Aufgaben und Lösungen der schriftlichen Abschlussprüfung Mathematik Klasse 10 der Polytechnischen Oberschulen der DDR 1957 - 1990

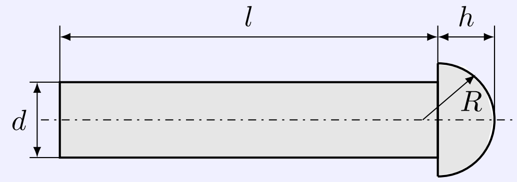
Zusammenstellung der Aufgaben und Lösungen: Steffen Polster 2020/25
https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben und Lösungen

1.1 Abschlussprüfung 1957

Aufgabe 1
Die Abbildung zeigt den Achsenschnitt eines Nietes aus Eisen. Entnehmen Sie daraus die Maße, und berechnen Sie das Gewicht von 1000 Stück!
d = 13 mm, R = 11 mm, l = 70 mm, h = 8,5 mm, $\gamma = 7{,}8\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$



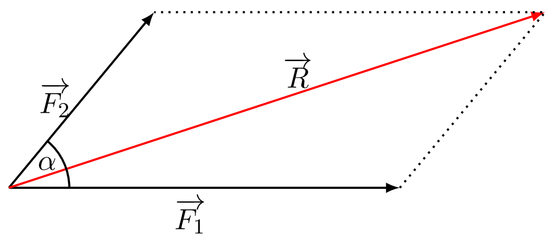
Der Niet besteht aus einem Zylinder (Durchmesser d, Höhe l) und einer Kugelkappe (Radius R und Höhe der Kappe h).
Volumen des Nietes $V = \frac{\pi}{4}d^2l + \frac{\pi}{3}h^2(3R - h)$
$V_{\text{Zylinder}} = 9291{,}26\ \text{mm}^3$; $V_{\text{Kugelkappe}} = 1853{,}67\ \text{mm}^3$; $V_{\text{Gesamt}} = 11144{,}93\ \text{mm}^3 = 11{,}14\ \text{cm}^3$;

Gewicht von 1000 Stück: $G = 86{,}93$ kp.

Aufgabe 2
Zwei Kräfte P_1 und P_2 greifen unter dem Winkel α an einem Punkt an.

a) Wie groß ist ihre Resultierende R?

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung nach!
$P_1 = 75{,}3$ kp; $P_2 = 129{,}4$ kp; $\alpha = 50{,}3°$



Für die Resultierende R ergibt der Kosinussatz

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos 129{,}7° = 186{,}7 \quad kp$$

Aufgabe 3
Lösen Sie die folgende Gleichung!

$$\frac{6x-2}{2x+3} = \frac{35x^2+23x+8}{16x^2-36} - \frac{4x+4}{8x-12}$$

$$\to \frac{6x-2}{2x+3} = \frac{35x^2+23x+8}{4(2x-3)(2x+3)} - \frac{x+1}{2x-3} \qquad | \cdot 4(2x-3(2x+3)$$

$$46x - 22x - 3 = 35x^2 + 23x + 8 - 4x + 12x + 3$$

$$21x^2 + 91x + 28 = 0$$

$$x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{169}{36} - \frac{4}{3}}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

1.2 Abschlussprüfung 1958

Aufgabe 1
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und 200 m Länge vorangetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.

a) Berechnen Sie die Länge des Verbindungsstollens der beiden Endpunkte!

b) Berechnen Sie, unter welchen Winkeln der Verbindungsstollen von den Hauptstollen abzweigt!

c) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine maßstäbliche Zeichnung!

a) Ist x die Länge des Verbindungsstollens wird mit dem Kosinussatz

$$x^2 = 162{,}5^2 + 200^2 - 2 \cdot 162{,}5 \cdot 200 \cos 70{,}5° \rightarrow x = 211{,}4 \quad m$$

b) mit dem Sinussatz und der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich

$$\frac{162{,}5}{211{,}4} = \frac{\sin\beta}{\sin 70{,}5°} \rightarrow \beta = 46{,}4° \rightarrow \gamma = 180° - 70{,}5° - 46{,}4° = 63{,}1°$$

c) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine maßstäbliche Zeichnung!

Aufgabe 2
Lösen Sie die folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$(4x+1)(2x-2) - (x+0{,}5)(6x-5) = 3$$

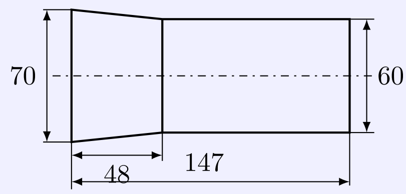
$$\begin{aligned} \rightarrow 8x^2 + 2x - 8x - 2 - 6x^2 + 5x - 3x + 2{,}5 &= 3 \\ 2x^2 - 4x - 2{,}5 &= 0 \\ x^2 - 2x - 1{,}25 &= 0 \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 1{,}25} \\ x_1 &= -0{,}5 \quad ; \quad x_2 = 2{,}5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3
Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 5 : 3. Der Umfang beträgt 72 cm. Wie lang sind die Seiten?

Es sei l die Länge und b die Breite des Rechtecks. Dann gilt $l : b = 5 : 3$ sowie $2l + 2b = 72$. Mit $l = \frac{5}{3}b$ einsetzen, wird $\frac{10}{3}b + 2b = \frac{16}{3}b = 72$ ergibt sich $b = \frac{27}{2}$ cm und somit $l = \frac{45}{2}$ cm. Das Rechteck ist 22,5 cm lang und 13,5 cm breit.

Aufgabe 4

Wieviel kp wiegt der in der Abbildung dargestellte runde Maschinenzapfen aus Stahl?
Entnehmen Sie die Maße in mm aus der Skizze! (Wichte des Stahls 7,8 $\frac{p}{cm^3}$)



Der Maschinenzapfen besteht aus einem Zylinder mit dem Maßen Höhe 99 mm und Durchmesser 60 mm und einem Kegelstumpf der Höhe 47 mm und den Durchmessern 70 mm und 60 mm der begrenzenden Kreise.

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Stumpf}} = \frac{\pi}{4}60^2 \cdot 99 + \frac{\pi}{12}47 \cdot (60^2 + 60 \cdot 70 + 70^2) = 436180 \text{ mm}^3 = 436{,}18 \text{ cm}^3$$

Mit der gegebenen Wichte ergibt dies ein Gewicht von 3402 p = 3,4 kp.

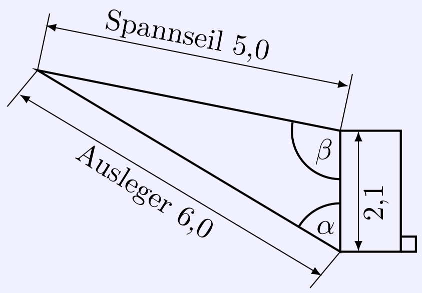
1.3 Abschlussprüfung 1959

Aufgabe 1
Lösen Sie die folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$4x^2 = 2 - 7x$$

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 2 - 7x \\ 4x^2 + 7x - 2 &= 0 \\ x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} \pm \frac{9}{8} \\ x_1 &= -2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 2



Ein Dunglader hat bei einer bestimmten Arbeitsstellung die in der vereinfachten Zeichnung angegebenen Maße in Meter. Um die Belastungsverhältnisse berechnen zu können, benötigt man die Größe der Winkel. Berechnen Sie

a) den Winkel α zwischen Ausleger und Gehäuse,

b) den Winkel β zwischen Spannseil und Gehäuse!

Mit dem Kosinussatz und den drei Seitenlängen des Dreiecks c = 2,1, b = 6,0 und a = 5,0 wird

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \rightarrow \alpha = 52{,}3°$$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \rightarrow \beta = 108{,}3°$$

Aufgabe 3
Die galvanische Abteilung eines volkseigenen Betriebes hat die Aufgabe, die Oberfläche von Stahlkugeln zu vernickeln.
Das Volumen einer Kugel wurde auf Grund ihres Gewichtes mit $V = 3{,}053$ dm^3; festgestellt. Zur Berechnung der galvanischen Lösung ist es notwendig, die Größe der Oberfläche einer Kugel zu bestimmen. Berechnen Sie diese logarithmisch!

Aus dem Volumen der Kugel kann der Radius und somit die Oberfläche ermittelt werden.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \qquad ; \qquad A = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^2$$

Dann wird

$$\lg A = \lg 4 + \lg \pi + \frac{2}{3}(\lg 3 + \lg V - \lg 4 - \lg \pi) = 1{,}00775 \qquad ; \qquad A \approx 10{,}18 \text{ dm}^2$$

Der Oberflächeninhalt einer Stahlkugel 10,18 dm^2.

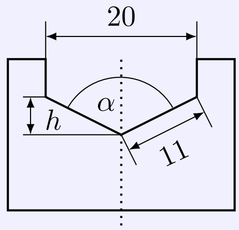
1.4 Abschlussprüfung 1960

Aufgabe 1
Berechnen Sie logarithmisch!

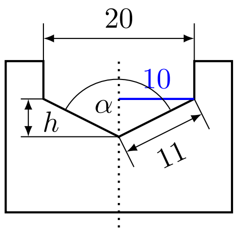
$$\frac{93{,}9 \cdot \sqrt[3]{0{,}0299}}{6{,}15^2 \cdot 0{,}0398}$$

$$\lg x = \lg 93{,}9 + \frac{1}{3} \lg 0{,}0299 - 2 \cdot \lg 6{,}15 - \lg 0{,}0398 \qquad \rightarrow x \approx 19{,}361$$

Aufgabe 2



Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre gemäß Abbildung angefertigt werden. Berechnen Sie die Spitzenhöhe h und den Winkel α für die dort eingetragenen Maße!



Die Spitzenhöhe h ergibt sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 11 mm und der anderen Kathete 10 mm: $h = \sqrt{11^2 - 10^2} \approx 4{,}58$ mm

Der Winkel α ist doppelt so groß, wie ein Innenwinkel in dem rechtwinkligen Dreieck: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{10}{11} \rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 24.62°$
Der Winkel α ist somit 49,2° groß.

Aufgabe 3
Ein Feld hat die Form eines Dreiecks. Die Seiten haben folgende Abmessungen: 65,8 m; 89,7 m; 73,3 m. Wie groß sind

a) ein Winkel und
b) die Fläche des Feldes in ha?

Mittels Kosinussatz und $a = 65{,}8$ m, $b = 89{,}7$ m, $c = 73{,}3$ m wird für den Winkel $\gamma = 53{,}6°$.
Mittels $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ergibt sich dann ein Flächeninhalt von $A \approx 2376$ m^2.

Aufgabe 4
Zwei Rohrleitungen von 15 mm bzw. 25 mm lichter Weite (innerer Durchmesser) sollen durch ein einziges Rohr ersetzt werden.
Der Querschnitt des neuen Rohres soll mindestens so groß sein wie die Summe der Querschnitte der beiden anderen Rohre. Dadurch soll gewährleistet werden, dass im neuen Rohr mindestens dieselbe Wassermenge wie in den beiden alten Wasserrohren fließen kann.
Wie groß ist der Durchmesser des neuen Rohres?

Die Querschnitte der zwei gegebenen Rohre sind 176,7 mm^2 und 490,9 mm^2 groß. Das neue Rohr muss damit einen Querschnitt von 667,6 mm^2 haben.
Ein solches Rohr hat einen Durchmesser von 29,2 mm^2.

1.5 Abschlussprüfung 1961

Aufgabe 1
Bei der Kartoffelernte erwartete man einen Hektarertrag von 240 dt. Das Feld hatte eine Fläche von 15 ha.
Da der ausgestreute Stallmist nicht rechtzeitig untergepflügt wurde, trat eine Ertragsminderung von 7,5 % ein. Berechnen Sie den Ernteverlust!

Ohne Ertragsminderung wäre die Kartoffelernte $240 \cdot 15 = 3600$ dt groß.
7,5 % von 3600 dt sind 270 dt. Der Ernteverlust ist 270 dt Kartoffeln groß.

Aufgabe 2
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch oder grafisch!

$$x + y = 1 \qquad ; \qquad 3x – 2y = 8$$

Umstellen der 1. Gleichung zu $x = 1-y$ und einsetzen in die zweite ergibt $3-3y-2y = 3-5y = 8$. Daraus folgt $y = -1$ und mit der ersten Gleichung $x = 2$. Das Lösungspaar ist $(2, -1)$.

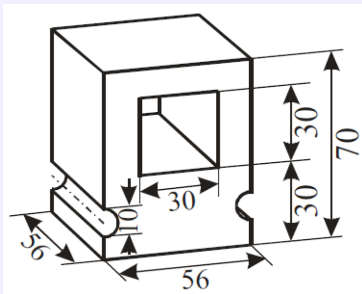
Aufgabe 3
Lösen Sie folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$26 – (x + 3)^2 = (x – 1)^2$$

$$26 - x^2 - 6x - 9 = x^2 - 2x + 1 \qquad \to \qquad 0 = 2x^2 + 4x - 16$$
$$\to 0 = x^2 + 2x - 8 \qquad \to \qquad x_1 = -4; \quad x_2 = 2$$

Aufgabe 4

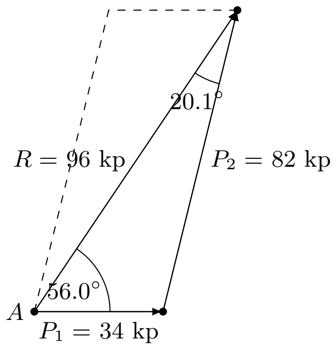
Wieviel kp wiegt der in der Zeichnung dargestellte Maschinenteil aus Stahl?
Entnehmen Sie die Maße aus der Abbildung (Wichte des Stahls 7,85 p/cm³)



Das Maschinenteil ist ein Quader, aus dem ein quadratisches Prisma und zwei Halbzylinder herausgeschnitten werden.
Das Volumen des Quaders ist $V_Q = 56 \cdot 56 \cdot 70 = 219520$ mm³.
Das Prisma hat ein Volumen von $V_P = 30 \cdot 30 \cdot 56 = 50400$ mm³.
Die zwei Halbzylinder ergeben zusammen einen Zylinder mit der Höhe 56 mm und dem Durchmesser 10 mm, d.h. mit einem Volumen von $V_Z = \frac{\pi}{4} d^2 h \approx 4398$ mm³.

Das Maschinenteil hat somit ein Volumen $V = 164720$ mm³ $= 164{,}7$ cm³ und damit ein Gewicht von $G = 1293$ p $\approx 1{,}29$ kp.

Aufgabe 5
Unter welchem Winkel greifen die beiden Kräfte $P_1 = 34$ kp und $P_2 = 82$ kp an einem Punkt A an, wenn ihre Resultierende $R = 96$ kp beträgt?
Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung!



Die zwei Kräfte P_1, P_2 und die Resultierende R bilden ein Dreieck (siehe Abbildung). Mit dem Kosinussatz ermittelt man die Innenwinkel zu 20,1°, 56,0○ und 103,9°.
Damit greifen die zwei Kräfte bei A und einem Winkel von 76,1° an.

1.6 Abschlussprüfung 1962

Aufgabe 1
a) Berechnen Sie! $(5a–1)^3$
b) Berechnen Sie! $\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54}$
c) Bestimmen Sie den Wert der Unbekannten! $d : (d–2) = 4 : 3$

a) $= 125a^3 - 25a^2 + 5a - 1$
b)

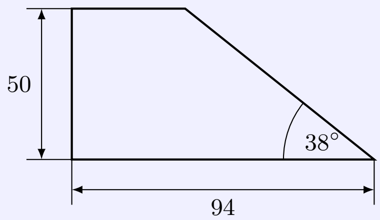
$$\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54} = \frac{4r^2}{27t} \cdot \frac{54}{16r^5} = \frac{1}{2r^3 \cdot t}$$

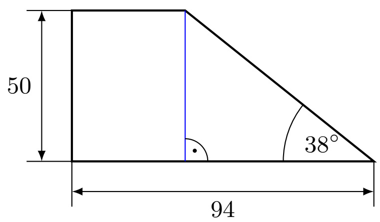
c)

$$\frac{d}{d-2} = \frac{4}{3} \rightarrow 3d = 4(d-2) \rightarrow d = 8$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie, wieviel cm^2 Material für das in der Abbildung dargestellte Stützblech benötigt werden!





Fällt man das Lot vom oberen rechten Punkt auf die Grundseite (in der Abbildung die blaue Strecke), so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Das Lot hat die Länge 50 mm und die zweite Kathete k dieses Dreiecks die Länge

$$\tan 38° = \frac{50 \text{ mm}}{k} \rightarrow k = \frac{50 \text{ mm}}{\tan 38°} = 64 \text{ mm}$$

Damit ist die obere waagerechte Seite c des Trapezes 94 mm - 64 mm = 30 mm lang.

Für den Flächeninhalt des Stützblechs (Trapez) ergibt sich somit

$$A = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h = \frac{1}{2}(94+30) \cdot 50 = 3100 \text{ mm}^2 = 31 \text{ cm}^2$$

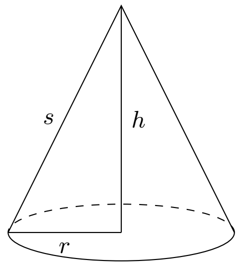
Aufgabe 3
Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung!

$$5x^2–12x = 9$$

$$5x^2–12x - 9 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{9}{5} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{45}{25}} = \frac{6}{5} \pm \frac{9}{5} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = -\frac{3}{5}; \quad x_2 = 3$$

Aufgabe 4
Beim Ausschachten einer Baugrube läuft die ausgehobene Erde über ein Förderband. Dadurch wird sie in Form eines Kegels auf der Baustelle gelagert.
Zur Ermittlung der aufgeschütteten Erdmenge werden mit dem Bandmaß der Umfang des Grundkreises u = 24,5 m und die Mantellinie s = 4,7 m des Kegels gemessen.
Fertigen Sie eine Skizze des Kegels, an, und berechnen Sie die Erdmenge!
Geben Sie die Zwischenergebnisse und das Endergebnis auf eine Dezimalstelle genau an!



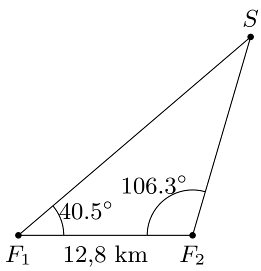
Mit einem Umfang $u = 24{,}5$ m hat der Grundkreis des Kegels einen Radius von $r = \frac{u}{2\pi} = 3{,}9$ m.

Die Kegelhöhe h ergibt sich als Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit den zwei anderen Seiten s und r: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 2{,}6$ m.
Somit wird für das Volumen der Erdmenge $V = \frac{\pi}{3} r^2 h = 41{,}8$ m^3.

Aufgabe 5
Zwei Funkpeilstationen F_1 und F_2 der Nationalen Volksarmee liegen 12,80 km voneinander entfernt.
Ein feindlicher Sender S wird von F_1 und F_2 aus angepeilt. Der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_1 und der Standlinie $\overline{F_1F_2}$ beträgt 40,50°; der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_2 und der Standlinie $\overline{F_1F_2}$ beträgt 106,30°.

a) Berechnen Sie die Entfernung des Senders von F_1 und F_2!

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstabgerechte Zeichnung, und geben Sie den gewählten Maßstab an!



Der Winkel bei S im Dreieck F_1F_2S ist 33,2° groß.
Mit Hilfe des Sinussatzes wird für die Entfernungen

$$\overline{F_1S} = \frac{\sin 106{,}3°}{\sin 33{,}2°} \cdot 12{,}8 = 22{,}4 \text{ km}$$

$$\overline{F_2S} = \frac{\sin 40.5°}{\sin 33{,}2°} \cdot 12{,}8 = 15{,}2 \text{ km}$$

1.7 Abschlussprüfung 1963

Aufgabe 1
a) Berechnen Sie! $\frac{7a}{15} - \frac{2a}{3} - \frac{4a}{5}$.

b) Lösen Sie die Formel für die Berechnung des Volumens der Kegel nach d auf!

c) Berechnen Sie! $(3a - 5b)^2$

$$a) \qquad \frac{7a}{15} - \frac{2a}{3} - \frac{4a}{5} = \frac{7a}{15} - \frac{10a}{15} - \frac{12a}{15} = -\frac{15a}{15} = -a$$

$$b) \qquad V = \frac{\pi}{12} d^2 h \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{12V}{\pi h}}$$

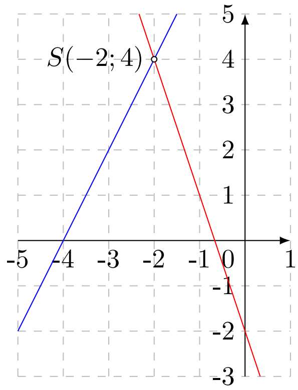
$$c) \qquad (3a - 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$$

Aufgabe 2
Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung! $\qquad x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = -5; \quad x_2 = 3$$

Aufgabe 3
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch und grafisch!

$$6x + 2y = -4 \qquad ; \qquad y = 2x + 8$$



Die erste Gleichung, nach y umgestellt, ist $y = -3x - 2$. Gleichsetzen mit der 2.Gleichung ergibt

$$-3x - 2 = 2x + 8 \quad \rightarrow \quad 5x = 10 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Damit ergibt sich $y = 4$. Das Lösungspaar ist $(-2; 4)$.

Für die grafische Lösung zeichnet man die zugehörigen linearen Funktionen in ein Koordinatensystem ein. Beide Graphen schneiden sich im Punkt $S(-2; 4)$.

Aufgabe 4
"Unwiederbringlich hat der Imperialismus die Herrschaft über einen großen Teil der Völker verloren."(N. S. Chruschtschow auf dem XXII. Parteitag)
Vervollständigen Sie folgende Übersicht!

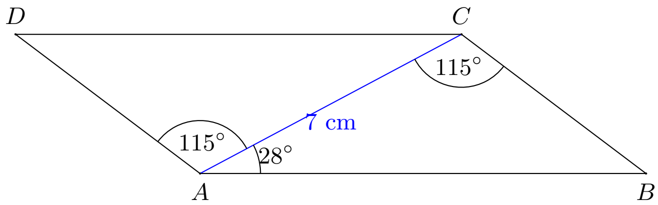
	Bevölkerung in Mill.	%
Welt insgesamt	3020	
Sozialistische Welt	1070	
Imperialistische Großmächte		18
Übrige Welt	1410	

	Bevölkerung in Mill.	%
Welt insgesamt	3020	100
Sozialistische Welt	1070	35
Imperialistische Großmächte	540	18
Übrige Welt	1410	47

Aufgabe 5
Die Diagonale KM eines Parallelogramms $KLMN$ hat eine Länge von 7 cm. Diese Diagonale bildet mit den Seiten des Parallelogramms Winkel von 28° bzw. 115°.

a) Konstruieren Sie das Parallelogramm!
b) Beschreiben Sie die Konstruktion!
c) Berechnen Sie die längere Seite des Parallelogramms!

b) Man zeichne eine beliebige Gerade und lege auf dieser einen Punkt A fest.
In A trage man einen Winkel von 28° an. Der Punkt C liege auf dem freien Schenkel des Winkels im Abstand 7 cm von A.
In C trage man einen Winkel von 115° an. Der zweite Schenkel schneidet die erste Gerade durch A im Punkt B.
Den vierten Parallelogrammpunkt erhält man als Schnittpunkt durch Parallelverschiebungen der Strecken AB durch C und BC durch A.



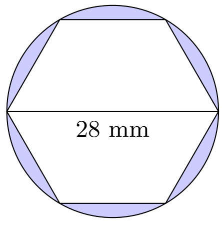
c) Der Winkel bei B ist $\beta = 37°$. Mit dem Sinussatz wird dann für die längere Parallelogrammseite

$$\overline{AB} = \frac{\sin 115°}{\sin 37°} \cdot 7 = 10{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 6
Für eine große Vorrichtung wird aus einem Messingstab mit kreisförmigem Querschnitt von 28 mm Durchmesser ein Werkstück gefertigt, bei dem an einem Ende ein regelmäßiges Sechskant von 800 mm Länge und 28 mm Eckenmaß zu fräsen ist.

Wieviel Kilopond Messingspäne können als Abfall der Verwendung wieder zugeführt werden? (Wichte für Messing: $\gamma = 8{,}3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

Der Abfall ist der farbige Teil des abgebildeten Querschnitts. Er entspricht der Differenz aus dem Flächeninhalt des Kreises und dem Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge 14 mm.

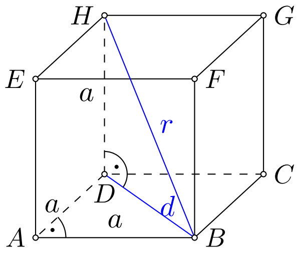


Flächeninhalt des Kreises: $A_K = \frac{\pi}{4}d^2 = 615{,}7 \text{ mm}^2$
Flächeninhalt des Sechseck: $A_S = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = 509{,}2 \text{ mm}^2$
Da der Sechskant eine Höhe von 800 mm hat, wird somit ein Volumen von

$$V = 800 \cdot (615{,}7 - 509{,}2) = 85200 \text{ mm}^3 = 85{,}2 \text{ cm}^3$$

als Abfall produziert. Dieser hat ein Gewicht von 707 p = 0,71 kp.

Aufgabe 7
Von einem Würfel ist die Kantenlänge a bekannt. Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Raumdiagonalen her!



Die Flächendiagonale d ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABD, d.h. $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

Die Raumdiagonale r ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck BDH, d.h. $r = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$.

1.8 Abschlussprüfung 1964

Aufgabe 1
Vergleichen Sie die Zahlen folgender Zahlenpaare miteinander!

$$\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{5}{6} \quad ; \quad \frac{4}{25} \quad \text{und} \quad 0{,}16 \quad ; \quad 7\cdot\sqrt{8} \quad \text{und} \quad 5\cdot\sqrt{8}$$

Setzen Sie jeweils das richtige Zeichen (< ; = ; >)!
Geben Sie an, wie Sie zu Ihrer Entscheidung gelangt sind!

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}-\frac{5}{6} = -\frac{1}{12} < 0 &\qquad \text{d.h.} \qquad \frac{3}{4} < \frac{5}{6} \\ \frac{4}{25} - 0{,}16 = 0 &\qquad \text{d.h.} \qquad \frac{4}{25} = 0{,}16 \\ 7\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = 2\sqrt{8} > 0 &\qquad \text{d.h.} \qquad 7\sqrt{8} > 5\sqrt{8} \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Die Zusammenarbeit im Rat für Gegenseitige Wirtschaftshilfe (RGW) trug zu einer erheblichen Steigerung der Industrieproduktion und zu einer bedeutenden Erweiterung des Warenaustausches innerhalb der RGW-Länder bei.
Im Jahre 1958 betrug der Warenumsatz zwischen den Mitgliedsländern des RGW 10,9 Milliarden Rubel, im Jahre 1962 bereits 18,4 Milliarden Rubel.
Drücken Sie diese Steigerung des Warenumsatzes in Prozenten aus!

18,4 Milliarden sind das 1,688fache von 10,9 Milliarden.
Damit stieg der Warenumsatz um 68,8 % oder auf 168,8 %.

Aufgabe 3
Ein Drittel einer Zahl ist um 3 größer als ein Viertel der gleichen Zahl.
Bestimmen Sie die gesuchte Zahl mit Hilfe einer Gleichung!

Ansatz: $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 3$ mit der Lösung $x = 36$.

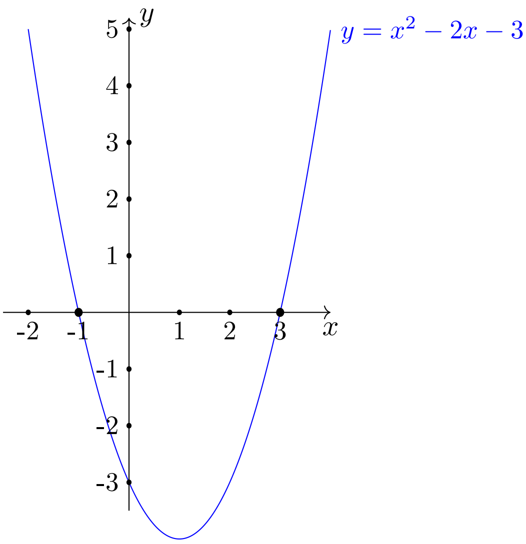
Aufgabe 4
Lösen Sie die Gleichung $(x-3)(x+1) = 0$

a) grafisch, indem Sie entweder die Nullstellen der entsprechenden quadratischen Funktion zeichnerisch ermitteln oder das Bild von $y = x^2$ mit der zugehörigen Geraden zum Schnitt bringen!
b) Lösen Sie diese Gleichung rechnerisch!

a) $(x-3)(x+1) = 0$ ist ausmultipliziert $x^2-2x-3 = 0$.
Die zugehörige Funktion $y = x^2-2x-3$ hat die Scheitelpunktsform $y = (x-1)^2-4$ und den Scheitelpunkt $S(1; -4)$. In der grafischen Darstellung ist der Graph der Funktion eine nach oben geöffnete Parabel.

In der grafischen Darstellung erkennt man die Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -1$, die Lösung der Gleichung sind.

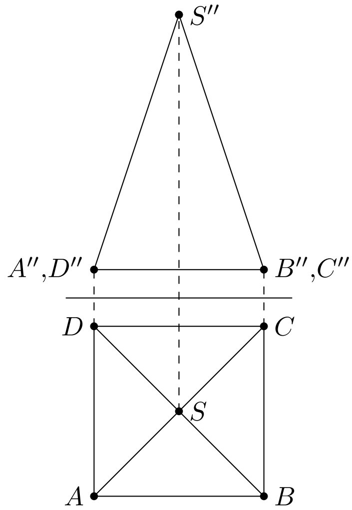
Das Produkt $(x-3)(x+1)$ ist genau dann gleich 0, wenn einer der beiden Faktoren null ist.
Damit werden aus $x-3 = 0$ und $x+1 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.



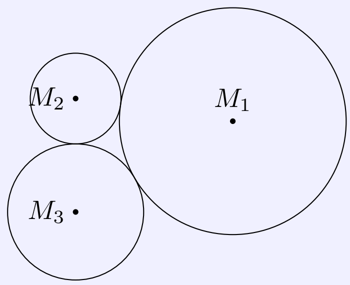
Aufgabe 5
Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Länge der Grundkante beträgt 6 cm. Die Höhe der Pyramide beträgt 9 cm.

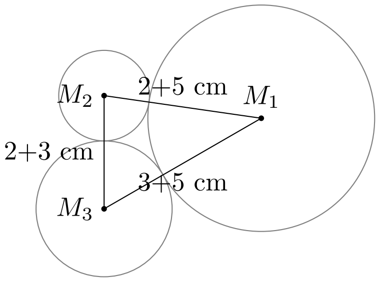
a) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide!
b) Stellen Sie diese Pyramide in Grundriss und Aufriss dar (alle Eckpunkte benennen)!

a) Grundkante $a = 6$ cm, d.h. quadratische Grundfläche $A = 36$ cm^2
Volumen
$$V = \frac{1}{3}A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 9 = 108 \text{ cm}^3$$
b) Grund- und Aufriss siehe Abbildung



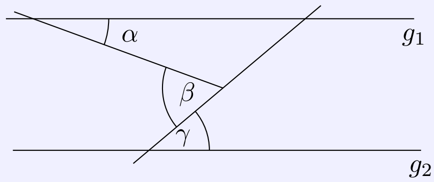
Aufgabe 6
Drei Kreise mit Durchmessern von 60 mm, 100 mm und 40 mm berühren einander von außen (Abbildung). Verbindet man die Mittelpunkte der drei Kreise, so entsteht ein Dreieck.
Berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks (Rechenstabgenauigkeit genügt)!
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Konstruktion!

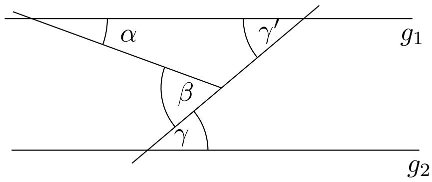




Die drei Mittelpunkte der Kreise bilden ein Dreieck mit den Seitenlängen 7 cm, 8 cm und 5 cm. (Addition der Radien der Kreise)
Mit dem Kosinussatz ergeben sich dann die Innenwinkel zu 60°, 81,8° und 38,2°.

Aufgabe 7
Berechnen Sie an Hand der Abbildung ($g_1 \parallel g_2$) die Größe des Winkels γ wenn Winkel α mit 20° und Winkel β mit 60° gegeben sind!
Geben Sie Ihren Lösungsweg an, und begründen Sie Ihre Feststellung über die Größe des Winkels γ!





Der Winkel β ist Außenwinkel in dem Dreieck, dass den Winkel α enthält. Nach dem Außenwinkelsatz ist dann der eingezeichnete Winkel $\gamma' = \beta - \alpha = 60° - 20° = 40°$. Da g_1 und g_2 parallel sind, sind γ und γ' Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Damit wird $\gamma = 40°$.

Aufgabe 8
a) Kürzen Sie den Bruch $\dfrac{4a^2-1}{2a+1}$ und geben Sie an, welchen Wert a in dem gegebenen Bruch nicht annehmen darf!

b) Fassen Sie folgende Summe zusammen! $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} \qquad (a \neq -b; a \neq b)$

$$a) \qquad \frac{4a^2-1}{2a+1} = \frac{(2a+1)(2a-1)}{2a+1} = 2a-1$$

Der Nenner darf nicht Null werden, d.h. es muss $2a+1 \neq 0$ gelten, also $a \neq -\frac{1}{2}$.
b)
$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} + \frac{ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

1.9 Abschlussprüfung 1965

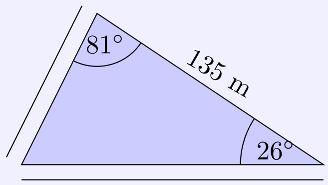
Aufgabe 1
Unsere Volkswirtschaft erzielte seit dem Bestehen unserer Republik in allen Industriezweigen große Erfolge. Zum Beispiel wurden im VEB Automobilwerk Sachsenring, Zwickau, von Jahr zu Jahr mehr PKW produziert.

Jahr	Anzahl produzierter Fahrzeuge
1955	7880
1964	60000

Der Plan für das Jahr 1965 sieht im Vergleich zum Jahre 1964 eine Steigerung der Produktion um rund 17 % vor.
a) Ermitteln Sie, um wieviel Prozent die Produktion von 1964 gegenüber der von 1955 gesteigert wurde!
b) Bestimmen Sie die Anzahl der im Jahre 1965 zu produzierenden PKW!

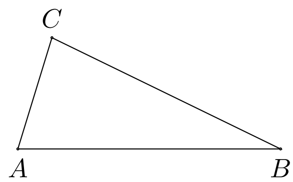
a) 60000 : 7800 = 7,69, d.h. von 1955 bis 1964 wurde die Produktion auf 769% oder um 669% gesteigert.
b) $60000 \cdot 1{,}17 = 70200$, d.h. 1965 sollen 70200 PKW produziert werden.

Aufgabe 2
Ein dreieckiges Flurstück wird begrenzt von einem Wald, einem Feldweg und einer Straße (s. Abbildung). Dieses Feld ist für eine rationelle Bearbeitung mit modernen Landmaschinen wegen seiner Form nicht geeignet.
Deshalb soll dieses Stück künftig als Weidefläche genutzt werden. Ein Elektrozaun soll die Weide umgeben. Es sind zwei Leitungsdrähte vorgesehen.



a) Berechnen Sie, wieviel Meter Draht benötigt werden.
b) Prüfen Sie Ihre Ergebnisse durch eine Konstruktion im Maßstab 1 : 1000!

a) Der dritte Innenwinkel ist 73° groß. Mittels Kosinussatz und Sinussatz ergeben sich für die zwei unbekannten Seitenlängen 61,9 m und 139,4 m.
Insgesamt müssen 361,3 m Zaun gezogen werden.



Aufgabe 3
a) Bestimmen Sie $\cos x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; ohne Benutzung der Tafeln der goniometrischen Funktionen, wenn Ihnen $\sin x$ mit $\frac{12}{13}$ bekannt ist!

b) Gibt es Lösungen für $2 + \cos\alpha = 4$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

$$a) \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

b) Umstellen ergibt $\cos\alpha = 2$. Da der Kosinus einen Wertebereich von $[-1; 1]$ hat, kann es keine reelle Zahl x geben, die die Gleichung erfüllt.

Aufgabe 4
a) Bestimmen Sie x und y aus dem Gleichungssystem

$$x + y = s \qquad ; \qquad x - y = t$$

Machen Sie die Probe!
b) Setzen Sie $t = 6$! Für welche Werte von s hat dieses Gleichungssystem dann ganzzahlige Lösungen?

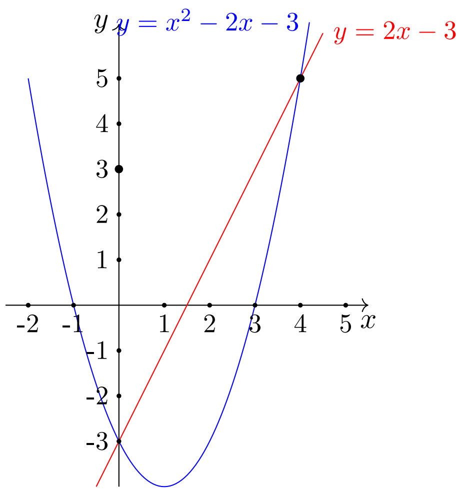
a) Addiert man beide Gleichung, so ergibt sich $2x = s + t$, d.h. $x = \frac{1}{2}(s + t)$.
Da $y = s - x$ ist, wird $y = \frac{1}{2}(s - t)$.

b) Mit $t = 6$ werden die Lösungspaare $\left(\frac{s}{2} + 3; \frac{s}{2} - 3\right)$. Ganzzahlige Lösungen ergeben sich dann für alle geradzahligen s.

Aufgabe 5
Zeichnen Sie die Graphen folgender zwei Funktionen im Bereich von $x = -2$ bis $x = 5$!

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad ; \qquad y = 2x - 3 \qquad (x \text{ reell})$$

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser beiden Graphen an!



Die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion ist $y = (x - 1)^2 - 4$.

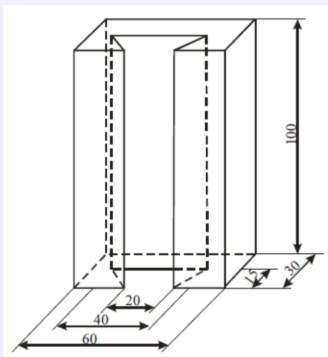
Die Graphen der Funktionen schneiden sich in den Punkten $A(0; -3)$ und $B(4; 5)$.

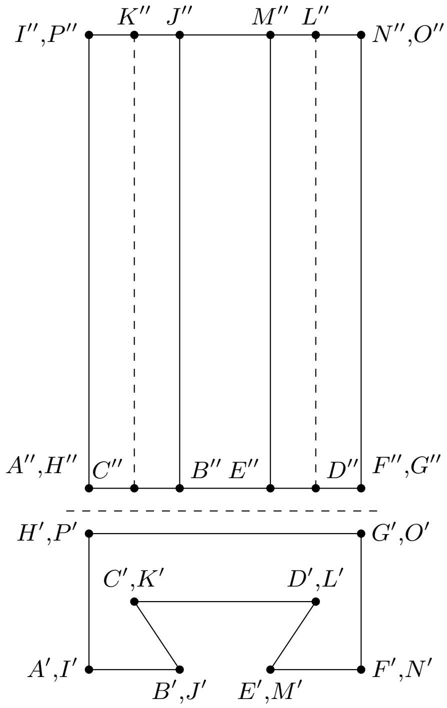
Aufgabe 6

Die Abbildung zeigt den Schrägriss eines Maschinenteils (Schlittenführung).
Maßangabe in mm, nicht maßstäblich.

a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriss dieses Körpers im Maßstab 1:1!
Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!

b) Berechnen Sie das Volumen des Maschinenteils!





Das Maschinenteil ist ein Quader, aus dem ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche herausgeschnitten wurde. Das Quadervolumen ist $V_Q = 60{\cdot}30{\cdot}100 = 180000\ \text{mm}^3 = 180\ \text{cm}^3$.

Das Trapez der Prismagrundfläche hat eine Höhe von 15 mm. Die beiden parallelen Seiten sind 20 mm und 40 mm lang. Damit ist das Prismavolumen

$$V_P = \frac{1}{2}(20+40)\cdot 15\cdot 100 = 45000\ \text{mm}^3 = 45\ \text{cm}^3$$

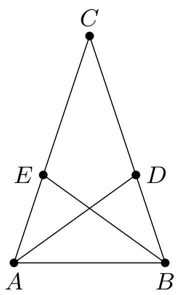
Das Volumen des Maschinenteils ist somit

$$V = V_Q - V_P = 135\ \text{cm}^3$$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1 und 7.2 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Es gilt der Satz:
"In gleichschenkligen Dreiecken sind die Winkelhalbierenden der Basiswinkel gleich lang."

Beweisen Sie den Satz! (Fertigen Sie eine Skizze an, und beweisen Sie zunächst die Kongruenz zweier Teildreiecke!)



Die Winkelhalbierenden der Basiswinkel seien AD und BE.
Dann haben die Dreiecke ABD und ABE die Seite AB gemeinsam. Die Winkel $\angle BAE$ und $\angle ABD$ sind Basiswinkel, d.h. gleich groß. Ebenso sind die Winkel $\angle ABE$ und $\angle BAD$ als halbe Basiswinkel gleich groß.

Somit sind die Dreiecke ABD und ABE nach Kongruenzsatz WSW zueinander kongruent und die Seiten AD und BE, d.h., die Winkelhalbierenden gleich groß. w.z.b.w.

Aufgabe 7.2
Eine Seite eines Rechtecks sei 6 cm lang.
Verlängert man diese Seite um 4 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so entsteht ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt.
Wie lang ist die andere Seite des ursprünglichen Rechtecks?

Es seien $a = 6$ cm und b die Seiten des ursprünglichen Rechtecks. Dann gilt

$$a\cdot b = 6b = A = (a+4)\cdot(b-1) = 10b - 10 \quad \rightarrow \quad 4b = 40 \quad \rightarrow \quad b = 2{,}5\ \text{cm}$$

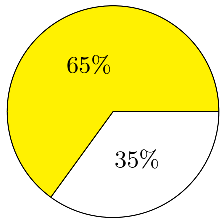
Die zweite Seite des ursprünglichen Rechtecks ist 2,5 cm lang.

1.10 Abschlussprüfung 1966

Aufgabe 1
Im Jahre 1964 wurden 65 % unserer Produktion an Kalisalzen exportiert. Das sind 1,2 Millionen Tonnen Kalisalz.

a) Berechnen Sie die Gesamtproduktion der DDR an Kalisalzen im Jahre 1964! (Runden Sie der Aufgabenstellung entsprechend!)
b) Stellen Sie den Anteil des Exports an der Gesamtproduktion in einem Kreisdiagramm dar! Beschriften Sie das Diagramm!

a) 1,2 Millionen t : 0,65 = 1,84 Millionen t Kalisalz.



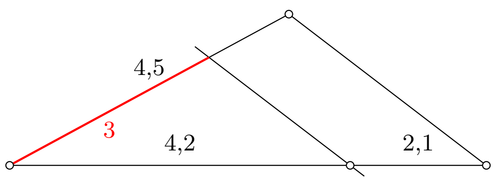
Aufgabe 2
Vom Dreieck DEF sind bekannt: Winkel $EFD = 124°$; $EF = 58$ mm; $FD = 76$ mm

a) Errechnen Sie den Flächeninhalt in Quadratzentimetern!
b) Welcher Winkel ist in diesem Dreieck der kleinste? Begründen Sie Ihre Entscheidung!
c) Errechnen Sie die Länge der dritten Seite des Dreiecks in Millimetern!

a) Mit $A = \frac{1}{2}EF \cdot FD \cdot \sin \angle EFD$ wird $A = 1827$ mm^2.
b) Der kleinste Winkel liegt der kleinsten Seite gegenüber, d.h. hier ist $\angle EDF$ am kleinsten.
c) mit dem Sinussatz ergibt sich für $ED = 118$ mm.

Aufgabe 3
a) Bestimmen Sie x durch Konstruktion! 6,3 : 4,5 = 4,2 : x
b) Errechnen Sie x!

Umstellen ergibt $x = \frac{4,2 \cdot 4,5}{6,3} = 3$.
Die Konstruktion erfolgt mittels Strahlensatz. Längs zweier Strahlen werden 6,3 cm und 4,5 cm und auf dem zweiten 4,2 cm abgetragen. Verschiebt man die Gerade durch 6,3 cm und 4,2 cm parallel durch den Punkt mit 4,5 cm, so erhält man auf dem 2. Strahl die Lösung 3 cm.



Aufgabe 4
Gegeben ist die Gleichung $2x^2 + ax - a^2 = 0$. Lösen Sie diese Gleichung nach x auf! (Probe!)

$$x^2 + \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{2}}$$

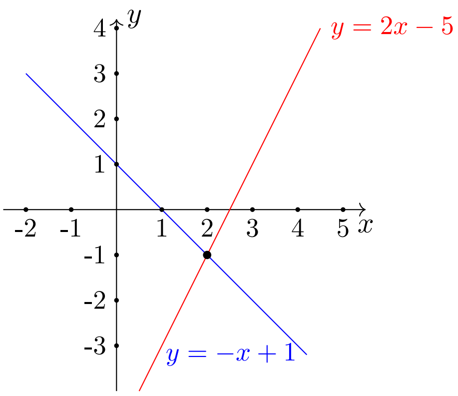
$$= -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{16}} = -\frac{a}{4} \pm \frac{3a}{4}$$

Die Lösung der Gleichung ist somit $x_1 = -a$ und $x_2 = \frac{a}{2}$.

Aufgabe 5
Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$y = -x + 1 \qquad ; \qquad 5 = 2x - y \qquad (x \text{ reell})$$

a) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Graphen an!
b) Überprüfen Sie die angegebenen Schnittpunktkoordinaten rechnerisch!
c) Für welchen Bereich von x gilt für die erste Funktion und zugleich für die zweite Funktion, dass y nicht größer als 3 ist?



a) der Schnittpunkt ist $S(2; -1)$
b) die zweite Gleichung zu $y = 2x - 5$ umstellen und mit der ersten gleichsetzen, ergibt

$$-x + 1 = 2x - 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

und somit $y = -x + 1 = -1$.
c) im Intervall $x \in [-2; 4]$ sind die Funktionswerte beider Funktionen nicht größer als 3.

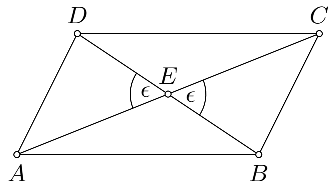
Aufgabe 6
a) Bestimmen Sie x in $x = \log_2 8$!
b) Lösen Sie nach c auf, und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \qquad (a \neq b; b \neq 0; c \neq 0; a \neq -b)$$

a) aus der Gleichung wird $2^x = 8$, d.h. $x = 3$.
b) $\dfrac{b+a}{ab} = \dfrac{1}{c} \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{ab}{a+b}$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Zeichnet man in ein Parallelogramm die Diagonalen ein, so erhält man vier Teildreiecke. Weisen Sie nach, dass ein Paar gegenüberliegender Teildreiecke kongruent ist!



E sei der Schnittpunkt der Diagonalen. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig, d.h. es gilt $ED = ED$ und $EC = EA$.
Außerdem sind die zwei Winkel $\angle BEC$ und $\angle DEA$ gleich groß, da sie Scheitelwinkel bei E sind.
Damit sind die zwei Dreiecke $\triangle BEC$ und $\triangle AED$ nach dem Kongruenzsatz WSW zueinander kongruent, da sie in dem Winkel ϵ und den zwei anliegenden Seiten übereinstimmen.

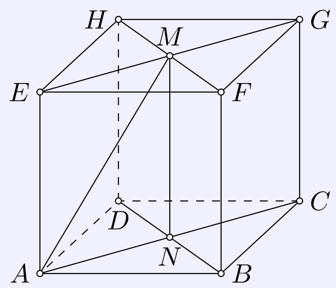
Aufgabe 7.2
Ein rechteckiges Stück Blech mit den Seitenlängen a und b wird zu einem Rohr zusammengebogen, das die Form eines offenen, geraden Kreiszylinders hat. Die Länge des Rohres sei b.
Geben Sie das Volumen des zylinderförmigen Rohres an, wenn $2a = b$ ist!

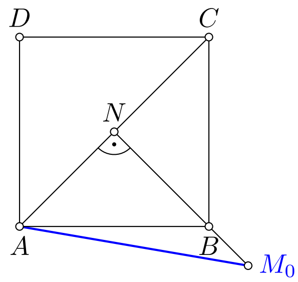
Wenn b die Länge des Rohrs ist, so muss a gleich dem Umfang u des Grundkreises des Zylinders sein.
Der Kreis hat somit den Radius $r = \frac{u}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}$ und den Flächeninhalt $A = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{4\pi}$.
Für das Volumen des zylinderförmigen Rohres wird somit bei $b = \frac{a}{2}$:

$$V = A \cdot h = \frac{a^2}{4\pi} \cdot b = \frac{a^2}{4\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{8\pi}$$

Aufgabe 7.3

Die Abbildung stellt einen Würfel mit der Kantenlänge 50 mm dar.
Konstruieren Sie die wahre Länge der Strecke AM, und geben Sie diese in Millimeter an!





Im Grundriss des Würfels wird die Diagonale AC der Grundfläche in wahrer Größe dargestellt, damit auch die Strecke AN.
Errichtet man in N zu AN eine Senkrechte und trägt auf dieser die Höhe des Würfels (gleich der Grundseitenlänge, gleich der Strecke MN) an, erhält man einen Punkt M_0. Die Strecke AM_0 besitzt dann die gleiche Länge wie die gesuchte Strecke AM.

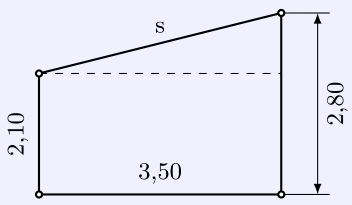
Berechnung: $NM_0 = 50$ mm, $AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 50$ mm.

$AM = \sqrt{NM_0^2 + AN^2} \approx 61{,}2$ mm.

1.11 Abschlussprüfung 1967

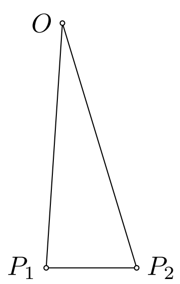
Aufgabe 1
Im NAW wird ein 15,00 m langer Fahrradschuppen gebaut. Die Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt den vereinfachten Querschnitt.

a) Berechnen Sie die Balkenlänge s!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche!
c) Wieviel Quadratmeter Dachpappe müssen angeliefert werden, wenn 12 % des errechneten Flächeninhalts zusätzlich für Überlappung zu veranschlagen sind?



a) s ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 3,50 m und $2{,}80 - 2{,}10 = 0{,}70$ m, d.h. $s = \sqrt{3{,}5^2 + 0{,}7^2} = 3{,}57$m.
b) Die Dachfläche ist 15 m lang, d.h. für den Flächeninhalt $A = 15 \cdot 3{,}57 = 53{,}54$ m^2.
c) Es werden $53{,}54 \cdot 1{,}12 \approx 60$ m^2 Dachpappe benötigt.

Aufgabe 2
Zwei Beobachtungsposten P_1 und P_2 der Nationalen Volksarmee peilen gleichzeitig einen Orientierungspunkt O an. P_1 und P_2 liegen 960 m voneinander entfernt.
Der Winkel OP_1P_2 wird mit 86,2°, der Winkel OP_2P_1 mit 73,5° ermittelt.
Berechnen Sie die Entfernung des Orientierungspunktes O von P_1!



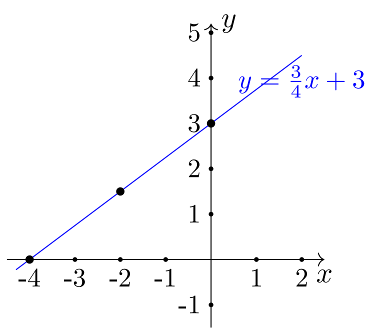
Im Dreieck OP_1P_2 ist die Grundseite 960 m lang und der Winkel bei O gleich $180° - 73{,}5° - 86{,}2° = 20{,}3°$.

Der Seite OP_1 liegt der Winkel 73,5° gegenüber, so dass mit dem Sinussatz $OP_1 = 2653$ m folgt.

Aufgabe 3
Von einer linearen Funktion ist folgende Wertetabelle bekannt (x reell):

x	-4	-2	0
y	0	1,5	3

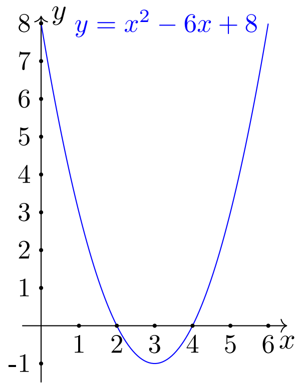
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion!
b) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, die durch die Wertetabelle gegeben ist.
c) Berechnen Sie den Anstiegswinkel, den die Gerade mit der x-Achse bildet!



b) Da die lineare Funktion $y = mx+n$ durch $P(0;3)$ verläuft ist $n = 3$.
Als Anstieg ergibt sich $m = \frac{3}{4}$, so dass die Funktionsgleichung $y = \frac{3}{4}x + 3$ lautet.

c) Für den Anstiegswinkel α gilt $\tan\alpha = m$ und somit $\alpha = 36{,}9°$.

Aufgabe 4
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 6x + 8$; (x reell).
b) Von einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ sind die beiden Lösungen $x_1 = +3$ und $x_2 = -1$ bekannt.
Berechnen Sie p und q!



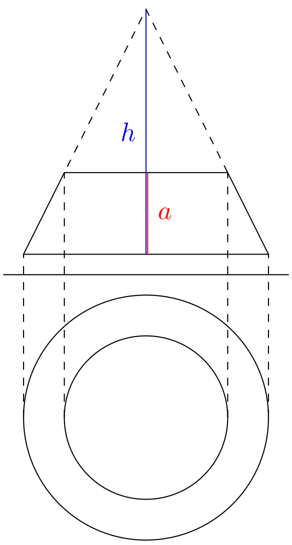
Sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ Lösungen der quadratischen Funktion, so ist $0 = (x - 3)(x + 1)$.
Ausmultiplizieren ergibt $y = x^2 - 2x - 3$, d.h. es sind $p = -2$ und $q = -3$.

Aufgabe 5
a) Berechnen Sie! $(6a + 5b) \cdot \left(\frac{1}{2}a - 2b\right)$.
b) Vereinfachen Sie! $\frac{10^5}{10^6} \cdot 10^3$.

a) $= 3a^2 - 12ab + \frac{5}{2}ab - 10b^2 = 3a^2 - \frac{19}{2}ab - 10b^2$.
b) $= 10^{5-6+3} = 100$.

Aufgabe 6
Ein gerader Kreiskegel ($r = 3{,}0$ cm; $h = 6{,}0$ cm) wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Der Abstand der Ebene von der Grundfläche des Kegels beträgt 2,0 cm.

a) Zeichnen Sie den so entstandenen Kegelstumpf im Grund-Aufriss-Verfahren im Maßstab 1:1!
b) Berechnen Sie die Länge des Radius der Schnittfläche! (Vergleichen Sie auch mit der Zeichnung!)
c) Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfes!



b) Der gesuchte Radius r_s der Schnittfläche ergibt sich aus der in der Abbildung eingezeichneten Strahlensatzfigur.
Ist $a = 2$ cm der Abstand von der Grundfläche, so gilt

$$h : (h - a) = r : r_s$$

Umstellen ergibt $r_s = \frac{r(h-a)}{h} = 2$ cm.

c) Der Kegelstumpf ist die Differenz des großen Kegels und des abgeschnittenen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r_s^2 \cdot (h - a)$$

Mit den gegebenen Werten wird $V = \frac{38}{3}\pi \approx 39{,}8$ cm^3.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Gegeben ist die Gleichung $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1.$
Welche Einschränkungen gelten für a und b?
Lösen Sie dazu auch die Gleichung nach x auf, und machen Sie die Probe!

Die Gleichung ist nur lösbar wenn sowohl $a \neq 0$ als auch $b \neq 0$ gilt.

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{xb}{ab} - \frac{xa}{ab} = \frac{x(b-a)}{ab} = 1 \qquad \text{und damit} \qquad x = \frac{ab}{a-b}$$

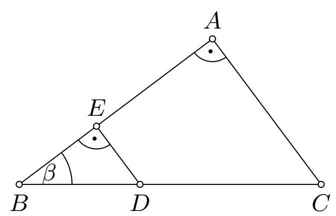
Aufgabe 7.2
Zwei Zahlen a und b verhalten sich wie 5 : 6.
Addiert man zu jeder der beiden Zahlen 3, so verhalten sich die neu entstandenen Zahlen wie 7 : 8.
Ermitteln Sie a und b! (Probe!)

Es ergeben sich die Gleichungen $a : b = 5 : 6$, d.h. $a = \frac{5}{6}b$, und $(a+3) : (b+3) = 7 : 8$. Setzt man die umgestellte erste Gleichung in die zweite ein, wird

$$\frac{\frac{5}{6}b + 3}{b+3} = \frac{7}{8} \quad \to \quad 7b + 21 = \frac{20}{3}b + 24 \quad \to \quad b = 9$$

Damit folgt $a = \frac{15}{2} = 7{,}5$. Die Probe bestätigt das Lösungspaar $(7{,}5; 9)$.

Aufgabe 7.3
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A. Auf der Seite a liege zwischen B und C der Punkt D.
a) Fällen Sie von D das Lot auf die Seite AB, und bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lotes mit E!
b) Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC dem Dreieck EBD ähnlich ist!



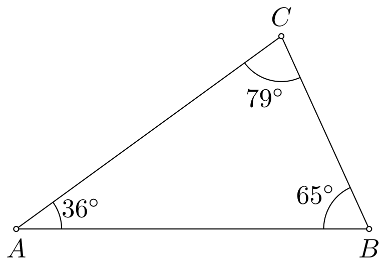
Die beiden Dreiecke ABC und EBD enthalten beide den Winkel β beim Punkt B. Beide Dreiecke enthalten auch einen rechten Winkel.

Nach dem Hauptähnlichkeissatz sind die Dreiecke ABC und EBD zueinander ähnlich, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

1.12 Abschlussprüfung 1968

Aufgabe 1
Von einem Dreieck ABC sind die Längen der drei Seiten gegeben: Strecke $AB = c = 7{,}0$ cm; Strecke $AC = b = 6{,}5$ cm; Strecke $BC = a = 4{,}2$ cm.

a) Konstruieren Sie das Dreieck! Messen Sie die Größe der drei Innenwinkel, und geben Sie Ihre Messergebnisse an!
b) Berechnen Sie die Größe der drei Winkel!



a) Messergebnisse: $\alpha = 36°$, $\beta = 65°$, $\gamma = 79°$

b) Mit Hilfe des Kosinussatzes und Sinussatzes ergeben sich $\alpha = 36{,}0°$, $\beta = 65{,}5°$, $\gamma = 78{,}5°$.

Aufgabe 2
"Kommunismus – das ist Sowjetmacht plus Elektrifizierung des ganzen Landes."(W. I. Lenin)
Im Jahre 1950 wurden in der UdSSR 91 Mrd. kWh Elektroenergie erzeugt. Im Jahre 1965 waren es 509 Mrd. kWh.
Um wieviel Prozent wurde die Erzeugung von Elektroenergie in diesem Zeitraum gesteigert?

$\frac{509}{91} \approx 5{,}59$, d.h. die Erzeugung von Elektroenergie stieg um 459 %.

Aufgabe 3
Berechnen Sie x und y aus dem folgenden linearen Gleichungssystem!

$$3ax + y = 7a \qquad ; \qquad ax + y = 3a \qquad (a \text{ reelle Zahl}, a \neq 0)$$

(Schriftliche Probe!)

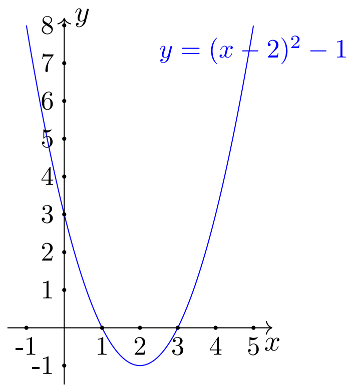
Umstellen der ersten Gleichung nach y ergibt $y = 7a - 3ax$. Einsetzen in die zweite Gleichung

$$ax + 7a - 3ax = 3a \quad \rightarrow \quad -2ax = -4a \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Einsetzen in $y = 7a - 3ax$ ergibt $y = a$.
Die Proben $3a \cdot 2 + a = 7a$ und $a \cdot 2 + a = 3a$ bestätigen das Ergebnis $(2; a)$.

Aufgabe 4
Die Gleichung einer quadratischen Funktion lautet $\qquad y = (x-2)^2 - 1 \qquad (x \text{ reell})$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Bereich $-1 < x < 5$!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!



a) der Scheitelpunkt der Funktion liegt bei $S(2;-1)$, der Graph ist eine Normalparabel

b)

$$0 = x^2 - 4x + 4 - 1 \quad \rightarrow \quad p = -4; q = 3 \quad \rightarrow$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1; x_2 = 3$$

Aufgabe 5

a) Vereinfachen Sie $\sqrt[3]{\frac{a^2}{9}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$, ($a$ ist eine positive reelle Zahl)

b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach t auf! $\quad s = p + p \cdot k \cdot t \qquad (p \neq 0; k \neq 0)$

c) Ermitteln Sie den größten Wert, den die Summe $\frac{1}{2} + \sin x$ annehmen kann!

a) $\quad = \sqrt[3]{\frac{a^2}{9} \cdot \frac{a}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{27}} = \frac{a}{3}$

b) $\quad t = \frac{s-p}{k \cdot k}$

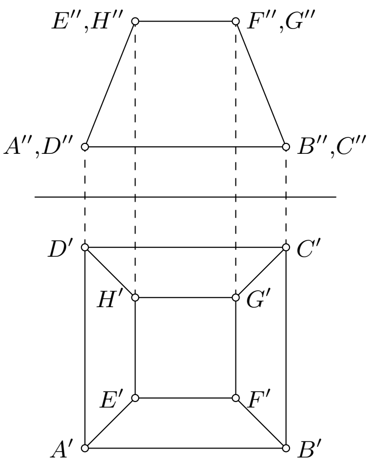
c) $\sin x$ hat den Wertebereich $[-1; 1]$. Damit ist der größte mögliche Wert 1,5.

Aufgabe 6

Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche hat eine Körperhöhe von 4,5 cm. Eine Grundkante ist 8,0 cm lang, eine Kante der Deckfläche ist 4,0 cm lang.

a) Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!

b) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Alle Eckpunkte sind zu benennen.



a) Aus der Formelsammlung entnimmt man, mit der Höhe h, dem Flächeninhalt G der Grundfläche und dem Flächeninhalt D der Deckfläche, für das Volumen

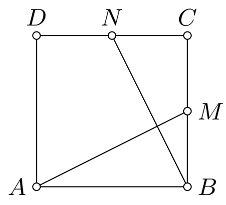
$$V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{G \cdot D} + D\right)$$

Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von 64 cm^2, die Deckfläche von 16 cm^2 und somit $V = 168$ cm^3.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
In einem Quadrat $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Strecke BC und N der Mittelpunkt der Strecke CD.

a) Zeichnen Sie die Figur!
b) Beweisen Sie, dass die Strecke AM und die Strecke BN die gleiche Länge haben!



Die Dreiecke ABM und BCN sind zueinander kongruent, da sie beide einen rechten Winkel enthalten und jeweils zwei Seiten gleich lang sind: $AB = BC$ (Quadratseite) und $BM = CN$ (halbe Quadratseite).

Damit sind auch die beiden verbleibenden Seiten AM und BN gleich lang. w.z.b.w.

Aufgabe 7.2
Für die Bearbeitung von Werkstücken stehen zwei Drehmaschinen zur Verfügung. Die erste Maschine muss zur Bearbeitung 20 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 14 Minuten ein Werkstück aus.
Die zweite, modernere Maschine muss 200 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 2 Minuten ein Werkstück gleicher Art aus.

a) Wieviel Minuten werden bereits bei der Herstellung von 100 Werkstücken eingespart, wenn die modernere Maschine eingesetzt wird!
b) Bestimmen Sie diejenige Stückzahl, zu deren Herstellung beide Maschinen die gleiche Zeit benötigen!

a) Die erste Maschine benötigt für 100 Werkstücke eine Zeit von $t_1 = 20 \text{ min} + 100 \cdot 14 \text{ min} = 1420 \text{ min}$.
Für die zweite Maschine wird $t_2 = 200 \text{ min} + 100 \cdot 2 \text{ min} = 400 \text{ min}$. Somit werden 1020 min eingespart.

b) Ist x die gesuchte Stückzahl wird mit $t_1 = t_2$: $20 + 14x = 200 + 2x$. $x = 15$ erfüllt die Gleichung. Bei 15 Werkstücken benötigen beide Maschinen die gleiche Zeit.

Aufgabe 7.3
In einem Dreieck ist der größte Winkel dreimal so groß wie der kleinste und der andere Winkel zweimal so groß wie der kleinste. Die Seite, die dem größten Winkel gegenüberliegt, ist 4,8 cm lang.

a) Bestimmen Sie die Größe der Winkel! Begründen Sie Ihr Ergebnis!
b) Berechnen Sie die Länge der kleinsten Seite des Dreiecks!

a) Der kleinste Winkel sei ϵ. Dann ergibt sich für die Innenwinkelsumme $180° = 3\epsilon + 2\epsilon + \epsilon = 6\epsilon$. Der kleinste Winkel ist somit $\epsilon = 30°$.

b) Der größte Winkel ist damit $90°$. Mit dem Sinussatz wird für die kleinste Seite x

$$\frac{x}{4{,}8} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = 0{,}5 \qquad \rightarrow \qquad x = 2{,}4 \text{ cm}$$

1.13 Abschlussprüfung 1969

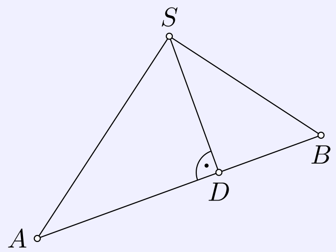
Aufgabe 1
Im Jahre des 20. Geburtstages der DDR soll die Produktion der Landwirtschaft und der Nahrungsgüterwirtschaft um 4,2 % gegenüber 1968 gesteigert werden. Das ist eine Steigerung um 1,49 Milliarden Mark.

a) Berechnen Sie die Produktion für das Jahr 1968! (in Milliarden Mark)
b) Berechnen Sie die geplante Produktion für 1969! (in Milliarden Mark)

a) $\dfrac{4{,}2\%}{100\%} = \dfrac{1{,}49}{x} \qquad \rightarrow \qquad x = 35{,}47$ Milliarden Mark

b) $35{,}47 + 1{,}49 = 36{,}96$ Milliarden Mark.

Aufgabe 2
Das Urlauberschiff "Völkerfreundschaft" fährt auf einem Kurs, der als geradlinig angenommen werden kann. Zur Orientierung wird von den Standorten A und B des Schiffes das Funkfeuer S angepeilt (siehe Abbildung).
Man ermittelt: den Winkel BAS mit 48,4°; den Winkel SBA mit 72,9° und die Strecke AB mit 6,4 sm.

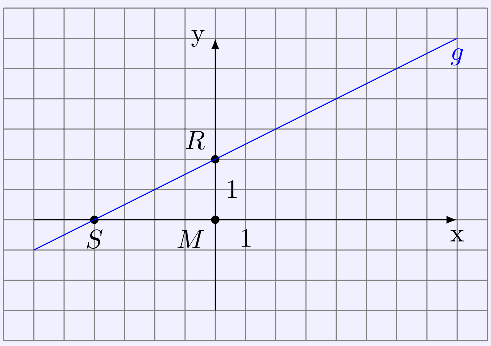


a) Berechnen Sie die Entfernung des Schiffes im Punkt B von S!
b) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung (Strecke DS), in der das Schiff am Funkfeuer S vorbeigefahren ist!

a) Der Winkel bei S im Dreiecke SAB ist gleich $\gamma = 58{,}7°$.
Mit dem Sinussatz ergibt sich dann für die Strecke $BS = 5{,}6$ sm.

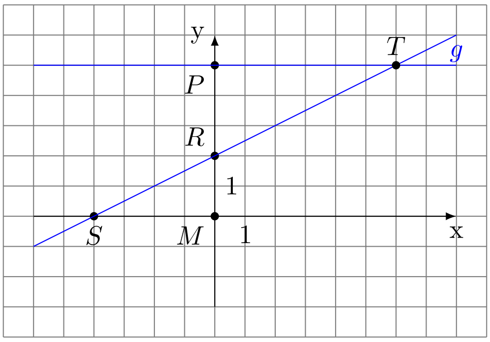
b) Mit dem Innenwinkel β bei B und der Hypotenuse BS des rechtwinkligen Dreiecks BSD wird: $\dfrac{DS}{BS} = \sin\beta \qquad \rightarrow \qquad DS = BS \cdot \sin\beta = 5{,}35$ sm.

Aufgabe 3
Übertragen Sie die Abbildung auf Millimeterpapier!



a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die in der Abbildung durch die Gerade g graphisch dargestellt ist!
b) Zeichnen Sie durch den Punkt $P(0;5)$ die Parallele zur x-Achse! Diese Parallele schneidet die Gerade g im Punkt T.
c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes T an!
d) Beweisen Sie, dass die Dreiecke MRS und RTP ähnlich sind!

a) Ansatz: $y = mx + n$. Die Funktion verläuft durch den Punkt $R(0;2)$, d.h. $n = 2$.
Im Anstiegsdreieck SMR ergibt sich der Anstieg $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, wodurch die gesuchte Funktion $y = \frac{1}{2}x + 2$.



c) Punkt $T(6;5)$
d) In den Dreiecken MRS und RTP sind die Winkel $\angle SRM$ und $\angle TRM$ Scheitelwinkel die R und somit gleich groß.
Ebenso sind die Winkel $\angle MSR$ und $\angle PTR$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke MRS und RTP mit zwei gleichgroßen Innenwinkeln zueinander ähnlich.

Aufgabe 4
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung

$$y = x^2 - 3x - \frac{7}{4} \qquad (x \text{ reell})$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen x_1 und x_2 dieser Funktion!
b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

a) $p = -3; q = -\frac{7}{4}$ ergibt

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \pm 2 \qquad ; \qquad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

b) Quadratische Ergänzung: $y = (x - 1{,}5)^2 - \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = (x - 1{,}5)^2 - 4$
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(1{,}5; -4)$.

Aufgabe 5
a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich! $5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2}$, $(k > 0,\ k \text{ reell})$
b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach a auf! (Die Probe wird nicht verlangt)

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = b \qquad (a \neq 0; b \neq 0; a{,}b \text{ reell})$$

c) Ermitteln Sie die Winkel α, für die gilt: $\sin\alpha = 0{,}9011$, $0° < \alpha < 360°$!

a) $5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2} = 5k - 7k = -2k$.

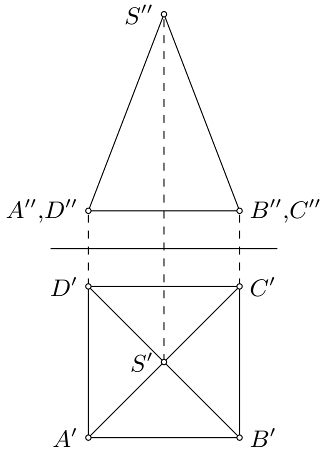
b) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{5a} = \dfrac{5}{5a} - \dfrac{1}{5a} = \dfrac{4}{5a} = b \qquad \to \qquad a = \dfrac{4}{5b}$

c) im Intervall $0° < \alpha < 360°$ gibt es zwei Lösungen $\alpha_1 = 64{,}3°$ und $\alpha_2 = 115{,}7°$.

Aufgabe 6
Eine gerade quadratische Pyramide hat eine Grundkante von 56 mm Länge und eine Körperhöhe von 72 mm Länge.

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Kubikzentimetern!
b) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rissachse!
c) Ermitteln Sie die wahre Länge einer Seitenkante entweder durch Konstruktion oder durch Rechnung, und geben Sie diese in Millimetern an!

a) $V = \frac{1}{3}56^2 \cdot 72 = 75260\ \text{mm}^3 = 75{,}260\ \text{cm}^3$



Die Seitenkante s, die Höhe h der Pyramide und die halbe Diagonale d der Grundfläche bilden ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt: $s^2 = h^2 + \frac{1}{4}d^2$.
Mit $d = \sqrt{2}a$ (a ... Grundkante) ergibt sich

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}2a^2} = 82{,}2\ \text{mm}$$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Eine Kugel mit dem Radius r wird von einer Ebene geschnitten. Diese Ebene hat den Abstand a vom Mittelpunkt M der Kugel.

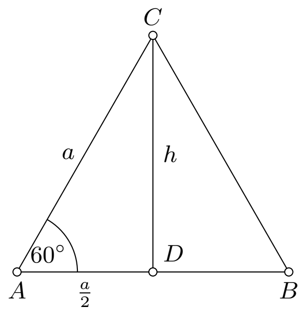
a) Berechnen Sie für $r = 5{,}0$ cm und $a = 3{,}0$ cm das Volumen des kleineren Kugelabschnittes, der durch den Schnitt entsteht! Benutzen Sie die Formelsammlung der Zahlentafel!
b) Geben Sie den Radius r_1, der Schnittfläche an!
c) Ermitteln Sie den Inhalt der Schnittfläche!

a) Formelsammlung: $V = \frac{\pi}{3}(r-a)^2(3r-(r-a))$ ergibt $V \approx 54{,}5\ \text{cm}^2$.

b) Radius r, Abstand a und Schnittkreisradius r_1^2 bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit $r^2 = a^2 + r_1^2$, d.h. $r_1 = \sqrt{r^2 - a^2} = 4{,}0$ cm.

c) Die Schnittfläche hat den Flächeninhalt $A = \pi r_1^2 = 16\pi = 50{,}3\ \text{cm}^2$.

Aufgabe 7.2
a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge a, und zeichnen Sie eine Höhe h ein!
b) Leiten Sie die Gleichung $h = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$ ohne Benutzung trigonometrischer Beziehungen her!
c) Leiten Sie die Beziehung $\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ her!



b) Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Umgestellt wird $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \qquad \rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

c) In diesem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus von α gleich dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse, d.h.

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aufgabe 7.3
Gegeben ist die Gleichung $x^2 - ax + c = 0$. (a, c, x reell)

a) Geben Sie für diese Gleichung die Diskriminante an!
b) Geben Sie die Anzahl aller reellen Lösungen der Gleichung für folgende zwei Fälle an!

$$(1) \quad a = 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{5} \qquad\qquad (2) \quad c = \frac{a^2}{4}$$

Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Diskriminante!

a) Die Diskriminante D ist gleich

$$D = \left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-(-a)}{2}\right)^2 - c = \frac{a^2}{4} - c$$

b) Für $a = 0$ und $c = \frac{1}{5}$ wird $D = -\frac{1}{5} < 0$, d.h. die Gleichung hat keine Lösung.
Für $c = \frac{a^2}{4}$ wird $D = 0$. Damit hat die Gleichung hat genau eine Lösung: $x = \frac{a}{2}$.

1.14 Abschlussprüfung 1970

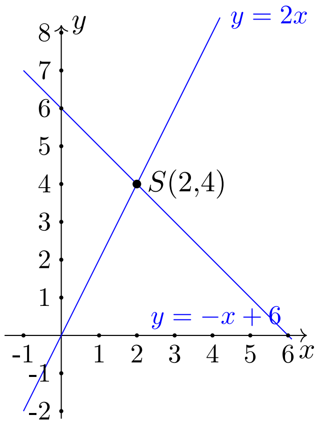
Aufgabe 1
Zwei Klassen planen eine Ferienwanderung. Für gute Leistungen im polytechnischen Unterricht erhalten sie dazu von ihrem Patenbetrieb 360 M.
Dieser Betrag soll entsprechend der Schüleranzahl auf beide Klassen aufgeteilt werden. In der einen Klasse sind 26, in der anderen 22 Schüler.

a) Berechnen Sie den Teilbetrag, den jede Klasse erhält!
b) Wieviel Prozent der Gesamtsumme erhält die Klasse mit 26 Schülern?

a) Je Schüler werden $\frac{360}{22+26} = 7{,}50$ M übergeben. Damit erhält die eine Klasse 195 M, die andere 165 M.
b) Die Klasse mit den 26 Schülern erhält $\frac{26}{48} \cdot 100\% = 54{,}4\%$.

Aufgabe 2
Gegeben sind zwei Funktionen mit den Gleichungen $y = 2x$ und $y = -x + 6$ (x reell).

a) Die Graphen dieser Funktion sind Geraden. Zeichnen Sie die zwei Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)
b) Die beiden Geraden schneiden die x-Achse in den Punkten P und Q. Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQS (in Quadratzentimetern)!

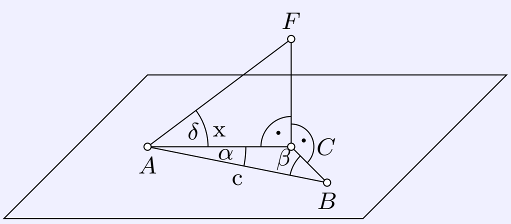


b) $P(0; 0)$ und $Q(6; 0)$

c) Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen ergibt $2x = -x + 6$ mit der Lösung $x = 2$ und somit $y = 6$. Der Schnittpunkt beider Funktionen ist $S(2; 4)$.

d) Die Grundlinie des Dreiecks PQS ist $PQ = 6$ Einheiten. Der Abstand von S über der Grundlinie ergibt die Dreieckshöhe $h = 4$ Einheiten.
Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} PQ \cdot h = 12$ Flächeneinheiten.

Aufgabe 3



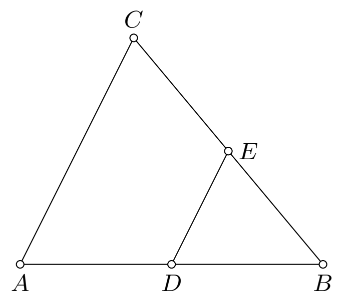
Ein Segelflugzeug soll einen Punkt C der Erdoberfläche in vorgeschriebener Höhe überfliegen. Zur Kontrolle nimmt man an zwei Punkten A und B (in gleicher Höhe wie C) Messungen vor.

a) Man ermittelt (siehe Abbildung):
$AB = c = 210$ m; Winkel $CAB = \alpha = 68°$; Winkel $CBA = \beta = 74°$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke AC!

b) Während sich das Flugzeug senkrecht über C befindet, misst man in A den Erhebungswinkel $\delta = 37°$. Berechnen Sie die Höhe CF des Flugzeuges!

a) Der Innenwinkel bei C im Dreiecke ABC ist $\gamma = 38°$. Mittel Sinussatz wird damit $AC = x = 328$ m.
b) Im rechtwinkligen Dreieck ACF ist $\tan\delta = \frac{FC}{AC}$, d.h. $FC = AC \cdot \tan\delta = 247$ m.

Aufgabe 4
a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC!
Legen Sie auf AB zwischen den Punkten A und B einen Punkt D fest! Zeichnen Sie durch D die Parallele zu AC; den Schnittpunkt mit BC nennen Sie E!
Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABC und DBE einander ähnlich sind!
b) Gegeben ist eine 10 cm lange Strecke RS.
Teilen Sie RS durch Konstruktion im Verhältnis 5 : 2! Der Teilpunkt T soll zwischen R und S liegen.

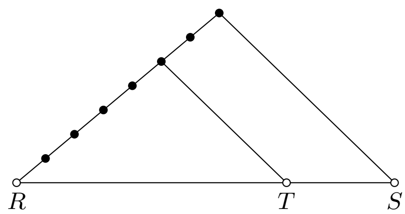


a) Da $DE \parallel AC$ nach Konstruktion ist, liegt eine Strahlensatzfigur mit dem Zentrum bei B vor. Damit gilt

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} \qquad \rightarrow \qquad \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

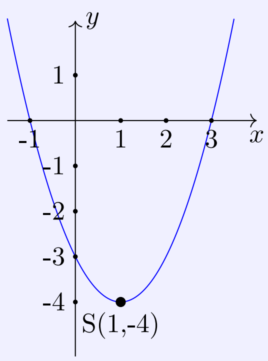
Damit ist ein Seitenverhältnis in den Dreiecken ABC und BDE gleich. Da zusätzlich der eingeschlossene Winkel β zu beiden Dreiecken gehört, sind die Dreiecke ABC und BDE zueinander ähnlich.

b) An den Punkt R wird ein weitere Stahl gezeichnet. Auf diesem werden sieben gleich lange Strecken nacheinander abgetragen.
Der letzte (in der Abbildung schwarze) Punkt wird mit S verbunden. Durch Parallelverschiebung dieser Strecke durch den 5. Punkt erhält man als Schnittpunkt mit RS den gesuchten Punkt T.
Nach dem Strahlensatz teilt T dann RS im Verhältnis 5:2.



Aufgabe 5
a) Eine Quadratische Funktion habe eine Gleichung der Form $y = (x + d)^2 + e$. (x reell)
Geben Sie für den Fall $d = 0$ und $e = 3$ die Scheitelpunktskoordinaten des Graphen der Funktion an!

b) Die in der Abbildung dargestellte Parabel sei der Graph einer weiteren quadratischen Funktion mit einer Gleichung von der Form $y = (x + d)^2 + e$. (x reell)
(1) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme der nebenstehenden Abbildung die Nullstellen x_1 und x_2 dieser Funktion!
(2) Geben Sie die Gleichung dieser speziellen quadratischen Funktion in der Form $y = (x + d)^2 + e$ an!
(3) Überführen Sie nunmehr diese Gleichung der Funktion in eine Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$, und bestimmen Sie hieraus p und q!



a) Die Funktion $y = x^2 + 3$ hat den Scheitelpunkt $S(0; 3)$.

b) (1) Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

(2) Die abgebildete Funktion hat den Scheitelpunkt $S(1;-4)$ und somit die Funktionsgleichung $y=(x-1)^2-4$.
(3) Ausmultiplizieren ergibt $y=x^2-2x-3$, womit $p=-2$ und $q=-3$ gilt.

Aufgabe 6
a) Ermitteln Sie $\cos 120°$!
Bestimmen Sie x in $x=\log_5 125$!
Geben Sie $7\cdot 10^{-3}$ als Dezimalbruch an!

b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach r auf! $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $(r>0)$

c) Vereinfachen Sie die folgende Summe so weit wie möglich!

$$3m(m+0{,}6n-4n)+(m-5n)^2$$

a) $\cos 120° = -0{,}5$; $x=3$ und $7\cdot 10^{-3}=0{,}003$.

b) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \rightarrow \quad r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$

c) $3m(m+0{,}6n-4n)+(m-5n)^2=4m^2-20{,}2mn+25n^2$

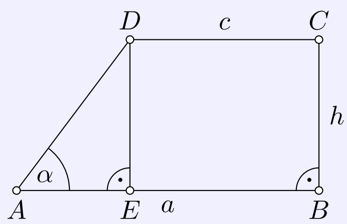
Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
In einem Chemiebetrieb stehen zylindrische Behälter mit 1,20 m Durchmesser und 2,00 m Höhe (Innenmaße).
Überprüfen Sie, ob ein solcher Behälter 3000 kg Natronlauge der Dichte 1,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ fassen kann! (Begründen Sie Ihre Entscheidung!)

Der zylindrische Behälter hat das Volumen $V=\frac{\pi}{4}d^2\cdot h=2{,}26\ \text{m}^3$.
Eine Dichte von 1,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ entspricht der Dichte 1250 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, so dass die Natronlauge ein Volumen von 2,4 m^3 hat.
Damit ist der zylindrische Behälter zu klein.

Aufgabe 7.2
Für den Flächeninhalt A_T des in der Abbildung dargestellten Trapezes $ABCD$ gilt:

$$A_T=\frac{a^2-c^2}{2}\cdot\tan\alpha$$



a) Berechnen Sie A_T für $a=6{,}3$ cm; $c=5{,}5$ cm; $\alpha=75{,}3°$!
b) Drücken Sie h durch die Variablen a, c und α aus (siehe Abbildung)!
c) Leiten Sie die Gleichung $A_T=\dfrac{a^2-c^2}{2}\cdot\tan\alpha$ her, indem Sie von $A_T=\dfrac{a+c}{2}h$ ausgehen und das in b) ermittelte Ergebnis nutzen!

a) $A_T=17{,}99\approx 18\ \text{cm}^3$.

b) Im rechtwinkligen Dreieck AED ist $DE = h$ und $AE = a - c$. Für den Innenwinkel α gilt $\tan\alpha = \frac{DE}{AE}$ und somit

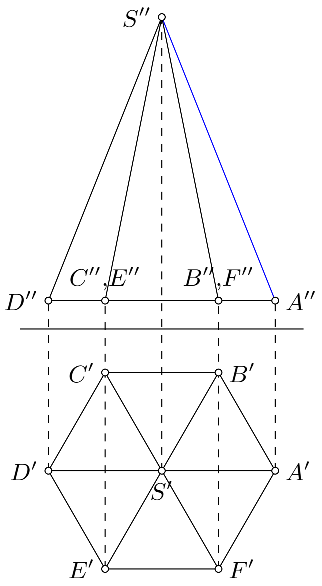
$$\tan\alpha = \frac{h}{c-a} \qquad \rightarrow \qquad h = (a-c)\tan\alpha \qquad ((*))$$

c) Setzt man in $A_T = \frac{a+c}{2}h$ die bei b) gefundene Gleichung (*) ein, wird

$$A_T = \frac{a+c}{2}h = \frac{a+c}{2}(a-c)\tan\alpha = \frac{a^2-c^2}{2}\cdot\tan\alpha$$

Aufgabe 7.3.
Eine gerade Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit einer Seitenlänge von 25 mm; die Körperhöhe beträgt 60 mm.

a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Benennen Sie die Bilder aller Eckpunkte der Pyramide!
b) Ermitteln Sie unter Verwendung Ihrer Zeichnung die wahre Länge einer Seitenkante, und kennzeichnen Sie diese Strecke farbig!
c) Berechnen Sie außerdem die wahre Länge dieser Seitenkante!



b) Auf Grund der Lage der Pyramide im Grundriss wird die Seitenkante AS im Aufriss in der wahren Länge dargestellt.

c) Da die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, ist die Strecke $A'S' = a = 25$ mm. Gemeinsam mit der Höhe h bildet sie ein rechtwinkliges Dreieck dessen Hypotenuse AS ist, d.h.

$$AS = \sqrt{h^2 + A'S'^2} = \sqrt{60^2 + 25^2} = 65 \text{ mm}$$

1.15 Abschlussprüfung 1971

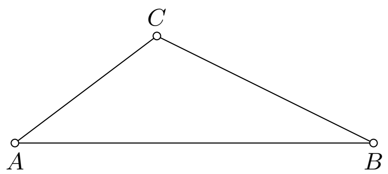
Aufgabe 1
Die Vietnamspende der Schüler der Ho-Chi-Minh-Oberschule in Berlin hatte bis zum Tage der Namensverleihung eine Höhe von 14800 M erreicht. Davon wurden 4200 M durch Altstoffsammlungen erbracht.
Der größere Teilbetrag stammte aus persönlichen Spenden der Schüler sowie aus Spenden der Lehrer, der Eltern, der Patenbrigade usw.

a) Wieviel Prozent der Gesamtsumme stellt der größere Teilbetrag dar?
b) Durch den Erlös eines Vietnam-Basars konnte später der Betrag von 14800 M noch um 6,5 % erhöht werden.
Wie hoch waren die zusätzlichen Einnahmen aus dem Vietnam- Basar?

a) Der größere Beitrag entspricht 10600 M. Das sind $\frac{10600}{14800} \cdot 100\% = 71{,}6\%$.

b) 6,5 % von 14800 M sind 962 M. Die zusätzlichen Einnahmen sind 962 M.

Aufgabe 2
Von einem Dreieck ABC sind gegeben: $AB = c = 95$ mm; $BC = a = 64$ mm; $AC = b = 47$ mm.
a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC!
b) Berechnen Sie den größten Winkel dieses Dreiecks!



b) Der größte Winkel liegt der größten Seite gegenüber. Mit dem Kosinussatz wird $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \quad \rightarrow \quad \gamma = 116{,}9°$$

Aufgabe 3
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{2}x$; (x reell).

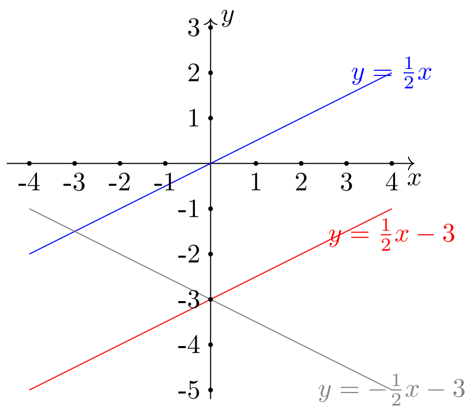
a) Berechnen Sie für diese Funktion die zu den angegebenen x-Werten gehörenden y-Werte! (Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)

x	-4	1	3
y			

b) Zeichnen Sie den Graph g_1 dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
c) Zeichnen Sie die Gerade g_2, die parallel zu g_1 verläuft und durch den Punkt $P_1(0;-3)$ geht! Geben Sie die Gleichung der durch g_2 dargestellten Funktion an!
d) Spiegeln Sie die Gerade g_2 an der y-Achse, und zeichnen Sie das Spiegelbild!

a)

x	-4	1	3
y	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$



c) $y = \frac{1}{2}x - 3$
d) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

Aufgabe 4
Zur optimalen Auslastung des Transportraumes bei der Beförderung von Speisekartoffeln werden durch die Deutsche Reichsbahn Zielzüge eingesetzt. In einem solchen Zug laufen zwei Wagentypen mit einer Ladefähigkeit von 20 t bzw. 24 t Speisekartoffeln.
Der Zug besteht aus 33 Waggons. Er befördert insgesamt 720 t Speisekartoffeln.

Berechnen Sie, wieviel Waggons des jeweiligen Typs in diesem Zielzug eingesetzt sind!

x sei die Anzahl der 20 t-Waggons, y der 24 t-Waggons. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

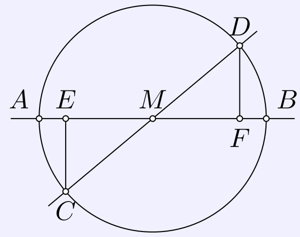
$$x + y = 33 \qquad ; \qquad 20x + 24y = 720$$

Stellt man die erste Gleichung nach y um und setzt diese in die zweite Gleichung ein, wird

$$20x + 24(33 - x) = -4x + 792 = 720 \quad \rightarrow \quad 72 = 4x \quad \rightarrow \quad x = 18$$

Für y folgt damit $y = 15$. Es wurden 18 Waggons mit einer Ladefähigkeit von 20 t und 15 mit 24 t eingesetzt.

Aufgabe 5
Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Sie schneiden den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D.
Von C und D sind die Lote auf die durch A und B verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien E und F (siehe Abbildung).



a) Beweisen Sie, dass die Dreiecke MEC und MFD kongruent sind! (Benutzen Sie dabei einen der Kongruenzsätze!)
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke ME für $MC = 13$ cm und $CE = 5$ cm!

a) Die Dreiecke MEC und MFD haben den Scheitelwinkel bei M gemeinsam. In beiden Dreiecken tritt an den Lotfußpunkten ein rechter Winkel auf. Weiterhin ist $MD = MC = r$.
Nach dem Kongruenzsatz WWS sind beide Dreiecke zueinander kongruent, da die identischen rechten Winkel der jeweils größten Seite gegenüberliegen.

b) Im rechtwinkligen Dreieck MEC wird

$$ME^2 = MC^2 - EC^2 \qquad \rightarrow \qquad ME = \sqrt{MC^2 - EC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

Aufgabe 6
a) Ermitteln Sie für einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 21{,}2$ cm den Umfang und den Flächeninhalt!

b) Formen Sie die folgende Gleichung nach a um! $A = \dfrac{(a+c) \cdot h}{2}$.

c) Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4x + q = 0$.
Ermitteln Sie die Lösungen dieser Gleichung für $q = 3$!
Geben Sie für q eine solche Zahl an, dass die Gleichung eine Doppellösung (zweifache reelle Lösung) hat!

a) Umfang $u = \pi d = 66{,}6$ cm; Flächeninhalt $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 353$ cm^3.

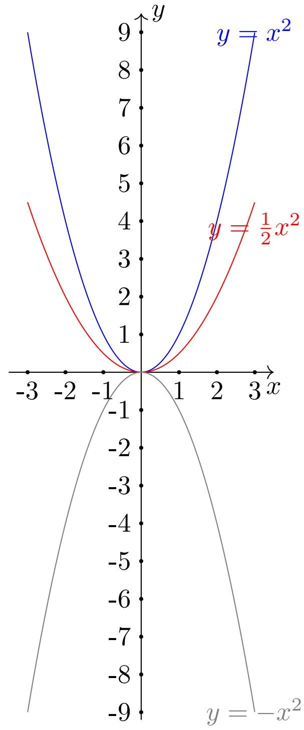
b) $A = \dfrac{(a+c)\cdot h}{2} \qquad \rightarrow \qquad a = \dfrac{2A}{h} - c$

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$ ergibt $p = 4$, $q = 4$ und die Lösungen $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$, d.h. $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$.
Eine Doppellösung tritt auf, wenn die Diskriminante gleich 0 ist, d.h. für $q = 4$.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Koordinateneinheit 1 cm) die Graphen der Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2$ (x reell) für
(1) $a = 1$; (2) $a = \frac{1}{2}$; (3) $a = -1$;
mindestens im Intervall $-3 < x < 3$.

b) Geben Sie den Wertebereich von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2$ $(a < 0)$ an, wenn der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen ist!



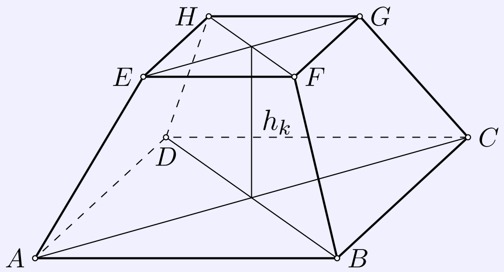
b) Wertebereich $y \in \mathbb{R}; y \leq 0$

Aufgabe 7.2
Gegeben ist eine natürliche Zahl n $(n \neq 0)$.

a) Schreiben Sie in allgemeiner Form die der Zahl n unmittelbar vorangehende natürliche Zahl (Vorgänger) und die unmittelbar folgende natürliche Zahl (Nachfolger) auf!
b) In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n die Zahl 323. Berechnen Sie n mit Hilfe einer Gleichung!
c) Geben Sie eine natürliche Zahl zwischen 400 und 500 an, die sich, ebenfalls als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

a) Vorgänger $n-1$; Nachfolger $n+1$
b) Gleichung $(n-1)(n+1) = 323$ ergibt $n^2 - 1 = 323$, d.h. $n^2 = 324$ und somit $n = 18$.
c) z.B. $21 \cdot 23 = 483$

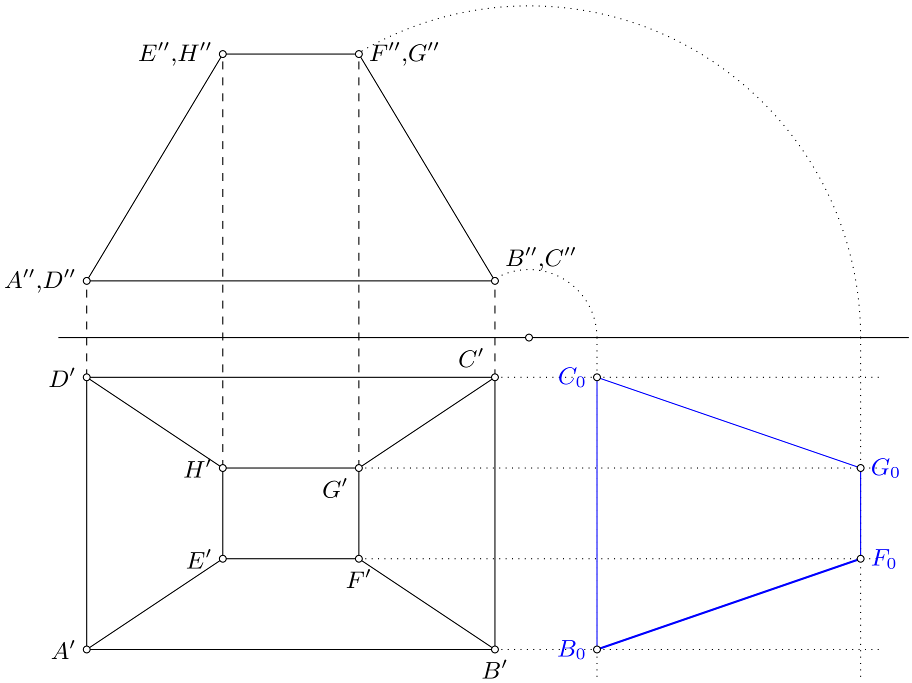
Aufgabe 7.3



Die Abbildung zeigt das Schrägbild eines geraden Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grund- und Deckfläche.

$AB = CD = 72$ mm; $\quad BC = AD = 48$ mm;
$EF = GH = 24$ mm; $\quad FG = EH = 16$ mm;
$h_k = 40$ mm

a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf im Grund-Aufriss-Verfahren unter Verwendung der angegebenen Originalmaße dar! Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rissachse!
b) Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!
c) Konstruieren Sie eine der Seitenflächen des Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und kennzeichnen Sie die wahre Länge einer Seitenkante des Pyramidenstumpfes!



1.16 Abschlussprüfung 1972

Aufgabe 1
Gesucht sind zwei Zahlen. Ihre Summe ist 4. Wird das Dreifache der einen Zahl um das Doppelte der anderen Zahl vermindert, so erhält man 52.
Berechnen Sie die beiden Zahlen! Führen Sie eine Probe durch!

Die zwei Zahlen seien x und y. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 4 \qquad ; \qquad 3x - 2y = 52$$

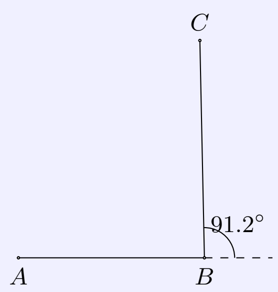
Einsetzen der umgestellten ersten Gleichung ergibt $3x - 2(4 - x) = 5x - 8 = 52$ mit der Lösung $x = 12$ und $y = -8$. Die Zahlen sind -8 und 12.

Aufgabe 2
Die Großküche eines Kraftwerkes gab täglich 600 Gerichte mit Kartoffeln aus, wobei für jedes Gericht 250 g Kartoffeln benötigt wurden.

a) Wieviel Tonnen Kartoffeln mussten eingelagert werden, wenn der Vorrat für genau 30 Tage reichen sollte?
b) Entsprechend den Beschlüssen des VIII. Parteitages der SED werden zur besseren Versorgung der Werktätigen in der Nachtschicht täglich 150 Portionen bereitgestellt.
Für wieviel Tage würde der gleiche Vorrat nun reichen?

a) $600 \cdot 250 \cdot 30 = 4500000$ g $= 4500$ kg $= 4{,}5$ t Kartoffeln.
b) $4500000 : ((600 + 150) \cdot 250) = 24$. Der Vorrate reicht dann 24 Tage.

Aufgabe 3
Am 17. November 1970 landete die sowjetische Station Luna 17 auf dem Mond und setzte das erste automatische Mondfährzeug "Lunochod 1" auf dem Erdtrabanten ab.
Das sowjetische Mondmobil fuhr zuerst von der Landestelle A nach einem Punkt B und legte dabei 82 m zurück. In B drehte es um 91,2° und fuhr 96 m bis zum Haltepunkt C. Die Wege sind als geradlinig anzunehmen (siehe Abbildung).
Berechnen Sie die Entfernung des Mondmobils von seiner Landestelle (Strecke AC)!



Der Winkel $\angle ABC$ ist als Nebenwinkel 88,8° groß. Mit dem Kosinussatz wird dann

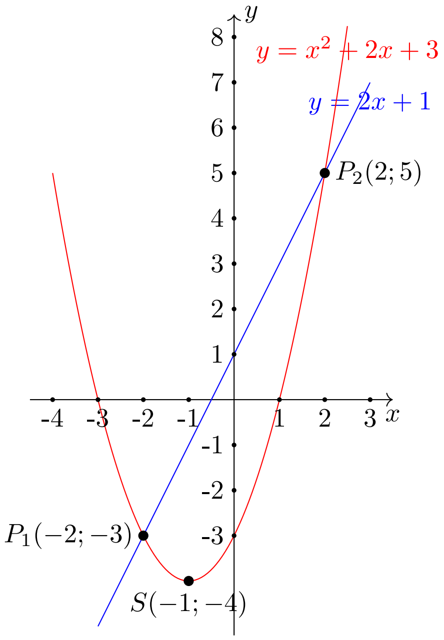
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 88{,}8°} = 124{,}9 \text{ m}$$

Aufgabe 4
Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und $f_2$mit den Gleichungen

$$(1) \quad f_1(x) = y = 2x + 1; \qquad (2) \quad f_2(x) = y = x^2 + 2x–3 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f_1!

c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!



b) $2x + 1 = 0$ ergibt die Nullstellen $x_0 = -\frac{1}{2}$.

c) Scheitelpunktsform mit quadratischer Ergänzung $y = (x+1)^2 - 4$ und somit als Scheitelpunkt $S(-1;-4)$.

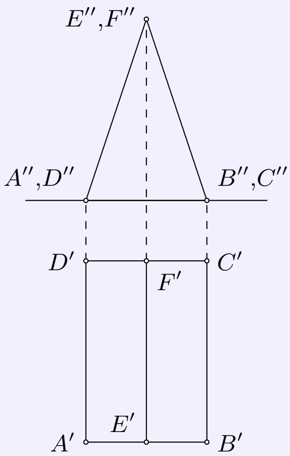
d) $p = 2$ und $q = -3$, d.h. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$ und somit $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

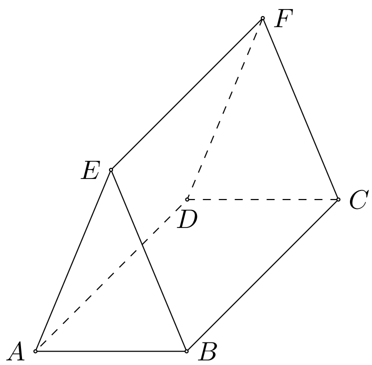
e) $P_1(-2;-3)$, $P_2(2;5)$

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma im Grund- und Aufriss. Die Maße des Prismas sind: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AE = BE = s = 6{,}5$ cm, $BC = l = 14{,}0$ cm

a) Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive, d.h. in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$ dar!
b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas!





a) Mit $AE = 6{,}5$ cm und $AB = 5$ cm ist der Abstand des Punktes E von der Grundkante AB gleich 6 cm.

b) Die Oberfläche setzt sich aus der Grundfläche $ABCD$, mit $5 \cdot 14 = 70$ cm^2, zwei kongruenten Seitenflächen $BCEF$ und $ADFE$, mit $6{,}5 \cdot 14 = 91$ cm^2 und zwei gleichschenkligen Dreiecken ABE und CDF mit der Grundkante 5 cm und der Höhe 6 cm, d.h. $A = 15$ cm^2 zusammen.
Insgesamt ist das ein Oberflächeninhalt von 352 cm^2.

Aufgabe 6
a) Berechnen Sie 12,5 % von 528 ha!

b) Ermitteln Sie alle Winkel x im Intervall $0° < x < 360°$, für die gilt: $\sin x = 0{,}6600$!

c) Das Produkt aus der Differenz zweier verschiedener Zahlen und einer dritten Zahl sei gleich x. Geben Sie diesen mathematischen Sachverhalt in Form einer Gleichung mit Hilfe von Variablen an!

d) Formen Sie die Gleichung für das Volumen des Kegels $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach der Variablen r um!

a) $0{,}125 * 528 = 66$ ha
b) $\alpha_1 = 41{,}3°$ und $\alpha_2 = 138{,}7°$.
c) Die drei Zahlen seien a, b, c. Dann ist $x = (a - b) \cdot c$.
d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Beweisen Sie folgende Aussagen!

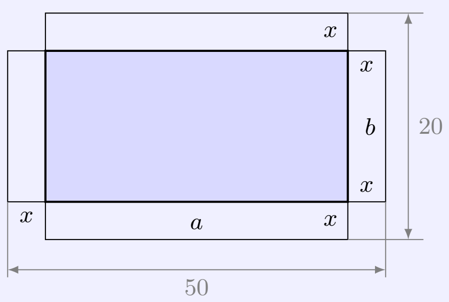
a) Die Summe von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar.
b) Wenn die kleinste von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist deren Summe auch durch 2 teilbar.

a) Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen seien a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$.
Aus ihrer Summe $a+a+1+a+2+a+3+a+4 = 5a+10 = 5(a+2)$ kann eine 5 ausgeklammert werden. Damit ist die Summe durch 5 teilbar.

b) Eine gerade natürliche Zahl kann als $2a$ ($a \in \mathbb{N}$) dargestellt werden. Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind nun $2a$, $2a+1$, $2a+2$, $2a+3$, $2a+4$.
Aus ihrer Summe $2a + 2a + 1 + 2a + 2 + 2a + 3 + 2a + 4 = 10a + 10 = 2(5a + 5)$ kann eine 2 ausgeklammert werden. Damit ist die Summe durch 2 teilbar.

Aufgabe 7.2

Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen 50 cm und 20 cm soll ein oben offener quaderförmiger Kasten entstehen.
Dazu schneidet man an den vier Ecken Quadrate mit der Seitenlänge x cm heraus (siehe Abbildung). Das schraffierte Rechteck mit den Seitenlängen a cm und b cm ist die Grundfläche des Kastens.



a) Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche für $x = 1{,}5$!
b) Wie groß muss x sein, damit der Inhalt der Grundfläche 400 cm^2 beträgt? Geben Sie für diesen Fall a und b an!

a) $A = (50 - 3) \cdot (20 - 3) = 799\text{cm}^2$.

b) Es soll $A = 400 = (50 - 2x)(20 - 2x)$ gelten, d.h. $4x^2 - 140x + 1000 = 400$.
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 30$, wobei die zweite Lösung entfällt, da mehr Material herausgeschnitten würde als existiert. x muss 5 cm groß sein.

Aufgabe 7.3

Gegeben ist die lineare Ungleichung $\frac{8(2x+1)}{5} < 3x + 2$.

a) Lösen Sie diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an!
(1) Die Lösungsmenge L_1 obiger Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
(2) die Lösungsmenge L_2 obiger Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;
(3) die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen.

a) $\frac{8(2x+1)}{5} < 3x + 2 \quad \rightarrow \quad 16x + 8 < 15x + 10 \quad \rightarrow \quad x < 2$

b) (1) $L_1 = \{x|0, 1\}$
(2) $L_2 = \{x| - 3, -2, -1, 0\}$
(3) $M = \{x|0\}$

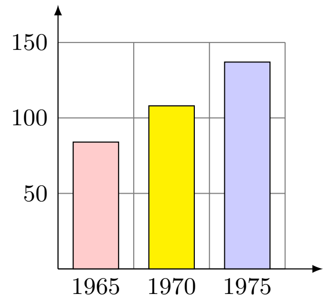
1.17 Abschlussprüfung 1973

Aufgabe 1
Die folgende Tabelle zeigt den erreichten bzw. den geplanten Stand des Nationaleinkommens der DDR in den Jahren 1965, 1970 und 1975.

	in Mrd. Mark	in Prozent
1965		100
1970	108	129
1975	137	

a) Ermitteln Sie das Nationaleinkommen des Jahres 1965 (in Mrd. Mark)!
b) Ermitteln Sie, auf wieviel Prozent das Nationaleinkommen im Jahre 1975 steigen wird (bezogen auf 1965)!
c) Stellen Sie die Prozentsätze in einem Streifendiagramm dar (1 % entspricht 1 mm)!

	in Mrd. Mark	in Prozent
1965	**84**	100
1970	108	129
1975	137	**164**

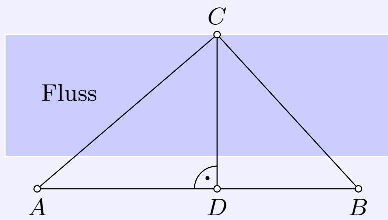


Aufgabe 2
Gegeben ist die Ungleichung $7(3x-2) < 3x+22$ $(x \in \mathbb{R})$
a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt.)
b) Geben Sie die Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

a) $7(3x-2) < 3x+22 \quad \to \quad 21x-14 < 3x+22 \quad \to \quad 18x < 36 \quad \to \quad x < 2$

b) $L = \{x|0, 1\}$

Aufgabe 3
Während der Hans-Beimler-Wettkämpfe erhält eine Gruppe den Auftrag, die Breite eines Flusses zu ermitteln. Dazu steckt sie eine Strecke AB ab, die im Abstand von 5,0 m parallel zum Ufer verläuft.
Von den Punkten A und B aus peilt die Gruppe einen unmittelbar am anderen Ufer liegenden Orientierungspunkt C an (siehe Abbildung).



Es werden folgende Werte ermittelt: $AB = 45{,}0$ m; Winkel $BAC = 42{,}5°$; Winkel $ABC = 67{,}3°$

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke BC!
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke CD!
c) Berechnen Sie die Breite des Flusses! (Runden Sie das Ergebnis auf volle Meter!)

a) Der Winkel bei C hat die Größe 70,2°. Mit dem Sinussatz wird dann $BC = 32{,}3$ m.

b) CD ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck BCD. Mit dem Winkel bei B und das Hypotenuse BC wird $CD = \sin 67{,}3° \cdot BC = 29{,}8$ m.

c) Die Breite des Flusses ist dann 24,8 m.

Aufgabe 4
Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 6. Das Produkt dieser beiden Zahlen beträgt 216.
Ermitteln Sie diese beiden natürlichen Zahlen!

Die zwei natürlichen Zahlen seien a und b. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

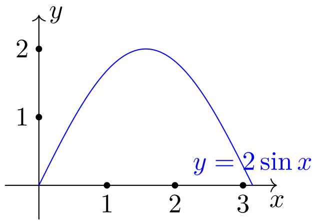
$$a - b = 6 \qquad ; \qquad a \cdot b = 216$$

Umstellen der ersten Gleichung und Einsetzen in die zweite ergibt $(6+b)b = 6b + b^2 = 216$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = 12$ und $b_2 = -18$. b_2 entfällt, da es keine natürliche Zahl ist. Für $b = 12$ folgt $a = 18$.
Die gesuchten Zahlen sind 12 und 18.

Aufgabe 5
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreisringes mit den Durchmessern $d_1 = 4{,}5$ cm und $d_2 = 3{,}8$ cm!
b) Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y = x^3$; $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für diese Funktion die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte! (Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)

x	2	3	-1	
y				125

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $0 < x < \pi$!
Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!
d) Geben Sie den Wert für die Variable a an, für den der Term $\dfrac{5}{6-3a}$ nicht definiert ist! (Antwortsatz!)



a) $A = \frac{\pi}{4}d_1^2 - \frac{\pi}{4}d_2^2 = 4{,}56\ \text{cm}^2$

b)

x	2	3	-1	**5**
y	**8**	**27**	**-1**	125

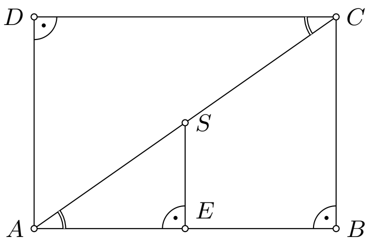
c) siehe Abbildung, Wertebereich $y \in \mathbb{R}; -2 \leq y \leq 2$

d) Der Zähler wird für $a = 2$ gleich Null, d.h. der Term ist für $a = 2$ nicht definiert.

Aufgabe 6
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit folgenden Stücken:
$AB = c = 5{,}0$ cm; $BC = a = 3{,}5$ cm; Winkel $ABC = \alpha = 90°$.

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!
b) Zeichnen Sie durch die Eckpunkte A und C die Parallelen zu den Gegenseiten! Ihr Schnittpunkt sei D. Es entsteht das Rechteck $ABCD$.
Fällen Sie vom Mittelpunkt S der Strecke AC das Lot auf AB! Sein Fußpunkt sei E.

c) Beweisen Sie, dass das Dreieck AES dem Dreieck ACD ähnlich ist! Geben Sie den dabei benutzten Ähnlichkeitssatz an!

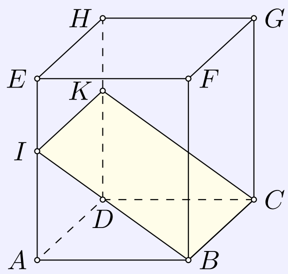


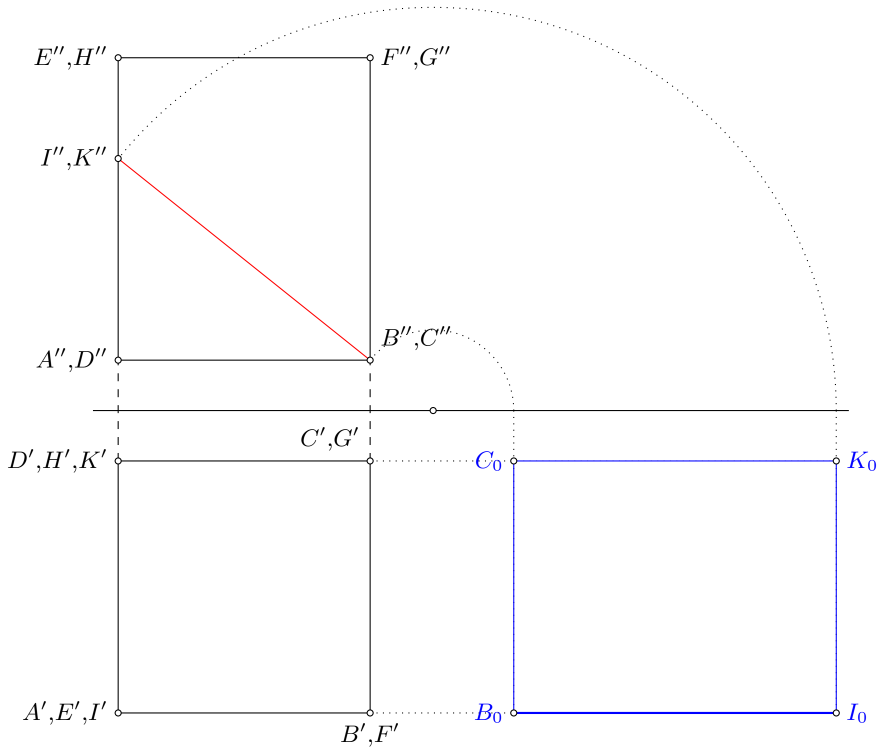
Die Winkel BAC und ACD sind als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß. Ebenso sind die Winkel AES und BDA als rechte Winkel gleich groß.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke AES und ACD zueinander ähnlich da sie zwei Paar gleich großer Winkel besitzen.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.2
Gegeben ist ein gerades Prisma $ABCDEFGH$ mit quadratischer Grundfläche, das von einer Ebene in den Punkten I, B, C, K geschnitten wird (siehe Abbildung).
$AB = BC = 5{,}0$ cm; $AE = DH = 6{,}0$ cm; $AI = DK = 4{,}0$ cm

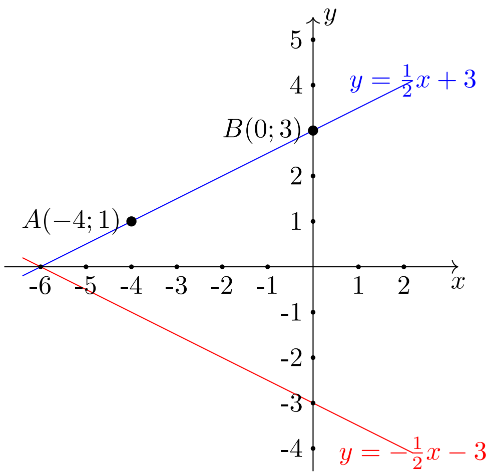
a) Stellen Sie das Prisma einschließlich der Schnittfigur in Zweitafelprojektion dar!
b) Berechnen Sie die Länge der Seite IB der Schnittfigur!
c) Zeichnen Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!





b) $IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = 6{,}4$ cm.

Aufgabe 7.1
a) Zeichnen Sie die Punkte $A(-4;1)$ und $B(0;3)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Zeichnen Sie durch diese beiden Punkte die Gerade g! Geben Sie die Gleichung der durch g dargestellten Funktion an!
c) Spiegeln Sie die Gerade g an der Abszissenachse, und bezeichnen Sie das Spiegelbild mit g'!
d) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die beiden Geraden g' und g einschließen!



b) n ist 3, da die Gerade durch B verläuft. Im Anstiegsdreieck ergibt sich $m = 2$, d.h. $g : y = \frac{1}{2}x + 3$

c) bei der Spiegelung an der x-Achse werden m und n negativ, d.h. $g' : y = -\frac{1}{2}x - 3$

d) der Schnittwinkel ist gleich dem Doppelten Anstiegswinkel α von g. Es ist $m = \frac{1}{2} = \tan\alpha$, d.h. $\alpha = 26{,}6°$.
Die Geraden schneiden sich unter dem Winkel 53,2°.

Aufgabe 7.3
Ein zylinderförmiges Werkstück aus Stahl ($d = h = 75$ mm, $\rho = 7{,}8g/cm^3$) wird so bearbeitet, dass daraus eine Kugel entsteht, die den gleichen Durchmesser wie der Zylinder hat.
Berechnen Sie die Masse des Abfalls, der bei dieser Bearbeitung entsteht! Geben Sie die Masse in Gramm an!

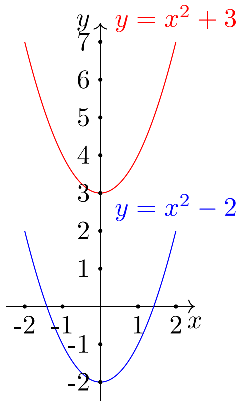
Volumen des Zylinders: $V_Z = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h = 331300 \text{ mm}^3$
Volumen der Kugel: $V_K = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = 220900 \text{ mm}^3$

Die Differenz der Volumina ist $\Delta V = 109400 \text{ mm}^3 = 109{,}4 \text{ cm}^3$. Dieser Abfall hat eine Masse von $\Delta V \cdot \rho = 853$ g.

1.18 Abschlussprüfung 1974

Aufgabe 1
Durch die Gleichung $y = x^2 - 2$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Parabel.

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel!
c) Verschieben Sie die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $x_S = 0$, $y_S = 3$ hat! (Zeichnen Sie die verschobene Parabel in dasselbe Koordinatensystem, das Sie bei Teilaufgabe b) benutzt haben!)
d) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph durch die Verschiebung entstanden ist!

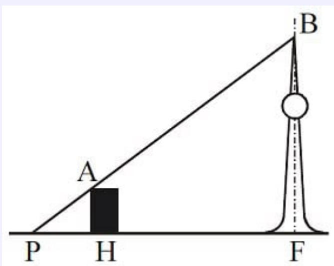


a) Funktionsgleichung gleich 0 setzen: $x^2 - 2 = 0$ ergibt $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$.

b) Scheitelpunkt $S(0; -2)$, Zeichnung links

c) Funktionsgleichung $y = x^2 + 3$

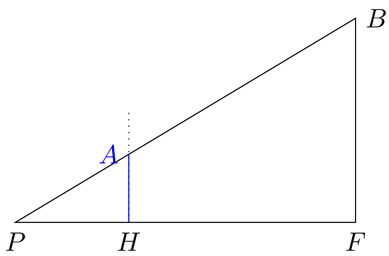
Aufgabe 2



nicht maßstäblich

Im Stadtzentrum Berlins erscheint von einem Punkt P aus der Fernsehturm hinter dem Hotel "Stadt Berlin" so, dass die Punkte P, A und B auf einer Geraden liegen (siehe Abbildung). Die Längen der Strecken betragen näherungsweise:
$PH = 200$ m, $PF = 600$ m, $FB = 360$ m.

a) Ermitteln Sie durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10000 die Höhe HA des Hotels! Geben Sie das Ergebnis in Metern an!
b) Ermitteln Sie die Höhe des Hotels auch rechnerisch! Formulieren Sie einen Antwortsatz!



a) Mit dem Maßstab ergibt sich $PH = 2$ cm, $PF = 6$ cm, $FB = 3{,}6$ cm.
siehe Skizze: Der Schnittpunkt der Senkrechten in H mit PB ist A. Durch Messung ergibt sich $HA \approx 1.2$ cm, d.h. das Hotel ist 120 m hoch.

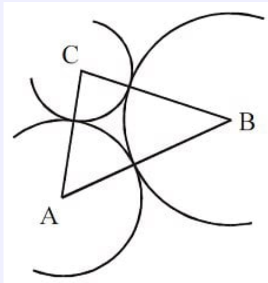
b) Die Dreiecke PHA und PFB sind ähnlich. Damit gilt nach dem Strahlensatz $\frac{PH}{PF} = \frac{HA}{FB}$, also

$$HA = \frac{PH \cdot FB}{PF} = \frac{200 \cdot 360}{600} = 120 \text{ m}$$

Das Hotel ist 120 m hoch.

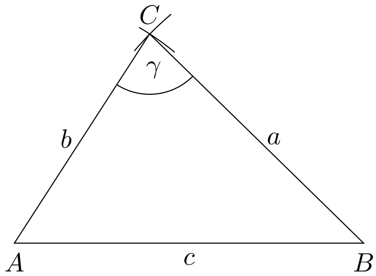
Aufgabe 3
Drei Kreise berühren einander von außen. Ihre Mittelpunkte A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks (siehe Abbildung).
Der Radius des Kreises um A sei $r_1 = 3{,}0$ cm. Der Radius des Kreises um B sei $r_2 = 4{,}0$ cm. Der Radius des Kreises um C sei $r_3 = 2{,}0$ cm.

a) Ermitteln Sie die Längen der Seiten $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ des Dreiecks!
b) Konstruieren Sie das Dreieck ABC!
c) Berechnen Sie den Winkel $ACB = \gamma$!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!



nicht maßstäblich

a) Für die Abstände der Kreismittelpunkte wird: $AB = c = r_1 + r_2 = 7$ cm, $BC = a = r_2 + r_3 = 6$ cm, $AC = b = r_1 + r_3 = 5$ cm.



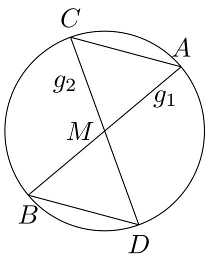
b) siehe Zeichnung
c) Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, d.h.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0{,}2 \quad , \text{d.h. } \gamma = 78{,}4°$$

d) Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 14{,}7\text{cm}^2$

Aufgabe 4
Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden g_1 und g_2 die nicht senkrecht aufeinander stehen. Die Gerade g_1 schneidet den Kreis in den Punkten A und B. Die Gerade g_2 schneidet den Kreis in den Punkten C und D. Verbindet man A mit C und B mit D, so entstehen die Dreiecke MAC und MBD.

a) Entwerfen Sie eine Skizze!
b) Beweisen Sie mit Hilfe eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke MAC und MBD kongruent sind! (Geben Sie den dabei benutzten Kongruenzsatz an!)



b) In den Dreiecken MAC und MBD sind vier Seiten gleich lang: $MA = MB = MC = MD = r$, wobei r der Kreisradius ist. Die Winkel $\angle AMC$ und $\angle BMD$ sind kongruent, da sie Scheitelwinkel der Geraden g_1 und g_2 am Punkt M sind.
Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die beiden Dreiecke zueinander kongruent.

Aufgabe 5
Gegeben sind die folgenden Ungleichungen:

$$5x + 5 < x + 25 \qquad x \in \mathbb{P} \tag{1}$$
$$12x - (x - 1) > 5x + 13 \qquad x \in \mathbb{P} \tag{2}$$

a) Lösen Sie die Ungleichung (1)! Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

b) Lösen Sie die Ungleichung (2)! Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die einstellige natürliche Zahlen sind!
c) Die unter a) angegebenen natürlichen Zahlen bilden die Menge M_1, die unter b) angegebenen natürlichen Zahlen die Menge M_2. Geben Sie den Durchschnitt von M_1 und M_2 durch Aufzählen der Elemente an! (Proben werden nicht verlangt.)

a) $5x + 5 < x + 25$ wird durch äquivalentes Umformen zu $4x < 20$ und $x < 5$.
Lösungsmenge $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $12x - (x - 1) > 5x + 13$ wird durch äquivalentes Umformen zu $11x + 1 > 5x + 13$ und weiter $6x > 12$ und $x > 2$.
Lösungsmenge $L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $M_1 \cap M_2 = \{3, 4\}$.

Aufgabe 6
a) Berechnen Sie 17 % von 83!

b) Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! $\sqrt[3]{a^6 b^9}$ $(a \geq 0, b \geq 0, a,b \in \mathbb{P})$

c) Ordnen Sie die Zahlen 1,2525...; 1,2500 und 1,25 nach der Größe! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

d) Durch die Gleichung $y = 3x$–1 ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Gerade g. Geben Sie die Gleichung einer anderen Funktion an, deren Graph parallel zu der Geraden g verläuft!

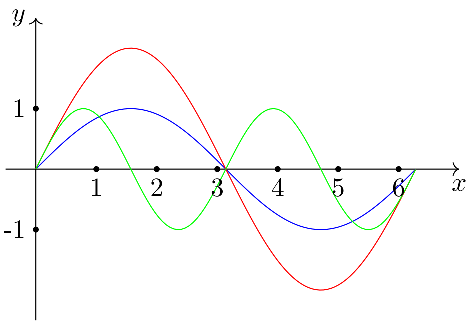
a) 14,1
b) $\sqrt[3]{a^6 b^9} = a^2 b^3$
c) $1{,}25 = 1{,}2500 < 1{,}2525$
d) $y = 3x + m$, wobei m irgendeine reelle Zahl verschieden von 1 ist.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Gegeben sind Funktionen durch die folgenden Gleichungen:

$$y = \sin x \qquad ; \qquad y = 2 \sin x \qquad ; \qquad y = \sin 2x.$$

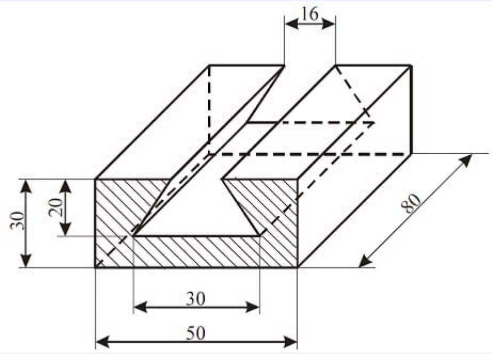
a) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen im Intervall $0 < x < 2\pi$! Benutzen Sie dabei ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem, und kennzeichnen Sie jeden Graph durch die entsprechende Gleichung!
b) Geben Sie für $y = 2 \sin x$ alle im angegebenen Intervall auftretenden Nullstellen an!
c) Geben Sie für $y = \sin 2x$ die kleinste Periode an!



a) rot ... $y = \sin x$,
blau ... $y = 2 \sin x$,
grün ... $y = \sin 2x$.

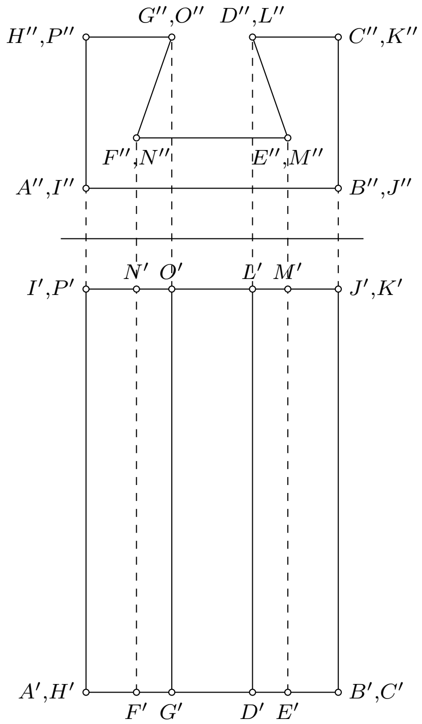
b) $y = 2\sin x$ hat im Intervall $[0; 2\pi]$ die Nullstellen $x_N \in \{0, \pi, 2\pi\}$
c) Die kleinste Periode von $y = \sin 2x$ ist $p = \pi$.

Aufgabe 7.2



Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schrägbild eines Werkstückes.

a) Stellen Sie dieses Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! (Benennen der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)
b) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche!



a)

b) Grundfläche $ABCDEFGH$ ergibt sich als Differenz des Rechtecks $ABCH$ und des Trapezes $DEFG$:

Rechteck: $A_R = a \cdot b = 50 \cdot 30 = 1500 \text{ mm}^2$
Trapez: $A_T = \frac{a+c}{2} h = \frac{16+30}{2} \cdot 20 = 460 \text{ mm}^2$
Grundfläche: $A = A_R - A_T = 1040 \text{ mm}^2$

Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von 1040 mm^2.

Aufgabe 7.3
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser Zahlen durch 4 teilbar.

Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die erste gerade ist, seien $2a, 2a+1, 2a+2$. Ihr Produkt ist

$$p = 2a \cdot (2a+1) \cdot (2a+2) = 2 \cdot a \cdot (2a+1) \cdot 2 \cdot (a+1) = 4 \cdot a \cdot (2a+1) \cdot (a+1)$$

Der letzte Term ist sicher durch 4 teilbar, also auch das Produkt. w.z.b.w.

1.19 Abschlussprüfung 1975

Aufgabe 1
Im Jahre 1973 wurden im Rahmen des Wohnungsbauprogramms in der DDR 80700 Neubauwohnungen geschaffen.
a) Davon wurden 60 % an Arbeiterfamilien vergeben. Wieviel Wohnungen waren das?

b) Im Jahre 1972 wurden 69500 Neubauwohnungen geschaffen. Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Anzahl der 1973 gebauten Wohnungen höher lag als die der 1972 gebauten!

a) $0{,}6 \cdot 80700 = 48420$. 48420 Wohnungen wurden an Arbeiterfamilien vergeben.

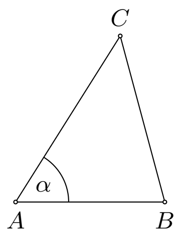
b) $\frac{80700}{69500} = 1{,}161 = 116{,}1\%$. Der Neubau stieg um 16,1%.

Aufgabe 2
Von einem Dreieck ABC sind gegeben: $AB = c = 16{,}4$ cm; $BC = a = 19{,}0$ cm; Winkel $BAC = \alpha = 58{,}0°$.

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC im Maßstab 1 : 2!

b) Berechnen Sie, wie groß die beiden anderen Innenwinkel sind!

c) Berechnen Sie die Länge der Seite $AC = b$ des gegebenen Dreiecks!

a) 

b) Sinussatz $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} = 47{,}1°$
Winkelsummensatz $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 74{,}9°$

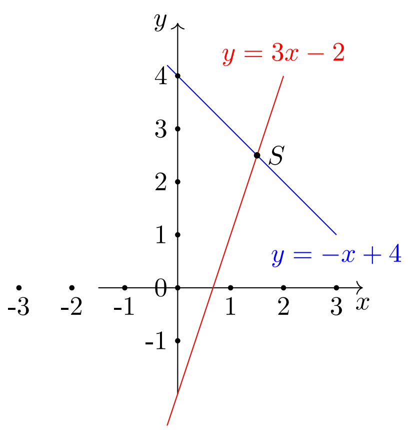
c) Kosinussatz $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma = 21{,}6$
Die Seite b hat eine Länge von 21,6 cm.

Aufgabe 3
Gegeben sind die linearen Funktionen mit den Gleichungen

$$(I) \quad y = 3x – 2 \qquad ; \qquad (II) \quad x + y = 4 \quad (x \in \mathbb{P})$$

a) Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes ihrer Graphen an!

b) Betrachten Sie die beiden gegebenen Gleichungen als Gleichungssystem, und lösen Sie es rechnerisch!



a) Schnittpunkt $S(1{,}5; 2{,}5)$

b)

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ y = 4 - x \end{array}\right\} \to$$

$$\to 3x - 2 = 4 - x \to x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$$

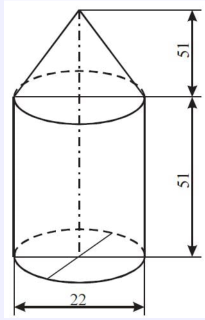
$L = \{(x,y)|(1{,}5; 2{,}5)\}$

Aufgabe 4

Ein Werkstück besteht aus einem zylinderförmigen und einem kegelförmigen Teil (siehe Abbildung).
a) Berechnen Sie sein Volumen, und geben Sie es in Kubikzentimetern an!

b) Das Werkstück ist aus Stahl gefertigt ($\rho = 7{,}80$ g/cm^3). Berechnen Sie die Masse des Werkstücks!

Zeichnung nicht maßstäblich, alle Maßangaben in mm



a) Zylindervolumen: $r = 11$ mm, $h = 51$ mm; $V = \pi r^2 h = 19390$ mm$^3 = 19{,}4$ cm^3

Kegelvolumen: $r = 11$ mm, $h = 51$ mm; $V = \frac{\pi}{3} r^2 h = 6{,}5$ cm^3

Gesamtvolumen: $V = 25{,}9$ cm^3

Masse: $m = \rho \cdot V \approx 202{,}2$ g.

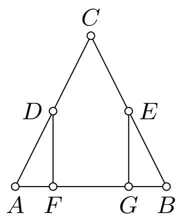
Aufgabe 5

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ sei D, der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei E.

a) Zeichnen Sie diese Figur, und benennen Sie alle Punkte!

b) Zeichnen Sie das Lot von D auf $\overline{AB}$. Der Fußpunkt sei F. Zeichnen Sie das Lot von E auf $\overline{AB}$! Der Fußpunkt sei G.

c) Beweisen Sie unter Verwendung eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke AFD und BGE kongruent sind!



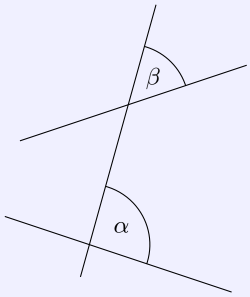
a,b) siehe Zeichnung
c) Das das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind die Innenwinkel bei A und B gleich groß. Diese Winkel sind Innenwinkel der Dreiecke AFD und BGE. Diese Dreiecke sind auch rechtwinklig, durch die Lote bei F und G. Wenn zwei Winkel gleich groß sind, dann ist auch der dritte, d.h. die Innenwinkel bei D und E sind gleich groß.
Außerdem sind die Strecken AD und BE gleich lang, da sie halb so groß wie die gleichlangen Schenkel des Dreiecks ABC.
Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke AFD und BGE zueinander kongruent.

Aufgabe 6

a) Vereinfachen Sie den Term $(m^2 n^5)^3$ so weit wie möglich!

b) Schreiben Sie die Zahlen 628000000 und 0,0037 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen, d. h. in der Form $a \cdot 10^n$! Dabei soll der Faktor a jeweils zwischen 1 und 10 liegen.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $y = \sin \frac{x}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$ im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$.



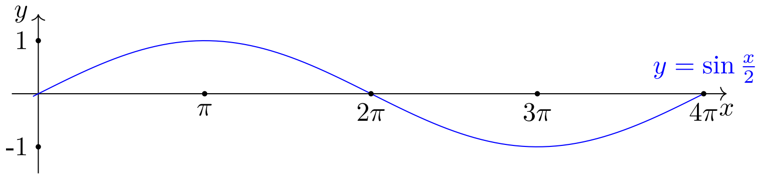
d) Nebenstehende Abbildung zeigt zwei beliebige Geraden e und f, die von einer Geraden g geschnitten werden.
Wie müssen die Geraden e und f zueinander liegen, damit die Winkel α und β kongruent sind?

a) $(m^2n^5)^3 = m^6n^{15}$

b) $628000000 = 6{,}28 \cdot 10^8$; $0{,}0037 = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$

d) e und f müssen parallel sein, da α und β dann als Scheitelwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß sind.

c)



Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Gegeben ist die Ungleichung $2x - (8–x) < 8(2x + 3) - 5x \quad (x \in \mathbb{R})$
a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt)

b) L sei die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung. Geben Sie für jede der sechs Zahlen

$$–8; \quad 3; \quad 0; \quad -\frac{1}{2}; \quad 4; \quad 5{,}2$$

an, ob sie zur Lösungsmenge L gehört oder nicht!

$$\begin{aligned} 2x - (8–x) &< 8(2x + 3) - 5x \\ 2x - 8 + x &< 16x + 24 - 5x \\ 3x - 8 &< 11x + 24 \\ -32 &< 8x \\ x &> -4 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} | x > -4\}$
zur Lösungsmenge gehören: 3; 0; $-\frac{1}{2}$; 4; 5,2.

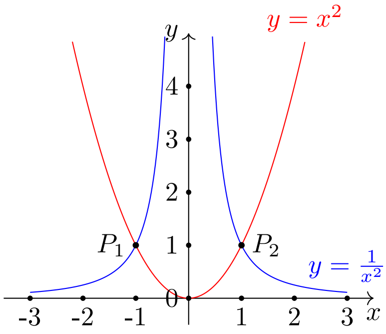
Aufgabe 7.2
Durch $y = \dfrac{1}{x^2}$, $(x \in \mathbb{R}; x \neq 0)$ ist eine Funktion gegeben.
a) Berechnen Sie deren Funktionswerte y für die in der Tabelle vorgegebenen Argumente x. Doppelbrüche sind in gemeine Brüche umzuformen.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+\frac{5}{2}$
y							

b) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

c) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Funktion $y = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$!

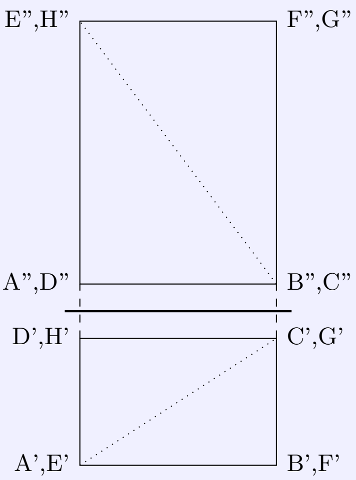
d) Geben Sie die Koordinaten derjenigen Punkte an, die sowohl zum Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ als auch zu dem der Funktion $y = x^2$ gehören!



a)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+\frac{5}{2}$
y	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	4	$\frac{4}{25}$

d) gemeinsame Punkte $P_1(-1{,}1)$, $P_2(1{,}1)$



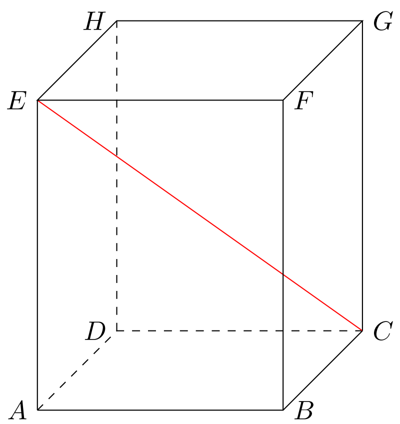
Aufgabe 7.3
Die Abbildung zeigt einen Körper in senkrechter Zweitafelprojektion. Die punktierten Linien stellen eine seiner Raumdiagonalen dar. Dabei sind $AB = 6{,}5$ cm; $BC = 4{,}2$ cm; $BF = 8{,}2$ cm.

a) Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive dar, und bezeichnen Sie alle Eckpunkte!

b) Zeichnen Sie die vorgegebene Raumdiagonale ein!

c) Berechnen Sie die Länge dieser Raumdiagonalen!

Skizze nicht maßstäblich, alle Maßangaben in mm



c) Die Raumdiagonale ED ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ACE. Die Katheten von $\triangle ACE$ sind AE und AC. AC ist Hypotenuse im Dreieck ABC.

$\overline{AE} = 8{,}2$ cm
$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = 7{,}7$ cm
$\overline{ED} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AC}^2} = 11{,}3$ cm
Die Raumdiagonale ist 11,3 cm lang.

1.20 Abschlussprüfung 1976

Aufgabe 1
Im Volkswirtschaftsplan der DDR wurden im Jahre 1975 für Investitionen insgesamt 39,6 Milliarden Mark vorgesehen, davon 18,9 Milliarden Mark für Investitionen in der Industrie.

a) Berechnen Sie, wieviel Prozent der Investitionen für die Industrie bereitgestellt wurden!

b) Der Gesamtbetrag von 39,6 Milliarden Mark für 1975 stellt gegenüber dem für 1974 aufgewendeten Betrag eine Steigerung auf 104,4 % dar.
Berechnen Sie, wieviel Milliarden Mark die Investitionen im Jahre 1974 betrugen!

a) $\frac{18{,}9}{39{,}6} \cdot 100\% = 47{,}7\%$. Es wurden 47,7 % der Investitionen für die Industrie bereitgestellt.

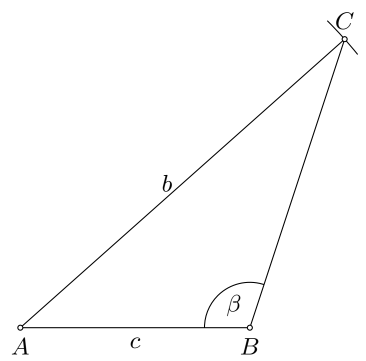
b) $\frac{39{,}6}{1{,}044} = 37{,}9$. 1974 wurden 37,9 Milliarden Mark investiert.

Aufgabe 2
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:
$\overline{AB} = c = 4{,}6$ cm; $\overline{AC} = b = 8{,}7$ cm; Winkel $CBA = \beta = 108{,}2°$.

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC!

b) Berechnen Sie die Größe der Winkel $\gamma =$ Winkel ACB und $\alpha =$ Winkel BAC!

c) Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{BC} = a$!



b) Sinussatz $\sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\beta$; $\gamma = 30{,}2°$
Innenwinkelsumme $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 41{,}6°$.

c) Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$; $a = 6{,}1$ cm.

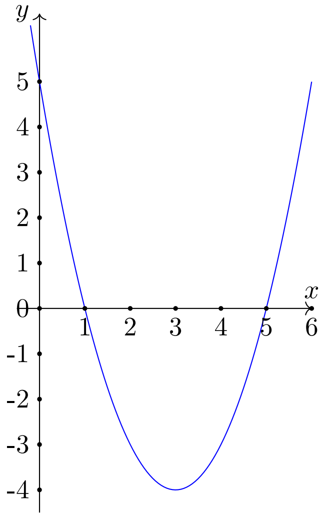
Aufgabe 3
a) Durch die Gleichung $y = x^2 - 6x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion bestimmt.
- Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
- Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an!
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 6$!

b) Durch die Gleichung $y = x^2 - 6x + q$ ($x \in \mathbb{R}$) sind Funktionen gegeben.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen q, die man in die Funktionsgleichung einsetzen kann, so dass die damit bestimmten Funktionen keine Nullstellen haben!

a) Nullstellen mittels p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
Mit $p = -6$ und $q = 5$ wird

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 5} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

also $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.



Für den Scheitelpunkt wird die Scheitelpunktsform der Gleichung mittels quadratische Ergänzung gefordert:

$$y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$$

Koordinaten des Scheitelpunktes $S(3, -4)$

b) Damit die Funktion keine Nullstelle hat, muss die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right) - q$ kleiner als Null sein. D.h.

$$D = \left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - q = 3^2 - q < 0$$

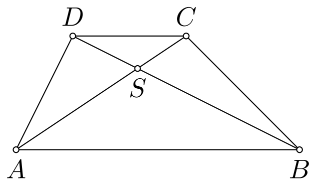
Für $q > 9$ hat die Funktion keine Nullstelle.

Aufgabe 4
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Die Diagonalen AC und BD schneiden einander im Punkt S.

a) Zeichnen Sie ein solches Trapez und seine Diagonalen!

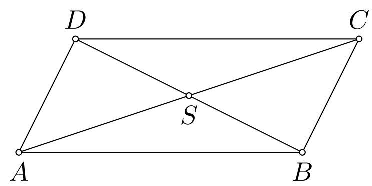
b) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind!

c) Welche weitere Aussage können Sie über die Dreiecke ABS und CDS treffen, wenn das Trapez $ABCD$ ein Parallelogramm ist?



b) Die Dreiecke ABS und CDS sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz zueinander ähnlich, da ihre Innenwinkel paarweise kongruent sind.
1. Die Winkel $\angle ASB$ und $\angle CSD$ sind Scheitelwinkel und deshalb kongruent.
2. Da $AB \parallel CD$ ist, sind die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ACD$ sowie $\angle DBA$ und $\angle BDC$ jeweils Wechselwinkel zueinander, die an geschnittenen Parallelen zueinander kongruent sind.

c) In einem Parallelogramm halbiert der Schnittpunkt S der Diagonalen die Diagonalen.
Damit gilt für die Strecken $SA = SC$ und $SB = SD$. Da außerdem $AB = CD$ sind die Dreiecke ABS und CDS nach dem Kongruenzsatz SSS zueinander kongruent.
Beispiel: Abbildung rechts



Aufgabe 5
Ein Tieflader transportiert zu einer Baustelle zwei Arten von Deckenplatten, kurze und lange.
Bei einer Beladung mit 5 langen Platten und 9 kurzen Platten transportiert er insgesamt eine Masse von 40,0 t. Wenn er mit 9 langen und 3 kurzen Platten beladen ist, transportiert er 39,0 t.
Berechnen Sie die Masse einer langen und die einer kurzen Deckenplatte! (Führen Sie die Probe durch!)

Ansatz: Masse der langen Platten sei x, Masse der kurzen Platten y. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$5x + 9y = 40 \qquad \text{(I)}$$
$$9x + 3y = 39 \qquad \text{(II)}$$

Die Gleichung II, nach y aufgelöst, wird $y = 13 - 3x$. Einsetzen in I ergibt

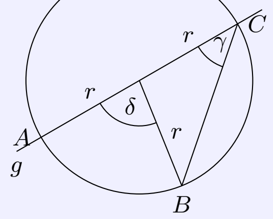
$$5x + 9(13 - 3x) = 40 \to -22x = -77 \to x = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Für y folgt 2,5. Eine lange Platte hat eine Masse von 3,5 t, eine kurze von 2,5 t.

Aufgabe 6
a) Formen Sie die folgende Gleichung nach r um!

$$A = \frac{abc}{4r} \qquad (r \neq 0; A \neq 0)$$

b) Es seien x der absolute Betrag von (-7), y die entgegengesetzte Zahl zu (+2,4) und, z das Reziproke von $\frac{2}{5}$.
Ermitteln Sie x, y und z!



c) Ermitteln Sie n in $n = \log_3 27$!

d) In der nebenstehenden Abbildung sei $\gamma = 41°$. Ermitteln Sie δ. Zeichnung nicht maßgerecht.

a) $r = \dfrac{abc}{4A}$

b) $x = |-7| = 7$; $y = -2{,}4$; $z = \frac{5}{2}$.

c) $n = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \cdot \log_3 3 = 3$.

d) Die Winkel bei C und B sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke BCM. (M Mittelpunkt des Kreises). Damit ist der Winkel bei B auch 41° und der Innenwinkel des Dreiecks BCM bei M gleich $180° - 2 \cdot 41° = 98°$.
Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel des Winkels mit 98°, und somit gleich $\delta = 82°$.

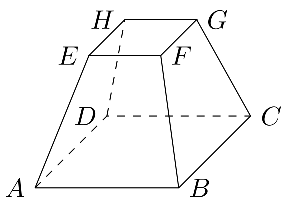
Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

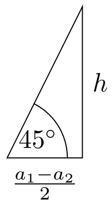
Aufgabe 7.1
Kohlereserven werden in Halden gelagert. Aus Gründen des Brandschutzes hat eine solche Halde angenähert die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche.
Seine Abmessungen sind:
Seitenlänge der Grundfläche $a_1 = 19{,}0$ m, Höhe des Pyramidenstumpfes $h = 4{,}5$ m, Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche $\alpha = 45°$.

a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf in senkrechter Zweitafelprojektion in einem geeigneten Maßstab dar!

b) Berechnen Sie die Seitenlänge a_2 der Deckfläche!

c) Berechnen Sie das Volumen dieses Pyramidenstumpfes!





b) Der Mittelpunkt der Kante AD, der Mittelpunkt von EH und das Lot von diesem Punkt auf der Grundfläche bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses Dreieck hat einen Innenwinkel von 45° und die 2 Katheten h und der Hälfte der Differenz von a_1 und a_2. (siehe 2. Abbildung)

In diesem Dreieck gilt: $\tan 45° = \frac{h}{\frac{a_1-a_2}{2}}$ und weiter

$$a_2 = a_1 + 2h \cdot \cot 45° = a_1 - 2 \cdot h = 10 \text{ cm}$$

c) Mit der Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramidenstumpfes

$$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{G \cdot D} + D) = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2)$$

ergibt sich $V \approx 976$. Der Pyramidenstumpf hat ein Volumen von 976 cm^3.

Aufgabe 7.2
Gegeben ist eine natürliche Zahl n ($n \neq 0$).

a) Schreiben Sie in allgemeiner Form die der Zahl n unmittelbar vorangehende natürliche Zahl (Vorgänger) und die unmittelbar folgende natürliche Zahl (Nachfolger) auf!

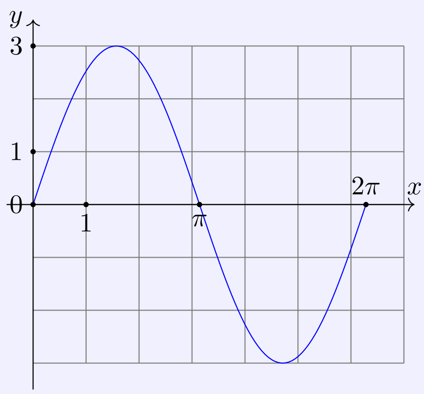
b) In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n die Zahl 483. Berechnen Sie n mit Hilfe einer Gleichung!

c) Geben Sie alle natürlichen Zahlen zwischen 300 und 400 an, die sich ebenfalls als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen lassen!

a) Vorgänger $n-1$, Nachfolger $n+1$

b) $(n-1)\cdot(n+1) = 483$ wird mit der dritten binomischen Formel zu $n^2 - 1 = 483$ und weiter $n^2 = 484$ und $n = 22$.

c) Die gesuchten Zahlen sind um 1 kleiner als eine Quadratzahl.
Im Intervall von 300 bis 400 gibt es die Quadratzahlen $324 = 18^2$, $361 = 19^2$ und $400 = 20^2$. Die gesuchten Zahlen sind damit 323, 360 und 399.

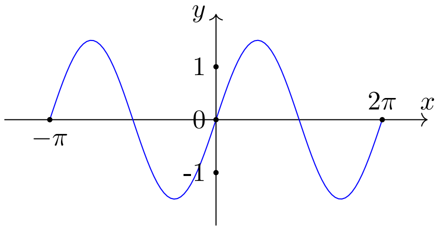


Aufgabe 7.3
a) Durch die Gleichung $y = \frac{3}{2}\sin 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Winkelfunktion gegeben.
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion genau im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$, und
- geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

b) In der nebenstehenden Abbildung ist eine Winkelfunktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b, x \in \mathbb{R}$) im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ dargestellt. Wie lautet die Gleichung in diesem speziellen Fall?

c) Gegeben sei der Term $\frac{1}{1-\sin x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Für welchen Wert von x $(0 \leq x \leq 2\pi)$ ist dieser Term nicht definiert?



a) der Wertebereich ist $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$; $y \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktion hat die kleinste Periode 2π, d.h. der Parameter b ist gleich 1.
Die Wertebereich verläuft von -3 bis 3, wodurch $a = 3$ gilt.
Die gesuchte Funktion ist $y = 3\sin x$.

c) Der Term $\frac{1}{1-\sin x}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist nicht definiert, wenn der Nenner $1 - \sin x = 0$ wird. Dieser Term wird genau an den Stellen 0, an denen $y = \sin x$ den Funktionswert 1 erreicht, d.h. an ihren lokalen Maximalstellen.

Im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ hat $y = \sin x$ genau eine lokale Maximalstelle bei $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Für $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ist der Term nicht definiert.

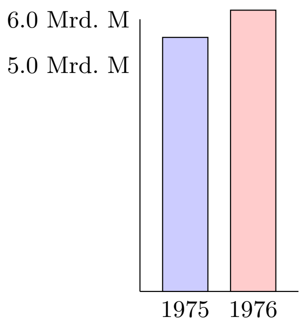
1.21 Abschlussprüfung 1977

Aufgabe 1
Im Jahre 1975 wurden aus dem Staatshaushalt der DDR 5,6 Milliarden Mark für das Bildungswesen ausgegeben. Im Jahre 1976 wurden dafür 0,6 Milliarden Mark mehr bereitgestellt.

a) Wieviel Milliarden Mark wurden im Jahre 1976 bereitgestellt?

b) Auf wieviel Prozent konnten die Ausgaben für das Bildungswesen im Jahre 1976 gegenüber 1975 erhöht werden?

c) Stellen Sie die Ausgaben in diesen beiden Jahren in einem Diagramm dar, und beschriften Sie dieses!



a) Es wurden 6,2 Milliarden Mark bereitgestellt.

b) $= \frac{6{,}2}{5{,}6} = 110{,}7\%$. Die Ausgaben wurden auf 110,6 % erhöht.

Aufgabe 2
Gegeben ist die Ungleichung $12 - x > 3(1 + x) + 3$ $(x \in \mathbb{R})$

a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie drei gebrochene Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

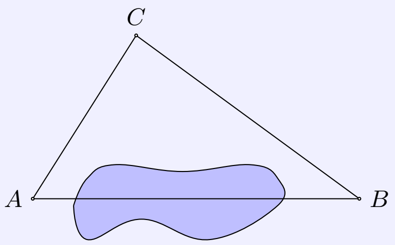
c) Geben Sie durch Aufzählen alle natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

$$\text{a)} \quad 12 - x > 3(1 + x) + 3 \quad \rightarrow \quad 12 - x > 3 + 3x + 3 \quad \rightarrow \quad 6 > 4x \quad \rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$$

b) z.B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{14}{10}$

c) $L = \{x|0, 1\}$

Aufgabe 3



a) Ein Vermessungstrupp hat die Länge einer unzugänglichen Strecke $\overline{AB}$ trigonometrisch zu bestimmen. Er ermittelt folgende Messwerte:
$\overline{AC} = b = 72{,}8$ m, $\overline{BC} = a = 45{,}0$ m,
Winkel $BCA = \gamma = 77{,}0°$
(siehe nebenstehende Abbildung; Abbildung nicht maßstäblich).
Berechnen Sie $\overline{AB}$ auf Grund dieser Messwerte!

b) Auf die gleiche Weise wurde von drei Gruppen einer Klasse 10 die Länge der Strecke $\overline{AB}$ bestimmt. Sie fanden für $\overline{AB}$ folgende Werte:
Gruppe 1: 73,4 m;
Gruppe 2: 76,4 m;

Gruppe 3: 77,3 m.
Berechnen Sie den Mittelwert (arithmetisches Mittel) dieser drei Werte.

c) Um wieviel Meter weicht dieser Mittelwert von dem Wert für $\overline{AB}$ ab, der unter a) berechnet wurde?

a) Kosinussatz

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\angle BCA \qquad , \qquad \overline{AB} = 76{,}49 \text{ m} \approx 76{,}5 \text{ m}$$

Die Strecke $\overline{AB}$ ist 76,5 m lang.

b) Mittelwert $m = \frac{73{,}4+76{,}4+77{,}3}{3} = 75{,}7$ m.

c) Differenz $d = 76{,}5 - 75{,}7 = 0{,}8$ m. Die Abweichung der zwei Werte beträgt 0,8 Meter.

Aufgabe 4
Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit den Gleichungen

(1) $f(x) = y = 2x + 1$
(2) $g(x) = y = x^2 + 2x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$

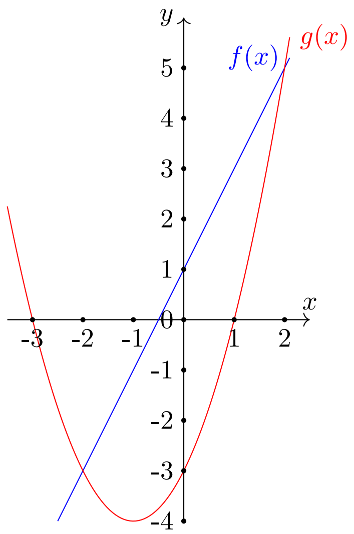
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x)$!

c) Der Graph der Funktion $g(x)$ ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!

d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $g(x)$!

e) Die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!



b) Nullstellenberechnung durch $y = 0$ setzen.
$0 = 2x + 1, \qquad 2x = -1 \;, \qquad x = -\frac{1}{2}.$

c) Umwandlung der Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform mittels quadratischer Ergänzung

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

Scheitelpunkt $S(-1, -4)$.

d) $0 = x^2 + 2x - 3$, $p = 2$, $q = -3$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -1 \pm \sqrt{4} \qquad , \qquad x_1 = -3; \quad x_2 = 2$$

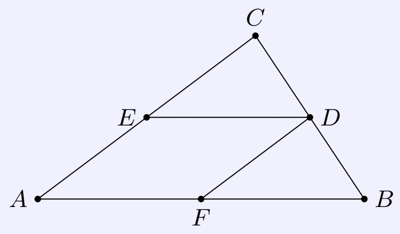
Die Nullstellen liegen bei -3 und 2.

e) Gleichsetzen der zwei Funktionsgleichungen ergibt

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 1, \qquad x^2 = 4, \qquad x_1 = -2; \quad x_2 = 2$$

Die Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind somit $S_1(-2; -3)$ und $S_2(2; 5)$.

Aufgabe 5



Im Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Ferner gelte $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ und $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$ (siehe nebenstehende Abbildung).

a) Beweisen Sie unter Benutzung eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke FBD und EDC einander kongruent sind!

b) Was folgt aus der Kongruenz der Dreiecke FBD und EDC für ihre Flächeninhalte?

a) Da D der Mittelpunkt von BC ist, gilt $BD = CD$. Da $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ ist, ergibt sich nach dem Strahlensatz in der Strahlensatzfigur mit dem Scheitel B:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB} \qquad \text{und mit} \qquad AF = FB, \quad \text{also} \quad ED = FB$$

Weiterhin sind die Winkel $\angle FBD$ und $\angle EDC$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleich groß.
Nach dem Kongruenzsatz SWS sind damit die Dreiecke FBD und EDC einander kongruent.

b) Die Flächeninhalte der zwei Dreiecke sind gleich groß.

Aufgabe 6
a) Ermitteln Sie den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 4{,}85$ m!

b) Berechnen Sie x! Ermitteln Sie alle Winkel x im Intervall $0° \leq x \leq 180°$, für die gilt: $\sin x = 0{,}7071$!

c) Formen Sie die Gleichung $V = \dfrac{a^2h}{3}$ $(h \neq 0)$ nach der Variablen a um!

a) Kreisumfang $u = \pi \cdot d = 15{,}2$ m.
Kreisflächeninhalt $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 18{,}5$ m^2.

b) $\sin x = 0{,}7071$ besitzt im angegebenen Intervall zwei Lösungen: $x_1 = 45°$ und $x_2 = 135°$.

c)
$$V = \frac{a^2h}{3}, \qquad a^2 = \frac{3V}{h}, \qquad a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

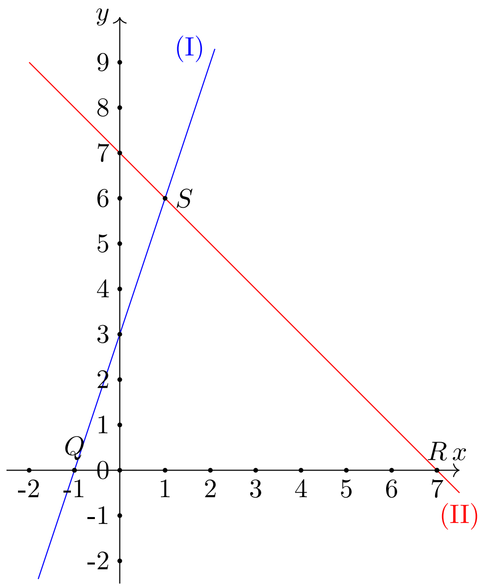
Aufgabe 7.1
7.1 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad y = 3x + 3 \qquad , \qquad \text{(II)} \quad y = -x + 7$$

a) Lösen Sie dieses System rechnerisch! Führen Sie die Probe aus!

b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion! Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar (Koordinateneinheit: 1 cm)!

c) Der Schnittpunkt der beiden Graphen sei S. Der eine Graph schneidet die x-Achse im Punkt Q, der andere Graph schneidet die x-Achse im Punkt R. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks QRS (in Quadratzentimetern)!



a) Gleichsetzen der beiden Gleichungen ergibt

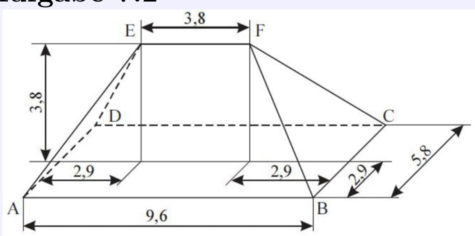
$$3x + 3 = -x + 7, \qquad 4x = 4, \qquad x = 1$$

Einsetzen von x in eine der Gleichungen gibt $y = 6$. Lösungsmenge $L = \{(x,y)|(1,6)\}$.

c) Nullstelle von (I): $x_I = -1$, Punkt $Q(-1,0)$
Nullstelle von (II): $x_{II} = 7$, Punkt $R(7,0)$
Das Dreiecke QRS hat die Grundseite $\overline{QR} = 8$ cm und die Ordinate von S als Höhe $h = 6$ cm. Damit wird für den Flächeninhalt von $\triangle QRS$:

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 7.2

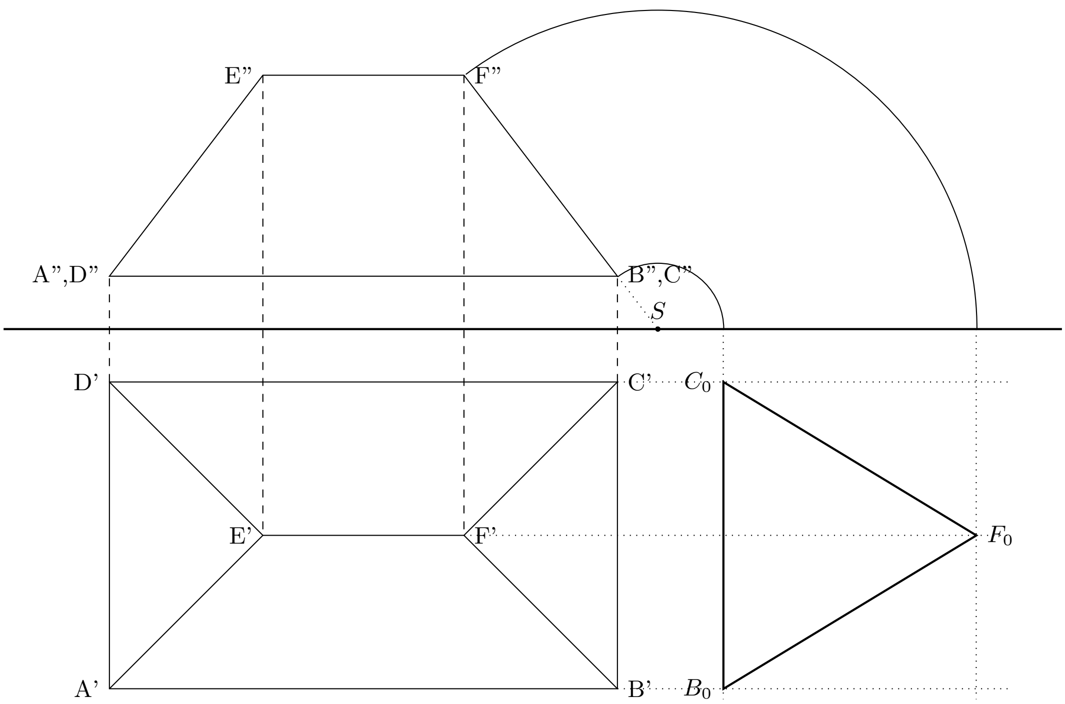


nicht maßstäblich,
alle Maßangaben in Metern

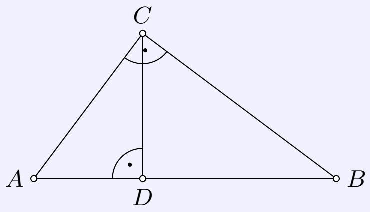
Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schrägbild eines Walmdaches.

a) Stellen Sie das Walmdach in. Senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 100 dar. Bezeichnen Sie alle Eckpunkte entsprechend der Abbildung!

b) Konstruieren Sie im Maßstab 1 : 100 die wahre Größe und Gestalt einer dreieckigen Seitenfläche dieses Walmdaches!



Aufgabe 7.3



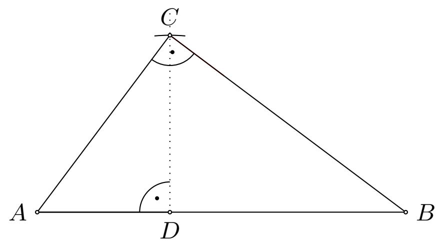
Gegeben ist ein Dreieck ABC (siehe Abbildung). Dabei ist Winkel $BCA = \gamma = 90°$; $\overline{CD} = h_c = 5{,}2$ cm; $\overline{AD} = q = 3{,}9$ cm.

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC! Beginnen Sie mit dem Teildreieck ADC!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC} = b$.

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BD} = p$.

a) Strecke AD zeichnen und Senkrechte bei D errichten. Kreisbogen um D mit Radius h schneidet die Senkrechte im Punkt C.
A und C verbinden und in C Senkrechte erreichten. Diese Senkrechte schneidet den Strahl $\overrightarrow{AD}$ im Punkt B.



b) Mittels Satz des Pythagoras wird

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = 6{,}5 \text{ cm}$$

Die Seite AC hat die Länge 6,5 cm. c) Mittels Kathetensatz ergibt sich

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB} \qquad \text{umgestellt} \qquad \overline{AB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}} = 10{,}83 \text{ cm}$$

Die Hypotenuse c ist 10,83 cm. Damit bleibt für $\overline{BD} = p = c - q = 6{,}93$ cm.

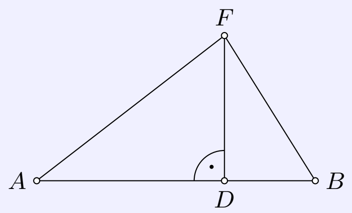
1.22 Abschlussprüfung 1978

Aufgabe 1

$$(2x–5)(x + 3) = 2x^2–(3x–4) + 9 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Lösen Sie diese Gleichung, und führen Sie die Probe durch!

$$\begin{aligned} (2x–5)(x + 3) &= 2x^2–(3x–4) + 9 \\ 2x^2 - 5x + 6x - 15 &= 2x^2 - 3x + 4 + 9 \\ x - 15 &= -3x + 13 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$



(nicht maßstäblich)

Aufgabe 2

Ein Küstenwachboot der Volksmarine fährt auf einem Kurs, der als geradlinig angesehen werden kann. Zur Orientierung wurde von den Punkten A und B des Schiffsweges das Funkfeuer F angepeilt (siehe nebenstehende Abbildung).

Dabei wurden ermittelt:

Winkel $BAF = \alpha = 46{,}3°$; Winkel $FBA = \beta = 61{,}4°$; $\overline{AB} = c = 14{,}6$ km.

a) Berechnen Sie, in welcher Entfernung vom Funkfeuer F sich das Schiff im Punkt B befand!

b) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung DF, in der das Schiff am Funkfeuer vorbeigefahren ist!

a) Für den Winkel $AFB = \gamma$ ergibt sich $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 72{,}3°$ und mit dem Sinussatz

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad , \qquad \overline{FB} = a = 11{,}08 \text{ km}$$

b) DF ist im rechtwinkligen Dreieck BFD eine Kathete. Es wird

$$\overline{DF} = \overline{FB} \cdot \sin\beta = 9{,}73 \text{ km}$$

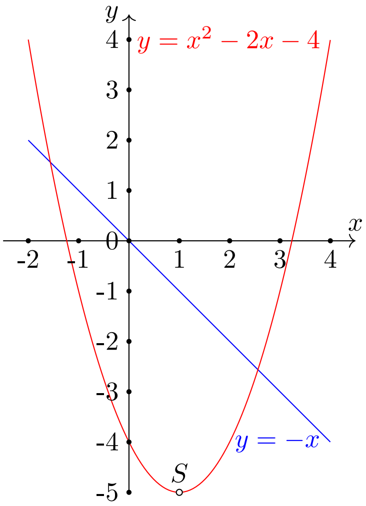
Die kürzeste Entfernung, in der das Schiff am Funkfeuer vorbeifährt ist 9,73 km.

Aufgabe 3

a) Durch die Gleichung $y = x^2–2x - 4$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion gegeben.
- Berechnen Sie deren Nullstellen (rationale Näherungswerte)!
- Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

b) Durch die Gleichung $y = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine weitere Funktion gegeben. Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2 Geben Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte an!



a) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 1 \pm \sqrt{5}$, d.h.
$x_1 \approx -1{,}24$, $x_2 = \approx 3{,}24$.

Scheitelpunktsform mit quadratischer Ergänzung
$y = x^2 - 2x - 4 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 4 = (x-1)^2 - 5$, der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(1, -5)$.

b) siehe graphische Darstellung
c) Gleichsetzen der zwei Funktionsgleichungen ergibt

$$x^2 - 2x - 4 = -x; \qquad x^2 - x - 4 = 0;$$
$$x_{P_1} \approx -1{,}56, \quad x_{P_2} \approx 2{,}56$$

Einsetzen in einer der Funktionsgleichungen ergibt die Schnittpunkte $P_1(-1{,}56; 1.56)$ und $P_2(2{,}56; -2.56)$.

Aufgabe 4
a) n sei eine beliebige natürliche Zahl.
Geben Sie mit Hilfe von n die nächsten beiden auf n folgenden natürlichen Zahlen an!

b) Beweisen Sie folgenden Satz!
Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 3 teilbar.

a) $n+1$, $n+2$

b) Summe $= n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3 \cdot (n+1)$, d.h. die Summe ist gleich dem Dreifachen der mittleren Zahl $n+1$ und damit durch 3 teilbar.

Aufgabe 5
Für die Modernisierung und Werterhaltung von Wohnungen werden Vollziegel und Hohlziegel verwendet.

a) Ein quaderförmiger Vollziegel hat folgende Abmessungen: Länge $l = 24{,}0$ cm; Breite $b = 11{,}5$ cm; Höhe $h = 7{,}1$ cm. Die Dichte des Materials beträgt $\rho = 1{,}80$ g/cm^3.
Berechnen Sie die Masse eines Vollziegels, und geben Sie diese in Kilogramm an!

b) Die Masse eines Hohlziegels beträgt 2,3 kg.
Wieviel Prozent der Masse eines Vollziegels beträgt die Masse eines Hohlziegels?

c) Ein Lastkraftwagen kann mit 2500 Vollziegeln beladen werden. Wieviel Hohlziegel kann dieser LKW statt dessen laden, wenn die gleiche Masse transportiert werden soll?

a) Volumen $V = a \cdot b \cdot c = 1960$ cm^3.
Masse des Ziegels $m = \rho \cdot V = 3530$ g oder $m = 3{,}53$ kg. Die Masse des Ziegel ist 3,53 kg.

b) $\frac{2{,}3}{3{,}53} = 0{,}651$. Die Masse des Hohlziegels ist 65,1% des Vollziegels.

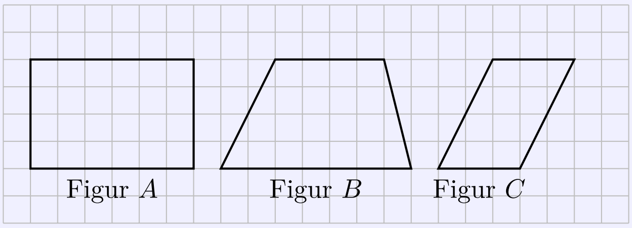
c) Der LKW kann eine Masse von $2500 \cdot 3{,}53$ kg $= 8825$ kg transportieren. Das entspricht $\frac{8825}{2{,}3} = 3840$ Hohlziegel.
Der LKW kann rund 3840 Hohlziegel transportieren.

Aufgabe 6
a) Es seien $a = \frac{2}{5}$ und $b = \frac{3}{7}$. Berechnen Sie $a + b$ und $a : b$!

b) Für die Elemente x der Menge M gilt: $15 < x < 20$ ($x \in \mathbb{N}$). Geben Sie alle Elemente an.

c) Geben Sie eine Teilmenge M_1 von M an, deren Elemente Primzahlen sind!

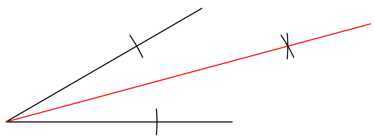
d) Zeichnen Sie einen beliebigen Winkel α ($0° < \alpha < 180°$)! Konstruieren Sie die Winkelhalbierende dieses Winkels (mit Zirkel und Lineal)!



e) Welche der gegebenen Figuren A, B, C sind Parallelogramme?

a) $a + b = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$; $\quad a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$

b) $M = \{16, 17, 18, 19\}$; $\quad$ c) z.B. $M_1 = \{17, 19\}$.

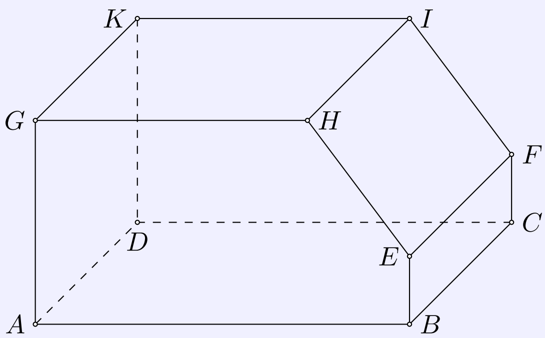
d) 

e) Parallelogramme sind Figur A und Figur C.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Werkstück in Kavalierperspektive. Die Maße des Werkstückes sind:
$\overline{AB} = 11{,}0$ cm; $\overline{AG} = 6{,}0$ cm; $\overline{BE} = 2{,}0$ cm; $\overline{GH} = 8{,}0$ cm; $\overline{AD} = 6{,}0$ cm.

a) Stellen Sie dieses Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! Bezeichnen Sie alle Eckpunkte entsprechend der Abbildung!

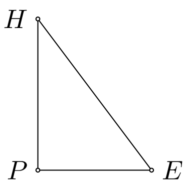


(Abb. nicht maßgerecht)

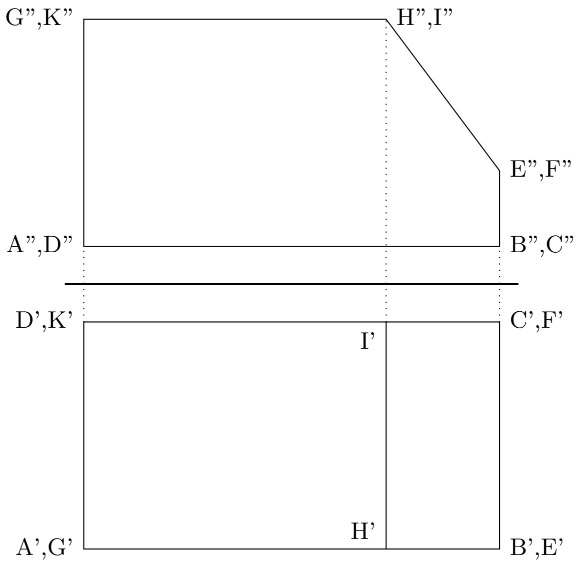
b) Berechnen Sie die Länge der Kante $\overline{EH}$!

c) Berechnen Sie den Umfang des Fünfecks $ABEHG$!

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Fünfecks!



b) Fällt man von E das Lot auf AG und von H das Lot auf AB, so entsteht das bei P rechtwinklige Dreieck EHP (siehe Abbildung). In diesem sind $EP = AP - GH = 3$ cm und $PH = AG - EB = 4$ cm. Mittels Satz des Pythagoras wird somit $\overline{EH} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.



a)

c) Die Seitenlängen des Fünfecks sind $\overline{AB} = 11{,}0$ cm, $\overline{BE} = 2{,}0$ cm, $\overline{EH} = 5{,}0$ cm, $\overline{GH} = 8{,}0$ cm, $\overline{AG} = 6{,}0$ cm.
Der Umfang des Fünfecks ist damit 32 cm.

d) Das Fünfeck entsteht durch Abschneidens eines rechtwinkligen Dreiecks der Form EPH aus Lösung a) von einem Rechteck mit den Maßen $\overline{AB}$ und $\overline{AG}$.

$$A_{\text{Fünfeck}} = \overline{AB} \cdot \overline{AG} - \frac{1}{2}\overline{EP} \cdot \overline{PH} = 11 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 82 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 7.2
In einem Kreis sind $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ zwei Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen (siehe nebenstehende Abbildung).

a) Begründen Sie, warum das Dreieck ABE rechtwinklig ist!

b) Im Viereck $MBEF$ sei der Winkel $EBM = 70°$. Berechnen Sie die Größe des Winkels MFE!

c) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABE und AMF einander ähnlich sind!

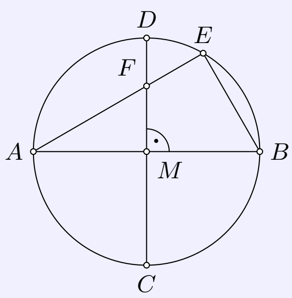


Abbildung nicht maßgerecht

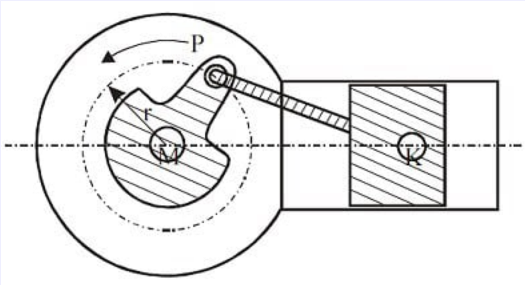
a) AB ist der Kreisdurchmesser. Nach dem Satz des Thales ist dann jeder Peripheriewinkel über AB ein rechter. Das Dreieck ABE hat bei E einen rechten Winkel.

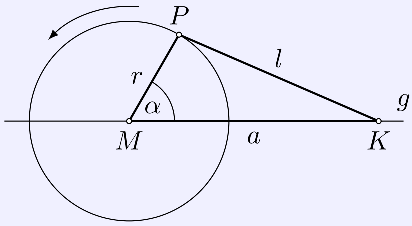
b) In einem Viereck ist die Innenwinkelsumme 360°, d.h.

$$\angle MFE = 360° - \angle BMF - \angle EBM - \angle FEB = 360° - 90° - 70° - 90° = 110°$$

c) Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie zwei kongruente Winkelpaare besitzen. Beide Dreiecke sind rechtwinklig. Außerdem ist der Winkel MFA in beiden Dreiecken Innenwinkel. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ABE und AMF einander ähnlich.

Aufgabe 7.3
Die untenstehenden Abbildungen zeigen vereinfachte Darstellungen eines Kurbelgetriebes. P bewegt sich auf dem Kreis um M mit $\overline{MP} = r$ (r konstant), und K bewegt sich auf der Geraden g (l konstant). Es seien $\overline{MP} = r = 2{,}5$ cm und $\overline{KP} = l = 6{,}5$ cm.

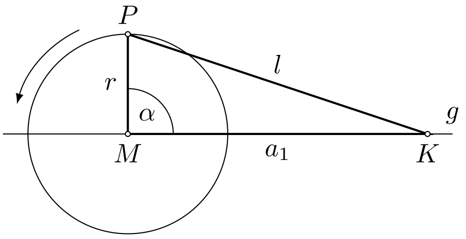




a) Zeichnen Sie das Dreieck MKP mit dem Winkel $KMP = \alpha = 90°$ und berechnen Sie hierfür die Länge der Strecke $\overline{MK} = a_1$!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{MK} = a_2$ für den Winkel $KMP = \alpha_2 = 180°$!

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels $KMP = \alpha_3$ $(0° \leq \alpha_3 \leq 180°)$ für $\overline{MK} = a_3 = 4{,}8$ cm!



a) Das Dreieck MKP ist rechtwinklig. Mit dem Satz des Pythagoras wird

$$a_1 = \sqrt{r^2 + l^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 6{,}5^2} \approx 6{,}96 \text{ cm}$$

b) P befindet sich in diesem Fall auf der Geraden g. Der Abstand MK ist dann die Differenz von l und r: $a_2 = 6{,}5 - 2{,}5 = 4$ cm.

c) Mit dem Kosinussatz wird $l^2 = r^2 + a_3^2 - 2ra_3 \cos\alpha_3$. Umstellen der Gleichung und Einsetzen der Größen ergibt als Lösung $\alpha_3 = 122{,}7°$.

1.23 Abschlussprüfung 1979

Aufgabe 1
In der DDR wurden im ersten Halbjahr 1978 insgesamt 76000 Wohnungen neu gebaut bzw. modernisiert. Von diesen fertiggestellten Wohnungen sind 48900 Neubauwohnungen.

a) Wieviel Prozent der insgesamt fertiggestellten Wohnungen sind
- Neubauwohnungen,
- modernisierte Wohnungen?

b) 12,5 % der Neubauwohnungen wurden als Eigenheime errichtet. Berechnen Sie, wieviel Wohnungen das sind!

a) $\frac{48900}{76000} = 0{,}643 = 64{,}3\%$.
64,3% der Wohnungen sind Neubauwohnungen, 100% - 64,3% = 35,8% sind modernisierte Wohnungen.

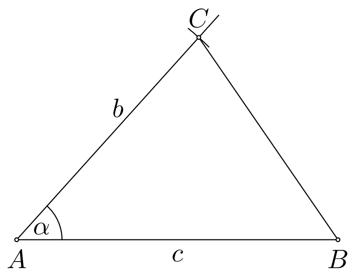
b) $48900 \cdot \frac{15\%}{100\%} = 48900 \cdot 0{,}15 = 7335$. 7335 Neubauwohnungen wurden als Eigenheime errichtet.

Aufgabe 2
Von einem Dreieck ABC sind gegeben: $\overline{AB} = c = 8{,}5$ cm; $\overline{AC} = b = 7{,}2$ cm, Winkel $BAC = \alpha = 48°$.

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!

b) Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{BC} = a$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!



a) Strecke $\overline{AB} = c$ zeichnen, Winkel α in A antragen und Kreisbogen mit Radius b um A zeichnen.
Schnittpunkt ist der Punkt C.

b) Kosinussatz

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha} = 6{,}5 \text{ cm}$$

c)

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = 22{,}7 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 3
a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem den Graph der Funktion $y = f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graph der Funktion $y = g(x) = 3 \cdot \sin 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ mindestens im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!

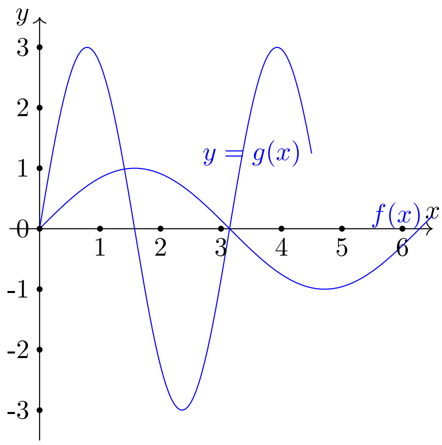
c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion $y = g(x)$ an!

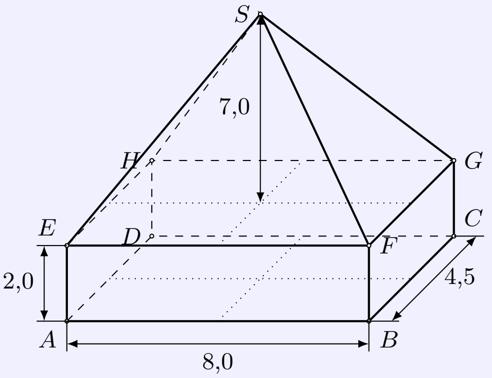
d) Geben Sie die kleinste Periode der Funktion $y = g(x)$ an!

a), b) nächste Seite

c) Wertebereich $y \in \mathbb{R}$, $-3 \leq y \leq y$.

d) $y = a\sin bx$, $b = 2$, kleinste Periode $\frac{2\pi}{b} = \pi$





(nicht maßstäblich, Maßangaben in cm)

Aufgabe 4
Ein Körper ist aus einem Quader und einer geraden Pyramide zusammengesetzt (siehe nebenstehende Abbildung).

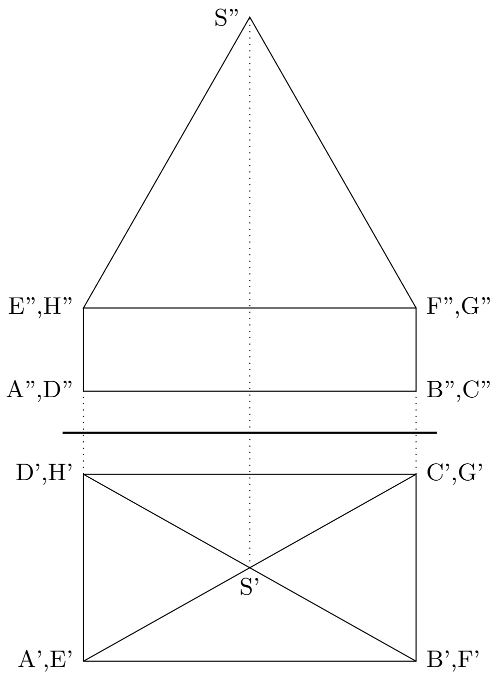
a) Berechnen Sie das Volumen dieses zusammengesetzten Körpers!

b) Stellen Sie diesen Körper in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! Bezeichnen Sie alle Eckpunkte entsprechend der Abbildung!

a) Der Körper besteht aus einem Quader mit den Maßen $a = 8{,}0$ cm, $b = 4{,}5cm$ und der Höhe $h = 2{,}0$ cm und einer Pyramide gleicher Grundfläche und der Höhe $h_2 = 7{,}0$ cm.

$$V = V_Q + V_P = a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h_2 = 72 + 84 = 156 \text{ cm}^3$$

b)

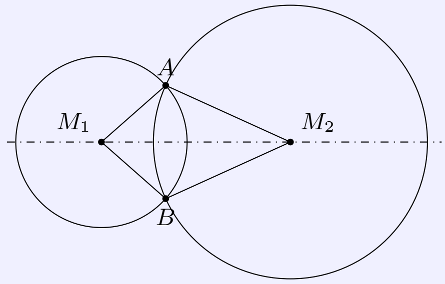


Aufgabe 5

Die nebenstehende Abbildung zeigt zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, die einander in den Punkten A und B schneiden.

a) Beweisen Sie unter Benutzung eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke M_1AM_2 und M_1BM_2 einander kongruent sind!

b) Was folgt aus der Kongruenz der Dreiecke M_1AM_2 und M_1BM_2 für die Winkel M_2AM_1 und M_1BM_2?



a) In den Dreiecken M_1AM_2 und M_1BM_2 sind die Seiten $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$ (Radius des linken Kreises) und $\overline{M_2A} = \overline{M_2B}$ (Radius des rechten Kreises) gleich groß. Die Seite $\overline{M_1M_2}$ gehört zu beiden Dreiecken.
Damit sind die Dreiecke mit 3 kongruenten Seitenpaaren nach dem Kongruenzsatz SSS zueinander kongruent.

b) Da die Dreiecke kongruent sind, sind die Winkel M_2AM_1 und M_1BM_2 gleich groß.

Aufgabe 6

a) Ordnen Sie die Zahlen $\sqrt{2}$; 1,4 ; $1,\overline{4}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Lösen Sie die Gleichung $x^2–14x + 45 = 0$!

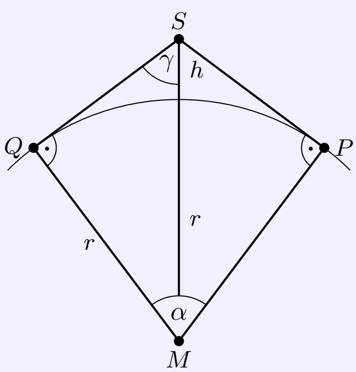
c) Gegeben ist der Term $4ab–8ac$. Berechnen Sie den Wert dieses Terms für $a = 2{,}5$; $b = 3{,}0$; $c = 1{,}5$!

a) 1,4; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $1,\overline{4}$

b) $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 45}$; $x_1 = 9$; $x_2 = 5$

c) $4 \cdot 2{,}5 \cdot 3 - 8 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 0$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.



nicht maßstäblich

Aufgabe 7.1

Ein künstlicher Erdsatellit S führt eine Spezialkamera mit. Damit soll der von S aus sichtbare Teil der Erdoberfläche mit einer Aufnahme erfasst werden (siehe Abbildung). Erdradius $r = 6370$ km; Flughöhe $h = 320$ km.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{MS}$!

b) Berechnen Sie im rechtwinkligen Dreieck MSQ die Größe des Winkels $QSM = \gamma$! Geben Sie die Größe des Aufnahmewinkels 2γ an!

c) Die Länge des zum Winkel α gehörenden Kreisbogens $b = \overparen{PQ}$ gibt die Entfernung zwischen den Punkten P und Q auf der Erdoberfläche an. Berechnen Sie diese Entfernung!

a) Im rechtwinkligen Dreieck QSM ist MS die Summe aus dem Radius r und der Höhe h: $MS = h + r = 6690$ km.

b) Für den Winkel γ gilt: $\sin\gamma = \frac{QM}{MS} = \frac{r}{r+h} = 0{,}9522$ und somit $\gamma = 72{,}2°$.
Der Aufnahmewinkel ist 144,4° groß.

c) Im Viereck $QSPM$ wird $\alpha = 360° + 2 \cdot 90° - 2\gamma = 36°$.
Der Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ hat die Länge: $\overset{\frown}{PQ} = 2\pi r \cdot \frac{36}{360} \approx 4002$ km.

Aufgabe 7.2
Gegeben sind die Ungleichungen

$$(1)\quad \frac{3(5x-8)}{2} < 5x - 2 \quad , \quad (2)\quad 15x - 3 < 14 + n \qquad (x,n \in \mathbb{R})$$

a) Lösen Sie die Ungleichung (1)! Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

b) Formen Sie die Ungleichung (2) nach x um!

c) Bestimmen Sie n so, dass die Ungleichung (2) die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung (1) hat! (Proben werden nicht verlangt.)

$$\text{a)}\quad \frac{3(5x-8)}{2} < 5x - 2, \qquad 15x - 24 < 10x - 4, \qquad 5x < 20, \qquad x < 4$$

$L = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$.

$$\text{b)}\quad 15x - 3 < 14 + n, \qquad 15x < 17 + n, \qquad x < \frac{n+17}{15}$$

c) Es muss $\frac{n+17}{15} = 4$ sein, d.h. $n = 43$.

Aufgabe 7.3
a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges: Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung 0 die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = x$!

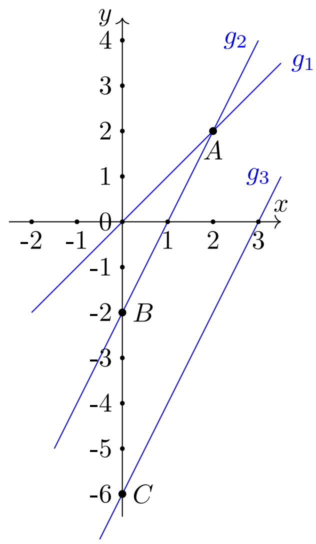
b) Tragen Sie in dasselbe Koordinatensystem die Punkte $A(2;2)$ und $B(0;-2)$ ein, und zeichnen Sie die Gerade g_2, die durch diese Punkte verläuft!

c) Geben Sie für die Gerade g_2 die Gleichung der zugehörigen Funktion an!

d) Zeichnen Sie die Gerade g_3 die durch den Punkt $C(0;-6)$ geht und parallel zu g_2 verläuft!

e) Wie groß ist der Streckungsfaktor k bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum 0, wenn $\overline{OC}$ die Bildstrecke von $\overline{OB}$ ist?

a,b,d)



c) $g_2 : y = 2x - 2$

e) $\overline{OC} = 6; \overline{OB} = 2$. Damit ist der Streckungsfaktor $k = \frac{6}{2} = 3$.

1.24 Abschlussprüfung 1980

Aufgabe 1
In der sowjetischen Weltraumstation Salut 6 arbeiteten bisher drei Stammbesatzungen, die jeweils Weltrekorde im Langzeitflug aufstellten. Der Flug der ersten Stammbesatzung dauerte 96 Tage. Der Flug der zweiten Stammbesatzung, mit der auch unser Kosmonaut Sigmund Jähn zusammenarbeitete, dauerte 140 Tage.

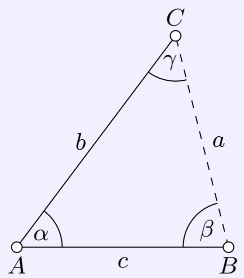
a) Um wieviel Prozent überbot die zweite Stammbesatzung die Flugzeit der ersten?

b) Nach internationaler Festlegung muss die Dauer eines Weltraumfluges mindestens 10 % über der bisherigen Rekordzeit liegen, um als neuer Weltrekord anerkannt zu werden. Nach wieviel Tagen ihres Fluges hatte die dritte Stammbesatzung diese Bedingung erfüllt?

a) $\frac{140}{96} = 1{,}458 = 145{,}8\%$. Die Flugzeit der 2. Mannschaft übertraf die der ersten um 45,8 %.

b) 110 % von 140 Tagen, d.h. $1{,}1 \cdot 140 = 154$. Nach 154 Tagen hatte die dritte Mannschaft einen neuen Rekord erreicht.

Aufgabe 2
Zwei Straßen schneiden einander im Punkt A. Durch Punkt B auf der einen Straße wird eine Rohrleitung gelegt, welche die andere Straße im Punkt C schneidet (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich). Bei der Vermessung wurden folgende Werte ermittelt: $\overline{AB} = c = 4{,}7$ km; Winkel $BAC = \alpha = 35°$; Winkel $CBA = \beta = 85°$.

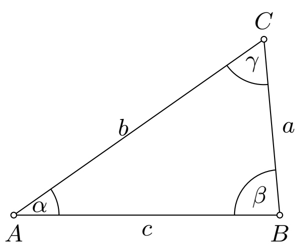


a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $ACB = \gamma$!

c) Berechnen Sie die Länge a des Abschnitts $\overline{BC}$ der Rohrleitung!

d) Um einen Näherungswert a_N für die Länge des Abschnitts $\overline{BC}$ zu erhalten, wurde für den Winkel $CBA = \beta$ der Näherungswert 90° verwendet.
Die Werte für $\overline{AB} = c$ und Winkel $BAC = \alpha$ blieben unverändert. Berechnen Sie den Näherungswert a_N. Geben Sie den absoluten Fehler $a_N – a$ an!



a,b) Abbildung, $\gamma = 180° - 35° - 85° = 60°$

c) Sinussatz $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = 3{,}11$ km.

d) Im rechtwinkligen Dreieck ist $\frac{a}{c} = \tan\alpha$, d.h. $a_N = 3{,}29$ km.
Der absolute Fehler $a_N - a$ beträgt somit $3{,}29 - 3{,}11 = 0{,}18$ km $= 180$ m.

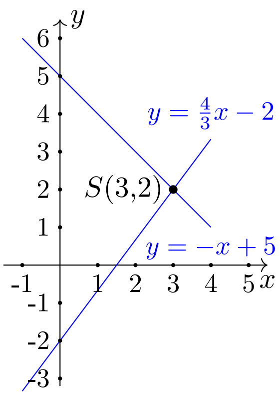
Aufgabe 3
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$(1) \quad y = -x + 5 \qquad , \qquad (2) \quad 3y = 4x – 6$$

a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!

b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion! Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar!

c) Bezeichnen Sie den Schnittpunkt beider Graphen mit S! Geben Sie die Koordinaten von S an, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von a)!



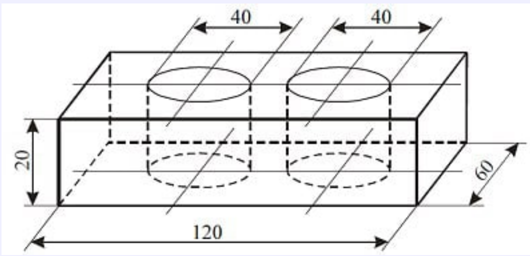
a) $y = -x + 5$ in die zweite Gleichung einsetzen und lösen

$$3(-x+5) = 4x - 6; \Rightarrow -3x + 15 = 4x - 6; \Rightarrow 7x = 22; x = 2$$

Den x-Wert in eine Gleichung einsetzen, ergibt $y = 3$.
Lösungsmenge $L = \{(x{,}y)|(2{,}3)\}$.

b,c) Abbildung, Ablesen der Koordinaten $S(2{,}3)$. Der Schnittpunkt S entspricht der in a) gefundenen Lösung, als Punktkoordinaten interpretiert.

Aufgabe 4



Die Abbildung (nicht maßstäblich, alle Maßangaben in mm) zeigt ein quaderförmiges Werkstück mit zwei durchgehenden zylinderförmigen Bohrungen.

a) Berechnen Sie das Volumen des Werkstücks, und geben Sie es in Kubikzentimetern an!
b) Das Werkstück besteht aus Stahl ($\rho = 7{,}8\ \text{g/cm}^3$). Berechnen Sie seine Masse!

a) Der Körper ist ein Quader aus dem 2 kongruente Zylinder herausgeschnitten sind.
Quader $V_Q = a \cdot b \cdot c = 120 \cdot 60 \cdot 20 = 144000\ \text{mm}^3$
Zylinder $V_Z = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 20^2 \cdot 20 \approx 25130\ \text{mm}^3$
Körper $V = V_Q - 2V_Z \approx 93740\ \text{mm}^3 \approx 93{,}74\ \text{cm}^3$.

b) Masse $m = \rho \cdot V = 731170\ \text{g} = 731{,}2\ \text{kg}$

Aufgabe 5
a) Für alle natürlichen Zahlen gilt folgende Aussage:
"Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen gerade ist, so ist deren Summe durch 10 teilbar."
Geben Sie mit Hilfe von Variablen fünf derartige Zahlen an! Beweisen Sie, dass die obenstehende Aussage wahr ist!

b) Zeigen Sie, dass folgende Aussage falsch ist:
"Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 10 teilbar."

a) Die kleinste Zahl sei, da gerade, $2n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Summe: $2n + (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 3) + (2n + 4) = 10n + 10 = 10(n + 1)$.
Da aus der Summe 10 ausgeklammert werden kann und $n + 1$ eine natürliche Zahl ist, ist die Summe durch 10 teilbar. w.z.b.w.

b) Gegenbeispiel: mit der kleinsten Zahl 1, ergibt sich als Summe $1+2+3+4+5 = 15$, und 15 ist nicht durch 10 teilbar.

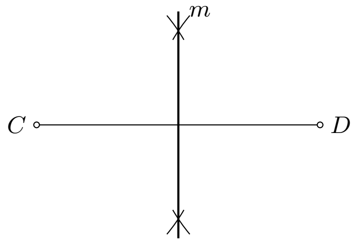
Aufgabe 6
a) Gegeben ist die Ungleichung $3x < 9{,}6$ ($x \in \mathbb{R}$).
- Lösen Sie diese Ungleichung!
- Geben Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

b) Zeichnen Sie eine beliebige Strecke $\overline{CD}$, und konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte dieser Strecke!

c) Gegeben ist $\cos x = 0{,}6782$ ($0° \leq x \leq 360°$).
Geben Sie alle Lösungen im vorgegebenen Intervall an!

d) Berechnen Sie x! $x = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}}{3{,}6 \cdot 10^3}$

a) $3x < 9{,}6$ ergibt $x < 3{,}2$. Lösungsmenge sind alle reellen Zahlen kleiner als 3,2.
Lösungsmenge im Bereich der ungeraden natürlichen Zahlen: $L = \{x|1; 3\}$.



b)

c) $\cos x = 0{,}6782$ ergibt $x_1 = 47{,}3°$ im I.Quadranten und $x_2 = 360° - 47{,}3° = 312{,}7°$ im IV.Quadranten.

d) $x = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}}{3{,}6 \cdot 10^3} = 1{,}5 \cdot 10^2 = 150$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

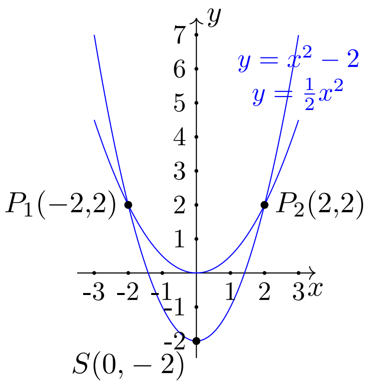
Aufgabe 7.1
a) Durch $y = x^2–2$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion gegeben. Zeichnen Sie den Graph der Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mindestens im Intervall $–3 \leq x \leq +3$!
- Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S dieses Graphen an!
- Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

b) Durch die Gleichung $y = \dfrac{1}{2}x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine weitere Funktion gegeben.
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem mindestens im Intervall $–3 \leq x \leq +3$!
- Berechnen Sie alle Werte x dieser Funktion, für die der Funktionswert $y = 4{,}5$ ist!

c) Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an, der im II. Quadranten liegt!

a) siehe Abbildung nächste Seite.
Scheitelpunkt: $S(0; -2)$; Wertebereich: $y \in \mathbb{R}, y \geq -2$

b) Abbildung nächste Seite
$y = 4{,}5$ in Funktionsgleichung einsetzen, ergibt $4{,}5 = \frac{1}{2}x^2$, d.h. $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$



c) Funktionsgleichungen gleich setzen ergibt

$$x^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2$$
$$\frac{1}{2}x^2 = 2$$
$$x^2 = 4$$

mit den Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ und nach Berechnung der y-Werte als Schnittpunkte $P_1(-2;2)$ und $P_2(2;2)$.

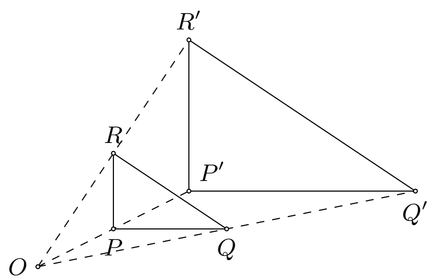
Aufgabe 7.2
Ein Dreieck PQR soll zentrisch gestreckt werden.

a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier (Koordinateneinheit: 1 cm) das Dreieck PQR mit $P(2;1)$, $Q(5;1)$ und $R(2;3)$!

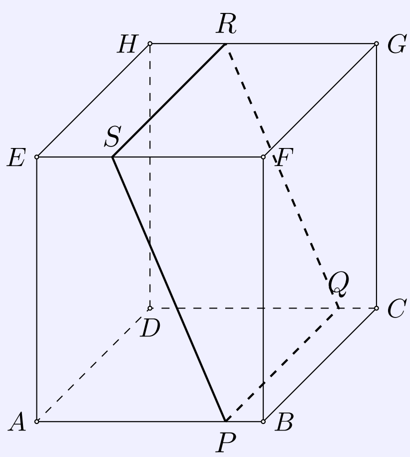
b) Zeichnen Sie das Dreieck $P'Q'R'$, das bei der zentrischen Streckung des Dreiecks PQR mit dem Streckungszentrum $Z(0;0)$ und dem Streckungsfaktor $k = 2$ entsteht!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR!

d) Es sei A' der Flächeninhalt des Dreiecks $P'Q'R'$. Geben Sie das Verhältnis $A' : A$ an!



b) Das Dreieck PQR ist rechtwinklig, mit dem rechten Winkel bei P. Die Katheten sind $PQ = 3$ und $PR = 2$, mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$.
c) Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor 2 vergrößert sich der Flächeninhalt um den Faktor 4, d.h. $A' : A = 4 : 1$.



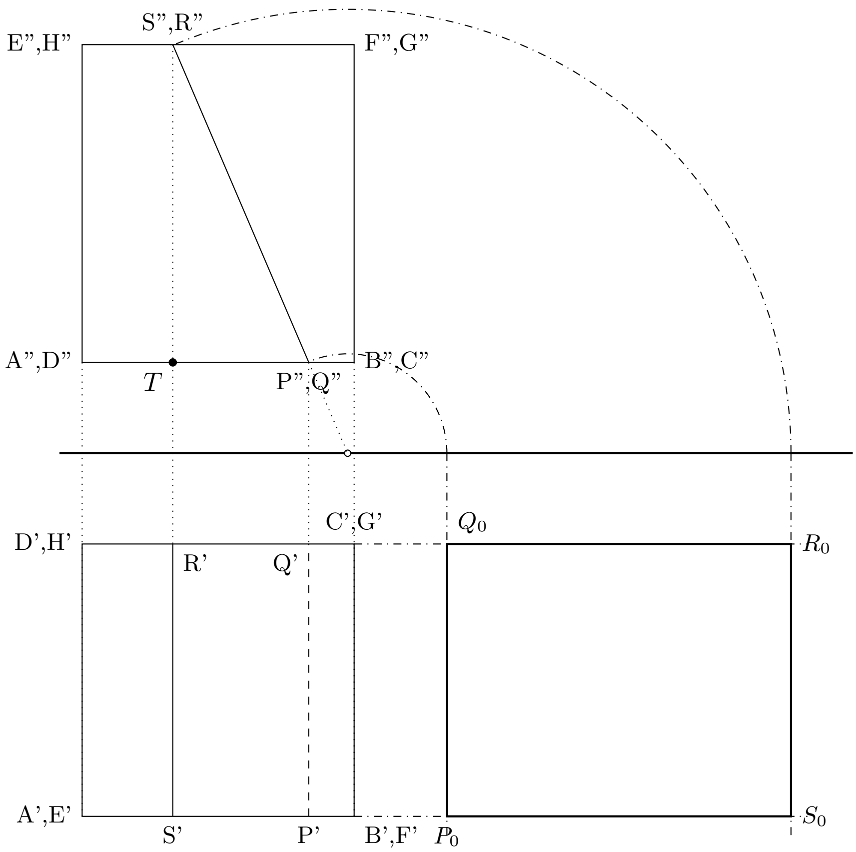
Aufgabe 7.3
Gegeben ist ein Quader, der von einer Ebene in den Punkten P, Q, R, S geschnitten wird (siehe nebenstehende Abbildung; nicht maßstäblich).

$\overline{AB} = \overline{BC} = 6{,}0$ cm; $\overline{AE} = 7{,}0$ cm;
$\overline{AP} = \overline{DQ} = 5{,}0$ cm; $\overline{ES} = \overline{HR} = 2{,}0$ cm.

a) Stellen Sie den Quader einschließlich der Schnittfigur in senkrechter Zweitafelprojektion (auf unliniiertem Papier) dar!

b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PS}$!



a), b)

c) Im Aufriss bilden die Punkte P'', S'' und der zusätzlich eingezeichnete Punkt T ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $P''T = 3$ cm und $S''T = 7$ cm. Die gesuchte Strecke PS ist im Aufriss in wahrer Länge als $P''S''$ abgebildet.
Damit ergibt sich über den Satz des Pythagoras

$$PS = \sqrt{PP'T^2 + S''T^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}62 \text{ cm}$$

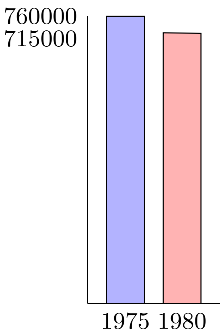
1.25 Abschlussprüfung 1981

Aufgabe 1
Im Jahr 1975 standen in der DDR 715000 Hortplätze zur Verfügung; 1980 waren es 760000 Hortplätze.

a) Wieviel Hortplätze gab es im Jahr 1980 mehr als im Jahr 1975?

b) Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Anzahl der Hortplätze gegenüber 1975 erhöht wurde!

c) Stellen Sie die Anzahl der Hortplätze im Jahr 1975 und die der Hortplätze im Jahr 1980 in einem Diagramm dar!



a) $760000 - 715000 = 45000$. 1980 gab es 45000 Hortplätze mehr als 1975.

b) $760000 : 715000 = 1{,}063 = 106{,}3\%$. Die Anzahl der Hortplätze erhöhte sich um 6,3 %.

Aufgabe 2
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem!

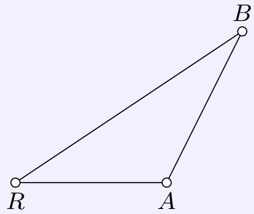
$$(1) \quad 2x + y = 10 \quad (x,y \in \mathbb{R}) \qquad , \qquad (2) \quad 6x + 2y = 34$$

(Führen Sie eine Probe durch!)

Erste Gleichung nach y umstellen, ergibt $y = 10 - 2x$. Einsetzen in (2)

$$\begin{aligned} 6x + 2(10 - 2x) &= 34 \\ 6x + 20 - 4x &= 34 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Den Wert für x in (1) einsetzen, liefert $y = -4$. Lösungsmenge $L = \{(x,y)|(7, -4)\}$.
Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

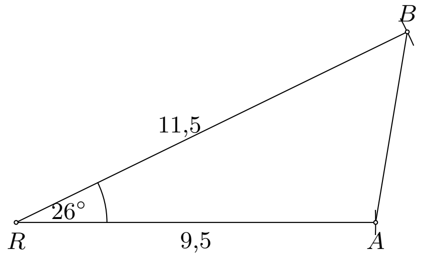


Aufgabe 3
Von einer Radarstation R in Rostock-Warnemünde wurden zwei Schiffe A und B geortet (siehe nebenstehende Abbildung; nicht maßstäblich). Dabei wurden ermittelt:
$\overline{RA} = 9{,}5$ sm; $\overline{RB} = 11{,}5$ sm; Winkel $ARE = 26{,}0°$.

a) Ermitteln Sie zeichnerisch die Entfernung $\overline{AB}$ der Schiffe voneinander! Geben Sie diese Entfernung unter Verwendung der Einheit "Seemeile" an!

b) Ermitteln Sie $\overline{AB}$ auch rechnerisch!

c) Rechnen Sie diese Entfernung in Kilometer um (1 sm = 1,852 km)!



a) Messen der Strecke $\overline{AB}$ in der Zeichnung ergibt $\overline{AB} = 5{,}1$ sm.

b) Kosinussatz $AB^2 = RA^2 + RB^2 - 2 \cdot RA \cdot RB \cdot \cos 26°$, ergibt $\overline{AB} = 5{,}11$ sm.

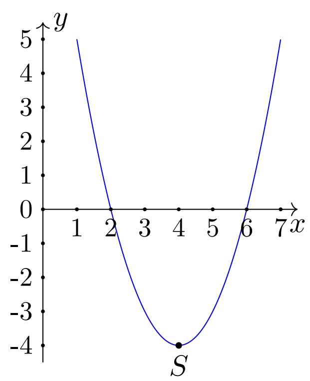
c) $\overline{AB} = 5{,}11 \cdot 1{,}852 = 9{,}46$ km.

Aufgabe 4
Durch die Gleichung $y = x^2–8x + 12$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel! Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

c) Zeichnen Sie diese Parabel mindestens im Intervall $1 \leq x \leq 7$!



a) p-q-Formel mit $p = -8$; $q = 12$

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4 - q}} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$

Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

b) Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform umstellen

$$y = x^2 - 8x + 12 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 12 = (x - 4)^2 - 4$$

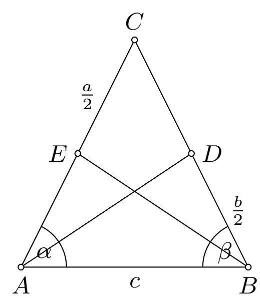
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(4; -3)$.

Aufgabe 5
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{BC}$ sei D, der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{AC}$ sei E.

a) Fertigen Sie hierzu eine Skizze an, und verbinden Sie A mit D und B mit E!

b) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABD und BAE zueinander kongruent sind!

b) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel α und β sowie die Schenkel BC und AC gleich lang, und somit auch die halben Schenkel, d.h. $\overline{AE} = \overline{BD}$.
Die Dreiecke ABD und BAE haben folgende kongruente Stücke:
1. die gemeinsame Seite $\overline{AB} = c$, 2. die halben Schenkel $\overline{AE} = \overline{BD}$ und 3. die kongruenten Innenwinkel $\alpha = \beta$. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke ABD und BAE zueinander kongruent.
w.z.b.w.

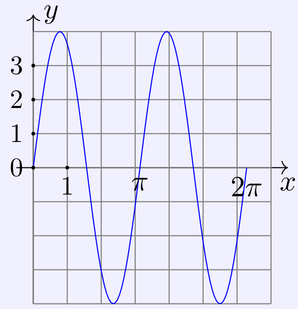


Aufgabe 6

a) Ermitteln Sie den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 5{,}35$ m!

b) Gegeben ist die Gleichung $10^x = \frac{1}{1000}$ $(x \in \mathbb{R})$ Ermitteln Sie x!

c) In der nebenstehenden Abbildung ist eine Funktion mit der Gleichung $y = a \sin bx$ $(a, b \in \mathbb{R})$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ dargestellt. Geben Sie für diese Funktion a und b an!



d) Formen Sie die folgende Gleichung nach h um!

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (r \neq 0)$$

a) Kreisumfang $u = \pi \cdot d = 16{,}8$ m; Kreisflächeninhalt $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 22{,}5$ m^2

b) $10^x = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, d.h. $x = -3$

c) Die Amplitude beträgt $a = 4$. Da die kleinste Periode die Länge π hat, muss $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ sein. Die Funktionsgleichung lautet $y = 4 \sin 2x$.

d) $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
In einem VEB ist ein Bauteil in großer Stückzahl zu bearbeiten.

a) Für 200 dieser Bauteile entstehen Kosten von 2600 Mark. Berechnen Sie daraus die Kosten für die Bearbeitung eines solchen Teiles!

b) Ein Neuerervorschlag sieht den Einbau einer Vorrichtung vor. Dadurch können die Kosten für die Bearbeitung eines Teiles auf 9,00 Mark gesenkt werden. Es entstehen aber einmalige Kosten von 250,00 M für den Einbau der Vorrichtung.
- Wieviel Mark werden bei der Bearbeitung eines Teiles eingespart, wenn die Vorrichtung eingebaut ist?
- Berechnen Sie die Gesamtkosten für den Einbau der Vorrichtung von 200 solcher Teile nach dem Neuerervorschlag!

c) Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Gesamtkosten für den Einbau der Vorrichtung und die Bearbeitung von 200 solcher Teile geringer sind als die Kosten im Fall a)!

d) Wieviel Teile müssen mindestens bearbeitet werden, damit die erzielte Einsparung größer ist als die einmaligen Kosten für den Einbau der Vorrichtung?

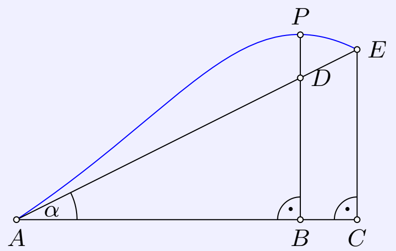
a) Kosten für ein Teil: $\frac{2600}{200} = 13$ Mark.

b) Einsparung je Teil: $12 - 9 = 3$ Mark
Gesamtkosten ergeben sich aus den Kosten je Teil und den Umrüstungskosten
$G = 250 + 200 \cdot 9 = 2050$ Mark

c) $2050/2600 = 0{,}788 = 78{,}8\%$. Die Kosten sind um $100\% - 78{,}8\$ = 21{,}2\%$ geringer.

d) x sei die gesuchte Stückzahl. Es entsteht die Ungleichung $12x > 250 + 9x$ mit der Lösung $x > \frac{250}{3} = 83{,}\overline{3}$. Es müssen mindestens 84 Teile produziert werden, um eine Einsparung zu erzielen.

Aufgabe 7.2



In bergigem Gelände wird eine Straße von A nach E projektiert. Sie soll gleichmäßig ansteigen. (Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Geländeschnitt, nicht maßstäblich) Bekannt sind: $\overline{AC} = 180$ m; $\overline{CE} = 20$ m; $\overline{AB} = 162$ m; $\overline{BP} = 21$ m.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BD}$!

b) Wieviel Meter liegt der Punkt D der projektierten Straße unter dem Geländepunkt P?

c) Berechnen Sie die Größe des Anstiegswinkels α!

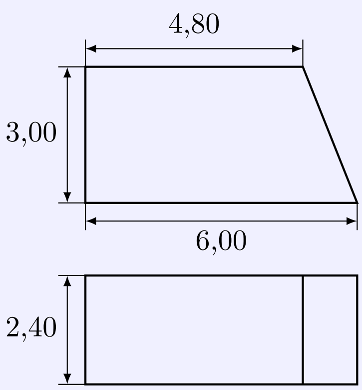
d) Die Steigung einer Straße ist das Verhältnis von Höhenunterschied h zur zugehörigen Straßenlänge l. Sie wird gewöhnlich in Prozent angegeben und nach der Formel $s = v \cdot 100\%$ berechnet. Berechnen Sie die Steigung s dieser Straße!

a) Strahlensatz $AB : AC = BD : CE$, d.h. $BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = 18$ m

b) Der Punkt D liegt somit $21 - 18 = 3$ m unter dem Punkt P.

c) $\tan\alpha = \frac{EC}{AC}$, Anstiegswinkel $\alpha = 6{,}34°$.

d) Die Länge l ist die Strecke AE. $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = 181{,}1$ m
$s = \frac{h}{l} \cdot 100\% = 0{,}11 \cdot 100\%$. Die Steigung der Straße beträgt 11 %.

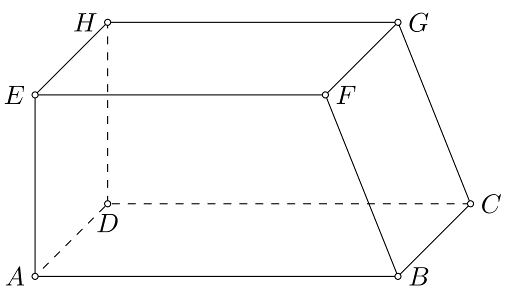


Aufgabe 7.3
In der nebenstehenden Abbildung (alle Maße in m) ist ein Betonkörper, der die Form eines vierseitigen Prismas hat, in Grund- und Aufriss dargestellt.

a) Stellen Sie dieses Prisma in Kavalierperspektive im Maßstab 1 : 100 dar!

b) Die Vorderansicht des Betonkörpers ist ein Trapez. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt!

c) Berechnen Sie das Volumen des Betonkörpers!



b) Trapezfläche $A = \frac{a+c}{2}h = \frac{6+4{,}8}{2} \cdot 3 = 16{,}2$ m^2.

c) Der Betonkörper setzt sich aus einem Quader (Maße: 4,80 m, 2,40 m, 3 m) und einem dreiseitigen geraden Prisma zusammen, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Maßen 1,20 m und 3,00 m und der Höhe 2,40 m ist.

$V = V_Q + V_P = 4{,}8 \cdot 2{,}4 \cdot 3 + \dfrac{1{,}2 \cdot 3}{2} \cdot 2{,}4 = 34{,}56 + 4{,}32 = 38{,}88$ m^3.

1.26 Abschlussprüfung 1982

Aufgabe 1
Ein LKW hat einen Normverbrauch von 25,0 l Kraftstoff auf 100 km.

a) Berechnen Sie daraus den Kraftstoffverbrauch für eine monatliche Fahrstrecke von 8000 km!

b) Durch eine kraftstoffsparende Fahrweise werden je 100 km durchschnittlich nur 23,8 l Kraftstoff verbraucht. Wieviel Liter Kraftstoff werden je 100 km eingespart?

c) Wieviel Prozent Kraftstoff werden auf diese Weise eingespart?

d) Wieviel Liter Kraftstoff können dadurch bei der monatlichen Fahrstrecke von 8000 km eingespart werden?

a) Kraftstoffverbrauch für 8000 km: $\frac{8000 \text{ km}}{100 \text{ km}} \cdot 25 \text{ l} = 2000$ Liter

b) Kraftstoffeinsparung: $25 \text{ l} - 23{,}8 \text{ l} = 1{,}2$ Liter

c) $\frac{1{,}2\text{l}}{25 \text{ l}} \cdot 100\% = 4{,}8\%$

d) Kraftstoffeinsparung: $\frac{8000 \text{ km}}{100 \text{ km}} \cdot 1{,}2 \text{ l} = 96$ Liter

Aufgabe 2
Eine Funktion ist gegeben durch

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

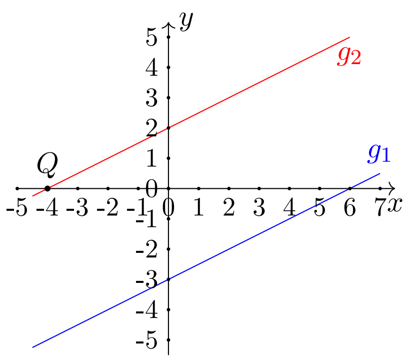
a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion, und bezeichnen Sie ihn mit g_1!

b) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

c) Zeichnen Sie die Gerade g_2, die durch den Punkt $P(0; 2)$ geht und parallel zu g_1 verläuft!

d) Die Gerade g_2 schneidet die x-Achse im Punkt Q. Geben Sie die Koordinaten von Q an!

e) Geben Sie die Gleichung der durch g_2 dargestellten Funktion an!



a, c) siehe Abbildung

b) $\frac{1}{2}x - 3 = 0$ ergibt $x_0 = 6$. Die Nullstelle ist $x_0 = 6$.

d) Nullstelle der Funktion g_2: $x_0 = -4$. Punkt $Q(-4{,}0)$

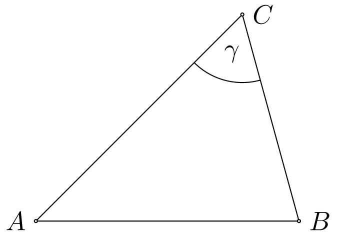
e) Anstieg der Funktion g_2: $m = \frac{1}{2}$, Verschiebung auf der y-Achse $n = 2$, d.h. $g_2 : y = \frac{1}{2}x + 2$

Aufgabe 3
Von einem Dreieck ABC sind gegeben: $\overline{AB} = c = 8{,}7$ cm; $\overline{AC} = b = 9{,}6$ cm; $\overline{BC} = a = 7{,}1$ cm.

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck! Messen Sie die Größe des Winkels $ACB = \gamma$, und geben Sie diesen Messwert an!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels γ!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!



a) siehe Abbildung; Messung: $\gamma = 60°$ oder $61°$

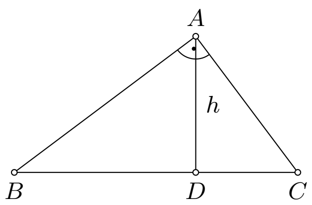
b) Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos\gamma$,
also $\cos\gamma = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} = 0{,}491$ mit dem Winkel $\gamma = 60{,}6°$.

c) Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 29{,}7\ \text{cm}^2$.

Aufgabe 4
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem Winkel $BAC = \gamma = 90°$.

a) Zeichnen Sie ein solches Dreieck! Zeichnen Sie in dieses Dreieck die Höhe h ein! Bezeichnen Sie den Fußpunkt der Höhe mit D!

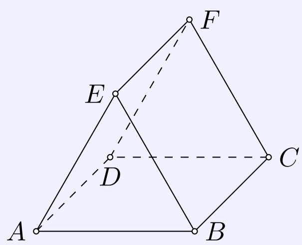
b) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD einander ähnlich sind!



a) siehe Abbildung

b) Die Dreiecke ABC und ABD haben den gemeinsamen Innenwinkel bei Punkt B. Außerdem besitzen beide einen rechten Winkel; $\triangle ABC$ bei A und $\triangle ABD$ bei D, da D der Höhenfußpunkt auf BC ist.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz WW sind die beiden Dreiecke ABC und ABD zueinander ähnlich.

Aufgabe 5

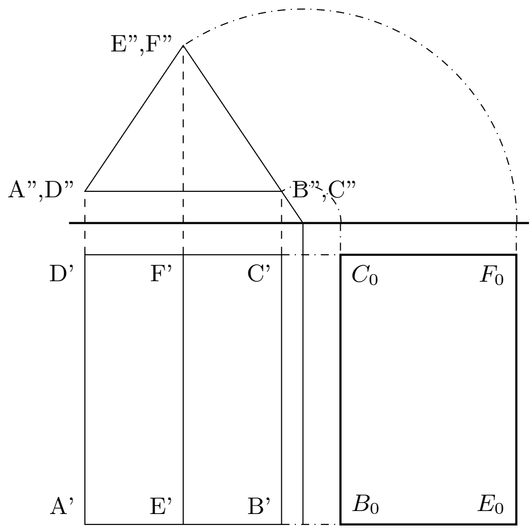


Gegeben ist ein gerades Prisma $ABCDEF$ (siehe nebenstehende Abbildung; nicht maßstäblich).
$\overline{AB} = \overline{DC} = 6{,}2$ cm; $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{EF} = 8{,}5$ cm; Winkel $BAE =$ Winkel $EBA = 56°$.

a) Stellen Sie das Prisma in senkrechter Zweitafelprojektion dar! Bezeichnen Sie alle Eckpunkte entsprechend der Skizze!

b) Konstruieren Sie die Fläche $BCFE$ in wahrer Größe und Gestalt!

a), b)

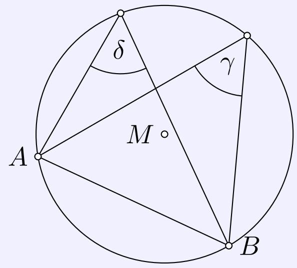


Aufgabe 6

a) Vereinfachen Sie den folgenden Term soweit wie möglich! $5a–(3a–2b) + 2(4b–5a)–10b$

b) Gegeben ist der Term $\frac{30a}{b–2}$.
- Berechnen Sie den Wert des Terms für $a = 4$ und $b = 7$!

- Geben Sie denjenigen Wert von b an, für den der Term nicht definiert ist!



c) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2–6x = 0$ an!

d) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Winkel γ und δ. Geben Sie die Größe von δ an, wenn $\gamma = 38°$ ist!

a) $5a–(3a–2b) + 2(4b–5a)–10b = 5a - 3a + 2b + 8b - 10a - 10b = -8a$

b) $\frac{30\cdot 4}{7-2} = 24$; Der Term ist für $b = 2$ nicht definiert.

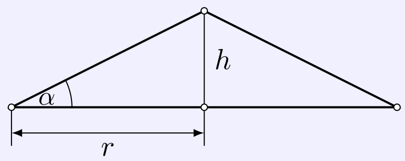
c) $x^2 - 6x = 0$; $x \cdot (x - 6) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$.

d) Nach dem Peripheriewinkelsatz sind δ und γ Peripheriewinkel über der gleichen Sehne AB, und somit $\delta = \gamma = 38°$.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1

Auf einer Baustelle ist ein Kieshaufen in Form eines geraden Kreiskegels aufgeschüttet worden. Er ist 4,0 m hoch und hat einen Schüttwinkel $\alpha = 30°$. Die nachstehende Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt den Achsenschnitt eines solchen Kegels.



a) Berechnen Sie den Radius r der Grundfläche dieses Kegels

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels!

c) Berechnen Sie die Masse des aufgeschütteten Kieses! ($\rho = 2{,}2\ \mathrm{t/m^3}$)

d) Ein zweiter kegelförmiger Kieshaufen habe den gleichen Schüttwinkel, sei aber doppelt so hoch wie der erste. In welchem Verhältnis stehen
- die Radien,
- die Volumen dieser beiden Kegel?

a) $\tan\alpha = \frac{h}{r}$, also $r = \frac{h}{\tan\alpha} = 6{,}93$ Meter.

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 201{,}2\ \mathrm{m}^3$.

c) $m = \rho \cdot V = 2{,}2\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3} \cdot 201{,}2\ \mathrm{m}^3 = 442{,}6$ Tonnen.

d) Ist der Kieshaufen doppelt so hoch, bei gleichem Schüttwinkel, so ist der Radius doppelt so groß. Das Volumen ist dann viermal so groß.

Aufgabe 7.2
Während der Getreideernte wird neben dem Mähdrescher E 512 immer häufiger der leistungsfähigere Typ E 516 eingesetzt. In der ersten Schicht ernteten 9 Mähdrescher vom Typ E 512 und 3 vom Typ E 516 zusammen eine Fläche von 180 ha ab.
In der zweiten Schicht ernteten 6 Mähdrescher vom Typ E 512 und 5 vom Typ E 516 unter sonst gleichen Bedingungen zusammen 192 ha ab.

a) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von einem E 512 und die Größe der Fläche, die von einem E 516 unter diesen Bedingungen in einer Schicht abgeerntet wurde! (Probe!)

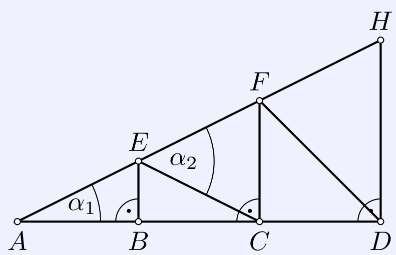
b) Wieviel Hektar könnte ein Mähdrescher E 516 in einer Schicht von 8 Stunden abernten, wenn er ohne Unterbrechung mit einer durchschnittlichen Arbeitsgeschwindigkeit von 7,0 km/h fahren und seine volle Arbeitsbreite von 6,60 m ausnutzen würde?

a) x ... Leistung eines Mähdreschers E 512, y ... Leistung eines Mähdrescher E 516. Dann wird 1.Tag: $9x + 3y = 180$ ha; 2.Tag: $6x + 5y = 192$ ha.
Lösung des Gleichungssystems: $x = 12; y = 24$. Ein E 512 bearbeitet in einer Schicht 12 ha Leistung, ein E 516 dagegen 24 ha. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

b) In einer Stunde legt ein E 516 7 km Fahrstrecke zurück und bearbeitet damit eine Fläche von $A = 7000 \text{ m} \cdot 6{,}6 \text{ m} = 46200 \text{ m}^2 = 4{,}62$ ha.
In 8 Stunden könnte er theoretisch $4{,}62 \cdot 8 = 36{,}96$ ha bearbeiten.

Aufgabe 7.3

Die nebenstehende Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt das Konstruktionsschema eines Dachbinders.
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2{,}40$ m; $\overline{DH} = 3{,}00$ m.



a) Berechnen Sie die Längen der Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AH}$.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels α_1!

d) Begründen Sie, dass das Dreieck ACE gleichschenklig ist!
Begründen Sie, dass $\alpha_2 = 2\alpha_1$ ist!

a) Strahlensatz: $\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{AD} : \overline{HD}$ mit $\overline{BE} = 1{,}00$ m und analog $\overline{CF} = 2{,}00$ m.

b) Satz des Pythagoras: $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DH}^2} = 7{,}8$ m.

c) $\tan\alpha = \frac{\overline{DH}}{\overline{AD}} = 0{,}4167$, also $\alpha = 22{,}62°$.

d) Die zwei Dreiecke ABE und BCE sind kongruent, da rechwinklig, die gemeinsame Seite BE und gleich lange Seiten $AB = BC$. Folglich sind auch die dritten Seiten AE und EC gleich lang. Das Dreieck ACE ist damit gleichschenklig.

α_2 ist Außenwinkel des Dreiecks ACE und gleich der Summe $\alpha_1 + \angle BCE$. Da $\triangle ACE$ gleichschenklig ist, gilt $\angle BCE = \alpha_1$ und insgesamt $\alpha_2 = 2\alpha_1$.

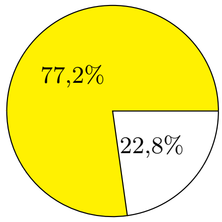
1.27 Abschlussprüfung 1983

Aufgabe 1
a) Im Jahre 1980 wurden in der DDR 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie erzeugt. 1985 sollen 13,0 % mehr Elektroenergie erzeugt werden als 1980. Berechnen Sie diese Steigerung! (Angabe in Mrd. kWh) Wieviel Elektroenergie soll 1985 insgesamt erzeugt werden?

b) 1980 wurden von den insgesamt erzeugten 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie 77,2 Mrd. kWh aus Rohbraunkohle gewonnen. Wieviel Prozent der Elektroenergie wurden aus Rohbraunkohle erzeugt?
Stellen Sie diesen Anteil in einem Kreisdiagramm dar! (Schraffieren Sie den entsprechenden Sektor!)

a) $98{,}8 \cdot 1.13 = 111{,}6$; $98{,}8 \cdot 0.13 = 12{,}8$; d.h es werden 12,8 Mrd. kWh mehr Elektroenergie erzeugt, insgesamt 111,6 Mrd. kWh.

b) $77{,}2 : 98{,}8 = 0{,}781$; 78,1 % der Elektroenergie wurden aus Rohbraunkohle erzeugt.
77,2 von 100 entsprechen 277,9° des Vollkreises. siehe Abbildung



Aufgabe 2
Gegeben ist die Ungleichung $15 - 3x > 5(x-1) \qquad (x \in \mathbb{R})$.
a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie von den Zahlen $-4; 2{,}5; \frac{27}{10}; 0{,}05$ diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

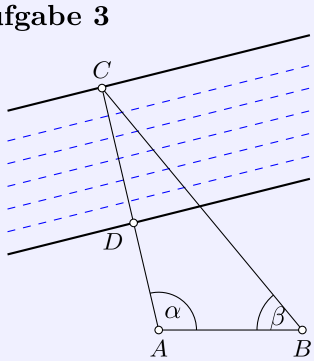
c) Die Ungleichung hat die Lösungsmenge L, die Menge der natürlichen Zahlen sei $\mathbb{N}$. Geben Sie alle Elemente des Durchschnitts der Mengen L und $\mathbb{N}$ an!

a) $15 - 3x > 5(x-1)$, $15 - 3x > 5x - 5$, $20 > 8x$, $x < 2{,}5$; $L = \{x \in \mathbb{R} | x < 2{,}5\}$

b) Die Ungleichung wird von den Zahlen -4 und 0,05 erfüllt.

c) $L \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$

Aufgabe 3

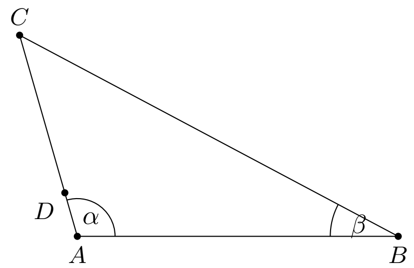


Eine Pionierkompanie der NVA erhielt den Befehl, über einen Fluss einen Übergang vom Punkt D zum Punkt C zu schaffen (siehe nebenstehende, nicht maßstäbliche Abbildung). Durch Messung wurden ermittelt:
$\overline{AB} = c = 85$ m; $\overline{AD} = d = 12$ m
Winkel $CAB = \alpha = 106°$; Winkel $ABC = \beta = 28°$

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab! Tragen Sie den Punkt D ein, und ermitteln Sie die Länge des Flussüberganges $\overline{DC}$ mit Hilfe der Konstruktion!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $BCA = \gamma$!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $AC = b$! Berechnen Sie die Länge des Flussüberganges $\overline{DC}$!



a) aus der Darstellung kann man näherungsweise die Strecke $CD \approx 43$ m ablesen.

b) $\angle BCA = \gamma = 180° - 106° - 28° = 46°$

c) Mit dem Sinussatz wird $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Einsetzen der Größen und Umstellen ergibt $AC = 55{,}5$ m. Die Strecke CD hat dann die Länge 55 m - 12 m = 43 m.

Aufgabe 4
Durch die Gleichung $y = x^2 - 5x + \frac{9}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion gegeben.

a) Vervollständigen Sie die zu dieser Funktion gehörende Wertetabelle!

x	0	5
y		

b) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

c) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

d) Zeichnen Sie diese Parabel mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 5$!

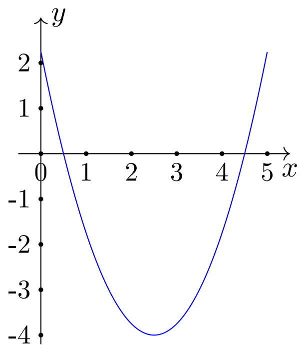
a)

x	0	5
y	0	0

b) $p = -5$, $q = 2{,}25$, $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm 2$; $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 4{,}5$
Die Nullstellen liegen bei 0,5 und 4,5.

c) Scheitelpunktsform: $y = x^2 - 5x + \frac{9}{4} = (x - 2{,}5)^2 - \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = (x - 2{,}5)^2 - 4$
Der Scheitelpunkt liegt somit bei $S\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

d)



Aufgabe 5
Vermindert man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl um 1, so ist diese Differenz stets durch 4 teilbar.

a) Wählen Sie eine ungerade Zahl, und zeigen Sie, dass die Aussage für diese Zahl gültig ist!

b) Geben Sie unter Verwendung der Variablen n ($x \in \mathbb{N}$) eine allgemeine Darstellung einer ungeraden natürlichen Zahl an!

c) Beweisen Sie, dass obenstehende Aussage für jede ungerade natürliche Zahl gültig ist!

a) ungerade Zahl z.B. $z = 3$. Damit wird $z^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$. 8 ist durch 4 teilbar.

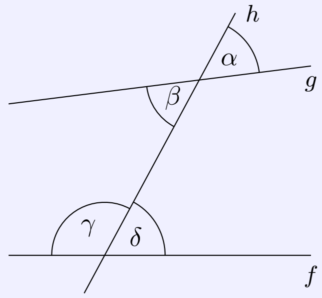
b) allgemeine Darstellung einer ungeraden Zahl $z = 2n + 1$.

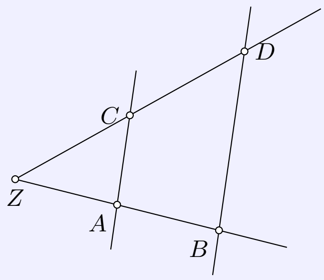
c) Für $z = 2n + 1$ wird $z^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4(n^2 + n)$
Da n eine natürliche Zahl ist, ist es auch $(n^2 + n)$. Damit ist z durch 4 teilbar.

Aufgabe 6
a) Berechnen Sie $\sqrt{1{,}44 \cdot 10^4}$

b) Ermitteln Sie $\sin 118°$ und $\cos 118°$.

c) Welche der Winkel α, β, γ und δ (siehe Abbildung unten links, nicht maßstäblich) bilden ein Paar von Wechselwinkeln? Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass Wechselwinkel kongruent zueinander sind.





d) Gegeben sind: $\overline{ZA} = 3$ cm; $\overline{ZB} = 12$ cm; $\overline{ZC} = 5$ cm. Berechnen Sie die Länge von $\overline{ZD}$. (siehe Abbildung oben rechts; $AC \parallel BD$, nicht maßstäblich)

a) $\sqrt{1{,}44 \cdot 10^4} = \sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{10^4} = 1{,}2 \cdot 10^2 = 120.$

b) 118° liegt im 2.Quadranten, d.h. $\sin 118° = \sin(180° - 118°) = \sin 62° = 0{,}8829$
und $\cos 118° = -\cos(180° - 118°) = -\cos 62° = -0{,}4695$

c) Wechselwinkel sind β und δ. Wechselwinkel sind zueinander kongruent, wenn die geschnittenen Geraden (in der Abbildung f und g) parallel sind.

d) 1.Strahlensatz $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$; Umstellen ergibt $\overline{ZD} = \frac{\overline{ZB} \cdot \overline{ZC}}{\overline{ZA}} = 20$ cm.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Eine Feldbaubrigade erntete mit 6 Kartoffelvollerntemaschinen gleichen Typs in 40 Stunden ein 48 ha großes Feld ab.

a) Insgesamt wurden dabei 9600 dt Kartoffeln geerntet. Berechnen Sie den Ertrag pro Hektar.

b) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von einer Maschine in einer Stunde abgeerntet werden kann.

c) Welche Zeit hätte man beim Einsatz von 8 solcher Maschinen gebraucht?

d) In welcher Gesamtzeit hätte diese Feld abgeerntet werden können, wenn man nach einem 15stündigen Einsatz dieser 8 Maschinen noch 2 solcher Maschinen zusätzlich eingesetzt hätte?

a) 9600 dt : 48 ha = 200 dt/ha. Der Ertrag pro Hektar beträgt 200 dt Kartoffeln.

b) 9600 dt : 6 = 1600 dt je Maschine. 1600 dt : 40 h = 40 dt/h. Eine Maschine erntet in einer Stunde 40 dt Kartoffeln.

c) 6 Maschinen $\cdot$ 40 Stunden = 240 Arbeitsstunden für das Feld. Mit 8 Maschinen benötigt man dann 240 Arbeitsstunden : 8 = 30 Stunden.

d) 1 Maschine erntet in 40 Stunden 48 ha : 6 = 8 ha ab, und somit in einer Stunden 0,2 Hektar. Wenn 8 Maschinen 15 Stunden arbeiten, d.h. $8 \cdot 15 = 120$ Arbeitsstunden leisten, so sind 0,2 Hektar $\cdot$ 120 Stunden = 24 Hektar abgeerntet.

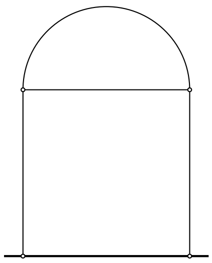
Für die restlichen 24 ha sind erneut 120 Stunden nötig und somit für jede der 10 Maschinen je 12 Stunden. Insgesamt wird das Feld dann in 15 h + 12 h = 27 Stunden abgeerntet.

Aufgabe 7.2
Ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Durchmesser d stehe auf seiner Grundfläche. Auf seiner Deckfläche sei eine Halbkugel mit dem gleichen Durchmesser aufgesetzt.

a) Zeichnen Sie den Aufriss eines solchen zusammengesetzten Körpers für $d = h = 4{,}4$ cm!

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers für $d = h = 4{,}4$ cm!

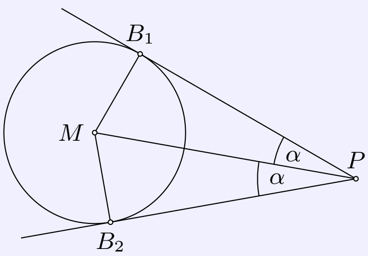
c) Bei einem anderen so zusammengesetzten Körper soll das Volumen des Zylinders genau so groß wie das der Halbkugel sein. Berechnen Sie die Höhe dieses Zylinders für $d = 4{,}4$ cm!



b) Zylindervolumen: $V_Z = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = 66{,}9$ cm^3.
Halbkugelvolumen: $V_H = \frac{4}{6}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 22{,}3$ cm^3.
Der Körper hat ein Gesamtvolumen von $V = 66{,}9$ cm$^3 + 22{,}3$ cm$^3 = 89{,}2$ cm^3.

Der Zylinder soll ein Volumen von 22,3 cm^3 besitzen, also ein Drittel des ursprünglichen Zylinder. Da die Grundfläche gleich bleibt, wird die Höhe gedrittelt. Die Höhe des neuen Zylinders ist $h = \frac{4{,}4}{3}$ cm $= 1{,}47$ cm.

Aufgabe 7.3
Von einem Punkt P, der außerhalb eines Kreises um den Punkt M liegt, sind die Tangenten an diesen Kreis gezeichnet. Sie berühren den Kreis in den Punkten B_1 bzw. B_2 (siehe Abbildung)
$\overline{MB_1} = \overline{MB_2} = r = 4$ cm; Winkel $B_2PB_1 = 2\alpha = 50°$



a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PM} = e$.

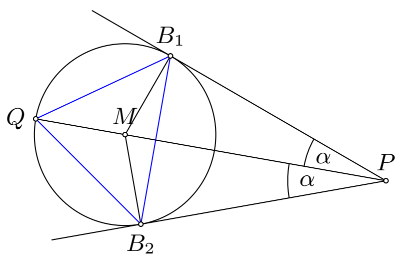
b) Berechnen Sie die Länge des Tangentenabschnitts $\overline{PB_1} = t$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks PB_1MB_2.

d) Die Verlängerung von $\overline{PM}$ über M hinaus schneide den Kreis im Punkt Q. Berechnen Sie die Größe des Winkels B_1QB_2.

a,b) Das Dreieck MPB_1 ist rechtwinklig mit einem Innenwinkel $\alpha = 25°$ und seiner Gegenkathete $\overline{MB_1} = 4$ cm. Die Länge der Hypotenuse $\overline{MP}$ ist dann $\overline{MP} = \frac{\overline{MB_1}}{\sin\alpha} = 9{,}46$ cm.
Die zweite Kathete $\overline{PB_1}$ ist dann $\overline{PB_1} = \overline{MP}\cos\alpha = 8{,}58$ cm.

c) Flächeninhalte des rechtwinkligen Dreiecks MPB_1: $A = \overline{PB_1} \cdot \overline{MB_1} = 34{,}3$ cm^2.
Das Viereck PB_1MB_2 hat dann einen Flächeninhalt von 68,6 cm^2.



d) Der Winkel B_1QB_2 ist Peripheriewinkel über der Sehne B_1B_2, d.h. halb so groß wie der Zentriwinkel B_1MB_2. Dieser ist Innenwinkel des Vierecks PB_1MB_2 und wird $360° - 2 \cdot 90° - 2\alpha = 130°$ groß. Der gesuchte Winkel B_1QB_2 hat die Größe 65°.

1.28 Abschlussprüfung 1984

Aufgabe 1
In einem Maschinenbaubetrieb wird ein Schweißroboter eingesetzt.

a) Die bisherige Tagesproduktion von 425 Teilen konnte dadurch um 84,0 % gesteigert werden. Wieviel Teile werden nun täglich gefertigt?

b) Die Herstellungskosten je Stück sanken dadurch von ursprünglich 8,60 M auf 6,90 M. Auf wieviel Prozent wurden die Herstellungskosten gesenkt?

a) $425 \cdot 1{,}84 = 782$. Täglich wurden nun 782 Teile produziert.

b) $6{,}90$ M : $8{,}60$ M $= 0{,}8214 \approx 82{,}1\%$. Die Herstellungskosten wurden auf 82,1% gesenkt.

Aufgabe 2
Lösen Sie folgende Gleichung! (Probe!) $3(5x+3) = 3x - (6x - 18)$; $(x \in \mathbb{R})$

$3(5x+3) = 3x - (6x - 18) \Rightarrow 15x + 9 = 3x - 6x + 18 \Rightarrow 18x = 9 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

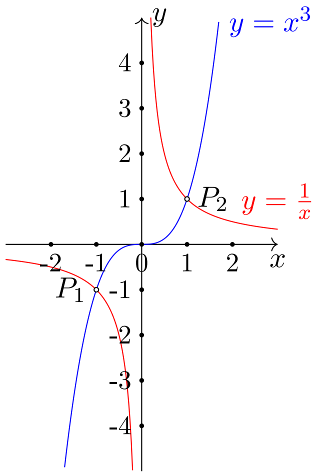
Aufgabe 3
a) Durch die Gleichung $y = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion gegeben. Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

b) Durch die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$ ist eine weitere Funktion gegeben.
Übertragen Sie die zu dieser Funktion gehörende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt, und vervollständigen Sie die Tabelle!

x	4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$				4
y				-2	4	2	1	

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie von jenem der beiden Punkte die Koordinaten an!



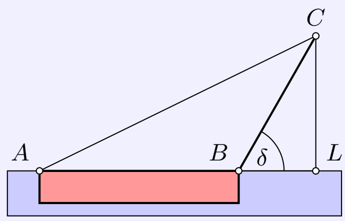
a,b) Darstellung

x	4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	4
y	0,25	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-2	4	2	1	$-\frac{1}{4}$

c) Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $P_1(-1,-1)$ und $P_2(1,1)$.
evtl. Rechnung: $x^3 = \frac{1}{x}$ ergibt $x^4 = 1$ und $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{1}$ mit den entsprechenden Punktkoordinaten.

Aufgabe 4

Ein Schwimmkran hat die Auflagebreite $\overline{AB} = 31$ m. Sein schwenkbarer Ausleger hat die Länge $\overline{BC} = 24$ m.(siehe stark vereinfachte Abbildung, nicht maßstäblich).
Berechnen Sie für den Neigungswinkel $LBC = \delta = 60°$



a) Die Arbeitsweite $\overline{BL}$,

b) Die Länge $\overline{AC}$ des Spannseiles!

a) $\frac{BL}{BC} = \cos\delta$, d.h. $BL = BC \cdot \cos 60° = 12$ m. Die Arbeitsweite beträgt 12 m.

b) Für CL ergibt sich $CL = BC \cdot \sin 60° = 20{,}78$ m und somit nach dem Satz des Pythagoras $AC = \sqrt{CL^2 + (AB + BL)^2} = 47{,}76$ m. Das Spannseil ist rund 47,8 m lang.

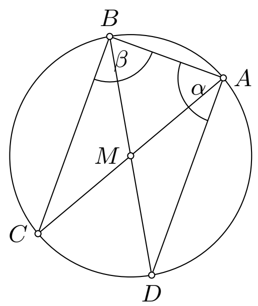
Aufgabe 5

Gegeben sei ein Kreis mit einer Sehne $\overline{AB}$, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Ferner seien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Durchmesser des Kreises.

a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur, und tragen Sie die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ ein!

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels BAD und die des Winkels CBA unter Verwendung eines geeigneten Satzes! Welchen Satz haben Sie benutzt?

c) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD zueinander kongruent sind!

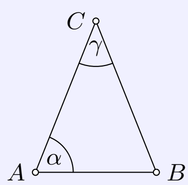


a) Zeichnung
b) Die Winkel $BAD = \alpha$ und $CBA = \beta$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen BD und AC und somit, nach dem Satz des Thales, rechtwinklig, d.h. gleich 90°.

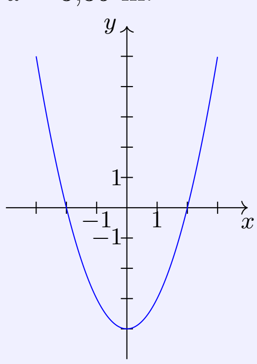
c) Die Dreiecke ABC und ABC haben die Seite AB gemeinsam und jeweils einen Durchmesser des Kreises als weitere Sehne ($AC = BD$). Außerdem haben sie jeweils einen rechten Winkel (α bzw. β). Nach dem Kongruenzsatz SSW sind beide Dreiecke zueinander kongruent, da der gleiche Winkel der größten Seite gegenüberliegt.

Aufgabe 6

a) Für ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ (siehe nebenstehende Abbildung) sei $\alpha = 50°$. Geben Sie die Größe von γ an!



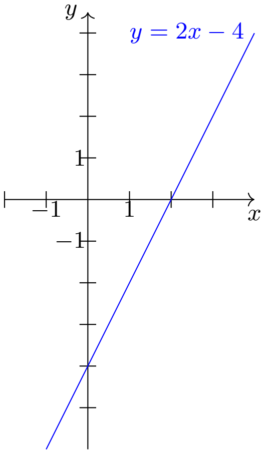
b) Ermitteln Sie das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 3{,}35$ m!



c) Berechnen Sie $(3x + 5y)^2$!

d) Durch die Gleichung $y = 2x – 4$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion gegeben. Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion! Berechnen Sie deren Nullstelle!

e) Nebenstehende Abbildung zeigt den Graph einer quadratischen Funktion! Geben Sie deren Gleichung an!



a) Im gleichschenkligen Dreieck ($\overline{AC} = \overline{BC}$) sind die Winkel an der Basis gleich groß. Über die Innenwinkelsumme wird damit $\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 80°$.

b) Wüfelvolumen $V = a^3 = 3{,}35^3\ \mathrm{m}^3 = 37{,}59\ \mathrm{m}^3$.

c) $(3x + 5y)^2 = 9x^2 2 \cdot 3x \cdot 5y + 25y^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.

d) Abbildung, Nullstelle $2x - 4 = 0$ ergibt $x = 2$. Die Nullstelle liegt bei $x = 2$.

e) Funktionsgleichung $y = x^2 - 4$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
a) Durch die Gleichung $y = 3 \cdot \sin 2x$ ist eine Winkelfunktion gegeben.
Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

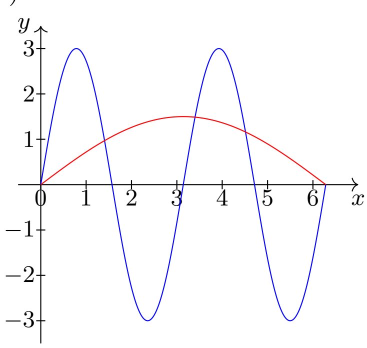
b) Von einer Funktion $y = a \cdot \sin bx$ ($a{,}b > 0$; $x \in \mathbb{R}$) sind bekannt: Wertebereich: $-1{,}5 \leq y \leq 1{,}5$; kleinste Periode: 4π.
Wie lautet die Gleichung dieser Funktion? Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ an!

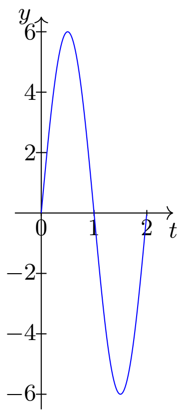
c) Zur Beschreibung harmonischer Schwingungsvorgänge wird die Gleichung

$$y = f(t) = y_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

verwendet. Skizzieren Sie in einem geeigneten Koordinatensystem den zeitlichen Verlauf einer vollen Schwingung für den Fall $y_{\max} = 6$ cm und $T = 2$ s!

a)





c)

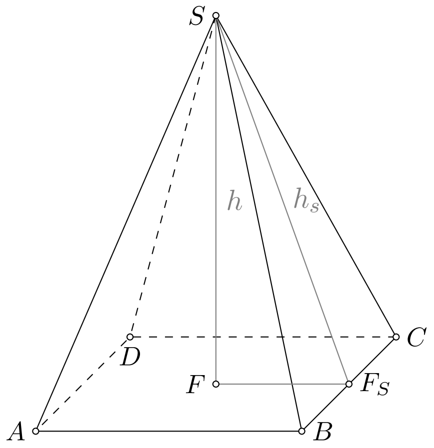
b) Mit dem Wertebereich wird $a = 1{,}5$. Mit der kleinsten Periode 4π wird $b = \frac{1}{2}$. Funktionsgleichung $y = 1{,}5 \cdot \sin \frac{1}{2}x$
In der Abbildung die rote Funktion. Die Nullstellen sind in diesem Intervall $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$.

Aufgabe 7.2
Das Dach eines Turmes hat die Form einer geraden Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 4{,}4$ m. Die Höhe h der Pyramide beträgt 6,1 m.

a) Stellen Sie diese Pyramide im Maßstab 1 : 100 in Kavalierperspektive dar!

b) Zeichnen Sie die Höhe h der Pyramide und die Höhe h_S einer Seitenfläche ein!

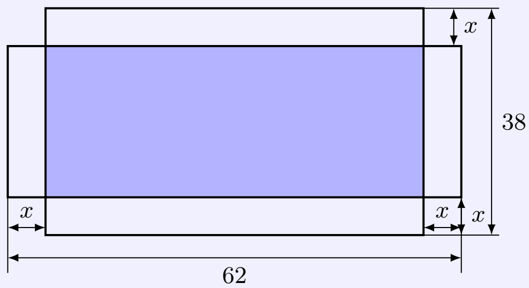
c) Das Dach dieses Turmes soll neu gedeckt werden. Für 1 m^2 Dachfläche sind 54 Ziegel zu planen. Berechnen Sie, wieviel Dachziegel insgesamt bereitgestellt werden müssen!



a,b) siehe Darstellung
c) Das Dach des Turms entspricht der Oberfläche der Pyramide ohne Grundfläche. Die gesuchte Dachfläche besteht aus 4 kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundseite a und der Dreieckshöhe h_s.

Dreieckshöhe h_s: Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck SFF_S
$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, womit $h_s = 6{,}48$ m wird.
Dachfläche: $A = 4A_{\text{Dreieck}} = 4\left(\frac{1}{2}a \cdot h_s\right) = 57{,}1\ \mathrm{m}^2$.
Da für 1 m^2 54 Ziegel geplant sind, benötigt man für das ganze Dach $57{,}1 \cdot 54 = 3081{,}2$, d.h. also 3082 Ziegel.

Aufgabe 7.3
Zur Herstellung oben offener quaderförmiger Kästen stehen gleich große rechteckige Blechplatten mit 62 cm Länge und 38 cm Breite zur Verfügung. Von ihnen werden an den Ecken quadratische Flächen mit der Seitenlänge x cm herausgeschnitten.
Der schraffierte rechteckige Teil wird zur Grundfläche des Kastens (siehe Abbildung, nicht maßstäblich, alle Maßangaben in cm).



a) Es sei $x = 2{,}5$ cm. Berechnen Sie für diesen Fall das Volumen des Kastens!

b) Der Inhalt der Grundfläche des Kastens betrage 1300 cm^2. Berechnen Sie für diesen Fall den Wert von x! Berechnen Sie das Volumen dieses Kastens.

a) Volumen: $V = (62 - 2x)(38 - 2x) \cdot x = (62 - 5)(38 - 5) \cdot 2{,}5 = 4096\ \mathrm{cm}^3$.
Der Kasten hat ein Volumen von 4096 cm^3.

b) Grundfläche: $A = (62 - 2x)(38 - 2x) = 1300\ \mathrm{cm}^2$, mit der quadratischen Gleichung $1300 = 4x^2 - 200x + 2356$, d.h. $x^2 - 50x + 264$ und den Lösungen $x_1 = 6$ cm und $x_2 = 44$ cm.

Die zweite Lösung entfällt, da sonst die Seitenkante $38 - 2x$ negativ würde. Mit $x_1 = 6$ ergibt sich ein Kasten mit den Kantenlängen 6 cm, 50 cm und 26 cm sowie dem Volumen nach a) zu 7800 cm^3.
Wenn $x = 6$ cm ist, hat der Kasten hat eine Grundfläche von 1300 cm^2 und ein Volumen von 4096 cm^3.

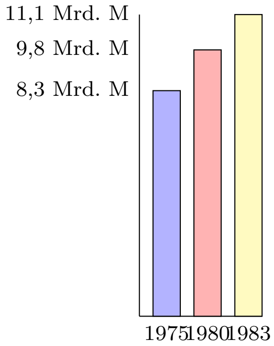
1.29 Abschlussprüfung 1985

Aufgabe 1
Im Jahre 1975 wurden aus dem Staatshaushalt der DDR für das Bildungswesen (einschließlich Hoch- und Fachschulen) 8,3 Mrd. Mark ausgegeben.

a) 1980 waren die Ausgaben um 18 % höher als 1975. Berechnen Sie die Ausgaben für 1980!

b) 1983 betrugen die Ausgaben 11,1 Mrd. Mark. Auf wieviel Prozent stiegen sie gegenüber 1975?

c) Stellen Sie die Ausgaben für 1975, 1980 und 1983 in einem Diagramm dar! (Beschriftung!)



a) $8{,}3 \cdot 1{,}18 = 9{,}79$ Mrd. Mark im Jahre 1980

b) $\frac{11{,}1}{8{,}3} \approx 1{,}34$, d.h. die Ausgaben für das Bildungswesen waren 1983 rund 34 % höher als 1975.

Aufgabe 2
Gegeben ist das Gleichungssystem

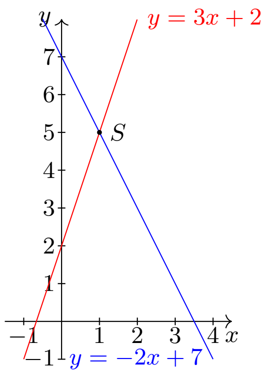
$$y = –2x + 7 \qquad \text{(I)}$$
$$3y–6 = 9x \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{(II)}$$

a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!

b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion! Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem dar! Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an!

a) Gleichung (I) in (II) einsetzen ergibt: $3(-2x + 7) - 6 = 9x$.
Auflösen: $-6x + 21 - 6 = 9x$, $15 = 15x$ mit der Lösung $x = 1$.
Einsetzen in Gleichung (I) ergibt $y = 5$.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist $L = \{(x,y)|(1,5)\}$.

b) Das Auflösen der Gleichung (II) nach y ergibt die Funktionsgleichung der linearen Funktion $y = 3x + 2$.
Der Schnittpunkt S der zwei Funktionen hat die Koordinaten $S(1; 5)$.

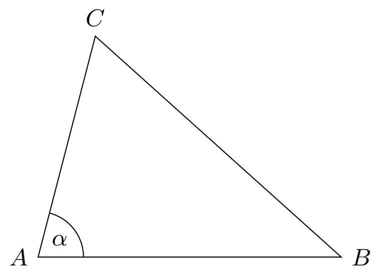


Aufgabe 3
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:
$\overline{AB} = c = 8{,}9$ cm; $\overline{AC} = b = 6{,}7$ cm; $\overline{BC} = a = 9{,}7$ cm.

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!

b) Messen Sie die Größe des Winkels $BAC = \alpha$ und geben Sie diesen Messwert an!

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels α!



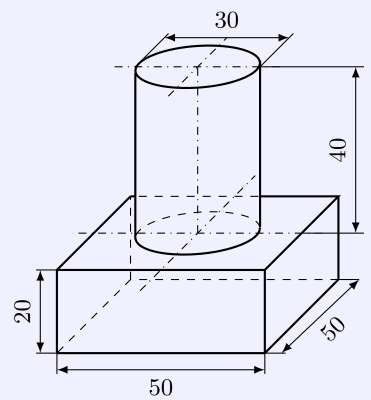
a) siehe Zeichnung
b) Messwert $\alpha = 75°$

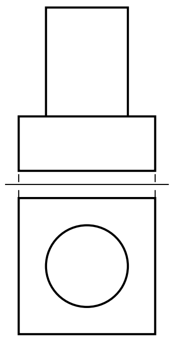
c) Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, d.h. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \approx 0{,}2516$
Für den Winkel wird damit $\alpha = 75{,}4°$.

Aufgabe 4
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Werkstück aus Stahl ($\rho = 7{,}8$ g/cm^3), das aus einem quaderförmigen und einem zylinderförmigen Teil besteht.

a) Berechnen Sie die Masse des Werkstücks!

b) Stellen Sie das Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1:1 dar! (Benennung der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)





a) Das Werkstück setzt sich aus einem Quader und einem Zylinder zusammen. (alle Maße in mm)
Quadervolumen: $V_Q = a \cdot b \cdot c = 50 \cdot 50 \cdot 20 = 50000$ mm^3
Zylindervolumen: $V_Z = \pi r^2 h = \pi 15^2 \cdot 40 = 28270$ mm^3
Volumen des Werkstücks: $V = V_Q + V_Z = 78270$ mm$^3 = 78{,}27$ cm^3

Mit der angegeben Dichte ρ hat das Werkstück die Masse $m = \rho \cdot V = 610{,}5$ g.

Aufgabe 5
a) Geben sie unter Verwendung der Variablen n ($n \in \mathbb{N}$) drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, deren kleinste ungerade ist!

b) Beweisen Sie, dass folgende Aussage wahr ist! ”Wenn die kleinste von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ungerade ist, so ist deren Summe durch 6 teilbar.”

c) Zeigen Sie, dass die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist!

a) ungerade Zahl $z = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Die drei Zahlen sind dann $z = 2n + 1$, $2n + 2$ und $2n + 3$.
Ihre Summe $s = 2n + 1 + 2n + 2 + 2n + 3 = 6n + 6 = 6(n + 1)$ ist restlos durch 6 teilbar, da $n + 1$ eine natürliche Zahl ist.

c) Beispiel: Für die Zahlen 4, 5 und 6 ist die Summe $4 + 5 + 6 = 15$ nicht durch 6 teilbar.

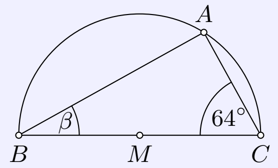
Aufgabe 6
a) Berechnen Sie $42a^2b : (-7a)$, $(a \neq 0)$.

b) Stellen Sie die Formel $A_O = 4\pi r^2$ nach r um $(r \neq 0)$.

c) Ermitteln Sie x in der Gleichung $3^x = 81$.

d) Lösen Sie die Ungleichung $5x–3 < 6$ $(n \in \mathbb{R})$. (Probe wird nicht verlangt.) Geben Sie alle natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

e) Ein Dreieck ABC ist einem Halbkreis einbeschrieben (siehe Abbildung oben, nicht maßstäblich). Geben Sie die Größe des Winkels β an!



a) $\dfrac{42a^2b}{-7a} = -6ab$; b) $A_O = 4\pi r^2$ wird zu $r = \sqrt{\dfrac{A_O}{4\pi}}$

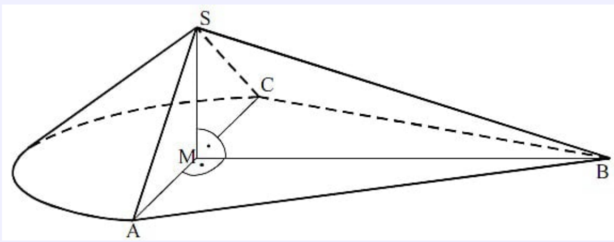
c) $3^x = 81$ beidseitig zur Basis 3 logarithmieren ergibt $x \log_3 3 = \log_3 81$ und mit $\log_3 3 = 1$ als Lösung $x = 4$.

d) $5x < 9$ und $x < \frac{9}{5}$. Damit sind die natürlichen $x = 0$ und $x = 1$ die gesuchten Lösungen.

e) Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABC bei A rechtwinklig. Für α wird mit dem Innenwinkelsatz des Dreiecks $\alpha = 180° - 90° - 64° = 26°$.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Die Abraumhalde der Schachtanlage "Bernard Koenen" im Mansfelder Bergbaurevier hat angenähert die Form eines Körpers, der aus einem halben geraden Kreiskegel und einer Pyramide zusammengesetzt ist (siehe Abbildung unten, nicht maßstäblich).



Bekannt sind: $\overline{AC} = d = 310$ m; $\overline{MS} = h = 115$ m; $\overline{BS} = l = 380$ m.

a) Berechnen Sie das Volumen des halben Kreiskegels!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BM}$!

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!
In wieviel Jahren ist diese Halde entstanden, wenn auf ihr jährlich etwa 300000 m^3 Abraum abgelagert wurden?

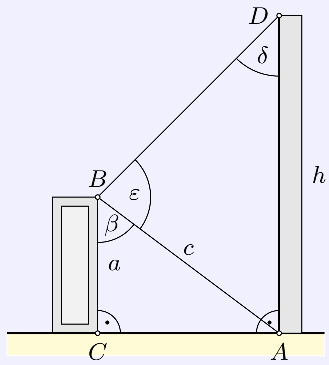
a) Der Kreiskegel hat den Radius $r = 155$ m und die Höhe $h = 115$ m.
Volumen des halben Kreiskegels $V_K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h\right) \approx 1450000$ m^3.

b) Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck BMS: $\overline{BM} = \sqrt{\overline{BS}^2 - \overline{SM}^2} = 362{,}2$ m

c) Die Pyramide hat eine Dreiecksgrundfläche, die aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken AMB und CMB besteht, und eine Höhe $h = 115$ m.
Dreiecksgrundfläche: $A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{MB} \cdot \overline{AM}\right) = 56140 \text{ m}^2$
Volumen der Pyramide $V_P = \frac{1}{3}A \cdot \overline{SM} = 2150000 \text{ m}^3$

Volumen der Halde $V = V_P + V_Z = 3600000 \text{ m}^3$. Wenn jährlich 300000 m^3 Abraum abgelagert werden, ist die Halde in $\frac{3600000}{300000} = 12$ Jahren entstanden.

Aufgabe 7.2
Beim Bau eines Schornsteins wird zur Ermittlung der jeweils erreichten Höhe von B aus der Winkel $ABD = \varepsilon$ gemessen (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich).
Bekannt sind ferner: $\overline{BC} = a = 78{,}2$ m; Winkel $CBA = \beta = 57{,}6°$.



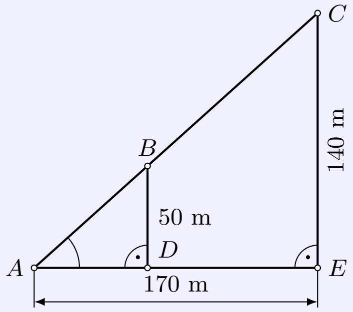
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB} = c$.

b) An einem bestimmten Tag misst man $\varepsilon = 84{,}3°$. Berechnen Sie die zu diesem Zeitpunkt erreichte Schornsteinhöhe $\overline{AD} = h$!

a) Es ist $\frac{a}{c} = \sin\beta$, also $c = \frac{a}{\sin\beta} = \overline{AB} = 92{,}6$ m

b) Der Winkel BAC ist Wechselwinkel zu β, da BC und AD parallel sind. $\angle BAC = \beta = 57{,}6°$.
Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck ABD ergibt sich $\delta = 180° - \varepsilon - \angle BAD = 38{,}1°$.

Mittels Sinussatz $\frac{h}{c} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$ folgt für die Höhe des Turms $h = c \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = 149{,}3$ m.



Aufgabe 7.3
Ein Hubschrauber fliegt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn von A nach C (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich).

a) Berechnen Sie den Anstiegswinkel α dieser Flugbahn!

b) Von A nach B benötigt der Hubschrauber 7,5 s. Wie lange braucht er von A nach C?

c) Berechnen Sie die Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers auf der Strecke $\overline{AC}$. Geben Sie diese Geschwindigkeit in Kilometer je Stunde an!

a) $\tan\alpha = \frac{\overline{EC}}{DB} = 0{,}8235$ und $\alpha = 395°$

b) Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{AC}{AB} = \frac{140 \text{ m}}{50 \text{ m}} = 2{,}8$
Da die Geschwindigkeit konstant ist, benötigt der Hubschrauber für AC die 2,8fache Zeit wie für die Strecke AB. Der Hubschrauber braucht von A nach C $t = 2{,}8 \cdot 7{,}5 \text{ s} = 21$ Sekunden.

c) Satz des Pythagoras für Dreieck AEC: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2} = 220{,}2$ m

Geschwindigkeit des Hubschraubers: $v = \frac{s}{t} = \frac{220{,}2 \text{ m}}{21 \text{ s}} \approx 10{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 37{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$

1.30 Abschlussprüfung 1986

Aufgabe 1
In der DDR werden jährlich erhebliche Mittel aus dem Staatshaushalt zur Sicherung stabiler und niedriger Preise für Waren des Grundbedarfs bereitgestellt.

a) Im Jahre 1982 betrugen die Gesamtausgaben des Staatshaushalts der DDR 182 Milliarden Mark. Davon wurden 11,7 Milliarden Mark zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben. Wieviel Prozent der Gesamtausgaben sind das?

b) Für das Jahr 1983 wurde der Betrag von 11,7 Milliarden Mark um 3,4 Prozent erhöht. Wieviel Milliarden Mark wurden 1983 zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben?

a) $\frac{11{,}7}{182} = 0{,}064$, 6,4% der Staatsausgaben wurden zur Stützung der Lebensmittelpreise ausgegeben.

b) $11{,}7 \cdot 1{,}034 = 12{,}1$ Mrd. Mark

Aufgabe 2
a) Lösen Sie die Ungleichung $2(3x+5) > 9x-(5-2x)$ $(x \in \mathbb{R})$! (Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie von den fünf Zahlen -3 ; 0,1 ; 0 ; 3 ; $\frac{37}{10}$ diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

a) $2(3x+5) > 9x-(5-2x)$, $6x+10 > 9x-5+2x$, $6x+10 > 11x-5$, $15 > 5x$ und $x < 3$

b) Von den genannten Zahlen erfüllen folgende reelle Zahlen die Ungleichung: -3; 0,1 und 0.

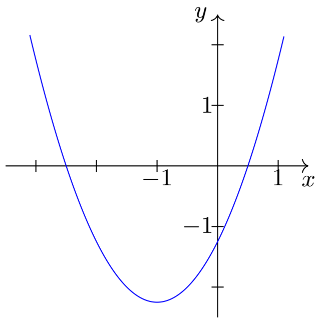
Aufgabe 3
Durch die Gleichung $y = x^2 + 2x - 1{,}25$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ihr Scheitelpunkt sei S. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von S!

c) Zeichnen Sie die Parabel mindestens im Intervall $-3 \le x \le 1$!

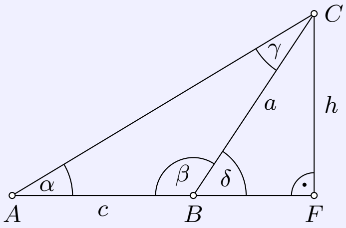
d) Welche Zahl ist in die Gleichung $y = x^2 + 2x + q$ für q einzusetzen, damit die dadurch gegebene Funktion genau eine Nullstelle hat?



a) Quadratische Gleichung mit $p = 2$ und $q = -\frac{5}{4}$.
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{5}{4}} = -1 \pm 1{,}5$
Die zwei Nullstellen sind $x_1 = -2{,}5$ und $x_2 = 0{,}5$.

b) $y = x^2 + 2x - 1{,}25 = (x+1)^2 - 1 - 1{,}25 = (x+1)^2 - 2{,}25$. Aus der Scheitelpunktsform folgt $S(-1; -2{,}25)$

d) $y = x^2 + 2x + q = (x+1)^2 - 1 + q$. Damit die quadratische Funktion genau eine Nullstelle hat, muss die Diskriminante $-1+q$ gleich Null sein, d.h. $q = 1$.

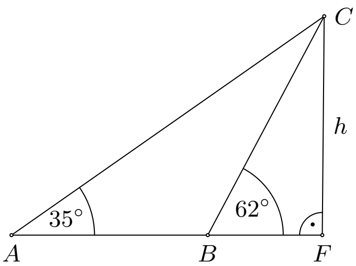


Aufgabe 4
Um die Höhe $\overline{CF}$ eines Turmes zu ermitteln, dessen Fußpunkt F unzugänglich ist, kann man wie folgt vorgehen: Man steckt eine Standlinie $\overline{AB}$ so ab, dass A, B und F auf einer Geraden liegen, und misst die Erhebungswinkel BAC und FBC (siehe Abbildung, nicht maßstäblich).

Bei einer solchen Messung ermittelte man folgende
Werte: $\overline{AB} = c = 65{,}0$ m; Winkel $BAC = \alpha = 35{,}0°$; Winkel $FBC = \delta = 62{,}0°$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe einer maßstäblichen Konstruktion die Turmhöhe $\overline{CF}$ = h! (Geben Sie diese Höhe in Metern an!)

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $ACB = \gamma$, die Länge der Strecke $\overline{BC} = a$ und die Turmhöhe $\overline{CF} = h$.



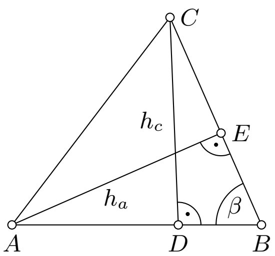
a) Zeichnung mit $h \approx 72$ m

b) Außenwinkelsatz $\gamma = \delta - \alpha = 27{,}0°$
Sinussatz $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ und $a = 82{,}12$ m
Rechtwinkliges Dreieck BFC: $\frac{h}{a} = \sin\delta$ mit der Höhe $h = 72{,}5$ m.

Aufgabe 5
Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $h_c = \overline{CD}$ und $h_a = \overline{AE}$.

a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur!

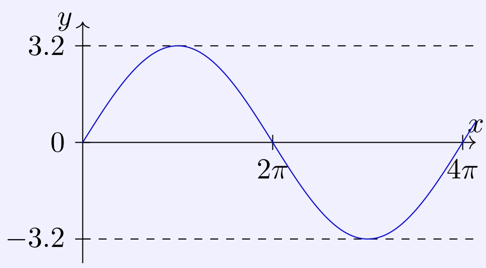
b) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABE und DBC einander ähnlich sind!



a,b) Beide Dreiecke ABE und DBC sind rechtwinklig, da die Höhen senkrecht auf den Seiten stehen.
Weiterhin ist der Winkel β in beiden Dreiecken Innenwinkel.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ABE und DBC zueinander ähnlich, da sie jeweils zwei gleich große Innenwinkel enthalten.

Aufgabe 6
a) Schreiben Sie die Zahlen 625000 und 0,074 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (d. h. in der Form $a \cdot 10^m$ mit $a \in \mathbb{R}$; $1 \leq a < 10$; $m \in \mathbb{G}$).

b) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$. Geben Sie für diese Funktion a und b an!



c) Geben Sie denjenigen Wert von x an, für den der Term $\frac{5}{3x-6}$ nicht definiert ist.

d) Ein Kreis hat einen Umfang von 17,0 m. Wie groß ist sein Durchmesser?

a) $625000 = 6{,}25 \cdot 10^5$; $0{,}074 = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$

b) $a = 3{,}2$, $b = \frac{1}{2}$: Funktion $y = 3{,}2 \cdot \sin \frac{x}{2}$

c) $3x - 6$ ist für $x = 2$ gleich 0. Für $x = 2$ ist der Term $\frac{5}{3x-6}$ nicht definiert.

d) $u = \pi d$ und damit $d = \frac{u}{\pi} \approx 5{,}41$ m.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Gegeben ist die Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R};\ x \neq 0)$.

a) Übertragen Sie die folgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt! Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte!

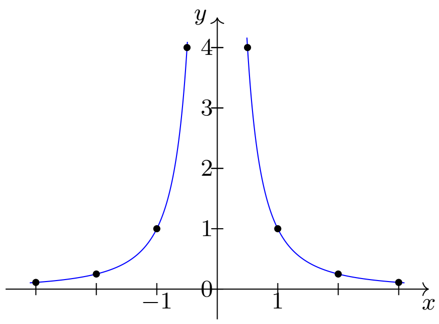
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y								

b) Tragen Sie die so erhaltenen Wertepaare in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

c) Zeigen Sie, dass das Zahlenpaar $\left(\sqrt{50}; \frac{1}{50}\right)$ zur Funktion gehört!

d) Geben Sie einen Wert für x an, so dass für den zugehörigen y-Wert gilt: $y > 4$.

e) Geben Sie alle positiven Werte für x an, so dass für die zugehörigen y-Werte gilt: $y < \frac{1}{100}$.



a)

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

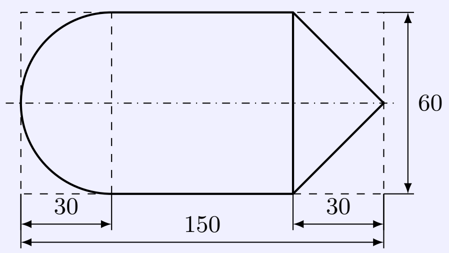
c) $f(\sqrt{50}) = \frac{1}{\sqrt{50}^2} = \frac{1}{50}$

d) Beispiel: für $x = \frac{1}{10}$ wird $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100 > 4$.

e) $y < \frac{1}{100}$, d.h. $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{100}$, $x^2 > 100$ und somit $x > 10$.

Aufgabe 7.2
Aus einem zylinderförmigen Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm und der Länge $l = 150$ mm soll ein Werkstück hergestellt werden, das aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Kegel besteht (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich, alle Maßangaben in mm).

Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, der bei der Herstellung des Werkstücks entsteht?

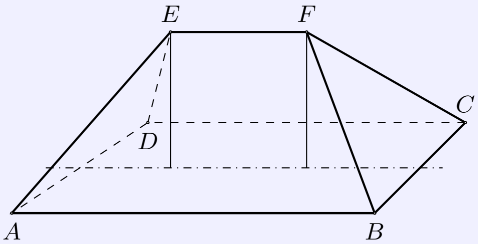


Das Werkstück besteht aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Kreiskegel.
Halbkugel: $r = 3$ cm, d.h. Volumen $V_H = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 \approx 56{,}5$ mm^3
Zylinder: $r = 3$ cm, $h = 90$ cm, d.h. Volumen $V_Z = \pi r^2 \cdot h \approx 254{,}5$ mm^3
Kegel: $r = 3$ cm, $h = 3$ cm, d.h. Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \approx 28{,}3$ mm^3

Der Rundstahl hat das Volumen $V_R = \pi r^2 h \approx 424{,}1$ mm^3.
Das Werkstück hat ein Volumen $V_W = V_H + V_Z + V_K \approx 339{,}3$ mm^3. Dies sind 0,80 V_R oder 80 %. Der Materialabfall beträgt 20 % des Rundstahls.

Aufgabe 7.3

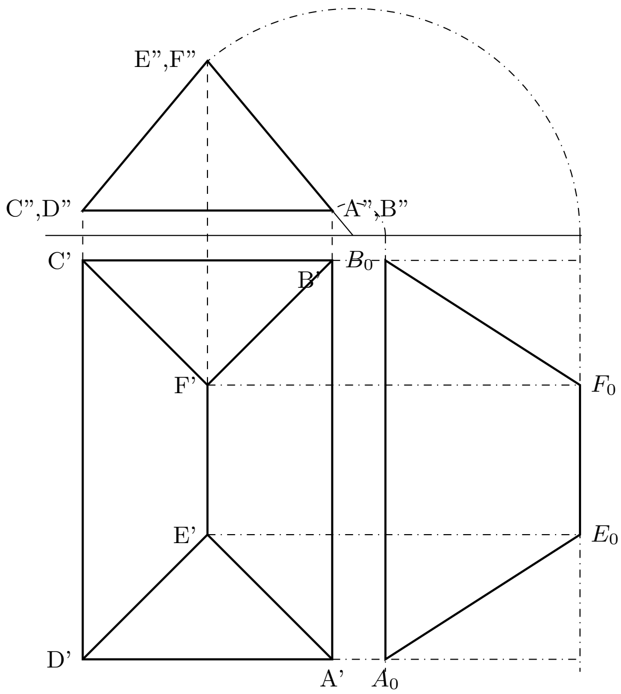
Bei der Rekonstruktion eines Altbaus wird das Dach erneuert. Die rechteckige Grundfläche $ABCD$ dieses Daches hat die Abmessungen $\overline{AB} = 16{,}0$ m; $\overline{BC} = 10{,}0$ m. Der Dachfirst $\overline{EF}$ ist 6,0 m lang und liegt 5,0 m über der Grundfläche. Gegenüberliegende Seitenflächen des Daches sind kongruent (siehe Abbildung; nicht maßstäblich).



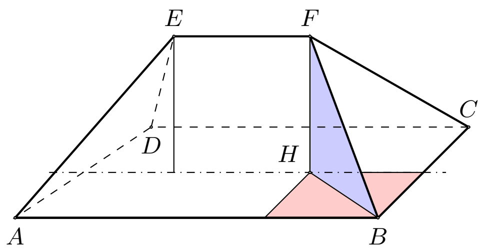
a) Stellen Sie dieses Dach in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 200 dar! Bezeichnen Sie die Eckpunkte entsprechend der Abbildung!

b) Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt der trapezförmigen Seitenfläche $ABFE$ ebenfalls im Maßstab 1 : 200!

c) Berechnen Sie die Länge des Dachbalkens $\overline{BF}$.



a), b)



c) Die Strecke $\overline{BF}$ ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck BFH, blau dargestellt.
$\overline{HB}$ ist Diagonale eines Quadrates (rot dargestellt) mit einer Seitenlänge 5 m.

$\overline{HB} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7{,}07$ m, $\overline{FH}$ ist 5 m lang und somit $\overline{BF} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{FH}^2} = 8{,}66$ m.

1.31 Abschlussprüfung 1987

Aufgabe 1
Im Jahre 1984 wurden im Papierwerk Schwedt 165000 t Altpapier verarbeitet; 1985 waren es 12500 t mehr.

a) Auf wieviel Prozent stieg der Einsatz von Altpapier in Schwedt im Jahre 1985 gegenüber 1984?

b) 62,5 t Altpapier liefern ebensoviel Rohstoff für die Papierherstellung wie 500 siebzigjährige Fichten. Wieviel solcher Fichten bleiben allein durch den zusätzlichen Einsatz von 12500 t Altpapier erhalten?

a) $\frac{165000+12500}{165000} = 1{,}0758$. Der Einsatz von Altpapier stieg auf 107,58 %.

b) $\frac{12500}{62{,}5} \cdot 500 = 100000$. Es bleiben 100000 Fichten erhalten.

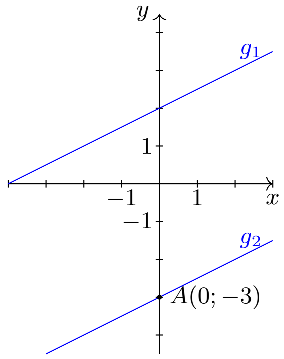
Aufgabe 2
Eine Funktion ist gegeben durch $y = \frac{1}{2}x + 2$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion, und bezeichnen Sie ihn mit g_1!

b) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

c) Untersuchen Sie, ob das Zahlenpaar (50; 26) zu dieser Funktion gehört!

d) Zeichnen Sie die Gerade g_2, die durch den Punkt $A(0;-3)$ geht und parallel zu g_1 verläuft! Geben Sie die Gleichung der durch g_2 dargestellten Funktion an!

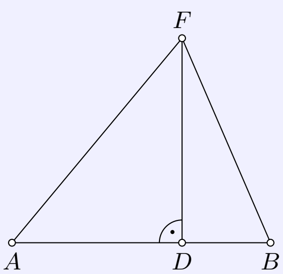


b) $0 = \frac{1}{2}x + 2$; $x = -4$. Die Nullstellen liegt bei -4.

c) $(50; 26)$ in $y = \frac{1}{2}x + 2$ einsetzen, ergibt $\frac{1}{2} \cdot 50 + 2 = 27$, d.h. das Zahlenpaar gehört nicht zur Funktion g_1.

d) Die Funktion g_2 hat die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$.

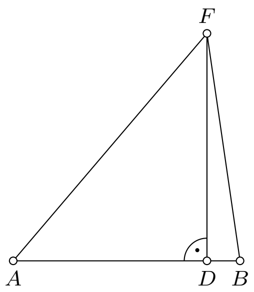
Aufgabe 3



Bei einem Wettbewerb überfliegt ein Segelflugzeug F die Ziellinie $\overline{AB}$. Seine Flughöhe $\overline{DF}$ soll ermittelt werden. Dazu werden von den Punkten A und B aus die Entfernungen zum Flugzeug gemessen (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich).
$\overline{AB} = 1{,}20$ km; $\overline{AF} = 1{,}30$ km; $\overline{BF} = 1{,}10$ km.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe einer maßstäblichen Konstruktion die Flughöhe $\overline{DF}$, und geben Sie diese Höhe in Kilometern an (empfohlener Maßstab: 1 km = 10 cm)!

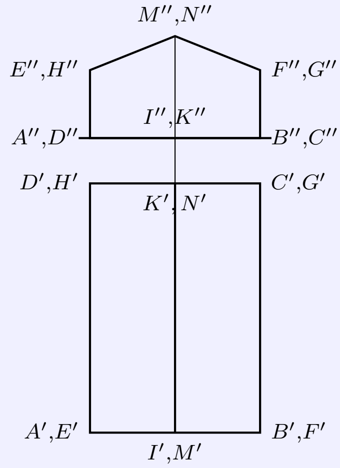
b) Berechnen Sie (ohne zeichnerisch ermittelte Werte zu benutzen) die Größe des Winkels $BAF = \alpha$ und die Flughöhe $\overline{DF}$!



a) siehe Abbildung. Ablesen der Höhe auf $\overline{AB}$ ergibt $\overline{FD} \approx 10$ cm. Dem entsprechen 1 km Flughöhe.

b) Kosinussatz $\overline{FB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF} \cdot \cos\alpha}$
Winkel $\alpha = 52{,}0°$
Rechtwinkliges Dreieck ADF: $\sin\alpha = \frac{\overline{FD}}{\overline{AF}}$, womit für die Flughöhe $\overline{FD} = 1{,}024$ km folgt.

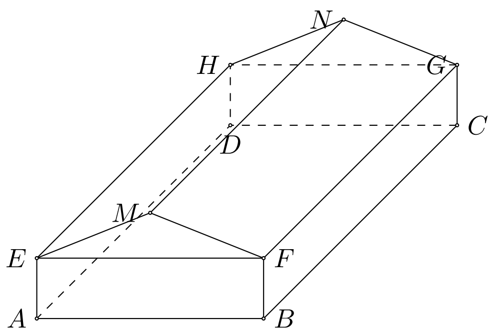
Aufgabe 4
Ein Gewächshaus hat die Gestalt eines fünfseitigen Prismas (siehe nebenstehende Abbildung, nicht maßstäblich).
$\overline{AB} = 7{,}5$ m; $\overline{AE} = \overline{BF} = 2{,}0$ m;
$\overline{AD} = \overline{BC} = 18{,}0$ m; $\overline{IM} = 3{,}5$ m; $\overline{AI} = \overline{IB}$.



a) Stellen Sie dieses Prisma in Kavalierperspektive im Maßstab 1 : 100 dar! (Bezeichnung der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)

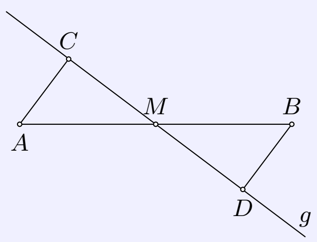
b) In diesem Gewächshaus sollen Gurken angebaut werden. Berechnen Sie die dafür nutzbare Fläche, wenn 15 m^2 der überdachten Fläche auf Wege entfallen!

c) Für eine Ernteperiode ist ein Ertrag von 17,5 kg Gurken je Quadratmeter geplant. Wieviel Kilogramm Gurken sieht der Plan für dieses Gewächshaus vor?



b) Grundfläche des Gewächshauses: $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 135$ m^2
Davon entfallen 15 m^2 auf Wege, so dass 120 m^2 als nutzbare Fläche zur Verfügung stehen.

c) $120 \cdot 17{,}5 = 2100$ kg $= 2{,}1$ t. Das Gewächshaus wird 2100 kg Gurken produzieren.



Aufgabe 5
Durch den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ verlaufe die Gerade g. Die Lote von den Punkten A und B auf diese Gerade g haben die Fußpunkte C und D (siehe nebenstehende Abbildung).
Beweisen Sie, dass die Dreiecke AMC und BMD zueinander kongruent sind!

Da die Punkte C und D Lotfußpunkte auf g sind, sind die Innenwinkel ACM und BDM rechte Winkel. Die Winkel DMB und CMA sind Scheitelwinkel und damit zueinander kongruent.
Die zwei Dreiecke AMC und BMD haben somit 2 Paare zueinander kongruenter Innenwinkel.

Da außerdem die Strecken AM und BM kongruent sind, sind die Dreiecke AMC und BMD nach dem Kongruenzsatz WWS zueinander kongruent.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie! $\dfrac{3{,}2 \cdot 10^9 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^4}$.

b) Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 4$ $(x \in \mathbb{R})$.

c) Stellen Sie die Formel $A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$ nach $\sin\alpha$ um.

d) Berechnen Sie! $(2a + 5x) \cdot (4a - 3x)$. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

a) $\dfrac{3{,}2 \cdot 10^9 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^4} = 840.$

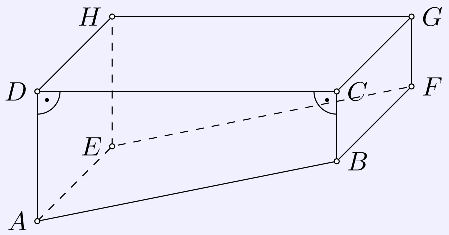
b) $0 = x^2 - 4$; $x^2 = 4$ mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

c) $A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$ ergibt $\sin\alpha = \frac{2A}{bc}$

d) $(2a + 5x) \cdot (4a - 3x) = -15x^2 + 14ax + 8a^2$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Der mit Wasser zu füllende Teil eines Schwimmbeckens hat die Form eines geraden Prismas. Die Grundfläche des Prismas ist das Trapez $ABCD$ (siehe Abbildung, nicht maßstäblich). Zum Füllen des Beckens werden 1,5 m^3 Wasser je Minute eingelassen.



$\overline{AD} = 2{,}60$ m; $\overline{BC} = 1{,}40$ m; $\overline{DC} = 50{,}0$ m; $\overline{CG} = 22{,}5$ m.

a) Wieviel Stunden würde das vollständige Füllen des leeren Beckens dauern?

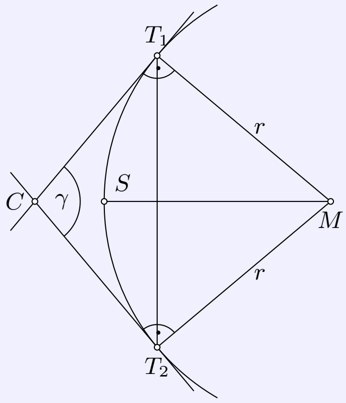
b) Um wieviel tiefer liegt der Wasserspiegel gegenüber dem vollständig gefüllten Becken, wenn nur 20 Stunden lang Wasser eingelassen wurde?

a) Volumen des Prismas: $V = A \cdot \overline{CG}$, wobei die Grundfläche ein Trapez mit den parallelen Seite $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ und der Höhe $\overline{DC}$ ist, d.h.
$V = \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{CG} = 2250$ m^3

Füllzeit $t = \frac{V}{1{,}5} = 1500$ min $= 25$ h. Das Becken wird in 25 Stunden vollständig gefüllt.

b) Ein quaderförmiges Becken mit den Grundflächenseiten $\overline{DC}$ und $\overline{CG}$ hätte bei einer Höhe h das Volumen $V = \overline{DC} \cdot \overline{CG} \cdot h = 1125 \cdot h$ m^3.
In 5 Stunden werden dem Becken $5 \cdot 60 \cdot 1{,}5 = 450$ m^3 Wasser hinzugefügt. Das beschriebene quaderförmige Becken wäre dann bis zu einer Höhe $h = \frac{450}{1125} = 0{,}4$ m gefüllt. Wird das prismaförmige Becken 5 Stunden kürzer gefüllt, fehlen somit noch 40 cm bis zum vollgefüllten Becken, da der obere Teil quaderförmig ist.
Das Wasserspiegel liegt 40 cm tiefer.

Aufgabe 7.2
Zwei gerade Eisenbahngleise bilden den Winkel γ. Sie sollen durch ein Gleis verbunden werden, das die Form eines Kreisbogens hat. Dazu benötigt man die Entfernungen der Punkte T_1, T_2 und S vom Punkt C (siehe nicht maßstäbliche Abbildung).
$\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r = 550$ m; Winkel $T_1CT_2 = \gamma = 100{,}0°$; Winkel MT_1C = Winkel $MT_2C = 90°$.



a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{CT_1}$.

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{CS}$.

c) Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{T_1T_2}$.

a) Der Winkel T_1MT_2 ist im Viereck gleich $\angle T_1MT_2 = 360° - 2 \cdot 90° - \gamma = 80°$.
Damit wird für die halbe Strecke $\overline{T_1T_2}$ mit dem Winkel SMT_1: $\frac{\overline{T_1T_2}}{2} = \overline{T_1M} \cdot \sin SMT1 = r \cdot \sin 40° = 353{,}3$ m und entsprechend im rechtwinkligen Dreieck CSLotfußpunkt von T_1 auf SM: $\overline{CT_1} = \frac{\overline{T_1T_2}}{2} : \sin \frac{\gamma}{2} = 461{,}2$ m.

b) $\overline{CS} = \overline{CM} - r$, $\overline{CM}$ ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck CMT_1 und damit 717,8 m lang. Für $\overline{CS}$ ergeben sich damit 167,8 m.

c) Mit dem Winkel $T_1MT_2 = 80°$ wird für die Kreisbogenlänge $\overset{\frown}{T_1T_2} = \frac{80°}{360°} \cdot 2\pi r = 767{,}9$ m.

Aufgabe 7.3
Die Dresdener Standseilbahn fährt von der Station K am Körnerplatz hinauf zur Station L an der Gaststätte Luisenhof. Dabei überwindet sie auf einer Gesamtstrecke von 544 m einen Höhenunterschied von 95,0 m. Die Fahrzeit beträgt 5,0 min.
(Die Strecke werde als geradlinig und die Geschwindigkeit als konstant angenommen.)

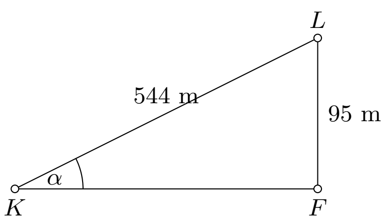
a) Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Größe des Anstiegswinkels!

b) Welchen Höhenunterschied überwindet die Bahn in 2,0 min Fahrzeit?

c) Berechnen Sie die Fahrgeschwindigkeit dieser Bahn!

d) Geben Sie diese Geschwindigkeit in Kilometer je Stunde an!

e) In welcher Länge erscheint die Strecke $\overline{KL}$ auf einer Landkarte, deren Maßstab 1 : 1000 ist?



a) $\sin \alpha = \frac{\overline{FL}}{\overline{KL}}$ und $\alpha = 10{,}1°$

b) Wenn die Bahn in 5 min 95 Höhenmeter überwindet, so in 2 min: $h = \frac{2}{5} \cdot 95 = 38$ m.

c) Geschwindigkeit: $v = \frac{544}{5 \cdot 60} = 1{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6{,}52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) Auf der Landkarte stellt die Strecke $\overline{KF}$ die Bahnstrecke $\overline{KL}$ dar.

$\overline{KF} = \sqrt{\overline{KL}^2 - \overline{LF}^2} = 535{,}6$ m.
Bei einem Maßstab von 1:1000 sind dies auf der Karte ≈ 0,54 mm.

1.32 Abschlussprüfung 1988

Hinweis: Ab der Prüfung 1988 wurde der Taschenrechner SR 1 eingesetzt.

Aufgabe 1
Gegeben ist die Ungleichung $12 - x > \dfrac{3(2x+4)}{2}$; $(x \in \mathbb{R})$

a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie alle natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

c) Nennen Sie von den folgenden Zahlen diejenigen, die diese Ungleichung erfüllen!
$\frac{11}{5}$; 1,5; $-0{,}3$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{1{,}69}$

a) $12 - x > \dfrac{3(2x+4)}{2} \rightarrow 24 - 2x > 6x + 12 \rightarrow 8x < 12 \rightarrow x < \dfrac{3}{2}$

b) natürliche Lösungen sind 0 und 1; c) die Ungleichung erfüllen -0,3; $\sqrt{1{,}69}$

Aufgabe 2
In einem Betriebsteil werden Bauelemente hergestellt.

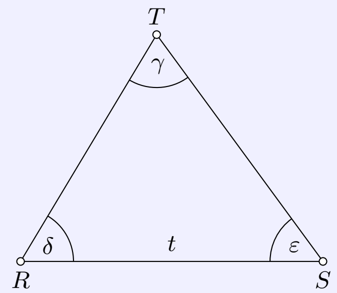
a) Die tägliche Warenproduktion konnte in diesem Bereich durch Verbesserung der Arbeitsorganisation von 75000 Mark auf 78000 Mark erhöht werden. Um wieviel Prozent stieg diese Produktion?

b) Eine bestimmte Serie von Bauelementen wird von 12 Automaten mit gleicher Leistung in 35 Stunden hergestellt. Wie lange würde die Fertigung dieser Serie nur dauern, wenn statt dessen 15 solcher Automaten zum Einsatz kämen?

a) $\frac{78000}{75000} = 1{,}04$, die Produktion stieg um 4 %.

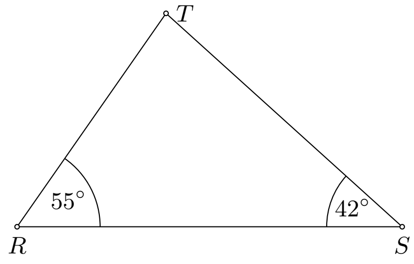
b) 12 Automaten benötigen insgesamt $12 \cdot 35 = 420$ Stunden. Damit würde die Fertigung mit 15 Automaten $\frac{420}{15} = 28$ Stunden benötigen.

Aufgabe 3
Ein Waldstück, das die Form eines Dreiecks hat, wurde vermessen (siehe Skizze, nicht maßstäblich). Dabei wurden ermittelt:
$\overline{RS} = t = 850$ m, Winkel $SRT = \delta = 55°$,
Winkel $TSR = \varepsilon = 42°$



a) Konstruieren Sie dieses Dreieck in einem geeigneten Maßstab!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Waldstücks aus den gegebenen Stücken, und geben Sie ihn in Hektar an!

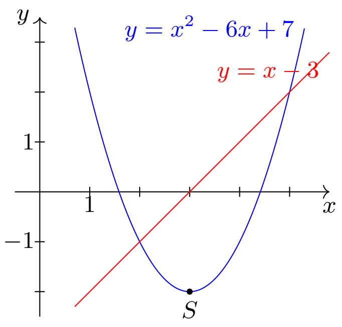


b) Winkel $\gamma = 180° - \delta - \varepsilon = 83°$.
Strecke $\overline{RT}$: $\frac{\overline{RT}}{t} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}$ ergibt $\overline{RT} = 573$ m
Dreiecksfläche $A = \frac{1}{2}\overline{RT} \cdot \overline{RS} \sin\delta \approx 199000$ m^2 = 19,9 ha.
Das Waldstücke hat eine Fläche von 19,9 Hektar.

Aufgabe 4
a) Durch die Gleichung $y = x^2 - 6x + 7$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion gegeben.
- Berechnen Sie deren Nullstellen!
- Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel!

b) Eine weitere Funktion hat die Gleichung $y = x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$). Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten A und B. Geben Sie die Koordinaten von A und B an!



a) Nullstellen $0 = x^2 - 6x + 7$ mit $p = -6$ und $q = 7$ und damit $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-7}$; $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

Scheitelpunkt: $y = x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 9 + 7 = (x-3)^2 - 2$ und $S(3; -2)$.

c) $x^2 - 6x + 7 = x - 3$; $x^2 - 7x + 10 = 0$ und $p = -7$ und $q = 10$
$x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10} = 3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 3{,}5 \pm 1{,}5$; $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ und $y_1 = -1$, $y_2 = 2$
Die beiden Funktionen schneiden sich in den Punkten $A(2; -1)$ und $B(5; 2)$.

Aufgabe 5
a) Beweisen Sie, dass folgende Aussage wahr ist!
"Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 3 teilbar."

b) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist!
"Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 2 teilbar."

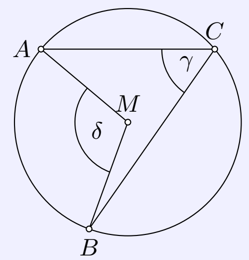
a) Drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind n, $n+1$ und $n+2$ mit $n \in \mathbb{N}$
Summe: $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1)$. Da $n+1$ eine natürliche Zahl ist, ist die Summe der drei Zahlen durch 3 teilbar.

b) Für die drei aufeinanderfolgende natürlichen Zahlen 2, 3, 4 ist die Summe 9 nicht durch 2 teilbar.

Aufgabe 6
a) Ein Rechteck ist 8 cm lang und 6 cm breit. Berechnen Sie die Länge seiner Diagonalen!

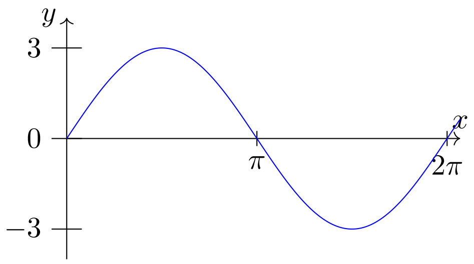
b) Berechnen Sie den Wert des Terms $a^2 + ab + ac$ für $a = 3{,}5$; $b = 1{,}5$; $c = -3$.

c) Die nebenstehende nicht maßstäbliche Skizze zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M. Geben Sie die Größe von γ an, wenn $\delta = 142{,}2°$.



d) Durch die Gleichung $y = 3 \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion gegeben.
- Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$
- Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an

a) $d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Die Diagonale ist 10 cm lang.



b) $a^2 + ab + ac = 3{,}5^2 + 3{,}5 \cdot 1{,}5 + 3{,}5 \cdot (-3) = 7$

c) Da δ Zentriwinkel und γ Peripheriewinkel über der gleichen Sehne AB sind, wird $\gamma = \frac{\delta}{2} = 71{,}1°$.

d) Wertebereich $-3 \le y \le 3$

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1
Um den Bedarf an Leder für die Produktion von Fußbällen zu berechnen, kann man einen Fußball als eine Kugel auffassen, die einen Umfang von 68 cm hat.

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt einer solchen Kugel!

b) Bei der Anfertigung von Fußbällen müssen 35 % mehr Material (für Nähte, Verschnitt usw.) bereitgestellt werden, als der Oberflächeninhalt der Kugel beträgt. Wieviel Quadratmeter Leder werden für die Herstellung von 100 solcher Fußbälle benötigt?

c) Der Durchmesser des Fußballs ist 5-mal so groß wie der eines Tischtennisballs.
Der Oberflächeninhalt des Fußballs ist a-mal so groß wie der des Tischtennisballs. Das Volumen des Fußballs ist b-mal so groß wie das des Tischtennisballs.
Geben Sie a und b an!

a) Kugel mit $u = 68$ cm. Für den Radius r wird $r = \frac{u}{2pi} = 10{,}82$ cm.
Oberflächeninhalt: $A = 4\pi r^2 = 1472\ \text{cm}^2$

b) 35% mehr sind $1{,}35 \cdot 1472 = 1987\ \text{cm}^2$. Für 100 Fußbälle benötigt man folglich 198700 cm^2 $= 19{,}87\ \text{m}^2 \approx 20\ \text{m}^2$ Leder.

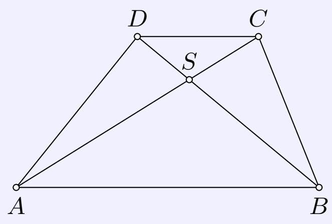
c) Wenn der Durchmesser eines Tischtennisballs $\frac{1}{5}$ des Durchmessers eines Fußballs ist, so ist der Oberflächeninhalt des Tischtennisballs $\frac{1}{25}$ und das Volumen $\frac{1}{125}$ im Vergleich zum Fußball.
$a = \frac{1}{25}$; $b = \frac{1}{125}$

Aufgabe 7.2
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden einander im Punkt S (siehe Skizze; nicht maßstäblich)

a) Beweisen Sie, dass die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind!

b) Berechnen Sie die Länge von $\overline{SB}$ für
$\overline{SA} = 20$ cm, $\overline{SC} = 12$ cm, $\overline{SD} = 3$ cm.

c) - Begründen Sie, dass die Dreiecke ABD und ABC einander flächengleich sind!
- Entscheiden Sie, ob die Dreiecke ASD und CSB einander flächengleich sind! Begründen Sie Ihre Entscheidung!



a) Die Innenwinkel ASB und CSD sind Scheitelwinkel und daher zueinander kongruent.
Die Winkel BAS und SCD sind zueinander kongruente Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen AB und CD.
Da zwei Paare zueinander kongruenter Innenwinkel in den Dreiecken ABS und CDS existieren, sind beide Dreiecke zueinander ähnlich.

b) Strahlensatz $\frac{\overline{SB}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$, also $\overline{SB} = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SD}}{\overline{SC}} = 5$ cm.

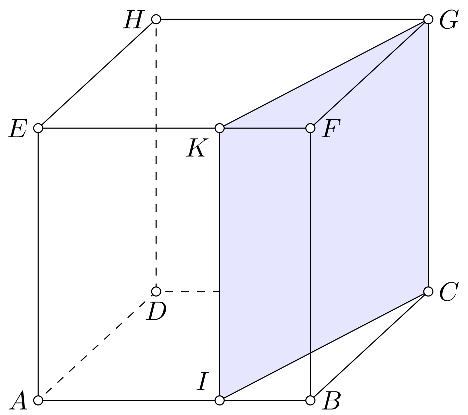
c) Die Dreiecke ABD und ABC sind flächengleich, da beide Dreiecke die gleiche Grundseite $\overline{AB}$ besitzen, und die Höhen der Dreiecke von C bzw. D auf $\overline{AB}$ gleich groß sind. Begründung: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

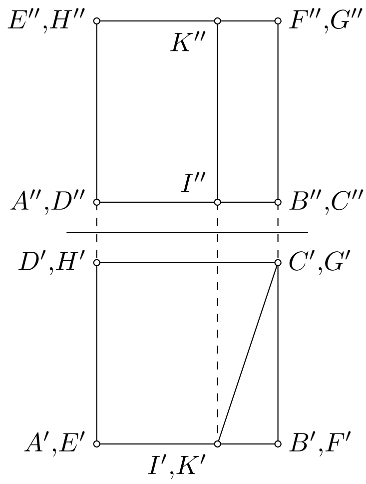
Wenn ABD und ABC flächengleich sind, so sind dies auch die Dreiecke ASD und SBC.
ASD und SBC entstehen aus ABD und ABC indem von diesen Dreiecken das Dreieck ABC entfernt wird.

Aufgabe 7.3
Ein Würfel habe die Kantenlänge a. Seine Grundfläche sei mit $ABCD$, seine Deckfläche mit $EFGH$ bezeichnet.
Dabei liege E über A, F über B, G über C und H über D. Auf der Kante $\overline{AB}$ liege ein Punkt I, auf der Kante $\overline{EF}$ liege ein Punkt K, so dass gilt $\overline{IB} = \overline{KF} = \frac{a}{3}$.
Dieser Würfel werde von einer Ebene, die durch die Punkte $ICGK$ geht, geschnitten.

a) Stellen Sie einen solchen Würfel einschließlich der Schnittfigur für $a = 6$ cm
- in Kavalierperspektive und
- in senkrechter Zweitafelprojektion dar!

b) Zeigen Sie, dass das Volumen des Körpers $IBCGKF$ für jede beliebige Kantenlänge a genau $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens ist!





Der Körper $IBCGKF$ ist ein dreiseitiges Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck IBC (Kathetenlängen a und $\frac{a}{3}$) als Grundfläche und einer Höhe $\overline{BF} = a$.
Volumen des Prismas: $V = A \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{3} \cdot a = \frac{1}{6}a^3$, was genau $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens a^3 ist.

1.33 Abschlussprüfung 1989

Aufgabe 1
Eine LPG bewirtschaftet 3450 ha landwirtschaftliche Nutzfläche.
Im Jahre 1988 wurden davon auf 1820 ha Getreide, auf 625 ha Hackfrüchte und auf 145 ha Gemüse angebaut. Der Rest sind Wiesen.

a) Wieviel Hektar wurden für Wiesen genutzt?

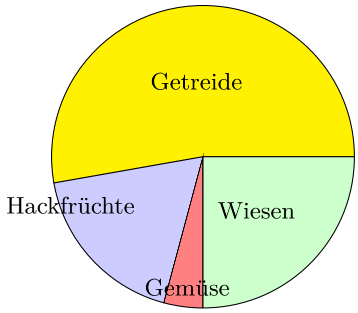
b) Wieviel Prozent der landwirtschaftlichen Nutzfläche entfielen auf jede der vier angegebenen Kulturen? Geben Sie die Prozentsätze auf eine Dezimalstelle genau an!

c) Diese Anteile sollen in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.
- Geben Sie die dafür benötigten Winkelgrößen an!
- Zeichnen Sie ein solches Diagramm!

a) $3450 - 1820 - 625 - 145 = 860$ Hektar wurden für Wiesen genutzt.

b) Getreide: $\frac{1820}{3450} = 52{,}8\%$, Hackfrüchte: $\frac{625}{3450} = 18{,}1\%$, Gemüse: $\frac{145}{3450} = 4{,}2\%$, Wiesen: $\frac{860}{3450} = 24{,}9\%$

c) Getreide: 52,8 % $\hat{=}190°$, Hackfrüchte: 18,1 % $\hat{=}65°$, Gemüse: 4,2 % $\hat{=}15°$, Wiesen: 24,9 % $\hat{=}90°$

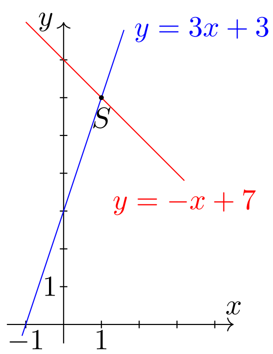


Aufgabe 2
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$y = -x + 7 \quad \text{(I)}$$
$$-6x + 2y = 6 \quad \text{(II)}$$

a) Lösen Sie das System rechnerisch!

b) Jede der Gleichungen beschreibt eine Gerade.
- Stellen Sie diese Geraden graphisch dar!
- Geben Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes an!

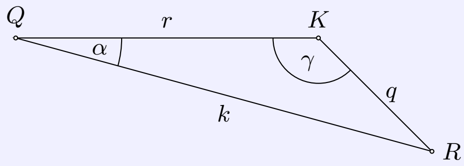


a) Gleichung (I) in (II) einsetzen: $-6x + 2(-x + 7) = 6$; $-6x - 2x + 14 = 6$; $-8x = -8$; $x = 1$
Wert von x in (I) einsetzen: $y = -1 + 7 = 6$;
Lösungsmenge $L = \{(x,y)|(1,6)\}$.

b) Gleichung (II) umstellen: $y = 3x + 3$
Schnittpunkt $S(1; 6)$

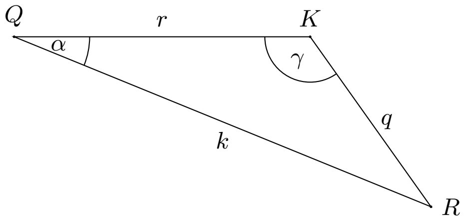
Aufgabe 3
Von einer Küstenstation K aus wird ein Schiff beobachtet, das sich von Q nach R geradlinig bewegt.

Der Punkt Q befindet sich genau nördlich von K (siehe Skizze, nicht maßstäblich). Dabei wurden gemessen:
$\overline{KQ} = r = 9{,}8$ km, $\overline{KR} = q = 6{,}9$ km, Winkel $RKQ = \gamma = 125°$.



a) Ermitteln Sie durch eine maßstäbliche Konstruktion den Winkel $RQK = \alpha$, um den der Kurs des Schiffes von der Nord-Süd-Richtung abweicht, und geben Sie seine Größe an!

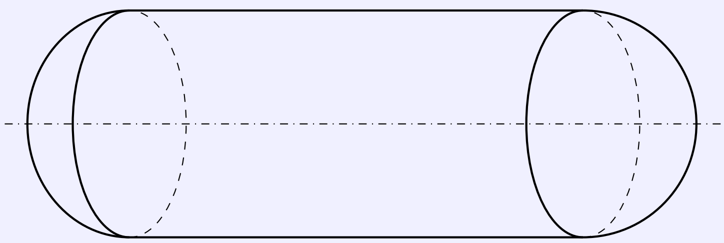
b) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Schiffes und die Größe des Winkels α.



a) Winkel $\alpha \approx 22°$

b) Strecke QR mit Kosinussatz:
$\overline{QR} = \sqrt{\overline{QK}^2 + \overline{KR}^2 - 2\overline{QK} \cdot \overline{KR} \cos\gamma} = 14{,}87$ km
Winkel α mit Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\overline{KR}}{\overline{QR}}$ und $\alpha = 22{,}33°$.

Aufgabe 4
In einem Betrieb werden Behälter verwendet, die nachstehende Form haben (siehe Skizze, nicht maßstäblich).



Ein solcher Behälter kann als Körper aufgefasst werden, der aus einem Zylinder und zwei Halbkugeln besteht. Der Zylinder hat eine Höhe von 3,55 m, die Durchmesser des Zylinders und der Halbkugel betragen 1,46 m. (Die Wandstärke des Behälters bleibt unberücksichtigt.)

a) Berechnen Sie das Volumen des Behälters!

b) Um den Materialbedarf für einen äußeren Farbanstrich zu ermitteln, benötigt man seinen Oberflächeninhalt. Berechnen Sie diesen!

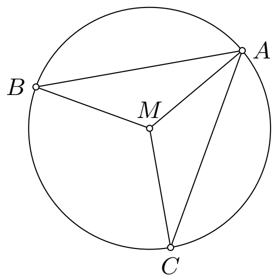
a) Der Körper besteht aus einem Zylinder ($r = 0{,}73$ m, $h = 3{,}55$ m) und zwei Halbkugeln, die zusammen eine Kugel mit dem Radius $r = 0{,}73$ m bilden.
Volumen $V = V_Z + V_K = \pi r^2 \cdot h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 7{,}57$ m^3

b) Oberflächeninhalt mit Mantelfläche des Zylinders und einer Kugeloberfläche
Oberflächeninhalt $A = M_Z + A_K = 2\pi r \cdot h + 4\pi r^2 = 21{,}31$ m^2

Aufgabe 5
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Punkt A dieses Kreises sei Endpunkt zweier gleich langer Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

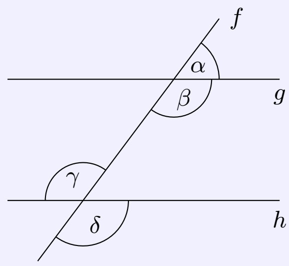
a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur!

b) Beweisen Sie unter Verwendung eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke ABM und AMC zueinander kongruent sind!



Die zwei Dreiecke ABM und AMC haben die Seite $\overline{AM}$ gemeinsam. Außerdem sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ nach Voraussetzung gleichlang.
$\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ sind Radien des Kreises um M, also gleich lang. Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreiecke damit zueinander kongruent.

Aufgabe 6



a) Berechnen Sie $-1{,}2y^5 : (-4y^3)$ $(y \neq 0)$.

b) Berechnen Sie $\dfrac{2{,}25 \cdot 47{,}28}{6{,}74 - 14{,}62}$.

c) Übertragen Sie die folgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt, und vervollständigen Sie diese (siehe Skizze).

Bezeichnung	Winkelpaar
Nebenwinkel	
	$(\beta;\gamma)$

d) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung an! $x(x-3{,}5)=0$

a) $-1{,}2y^5 : (-4y^3) = -0{,}3y^2$ b) $\dfrac{2{,}25 \cdot 47{,}28}{6{,}74 - 14{,}62} = -13{,}5$.

c)

Bezeichnung	Winkelpaar
Nebenwinkel	$(\alpha;\beta)$
Scheitelwinkel	$(\beta;\gamma)$

d) $x(x-3{,}5)=0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3{,}5$.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1

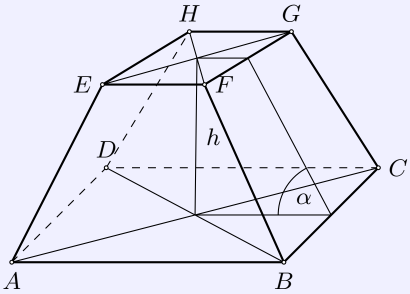
a) Geben Sie das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer beliebigen natürlichen Zahl n an $(n \neq 0)$.

b) In einem speziellen Fall sei das Doppelte des Produktes aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl n um 68 größer als das Vierfache dieser Zahl n.
Berechnen Sie für diesen Fall die natürliche Zahl n. (Probe!)

a) $n-1$ ist Vorgänger, $n+1$ Nachfolger von n. Ihr Produkt ist $(n-1)\cdot(n+1) = n^2 - 1$

b) Ansatz $2\cdot(n-1)(n+1) = 4n + 68$ oder $2n^2 - 4n - 70 = 0$ bzw. $n^2 - 2n - 35 = 0$
Lösung der quadratischen Gleichung mit $p = -2$ und $q = -35$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+35} = 1 \pm 6$ mit $x_1 = -5$ und $x_2 = 7$
x_1 ist keine natürliche Zahl, so dass die eindeutige Lösung $x = 7$ ist. Probe bestätigt das Ergebnis.

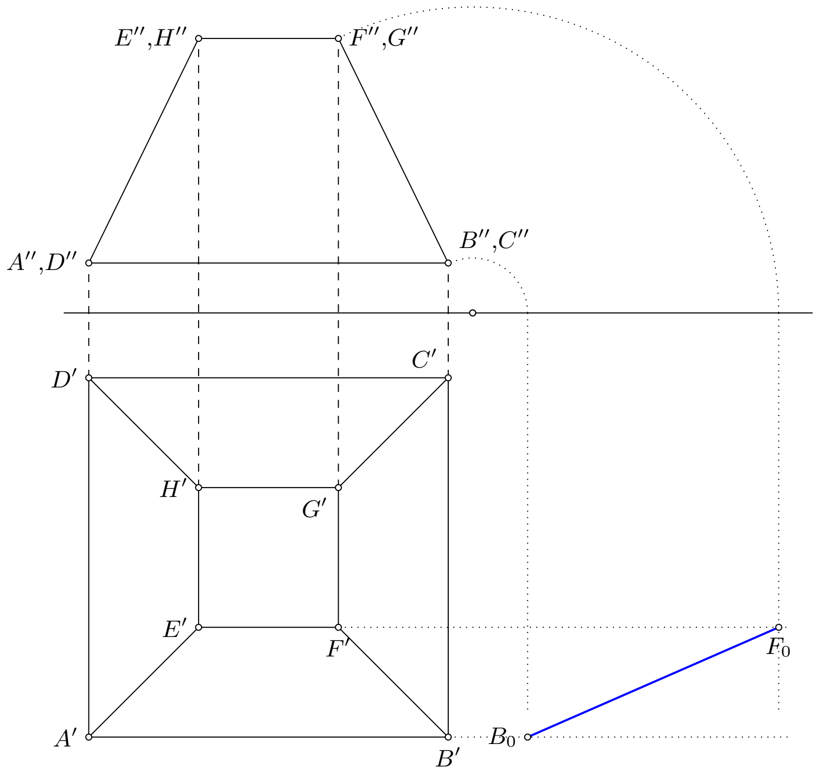
Aufgabe 7.2
Die Skizze zeigt ein Schrägbild eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes $ABCDEFGH$.
$\overline{AB} = a = 7{,}2$ cm, $\overline{EF} = b = 2{,}8$ cm, $h = 4{,}5$ cm



a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf in senkrechter Zweitafelprojektion dar! (Bezeichnen Sie die Eckpunkte!)

b) Konstruieren Sie die wahre Länge der Seitenkante $\overline{BF}$ dieses Pyramidenstumpfes, und geben Sie diese Länge an!

c) Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels α einer Seitenfläche gegen die Grundfläche (siehe Skizze, nicht maßstäblich). Runden Sie auf volle Grad.



a,b)

Die Strecke $\overline{BF}$ ist rund 5,5 cm lang.

c) Der Winkel α ist Innenwinkel in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer Kathete gleich der Höhe des Pyramidenstumpfs und einer Kathete gleich der halben Differenz der Grundkante und Deckkante.
$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a-b}{2}}$ und somit $\alpha = 63{,}9° \approx 64°$.

Aufgabe 7.3
a) Durch die Gleichung $y = f(x) = x^2 + 2x - 2$ ist eine Funktion gegeben.
- Geben Sie ihren Wertebereich an!
- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall $-4 \leq x \leq 2$!

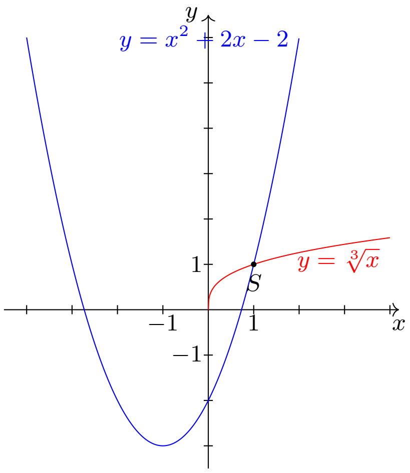
b) Durch die Gleichung $y = g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $(x > 0)$ ist eine weitere Funktion gegeben.

- Übertragen Sie die folgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt, und berechnen Sie die fehlenden Werte!

x	0	0,2	0,7	1,5	2	4
$g(x) = \sqrt[3]{x}$			0,9			

- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen schneiden einander in $P(x_p; y_p)$.
- Geben Sie die Koordinaten von P an!
- Überprüfen Sie rechnerisch, ob das von Ihnen angegebene Zahlenpaar zu beiden Funktionen gehört! (Antwortsatz!)



a) Scheitelpunktsgleichung: $y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$,
Scheitelpunkt $S(-1, -3)$
Wertebereich: $-3 \leq y < \infty$

b)

x	0	0,2	0,7	1,5	2	4
$g(x) = \sqrt[3]{x}$	0	0,58	0,9	1,14	1,26	1,59

c) Der gemeinsame Punkt ist $S(1{,}1)$.
Probe: $y = x^2 + 2x - 2 = 1^2 + 2 - 2 = 1$ und
$y = \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1} = 1$.

1.34 Abschlussprüfung 1990

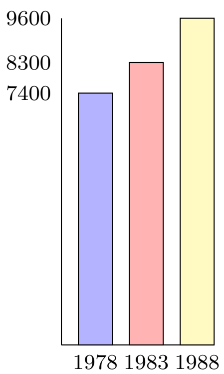
Aufgabe 1
Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung des Agrarfluges am Beispiel eines agrochemischen Zentrums:

Jahr	1978	1983	1988
betreute Fläche in Hektar	7400	8300	9600

a) Stellen Sie diese Entwicklung anhand der Angaben in einem Diagramm dar!

b) Auf wieviel Prozent erhöhte sich die Größe der im Jahre 1988 betreuten Fläche gegenüber 1978?

c) Für eine Weidefläche waren bisher 25 Überflüge von je 28 m Arbeitsbreite notwendig. Durch eine verbesserte Technologie beträgt die Arbeitsbreite jetzt 32 m. Wie viele Überflüge sind nun für diese Weidefläche notwendig?



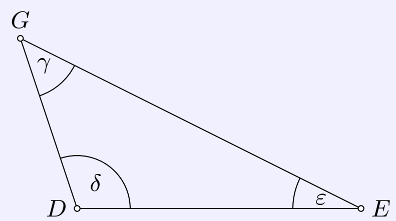
b) $\frac{9600}{7400} = 1{,}297$. Die Fläche erhöhte sich auf 129,7 %.

c) Es wurde eine Breite von $25 \cdot 28 = 700$ m überflogen. Mit der neuen Arbeitsbreite sind es $\frac{700}{32} = 21{,}875$, d.h. 22 Überflüge.

Aufgabe 2
Die Summe zweier Zahlen ist 5. Wird das Dreifache der ersten Zahl um 2,2 vermindert, so erhält man die zweite Zahl.
Ermitteln Sie diese Zahlen. (Probe!)

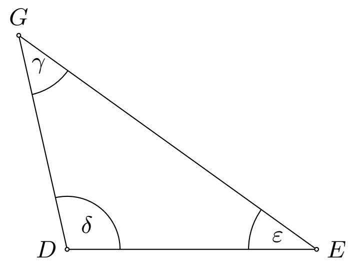
Die Zahlen seien a und b. Dann gilt $a + b = 5$ und $3a - 2{,}2 = b$.
Einsetzen der 2.Gleichung in die erste ergibt: $a + 3a - 2{,}2 = 5$ und $a = 1{,}8$. Mit der ersten Gleichung wird $b = 3{,}2$.
Die gesuchten Zahlen sind 1,8 und 3,2. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 3
Ein Waldstück, das die Form eines Dreiecks hat, wurde vermessen (siehe Skizze, nicht maßstäblich).
$\overline{DE} = g = 660$ m, $\overline{EG} = d = 970$ m, $\overline{GD} = e = 580$ m



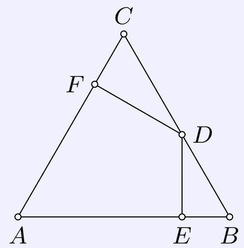
a) Konstruieren Sie dieses Dreieck in einem geeigneten Maßstab, und geben Sie den gewählten Maßstab an!

b) Berechnen Sie aus den gegebenen Seitenlängen den Flächeninhalt des Waldstücks, und geben Sie ihn in Hektar an!



a) Maßstab 1 : 10000, also 1 cm = 100 m

b) Winkel δ mittels Kosinussatz: $\overline{EG}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DG}^2 - 2\overline{DE} \cdot \overline{DG} \cos\delta$
Ergebnis: $\delta = 102{,}7°$
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\overline{DE} \cdot \overline{DG} \sin\delta$
Ergebnis: $A = 186600$ m^2 = 18,66 ha. Das Waldstück ist 18,66 Hektar groß.



Aufgabe 4
In einem gleichseitigen Dreieck ABC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C.
Die Fußpunkte der Lote von D auf die Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ seinen E bzw. F (siehe Skizze).

a) Beweisen Sie, dass die Dreiecke DEB und DFC einander ähnlich sind.

b) Geben Sie eine Bedingung für die Lage des Punktes D an, so dass die Dreiecke DEB und DFC zueinander kongruent sind!

c) Begründen Sie, dass der Winkel FDE für jede Lage von D zwischen B und C die gleiche Größe hat!

a) Beide Dreiecke sind nach Konstruktion bei F bzw. E rechtwinklig. Die Innenwinkel FCD und DBE sind gleich 60°, da das Dreieck ABC gleichseitig ist.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke DEB und DFC zueinander ähnlich.

b) Halbiert D die Strecke $\overline{BE}$, so besitzen die zwei Dreiecke zusätzlich eine gleichlange Seite und sind damit zueinander kongruent.

c) Die Winkel EDB und CDF sind bei jeder Lage von D gleich 30°. Dies folgt aus dem Innenwinkelsatz und der Tatsache, dass die 2 Dreieck je einen 90°- und einen 60°-Winkel besitzen.
Der Winkel FDE ist somit immer $180° - 2 \cdot 30° = 120°$ groß.

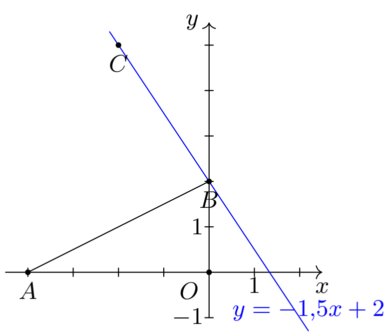
Aufgabe 5
Gegeben sind die Punkte $A(-4;0)$, $B(0;2)$ und $C(-2;5)$.

a) Tragen Sie in ein Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O die Punkte A, B und C ein! (Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$, und runden Sie auf ganze Millimeter!

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels OAB, und runden Sie auf ganze Grad!

d) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden an, die durch die Punkte B und C verläuft!



b) Länge $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 4{,}47 \approx 4{,}5$ mm

c) $\tan\angle OAB = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ ergibt $\angle OAB = 26{,}56 \approx 27°$

d) lineare Funktion $y = -\frac{3}{2}x + 2$

Aufgabe 6

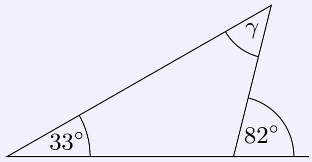
a) Berechnen Sie $\dfrac{1{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-2}}{2{,}6 \cdot 10^{6}}$.

b) Geben Sie die Summe $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$ als gemeinen Bruch an!

c) Gegeben ist die Gleichung $\sin x = 0{,}36$ ($0° \leq x \leq 360°$). Ermitteln Sie alle Lösungen im angegebenen Intervall auf zehntel Grad!

d) Stellen Sie die folgende Gleichung nach b um! $\dfrac{a+b}{c} = d$, $c \neq 0$.

e) Geben Sie die Größe des Winkels γ an (siehe Skizze).



a) $\dfrac{1{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-2}}{2{,}6 \cdot 10^{6}} = 3 \cdot 10^4 = 30000$

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{12}{21} = \frac{26}{21}$

c) $\sin x = 0{,}36$ ergibt $x_1 = 21{,}1°$ und im 2.Quadranten $x_2 = 158{,}9°$

d) $b = cd - a$

e) Nach dem Außenwinkelsatz ist $\gamma = 82° - 33° = 49°$.

Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

Aufgabe 7.1

Gegeben seien vier beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

a) Beweisen Sie, dass die Summe aus der ersten und der letzten dieser Zahlen stets gleich der Summe aus den beiden anderen Zahlen ist!

b) Es seien
S_1 die Summe aus den Quadraten der ersten und der letzten Zahl und
S_2 die Summe aus den Quadraten der beiden anderen Zahlen.
- Untersuchen Sie, ob S_1 stets gleich S_2 ist!
- Beweisen Sie, dass die Differenz $S_1 - S_2$ konstant ist!

a) Vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen seien $n, n+1, n+2, n+3$.
Dann wird $n + n + 3 = 2n + 3 = n + 1 + n + 2$ w.z.b.w.

b) $S_1 = n^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 6n + 9$; $S_2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 = 2n^2 + 6n + 5$
S_1 und S_2 sind stets voneinander verschieden.
Die Differenz ist $S_1 - S_2 = 2n^2 + 6n + 9 - (2n^2 + 6n + 5) = 4$ und somit konstant.

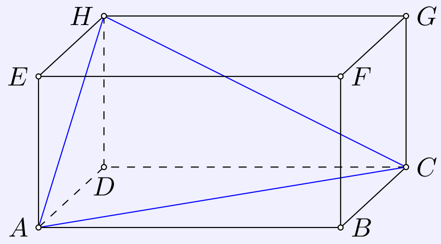
Aufgabe 7.2

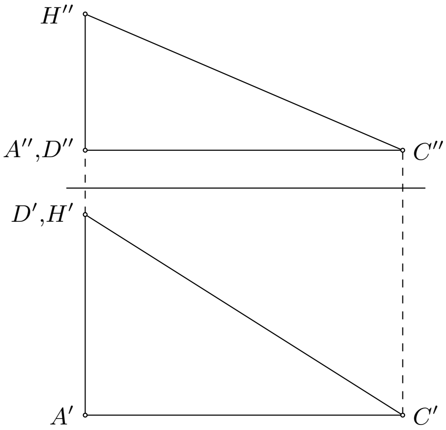
Gegeben ist ein Quader $ABCDEFGH$. Durch die Punkte A, C und H wird ein ebener Schnitt gelegt, der diesen in zwei Teilkörper zerlegt.

$\overline{AB} = 8{,}4$ cm, $\overline{BC} = 5{,}3$ cm, $\overline{AE} = 3{,}6$ cm, (Skizze nicht maßstäblich)

a) Stellen Sie den Teilkörper $ACDH$ in senkrechter Zweitafelprojektion dar! Bezeichnen Sie die Punkte entsprechend der Skizze!

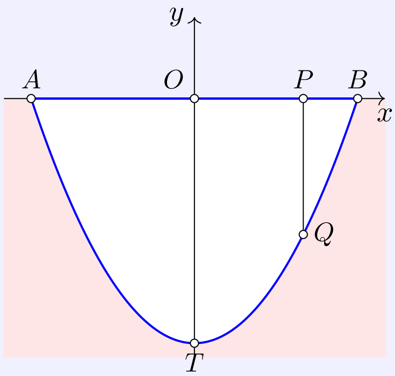
b) Ermitteln Sie den Anteil des Volumens des Teilkörpers $ACDH$ am Volumen des Quaders!





b) Das Volumen des Quaders ist $V = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AE} = 160{,}272\ \text{cm}^3$

Der Teilkörper $ACDH$ ist eine dreiseitige Pyramide mit der Höhe $\overline{DH} = \overline{AE}$ und einem rechtwinkligen Dreiecks ACD mit den Katheten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$
Volumen des Teilkörpers: $V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{AE} = 26{,}712\ \text{cm}^3$
Diese ist genau $\frac{1}{6}$ des Quaders.



Aufgabe 7.3
Die Skizze zeigt den Querschnitt einer Rinne. Ihr parabelförmiger Bogen kann durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 9$$

(Koordinateneinheit: 1 cm)

a) Geben Sie die Tiefe $\overline{OT}$ an!

b) Berechnen Sie die Breite $\overline{AB}$!

c) Zwischen O und B liegt ein Punkt P. In welchem Abstand $\overline{PB}$ vom Rand der Rinne beträgt deren Tiefe $\overline{PQ}$ 5 cm?

a) Die tiefste Stelle der Rinne liegt bei dem Scheitelpunkt der Parabel. Damit ist die Tiefe gleich 9 cm.

b) Nullstellen der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - 9$ sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 6$. Die Breite der Rinne ist somit 12 cm.

c) Der Punkt P muss einen Funktionswert $y = -5$ haben, d.h. $\frac{1}{4}x^2 - 9 = -5$.
Dies ist für $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ der Fall, Da P bei B liegen soll, ist $x = 4$ die gesuchte Lösung und der Abstand $\overline{PB}$ beträgt 1 cm.