Bemerkung zur Berechnung von $\cos 72°$:

Für die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks ist die Konstruierbarkeit der Terme $\sin \frac{2\pi}{5}$ und $\cos \frac{2\pi}{5}$ mit Zirkel und Lineal notwendig.

Nachfolgend wird $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72°$ hergeleitet:

Es ist einerseits $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ und andererseits

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Mit $x := 18°$ folgt wegen

$$\sin 2x = \sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos 54° = \cos 3x$$

also

$$2 \sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

bzw. nach Division durch $\cos x = \cos 18° \neq 0$ also

$$2 \sin x = 4\cos^2 x - 3 = 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 1 - 4\sin^2 x$$

bzw.

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in $\sin x$ hat die Lösungen

$$-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Da $\sin x = \sin 18°$ positiv ist, folgt

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$\sin 72°$ ergibt sich dann aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\sin 72° &= \sqrt{1 - \cos^2 72°} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

c.: Steffen Polster, November 2020