leipzig: 12/77, 26/77, 32/79
- R. Krause, Freiberg: 14/75
- W. Kreipl, Zwickau: 12/80, 34/80, 31/81, 5/82, 21/82, 7/83, 20/83, 10/88
- J. Krüger, Limsdorf: 19/80, 24/80, 11/82, 11/84, 2/85
- W. Krüger, Dresden: 18/72, 36/73
- P. Kühn, Dresden: 22/71, 34/73, 3/74, 18/83
- G. Kundt, Rostock: 29/70, 28/71
- M. Ladmann, Berlin: 1/66
- R. Lehmann, Bleicherode: 10/82
- H. Lehmert, Worbis: 35/68
- H. Leitenberger, Naumburg: 23/65
- H. Leonhard, Gotha: 20/69
- D. Liebscher: Potsdam: 10/87
- H. Lieske, Eisenach: 1/73, 4/73, 13/75
- M. Linde, Jena: 32/72
- R. Lindemann, Cottbus: 31/77, 1/80, 15/80
- E. Lindner, Dresden: 36/76, 31/78, 23/79, 28/80
- J. Linke, Karl-Marx-Stadt: 24/66
- B. Luderer, Karl-Marx-Stadt: 4/68, 8/68, 20/68, 2/69, 13/69, 11/72, 15/73, 9/74
- E. Ludwig, Neubrandenburg: 29/65, 25/71, 32/71
- P. Malischewsky, Jena: 17/79
- S. Mansfeld, Wolfen: 35/64
- F. Marlow, Erkner: 17/81
- J. Marschner, Riesa: 6/85
- B. Mathiszik, Erfurt: 24/77, 23/81
- H. Matthies, Letzlingen: 25/73, 31/74
- W. May, Taucha: 16/64, 28/64
- P. Meixner, Magdeburg: 20/64
- M. Meyer, Lietzen: 17/80
- R. Mildner, Leipzig: 9/82, 31/82, 15/83, 22/83, 17/84, 24/84, 13/85, 10/86, 17/86, 24/87, 6/88, 17/88, 1/89, 9/89, 12/90
- W. Missbach, Dresden: 2/65
- F. Moch, Berlin: 16/66
- W. Moldenhauer, Erfurt: 1/71, 18/71, 21/72, 22/72, 28/72, 2/73, 5/73, 9/73, 1/74, 19/74, 24/74, 26/74, 34/74, 3/75, 23/75, 17/76, 20/76, 30/76, 31/76, 3/77, 15/77, 23/78, 32/78, 12/79, 13/79, 29/79, 9/80, 27/80, 1/81, 16/81, 20/81, 25/81, 19/82, 9/83, 12/83, 16/83, 9/84, 17/85, 20/85, 12/87, 13/88, 22/88, 2/89, 3/90, 19/90

- F. Möller, Mittweida: 13/67
- L. Muche, Schleife: 18/89, 23/90
- R. Mück, Halle: 5/74
- F. Müller, Finsterwalde: 9/71, 33/79
- K. Müller, Arnstadt: 27/61, 12/62, 19/62, 35/62, 33/63, 14/64, 13/65, 31/65
- A. Müllner, Dresden: 24/78
- W. Münchow, Belzig: 27/64, 23/77
- R. Münzberg, Eisenach: 9/63, 15/68, 26/68
- A. Neumann, Dresden: 14/69
- M. Neupert, Karl-Marx-Stadt: 5/70, 8/70, 20/70, 22/70, 33/70
- G. Noack, Berlin: 36/71
- J. Noack, Dresden: 21/61
- H. Nollau, Frankenberg: 13/74, 1/86, 16/89
- W. Oettel, Neulobeda: 11/80
- J. Ohlhorst, Rudolstadt: 7/63
- K. Ossowski, Berlin: 11/83
- K.-J. Panzke, Dresden: 6/62, 29/63
- U. Partzsch, Berlin: 22/85, 19/87, 4/88, 11/88, 21/88, 20/90
- W. Paul, Gera: 13/68, 7/70, 28/70, 10/81, 2/83
- M. Petrof, Kaliningrad: 5/67
- H. Pfennigwerth, Mönchhagen: 6/83
- W. Pierschel, Templin: 28/61
- P. Pöpelt, Rabenau: 24/70
- J. Portner, Pritzwalk: 20/63
- K.-H. Pötter, Wittenberg: 28/67
- E. Proß, Bad Langensalza: 1/68, 31/68
- P. Quadfasel, Prerow: 26/64
- E. Quaisser, Potsdam: 25/64, 24/65, 26/65, 2/68, 30/68
- D. Quang Mich, Karl-Marx-Stadt: 25/76
- K. Quasthoff, Leipzig: 2/77, 16/80
- O. Raeke, Neubrandenburg: 27/81
- A. Regenbrecht, Schöneiche: 11/87
- F. Rehm, Berlin: 25/83, 8/84, 14/84
- R. Reichelt, Berlin: 22/77
- D. Reinfried, Lichtenstein: 6/69
- G. Reißig, Leipzig: 23/72
- R. Retzlaff, Berlin: 22/65
- H. Reuter, Flößberg: 14/77
- B. Richter, Eisenhüttenstadt: 16/82, 6/86, 16/86
- U. Richter, Löbau: 15/62, 20/62, 11/64, 21764
- J. Riedel, Berlin: 8/61, 9/61, 11/61, 12/61, 14/61, 15/61, 17/61, 18/61, 20/61, 23/61, 24/61, 25/61, 31/61, 1/62, 4/62, 11/62, 29/62, 4/63, 15/63, 9/64, 34/64, 12/65, 36/65, 24/67, 36/69, 9/70, 10/70, 36/72, 36/74, 36/75, 17/77, 30/77, 13/78, 28/78, 36/79, 8/80, 36/80, 22/81, 2/88, 24/90
- R.-G. Riedel, Pulsnitz: 18/65
- U. Risch, Burg: 33/78
- H. Ristock, Leipzig: 11/77, 10/79, 26/79
- H. Rode, Rudolstadt: 3/78, 36/78, 28/79, 2/80, 30/82, 18/86, 8/87, 17/87, 17/90
- G. Roesch, Apolda: 23/86, 6/87, 8/88, 17/89
- A. Roos, Dresden: 11/86
- H.-G. Roos, Magdeburg: 23/70, 2/72, 4/72, 12/74, 27/74, 35/74, 27/75, 34/75, 9/76, 34/76, 35/77
- R. Rosenkranz, Böhlen: 35/79
- W. Rulff, Coswig: 29/61, 5/62, 7/62
- K. Schaper, Leipzig: 4/66, 19/67
- M. Schaper, Boltenhagen: 4/77, 7/78, 21/78, 1/79
- A. Schatz, Leipzig: 3/70, 3/72
- H.-J. Schefter, Reichwalde: 29/81
- T. Schiebel, Dresden: 5/75
- E. Schiffner, Roßleben: 8/62, 13/62, 16/62, 23/62, 11/63, 22/63, 26/63, 8/64, 32/64, 5/65, 30/65, 8/66, 25/66, 15/67, 31/67
- T. Schilling, Berlin: 1/84, 23/84, 9/85, 15/85, 24/85, 9/86, 20/86, 2/87, 13/87, 7/88, 19/88, 3/89, 14/89
- M. Schleifstein, Berlin: 11/67
- C. Schmeltzer, Potsdam-Babelsberg: 17/67, 3/68
- R. Schminder, Collm: 36/62, 32/66
- M. Schmögner, Medzev: 11/73, 26/73, 28/73, 8/74, 17/74, 20/74, 22/74, 16/75, 31/75, 5/76, 13/76, 3/79, 11/79
- W. Scholz, Potsdam: 17/65
- J. Schöne, Weixdorf: 19/70, 17/72
- M. Schönknecht, Magdeburg: 8/72
- R. Schöpp, Ballenstedt: 25/79
- H. Schrauber, Berlin: 18/85
- C. Schröter, Leipzig: 35/71
- A. Schüler, Kleinmachnow: 23/82, 7/84, 12/85
- H. Schulz, Nauen: 8/75, 26/75
- M. Schulze, Karl-Marx-Stadt: 2/71, 4/71
- U. Schwarz, Isserstedt: 3/66
- T. Siebert, Görlitz: 20/80, 21/81, 1/82, 33/82, 3/87
- I. Slota, Potsdam: 29/69, 11/71, 35/78
- D. Socher, Potsdam: 30/61, 6/66, 28/66, 6/67, 27/67, 6/68, 19/68
- U. Sonnemann, Blievenstorf: 1/65
- W. Soos, Meiningen: 6/84, 9/90
- U. Spittel, Jena: 2/75, 35/75, 1/76, 10/76, 24/76, 10/77, 27/77, 26/78, 2/79, 7/80, 21/80, 8/81, 12/82, 14/82, 29/82, 5/84, 13/84
- L. Staiger, Jena: 12/73, 21/73, 33/73
- G. Stange, Rostock: 33/81
- G. Starke, Leipzig: 4/64
- J. Staroske, Halle: 24/88

- L. Stavenhagen, Rostock: 11/66
- K. Tetzlaff, Berlin: 4/85
- N. Thai Hung, Dresden: 6/79, 9/79, 22/79, 34/79, 10/80
- R. Thiele, Zielitz: 22/62, 35/63, 10/64, 24/64, 5/66, 14/66, 36/66, 14/67, 18/67
- G. Thomas, Zittau: 19/78, 19/81, 1/83, 10/83, 27/83
- W. Tietz, Magdeburg: 16/63, 28/63
- K. Tischler, Apolda: 10/62
- L. Tobiska, Magdeburg: 27/73
- S. Tunn, Barth: 23/68
- G. Uhlig, Leipzig: 34/82
- J. Ullmann, Eppendorf: 22/64, 7/66
- F. Urban, Strausberg: 16/74
- T. Van Con, Tharandt: 28/76
- T. Van Vuong, Potsdam: 20/89
- K. Vetter, Weinböhla: 1/78, 12/78, 16/78
- B. Vetters, Oebisfelde: 21/62, 36/64, 16/65, 34/65, 20/66, 29/66, 1/67
- I. Vincze, Budapest: 18/77
- H. Voigt, Altenburg: 16/69, 7/79
- J. Voigt, Berlin: 2/70
- G. Vollbeding, Haldensleben: 4/82
- J. Wagner, Dresden: 14/87
- K. Wagner, Jena: 34/72
- M. Weese, Berlin: 19/73, 35/73
- C. Werge, Leipzig: 29/78, 14/80, 8/82, 24/82, 18/84, 5/85, 14/88
- B. Werner, Dresden: 33/68
- R. Werner, Leipzig: 26/80, 6/82
- A. Widiger, Halle: 19/65, 2/66, 22/66, 2/67, 4/67
- K. Wiegand, Halle: 14/78
- R. Wilhelm, Leipzig: 32/67, 21/85
- F. Winczuk, Berlin: 14/76, 20/77
- G. Windisch, Karl-Marx-Stadt: 7/74, 25/77, 12/81
- N. Xuan Thinh, Dresden: 32/80
- U. Zähle, Jocketa: 17/68, 12/69
- R. Zerck, Wismar: 23/74, 9/75, 18/75, 30/75, 3/76, 6/76, 8/76, 16/76, 27/76, 6/77, 13/77, 19/77, 28/77, 5/79, 8/79, 16/79
- W. Ziegler, Leipzig: 34/62
- V. Zillmann, Dresden: 25/74, 29/74