**Aufgabensammlung**

# 81 Aufgaben und Lösungen der Berliner Mathematikolympiade 1961 der Klassenstufen 7 bis 12

mit Lösungen von Mitgliedern
des Forums "Matroids Matheplanet"
`https://matheplanet.de`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/20

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Aufgaben I. Stufe

## 1.1 Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10711**
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

**Aufgabe 2 - V10712**
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km$^2$. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

**Aufgabe 3 - V10713**
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

**Aufgabe 4 - V10714**
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

**Aufgabe 5 - V10715**
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist $h_b$? (Messung und Berechnung!)
Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

**Aufgabe 6 - V10716**
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

## 1.2 Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V610811**
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug—Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.
Um wie viel Prozent ist das "Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

**Aufgabe 2 - V610812**
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

**Aufgabe 3 - V610813**

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

**Aufgabe 4 - V610814**
Denkaufgabe:
Fritz sagt: "Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert: "Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

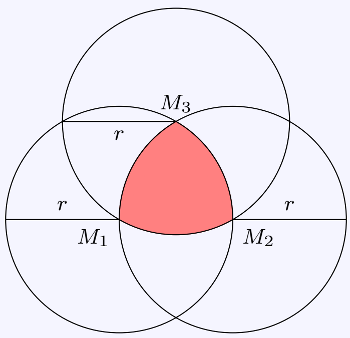
**Aufgabe 5 - V610815**
Konstruiere ein Dreieck aus:
$c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

## 1.3 Klassenstufe 9

**Aufgabe 1 - V610911**
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

**Aufgabe 2 - V610912**
Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

**Aufgabe 3 - V610913**




Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius $r$ beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p$\cdot$cm$^{-3}$.

**Aufgabe 4 - V610914**
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von $A$ aus auf $AB$ die Strecke $m$ ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt $A'$! Tragen Sie von $B$ aus auf $BC$, von $C$ aus auf $CD$ und von $D$ aus auf $DA$ dieselbe Strecke $m$ ab! Sie erhalten die Punkte $B', C'$ und $D'$!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

**Aufgabe 5 - V610915**
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel $\beta$ gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite $b$ liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

## 1.4 Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611011**
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

**Aufgabe 2 - V611012**
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} a)&\quad \sin x = \sin 69^\circ \\ b)&\quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32^\circ\right) = 1 \\ c)&\quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3 - V611013**
Peter sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis!
Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 4 - V611014**
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47^\circ$ und $\gamma = 55^\circ$.
Berechnen Sie $b, c$ und $\alpha$!

**Aufgabe 5 - V611015**
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

**Aufgabe 5 - V611016**
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

# 2 Aufgaben II. Stufe

## 2.1 Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10721**
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

| Erzeugnis | Vorkriegsjahr | 1959 |
|---|---|---|
| Elektroenergie | 84,7 Mrd. kWh | 418,2 Mrd. kWh |
| Stahl | 25,4 Mill. t | 92,7 Mill. t |
| Zement | 14,5 Mill. t | 73,3 Mill. t |

Um wieviel Prozent stieg die Erzeugung?

**Aufgabe 2 - V10722**
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.
Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

**Aufgabe 3 - V10723**
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

**Aufgabe 4 - V10724**
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.

**Aufgabe 5 - V10725**
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm$^2$.
Wieviel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in $a$ und $F$ übereinstimmen?

## 2.2 Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V610821**
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wieviel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

**Aufgabe 2 - V610822**
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wieviel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

**Aufgabe 3 - V610823**
In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

**Aufgabe 4 - V610824**
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

**Aufgabe 5 - V610825**
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wieviel solcher Geraden gibt es?

## 2.3 Klassenstufe 9

**Aufgabe 1 - V610921**
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

**Aufgabe 2 - V610922**
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

**Aufgabe 3 - V610923**
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

**Aufgabe 4 - V610924**
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$. Auf der Kathete $a$ wird $A'$, auf $b$ wird $B'$ beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

**Aufgabe 5 - V610925**
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

## 2.4 Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611021**
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

**Aufgabe 2 - V611022**
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt $C$ angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm \frac{1}{2}°$.
a) Berechnen Sie die Breite $x$ des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

**Aufgabe 3 - V611023**
Die Vierecke $V_1$, $V_2$, $V_3$ stimmen in den Diagonalen $e$ und $f$ überein. In $V_1$ schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in $V_2$ unter 45°, in $V_3$ unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

**Aufgabe 4 - V611024**
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

**Aufgabe 5 - V611025**
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

## 2.5 Klassenstufe 11

**Aufgabe 1 - V611121**
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm$^3$ einer Bodenprobe $(x)$ mit 10 cm$^3$ chemisch reinem Wasser $(y)$ auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm$^3$ und schwemmt es ebenfalls mit 10 c$^3$ reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm$^3$ der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm$^3$ der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

**Aufgabe 2 - V611122**
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

**Aufgabe 3 - V611123**
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

**Aufgabe 4 - V611124**
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

**Aufgabe 5 - V611125**

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

## 2.6 Klassenstufe 12

**Aufgabe 1 - V611221**
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

**Aufgabe 2 - V611222**
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

**Aufgabe 3 - V611223**
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

**Aufgabe 4 - V611224**
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60◦ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

**Aufgabe 5 - V611225**
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

# 3 Aufgaben III. Stufe

## 3.1 Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10731**
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: "558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt."
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

**Aufgabe 2 - V10732**
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wieviel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

**Aufgabe 3 - V10733**
Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

```
3?7 * 8?
--------
 2??? 
  ???2
--------
 ?????
```

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

**Aufgabe 4 - V10734**
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

**Aufgabe 5 - V10735**
Zeichne einen Kreis um $M$ mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt $P$ aus, dessen Abstand von $M$ ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!

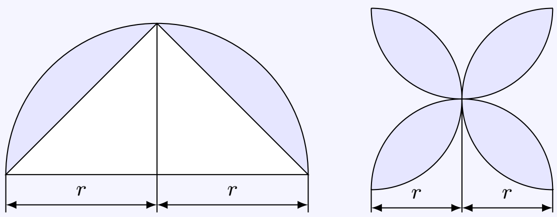
## 3.2 Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V610831**
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16$ km/h.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

**Aufgabe 2 - V610832**
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

**Aufgabe 3 - V610833**
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

**Aufgabe 4 - V610834**




Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

## 3.3 Klassenstufe 9

**Aufgabe 1 - V610931**
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre $x^2$ gerade 33 Jahre alt. Wann ist er geboren?

**Aufgabe 2 - V610932**
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind $h$ die Höhe, $d_1$ der untere Durchmesser und $d_2$ der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei $d$ der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

**Aufgabe 3 - V610933**
Für alle ungeraden Zahlen $n$ ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

**Aufgabe 4 - V610934**
Man kann den Mittelpunkt $M$ einer Strecke $AB$ auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie $AB$! Schlagen Sie um $B$ mit $AB$ einen Kreis und um $A$ mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in $C$ bzw. $C'$ schneidet! Um $C$ schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um $B$ in $D$ schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um $D$!
Sie erhalten Punkt $E$ als Schnittpunkt mit dem Kreis um $B$. Jetzt schlagen Sie um $E$ mit $CE$ und um $A$ mit $AE$ Kreise, die einander in $F$ und $F'$ schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um $F$ und $F'$ Kreise mit $FE$, dann erhalten Sie den Punkt $M$!
Beweisen Sie, dass $M$ der Mittelpunkt von $AB$ ist!

**Aufgabe 5 - V610935**
Mit welcher Ziffer endet die Zahl $2^{100}$? Begründen Sie das!

## 3.4 Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611031**
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

**Aufgabe 2 - V611032**
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei $a$ der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

**Aufgabe 3 - V611033**
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 75 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

**Aufgabe 4 - V611034**
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt $A$. Verbinden Sie den Punkt $A$ mit dem Mittelpunkt $M$ des Kreises.

Gesucht ist der auf der Zentralen $AM$ gelegene Punkt $X$, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte $XT_1$ bzw. $XT_2$ gleich dem Abstand des Punktes $X$ vom Punkt $A$ sind. ($T_1$ und $T_2$ sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

**Aufgabe 5 - V611035**
Unter der Zahl $n!$, gelesen "$n$ Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

## 3.5 Klassenstufe 11

**Aufgabe 1 - V611131**
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

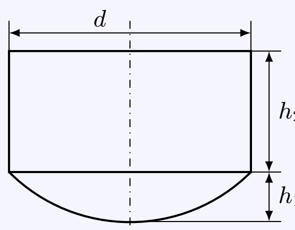
| | Zement | Wandfertigteile |
|---|---|---|
| Typ A | 5,23 t | - |
| Typ B | 4,19 t | 22,1 t |

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass $x$ Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl $x$ der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

**Aufgabe 2 - V611132**




Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

**Aufgabe 3 - V611133**
Gegeben sind zwei feste Punkte $A$ und $B$ mit der Entfernung $e$.
a) Wo liegen alle Punkte $F$, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von $A$ und $B$ die feste Summe $s$ haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von $e$ und $s$ solche Punkte?

**Aufgabe 4 - V611134**
Von einem Punkt $P$ gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte $A, B, C$ der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks $ABC$ ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

**Aufgabe 5 - V611135**
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist? b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

## 3.6 Klassenstufe 12

**Aufgabe 1 - V611231**
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

**Aufgabe 2 - V611232**
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

**Aufgabe 3 - V611233**
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

**Aufgabe 4 - V611234**
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt $Q$, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes $P$ auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt $R$ so, dass $PQR$ ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt $R$, wenn sich $P$ längs $ABCD$ bewegt?

**Aufgabe 5 - V611235**
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder Schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

# 4 Lösungen I. Stufe

## 4.1 Lösungen Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10711**
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

Beginnend mit der kleinsten Zahl ergibt sich die Ordnung

$$-\frac{3}{2}; \quad -0{,}67; \quad -0{,}66; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad 3{,}5\overline{2}; \quad \frac{29}{8}$$

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 2 - V10712**
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km$^2$. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

2600 km$^2$ sind gleich 260000 ha. Damit wird $\frac{260000}{750} = 346{,}\overline{6} \approx 347$.
Der Stausee ist 347 mal größer als der Müggelsee.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

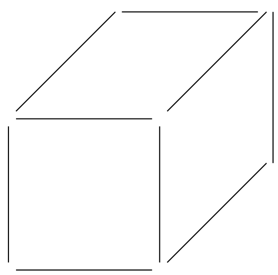
**Aufgabe 3 - V10713**
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Mit direkter Proportionalität wird $\frac{259}{7} = \frac{x}{22}$ und $x = 814$ kg. Es werden 814 kg Kupferdraht benötigt.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

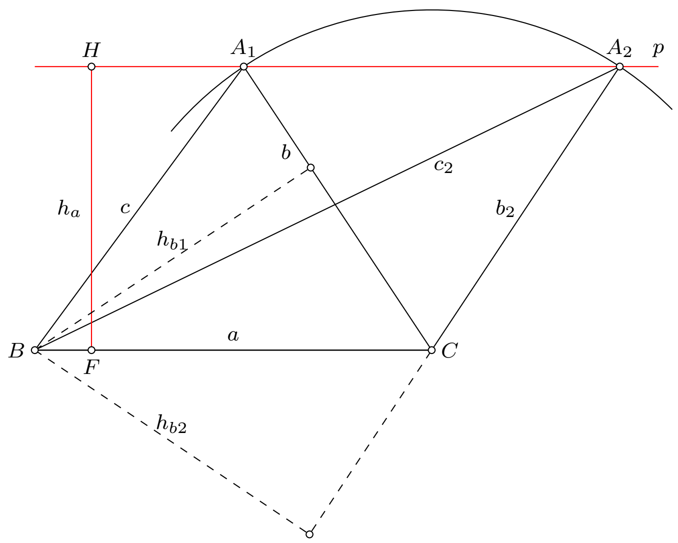
**Aufgabe 4 - V10714**
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Die Streichhölzer können so gelegt werden, dass sie ein Schrägbild eines Quaders darstellen. Die drei Vierecke sind ein Quadrat und zwei Rhomben.



*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 5 - V10715**
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist $h_b$? (Messung und Berechnung!)
Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)



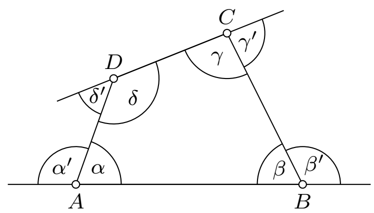

Konstruktion:
1. Man zeichne die Strecke $BC$ der Länge $a$.
2. In einem beliebigen Punkt $F$ auf $BC$ errichte man eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten sei $H$ ein Punkt im Abstand $h_a$ von F.
3. Durch $H$ konstruiere man die Parallele $p$ zu $BC$.
4. Ein Kreis um $C$ mit dem Radius $b$ schneidet dann die Parallele $p$ in zwei Punkten. Diese Punkte sind $A$ und $A_2$.
5. Die zueinander nicht kongruenten Dreiecke $ABC$ und $A_2BC$ sind dann die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung.

Messung der zwei Höhen $h_{b1}$ und $h_{b2}$ ergibt jeweils $\approx 6$ cm. Die Berechnung ergibt

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b \qquad \to \qquad h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{35}{6} \text{ cm}$$

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 6 - V10716**
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!




Die Summe der vier Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der vier Außenwinkel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ beträgt 720°, da vier gestreckte Winkel addiert werden.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720°$$

Da die Innenwinkelsumme im Viereck gleich 360° beträgt, ergibt sich

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720° - \alpha - \beta - \gamma - \delta = 720° - 360° = 360°$$

Die Summe der vier Außenwinkel des Vierecks beträgt 360°.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 4.2 Lösungen Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V10811**
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.
Um wie viel Prozent ist das "Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Doppelstock-Gliederzug: Leergewicht je Sitzplatz $L_1 = \frac{129}{640} \approx 0{,}2016$
D-Zug-Wagen: Leergewicht je Sitzplatz $L_2 = \frac{40}{64} \approx 0{,}625$
$L_1$ ist gleich 33,22 % von $L_2$. Beim Doppelstockgliederzug ist das Sitzplatzgewicht somit um 67,75 Prozent niedriger als bei einem D-Zug alter Bauart.

**Aufgabe 2 - V10812**
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Das Volumen des Drahtes bleibt erhalten, d.h. es ist

$$\pi r_a^2 l_a = \pi r_e^2 l_e \Rightarrow l_e = \frac{r_a^2}{r_e^2} \cdot l_a$$

wobei $r_a, l_a$ Radius und Länge am Anfang und $r_e, l_e$ Radius und Länge des Endproduktes sind.
Einsetzen der Werte ergibt $l_e = 360$ Millionen mm = 360 km.

**Aufgabe 3 - V10813**

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

$$\begin{aligned}(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b) &= 7{,}3a - 9{,}8c - 2{,}1b - 7{,}2c - 3{,}9a + 4{,}7b \\ &= 7{,}3a - 3{,}9a - 2{,}1b + 4{,}7b - 7{,}2c - 9{,}8c \\ &= 3{,}4a + 2{,}6b - 17c\end{aligned}$$

b) Einsetzen ergibt -108,3.

**Aufgabe 4 - V10814**
Denkaufgabe:
Fritz sagt: "Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert: "Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

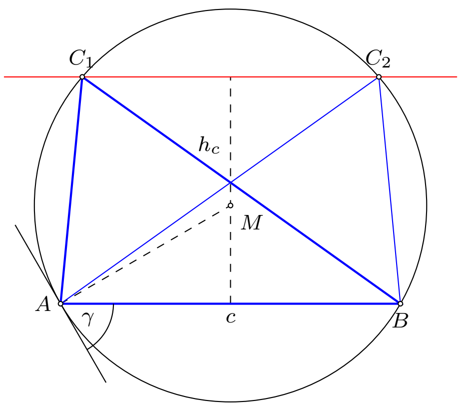
1. Fall:

Fritz hat sich wirklich erst dreimal geirrt. Dann hat er sich jetzt nicht geirrt, weil er ja die Wahrheit gesprochen hat. Franz hat also in diesem Falle unrecht.

2. Fall:

Fritz hat sich bisher nicht dreimal, sondern mehr (oder weniger) als dreimal geirrt. Dann hat er sich eben zwar geirrt, aber bestimmt nicht zum vierten Mal. Infolgedessen hat Franz auch in diesem Fall (und damit in jedem Fall) unrecht.

**Aufgabe 5 - V10815**
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)




Konstruktion:
Die Konstruktion ergibt sich aus dem Sehnentangentenwinkel - Peripheriewinkelsatz.
1. An die Strecke $\overline{AB} = c$ wird der Winkel $\gamma$ angetragen.
2. Die Senkrechte zum freien Schenkel von $\gamma$ und die Mittelsenkrechte von $AB$ schneiden sich im Umkreismittelpunkt $M$ des gesuchten Dreiecks $ABC$.
3. Die Parallele zu $AB$ im Abstand $h_c$ schneidet den Kreis in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem, wie viele Lösungen für den Punkt $C$ existieren. Für die gegebenen Größen gibt es zwei Schnittpunkte $C_1$ und $C_2$. Die beiden Dreiecke $ABC_1$ und $ABC_2$ erfüllen die Anforderungen und sind zueinander kongruent.

*Aufgaben der Vorolympiade 1961 I. Runde gelöst von Steffen Polster*

## 4.3 Lösungen Klassenstufe 9

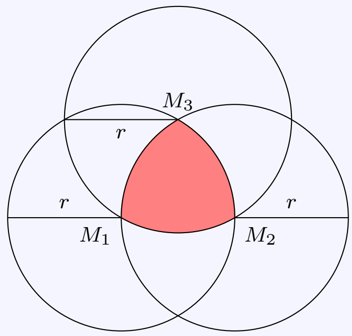
**Aufgabe 1 - V10911**
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Berechnung der Flugzeiten: $2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h.
Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km·h$^{-1}$.
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km·h$^{-1}$.

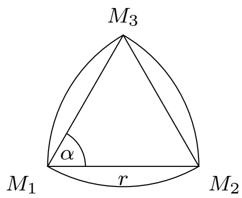
**Aufgabe 2 - V10912**
Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zueinander verschiedene Stellungen.

**Aufgabe 3 - V10913**

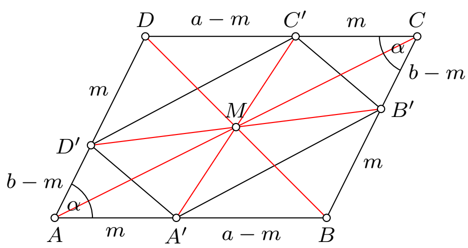



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius $r$ beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm$^{-3}$.



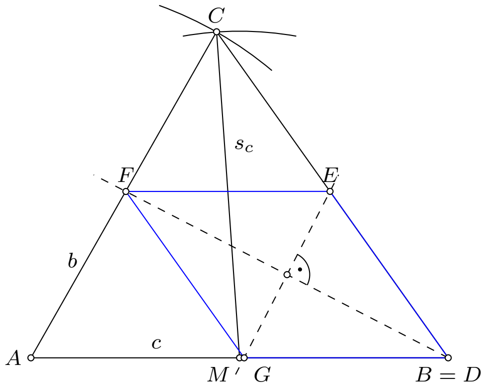

$$F = F_{\triangle M_1M_2M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0{,}845 cm^3$$
$$G \approx 6{,}6p$$

**Aufgabe 4 - V10914**
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von $A$ aus auf $AB$ die Strecke $m$ ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt $A'$! Tragen Sie von $B$ aus auf $BC$, von $C$ aus auf $CD$ und von $D$ aus auf $DA$ dieselbe Strecke $m$ ab! Sie erhalten die Punkte $B', C'$ und $D'$!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!




$A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm $ABCD$ bezüglich des Mittelpunktes $M$ und die Konstruktion der Punkte $A'$,$B'$,$C'$ und $D'$ sind die Dreiecke $AA'D'$ und $B'CC'$ sowie $A'BB'$ und $C'DD'$ paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf $M$.
Damit sind $A'D'$ und $B'C'$ sowie $A'B'$ und $C'D'$ jeweils gleichlang und zueinander parallel. $A'B'C'D'$ ist somit ein Parallelogramm.

**Aufgabe 5 - V10915**
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel $\beta$ gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite $b$ liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)




Konstruktion des Dreiecks $ABC$:
(1) Zeichne die Strecke $AB = c$. Konstruiere den Mittelpunkt $M$ von $AB$.
(2) Zeichne einen Kreisbogen um $M$ mit dem Radius $s_c$. Zeichne einen Kreisbogen um $A$ mit dem Radius $b$. Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt $C$. Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von $AB$) erzeugt ein kongruentes Dreieck $ABC_2$.

Konstruktion des Rhombus $DEFG$:
(1) Der $D$ gegenüberliegende Punkt $F$ muss auf der Winkelhalbierenden von $\beta$ liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit $AC$ ist der Punkt $F$.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt von $DF$ und errichte in ihm die Senkrechte zu $DF$. Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten $BC$ und $AC$ sind die gesuchten Punkte $E$ und $G$. $DEFG$ ist der gesuchte Rhombus.

*Aufgaben der I. Runde der Vorolympiade 1961 gelöst von Steffen Polster*

## 4.4 Lösungen Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611011**
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Für die Hackfruchtflächen werden $48{,}72 \cdot 34\text{kg} = 1656{,}48\text{kg}$ $P_2O_5$ benötigt. Für die Luzerneflächen werden $20{,}47 \cdot 20\text{kg} = 409{,}40\text{kg}$ $P_2O_5$ benötigt. Für die Getreideflächen werden $82{,}5 \cdot 17{,}5\text{kg} = 1443{,}75\text{kg}$ $P_2O_5$ benötigt. Insgesamt werden somit $3509{,}83\text{kg}$ $P_2O_5$ benötigt.

Superphosphat enthält 17,3 Prozent $P_2O_5$, sodass insgesamt $\frac{3509{,}63}{0{,}173}\text{kg} \approx 20286\text{kg}$ Superphosphat benötigt werden. Da eine Dezitonne 100kg entspricht, werden 202,86 Dezitonnen Superphosphat benötigt.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 2 - V611012**
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} &a) && \sin x = \sin 69^\circ \\ &b) && \tan\left(\frac{x}{2} + 32^\circ\right) = 1 \\ &c) && \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

a) $x_1 = 69^\circ; x_2 = 111^\circ$. Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$x_1 = 69^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad ; \quad x_2 = 111^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b) $x_1 = 26°; x_2 = 206°$. Bei Berücksichtigung der Periodizität

$$x = 26° + k \cdot 180° \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 x$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

*Übernommen von* [6]

**Aufgabe 4 - V611013**
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie $b, c$ und $\alpha$!

Da die Winkel $\beta$ und $\gamma$ an der Seite $a$ anliegen, ist dieses Dreieck nach den Kongruenzsätzen bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar.
Für den Winkel $\alpha$ gilt nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 47° - 55° = 78°.$$

Mit dem Sinussatz gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

und daher

$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(47°)}{\sin(78°)} \approx 3{,}74\text{cm}.$$

Ebenso folgt mit dem Sinussatz

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(55°)}{\sin(78°)} \approx 4{,}19\text{cm}.$$

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 5 - V611014**
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse gerade die Summe des Erdradius und der Höhe des Fernsehturms ist. Wir setzen dafür $c = 6370{,}5$km. Die bekannte Kathete ist der Erdradius und wir schreiben dafür $a = 6370$km. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da die gesuchte Kathete $b$ tangential am Erdgroßkreis anliegt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 = c^2 - a^2 = (6370{,}5\text{km})^2 - (6370\text{km})^2 = 6370{,}25\text{km}^2$$

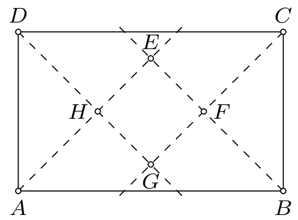
und somit

$$b \approx 79{,}8\text{km}.$$

Das bedeutet, dass man vom Fernsehturm etwa 79,8km weit sehen kann.

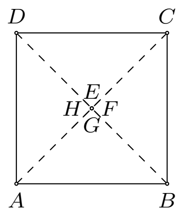
*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 5 - V611015**
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?




a) Die vier Winkelhalbierenden bilden ein Quadrat $EFGH$.
$F$ und $H$ liegen aus Symmetriegründen auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks $ABCD$. Nach einem Strahlensatz gilt dann $EH : AE = EF : EB$. Da $AE = EB$ ist, gilt auch $EH = FH$. Analog folgt auch $FG = GH$, $EH = GH$ und $GF = EF$, d.h., alle vier Seiten von $EFGH$ sind gleich lang.
Das Dreieck $ABE$ ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln von 45° (Winkelhalbierende). Das ist der Winkel bei $E$ ein Rechter und $EFGH$ ist ein Quadrat.

b) Für ein Quadrat fallen die vier Punkte $E, F, G$ und $H$ zusammen, da auch die Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es entsteht keine Fläche.




*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

# 5 Lösungen II. Stufe

## 5.1 Lösungen Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10721**
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

| Erzeugnis | Vorkriegsjahr | 1959 |
|---|---|---|
| Elektroenergie | 84,7 Mrd. kWh | 418,2 Mrd. kWh |
| Stahl | 25,4 Mill. t | 92,7 Mill. t |
| Zement | 14,5 Mill. t | 73,3 Mill. t |

Um wieviel Prozent stieg die Erzeugung?

Mit der Beziehung $W : G = p : 100$ (Prozentwert $W$, Grundwert $G$, Prozentsatz $p$) wird für jedes Erzeugnis:
Elektroenergie $p = 493{,}7$, d.h. Anstieg um 393,7 %; Stahl $p = 365{,}0$, d.h. Anstieg um 265 % und Zement $p = 505{,}5$, d.h. Anstieg um 405,5 %.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 2 - V10722**
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.
Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird mittel $v = \frac{s}{t}$ berechnet.
Flugzeug AN 2: $s_1 = 220$ km; $t_1 = 85$ min, d.h. $v_1 = \frac{220}{85} = 2{,}59 \frac{km}{min} \approx 155 \frac{km}{h}$
Flugzeug IL 14: $s_2 = 443$ km; $t_1 = 95$ min, d.h. $v_2 = \frac{443}{95} = 4{,}66 \frac{km}{min} \approx 280 \frac{km}{h}$
D-Zug: $s_3 = 169$ km; $t_1 = 137$ min, d.h. $v_1 = \frac{169}{137} = 1{,}23 \frac{km}{min} \approx 74 \frac{km}{h}$

Aufstellen der gesuchten Proportionen: $155 : 74 = 2{,}1$ und $280 : 74 = 3{,}8$ und somit lautet die gesuchte Proportion $v_1 : v_2 : v_3 = 2{,}1 : 3{,}8 : 1$.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 3 - V10723**
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Es gilt, mit den ersten Buchstaben als Abkürzung und < für "jünger als":

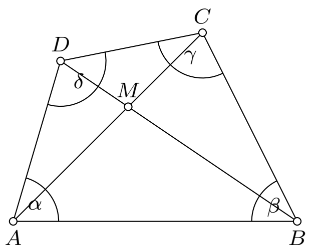
1. R < H, K < L, also derjenige muss der Älteste sein, der auf der linken Seite nicht auftritt: H
2. I < R, L < H, also ist Zweitältester derjenige, der links nur erscheint mit H als rechter Seite: L
3. K < R, I < H, der Nachfolgende ist der, der links auftritt mit H und L als rechter Seite: R
4. R < L, I < K, der Nächste kann nur der sein, der links auftritt und jeweils H, L und R auf der rechten Seite hat: K

5. I < L, K < H, der Jüngste muss dann der sein, der links erscheint mit H, L, R und K auf der rechten Seite: I

So ergibt sich die Reihenfolge (der Älteste zuerst): Herbert, Lore, Richard, Karl, Ilse.

*Lösung entnommen aus* [6]

**Aufgabe 4 - V10724**
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.




Voraussetzung: $AC = BD$, $AM = MC$, $BM = MD$

Behauptung: Winkel $\alpha$ = Winkel $\beta$ = Winkel $\gamma$ = Winkel $\delta$

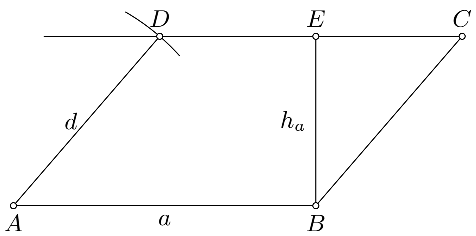
Beweis: Die Dreiecke $ABM$ und $DMC$ sind gleichschenklig und einander kongruent nach SWS, daher Winkel $MAB$ = Winkel $ABM$ = Winkel $MCD$ = Winkel $CDM$.
Dasselbe trifft für die Dreiecke $DAM$ und $MBC$ zu. Daher Winkel $DAM$ = Winkel $MDA$ = Winkel $MBC$ = Winkel $BCM$. Da

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle DAM + \angle MAB \\ \beta &= \angle ABM + \angle MBC \\ \gamma &= \angle MCD + \angle BCM \\ \delta &= \angle CDM + \angle MDA \end{aligned}$$

gilt, folgt daraus $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und laut Aufgabe die Diagonalen einander halbieren, ist jeder der vier Winkel ein Rechter, das Viereck also ein Rechteck.

*Lösung entnommen aus* [6]

**Aufgabe 5 - V10725**
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a =$ 5,0 cm, $AD = d =$ 3,7 cm, $F = 14$ cm$^2$.
Wieviel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in $a$ und $F$ übereinstimmen?



Gegeben sind $AB = a = 5$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm und $F = 14$ cm$^2$. Für die Konstruktion wird $h_a$ über $\frac{F}{a} = h_a = 2{,}8$ cm ermittelt.

Konstruktion: Man zeichne die Seite $AB$. Im Abstand von $h_a$ konstruiere man eine Parallele zu $AB$ durch einen Punkt $E$ mit $BE = h_a$.
Ein Kreisbogen um $A$ mit dem Radius $AD = d$ schneidet die Parallele in einem Punkt $D$. Der Punkt $C$ ergibt sich durch Parallelverschiebung von $AD$ durch $B$.
$ABCD$ ist ein Parallelogramm, dass der Aufgabenstellung entspricht.

Durch Nachdenken über die Bestimmungsstücke von Parallelogramm, Rechteck und Quadrat kommt man zu dem Schluss:
a) Es gibt beliebig viele Parallelogramme, die mit $ABCD$ in $a$ und $F$ übereinstimmen.
b) Es gibt genau ein Rechteck, dass mit $ABCD$ in $a$ und $F$ übereinstimmt.
c) Es gibt kein Quadrat, dass mit $ABCD$ in $a$ und $F$ übereinstimmt.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 5.2 Lösungen Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V10821**
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wie viel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

a) Die Verhältnisgleichung $3 \cdot 10 : 5 = x : 1$ hat die Lösung $x = 6$. Mit der Kartoffellegemaschine sind für 1 ha 6 Arbeitskräfte eine Stunde erforderlich.

b) Analog wird aus $10 : 0{,}5 = x : 1$ die Lösung $x = 20$. Bei Handarbeit sind für 1 ha 20 Arbeitskraftstunden notwendig.

c) Aus den Werten von a) und b) wird $6 : x = 20 : 100$, $x = 30$. Der Aufwand an Arbeitskräften beträgt mit der Legemaschine nur noch 30 Prozent.

**Aufgabe 2 - V10822**
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wie viel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Das Verhältnis $1000 \text{ kg} : 228 \text{ kg} = x : 250$ ergibt für die Menge an Scherben $x = 1096{,}5$ kg. Für die anderen Rohstoffe wird die Gleichung entsprechend verändert und gelöst.
Es ergibt sich: Beim Verbrauch von 1 t Sand benötigt man 1096 kg Scherben, 590 kg Pechstein, 31 kg Flussspat, 362 kg Kalk, 75 kg Sulfat und 452 kg Soda.

**Aufgabe 3 - V10823**
In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muss sie auch durch 8 und durch 9 teilbar sein, denn $8 \cdot 9 = 72$. Um die fehlenden Ziffern zu ermitteln, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78. muss also durch 8

teilbar sein. $720 : 8 = 90$.
Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muss die letzte Ziffer 4 sein.

Um die erste Ziffer zu erhalten, wende ich die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Dies ist auch die fehlende Ziffer.
Die vollständige Zahl lautet 53784.

**Aufgabe 4 - V10824**
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

a) $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$

$$\begin{aligned}(30+2)(40-2) &= 30 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 30 - 2 \cdot 2\\ &= 30 \cdot 40 + 2(40 - 30 - 2) = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8\end{aligned}$$

b) $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned}(70+3)(80-3) &= 70 \cdot 80 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 70 - 3 \cdot 3\\ &= 70 \cdot 80 + 3(80 - 70 - 3) = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7\end{aligned}$$

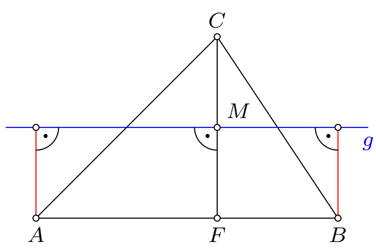
c) Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+10-b) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 - 10ab + 10ab + 10b - b \cdot b\\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2\\ &= 10a(10a+10) + b(10-b)\end{aligned}$$

Weitere Verallgemeinerung:
Man erhält das Produkt zweier zweistelliger (ganzer) Zahlen mit gleichen Zehnern und einander zu 10 ergänzenden Einem, indem man zuerst die Zehner mit dem nächsthöheren Zehner, dann die Einer miteinander multipliziert und die beiden Zwischenprodukte addiert.

$$(a+b)(a+10-b) = a(a+10) + b(10-b)$$

**Aufgabe 5 - V10825**
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wie viel solcher Geraden gibt es?




Konstruktion:
1. Konstruiere die Höhe $h_c$ von $C$ auf die Seite $AB$. Konstruiere den Mittelpunkt $M$ dieser Höhe.
2. Zeichne eine Senkrechte zu $h_c$ durch $M$, die somit parallel zu $AB$ ist. Diese Senkrechte $g$ ist eine Gerade, die den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Der Abstand der Punkte $A$ und $B$ von $g$ ist $\frac{h_c}{2}$.
Auf Grund der Konstruktion hat auch $C$ den Abstand $\frac{h_c}{2}$ von $g$.

In einem Dreieck existieren stets 3 derartige Geraden, die mittels einer der Höhen $h_a, h_b$ und $h_c$ konstruiert werden können.

*Aufgaben der Vorolympiade 1961 II. Runde gelöst von Steffen Polster*

## 5.3 Lösungen Klassenstufe 9

**Aufgabe 1 - V10921**
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

a1) Umrechnung von $t$: $170s = \frac{170}{3600}$h
a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117{,}6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 km·h$^{-1}$.
b1) zeitliche Abweichung nach oben: $v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5} = 2111{,}4 \approx 2111$.
b2) zeitliche Abweichung nach unten: $v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5} = 2123{,}9 \approx 2124$. Bei einem Zweitfehler von ±0,5 s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa ±6 km·h$^{-1}$ behaftet.

**Aufgabe 2 - V10922**
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

| | 1958 | 1965 |
|---|---|---|
| Gesamte Industrieproduktion | 100 | 188 |
| Produktion von Produktionsmitteln | $x$ | $\frac{195}{100}x$ |
| Produktion von Konsumgütern | $y$ | $\frac{177}{100}y$ |

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \quad (1) \qquad 100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \quad (2)$$

Aus (I)+(II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$, d.h. $x = 61{,}1$.
Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:
Sei $p$ der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p \Rightarrow p = 63{,}4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

**Aufgabe 3 - V10923**
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Radius des kleinsten Kreises ist $r_1 = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien $r_2, r_3, r_4$ und $r_5$. Es ist gefordert, dass

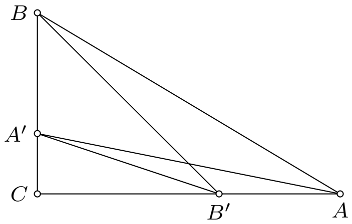
$$F_1 = \pi r_1^2 = F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) = F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) = F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; bei Division durch $\pi$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 &\Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2} \\ r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 &\Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3} \\ r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 &\Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4} \\ r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 &\Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5} \end{aligned}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

**Aufgabe 4 - V10924**
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$. Auf der Kathete $a$ wird $A'$, auf $b$ wird $B'$ beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!




Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

| | |
|---|---|
| I im Dreieck $A'B'C'$ | $A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$ |
| II im Dreieck $BB'C$ | $BC^2 + B'C^2 = BB'^2$ |
| III im Dreieck $AA'C$ | $A'C^2 + AC^2 = AA'^2$ |
| IV im Dreieck $ABC$ | $BC^2 + AC^2 = AB^2$ |

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.
Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

**Aufgabe 5 - V10925**
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
- bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
- bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d.h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d.h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

*Lösungen der II. Runde der Vorrunde 1961 übernommen von* [6]

## 5.4 Lösungen Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611021**
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

$A$ sei die Anfangsproduktion. Dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

$$\begin{array}{llll} 1959 & A & & \\ 1960 & A+\frac{1}{10}A & =A\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1 \\ 1961 & A\cdot 1{,}1+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1 & =A\cdot 1{,}1\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^2 \\ 1962 & A\cdot 1{,}1^2+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1^2 & =A\cdot 1{,}1^2\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^3 \end{array}$$

Nach $n$-jährigem Wachsen ergibt sich $A\cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt. Danach gilt die Formel:

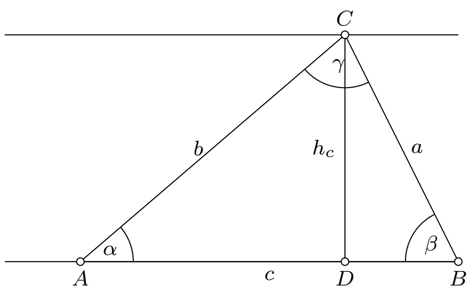
$$x = A\cdot 1{,}1^n$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:
zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59 \approx 2{,}6$,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73 \approx 6{,}8$,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26 \approx 45{,}3$.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren auf das 6,8fache ..., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

*Übernommen von* [6]

**Aufgabe 2 - V611022**
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt $C$ angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm\frac{1}{2}^\circ$.
a) Berechnen Sie die Breite $x$ des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.




a) Allgemeine Lösung: Es gilt $\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a}$ sowie $h_c = a\sin\beta$. Aus dem Sinussatz wird durch Einsetzen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad h_c = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

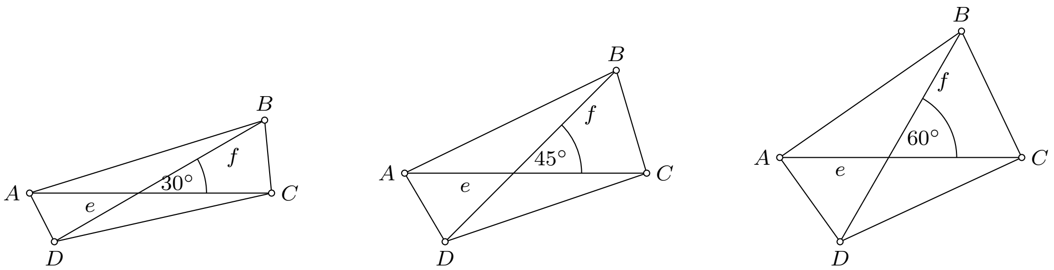
Für die gegebenen Werte ergibt sich somit $h_c = 169{,}5$ m. Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung des Messfehlers 169,5 m.

b) Berechnet man die Höhe $h_c$ mit $c + 0.5$, $\alpha + 0.5°$ und $\beta + 0.5°$ ergibt sich $h_c = 173{,}3$ m.

Im Fall $c - 0.5$, $\alpha - 0.5°$ und $\beta - 0.5°$ wird $h_c = 165{,}7$ m.
Der mögliche Fehler ist somit $\frac{173{,}5-165{,}5}{2} = 4$ m.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 3 - V611023**
Die Vierecke $V_1$, $V_2$, $V_3$ stimmen in den Diagonalen $e$ und $f$ überein. In $V_1$ schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in $V_2$ unter 45°, in $V_3$ unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?




Jedes der Vierecke wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Dabei entstehen die Diagonalenteile $e_1, e_2, f_1, f_2$ mit $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Mit dem Schnittwinkel $\alpha$ der Diagonalen ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Vierecks

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}e_1 \cdot f_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_2 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_1 \cdot f_2 \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_1 \sin(180° - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot e \cdot f \end{aligned}$$

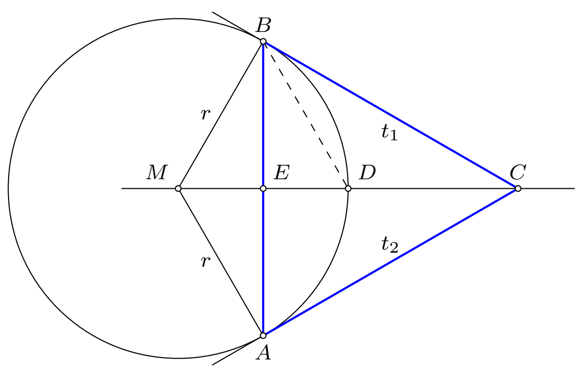
Damit folgt für die Verhältnisse der Flächeninhalte

$$\begin{aligned} F_1 : F_2 &= \sin 30° : \sin 45° = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2} \\ F_2 : F_3 &= \sin 45° : \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 4 - V611024**
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!



Behauptung: Das Dreieck $ABC$ ist gleichseitig.

Beweis:
1. Winkel $\angle MBC$ ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck $MDB$ ist gleichseitig, alle Seiten sind $r$, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle MED$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.
4. Das Dreieck $CDB$ ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel $\angle BCD$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.

Im $\triangle EBM$ treten die Winkel $\angle EMB = 60°$ (aus 2.), $\angle MBE = 30°$ (Basiswinkel in $ABM$) auf, folglich ist Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle EBM$ = Winkel $\angle EBC = 60°$. Im Dreieck $EBC$ ist der Winkel $\angle EBC = 60°$, der Winkel $BCE = 30°$ und der Winkel $\angle BEC = 90°$.
Die Strecke $EC$ ist Symmetrieachse im Dreieck. Daraus folgt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 5 - V611025**
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Mit $g = 2k$ für eine natürliche Zahl $k$ bezeichnen wir die gerade Anzahl Streichhölzer. Mit $u = 2l + 1$ für eine nichtnegative ganze Zahl $l$ bezeichnen wir die ungerade Anzahl Streichhölzer. Es gibt zwei Varianten.

Erste Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der linken Hand. Dann gilt für das Ergebnis $n_1$ des Rätsels
$$n_1 = 2 \cdot g + 3 \cdot u = 4k + 6l + 3.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels ungerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand befindet.

Zweite Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der rechten Hand. Dann gilt für das Ergebnis $n_2$ des Rätsels
$$n_2 = 2 \cdot u + 3 \cdot g = 6k + 4l + 2.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels gerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand befindet.

*Aufgabe gelöst von svrc*

## 5.5 Lösungen Klassenstufe 11

**Aufgabe 1 - V611121**
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm$^3$ einer Bodenprobe ($x$) mit 10 cm$^3$ chemisch reinem Wasser ($y$) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm$^3$ und schwemmt es ebenfalls mit 10 c$^3$ reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm$^3$ der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm$^3$ der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

a) Mit $x = 1$ cm$^3$, $y = 10$ cm$^3$, $x + y = 11$ cm$^3$ ist das Verhältnis 1:10 und für das Mischungsverhältnis 1:2000000 ergibt sich damit:
$$\left(\frac{1}{11}\right)^n = \frac{1}{2000000}$$
$$n = \frac{\log(2000000)}{\log(11)} \approx 6$$

b)

$$n_{Bak} = \frac{10000000}{2000000} = 5$$

*Aufgabe gelöst von OlgaBarati*

**Aufgabe 2 - V611122**
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

a) Wir suchen zuerst die konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$. Es gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = a_0 t$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$ wegen $v(0\text{s}) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da

$$v(14\text{s}) = a_0 \cdot (14\text{s}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{80000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ist, folgt

$$a_0 = \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{14\text{s}} = \frac{100}{63}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und somit für die zurückgelegte Wegstrecke nach 14 Sekunden

$$w(14\text{s}) = \frac{a_0}{2} \cdot (14\text{s})^2 = \frac{19600}{126}\text{m} = \frac{1400}{9}\text{m} \approx 0{,}156\text{km}.$$

Also legt das Fahrzeug in der Beschleunigungsphase eine Strecke von ungefähr 0,156km zurück.

b) Für die Gesamtstrecke von 1km gilt

$$w_{\text{gesamt}} = \frac{1400}{9}\text{m} + \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot t_2 = \frac{9000}{9}\text{m}.$$

Somit folgt

$$\left(\frac{200}{9}\frac{m}{s}\right) \cdot t_2 = \frac{7600}{9}\text{m}$$

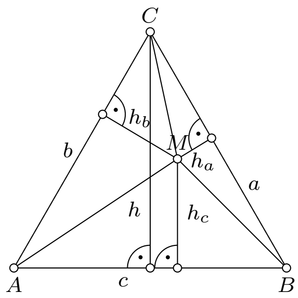
und daher $t_2 = 38\text{s}$. Damit ist 1km entsprechend nach

$$t_{\text{gesamt}} = 14\text{s} + 38\text{s} = 52\text{s}$$

zurückgelegt.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 3 - V611123**
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.




Wir bezeichnen mit $\Delta ABC$ das Dreieck mit den Eckpunkten $A$, $B$ und $C$. Da das Dreieck gleichseitig ist, gilt für die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{AC}|$ und $c = |\overline{AB}|$, dass $a = b = c$ ist. Diese Seiten möchten wir alle als Grundseite $g = a = b = c$ bezeichnen.

Liegt im Inneren des Dreiecks ein Punkt $M$, so entstehen die drei Dreiecke $\Delta ABM$, $\Delta BCM$ und $\Delta CAM$. Diese Dreiecke besitzen ebenfalls die Grundseite $g$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta ABC$ mit Grundseite $g$ und Höhe $h$ ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei kleineren Dreiecke. Die Höhen in $\Delta ABM$, $\Delta BCM$ und $\Delta CAM$ nennen wir $h_1$, $h_2$ und $h_3$. Dies sind auch die Abstände von $M$ zur entsprechenden Grundseite.

Es gilt somit

$$\frac{gh}{2} = \frac{gh_1}{2} + \frac{gh_2}{2} + \frac{gh_3}{2} = \frac{g}{2} \cdot \{h_1 + h_2 + h_3\}$$

und daher folgt

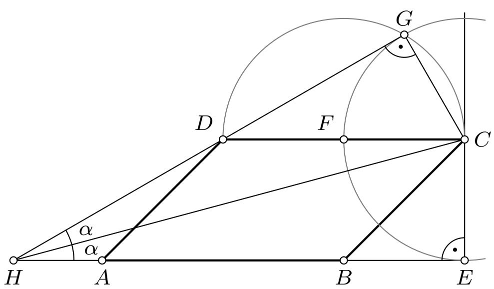
$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

was die Behauptung zeigt.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 4 - V611124**
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Den gesuchten Punkt $H$ konstruiert man wie folgt:
1. Zeichne eine Senkrechte von $C$ auf die Gerade $AB$. Der Schnittpunkt ist $E$.
2. Zeichne einen Kreis um den Mittelpunkt $C$ durch den Punkt $E$.
3. Konstruiere den Mittelpunkt $F$ der Strecke $CD$.
4. Zeichne einen Halbkreis um den Punkt $F$ vom Punkt $C$ zum Punkt $D$. Der Schnittpunkt der Kreise ist $G$.
5. Zeichne eine Gerade durch die Punkte $D$ und $G$. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Gerade $AB$ ist der gesuchte Punkt $H$.




Begründung:

Die Gerade $HC$ muss die Winkelhalbierende der Geraden $HE$ und $HG$ sein. Das ist der Fall, weil die Dreiecke $HEC$ und $HCG$ kongruent sind, da sie in $G$ und $E$ einen rechten Winkel aufweisen, die Seite $HC$ gemeinsam haben und eine weitere Seite ($CG$ bzw. $CE$) gleich lang ist (SSW). Damit der Winkel $\angle DGC$ rechtwinklig ist, wurde wegen des Satzes von Thales der Kreis um den Mittelpunkt $F$ mit dem Kreis um $C$ geschnitten.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 5 - V611125**

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Das Additions- und das Divisionszeichen.

b) Gesucht sind (rationale) Zahlen $a$,$b$,$c$ mit $b \neq 0$ und (1) $a + b = c$ (2) $a : b = c$
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $a + b = a : b$ und daraus

$$a = \frac{b^2}{1-b}$$

Dies in (1) eingesetzt ergibt $\frac{b^2}{1-b} + b = c$ und daraus

$$c = \frac{b}{1-b}$$

Für jedes $b \neq 0{,}1$ ergibt sich damit eine Aufgabe

$$\frac{b^2}{1-b} + b = \frac{b}{1-b}$$

Wählt man $0 < b < 1$, so sind alle Werte $a$,$b$,$c$ zudem positiv.

c) Mit $b = \frac{1}{3}$ ergibt sich $a = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Mit $b = \frac{3}{5}$ ergibt sich $a = \frac{9}{10}$ und $c = \frac{3}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

d) $a$,$b$,$c$ können nicht alle positive ganze Zahlen sein, da für eine ganze Zahl $b > 1$ die Zahl $c = \frac{b}{1-b}$ negativ ist. (Zudem ist $1 - b$ kein Teiler von $b$; $c$ ist also noch nicht einmal ganz.)

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

## 5.6 Lösungen Klassenstufe 12

**Aufgabe 1 - V611221**
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

a) Der Ausgangspunkt war der Nordpol. Jede beliebige, geradlinige Strecke, die am Nordpol beginnt, führt Richtung Süden, und egal wie weit man in Richtung Osten oder Westen fliegt, wenn man anschließend die gleiche Streckenlänge wieder in Richtung Norden fliegt, kommt man wieder am Nordpol an. Allerdings setzt das voraus, dass man in Richtung Osten entlang eines Breitenkreises geflogen ist, und nicht geradlinig. (geradlinig heißt in diesem Zusammenhang natürlich entlang eines Großkreises).

b) Hier gilt sinngemäß das gleiche wie unter a), nämlich dass der Flug Richtung Osten entlang eines Breitenkreises erfolgt. Auf der Südhalbkugel ist die Rückkehr an den Ausgangspunkt nur möglich, wenn der Punkt, an dem von Flugrichtung Süd auf Ost gewechselt wird, derselbe ist wie der, wo die Flugrichtung von Ost auf Nord wechselt. Der Breitenkreis muss also einen Umfang von 300 km haben. Angesichts der geringen Erdkrümmung reicht eine näherungsweise Betrachtung. Der Breitenkreis muss somit $\frac{300\text{km}}{2\pi} = 47{,}75$km vom Südpol entfernt sein.

Man kehrt mit obiger Route also genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn dieser 347,75km vom Südpol entfernt ist.

Alle Punkte, die auf den die Breitenkreisen liegen, die 300 km nördlich von den Breitenkreisen mit Umfang 150 km oder 100 km oder 75 km entfernt sind, haben auch die geforderte Eigenschaft.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und ochen*

**Aufgabe 2 - V611222**
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Der Binomialkoeffizient für nichtnegative ganze Zahlen $k$ und $n$ mit $n \geq k$ ist durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

definiert. Dieser ist in diesem Falle stets eine nichtnegative ganze Zahl. Es gilt $720 = 6!$. Wir bezeichnen das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit

$$n_k = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) = \prod_{j=k}^{k+5} j$$

für eine beliebige natürliche Zahl $k$. Mit der Definition des Binomialkoeffizienten und $720 = 6!$ folgt

$$\begin{aligned} n_k &= \prod_{j=k}^{k+5} j \\ &= 6! \cdot \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right) \cdot \left(\prod_{j=k}^{k+5} j\right)}{6! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right)} = 6! \cdot \frac{(k+5)!}{6! \cdot (k-1)!} = 720 \cdot \binom{k+5}{k-1} \end{aligned}$$

und da der Binomialkoeffizient stets eine nichtnegative ganze Zahl ist, folgt die Behauptung.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 3 - V611223**
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

1) Wir diskutieren die Funktion. Es gilt

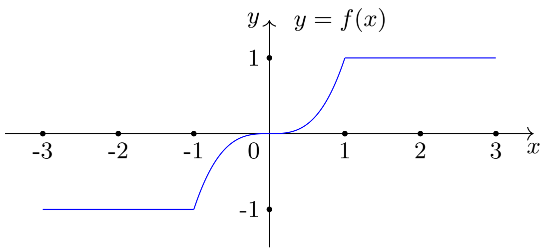
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für}\, x < -1, \\ x^3 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für}\, x > 1 \end{cases}$$

für die Funktion. Damit ist die Funktion $f$ für $x < -1$ konstant mit Funktionswert $-1$. An der Stelle $x = -1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt die Vorschrift $f(x) = x^3$ und somit liegt an $x = 0$ ein Wendepunkt vor, da $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = 6 > 0$ gilt. An der Stelle $x = 1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Ferner ist die Funktion $f$ für $x > 1$ konstant mit Funktionswert 1.

Die Funktion $f$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$-f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.




2) Wegen der Punktsymmetrie kann der betrachtete Flächeninhalt nach

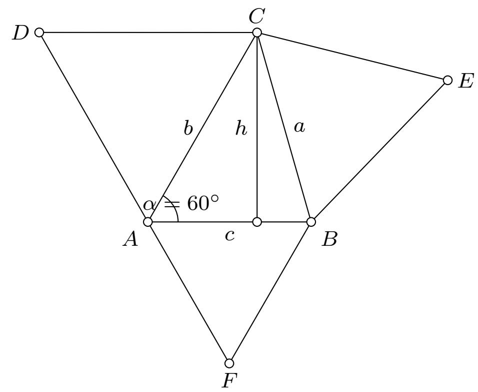
$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \left\{ \int_0^1 x^3\, \mathrm{d}x + \int_1^2 1\, \mathrm{d}x \right\}$$

berechnet werden. Daher gilt

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \left\{ \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 1 \right\} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 4 - V611224**
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60∘ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!




Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $BEC$ ist

$$A_{BEC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Die anderen Flächen der gleichseitigen Dreiecke berechnen sich in gleicher Weise. Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ lautet

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

Daher soll gelten:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}bc + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Laut dem Kosinussatz gilt außerdem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, ist die obige Gleichung tatsächlich erfüllt. q.e.d.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 5 - V611225**
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

Da die vierte Potenz der Quersumme vierstellig sein soll und $5^4 < 1000$, $10^4 > 9999$ gilt, kommt für die Quersumme nur 6, 7, 8 oder 9 infrage. Es gilt weiterhin $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ und $9^4 = 6561$. Die gesuchte Zahl ist somit 2401 mit der Quersumme 7.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

# 6 Lösungen III. Stufe

## 6.1 Lösungen Klassenstufe 7

**Aufgabe 1 - V10731**
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: "558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt."
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

a) Der Fehler besteht darin, dass die 10 % auf den Prozentwert von 1959 bezogen wurde und nicht auf den Grundwert von 1958.
b) Eine Steigerung von 10 % bedeutet, dass der Prozentwert $P$ von 1959 110 % des Grundwertes $G$ von 1958 entspricht, d.h.

$$\frac{P}{G} = \frac{110}{100} \to \frac{558000}{G} = 1{,}1 \qquad \to \qquad G = \frac{558000}{1{,}1} = 507272$$

1958 wurden 507272 Fotoapparate hergestellt.
c) Analog zur Aufgabe b) wird

$$\frac{P}{G} = \frac{161}{100} \to \frac{290000}{G} = 1{,}61 \qquad \to \qquad G = \frac{290000}{1{,}61} = 180124$$

1958 wurden 180124 Fernsehgeräte produziert.
d) Mit der fehlerhaften Berechnung würde sich ergeben: $290000 - 0.61 \cdot 290000 = 113100$. Die Abweichung wäre folglich 67024 Fernsehgeräte.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 2 - V10732**
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wieviel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

a) $(119{,}5 + 119{,}7 + 120{,}2 + 120{,}1 + 120{,}6) : 5 = 120{,}02$ Der Mittelwert ist 120,2 mm.
b-d)

| Spannstück | absoluter Fehler | prozentualer Fehler |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 mm | 0,417 % |
| 2 | 0,3 mm | 0,25 % |
| 3 | 0,2 mm | 0,167 % |
| 4 | 0,1 mm | 0,083 % |
| 5 | 0,6 mm | 0,5 % |

Alle Spannstücke entsprechen dem maximalen Fehler und sind damit brauchbar.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 3 - V10733**
Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

```
3?7 * 8?
--------
 2??? 
  ???2
--------
 ?????
```

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Die letzte Ziffer des Produktes muss 2 sein. Da die 7 nur bei Multiplikation mit der 6 eine Endziffer 2 liefert, ist der 2. Faktor folglich 86. Weiterhin ist $8 \cdot 7 = 56$, so dass das 1. Zwischenergebnis auf 6 endet.

```
3?7 * 86
--------
 2?76
  ???2
--------
 ????2
```

$307 \cdot 8 = 2456$. Die fehlenden zwei Zehner zu 2?76 sind nur möglich, wenn die 2. Ziffer des ersten Faktors eine 4 ist. Die noch fehlenden Ziffern ergeben sich durch Ausmultiplizieren von $347 \cdot 86$.

```
347 * 86
--------
 2776
  2082
--------
 29842
```

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 4 - V10734**
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

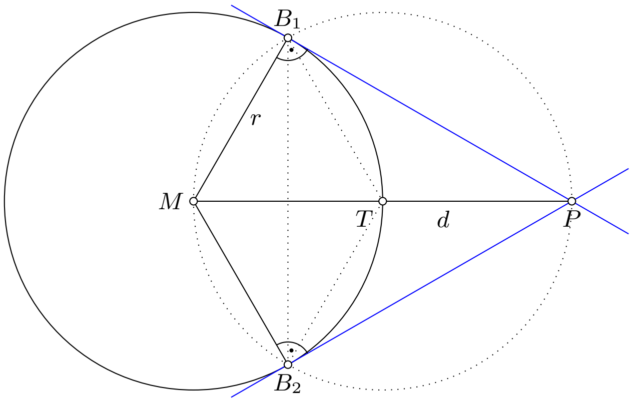
Einen solchen Zeitpunkt gibt es.
Auf dem Weg von A nach B hat die Gruppe eine Geschwindigkeit von $v_1 = \frac{9km}{4h}$, auf dem Weg von B nach A von $v_2 = \frac{9km}{2{,}5h} = \frac{18km}{5h}$.
Von A nach B ist die Gruppe von A nach einer Laufzeit $t_1$ genau $s = t_1 \cdot v_1 = \frac{9}{4}t_1$ km entfernt. Von B nach A ist der Abstand nach $t_2$ von B genau $s_2 = t_2 \cdot v_2 = \frac{18}{5}t_2$ km. Da die Gesamtstrecke 9 km lang ist, gilt $s_1 = 9km - s_2$. Da die Gruppe am zweiten Tag eine halbe Stunden losläuft, ist außerdem $t_2 = t_1 - 0{,}5$ h. Damit ergibt sich für den Punkt mit gleichem Abstand zu A und der gleichen Uhrzeit die Gleichung

$$\frac{9}{4}t_1 = 9 - (t_1 - 0{,}5)\frac{18}{5}$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich $t_1 = \frac{24}{13}$ h, d.h. der Zeitpunkt 9 Uhr 51 min. In diesem Moment sind die Pioniere an jedem Tag 4,15 km von A entfernt. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 5 - V10735**
Zeichne einen Kreis um $M$ mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt $P$ aus, dessen Abstand von $M$ ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!




O.B.d.A. liege $P$ wie in der Zeichnung gezeigt.
Die Berührungspunkte der Tangenten liegen dann auf dem Thaleskreis um den Mittelpunkt $T$ der Strecke $MP$, da die Winkel zwischen den Berührradien und den Tangenten rechte Winkel sein müssen.

Konstruktion:
1. Man zeichnet den Kreis um $M$ und die Strecke $MP$, die man in $T$ halbiert.
2. Der Kreis um $T$ mit dem Radius $TP$ ist dann der Thaleskreis über $MP$ und schneidet den Kreis um $M$ in den zwei Berührungspunkten $B_1$ und $B_2$.
3. Die Geraden durch $P$ und $B_1$ bzw. $P$ und $B_2$ sind die gesuchten Tangenten von $P$ an den Kreis.

Da die zwei Kreise um $M$ und $T$ gleiche Radien haben, sind sie spiegelsymmetrisch zur Gerade durch ihre zwei Schnittpunkte $B_1$ und $B_2$. Damit ist das Dreieck $MTB_1$ gleichseitig und der Winkel $\angle B_1TM = 60°$. $\angle B_1TM$ ist aber Außenwinkel des Dreiecks $PTB_1$, das auf Grund von $TB_1 = TP = \frac{d}{2}$ gleichschenklig ist. Der Innenwinkel $\angle B_1PM$ ist somit als Basiswinkel halb so groß, wie der Außenwinkel $\angle B_1TM$, d.h. es gilt $\angle B_1PM = 30°$.

Die zwei Dreiecke $\triangle MPB_1$ und $\triangle MPB_2$ sind nach Kongruenzsatz SSW zueinander kongruent. Zum einen sind die Seiten $MB_1 = MB = 2$ und $MP = MP$ gleich groß, zum anderen liegt der größere Winkel (der rechte Winkel) der größeren Seite gegenüber.
Damit ist auch $\angle B_2PM = 30°$ und der Schnittwinkel der Tangenten gleich 60°.

Da in dieser Herleitung die relative Lage von $P$ zu $M$ nicht benötigt wird, ist dieser Winkel für alle $P$ mit $MP = d$ gleich groß.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 6.2 Lösungen Klassenstufe 8

**Aufgabe 1 - V10831**
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Hinfahrt: In diesem Fall verringert sich die Geschwindigkeit auf $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{12}$ h.

Rückfahrt: In diesem Fall erhöht sich die Geschwindigkeit auf $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{20}$ h.

In der Summe benötigt der Radfahrer $\frac{32}{12} + \frac{32}{20} = \frac{64}{15}$ h, das sind 4 Stunden und 16 Minuten. Es tritt kein Ausgleich der Verzögerung und Beschleunigung auf.

**Aufgabe 2 - V10832**
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Jede ungerade Zahl lässt sich in der Form $2x + 1$, wobei $x$ ein natürliche Zahl ist, darstellen. Es seien $a = 2m + 1, b = 2n + 1$, $m,n \in \mathbb{N}$. Dann wird für ihr Produkt

$$ab = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

Da $2mn + m + n$ eine natürliche Zahl ist, ist das Produkt ungerade. w.z.b.w.

**Aufgabe 3 - V10833**
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Nach a) und b) sind Anton oder Conrad kein Berliner oder Dresdner.

| | Berlin | Dresden | Leipzig | Jena |
|---|---|---|---|---|
| Anton | - | - | | |
| Bruno | | | | |
| Conrad | - | - | | |
| Dietrich | | | | |

Nach c) ist Dietrich kein Berliner, so dass Bruno Berliner sein muss sowie Dietrich aus Dresden kommt.

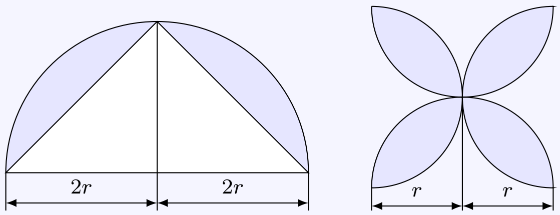
| | Berlin | Dresden | Leipzig | Jena |
|---|---|---|---|---|
| Anton | - | - | | |
| Bruno | $\oplus$ | - | - | - |
| Conrad | - | - | | |
| Dietrich | - | $\oplus$ | - | - |

Nach d) ist Conrad als der Jenenser, muss also aus Leipzig kommen. Anton ist dann aus Jena.

| | Berlin | Dresden | Leipzig | Jena |
|---|---|---|---|---|
| Anton | - | - | - | $\oplus$ |
| Bruno | $\oplus$ | - | - | - |
| Conrad | - | - | $\oplus$ | - |
| Dietrich | - | $\oplus$ | - | - |

Anton wohnt in Jena, Bruno in Berlin, Conrad in Leipzig und Dietrich in Dresden. Anton und Bruno sind die Fußballspieler.

**Aufgabe 4 - V10834**




Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

Dreht man den Kreisabschnitt um die Spitze des Dreiecks, so entsteht eine von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche, die die gleiche Form wie ein Viertel der Rosette hat. Da der Kreis der linken Figur einen Radius $2r$ hat und die Rosette aus vier Kreiszweiecken besteht, sind beide farbigen Flächen gleich groß.

linke Figur: $A = 4\pi r^2 - 4r^2 = 4r^2(\pi - 1)$

eine Viertel der Rosette: $A = r^2 - 2r^2(1 - \frac{\pi}{4}) = r^2(\pi - 1)$

*Aufgaben der Vorolympiade 1961 III. Runde gelöst von Steffen Polster*

## 6.3 Lösungen Klassenstufe 9

**Aufgabe 1 - V10931**
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre $x^2$ gerade $x$ Jahre alt. Wann ist er geboren?

Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind $1936 = 44^2$ und $1849 = 43$.
Für $x = 44$ wäre Banach $1936 - 44 = 1892$ geboren worden, für $x = 43$ ergäbe sich $1849 - 43 = 1806$. Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d.h. diese Lösung entfällt.
Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

**Aufgabe 2 - V10932**
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind $h$ die Höhe, $d_1$ der untere Durchmesser und $d_2$ der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei $d$ der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V - V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

a) Die Volumina betragen $V = 229{,}336\text{cm}^3$ und $V' = 226.980\text{cm}^3$.

b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für $d_1$ und $d_2$ in die Gleichung für $V$ ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12}\left((d+\delta)^2 + (d+\delta)(d-\delta) + (d-\delta)^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right) = \frac{\pi h}{4} d^2 + \frac{\pi h}{12}\delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12}\delta^2}{\frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall $\frac{3}{292}$, was den 1,03% von oben entspricht.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 3 - V10933**
Für alle ungeraden Zahlen $n$ ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

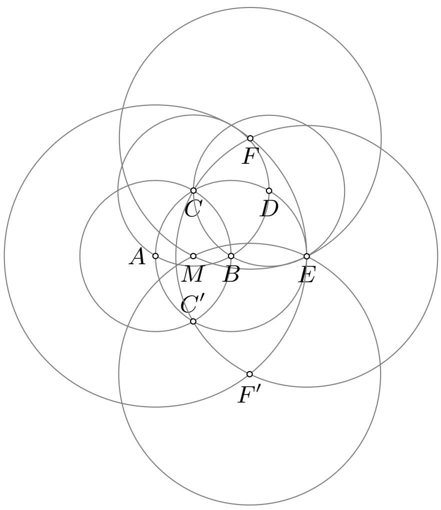
Da $n$ eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl $k$ so, dass $n = 2k + 1$ ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\,(k+1)\,.$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $k$ und $k+1$ auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist $n^2 - 1$ für alle ungeraden ganzen Zahlen $n$ durch 8 teilbar.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 4 - V10934**
Man kann den Mittelpunkt $M$ einer Strecke $AB$ auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren:
Zeichnen Sie $AB$! Schlagen Sie um $B$ mit $AB$ einen Kreis und um $A$ mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in $C$ bzw. $C'$ schneidet! Um $C$ schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um $B$ in $D$ schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um $D$!
Sie erhalten Punkt $E$ als Schnittpunkt mit dem Kreis um $B$. Jetzt schlagen Sie um $E$ mit $CE$ und um $A$ mit $AE$ Kreise, die einander in $F$ und $F'$ schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um $F$ und $F'$ Kreise mit $FE$, dann erhalten Sie den Punkt $M$!
Beweisen Sie, dass $M$ der Mittelpunkt von $AB$ ist!




Es sei $AB = r$ der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege $A$ im Koordinatenursprung und $B$ bei $(r, 0)$.
Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

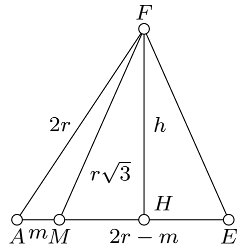
$$A(0,0) \quad ; \quad B(r,0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r,0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte $C$ und $E$: $CE = \sqrt{3}r$, sowie $AE = 2r$. Für die Punkte $F$ und $F'$ wird mit der Konstruktion für das Dreieck $AFE$

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt $M$ der Kreise um $F$ und $F'$ mit dem Radius $EF$ liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke $AE$ (1).

Für den Punkt $M(m;0)$ ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken $AHF$ und $MFH$ für die Höhe $h$:




$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r-m}{2}\right)^2 \qquad ; \qquad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r-m}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen und Auflösen nach $m$ ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1) $M$ Mittelpunkt der Strecke $AB$. w.z.b.w.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

**Aufgabe 5 - V10935**
Mit welcher Ziffer endet die Zahl $2^{100}$? Begründen Sie das!

Es ist $2^{10} \pmod{10} = 1024 \pmod{10} = 4 \pmod{10}$. Damit ist $2^{20} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$.
Dann gilt $(2^{25} \pmod{10} = \left(\left(2^5 \pmod{10}\right) \cdot \left(2^{20} \pmod{10}\right)\right) \pmod{10} = 2 \pmod{10}$.
Damit folgt $2^{50} \pmod{10} = 4 \pmod{10}$ und somit $2^{100} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$.
Das bedeutet, dass die Zahl $2^{100}$ auf der Ziffer 6 endet.

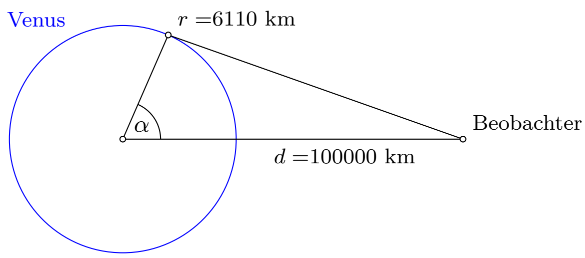
*Aufgabe gelöst von svrc*

## 6.4 Lösungen Klassenstufe 10

**Aufgabe 1 - V611031**
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

a) Betrachtet man die Himmelskörper wie gefordert näherungsweise als scheibenförmig, dann ist das Raumschiff beim Vorbeiflug 3,84 mal näher als der Mond von der Erde entfernt ist. Außerdem ist die Venus $\frac{12220}{3476}$ mal größer als der Mond, so dass sie einem Beobachter im Raumschiff $\frac{12220}{3476} \cdot 3{,}84 = 13{,}5$ mal größer erscheinen würde als der Vollmond von der Erde aus gesehen.

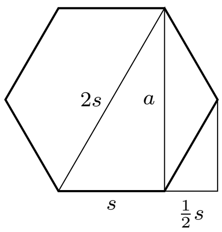
b) Hier ist man versucht, zu antworten: "den ihm Zugewandten". Es soll jedoch wohl der tatsächliche Beobachtungswinkel verwendet werden, um prozentual die sichtbare Fläche der Venus anzugeben. Leider lässt uns die Aufgabe auch im Unklaren darüber, ob mit der Entfernung von 100000 km der Abstand zum Schwerpunkt der Venus oder zur Oberfläche gemeint ist. Wir nehmen das erste an:



Es ist
$$\cos\alpha = \frac{r}{d}$$
Die gesamte Oberfläche der Venus ist
$$A_g = 4\pi r^2$$
Der sichtbare Teil ist dagegen
$$A_s = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{d}\right)$$
Somit ist der sichtbare Anteil der Oberfläche
$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{1-\frac{r}{d}}{2} = \frac{d-r}{2d}$$
Im vorliegenden Fall entspricht das etwa 46,9% der gesamten Oberfläche.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 2 - V611032**
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei $a$ der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?




a) Die genaue Formel lautet:
$$F_S = (s + \tfrac{1}{2}s)a = \tfrac{3}{2}as$$
Dabei gilt wegen des Satzes von Pythagoras:
$$a = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{3}\,s$$
$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$
Und daher gilt für die genaue Formel:
$$F_S = \frac{3}{2\sqrt{3}}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$$
b) Der prozentuale Fehler ist immer gleich, egal ob $a = 50$mm oder irgendein anderer Zahlenwert ist. Der relative Fehler ist
$$1 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{7}{12}\sqrt{3}$$
Das entspricht etwa −1%. (Die Näherung ergibt einen größeren Wert als die genaue Formel, daher negativ).

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

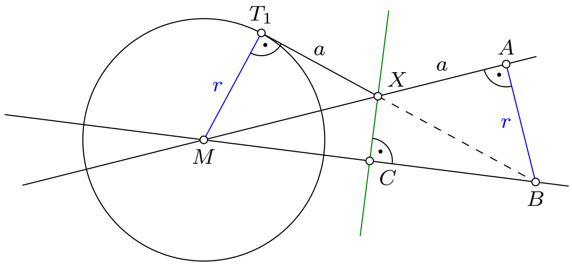
**Aufgabe 3 - V611033**
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Die Divisionsaufgabe die Fritz gestellt wird, möge $\frac{a}{b}$ lauten. Fritz rechnet $a = 57 \cdot b + 52$, macht die Probe und erhält dabei $57 \cdot b' + 52 = 17380$ wobei sich der Faktor $b'$ irrtümlich in der Zehnerstelle vom korrekten Wert $b$ unterscheidet.

Es folgt dann $b' = \frac{17380-52}{57} = 304$. Laut Aufgabenstellung ergibt sich der wirkliche Wert $b$, indem die Zehnerstelle 0 von $b'$ durch 6 ersetzt wird. Folglich ist $b = 364$, $a = 57 \cdot 364 + 52 = 20800$ und die Divisionsaufgabe, die Fritz gestellt wurde, lautet $\frac{20800}{364}$.

*Aufgabe gelöst von StrgAltEntf*

**Aufgabe 4 - V611034**
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt $A$. Verbinden Sie den Punkt $A$ mit dem Mittelpunkt $M$ des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen $AM$ gelegene Punkt $X$, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte $XT_1$ bzw. $XT_2$ gleich dem Abstand des Punktes $X$ vom Punkt $A$ sind. ($T_1$ und $T_2$ sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!




1. Man zeichne Punkt $B$ so, dass die Strecke $AB$ die Länge $r$ (Radius des Kreises) habe und senkrecht stehe auf der Strecke $AM$, siehe Skizze.
2. Vom Punkt $B$ zeichne man eine Gerade durch $M$.
3. Man konstruiere den Mittelpunkt $C$ der Strecke $MB$.
4. Man zeichne eine Senkrechte auf die Gerade $MB$ durch den Punkt $C$.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden (grün) mit der Geraden $AM$ ist der gesuchte Punkt $X$.

Begründung:
Man erkennt, dass der Streckenzug $MT_1XAB$ symmetrisch ist bezüglich der "grünen"Geraden $CX$. $a$ und $r$ stehen senkrecht aufeinander sowohl im Punkt $T_1$ als auch im Punkt $A$. $T_1$ und $X$ sind zwar anfangs noch unbekannt, aber der Punkt $C$ auf der Symmetrieachse lässt sich mit obigen Schritten einfach konstruieren.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 5 - V611035**
Unter der Zahl $n!$, gelesen "$n$ Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Tatsächlich ist ja die Vielfachheit einer Primzahl $p$ in $n!$ bekanntlich einfach

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

was speziell für $p = 5$ dann tatsächlich

$$\left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{25} \right\rfloor = 12$$

ergibt.

*Aufgabe gelöst von weird*

2. Lösung:
Wir zerlegen alle Faktoren in ihre Primfaktoren. Eine Endnull entsteht genau dann, wenn die Primzahlen 2 und 5 miteinander multipliziert werden. Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus den Faktoren, die als Endziffer eine Null oder eine Fünf haben, d.h:

$$5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 2^2 \cdot 5, 25 = 5^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 40 = 2^3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5^2.$$

Insgesamt taucht der Primfaktor 5 12 Mal auf. Da der Primfaktor 2 in jeder geraden Zahl auftaucht, hat die Zahl 50! insgesamt 12 Endnullen.

*Aufgabe gelöst von svrc*

## 6.5 Lösungen Klassenstufe 11

**Aufgabe 1 - V611131**
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

| | Zement | Wandfertigteile |
|---|---|---|
| Typ A | 5,23 t | - |
| Typ B | 4,19 t | 22,1 t |

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass $x$ Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl $x$ der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Vom Materialverbrauch ist es am günstigsten, zunächst das Baumaterial für die Wohnungen vom Typ B zu verwenden. Es ist

$$y \leq \frac{24000}{22} \approx 1090{,}9$$

und somit werden 1090 Wohnungen vom Typ B gebaut. Damit muss

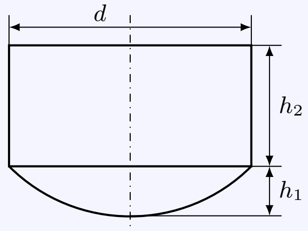
$$\begin{aligned} 5{,}23x + 4{,}19y &\leq 8000; \\ 5{,}23x &\leq 3432{,}9; \\ x &\leq \frac{3432{,}9}{5{,}23} \approx 656{,}386 \end{aligned}$$

sein, also werden 656 Wohnungen vom Typ A gebaut. Es muss also $x = 656$ und $y = 1090$ gelten.

Wollte man nur Wohnungen vom Typ A bauen, wäre $x < 1600$ und damit ist oben der günstigste Fall beschrieben, um die Gesamtanzahl zu maximieren.

*Aufgabe gelöst von svrc*

**Aufgabe 2 - V611132**




Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

a) Die Gesamtfläche des Blechbehälters ist

$$A = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

Diese Fläche soll gleich der Fläche der kreisförmigen Blechscheibe sein, deren Durchmesser $D$ sei. Daher gilt:

$$\frac{D^2\pi}{4} = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

$$D = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2 + dh_2}$$

b) Der Durchmesser der Blechscheibe betrug $D = 416{,}8$mm.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und OlgaBarati*

**Aufgabe 3 - V611133**
Gegeben sind zwei feste Punkte $A$ und $B$ mit der Entfernung $e$.
a) Wo liegen alle Punkte $F$, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von $A$ und $B$ die feste Summe $s$ haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von $e$ und $s$ solche Punkte?

a) O.B.d.A. seien $A = (-\frac{e}{2},0)$ und $B = (\frac{e}{2},0)$, so sind alle Punkte $F = (x,y)$ mit

$$s = ((x + \frac{e}{2})^2 + y^2) + ((x - \frac{e}{2})^2 + y^2) = 2x^2 + 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2y^2$$

gesucht. Diese Gleichung ist äquivalent zur Kreisgleichung

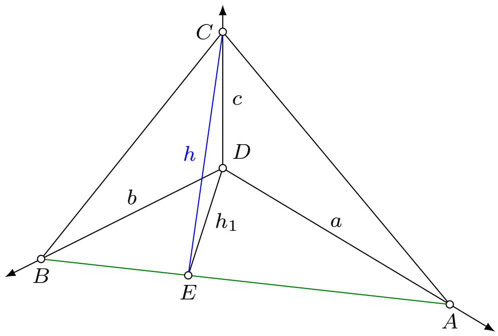
$$x^2 + y^2 = \frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Die gesuchten Punkte $F$ bilden also einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke $AB$ ist und dessen Radius $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}$ ist.

b) Da Quadrate reeller Zahlen stets größer oder gleich Null sind, gibt es nur solche Punkte $F$, wenn $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4} \geq 0$ ist. Insbesondere gibt es nicht bei jeder Wahl von $e$ und $s$ solche Punkte.

*Aufgabe gelöst von ochen*

**Aufgabe 4 - V611134**
Von einem Punkt $P$ gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte $A, B, C$ der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks $ABC$ ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!




Die gesuchte Fläche des Dreiecks $ABC$ ist

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}dh = \sqrt{\frac{1}{4}d^2c^2 + (\frac{1}{2}dh_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + A^2_{ABD}} = \sqrt{A^2_{ACD} + A^2_{BCD} + A^2_{ABD}}$$

Daher gilt

$$A^2_{ABC} = A^2_{ACD} + A^2_{BCD} + A^2_{ABD}$$

q.e.d.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 5 - V611135**
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist?
b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

a) 1. Wägung: Es werden für jede Waagschale vier Kugeln ausgewählt. Fünf Kugeln werden nicht gewogen.

1.1. Die Waage zeigt Gleichgewicht. Dann sind die 8 Kugeln neutral. Drei dieser Kugeln wiegt man (rechte Seite) gegen 3 noch nicht verwendete Kugeln (linke Seite).

1.1.1. Ist die linke Seite leichter, so ist eine von den drei Kugeln leichter. Zwei dieser Kugeln werden gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.1.2. Ist die linke Seite schwerer, so ist eine von den drei Kugeln schwerer. Analog zu 1.1.1. bestimmt man diese.

1.1.3. Keine Seite ist leichter. Dann muss die gesuchte Kugel unter den zwei bisher noch bei keiner Wägung verwendeten Kugeln sein. Eine von beiden Kugeln vergleicht man mit einer neutralen. Bei Gleichgewicht ist die noch nicht verwendete die gesuchte, andernfalls findet man die gesuchte, die entweder zu leicht oder zu schwer ist.

1.2. Die Waage zeigt kein Gleichgewicht. O.B.d.A. sei die linke Seite leichter. Auf die eine Waagschale werden dann drei von der leichten Seite und eine von der schweren Seite gegen eine der leichten Seite und 3 bisher noch nicht verwendete Kugeln gewogen.

1.2.1. Die linke Seite ist leichter. Damit ist eine von drei Kugeln leichter. Nun werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.2.2. Beide Seiten sind gleich schwer. Damit muss eine der drei Kugeln der rechten Seite der 1.Wägung (die bei der 2.Wägung nicht benutzt wurden) muss damit schwerer sein. Es werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen schwerer, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel schwerer.

1.2.3. Die linke Seite ist schwerer. Dann kann die eine Kugel der linken Seite, die von der schweren Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu schwer, oder die eine Kugel der rechten Seite, die von der leichten Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu leicht. Die vielleicht zu schwere Kugel wird mit einer der neutralen Kugeln verglichen. Entweder ist sie schwerer oder die nicht verwendete Kugel ist zu leicht.

b) In allen Fällen, außer dem Fall 1.1.3. bei dem die allerletzte nicht verwendete Kugel die gesuchte ist, kann man entscheiden, ob die gesuchte Kugel zu leicht oder zu schwer ist. In diesem einen Fall allerdings nicht.

*Aufgabe gelöst von Steffen Polster*

## 6.6 Lösungen Klassenstufe 12

**Aufgabe 1 - V611231**
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Seien x die Bestellungen pro Jahr und die jährlichen Gesamtkosten, bestehend aus den Bestellkosten und den Lagerkosten für dieses Halbfabrikat,

$$K_G = K_B + K_L = 30x + \frac{1200}{x}$$

so ergeben sich die Kosten für a)

$$K_G = K_B + K_L = 30 \cdot 4 + \frac{1200}{4} = 420.$$

und die geringsten Gesamtkosten für b)

$$K'_G = 30 - \frac{1200}{x^2}$$

$$30x^2 - 1200 = 0$$

$$x = [\sqrt{40}] = 6$$

Für x=6 eingesetzt erhält man tatsächlich der geringsten Wert von 380. Mit $x = 5$, $x = 7$ steigen die Kosten bereits wieder an.

*Aufgabe gelöst von OlgaBarati*

**Aufgabe 2 - V611232**
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Da der Zug 3000m in 180s zurücklegt, beträgt seine Geschwindigkeit $v_Z = \frac{3000\text{m}}{180\text{s}}$. Das Verhältnis der Tropfen-Fallgeschwindigkeit $v_T$ zur Zuggeschwindigkeit muss gleich dem Verhältnis der Fensterhöhe zur -breite sein. Daher ist die Fallgeschwindigkeit:

$$v_T = \frac{85}{100} \cdot \frac{3000\text{m}}{180\text{s}} = 14{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 3 - V611233**
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Wir legen den Kreis mit dessen Sehnen in ein Koordinatensystem, sodass der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die Sehnen parallel zu jeweils einer der Koordinatenachsen verlaufen. Der Radius des Kreises sei mit $r$ bezeichnet.
Der Schnittpunkt der Sehnen habe die Koordinaten $(x,y)$, so haben die Endpunkte der einen Sehne die Koordinaten $(x, \pm\sqrt{r^2 - x^2})$ und die Endpunkte der anderen Sehne die Koordinaten $(\pm\sqrt{r^2 - y^2}, y)$.
Die Summe der vier Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser

$$\frac{\pi}{4}(y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(y + \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x + \sqrt{r^2 - y^2})^2 =$$

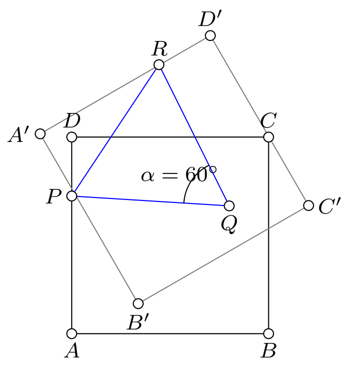
$$= \frac{\pi}{4}((y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + (y + \sqrt{r^2 - x^2})^2) + \frac{\pi}{4}((x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + (x + \sqrt{r^2 - y^2})^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(2y^2 + 2(r^2 - x^2)) + \frac{\pi}{4}(2x^2 + 2(r^2 - y^2)) = \pi r^2$$

Das ist genau der Flächeninhalt des Kreises. Somit ist die Behauptung gezeigt.

*Aufgabe gelöst von ochen*

**Aufgabe 4 - V611234**
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt $Q$, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes $P$ auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt $R$ so, dass $PQR$ ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt $R$, wenn sich $P$ längs $ABCD$ bewegt?




Da $PQR$ ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\overline{QR} = \overline{QP}$. $R$ entsteht also aus $P$ durch Drehung des Punktes $P$ um $Q$ um 60° oder −60° (bildlich dargestellt ist die Drehung um −60°). Dadurch werden auch alle Punkte des Quadrates und das Quadrat als ganzes um 60° um $Q$ gedreht. Die Kurve, die $R$ beschreibt, ist daher das um ±60° um den Punkt $Q$ gedrehte Quadrat.

*Aufgabe gelöst von MontyPythagoras*

**Aufgabe 5 - V611235**
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Vor Wägung $a$ ist jede der durchnummerierten Kugeln mit $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, ...{}^uK_{12}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$ (u)nbestimmt. Nur die Kugel ${}^bK_0^0$ ist als Kugel ohne Gewichtsabweichung ist (b)estimmt.

Wägung $a$ erfolgt mit der Aufteilung links $\{{}^bK_0^0, {}^uK_6^\pm, {}^uK_8^\pm, {}^uK_{10}^\pm, {}^uK_{12}^\pm\}$ und rechts mit $\{{}^uK_5^\pm, {}^uK_7^\pm, {}^uK_9^\pm, {}^uK_{11}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$. Die Kugeln $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$ werden im Durchgang $a$ nicht gewogen.

$$a = (+1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^+, {}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_{12}^+\}, \{{}^uK_5^-, {}^uK_7^-, {}^uK_9^-, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (-1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^-, {}^uK_8^-, {}^uK_{10}^-, {}^uK_{12}^-\}, \{{}^uK_5^+, {}^uK_7^+, {}^uK_9^+, {}^uK_{11}^+, {}^uK_{13}^+\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (\pm 0): \ \{{}^bK_0^0, {}^bK_6^0, {}^bK_8^0, {}^bK_{10}^0, {}^bK_{12}^0\}, \{{}^bK_5^0, {}^bK_7^0, {}^bK_9^0, {}^bK_{11}^0, {}^bK_{13}^0\}, \{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$$

Anmerkung: Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden jeweils nur die mit der Wägung zu untersuchenden Kugeln genannt. Die neutralen Kugeln, mit denen die Stückzahl auf zehn aufgefüllt wird, werden nicht einzeln benannt. Es sind für alle Fälle immer ausreichend bestimmte neutrale Kugeln vorhanden.

Für $a = (\pm 0)$ ist für die vier Kugeln, von denen nicht bekannt ist, welche davon im Gewicht abweicht, mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.
Wägung $b$, links $\{{}^uK_2^\pm, {}^uK_4^\pm\}$, rechts ${}^uK_3^\pm$, die Kugel${}^uK_1^\pm$ wird im Durchgang $b$ nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_2^+, {}^uK_4^+\}, {}^uK_3^-, {}^bK_1^0$

Wägung $c$, links ${}^uK_4^+$, rechts ${}^uK_2^+$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^-$

$c = (+1): \ {}^bK_4^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0$ Formel $(0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(0+1+1)} = (+4)$
$c = (-1): \ {}^bK_2^+, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^-, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (-1): \ \{{}^uK_2^-, {}^uK_4^-\}, {}^uK_3^+, {}^bK_1^0$

Wägung $c$, links ${}^uK_4^-$, rechts ${}^uK_2^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^+$

$c = (+1): \ {}^bK_4^0, {}^bK_1^0, {}^bK_2^-, {}^bK_3^0$
$c = (-1): \ {}^bK_2^0, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^-$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (\pm 0): \ \{{}^bK_2^0, {}^bK_4^0\}, {}^bK_3^0, {}^uK_1^\pm$

Wägung $c$, links ${}^uK_1^\pm$, rechts ${}^bK_0^0$

$c = (+1): \ {}^bK_1^+, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (-1): \ {}^bK_1^-, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

$c = (\pm 0):\ {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

Für $a = (1)$ ist für vier Kugeln, von denen eine möglicherweise schwerer ist und für fünf Kugeln von denen möglicherweise eine leichter ist, ist mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.

Wägung $b$, links $\{{}^uK_5^-, {}^uK_{12}^+, {}^uK_7^-\}$, rechts $\{{}^uK_{11}^-, {}^uK_6^+, {}^uK_{13}^-\}$, die Kugeln ${}^uK_8^+, {}^uK_9^-, {}^uK_{10}^+$ werden im Durchgang $b$ nicht gewogen.

$b = (+1):\ \{{}^uK_{12}^+, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}$

Wägung $c$, links ${}^uK_{13}^-$, rechts ${}^uK_{11}^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_{12}^+$

$c = (+1):\ {}^bK_{13}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(1+1+1)} = (-13)$
$c = (-1):\ {}^bK_{11}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1))(-1)^{(1+1-1)} = (-11)$
$c = (\pm 0):\ {}^bK_{12}^+$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0)(-1)^{(1+1+0)} = (12)$

$b = (-1):\ \{{}^uK_5^-, {}^uK_6^+, {}^uK_7^-\}$
Analog.

$b = (\pm 0):\ \{{}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_9^-\}$
Analog.

Die Behauptung stimmt und berechnet sich für $a = (-1)$ analog.

Die Auswahl der Kugeln für die Wägevorgänge ist damit auch so gewählt, dass mit der Formel

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

die abweichende Kugel zu bestimmen ist und zwar so, dass das Vorzeichen plus oder minus angibt, ob die Kugel leichter oder schwerer ist. Es sind somit für Wägung $a$ die Werte $|n| \leq 4$ und bei Wägung $b$ die Werte $8 \leq |n| \leq 10$ von der Wägung auszuschließen.

*Aufgabe gelöst von OlgaBarati*