Mathematik

Ergänzungsheft
Ähnlichkeit

Klasse 8

MATHEMATIK

Klasse 8

Ergänzungsheft „Ähnlichkeit“

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1969

Autoren: Dr. Günter Lorenz und Dr. Günter Pietzsch

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen
Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

1. Auflage · Ausgabe 1969
Lizenz-Nr. 203 1000/69 (E) · ES 11 G
Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin
Zeichnungen: Waltraud Schmidt (Zwei Zeichnungen von R. Schultz-Debowski)
Satz: VEB Druckerei „Magnus Poser" Jena
Textdruck: Druckerei Fortschritt Erfurt
Gesetzt aus der Modernen Extended
Redaktionsschluß: 31. März 1969
Bestell-Nr. 000805-1

Preis: —,60

Der Strahlensatz

1 Streckenverhältnisse

Auf fast allen Landkarten finden wir eine Maßstabsangabe, z. B. 1 : 25000. Dieses Zahlenverhältnis gibt an, daß sich die Länge einer jeden Strecke auf der Landkarte zur Länge der betreffenden Originalstrecke wie 1 : 25000 verhält. Anders ausgedrückt: Die Länge einer Kartenstrecke beträgt $\frac{1}{25000}$ von der Länge der zugehörigen Originalstrecke.

1 **DEFINITION: Zwei Strecken s_1 und s_2 mögen bei gleicher Längeneinheit die Maßzahlen z_1 und z_2 haben. Der Quotient $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2}$ heißt *Streckenverhältnis* von s_1 und s_2. Man schreibt auch $\frac{s_1}{s_2} = \frac{z_1}{z_2}$ bzw. $s_1 : s_2 = z_1 : z_2$.**

(1) *Ermittle (durch Messen) sämtliche Streckenverhältnisse für die Kanten einer Streichholzschachtel!*

Beim Messen einer jeden Strecke s wird das Streckenverhältnis zwischen s und der benutzten Einheitsstrecke e ermittelt. So besagt zum Beispiel das Meßergebnis 5,3 cm: Wenn die Einheitsstrecke e_1 die Länge 1 cm hat, so ist $\frac{s}{e_1} = 5{,}3$. Hat die Einheitsstrecke e_2 die Länge 1 mm $= \frac{1}{10}$ cm, so ist $\frac{s}{e_2} = 53$.
Maßzahlen von Strecken können sowohl rationale als auch irrationale Zahlen sein. Da Streckenverhältnisse Quotienten solcher Zahlen sind, trifft das demzufolge auch für sie zu.

Die beiden Rechtecke im Bild 1 haben den gleichen Flächeninhalt. Es gilt also $a \cdot b = c \cdot d$. Daraus folgt durch beiderseitige Division durch $b \cdot c$: $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$.

(2) *Für die beiden Dreiecke ABC und DEF im Bild 2 gilt $a : d = h_d : h_a$.*

a) *Folgere daraus eine Aussage über die Flächeninhalte!*

b) *Betrachte die Strecken b, h_b, e, h_e, und gib eine gültige Verhältnisgleichung an!*

Bild 1

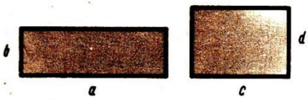
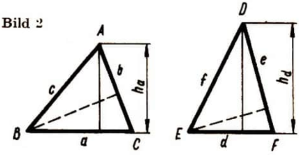


Bild 2



Aufgaben 1 bis 3

2 Der erste Teil des Strahlensatzes

Das Bild 3 zeigt ein **Strahlenbüschel** mit dem Scheitelpunkt S, dem **Büschelzentrum.** Seine Strahlen (s_1 bis s_4) werden von einer **Parallelenschar** (g_1 bis g_3) geschnitten. Dadurch entstehen **Strahlenabschnitte.** Auf s_1 zum Beispiel sind dies die Strecken $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Der zu $\overline{AC}$ **gleichliegende Strahlenabschnitt** auf s_2 ist $\overline{DF}$.

(3) *Nenne zu den Strahlenabschnitten auf s_1 jeweils die gleichliegenden Strahlenabschnitte auf s_2! Gib weitere Paare gleichliegender Strahlenabschnitte an!*

SATZ (Strahlensatz, erster Teil):

Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt für je zwei Strahlen: Die Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf dem anderen.

Bild 3

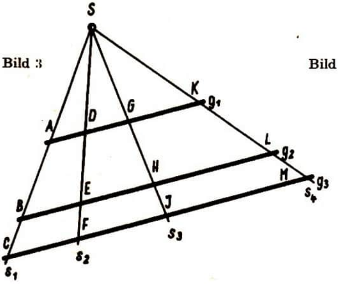


Bild 4

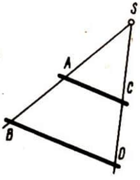
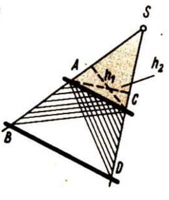


Bild 5



Es genügt, den Beweis für diesen Satz am Spezialfall mit zwei Parallelen (Bild 4) zu führen. Der Satz besagt dann, daß folgende Verhältnisgleichungen (Proportionen) gelten:

(1) $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{CD}} \quad (\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD})$

(2) $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{SD}}{\overline{SC}} \quad (\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{SD} : \overline{SC})$

(3) $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{SD}}{\overline{CD}} \quad (\overline{SB} : \overline{AB} = \overline{SD} : \overline{CD})$

Beweis für (1):

Wir verbinden A mit D und B mit C (Bild 5) und betrachten die Flächeninhalte einiger Dreiecke.

Für $\triangle\, SAC$ gilt $A_1 = \dfrac{\overline{SA} \cdot h_1}{2} = \dfrac{\overline{SC} \cdot h_2}{2}$, also $\boxed{\overline{SA} \cdot h_1 = \overline{SC} \cdot h_2}$.

Für $\triangle\, ABC$ gilt $A_2 = \dfrac{\overline{AB} \cdot h_1}{2}$,

für $\triangle\, DCA$ gilt $A_3 = \dfrac{\overline{CD} \cdot h_2}{2}$.

Da $\triangle\, ABC$ und $\triangle\, DCA$ die Seite $\overline{AC}$ und deren Höhe gemeinsam haben, sind ihre Flächeninhalte gleich: $A_2 = A_3$. Das heißt

$$\frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot h_2}{2}, \text{ also } \boxed{\overline{AB} \cdot h_1 = \overline{CD} \cdot h_2}.$$

Demzufolge ist $\dfrac{\overline{SA} \cdot h_1}{\overline{AB} \cdot h_1} = \dfrac{\overline{SC} \cdot h_2}{\overline{CD} \cdot h_2}$ oder $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$,

was zu beweisen war.

Ähnlich kann man (2) und (3) beweisen. Man kann diese Beziehungen aber auch unmittelbar aus (1) folgern; das sei hier nur für (2) durchgeführt:

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA} + \overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}$$

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SC} + \overline{CD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} = 1 + \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}}$$

Wegen (1) ist $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{SC}}$ und damit $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{SD}}{\overline{SC}}$.

4 *Aus (1) folgt $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ durch Multiplikation mit $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{SC}}$ auf beiden Seiten. Forme (2) und (3) genauso um! Formuliere den ersten Teil des Strahlensatzes so, daß er diesen Verhältnisgleichungen entspricht!*

Aufgaben 4 bis 7

3 Vervielfachen einer Strecke

Die Bezeichnung „Vervielfachen“ wird nicht nur verwandt, wenn das Doppelte, Dreifache, ..., allgemein das n-fache einer Strecke $\overline{AB}$ für natürliche $n \geqq 2$ zu konstruieren ist. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, indem man $\overline{AB}$ über A oder B hinaus verlängert und auf dieser Verlängerung mit dem Zirkel $(n - 1)$mal die Strecke $\overline{AB}$ abträgt.

Von „Vervielfachen“ spricht man auch, wenn für eine beliebige positive reelle (also rationale oder irrationale) Zahl k das k-fache einer Strecke $\overline{AB}$ konstruiert wird. Man tut dies sogar dann, wenn $k < 1$ ist, die gesuchte Strecke also kürzer als die Ausgangsstrecke $\overline{AB}$ ist.

Für rationales $k = \frac{p}{q}$ $(p \neq 0,\ q \neq 0$ natürliche Zahlen) läßt sich diese Aufgabe auf das beschriebene Verfahren zurückführen, indem man das p-fache des q-ten Teils von $\overline{AB}$ konstruiert. Dazu ist zuerst die Konstruktion des q-ten Teils von $\overline{AB}$ notwendig, also die Teilung von $\overline{AB}$ in q kongruente (d. h. gleich lange) Teilstrecken.

1 Eine Strecke $\overline{AB}$ soll in drei kongruente Teilstrecken geteilt werden (Bild 6).

Konstruktionsbeschreibung:

Wir zeichnen von einem Endpunkt von $\overline{AB}$ einen Strahl s. Auf diesem tragen wir eine beliebig gewählte Strecke **dreimal** ab. Den Endpunkt der so erhaltenen Streckenfolge verbinden wir mit dem anderen Endpunkt von $\overline{AB}$. Die Parallelen zu dieser Verbindungsstrecke teilen $\overline{AB}$ in **drei** kongruente Teile.

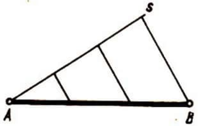


Bild 6

2 Von einer Strecke $\overline{AB}$ soll ihr k-faches konstruiert werden.

Bild 7a

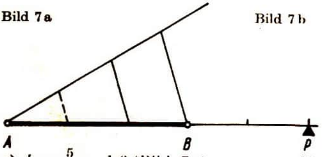
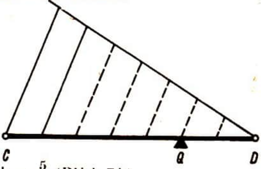


Bild 7b



a) $k = \frac{5}{3} = 1{,}6$ (Bild 7a) **b)** $k = \frac{5}{7}$ (Bild 7b)

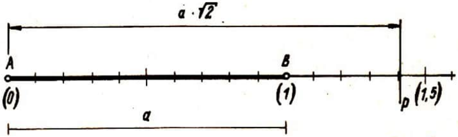
5 **a)** *Gib für das Beispiel 2a eine Konstruktionsbeschreibung!*

b) *Erläutere, inwiefern es zwei Möglichkeiten gibt, im Beispiel 2b den Punkt Q zu erhalten! Gib entsprechend auch für den Punkt P im Beispiel 2a eine zweite Konstruktionsmöglichkeit an!*

Ist k eine Irrationalzahl, also ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch, so nähern wir k durch rationale Näherungswerte an. Auf diese Weise können wir den Punkt P, der zu einem irrationalen k auf der Zahlengeraden gehört, mit beliebiger Genauigkeit erfassen.

Ist z. B. $k = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, soll also zur Strecke $\overline{AB} = a$ das $\sqrt{2}$-fache konstruiert werden, so wird a als Einheit einer Zahlengeraden gewählt (Bild 8). Dann konstruieren wir das 1,4-fache, das 1,41-fache, das 1,414-fache ... von a nach dem obigen Verfahren. Auf diese Weise kommen wir dem Punkt P mit $\overline{AP} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}$ beliebig nahe.

Bild 8



Es gibt auch Irrationalzahlen k, für die man die zugehörigen Punkte auf der Zahlengeraden direkt konstruieren kann; dann ist auch das k-fache von $\overline{AB}$ direkt zu konstruieren. $\sqrt{2}$ gehört zu diesen Irrationalzahlen, und so kann man das $\sqrt{2}$-fache jeder Strecke a konstruieren als Diagonale eines Quadrats mit a als Seite. (Vgl. auch Lerneinheit 29).

Aufgaben 8 bis 11

4 Der zweite Teil des Strahlensatzes

So, wie durch die Parallelen Strahlenabschnitte entstehen, so entstehen durch die Strahlen Parallelenabschnitte, z. B. $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Bild 4. Ein Strahlenabschnitt und ein Parallelenabschnitt heißen **zueinander gehörig**, wenn der Strahlenabschnitt vom Scheitelpunkt bis zu der betreffenden Parallelen reicht. Im Bild 4 gehören z. B. $\overline{SA}$ und $\overline{AC}$ zueinander, auch $\overline{SD}$ und $\overline{BD}$, nicht aber $\overline{CD}$ und $\overline{BD}$.

6 **a)** *Nenne zu fünf Parallelenabschnitten im Bild 3 je zwei zugehörige Strahlenabschnitte!*

b) *Gib zu vier Strahlenabschnitten im Bild 3 je drei zugehörige Parallelenabschnitte an!*

3 **SATZ (Strahlensatz, zweiter Teil):**

Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so verhalten sich je zwei Parallelenabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte ein und desselben Strahls.

Für die Figur im Bild 9 gilt $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} \left(= \dfrac{\overline{SD}}{\overline{SC}} \right)$

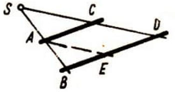


Bild 9

Beweis:

Wir ziehen durch A die Parallele zu $\overline{CD}$, die $\overline{BD}$ in E schneidet. Dann ist $\overline{AC} = \overline{ED}$, da $\overline{AC}$ und $\overline{ED}$ Gegenseiten im Parallelogramm $AEDC$ sind. Nach Satz 2 gilt $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{BS}}{\overline{AS}}$, also auch $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$, *was zu beweisen war.*

(7) *Nenne Verhältnisgleichungen, die nach Satz 3 für die Figur im Bild 3 gelten!*

Im Bild 10 werden zwei einander schneidende Geraden so von zwei Parallelen geschnitten, daß der Scheitelpunkt S des **Geradenbüschels** zwischen den Parallelen liegt. Es entstehen so die Geradenabschnitte $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$, die zum Parallelenabschnitt $\overline{AB}$ gehören, sowie die Geradenabschnitte $\overline{SC}$ und $\overline{SD}$, die zum Parallelenabschnitt $\overline{CD}$ gehören.

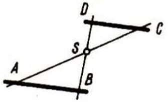


Bild 10

4 **SATZ: Werden zwei Geraden eines Geradenbüschels von zwei Parallelen (auf verschiedenen Seiten des Büschelzentrums) geschnitten, so gilt: Die Parallelenabschnitte bilden das gleiche Verhältnis wie die zugehörigen Geradenabschnitte der gleichen Geraden.**

Im Bild 10 heißt das: $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}$ $(= \overline{SB} : \overline{SD})$

Das folgt aus Satz 3, wenn man $\triangle\, SCD$ um 180° mit S als Zentrum dreht.

Aufgaben 12 bis 15

5 Innere und äußere Teilung einer Strecke

In der Lerneinheit 3 wurde das k-fache einer Strecke ($k > 0$, rational) mit Hilfe des ersten Teils des Strahlensatzes konstruiert. Im Bild 7 gilt $\overline{AP} = \frac{5}{3} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{CQ} = \frac{5}{7} \cdot \overline{CD}$. Für Q gilt also $\overline{CQ} : \overline{QD} = 5 : 2$.

Man sagt auch: Die Strecke $\overline{CD}$ wird durch Q im Verhältnis $5 : 2$ geteilt, und zwar **innen geteilt.**

Für P gilt nun entsprechend $\overline{PA} : \overline{PB} = 5 : 2$. Aber P liegt außerhalb von $\overline{AB}$, deshalb wird $\overline{AB}$ von P im Verhältnis $5 : 2$ **außen geteilt.**

(8) *Erkläre allgemein, wann ein Punkt T eine Strecke $\overline{AB}$ innen bzw. außen im Verhältnis $p : q$ (p, q natürliche Zahlen mit $q \neq 0$) teilt!*

Das Bild 7 zeigt also auch, wie innere und äußere Teilpunkte nach dem ersten Teil des Strahlensatzes konstruiert werden können. Häufig ist es aber bequemer, den zweiten Teil des Strahlensatzes zur Konstruktion zu benutzen.

[3] Eine Strecke $\overline{AB}$ soll innen und außen im Verhältnis $8 \cdot 3$ (nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes) geteilt werden (Bild 11).

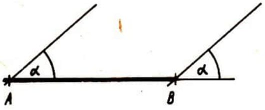


Bild 11a

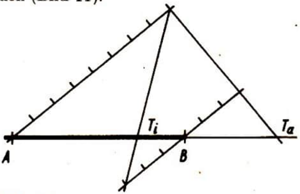


Bild 11b

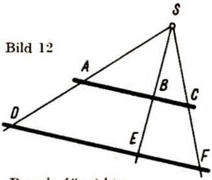
(9) *Wie groß ist für die Teilungen im Bild 11b jeweils k in* $\overline{AT_t} = k \cdot \overline{AB}$ *und* $\overline{AT_a} = k \cdot \overline{AB}$*?*
Aufgaben 16 bis 20

6 Der dritte Teil des Strahlensatzes

Während der erste Teil des Strahlensatzes eine Beziehung der Strahlenabschnitte untereinander, der zweite Teil eine Beziehung zwischen Strahlen- und Parallelenabschnitten ausspricht, ist im dritten Teil die Rede von einer Beziehung der Parallelenabschnitte untereinander. Parallelenabschnitte, die von den gleichen Strahlen begrenzt werden, heißen zueinander **gleichliegende Parallelenabschnitte.** So ist im Bild 3 z. B. der Parallelenabschnitt $\overline{FM}$ gleichliegend zum Parallelenabschnitt $\overline{EL}$ und zum Parallelenabschnitt $\overline{DK}$.

(10) *Nenne die in Bild 3 gleichliegenden Parallelenabschnitte zu* $\overline{BE}$, $\overline{AK}$, $\overline{EH}$ *und* $\overline{CI}$*!*

5 **SATZ (Strahlensatz, dritter Teil):**
Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt für je zwei Parallelen: Die Abschnitte auf der einen Parallelen verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf der anderen Parallelen.

Bild 12


Im Bild 12 gilt demnach:

(1) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ $\quad(\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF})$

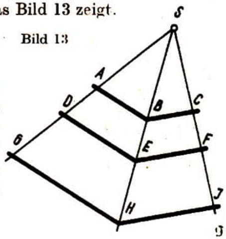
(2) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ $\quad(\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF})$

(3) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$ $\quad(\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{DF})$

Beweis für (1):
Nach Satz 3 gilt $\overline{SB} : \overline{SE} = \overline{AB} : \overline{DE}$ und auch $\overline{SB} : \overline{SE} = \overline{BC} : \overline{EF}$.
Dann ist aber $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF}$ und damit $\left(\text{nach Multiplikation mit } \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}\right)$ auch $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$, *was zu beweisen war.*

(11) *Gib auch die Beweisschritte für (2) und (3) an!*
Der Satz 5 umfaßt auch die Fälle, bei denen jeweils gleichliegende Parallelenabschnitte verschiedenen Parallelenscharen angehören, die sich auf den Strahlen des Büschels so schneiden, wie dies das Bild 13 zeigt.

(12) *Stelle nach dem Strahlensatz Verhältnisgleichungen für die Figur im Bild 13 auf!*
Verbindet man im Bild 13 die Punkte A und C, D und F sowie G und I, so liegt es nahe, das Bild als ebenes Bild einer dreiseitigen Pyramide bei Parallelprojektion aufzufassen. Dabei wird offenbar die Pyramide durch drei parallele Ebenen geschnitten, so daß die Schnittfiguren

Bild 13


ABC, DEF und GHI entstehen. Damit scheint beispielsweise auch zu gelten $\overline{AC} : \overline{DF} = \overline{AB} : \overline{DE}$. Daß aber wirklich $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ (und $\overline{DF} \parallel \overline{GI}$) gilt, ist nicht aus dem Strahlensatz zu folgern, denn dort wird ja die Parallelität jeweils vorausgesetzt. Wir benötigen dafür vielmehr einen Satz, in dem die Gleichheit gewisser Verhältnisse vorausgesetzt und die Parallelität erzeugender Geradenabschnitte sich daraus ergibt, also eine Umkehrung des Strahlensatzes.

Aufgaben 21 bis 24

Umkehrungen des Strahlensatzes

Um die verschiedenen Teile des Strahlensatzes auf ihre Umkehrbarkeit untersuchen zu können, ist es zweckmäßig, bei ihnen jeweils deutlich Voraussetzung und Behauptung zu trennen. Dann lautet z. B. der erste Teil des Strahlensatzes (Satz 2), bezogen auf Bild 4:

Wenn $AC \parallel BD$ gilt, so gilt $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$ oder

Voraussetzung: $AC \parallel BD$ *Behauptung:* $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$

Durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung erhalten wir eine neue Aussage, die zu beweisen (oder zu widerlegen) ist (Bild 14).

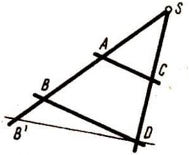


Bild 14

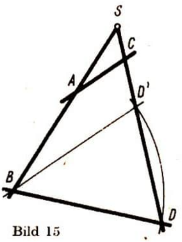


Bild 15

Voraussetzung: $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$ *Behauptung:* $AC \parallel BD$

Beweis: Wären AC und BD nicht parallel, so würde die Parallele zu AC durch D den Strahl SA in einem Punkt B' schneiden, der von B verschieden wäre. Nach Satz 2 würde dann gelten:

$$\overline{SA} : \overline{AB'} = \overline{SC} : \overline{CD}.$$

Wegen $\overline{AB'} \neq \overline{AB}$ ist das aber nicht möglich, denn es steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

6 **SATZ (Umkehrung zum Strahlensatz, erster Teil):**

Bilden gleichliegende Strahlenabschnitte eines Strahlenbüschels das gleiche Verhältnis, so werden sie von parallelen Geraden erzeugt.

13 *Als Umkehrung von Satz 3 (Strahlensatz, zweiter Teil) ist anzusehen:*

Voraussetzung: $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ *Behauptung:* $AC \parallel BD$

Weise unter Benutzung von Bild 15 nach, daß diese Umkehrung nicht gilt!

8 Nimmt man die Tatsache, daß die geschnittenen Strahlen einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben, ausdrücklich unter die Voraussetzungen auf, so erhält man eine weitere Möglichkeit, Umkehrungen zu bilden. Beim zweiten Teil des Strahlensatzes führt das auf einen wichtigen wahren Satz (Bild 16).

Voraussetzung: $\frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$; $AC \parallel BD$ *Behauptung:* CD geht durch S

Beweis: Wir nennen den Schnittpunkt der Geraden CD und AB zunächst S' und müssen dann zeigen: $S' = S$.

Nach Satz 5 gilt $\frac{\overline{S'B}}{\overline{S'A}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$

Soll das der Voraussetzung nicht widersprechen, so muß gelten:

$$\frac{\overline{S'B}}{\overline{S'A}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}}.$$

Nun ist aber $\frac{\overline{S'B}}{\overline{S'A}} = \frac{\overline{S'A} + \overline{AB}}{\overline{S'A}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{S'A}}$ und

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA} + \overline{AB}}{\overline{SA}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}.$$

Diese beiden Verhältnisse sind aber nur für $\overline{SA} = \overline{S'A}$ einander gleich, also müssen S und S' zusammenfallen.

7 **SATZ: Gegeben seien ein Strahl SA (Scheitelpunkt S), auf ihm ein weiterer Punkt B und zwei parallele Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ auf der gleichen Seite des Strahls.**
Wenn dann $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{BD} : \overline{AC}$ gilt, so geht die Gerade CD durch S.

14 *Formuliere zum Satz 5 (Strahlensatz, dritter Teil) eine entsprechende Umkehrung und beweise ihre Gültigkeit!*

Als Verallgemeinerung ergibt sich daraus:

8 **SATZ: Gegeben seien zwei verschieden lange, parallele Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und zwei parallele Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$, wobei E und F auf der gleichen Seite von CD liegen** (Bild 17).
Wenn dann $\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{CE} : \overline{DF}$ gilt, so schneiden sich AB, CD und EF in genau einem Punkt. **Aufgaben 25 bis 27**

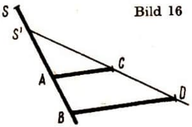
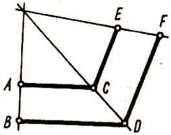


Bild 16

Bild 17


9 Anwendungen des Strahlensatzes

Die verschiedenen Teile des Strahlensatzes und deren Umkehrungen können bei der *Bestimmung der Längen unzugänglicher Strecken* angewandt werden.

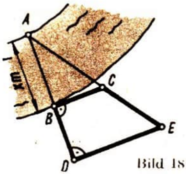


Bild 18

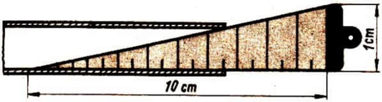


Bild 19

4 Um die Breite $\overline{AB}$ eines Flusses zu bestimmen (Bild 18), wird senkrecht zu $\overline{AB}$ eine Strecke $\overline{BC}$ abgesteckt und vermessen. Durch Fluchten wird auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus ein Punkt D festgelegt. Parallel zu $\overline{BC}$ wird eine Strecke $\overline{DE}$ derart abgesteckt, daß E auf der Geraden AC liegt. Die Messungen ergeben: $\overline{BC} = 24$ m; $\overline{DE} = 34$ m; $\overline{BD} = 20$ m.

Nach Satz 3 gilt: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$.

Multiplikation mit $\overline{AD} \cdot \overline{DE}$ ergibt $\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$.

Für die Maßzahl x der Strecke $\overline{AB}$ heißt das:

$$\begin{aligned} x \cdot 34 &= 24\,(x + 20) \\ 34\,x &= 24\,x + 480 \\ 10\,x &= 480 \\ x &= 48 \end{aligned}$$

Da tatsächlich $\dfrac{48\text{ m} + 20\text{ m}}{48\text{ m}} = \dfrac{34\text{ m}}{24\text{ m}}$ gilt, erhalten wir: Die Breite des Flusses beträgt 48 m.

(15) **a)** *Beschreibe möglichst eingehend das praktische Vorgehen mit Fluchtstäben und einfachem Feldwinkelmesser bei dieser Vermessung!*

b) *Berechne die Flußbreite für die folgenden Meßergebnisse:*

$\overline{BC} = 24{,}3$ m; $\overline{DE} = 30{,}5$ m; $\overline{BD} = 16{,}5$ m!

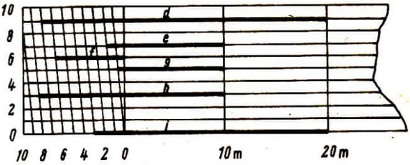
Auch für verschiedene *Meß- und Zeichengeräte* wird der Strahlensatz angewandt.

5 Der Meßkeil wird zur Messung kleiner Abstände verwendet. Für den lichten (inneren) Durchmesser d des Röhrchens in Bild 19 gilt nach Satz 3: $\dfrac{d}{1\text{ cm}} = \dfrac{6{,}7\text{ cm}}{10\text{ cm}}$. Der Durchmesser beträgt also 6,7 mm.

6 Das Bild 20 zeigt ein Rechteck von 5 cm Länge mit zehn Längs- und fünf Querstreifen jeweils gleicher Breite. Mit Hilfe der Diagonale im ersten Quer-

Bild 20

Bild 21



streifen kann man Streckenlängen auf Millimeter genau bestimmen. So ist z. B. $a = 3{,}7$ cm. Einen sogenannten **Transversalmaßstab** erhält man, wenn man den ersten Querstreifen wie in Bild 21 teilt. Damit können Längen sogar bis auf $\frac{1}{100}$ der Einheit genau bestimmt werden. Der Transversalmaßstab im Bild 21 trägt die Bezifferungen 10 m, 20 m usw., weil er für einen Geländeplan im Maßstab 1 : 500 (2 cm $\triangleq$ 10 m) bestimmt ist. So entspricht d in Wirklichkeit eine Strecke von 27,9 m Länge.

(16) **a)** *Wie lang sind die Strecken b und c in Bild 20?*

b) *Wie lang sind die Originalstrecken zu e, f, g, h und i in Bild 21?*

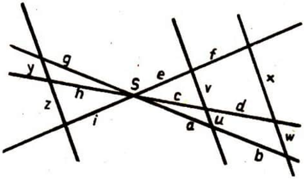
c) *Greife die Strecken in Bild 22 mit dem Stechzirkel ab und bestimme ihre Länge mittels des Liniennetzes in Bild 20!*

d) *Wie lang sind die Originalstrecken, wenn $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ Strecken auf einer Karte im Maßstab 1 : 500 sind?*

Bild 22

Aufgaben 28 bis 31

ZUSAMMENFASSUNG



Ein Geradenbüschel werde von einer Parallelenschar geschnitten.

Dann gilt z. B.:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f} \quad \text{und} \quad \frac{a}{g} = \frac{c}{h} = \frac{e}{i}$$

nach dem ersten Teil des Strahlensatzes;

$$\frac{a}{a+b} = \frac{u}{w} \quad \text{und} \quad \frac{a}{g} = \frac{u}{y}$$

nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes;

$$\frac{u}{v} = \frac{w}{x} = \frac{y}{z}$$

nach dem dritten Teil des Strahlensatzes.

10 Wiederholung: Bewegungen und Kongruenz

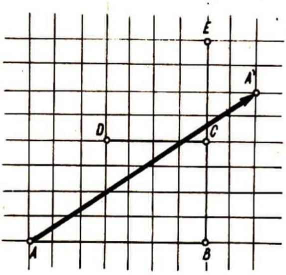


Bild 23

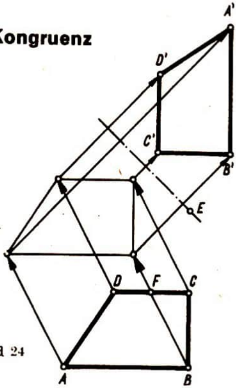


Bild 24

(17) *Die Punkte A, B, C, D, E im Bild 23 liegen so, daß* $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \frac{7}{4}\,\overline{BC}$ *und* $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, BCD = 90°$ *ist. Der Punkt E liegt auf dem Strahl BC mit* $\overline{BC} = \overline{CE}$. *Übertrage dieses Bild für die folgenden drei Aufträge dreifach in dein Heft!*

a) *In der Zeichenebene wird eine Verschiebung ausgeführt, bei der der Punkt A den Punkt A' als Bildpunkt hat. Dabei ist* $\overline{A'C} = \overline{A'E}$, *und A' hat von der Geraden BC die Entfernung* $\frac{1}{2}\,\overline{BC}$. *Konstruiere auch die Bildpunkte zu B, C, D und E! Wo liegt der Punkt, der für D Originalpunkt ist (für den also D Bildpunkt ist)?*

b) *In der Ebene wird eine Drehung (im positiven Drehsinn) ausgeführt mit dem Punkt E als Drehzentrum und einem Drehwinkel von 70°. Konstruiere die Bildpunkte von A, B, C, D und E! Bestimme die Punkte, für die A, B, C, D und E Bildpunkte sind!*

c) *In der Ebene wird diejenige Spiegelung ausgeführt, bei der A und D in sich selbst übergehen. Konstruiere die Bildpunkte zu B, C und E! Welches sind die Punkte, die für B, C und E Originalpunkte sind? Gib noch eine andere Spiegelung an, bei der die Strecke* $\overline{AD}$ *als Ganzes in sich übergeht, aber nicht jeder ihrer Punkte mit seinem Bildpunkt zusammenfällt!*

Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen einer Ebene sind umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich. Das heißt: Jeder Punkt der Ebene hat genau einen Bildpunkt und ist seinerseits auch Bildpunkt genau eines Punktes. Original- und Bildpunkt werden auch als einander entsprechende Punkte bezeichnet. Werden endlich viele Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis ebenfalls eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich, eine **ebene Bewegung.**

7 *Gegeben* ist ein Viereck $ABCD$ und ein Punkt E. Der Punkt F sei der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ (Bild 24).

Gesucht ist das Bild $A'B'C'D'$ des Vierecks $ABCD$ bei folgender Bewegung: Verschiebung in Richtung BF um $\frac{3}{2}\,\overline{BF}$; danach Spiegelung an der Parallelen zu BD durch E.

18 **a)** *Übertrage das Bild 24 in dein Heft und konstruiere auch den Bildpunkt zu E!*

b) *Wo liegt der Punkt, für den E Bildpunkt ist?*

Die ebenen Bewegungen haben folgende Eigenschaften:

(1) Das Bild jeder Geraden ist wieder eine Gerade.

(2) Liegt ein Punkt A auf einer Geraden a, so liegt auch der Bildpunkt A' auf der Bildgeraden a'.

(3) Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.

(4) Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind ebenfalls parallel.

(5) Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild eine Strecke $\overline{A'B'}$ mit gleicher Länge.

(6) Jeder Winkel (h, k) hat als Bild einen Winkel (h', k') gleicher Größe.

19 *Überlege, welche Eigenschaften darüber hinaus*

a) *die Verschiebung,*

b) *die Drehung und*

c) *die Spiegelung haben!*

11 Die Bewegungen dienen dazu, die Kongruenz von Punktmengen zu erklären, weshalb sie auch **Kongruenzabbildungen** genannt werden.

9 **DEFINITION: Punktmengen M_1 und M_2 heißen einander *kongruent* (deckungsgleich: $M_1 \cong M_2$) genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, die M_1 auf M_2 abbildet.**

Damit ist die Kongruenz auch für krummlinig begrenzte Figuren erklärt. So sind z. B. alle Kreise mit gleichem Radius einander kongruent.

Im Beispiel 7 sind die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander kongruent, und zwar gegensinnig kongruent, weil die Punkte A', B', C', D' gegenüber ihren Originalpunkten im entgegengesetzten Drehsinn angeordnet sind.

Speziell für Dreiecke haben wir vier Kongruenzsätze (*sws, wsw, sss, ssw*) kennengelernt.

Mit Hilfe dieser Kongruenzsätze kann man von zwei vorgelegten Dreiecken entscheiden, ob sie einander kongruent sind oder nicht, ohne auf die Bewegungen zurückzugreifen.

20 *Von den Fünfecken ABCDE und FGHIK in Bild 25 sei bekannt:*

$\overline{AB} = \overline{IK} = 3{,}4\text{ cm}$; $\overline{BC} = \overline{KF} = 2{,}2\text{ cm}$; $\overline{DE} = \overline{EA} = \overline{GH} = \overline{HI} = 2{,}5\text{ cm}$; $\sphericalangle BCD = \sphericalangle KFG = 116{,}6°$; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEA = 90°$; $\sphericalangle BCA = \sphericalangle KFI$; $\sphericalangle CDA = \sphericalangle FGI$

a) *Von welchem Eckpunkt des Fünfecks FGHIK aus ist eine Zerlegung in Dreiecke möglich, die zu den Dreiecken im Fünfeck ABCDE kongruent sind? Zeichne die Diagonalen ein, und beweise die Kongruenz!*

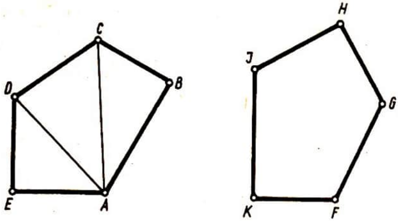


Bild 25

b) *Was läßt sich über die Fünfecke sagen? Stelle die einander entsprechenden Punkte, Seiten und Winkel zusammen!*

Von Kongruenz kann man auch bei räumlichen Punktmengen und speziell bei Körpern sprechen. So sind z. B. sämtliche Kugeln mit gleichem Radius einander kongruent, alle Würfel mit gleicher Kantenlänge usw. Bei allen serienmäßig hergestellten Industrieerzeugnissen handelt es sich – von geringfügigen Abweichungen durch Fertigungsungenauigkeiten abgesehen – um kongruente Gebilde. Die räumliche Kongruenz kann auf gewisse umkehrbar eindeutige Abbildungen des Raumes auf sich, die räumlichen Bewegungen, gegründet werden.

Aufgaben 32 bis 35

12 Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen

Das Bild 26 zeigt den Großbuchstaben B einer Frakturschrift.
Um das maßstäbliche Vergrößern oder Verkleinern beim Nachschreiben zu erleichtern, kann man den Buchstaben mit einem Quadratnetz überziehen.
Das Bild 27 ist dazu eine maßstäbliche Verkleinerung. Der **Abbildungsmaßstab,** also das Verhältnis der Streckenlängen im Bild zu den entsprechenden Streckenlängen im Original, ist hier 1 : 2. Man kann auch das Bild 26 als eine maßstäbliche Vergrößerung von Bild 27 auffassen. Der Abbildungsmaßstab ist dann 1 : 0,5 oder 2 : 1. Auch bei Körpern gibt es maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen. Bekannt sind die Modelleisenbahnen in den Abbildungsmaßstäben 1 : 87 (Nenngröße H0), 1 : 120 (Nenngröße TT) und 1 : 160 (Nenngröße N). Solche maßstäblichen Modelle dienen aber nicht nur der Freizeitbeschäftigung. So werden z. B. Tragflächenprofile und Rumpfformen bei der Entwicklung eines neuen Flugzeugs an Modellen im Windkanal untersucht, und die Verkehrshoch-

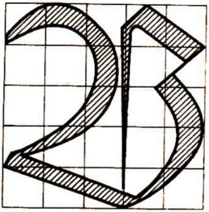


Bild 26

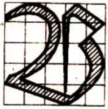


Bild 27

schule „Friedrich List“ in Dresden hat eine große Modellbahnanlage, die nicht nur der Ausbildung, sondern auch wissenschaftlichen Untersuchungen dient.

(21) *Im Bild 28 wurde ein Fünfeck (a) verändert. Dazu wurde im Bild 28b das Quadratnetz vergrößert und in den Bildern 28c und d jeweils das Quadratnetz in ein Rechtecknetz mit dem Seitenverhältnis 1:2 verformt. Von welchen der Figuren b, c und d würdest du sagen, sie seien zu a „ähnlich“?*

So wie die Kongruenz auf den Begriff der Bewegung zurückgeführt wird, so kann man auch für einen mathematisch exakten Begriff von Ähnlichkeit gewisse umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene (bzw. des Raumes) auf sich als Grundlage nehmen.

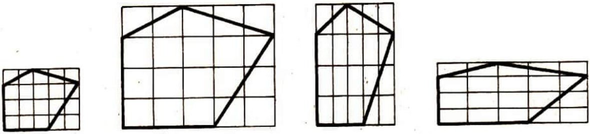


Bild 28a Bild 28b Bild 28c Bild 28d

Aufgaben 36 bis 38

13 Die zentrische Streckung

Bei den Dreiecken ABC und DEF im Bild 29 ist $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$. Dem Augenschein nach ist $\triangle DEF$ eine maßstäbliche Vergrößerung von $\triangle ABC$, wobei D das Bild von A, E das Bild von B und F das Bild von C ist.

(22) **a)** *Übertrage das Bild 29 in dein Heft und ziehe die Geraden AD, BE und CF! Wieviel Schnittpunkte entstehen?*

b) *Der Schnittpunkt der in* **a)** *gezeichneten Geraden sei Z. Ermittle u, v und w in* $\overline{ZD} = u \cdot \overline{ZA}$, $\overline{ZE} = v \cdot \overline{ZB}$ *und* $\overline{ZF} = w \cdot \overline{ZC}$*!*

c) *Konstruiere zum Punkt Q einen Punkt S, für den* $\overline{ZS} = u \cdot \overline{ZQ}$ *gilt! Konstruiere zu R einen Punkt T mit* $\overline{ZR} = u \cdot \overline{ZT}$*!*

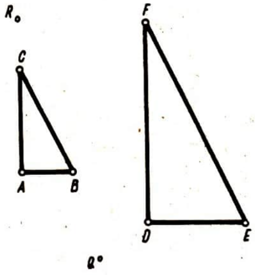
10 **DEFINITION: Eine *zentrische Streckung* der Ebene ist eine Abbildung, bei der jedem Punkt P der Ebene sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet wird:**

1. Ein Punkt wird als *Streckungszentrum* Z festgelegt.

2. Eine positive reelle Zahl wird als *Streckungsfaktor* k festgelegt.

3. P' liegt auf dem Strahl ZP mit $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ für $P \neq Z$.

4. Z hat sich selbst als Bildpunkt: $Z' = Z$.



P und *P'* werden **einander entsprechende Punkte** genannt. Die zentrische Streckung mit *Z* als Zentrum und dem Streckungsfaktor *k* wird häufig kurz mit $(Z; k)$ bezeichnet. Aus der Definition ergibt sich: Bei jeder zentrischen Streckung $(Z; k)$, wobei *Z* ein beliebiger Punkt der Ebene ist und $k > 0$ eine beliebige reelle Zahl ist, existiert zu jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt. Ferner ist jeder Punkt Bildpunkt genau eines Punktes, seines Originalpunktes.

11 **SATZ: Die zentrische Streckung (*Z*: *k*) ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich.**

Wenn $k = 1$ ist, gilt $P = P'$ für alle Punkte *P*. Für $k \neq 1$ ist *Z* der einzige Punkt, der sich selbst entspricht. Da alle Strahlen mit *Z* als Anfangspunkt nur den Punkt *Z* gemeinsam haben, können einander entsprechende Punkte *P* und *P'* nie von einem solchen Strahl getrennt werden.

8 *Gegeben* sind vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D* (Bild 30).

Gesucht sind *A'*, *B'*, *C'* bei der zentrischen Streckung $\left(D; \frac{3}{4}\right)$.

Konstruktion: Wir zeichnen den Strahl *DA* und bestimmen auf ihm den Punkt *A'* durch Konstruktion des $\frac{3}{4}$fachen der Strecke $\overline{DA}$ (vgl. Lerneinheit 3).

Nach dem Strahlensatz erhalten wir *B'* als Schnittpunkt der Parallelen zu *AB* durch *A'* mit dem Strahl *DB*. Entsprechend erhalten wir *C'* als Schnittpunkt der Parallelen zu *AC* durch *A'* mit dem Strahl *DC*.

23 *Eine zentrische Streckung sei festgelegt durch A als Zentrum, A' als Originalpunkt und D als Bildpunkt (Bild 30). Gib den Streckungsfaktor an und erläutere, wie man das Bild des Punktes B bei dieser Streckung erhält!*

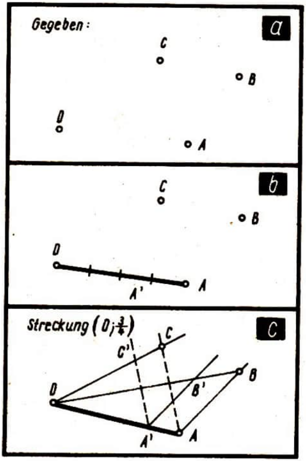


Bild 30

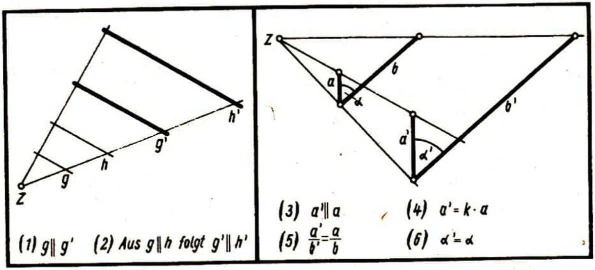
Aufgaben 39 bis 42

14 Eigenschaften der zentrischen Streckung

Für jede zentrische Streckung $(Z; k)$ gilt:

(1) Das Bild jeder Geraden ist wieder eine Gerade; dabei sind Original- und Bildgerade parallel zueinander.
(2) Parallele Originalgeraden haben parallele Bilder.
(3) Das Bild jeder Strecke ist eine zu ihr parallele Strecke.
(4) Das Bild jeder Strecke ist k-mal so lang wie ihr Original.
(5) Je zwei Strecken stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie ihre Bilder.
(6) Jeder Winkel ist genauso groß wie sein Bildwinkel, d. h., einander entsprechende Winkel sind kongruent (Bild 31).

Bild 31



Alle diese Eigenschaften lassen sich mit Hilfe des Strahlensatzes und seiner Umkehrungen beweisen; zum Teil können sie auch aufeinander zurückgeführt werden.

Als Beispiel diene der Beweis für die Eigenschaft (1):

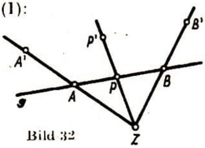


Bild 32

Voraussetzung (Bild 32):

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA} \\ \\ \overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}\end{array}\right\} \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = k$$

Behauptung:

Die Gerade $A'B'$ ist das Bild der Geraden AB und parallel zu AB.

Beweis:

P sei ein beliebiger Punkt von g, P' sein Bild. Dann gilt

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}, \text{ also } \frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}.$$

Nach Satz 8 ist deshalb $P'A'$ parallel zu AB und $P'B'$ parallel zu AB. Da es durch P zu AB nur eine Parallele gibt, liegt P' auf der Geraden $A'B'$, und diese ist parallel zu AB. Da P ein beliebiger Punkt der Geraden AB war, ist gezeigt, daß alle Punkte der Geraden AB als Bilder Punkte der Geraden $A'B'$ haben. Andererseits kann man jeden Punkt der Geraden $A'B'$ als Bildpunkt eines Punktes der Geraden AB erhalten, wie die Betrachtung in umgekehrter Richtung zeigt.

(24) *Durchdenke den Fall, daß die Gerade AB durch Z geht, und vervollständige somit die Beweisführung für die Eigenschaft (1)!*

15 Wir untersuchen das Bild des Fünfecks $ABCDE$ (Bild 33) bei der Streckung $(Z; k)$.

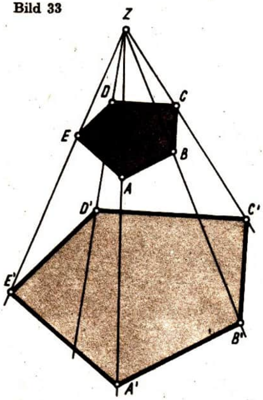
Da für Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, auch die Bildpunkte nicht auf einer Geraden liegen, bilden die Bildpunkte A', B', C', D', E' der Punkte A, B, C, D, E selbst ebenfalls ein Fünfeck. Gemäß Eigenschaft (4) gilt für die einander entsprechenden Fünfeckseiten:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = k.$$

Gemäß der Eigenschaft (6) sind die einander entsprechenden Innenwinkel der Fünfecke kongruent, also gleich groß:

$$\sphericalangle E'A'B' = \sphericalangle EAB;\ \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC;\ \sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle BCD;$$
$$\sphericalangle C'D'E' = \sphericalangle CDE;\ \sphericalangle D'E'A' = \sphericalangle DEA$$

Bild 33



Diese Überlegungen sind unabhängig von der Lage des Streckzentrums Z, der Größe des Streckungsfaktors k und auch von den Besonderheiten des abgebildeten Vielecks, insbesondere auch der Anzahl seiner Ecken. Wir können aus diesen Überlegungen auf eine weitere Eigenschaft der zentrischen Streckung schließen:

(7) Bei jeder zentrischen Streckung $(Z; k)$ ist das Bild jedes n-Ecks $(n \geqq 3)$ wieder ein n-Eck. Einander entsprechende Winkel sind gleich groß; die Verhältnisse einander entsprechender Seiten sind gleich. Insbesondere ist das Bild eines regelmäßigen n-Ecks wieder ein regelmäßiges n-Eck mit k-facher Seitenlänge.

Man kann auch das Bild krummlinig begrenzter Figuren bei einer zentrischen Streckung betrachten.

(8) Bei jeder zentrischen Streckung $(Z; k)$ ist das Bild jedes Kreises wieder ein Kreis. Dabei ist das Bild des Mittelpunktes des Originalkreises der Mittelpunkt des Bildkreises, und für die Radien r des Originalkreises und r' des Bildkreises gilt (Bild 34):

$$r' = k \cdot r.$$

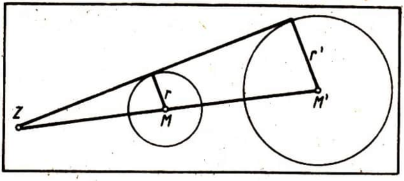


Bild 34

Aufgaben 43 bis 46

(25) **a)** *Welche Bilder haben eine Tangente und eine Sekante des Kreises K?*
b) *Was gilt für die gemeinsamen äußeren Tangenten von K und K'?*

16 Zusammensetzen zweier zentrischer Streckungen

Im Bild 35 ist P durch die zentrische Streckung $(Z; 3)$ in P' überführt worden; danach ist P' durch die zentrische Streckung $\left(Z; \frac{3}{4}\right)$ in P'' überführt worden.

Bild 35

Offenbar gibt es eine einzige Streckung $(Z; k)$, bei der P'' das Bild von P ist. Denn:

a) Wenn Z, P und P' und außerdem Z, P' und P'' auf dem gleichen Strahl mit Z als Anfangspunkt liegen, dann gilt dies auch für Z, P und P''.

b) Wegen $\overline{ZP'} = 3 \cdot \overline{ZP}$ und $\overline{ZP''} = \frac{3}{4} \cdot \overline{ZP'}$ gilt

$$\overline{ZP''} = \frac{3}{4} \cdot 3\, \overline{ZP} = \frac{9}{4}\, \overline{ZP}.$$

Der Streckungsfaktor k der durch Zusammensetzen entstandenen Streckung ist also $k = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$.

Im Bild 36 ist $\overline{P'Q'}$ das Bild von $\overline{PQ}$ bei der Streckung $(Z_1; k_1)$ und $\overline{P''Q''}$ das Bild von $\overline{P'Q'}$ bei der Streckung $(Z_2; k_2)$; dabei ist $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.
Beide Streckungen lassen sich zu einer Streckung $(Z_3; k_1 \cdot k_2)$ zusammensetzen.

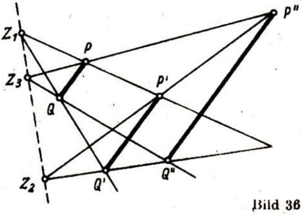


Bild 36

Begründung:

Wegen der Eigenschaft (3) von zentrischen Streckungen sind $\overline{PQ}$ und $\overline{P''Q''}$ parallel.
Nach Eigenschaft (5) gilt:

$$\overline{P'Q'} = k_1 \cdot \overline{PQ} \text{ und } \overline{P''Q''} = k_2 \cdot \overline{P'Q'} \text{ und daher } \overline{P''Q''} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overline{PQ}.$$

Wenn $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ ist, müssen sich PP'' und QQ'' in einem Punkt Z_3 schneiden. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$\frac{\overline{Z_3Q''}}{\overline{Z_3Q}} = \frac{\overline{Z_3P''}}{\overline{Z_3P}} = \frac{\overline{Q''P''}}{\overline{QP}} = k_1 \cdot k_2$$

Das bedeutet: Die Streckung $(Z_3; k_1 \cdot k_2)$ führt $\overline{PQ}$ in $\overline{P''Q''}$ über.

Daß Z_3 tatsächlich stets auf der Geraden Z_1Z_2 liegt, kann man sich so überlegen: Die Gerade Z_1Z_2 geht sowohl bei der Streckung $(Z_1; k_1)$ als auch bei der Streckung $(Z_2; k_2)$ in sich über. Also muß sie auch bei der Streckung $(Z_3; k_1 \cdot k_2)$ in sich übergehen, d. h. Z_3 muß auf Z_1Z_2 liegen.

(26) *Zeichne ein Quadrat ABCD mit* $\overline{AB} = 1{,}5$ *cm! Konstruiere sein Bild A'B'C'D' bei der Streckung (A; 3)! Der Diagonalenschnittpunkt von A'B'C'D' sei S. Wende auf A'B'C'D' die Streckung (S; 2) an, die A''B''C''D'' liefert! Errechne den Streckfaktor und konstruiere das Zentrum derjenigen Streckung, die ABCD in A''B''C''D'' überführt!* **Aufgaben 47 bis 50**

17 Ähnlichkeitsabbildungen

Im Bild 37 ist das Dreieck ABC mittels $\left(Z; \frac{8}{5}\right)$ gestreckt und dann das Bild $A'B'C'$ um 228° um A' gedreht worden.

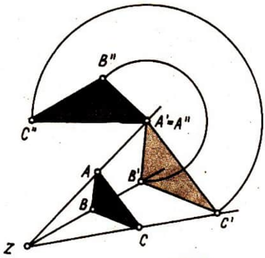


Bild 37

12 **DEFINITION: Jede Zusammensetzung einer zentrischen Streckung mit einer Bewegung heißt *Ähnlichkeitsabbildung.***

So, wie *mit Hilfe der Bewegungen* die *Kongruenz* von Punktmengen erklärt wurde, so definieren wir jetzt *mit Hilfe der Ähnlichkeitsabbildungen* die *Ähnlichkeit* von Punktmengen.

13 **DEFINITION: Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen genau dann *einander ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der sie sich entsprechen. Man schreibt dann: $M_1 \sim M_2$.**

Den Streckungsfaktor nennt man auch **Ähnlichkeitsfaktor.** Ist die vermittelnde Ähnlichkeitsabbildung nur eine Streckung, so bezeichnet man das Streckzentrum auch als **Ähnlichkeitspunkt.**

10 Im Bild 37 gilt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Ähnlichkeitsfaktor ist $\frac{8}{5}$ (oder $\frac{5}{8}$, falls man $\triangle A'B'C'$ als Original ansieht).
Ähnlichkeitspunkt ist Z.
Ferner gilt $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ ebenfalls mit $\frac{8}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{5}{8}\right)$ als Ähnlichkeitsfaktor. Da es keine zentrische Streckung gibt, die $\triangle ABC$ in $\triangle A''B''C''$ überführt, haben diese beiden Dreiecke keinen Ähnlichkeitspunkt.

Nach Definition 13 ist die Ähnlichkeit für beliebige Punktmengen und damit z. B. auch für krummlinig begrenzte Figuren erklärt. Es ist nicht üblich, von ähnlichen Punkten, ähnlichen Geraden, ähnlichen Strahlen und ähnlichen Strecken zu sprechen; denn zwei Punkte, zwei Geraden, ... können stets durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander übergeführt werden. Zwei Punkte, zwei Geraden, ... sind also stets ähnlich.

18 Jede Bewegung für sich allein ist bereits eine Ähnlichkeitsabbildung; denn man braucht sie sich ja nur mit einer zentrischen Streckung zusammengesetzt zu denken, bei der $k = 1$ ist. So ist z. B. im Bild 37 auch $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$.

14 **Die Kongruenz ist der Sonderfall der Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsfaktor 1.**

27 **a)** *Gib an, welche der auf Seite 15 aufgeführten sechs Eigenschaften der ebenen Bewegungen nicht für alle Ähnlichkeitsabbildungen gelten!*

b) *Gib an, welche der auf der Seite 19 aufgeführten sechs Eigenschaften nicht nur für zentrische Streckungen, sondern für alle Ähnlichkeitsabbildungen gelten!*

11 Es soll untersucht werden, ob $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ von Bild 38a einander ähnlich sind, ob es also eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ überführt (oder umgekehrt).

Wir überlegen: Einander entsprechende Winkel müssen gleich groß sein. Daher kann eine solche Abbildung nur existieren, wenn es zu jedem Winkel in $\triangle ABC$ einen Winkel gleicher Größe in $\triangle DEF$ gibt. Durch Messen können wir feststellen:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DEF;$$
$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle FDE;$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFD.$$

Wegen $\sphericalangle CAB \neq \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle CAB \neq \sphericalangle EFD$, $\sphericalangle BCA \neq \sphericalangle EFD$ kann nur E das Bild von A, D das Bild von C, F das Bild von B sein. Da die jeweils gleichen Winkel in beiden Dreiecken im gleichen Umlaufsinn angeordnet sind, gilt:

$\triangle DEF$ kann durch eine Drehung, z. B. um E, in $\triangle D'E'F'$ übergeführt werden, so daß

$\overline{D'E'} \parallel \overline{AC}$, $\overline{E'F'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{F'D'} \parallel \overline{BC}$

ist (Bild 38b).

Dann kann $\triangle D'E'F'$ durch eine Schiebung in $\triangle D''E''F''$ übergeführt werden (Bild 38c). Wegen

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{D''A}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{F''A}}$ (Strahlensatz) kann nun $\triangle AF''D''$ durch die zentrische Streckung $\left(A; \dfrac{\overline{CA}}{\overline{D''A}}\right)$ in $\triangle ABC$ übergeführt werden. Also kann $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit anschließender Verschiebung und Drehung in $\triangle DEF$ übergeführt werden, d. h., es gilt $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

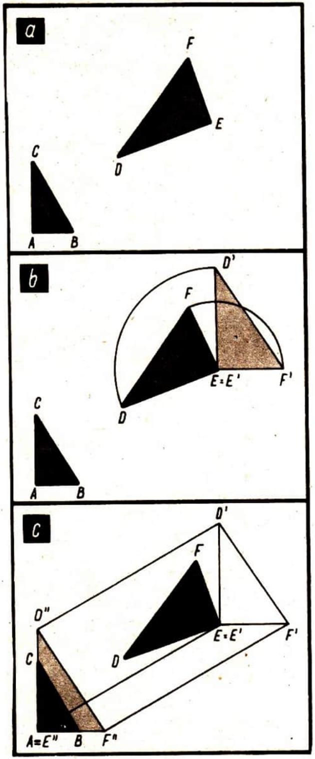


Bild 38

28 *Zeichne die innere und äußere Umrandung eines Zeichendreiecks in dein Heft und weise nach, daß die beiden so entstandenen Dreiecke ähnlich sind!*

Aufgaben 51 bis 54

19 Gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit

Enthält die Ähnlichkeitsabbildung eine Geradenspiegelung (oder eine andere ungerade Anzahl davon), so sind Original- und Bildfigur **ungleichsinnig ähnlich** (Bild 39). In allen anderen Fällen spricht man von **gleichsinniger Ähnlichkeit.**

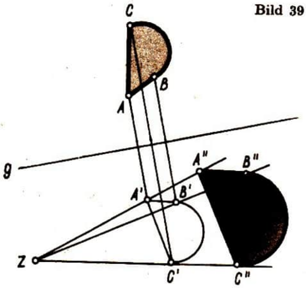


Bild 39

Im Bild 40 ist die Figur F_2 das Bild von F_1 bei der Streckung $\left(Z; \frac{1}{2}\right)$. F_3 ist das Bild von F_2 bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel 180° (einer Punktspiegelung). Zusammenfassend sagt man:

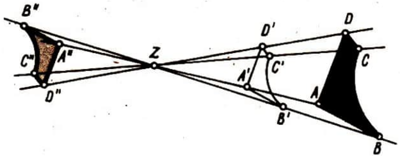


Bild 40

F_3 ist das Bild von F_1 bei der Streckung $\left(Z; -\frac{1}{2}\right)$. Z wird auch hier als **Ähnlichkeitspunkt** bezeichnet.

(29) **a)** *Erkläre, was man unter einer Streckung (Z; k) mit negativem Streckfaktor k verstehst!*

b) *Gib eine Konstruktionsvorschrift für eine Streckung (Z; k) mit negativem k an, ohne dabei die Drehung zu benutzen!*

Beachte: Eine Streckung $(Z; k)$ mit $k < 0$ verändert den Umlaufsinn nicht!

Aufgaben 55 bis 57

20 Ähnlichkeit von Vielecken

Im Beispiel 11 war es recht langwierig, eine Ähnlichkeitsabbildung zu zwei vorgegebenen Figuren zu finden. Es gibt Möglichkeiten, um wenigstens für Vielecke bequemer entscheiden zu können, ob Ähnlichkeit vorliegt oder nicht. Beachten wir, daß Bewegungen als Kongruenzabbildungen nichts an der Größe von Winkeln und der Länge von Strecken ändern, so können wir aus Eigenschaft (7) der zentrischen Streckung einen Satz über ähnliche Vielecke folgern:

SATZ: Für zwei einander ähnliche n-Ecke ($n \geqq 3$) gilt stets:

a) Einander entsprechende Winkel sind gleich groß (kongruent).

b) Einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis $\left(\text{dem Ähnlichkeitsfaktor } k \text{ bzw. } \frac{1}{k}\right)$.

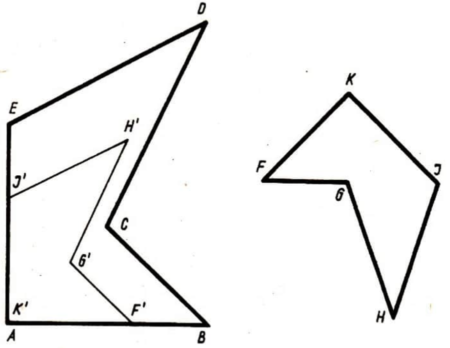
Soll untersucht werden, ob gegebene Vielecke zueinander ähnlich sind, so können wir die folgende Umkehrung des Satzes 15 anwenden.

16 **SATZ: Zwei n-Ecke ($n \geqq 3$) sind einander ähnlich, wenn sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen ihren Eckpunkten herstellen läßt, wobei zu benachbarten Eckpunkten im einen n-Eck auch benachbarte Eckpunkte im anderen gehören. Für diese Zuordnung muß ferner gelten:**

a) Einander zugeordnete Innenwinkel sind gleich groß.

b) Einander zugeordnete Seiten bilden das gleiche Verhältnis.

Bild 41



Den Beweis dieses Satzes führen wir am Beispiel der beiden Fünfecke $ABCDE$ und $FGHIK$ im Bild 41.

(Bei anderer Eckenzahl oder anderer Lage würde er ganz entsprechend verlaufen.)

Voraussetzung:

a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle KFG$; $\sphericalangle BCD = \sphericalangle FGH$; $\sphericalangle CDE = \sphericalangle GHI$; $\sphericalangle DEA = \sphericalangle HIK$; $\sphericalangle EAB = \sphericalangle IKF$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{KF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{IK}} = k$

Behauptung: Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der $ABCDE$ und $KFGHI$ einander entsprechen.

Beweis: Wegen der Gleichheit der Winkel gibt es eine Bewegung (Drehung und Verschiebung), bei der $AF'G'H'I'$ das Bild von $KFGHI$ ist, F' auf AB und I' auf AE liegt, und ferner gilt:

$$\overline{F'G'} \parallel \overline{BC};\ \overline{G'H'} \parallel \overline{CD};\ \overline{H'I'} \parallel \overline{DE}.$$

Da bei dieser Bewegung die Streckenlängen erhalten bleiben, gilt:

$$\overline{AB} : \overline{AF'} = \overline{BC} : \overline{F'G'} \text{ und } \overline{EA} : \overline{I'A} = \overline{ED} : \overline{I'H'}.$$

Nach Satz 7 müssen dann die Geraden DH' und CG' durch A gehen.

Nach dem Strahlensatz gilt also

$$\overline{EA} : \overline{I'A} = \overline{DA} : \overline{H'A} = \overline{CA} : \overline{G'A} = \overline{BA} : \overline{F'A} = k$$

Das heißt aber: $ABCDE$ ist Bild von $AF'G'H'I'$ bei der zentrischen Streckung $(A; k)$. Es gibt also eine Ähnlichkeitsabbildung, wie sie in der Behauptung gefordert wurde.

30 *Überprüfe die Vierecke ABCD und EFGH in Bild 42 nach Satz 15 bzw. 16 auf Ähnlichkeit!*

12 Es soll untersucht werden, ob die Parallelogramme $ABCD$ und $AEFD$ im Bild 43 einander ähnlich sind. Dabei sei $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm, E Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und F Mittelpunkt von $\overline{DC}$.

Die Winkelgleichheit ist erfüllt:

$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle CDA; \quad \sphericalangle AEF = \sphericalangle ABC; \quad \sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB;$$
$$\sphericalangle EFD = \sphericalangle BCD.$$

Bleibt zu untersuchen, ob

(1) $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AD}$ oder (2) $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{AE}$

gilt. Die Proportion (1) scheidet aus, denn hier steht $2 = 1$. Die Proportion (2) ergibt durch Einsetzen $4 : 3 = 3 : 2$, also ebenfalls eine falsche Aussage. $ABCD$ und $AEFD$ sind also nicht einander ähnlich.

Es soll nun ermittelt werden, wie lang $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ hätten gewählt werden müssen, damit das Halbieren zu einem zum Ausgangsparallelogramm ähnlichen Parallelogramm geführt hätte:

$$a : b = b : \frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2}a^2 = b^2; \quad a^2 = 2b^2; \quad a = b \cdot \sqrt{2}$$

Eine Seite hätte also das $\sqrt{2}$-fache der anderen sein müssen, bzw. das Verhältnis beider Seiten müßte $\sqrt{2}$ sein.

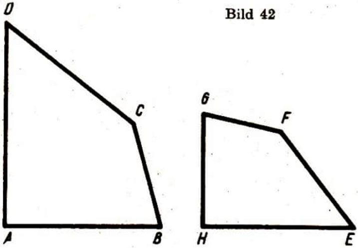


Bild 42

Bild 43

Als Spezialfall ergibt sich aus Satz 16

17 **SATZ: Zwei regelmäßige n-Ecke ($n \geqq 3$) sind stets einander ähnlich.**

Aufgaben 58 bis 60

21 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Die Kongruenz zweier Dreiecke können wir mit Hilfe der vier Kongruenzsätze feststellen. Diese Sätze sagen aus, daß die Übereinstimmung in drei geeigneten Stücken für die Kongruenz bereits ausreicht. Ganz entsprechende Sätze gibt es auch für die Ähnlichkeit von Dreiecken. Um sie vermuten zu können, überlegen wir:

Wenn Kongruenz dasselbe ist wie Ähnlichkeit mit $k = 1$, muß jeder Kongruenzsatz Spezialfall eines Ähnlichkeitssatzes für $k = 1$ sein. Dazu drücken wir in den vier Kongruenzsätzen die Beziehung $a = a'$ für zwei Dreiecksseiten durch $a' : a = 1$ aus und ersetzen dann diese 1 durch k:

Kongruenzsatz (*wsw*)	$a' : a = 1;\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma'$
entspr. Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k;\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma'$
Kongruenzsatz (*sws*)	$a' : a = 1;\ b' : b = 1;\ \gamma = \gamma'$
entspr. Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k;\ b' : b = k;\ \gamma = \gamma'$
Kongruenzsatz (*sss*)	$a' : a = 1;\ b' : b = 1;\ c' : c = 1$
entspr. Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k;\ b' : b = k;\ c' : c = k$
Kongruenzsatz (*ssw*)	$a' : a = 1;\ b' : b = 1;\ (a \geqq b);\ \alpha = \alpha'$
entspr. Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k;\ b' : b = k;\ (a \geqq b);\ \alpha = \alpha'$

So können wir vier Ähnlichkeitssätze für Dreiecke formulieren.

18 **HAUPTÄHNLICHKEITSSATZ: Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie ähnlich.**

Das Seitenverhältnis $a' : a = k$ kann unberücksichtigt bleiben, denn irgendein Verhältnis k haben zwei Strecken stets. Den Beweis dieses Satzes haben wir durch die Überlegungen zum Beispiel 11 in Lerneinheit 18 bereits erbracht. Denn dort benutzten wir von den beiden Dreiecken nur, daß zu jedem Innenwinkel des einen Dreiecks ein gleich großer im anderen Dreieck existiert. Wegen des Winkelsummensatzes für Dreiecke ist das aber bereits erfüllt, wenn es für zwei Winkel gilt.

31 *Zeichne ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle\ BCA = 90°$ und der Höhe $\overline{CD}$. Untersuche mit Hilfe des Satzes 18 die entstandenen drei Dreiecke auf Ähnlichkeit!*

22

19 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden, sind die Dreiecke ähnlich.**

Voraussetzung: (Bild 44)

$$\sphericalangle\ BAC = \sphericalangle\ DEF;\ \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = k$$

Behauptung:
Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der $\triangle\ DEF$ Bild von $\triangle\ ABC$ ist.

Beweis:
Bei der zentrischen Streckung $(A; k)$ gilt für $\triangle\ AB'C'$ als Bild von $\triangle\ ABC$:

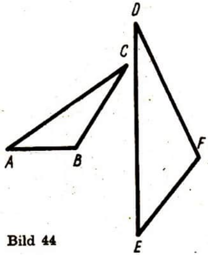


Bild 44

$$\sphericalangle C'AB' = \sphericalangle CAB$$
$$\overline{C'A} : \overline{CA} = \overline{B'A} : \overline{BA} = k \text{ (nach Definition 10)}$$

Aus der Voraussetzung folgt dann:

$$\sphericalangle C'AB' = \sphericalangle DEF; \ \overline{C'A} = \overline{DE}; \ \overline{B'A} = \overline{EF}.$$

Damit sind $\triangle\, C'AB'$ und $\triangle\, DEF$ kongruent nach dem Kongruenzsatz (*sws*); also gibt es eine Bewegung, bei der $\triangle\, DEF$ Bild von $C'AB'$ ist. Diese Bewegung, zusammengesetzt mit der Streckung $(A; k)$, ist eine Ähnlichkeitsabbildung mit der behaupteten Eigenschaft, *was zu beweisen war.*

20 **SATZ: Wenn es bei zwei Dreiecken zu jeder Seite des einen Dreiecks je eine Seite im anderen derart gibt, daß die drei Seitenverhältnisse gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.**

21 **SATZ: Wenn bei zwei Dreiecken zwei Seiten des einen Dreiecks mit je einer Seite des anderen gleiche Verhältnisse bilden und die beiden Winkel übereinstimmen, die der jeweils größeren der beiden Seiten gegenüberliegen, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

Die Sätze 20 und 21 lassen sich genauso mit Hilfe der entsprechenden Kongruenzsätze beweisen, wie dies für Satz 19 geschehen ist.

32 *Welche der folgenden Sätze sind wahr?*

Gleichschenklige Dreiecke sind stets ähnlich,

a) *wenn sie in einem Winkel übereinstimmen;*
b) *wenn sie im Winkel an der Spitze übereinstimmen;*
c) *wenn sie in einem Basiswinkel übereinstimmen;*
d) *wenn die Schenkel gleiche Verhältnisse bilden;*
e) *wenn das Verhältnis der Basen gleich dem Verhältnis aus je einem Schenkel beider Dreiecke ist.*

Mit Hilfe der Sätze 18 bis 21 können wir die Ähnlichkeit von Dreiecken nachweisen, ohne eine Ähnlichkeitsabbildung angeben oder alle Winkel und Seiten berücksichtigen zu müssen.

Aufgaben 61 bis 63

23 Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und von Körpern

Zum Nachweis der Ähnlichkeit bei krummlinig begrenzten Figuren ist im allgemeinen eine Ähnlichkeitsabbildung anzugeben. Für Kreise ist das allerdings nicht nötig, denn zwei Kreise sind stets einander ähnlich.

Die Definition 10 für die zentrische Streckung läßt sich von der Ebene auf den Raum übertragen, und räumliche Streckungen können mit räumlichen Bewegungen zu räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen zusammengesetzt werden. Zwei räumliche Punktmengen werden dann als ähnlich bezeichnet, wenn es eine (räumliche) Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der diese Punktmengen einander entsprechen. Als räumliche Punktmengen können Körper auftreten, und auch hier gilt:

Entsprechende Winkel sind gleich groß,
entsprechende Strecken stehen im gleichen Verhältnis.

Außerdem sind entsprechende Flächen einander ähnlich.

Es gibt auch hier Sätze über Polyeder, die den Sätzen 15 und 16 für Vielecke entsprechen. So sind speziell alle Würfel einander ähnlich, aber z. B. auch alle regelmäßigen Pyramiden, bei denen das Verhältnis der Höhen gleich dem Ähnlichkeitsfaktor der Grundflächen ist. Auch alle Kugeln sind einander ähnlich.

(33) **a)** *Überprüfe, ob die Milchflaschen von $\frac{1}{4}\,l$, $\frac{1}{2}\,l$ und $1\,l$ Fassungsvermögen einander ähnlich sind!*

b) *Wähle aus den Bechergläsern des Chemie-Raumes drei unterschiedlich große, einander ähnliche aus!*

Aufgaben 64 bis 67

24 Umfang und Inhalt

Für zwei Kreise mit den Radien r_1 und $r_2 = k \cdot r_1$ gilt:

$$u_1 = 2\pi r_1;\; u_2 = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot k \cdot r_1 = k \cdot 2\pi \cdot r_1 = k \cdot u_1$$
$$A_1 = \pi r_1^2;\; A_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot k \cdot r_1 \cdot k \cdot r_1 = k^2 \cdot \pi \cdot r_1^2 = k^2 \cdot A_1$$

Diese Zusammenhänge gelten nicht nur für zwei Kreise, sondern für zwei beliebige ähnliche Punktmengen, die einen Umfang und einen Flächeninhalt haben.

22 **SATZ: Wenn zwei ähnliche ebene Figuren F und F' den Ähnlichkeitsfaktor k besitzen, so gilt für ihre Umfänge $u' = k \cdot u$ und für ihre Flächeninhalte $A' = k^2 \cdot A$.**

Auf einen Beweis dieses Satzes werden wir hier verzichten.

(34) *Führe den Nachweis für zwei ähnliche Dreiecke so, wie er oben für den Kreis geführt wurde!*

Es gibt auch einen Satz über ähnliche Körper, der dem Satz 22 entspricht und der hier ebenfalls nur ohne Beweis angeführt wird:

23 **SATZ: Wenn zwei ähnliche Körper den Ähnlichkeitsfaktor k besitzen, so gilt für die Inhalte ihrer Oberflächen $A'_O = k^2 \cdot A_O$ und für ihre Volumina $V' = k^3 \cdot V$.**

(35) **a)** *Überprüfe Satz 23 an zwei Würfeln mit den Kantenlängen 2 cm und 6 cm (5 cm)!*

b) *Welche Kantenlängen müßte eine Streichholzschachtel haben, die das achtfache Fassungsvermögen der üblichen hat und zu ihr ähnlich ist? In welchem Verhältnis stehen die Materialaufwendungen, wenn beide Schachteln aus dem gleichen Material gefertigt werden?*

Aufgaben 68 bis 70

25 Konstruktionen mit Hilfe der Ähnlichkeit

Die Sätze über die zentrische Streckung und über ähnliche Figuren können bei verschiedenen Konstruktionsaufgaben angewandt werden.

13 Dem Dreieck ABC (Bild 45) ist ein Quadrat $PQRS$ einzubeschreiben, von dem eine Seite auf der Seite $\overline{AB}$, die anderen Eckpunkte auf $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ liegen.

Konstruktion:

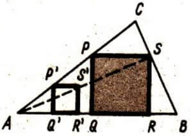
Nach Wahl eines beliebigen Punktes P' auf $\overline{AC}$ wird von P' auf $\overline{AB}$ das Lot $\overline{P'Q'}$ gefällt und daraus das Quadrat $P'Q'R'S'$ konstruiert. Dieses Quadrat erfüllt im allgemeinen noch nicht die Bedingung, daß sein Eckpunkt S' auf $\overline{BC}$ liegt. Das gesuchte Quadrat $PQRS$ erhält man durch die zentrische Streckung $\left(A; \frac{\overline{AS}}{\overline{AS'}}\right)$; dabei ergibt sich S als Schnittpunkt von AS' mit $\overline{BC}$. $\overline{PS}$ und $\overline{RS}$ werden als Parallelen zu $\overline{P'S'}$ und $\overline{R'S'}$ durch S festgelegt, $\overline{PQ}$ als Lot von P auf $\overline{AB}$.

36 **a)** *Erläutere, warum das so erhaltene Viereck $PQRS$ wirklich ein Quadrat ist!*
b) *Löse die gleiche Konstruktionsaufgabe mit einer Streckung von C aus!*

26 Häufig ist es zweckmäßig, für die Lösung von Konstruktionsaufgaben die in den Sätzen 15 und 16 bzw. in den Ähnlichkeitssätzen auftretenden Verhältnisgleichungen umzuformen. Wir wissen, daß beispielsweise die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Bild 46) bedeutet:

$$a' : a = b' : b = c' : c \, (= k),$$

Bild 45



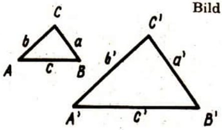


Bild 46

falls $(A; A')$, $(B; B')$ und $(C; C')$ die Paare einander entsprechender Punkte sind. Das kann auch umgeformt werden zu

$$a' : b' = a : b; \quad a' : c' = a : c; \quad b' : c' = b : c.$$

24 **SATZ: Für zwei einander ähnliche Dreiecke gilt stets: In dem einen Dreieck verhalten sich die Seiten zueinander wie die ihnen entsprechenden Seiten im anderen Dreieck.**

Dieser Satz gilt nicht nur für Dreiecke, sondern für beliebige n-Ecke ($n \geqq 3$). Für Dreiecke gilt auch seine Umkehrung, denn das ist ja nichts anderes als eine Umformulierung des Satzes 20.

37 *Formuliere die Ähnlichkeitssätze 19 bis 21 entsprechend in Worten!*

14 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren mit $a : c = 4 : 3$, $\beta = 70°$ und $b = 2{,}5$ cm.

Konstruktion (Bild 47): Man konstruiert zunächst ein beliebiges Dreieck $A'B'C'$ mit $a' : c' = 4 : 3$ und $\beta = 70°$, beispielsweise, indem man $a' = 4$ cm und $c' = 3$ cm wählt. Das gesuchte Dreieck ABC ist zu $\triangle\, A'B'C'$ ähnlich.

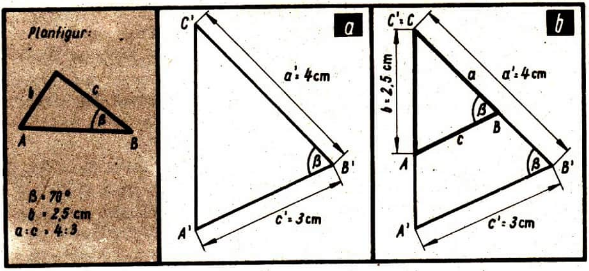


Bild 47

Um $b = 2{,}5$ cm zu erhalten, trägt man b auf $A'C'$ von C' $(= C)$ aus ab und zieht durch den erhaltenen Punkt A die Parallele zu c', die $B'C'$ in B schneidet.

38 **a)** *Gib das Zentrum der damit durchgeführten zentrischen Streckung an, und ermittle durch Messen den Streckungsfaktor!*

b) *Erläutere, wie sich die gleiche Aufgabe mit einer zentrischen Streckung von A' aus lösen läßt!*

Aufgaben 71 bis 80

27 Anwendungen der Ähnlichkeit

Die in den Lerneinheiten 8 und 9 behandelten Anwendungen des Strahlensatzes lassen sich auch als Anwendungen der Ähnlichkeit ebener Figuren auffassen. Es gibt aber noch weitere Meß- und Zeichengeräte, bei denen die Ähnlichkeit ausgenutzt wird.

15 Ein Gerät zur mechanischen Vergrößerung und Verkleinerung ebener Figuren ist der **Pantograph.** Eine vereinfachte Ausführung wird auch als Storchschnabel bezeichnet. Er wurde bereits im Jahre 1600 erfunden und beruht auf folgendem Prinzip (Bild 48):
Ein Parallelogramm $PAFB$ ist mit einem größeren $PA'F'B'$ durch einen Querstab $\overline{AC}$ fest verbunden. Alle Eckpunkte sind als Gelenkpunkte ausgebildet, doch sind die beiden Parallelogramme in jeder Lage einander

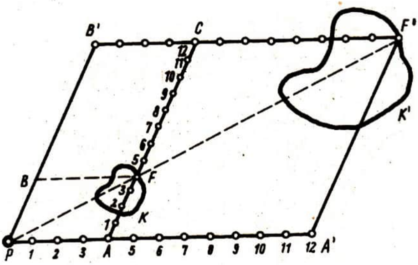


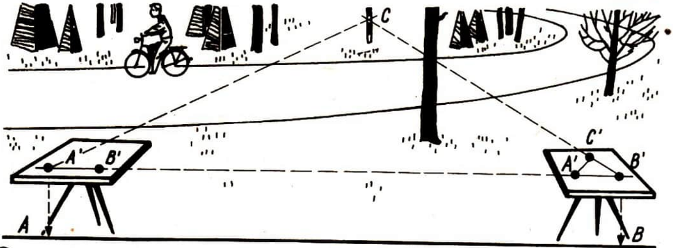
Bild 48

ähnlich. Hält man den „Pol“ P fest und beschreibt mit dem „Fahrstift“ F eine beliebige Kurve K, so beschreibt der „Zeichenstift“ F' eine dazu ähnliche Kurve K'. Das Ähnlichkeitsverhältnis, also den Maßstab, kann man durch Verschieben des Stabes $\overline{AC}$ und entsprechende Einstellung des Fahrstiftes verändern. Vertauscht man Fahrstift und Zeichenstift, so dient der Pantograph zum Verkleinern.

39 *Bestimme das Vergrößerungsverhältnis im Bild 48!*

16 Zur kartographischen Aufnahme eines Geländestücks dient das **Meßtischverfahren** (Bild 49). Eine quadratische Platte, die mit Zeichenpapier überspannt ist, ruht als **Meßtisch** auf einem Dreifuß und ist um eine lotrechte Achse schwenkbar. Eine Wasserwaage dient zum waagerechten Einstellen. In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte A und B bekannt. Die **Standlinie** $\overline{AB}$ wird im gewünschten Maßstab (meist 1 : 25000) als Strecke $\overline{A'B'}$ auf das Meßtischblatt übertragen. Um das Bild C' eines dritten Geländepunktes C festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in A so auf, daß A' lotrecht über A liegt und $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ verläuft. Der Strahl $A'C'$ wird durch den Peilstrahl nach C bestimmt. Danach stellt man den Meßtisch in B so auf, daß B' lotrecht über B liegt, und verfährt entsprechend. C' ergibt sich als Schnittpunkt der Strahlen $A'C'$ und $B'C'$. Wendet man dieses Verfahren für verschiedene Geländepunkte an, erhält man auf dem Meßtischblatt ein Bild des Geländes im gewünschten Maßstab. Mit dem Meßtisch können so auch unzugängliche Strecken aufgenommen werden.

Bild 49



40 *Benutze eine Sperrholzplatte als behelfsmäßigen Meßtisch, auf dem die Richtungen durch Peilen über eingesteckte Stecknadeln festgelegt werden! Nimm auf diese Weise ein Bild des Schulhofes auf!*

Aufgaben 81 bis 86

ZUSAMMENFASSUNG: Eine zentrische Streckung $(Z; k)$ wird festgelegt durch ein Streckungszentrum Z und einen reellen Streckungsfaktor $k \neq 0$. Ebene Ähnlichkeitsabbildungen sind Zusammensetzungen zentrischer Streckungen in der Ebene mit ebenen Bewegungen. Sie sind umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich, bei denen Geraden als Bilder Geraden haben. Jede Bildstrecke ist $|k|$-mal so lang wie ihr Original; Original- und Bildwinkel sind gleich groß (kongruent). Punktmengen, die sich bei einer Ähnlichkeitsabbildung entsprechen, heißen einander ähnlich.

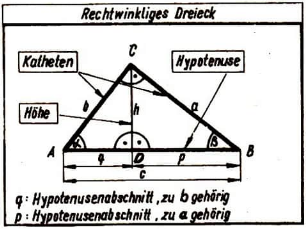
Die Satzgruppe des Pythagoras

28 Ähnlichkeit im rechtwinkligen Dreieck

Bild 50

(41) **a)** *Begründe, warum von den drei Seiten eines jeden rechtwinkligen Dreiecks eine Seite am längsten ist!*

b) *Erkläre, was man unter der **Hypotenuse** und den **Katheten** eines rechtwinkligen Dreiecks versteht (Bild 50)!*



(42) *Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck wie im Bild 50, und fälle die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ von D auf a und b! Gib Hypotenusen, Katheten usw. in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken an!*

Wir vereinbaren: Wenn von einem rechtwinkligen Dreieck ABC gesprochen wird, soll — falls nicht ausdrücklich anderes hinzugefügt wird – C der Scheitelpunkt des rechten Winkels, also $\overline{AB} = c$ die Hypotenuse sein, die Katheten sind dann a und b.

Im Auftrag 31 erkannten wir mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes für Dreiecke: Zieht man im rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe $\overline{CD}$, so entstehen zwei Dreiecke, die untereinander und zum Dreieck ABC ähnlich sind. Aus der folgenden Tabelle geht hervor, welche Seiten dabei einander entsprechen.

	$\triangle ABC$	$\triangle ADC$	$\triangle DBC$
Hypotenuse	c	b	a
Kathete gegenüber $\alpha = \sphericalangle BCD$	a	h	p
Kathete gegenüber $\beta = \sphericalangle DCA$	b	q	h

Da a, b und h jeweils in zwei Dreiecken vorkommen, gibt es drei Proportionen, in denen diese Strecken doppelt auftreten:

(1) $h : q = p : h$ (2) $a : p = c : a$ (3) $b : q = c : b$

Diese Proportionen führen uns zu wichtigen Sätzen. **Aufgaben 87 und 88**

29 Der Höhensatz

Aus $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ folgt $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ [Gleichung (1) aus Lerneinheit 28].
Durch Multiplikation mit $p \cdot h$ ergibt sich

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

25 **HÖHENSATZ: Bei jedem rechtwinkligen Dreieck führt das Quadrieren der Höhenmaßzahl zum gleichen Ergebnis wie das Multiplizieren der Maßzahlen bei den Hypotenusenabschnitten.**

Etwas leichter läßt sich eine andere Formulierung merken:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten (Bild 51).

43 *Stelle für die drei Höhen im Bild 52 die Gleichungen nach dem Höhensatz auf!*

17 Zu dem Rechteck $BCDF$ (Bild 52) soll ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden. Dazu genügt es offenbar, ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ als Hypotenusenabschnitten zu konstruieren. Sein Höhenquadrat ist dann die Lösung.

Bild 51

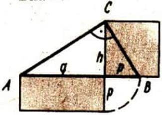
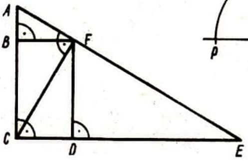
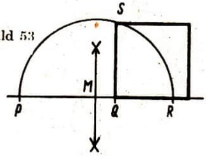


Bild 52



Blild 53



Konstruktion (Bild 53):

Auf einer Geraden werden aneinander zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ mit den Längen von $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ abgetragen. Um den Mittelpunkt M von $\overline{PR}$ wird mit $\overline{MP} = \overline{MR}$ als Radius ein Halbkreis geschlagen. Die Senkrechte auf PR in Q schneidet diesen Halbkreis in S. Nach dem Satz von THALES ist $\sphericalangle RSP = 90°$. Das Quadrat mit $\overline{QS}$ als Seite ist also das gesuchte

44 *Konstruiere eine Strecke der Länge $\sqrt{10}$ cm! (Anleitung: Zerlege 10 in zwei Faktoren!)*

Mit Hilfe des Höhensatzes läßt sich zu jeder Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel konstruieren, denn jede Zahl a läßt sich als Produkt, zumindest als $a \cdot 1$, schreiben.

Aufgaben 89 bis 92

30 Der Kathetensatz

Aus $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ und $\triangle DBC \sim \triangle ABC$ (Bild 50) folgt $\frac{a}{c} = \frac{p}{a}$ und $\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$ [Gleichungen (2) und (3) aus Lerneinheit 28].

Daraus ergibt sich

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q}$$

26 **KATHETENSATZ: Bei allen rechtwinkligen Dreiecken führt das Quadrieren jeder Kathetenmaßzahl zum gleichen Ergebnis wie das Multiplizieren der Maßzahlen von Hypotenuse und (der Kathete) zugehörigem Hypotenusenabschnitt.**

Das Bild 54 führt noch zu einer anderen Formulierung:

In allen rechtwinkligen Dreiecken ist jedes Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck aus Hypotenuse und zugehörigem Hypotenusenabschnitt.

45 *Stelle für die Katheten der Dreiecke ACE, ABF und CEF im Bild 52 die Gleichungen nach dem Kathetensatz auf!*

18 Zu dem Quadrat mit $\overline{AC}$ (Bild 52) als Seite soll ein flächengleiches Rechteck konstruiert werden. Eine Seite dieses Rechtecks soll die Länge von $\overline{BC}$ haben. Dazu können wir den Kathetensatz benutzen: Gesucht ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{AC}$ als Kathete und $\overline{BC}$ als zugehörigem Hypotenusenabschnitt. Die Hypotenuse selbst ist dann die gesuchte zweite Rechteckseite.

Konstruktion (Bild 55):

Auf einer Geraden wird eine Strecke $\overline{PQ} = \overline{BC}$ festgelegt und auf $\overline{PQ}$ in Q die Senkrechte errichtet. Um P wird ein Kreis mit $\overline{AC}$ als Radius geschlagen; er schneidet die Senkrechte in R. Die Senkrechte auf $\overline{PR}$ in R schneidet $\overline{PQ}$ in S. Das Rechteck mit $\overline{PQ}$ und $\overline{PS}$ als Seiten ist das verlangte.

Bild 54 a

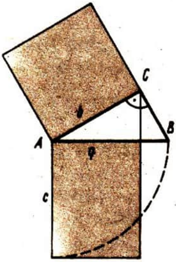


Bild 54 b

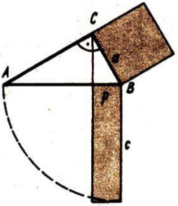
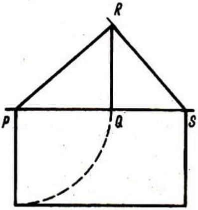


Bild 55



46 a) *Kann im Falle des Beispiels 18 die vorgegebene Rechteckseite beliebig lang sein?*

b) *Wie verläuft die Konstruktion, wenn die vorgegebene Rechteckseite länger als die Quadratseite ist?*

c) *Erläutere, wie man die Aufgabe im Beispiel 17 mit Hilfe des Kathetensatzes und die im Beispiel 18 mit Hilfe des Höhensatzes lösen kann!*

Aufgaben 93 bis 98

31 Der Satz des Pythagoras

Die beiden Rechtecke aus der Hypotenuse und den Hypotenusenabschnitten ergeben zusammen das Hypotenusenquadrat (Bild 56).

$$c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q).$$

Da $c \cdot p = a^2$ und $c \cdot q = b^2$ und $p + q = c$, erhalten wir $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

27 **SATZ VON PYTHAGORAS:[1] Bei jedem rechtwinkligen Dreieck führt das Quadrieren der Kathetenmaßzahlen mit anschließender Addition zum gleichen Ergebnis wie das Quadrieren der Hypotenusenmaßzahl.**

oder:

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Kathetenquadrate zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat.

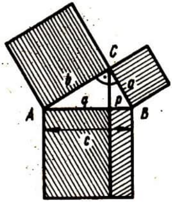


Bild 56

47 a) *Stelle für die Hypotenusen der sieben Dreiecke im Bild 52 die Gleichungen nach dem Satz des* PYTHAGORAS *auf!*

b) *Löse die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ nach den Kathetenquadraten auf! Formuliere beide Gleichungen in Worten!*

19 Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten von 3 cm und 4 cm Länge. Wie lang ist seine Hypotenuse?

Lösung: Für die Maßzahl c der Hypotenuse (Maßeinheit cm) muß gelten

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Die einzige positive Zahl c mit $c^2 = 25$ ist $5 = \sqrt{25}$.

$$c = \sqrt{25} = 5$$

Die Hypotenuse ist 5 cm lang.

Aufgaben 99 bis 104

32 Umkehrungen zur Satzgruppe des Pythagoras

Die altägyptischen Seilspanner gingen beim Abstecken eines rechten Winkels im Gelände wahrscheinlich folgendermaßen vor: Ein Seil wurde (etwa durch Knoten) in 12 Teilstücke gleicher Länge eingeteilt. Aus diesem Seil wurde ein Dreieck gelegt, dessen Seiten 3, 4 und 5 der 12 Teilstücke maßen. Der Winkel gegenüber der längsten Seite war ein rechter.

[1] Pythagoras (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.), griechischer Philosoph und Mathematiker. Es ist ungewiß, ob Pythagoras oder einer seiner Schüler diesen Satz ebenfalls entdeckt hat. Es steht aber fest, daß der Satz schon früher von anderen gefunden wurde.

48 a) *Fertige dir eine solche Knotenschnur an, und lege ein derartiges Dreieck!*
b) *Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm!*
Miß $\sphericalangle BCA$!
c) *Überlege, ob bei dem Vorgehen der Seilspanner der Satz des* PYTHAGORAS *benutzt wurde!*

28 **SATZ (Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS):**
Wenn für die Seiten a, b, c eines Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und c Hypotenuse.

Voraussetzung (Bild 57a): $\triangle ABC$ mit $a^2 + b^2 = c^2$

Behauptung: $\sphericalangle BCA = 90°$

Beweis: Es gibt gewiß ein rechtwinkliges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit a und b als Katheten (Bild 57b); seine Hypotenuse sei c_1. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt für $\triangle A_1B_1C_1$:

$$a^2 + b^2 = c_1^2.$$

Dann folgt aus der Voraussetzung $c = c_1$, und $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sind kongruent nach (s, s, s). Demnach ist $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1 = 90°$. Die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ kann also nur für rechtwinklige Dreiecke gelten.

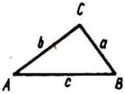
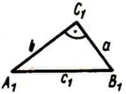
Bild 57a


Bild 57b


Wir wissen: Will man die Umkehrung eines Satzes bilden, ist deutliches Unterscheiden von Voraussetzung und Behauptung nötig. Dazu ist es zweckmäßig, den Satz in der „Wenn-so-Form" auszusprechen. Weiß man, daß ein Satz **„Wenn A, so B"** und seine Umkehrung **„Wenn B, so A"** gelten, so kann man beide Sätze zu einem zusammenfassen:

„A dann und nur dann, wenn B" oder **„A genau dann, wenn B"**.

Selbstverständlich kann man auch sagen:

„B dann und nur dann, wenn A" oder **„B genau dann, wenn A"**.

Für den Satz des PYTHAGORAS und seine Umkehrung heißt das z. B.

29 **SATZ: In einem Dreieck ABC gilt $\sphericalangle BCA = 90°$ dann und nur dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist,**

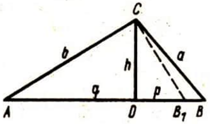
oder:

Für ein Dreieck ABC gilt $a^2 + b^2 = c^2$ genau dann, wenn $\sphericalangle BCA = 90°$ ist.

49 *Die Ähnlichkeitssätze 18, 19, 20 sind umkehrbar. Formuliere zu jedem Satz die Umkehrung, und fasse jeweils zu einem neuen Satz zusammen!*

33 Wir wollen untersuchen, ob auch Höhen- und Kathetensatz umkehrbar sind.

Bild 58



Voraussetzung (Bild 58):

$h = \overline{CD}$ liegt im Inneren von $\triangle ABC$

$h^2 = p \cdot q$ ($p = \overline{DB}$, $q = \overline{AD}$)

Behauptung:

$\sphericalangle BCA = 90°$

Beweis: Wenn $\sphericalangle BCA \neq 90°$ wäre, so müßte die Senkrechte auf AC in C die Gerade in einem Punkt $B_1 \neq B$ schneiden (innerhalb oder außerhalb der Strecke $\overline{AB}$), und es wäre $\overline{DB_1} = p_1 \neq p$. Für das rechtwinklige Dreieck AB_1C wäre nach dem Höhensatz $h^2 = p_1 \cdot q$ und damit $h^2 \neq p \cdot q$ wegen $p \neq p_1$. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb muß unsere Annahme, $\sphericalangle ACB$ sei kein rechter Winkel, falsch sein.

30 **SATZ (Umkehrung des Höhensatzes):**

Wenn eine Seite eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h in zwei Abschnitte p und q geteilt wird und $h^2 = p \cdot q$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig; p und q bilden die Hypotenuse.

(50) **a)** *Fasse den Höhensatz und seine Umkehrung zu einem einzigen Satz zusammen!*

b) *Konstruiere ein Dreieck ABC, für dessen Höhe $\overline{CD}$ gilt*

$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$,

das aber nicht rechtwinklig ist!

Der Beweis der Umkehrung des Höhensatzes erfolgte „indirekt“.

Beim **indirekten Beweis** benutzt man die Tatsache, daß eine Aussage, die Behauptung, entweder wahr oder falsch ist, und zeigt, daß sie nicht falsch sein kann:

a) Man nimmt zunächst an, die Behauptung sei falsch.
b) Man zeigt, daß diese Annahme zu einem Ergebnis führt, das der Voraussetzung oder einem bereits als wahr erkannten Satz widerspricht.

Damit ist nachgewiesen, daß die Behauptung nicht falsch sein kann, also wahr sein muß.

Einen indirekten Beweis führt man oftmals dann, wenn die Umkehrung eines (bereits bewiesenen) Satzes zu beweisen ist. Dabei benutzt man dann den Satz selbst. In Lerneinheit 7 wurde so bereits Satz 6 indirekt bewiesen.

Wie der Höhensatz, so ist auch der Kathetensatz umkehrbar:

31 **SATZ (Umkehrung des Kathetensatzes):**

Wenn für die Seiten a, b und $c = p + q$ eines Dreiecks (Bild 58) $a^2 = p \cdot c$ (oder $b^2 = c \cdot q$) gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse.

(51) **a)** *Beweise Satz 31 (indirekt)!*

b) *Fasse den Kathetensatz und seine Umkehrung zu einem Satz zusammen!*

Aufgaben 105 und 106

Bild 59

20 Ein Antennenmast von 103,5 m Höhe soll in $\frac{3}{4}$ seiner Höhe durch vier Seile abgespannt werden. Die Verankerungen der Abspannseile am Erdboden sollen vom Fußpunkt des Mastes 51,5 m entfernt sein. Wie lang sind die Abspannseile zusammen?

Lösungsüberlegung (Bild 59):

Wir ermitteln zunächst die Länge a eines Abspannseiles und multiplizieren dann mit 4. Jedes Abspannseil ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Kathetenlängen $\frac{3}{4}$ der Antennenmasthöhe und 51,5 m betragen.

Gegeben: $h = \frac{3}{4} \cdot 103{,}5\ \text{m} \approx 77{,}6\ \text{m}$ *Gesucht:* $s = 4\,a$ (in m)

$e = 51{,}5\ \text{m}$

Allgemeine Lösung: $a^2 = h^2 + e^2$

$$a = \sqrt{h^2 + e^2}$$

$$s = 4\,a = 4\sqrt{h^2 + e^2}$$

Überschlag: $4\sqrt{80^2 + 50^2} = 4\sqrt{6400 + 2500} = 4\sqrt{8900}$

Wegen $90^2 = 8100 < 8900 < 10000 = 100^2$ gilt $90 < \sqrt{8900} < 100$.

Somit wird s zwischen 360 m und 400 m liegen.

Numerische Lösung:

$s = 4\sqrt{77{,}6^2 + 51{,}5^2}\ \text{m}$

$s = 4\sqrt{6022 + 2652}\ \text{m}$

$= 4\sqrt{8674}\ \text{m}$

$s = 4 \cdot 93{,}1\ \text{m}$

$= 372{,}4\ \text{m}$

Erläuterung:

In der Quadrattafel finden wir:

$7{,}76^2 = 60{,}22$, also $77{,}6^2 = 6022$

$5{,}15^2 = 26{,}52$, also $51{,}5^2 = 2652$

Wir versuchen, der Quadrattafel $\sqrt{86{,}74}$ zu entnehmen, finden aber nur $\sqrt{86{,}68}$ und $\sqrt{86{,}86}$. Da 86,74 näher an 86,68 als an 86,86 liegt, muß mit dem kleineren Wert weitergearbeitet werden:

$\sqrt{86{,}74} = 9{,}31$, also $\sqrt{8674} = 93{,}1$

Vergleich mit Überschlag: $360 < 372{,}4 < 400$

Für die Beantwortung der Frage nach der Seillänge ist noch zu runden, da eine Angabe mit vier gültigen Grundziffern bei Ausgangsdaten mit nur drei gültigen Grundziffern (51,5) sinnlos ist.

Ergebnis:
Insgesamt ist das Abspannseil rund 372 m lang.

52 a) *Ermittle den Seilbedarf, wenn für Befestigung des Seils am Mast und Verankerung 3% Zuschlag zu berücksichtigen sind!*

b) *Die Verankerungen der vier Abspannseile sollen die Ecken eines Quadrats bilden, das einzuzäunen ist. Wie groß ist mindestens die gesamte Zaunlänge?*

35 21 Das Bild 60 zeigt den senkrechten Schnitt durch ein zweiteiliges Sägedach, dessen Flächen einen rechten Winkel bilden. Solche Dächer werden für Industriebauten bevorzugt, weil sie eine gute und blendungsfreie Auslichtung des Innenraumes gestatten. Dazu werden die steileren Dachflächen mit Glas ausgelegt.

Bild 60

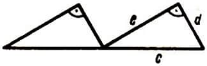
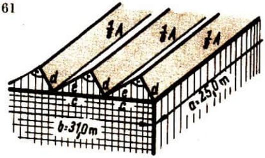


Bild 61



Eine Werkhalle, deren Grundriß ein Rechteck mit den Seiten $a = 25{,}0$ m und $b = 31{,}0$ m ist, soll mit einem achtgliedrigen Sägedach überdeckt werden, dessen Dachflächen parallel zur kürzeren Seite liegen. Insgesamt müssen $A = 425\ \text{m}^2$ lichtdurchlässige Fläche vorhanden sein (Bild 61). Wie breit sind die Dachflächen, die **nicht mit Glas** bedeckt werden?

Lösungsüberlegung:
Der senkrechte Schnitt des Daches besteht aus acht rechtwinkligen, einander kongruenten Dreiecken. Von einem solchen Dreieck wird die Kathete e gesucht. Die Hypotenuse c läßt sich aus der Länge b der Halle und der Anzahl n der Dachteile berechnen; die Kathete d läßt sich aus der gesamten Glasfläche A, der Anzahl n der Teile und der Hallenbreite a errechnen. Somit können wir den Satz des PYTHAGORAS anwenden.

Gegeben: $a = 25{,}0$ m; $A = 425\ \text{m}^2$ *Gesucht:* e (in m)
$b = 31{,}0$ m; $n = 8$

Allgemeine Lösung:

$$c^2 = d^2 + e^2 \qquad c = \frac{b}{n} \qquad d = \frac{A}{n \cdot a}$$

$$e^2 = c^2 - d^2$$

$$e = \sqrt{c^2 - d^2}$$

Überschlag: $c \approx 4$ m $\quad d \approx 2$ m $\quad e \approx \sqrt{16 - 4}$ m $\approx \sqrt{12}$ m

Wegen $9 < 12 < 16$ wird e zwischen 3 m und 4 m liegen.

Numerische Lösung:

$$c = \frac{31}{8}\ \text{m} = 3{,}88\ \text{m}$$

$$d = \frac{425}{8{,}25}\ \text{m} = 2{,}12\ \text{m}$$

$$e = \sqrt{3{,}88^2 - 2{,}12^2}\ \text{m}$$

$$e = \sqrt{15{,}1 - 4{,}5}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{10{,}6}\ \text{m}$$

$$= 3{,}26\ \text{m}$$

Vergleich mit Überschlag:

$$3 < 3{,}26 < 4$$

Ergebnis:

Die schwächer geneigten Dachflächen sind 3,26 m breit.

Wir lesen am Rechenstab ab.

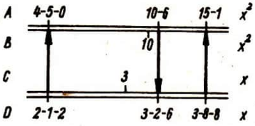


Bild 62

53 **a)** ***Wieviel Quadratmeter des Daches werden nicht mit Glas (oftmals mit sog. Asbestbeton) gedeckt?***

b) ***Wie hoch ist das Dach?***

Aufgaben 107 bis 127

AUFGABEN

1. Berechne die Zahlen, die in die offenen Felder gehören!

	Maßstab	Originalstrecke	Bildstrecke
a)	1 : 40000		1 cm
b)	1 : 25000	400 m	
c)		10 km	2 cm
d)		500 m	25 cm
e)	1 : 25		15 cm
f)	1 : 500	15 m	

2. Berechne die Zahlen, die in die offenen Felder gehören!

	Länge von s_1	Länge von s_2	$\frac{s_1}{s_2}$	$\frac{s_2}{s_1}$
a)	7 cm	21 cm		
b)	2,8 cm		0,5	
c)		1,35 m		$\frac{3}{5}$
d)	71,2 cm	3,56 m		
e)			0,8	
f)	41,3 m	413 cm		

3. Zeichne je drei Streckenpaare mit den folgenden Verhältnissen!

a) 2,5 **b)** 0,5 **c)** 3,1 **d)** $\frac{2}{7}$ **e)** 7 : 2

---

1. Einem Kreis (Radius r) ist je ein Quadrat einbeschrieben und umbeschrieben. Ermittle das Verhältnis der Quadratseiten!

---

4. Gib zu den folgenden Verhältnissen jeweils gleiche Verhältnisse aus Strahlenabschnitten der Figur im Bild 3 an!

a) $\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$ **b)** $\frac{\overline{GH}}{\overline{SI}}$ **c)** $\overline{DF} : \overline{GI}$ **d)** $\overline{SB} : \overline{SL}$

5. Berechne die fehlenden Strecken in der folgenden Tabelle zu Bild 4!

	$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$
a)	4 cm	5 cm		2 cm		
b)	4,2 cm		1,2 cm		6,3 cm	
c)			10 cm		2,9 cm	7 mm
d)	9,5 cm	12,8 cm	3,3 cm			

6. Untersuche die folgenden Verhältnisgleichungen für Bild 3 auf ihre Gültigkeit!

a) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$ **e)** $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SE}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$ **i)** $\dfrac{\overline{SI}}{\overline{SF}} = \dfrac{\overline{GI}}{\overline{DF}}$

b) $\overline{EF} : \overline{LM} = \overline{DF} : \overline{KM}$ **f)** $\overline{KL} : \overline{AB} = \overline{SK} : \overline{SA}$ **k)** $\overline{SC} : \overline{AB} = \overline{SK} : \overline{KM}$

c) $\dfrac{\overline{HI}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ **g)** $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{GI}}{\overline{GH}}$ **l)** $\dfrac{\overline{GI}}{\overline{SG}} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{SD}}$

d) $\overline{SA} : \overline{BC} = \overline{SG} : \overline{GH}$ **h)** $\overline{SK} : \overline{SM} = \overline{SG} : \overline{SI}$ **m)** $\overline{DF} : \overline{SF} = \overline{SG} : \overline{GI}$

7. Untersuche folgende Verhältnisgleichungen für Bild 63 auf ihre Gültigkeit!

a) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{i}{l}$ **b)** $\dfrac{f}{g+h} = \dfrac{k}{l+m}$

c) $\dfrac{e}{f+g} = \dfrac{a}{b+c}$ **d)** $\dfrac{g}{c} = \dfrac{e+f}{a+b}$

e) $\dfrac{f+g}{b+c} = \dfrac{d}{h}$ **f)** $\dfrac{i+k+l}{k+l+m} = \dfrac{a+b+c}{b+c+d}$

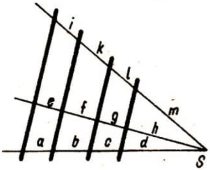


Bild 63

8. Zeichne eine beliebige Strecke und konstruiere dann ihr k-faches! Für welche der genannten k läßt sich die Konstruktion auch ohne Zuhilfenahme des Strahlensatzes ausführen?

a) $k = \dfrac{4}{3}$ **d)** $k = \dfrac{5}{4}$

b) $k = \dfrac{1}{2}$ **e)** $k = \dfrac{4}{9}$

c) $k = \dfrac{15}{11}$ **f)** $k = 0{,}375$

9. a) Konstruiere eine Strecke, die doppelt so lang wie $\overline{AB}$ (Bild 64) ist und teile sie in 5 kongruente Teile!

b) Teile $\overline{CD}$ (Bild 64) in 5 kongruente Teile und verdopple eine so erhaltene Teilstrecke!

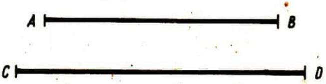


Bild 64

10. Wähle die Strecke $\overline{AB}$ (Bild 64) als Einheit eines Zahlenstrahls und konstruiere auf dem Strahl diejenigen Punkte, die zu den folgenden Zahlen gehören!

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{3}{7}$ **c)** $\dfrac{7}{3}$ **d)** $\dfrac{10}{9}$

11. Konstruiere zwei Paare von Strecken, die zueinander im gleichen Verhältnis stehen wie $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (Bild 64), aber eine andere Länge als diese haben!

2. Konstruiere zu $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (Bild 64) eine Strecke x, für die gilt $\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}}$!

Bild 65

3. Konstruiere ein Rechteck mit dem Umfang u (Bild 65), für dessen Seiten $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ gilt!

12. Untersuche die Verhältnisgleichungen **a)** bis **h)** für die Figur in Bild 3 auf ihre Gültigkeit!

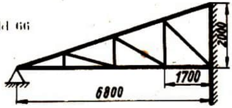
a) $\frac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{EH}}$ **c)** $\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AG}}$ **e)** $\overline{FM} : \overline{DK} = \overline{DF} : \overline{SD}$ **g)** $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{BH} : \overline{AG}$

b) $\frac{\overline{SH}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CI}}$ **d)** $\frac{\overline{HL}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{SM}}$ **f)** $\overline{SG} : \overline{SH} = \overline{DG} : \overline{HL}$

13. a) Berechne die Länge der senkrechten Streben des Pultdachbinders (Bild 66)!

b) Ermittle die Länge der schrägen Streben und des Obergurts zeichnerisch!

Bild 66



14. Berechne die fehlenden Strecken in der folgenden Tabelle zu Bild 4!

	$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BD}$
a)	6 cm		3 cm		12 cm		10 cm	
b)			1,0 cm		5,5 cm		2,4 cm	4,0 cm
c)		8,5 cm		52 mm			56 mm	70 mm
d)				6,2 cm	12,4 cm	6,2 cm	9,8 cm	
e)	17,8 cm	22,5 cm					14,3 cm	20,9 cm
f)	35 cm			56 cm	104 cm			26 cm

15. Es sei $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ (Bild 67). Bestimme x so, daß jeweils richtige Verhältnisgleichungen entstehen!

a) $\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{SD}}{x}$ **b)** $\overline{HM} : \overline{GL} = \overline{SD} : x$ **c)** $\frac{\overline{SB}}{\overline{BD}} = \frac{x}{\overline{KM}}$ **d)** $\frac{\overline{GF}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{SF}}{x}$

e) $\overline{BF} : \overline{FK} = \overline{CG} : x$ **f)** $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SG}}{x}$ **g)** $\frac{\overline{SA}}{\overline{AC}} = \frac{x}{\overline{IL}}$ **h)** $\overline{HE} : \overline{AD} = \overline{SE} : x$

i) $\frac{\overline{EI}}{\overline{GL}} = \frac{x}{\overline{SL}}$

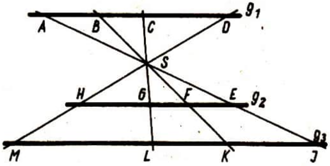


Bild 67

4. Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf Seite $\overline{AB}$ ein Punkt P.
Durch P ist eine Gerade derart zu legen, daß sie die Verlängerung von $\overline{AC}$ in einem Punkte Q so schneidet, daß $\overline{PQ}$ von $\overline{BC}$ halbiert wird.
Anleitung: Ziehe zuerst eine passende Parallele zu $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$!

16. In welchem Verhältnis wird $\overline{AB}$ von P und Q

a) im Bild 68,
b) im Bild 69

geteilt?

17. In welchem Verhältnis wird $\overline{CD}$ von R und S

a) im Bild 70,
b) im Bild 71

geteilt?

Bild 68

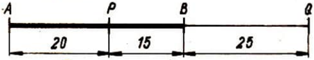


Bild 69

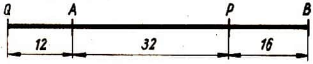


Bild 70

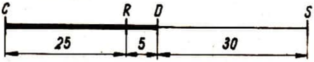
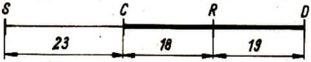


Bild 71



18. Fülle die folgende Tabelle so aus, daß AB innen von P und außen von Q im gleichen Verhältnis $p : q$ geteilt wird (zu Bild 68)!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	60 cm	56 cm	12 mm	70 mm	80 cm		
$\overline{AP}$	20 cm		10 mm	35 mm		12 mm	10 mm
$\overline{AQ}$		28 cm					30 mm
$p : q$					5 : 3	0,4	

19. Teile die Strecke $\overline{AB} = 45$ mm im gleichen Verhältnis innen und außen, in dem die Strecke $\overline{CD}$ im Bild 72 von P innen geteilt wird!

Bild 72

20. Teile die Strecke $AB = 45$ mm innen und außen im Verhältnis der Strecken m und n im Bild 73!

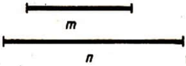


Bild 73

5. Im Bild 11b wird $\overline{AB}$ von T_i und T_a innen und außen im Verhältnis 8 : 3 geteilt. In welchem Verhältnis wird $\overline{T_iT_a}$ von A und B geteilt?

21. Eine Pyramide mit der Höhe h und einem Rechteck mit den Seiten a und b als Grundfläche werde in der Höhe h^* parallel zur Grundfläche geschnitten. Schnittfigur ist ein Rechteck mit den Seiten a_0 und b_0. Bestimme auf Seite 45 jeweils die fehlenden Größen!

a)	b)	c)	d)	e)
$a = 20$ cm	$a = 25$ cm	$a = 24$ cm	$a_0 = 9$ cm	$a = 42$ cm
$b = 12$ cm	$b = 35$ cm	$b = 15$ cm	$b_0 = 4{,}5$ cm	$a_0 = 12$ cm
$h = 32$ cm	$a_0 = 15$ cm	$a_0 = 16$ cm	$h = 16$ cm	$b_0 = 10$ cm
$h^* = 24$ cm	$h = 40$ cm	$h^* = 7$ cm	$h^* = 4$ cm	$h = 56$ cm

22. Bei einer einfachen Lochkamera ohne Linse ergibt ein 15 m hoher Mast ein 6 cm hohes Bild in 15 cm Entfernung von der Öffnung. Wie weit ist der Mast von der Kamera entfernt?

23. Das Bild 74 zeigt vereinfacht den Strahlenverlauf bei der Projektion eines Diapositivs, wie er vom (hier weggelassenen) Objektiv hervorgerufen wird. Wie hoch kann das Bild von einem Kleinbilddiapositiv (Format 24 mm × 36 mm) höchstens werden, wenn das ganze Bild auf eine Leinwand im Format 1 m × 1 m projiziert werden soll?

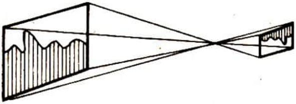


Bild 74

24. Aus welcher Entfernung muß man ein Projektionsbild von der Breite **a)** 2 m, **b)** 1,80 m, **c)** 3,50 m, **d)** 1,20 m betrachten, damit es dem Auge genauso groß erscheint wie eine Fotografie von 9 cm Breite in normaler Sehweite (25 cm)?

---

6. Bei der Projektion eines Diapositivs (vgl. Bild 74) gilt $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$. Dabei ist f die Brennweite des Objektivs, s die Gegenstandsweite (Abstand des Diapositivs vom Objektiv) und s' die Bildweite (Abstand des Bildes vom Objektiv).

a) Wie groß wird das Bild eines Kleinbilddiapositivs (24 mm × 36 mm), wenn der Bildwerfer 5 m von der Leinwand entfernt aufgestellt und ein Objektiv mit 100 mm Brennweite verwandt wird?

b) In welcher Entfernung muß ein Projektor mit einem Objektiv von 150 mm Brennweite aufgestellt werden, wenn das Bild 2,4 m breit werden soll?

c) Welche Brennweite wird benötigt, wenn der Abstand des Projektors von der Leinwand etwa 12 m betragen und das Bild 3,6 m breit werden soll?

d) Erläutere, warum man näherungsweise $f \approx s$ setzen kann!

---

25. Beweise, daß folgende Aussage gilt (Bild 75):

Aus $\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$

folgt $AB \parallel CD$! (Welchem Satz entspricht diese Aussage?)

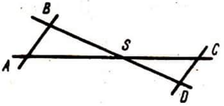


Bild 75

26. Untersuche die Gültigkeit folgender Aussage (Bild 75): Aus $\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{AB} : \overline{CD}$ folgt $AB \parallel CD$!

27. Untersuche, bei welchen der nachstehend angegebenen Maße für den in Bild 76 dargestellten Körper es sich um einen Pyramidenstumpf handelt!

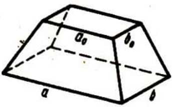
a) $a = 40$ cm; $b = 30$ cm; $a_0 = 20$ cm; $b_0 = 15$ cm

b) $a = 45$ cm; $b = 33$ cm; $a_0 = 30$ cm; $b_0 = 20$ cm

c) $a = 60$ cm; $b = 42$ cm; $a_0 = 40$ cm; $b_0 = 28$ cm

d) Gib bei den Pyramidenstümpfen jeweils die Höhe der ganzen Pyramide an, zu der man den Stumpf ergänzen kann, wenn dessen Höhe 24 cm beträgt!

Bild 76



7. Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die sich außerhalb des Zeichenblattes schneiden, und ein Punkt P außerhalb g_1 und g_2.

Erläutere, wie man unter Ausnutzung von Satz 10 eine Gerade durch P und den unzugänglichen Schnittpunkt von g_1 und g_2 konstruieren kann! Führe eine solche Konstruktion durch!

28. Die Bestimmung der Flußbreite $\overline{AB}$ kann auch so erfolgen, wie dies die Bilder 77 und 78 zeigen. Dies ist nötig, wenn die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus nicht zugänglich ist.

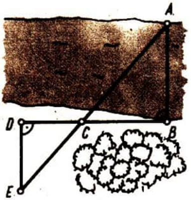


Bild 77

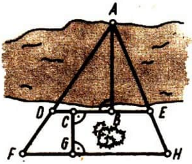


Bild 78

a) Bestimme die Breite des Flusses im Bild 76, wenn $\overline{BC} = 29$ m, $\overline{CD} = 11$ m und $\overline{DE} = 14$ m!

b) Bestimme die Breite des Flusses im Bild 78, wenn $\overline{DE} = 18{,}6$ m, $\overline{FH} = 24{,}6$ m und $\overline{CG} = 10{,}1$ m!

29. A und B seien zwei durch ein Sichthindernis getrennte Punkte. Auf $\overline{AB}$ ist ein von A aus nicht sichtbarer Punkt C abzustecken.

a) Erläutere das Verfahren am Bild 79!

b) Wie lang ist $\overline{DC}$ für $\overline{AE} = 96$ m; $\overline{AD} = 60$ m; $\overline{BE} = 28$ m?

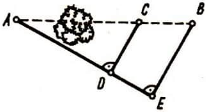


Bild 79

30. Steffen hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Zehnpfennigstück so, daß es gerade einen Gasbehälter (Durchmesser 62 m) verdeckt. Wieviel Meter stand er vom Gasbehälter entfernt?

31. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt etwa 60 Erdradien ($R = 6370$ km). Erläutere, wie man mit Hilfe einer Murmel o. dgl. näherungsweise den Monddurchmesser bestimmen kann!

8. A und B seien durch einen Berg voneinander getrennt. Gibt es einen Punkt C, von dem aus sowohl A als auch B sichtbar sind, und sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ zu vermessen, so kann man die waagerechte Entfernung $\overline{AB}$ folgendermaßen bestimmen (Bild 80):

Man legt auf $\overline{AC}$ einen Punkt D fest mit $\overline{AD} : \overline{DC} = m : n$. Danach teilt man $\overline{BC}$ ebenfalls im Verhältnis $m : n$; der Teilpunkt sei E. Dann wird $\overline{DE}$ gemessen.

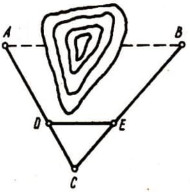


Bild 80

a) Ermittle $\overline{AB}$ aus $\overline{AC} = 4200$ m; $\overline{BC} = 5040$ m; $\overline{DE} = 1900$ m; $m : n = 9 : 5$! Welche Sätze werden benötigt?

b) Erläutere, wie man auf $\overline{AB}$ einen Punkt G festlegen kann, so daß $\overline{AG}$ die Richtung angibt, in der von A aus ein Tunnel nach B vorgetrieben werden muß! (Es sei $\overline{CF} = 1350$ m.) Entsprechend ist von B aus die Richtung festzulegen.

---

32. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 2{,}5$ cm! Konstruiere jeweils sein Bild bei folgenden Bewegungen!

a) Verschiebung in Richtung $\overrightarrow{AC}$ um $2\,\overline{AB}$;

b) Drehung um 135° mit C als Zentrum;

c) Spiegelung an der Parallelen zu AC durch B.

33. Zeichne wie in Aufgabe 32 ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 2{,}5$ cm! Führe dann die drei Bewegungen von Aufgabe 32 hintereinander aus, und zwar in der Reihenfolge

(1) b), a), c);
(2) c), a), b);
(3) a), b), c)!

Vergleiche die drei entstandenen Bilder!

34. Es sei $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $AB \parallel CD$. Gibt es immer eine Verschiebung (Drehung, Geradenspiegelung), bei der sich $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ entsprechen?

35. Es seien g und h verschiedene, einander parallele Geraden. Gib möglichst je zwei Bewegungen an, bei denen

a) g Bild von h und h Bild von g ist;

b) g und h jeweils in sich übergehen;

c) g in sich übergeht und h nicht;

d) g Bild von h ist, aber h nicht Bild von g;

e) g Bild von h ist und h in sich übergeht!

36. Das Bild 81 zeigt einen **Proportionalzirkel**. Er ist verstellbar und dient zur Verkleinerung bzw. Vergrößerung von Strecken in vorgegebenem Maßstab. Beschreibe ihn und begründe seine Wirkungsweise!

Bild 81

37. a) Die Normalspurweite der Eisenbahn beträgt 1435 mm. Welche Spurweite haben die Modellbahnen in den Nenngrößen H0 (1 : 87), TT (1 : 120) und N (1 : 160)?

b) Das Bild 82 zeigt die Stirnwand eines Großraumgüterwagens mit Bemaßungen. Berechne die Maße für ein Modell in der Nenngröße H0 (TT, N)!

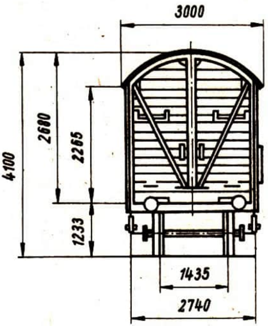


Bild 82

38. Das Bild 83 zeigt die Seitenansicht des Modells eines Schrankenwärterhäuschens für die Nenngröße H0.

a) Welche Maße muß man wählen, wenn das Modell für Nenngröße TT (N) hergestellt werden soll?

b) In welchem Maßstab ist die Zeichnung angefertigt?

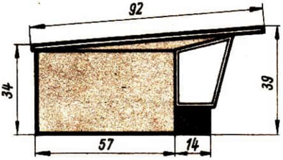


Bild 83

39. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt Q außerhalb des Dreiecks. Konstruiere A', B', C' bei der zentrischen Streckung $(Q; 3)$!

40. Zeichne ein Dreieck ABC und ermittle die Bildpunkte $A'B'C'$ bei der zentrischen Streckung $(A; 1{,}5)$!

41. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt R innerhalb des Dreiecks. Konstruiere A', B', C' bei der zentrischen Streckung $(R; 2)$!

42. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm! Diagonalenschnittpunkt sei S.

a) Konstruiere B', C', D', S' bei der zentrischen Streckung $(A; 2{,}5)$!

b) Konstruiere zwei Punkte, deren Bilder A und B bei der zentrischen Streckung $(S; 0{,}5)$ sind!

c) Wie groß ist k in $(A; k)$, wenn C Bild von S ist?

d) Gibt es zu jedem Punkt Z der Ebene ein $k > 0$, so daß C Bild von A ist bei $(Z; k)$?

e) Konstruiere A', B', C', D' bei der Streckung $\left(S; \frac{2}{3}\right)$!

f) Konstruiere zwei Punkte, deren Bilder B und C bei der zentrischen Streckung $(D; 3)$ sind!

g) Konstruiere Z in $(Z; 2)$, wenn A Bild von B ist!

h) Gibt es zu jedem $k > 0$ ein Z, so daß C Bild von A ist?

43. A, B, C, R sind vier Punkte einer Geraden g, P und Q liegen außerhalb von g (Bild 84). Durch A als Zentrum, B als Originalpunkt und C als dessen Bildpunkt wird eine zentrische Streckung festgelegt. Bestimme die Bilder von P, Q, R bei dieser Streckung!

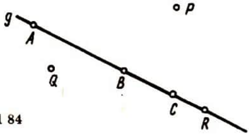


Bild 84

44. In der Ebene sei eine „Geradenstreckung" gemäß Bild 85 erklärt:

$\overline{FP'} : \overline{FP} = \overline{GQ'} : \overline{GQ} = 2;$

alle Punkte von g entsprechen sich selbst.

a) Handelt es sich um eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich?

b) Ist das Bild jeder Geraden eine Gerade?

c) Ist das Bild jedes Kreises ein Kreis?

d) Sind Original- und Bildgeraden einander parallel?

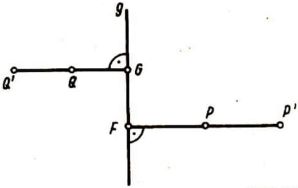


Bild 85

45. Betrachtet werden eine Gerade g mit den Punkten P und Q und eine Gerade h mit den Punkten P' und Q'. h sei das Bild von g bei der zentrischen Streckung $(Z; k)$.

a) Beschreibe die Lage von g und h!

b) Welchen Einschränkungen unterliegt die Lage von P, Q, P' und Q', wenn außerdem P' Bild von P und Q' Bild von Q bei $(Z; k)$ sein soll?

c) Wo liegt Z für $k > 1$ bzw. $0 < k < 1$?

46. Welche der folgenden Sätze sind wahr? (Begründung!)
Bei jeder zentrischen Streckung hat

a) jedes Parallelogramm als Bild ein Parallelogramm;
b) jedes Rechteck als Bild ein Rechteck;
c) jedes Rechteck als Bild ein Quadrat;
d) jedes Rechteck als Bild ein Parallelogramm.

47. Zeichne eine krummlinig begrenzte Figur F wie die im Bild 86 und einen Punkt Z! Lege auf dem Rand der Figur 8 Punkte (möglichst gleichmäßig verteilt) fest und konstruiere ihre Bilder bei der Streckung $(Z; 2)$! Verbinde die Bildpunkte so, daß sich möglichst genau das Bild F' der Figur ergibt! Markiere anschließend zur Kontrolle auf der erhaltenen Linie zwei weitere Punkte und überprüfe, ob sie wirklich zu F' gehören!

Bild 86

48. Auf ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm wird die Streckung $(A; 7)$ angewandt, danach auf das Bilddreieck $A'B'C'$ die Streckung $\left(A; \frac{3}{5}\right)$. Wie lang sind die Seiten des so entstehenden Dreiecks $A''B''C''$?

49. Es sei Z ein fester Punkt der Ebene. Ermittle die zentrische Streckung, die die gleichen Bilder erzeugt wie die Zusammensetzungen **a)** bis **c)**!

a) $(Z; 2)$ und $(Z; 3)$ **b)** $\left(Z; \frac{2}{3}\right)$ und $\left(Z; \frac{3}{4}\right)$ **c)** $(Z; \sqrt{2})$ und $(Z; \sqrt{2})$

d) Die Seitenlängen eines Rechtecks seien 3 cm und 5 cm. Wie lang sind die Seiten des Bildrechtecks bei **a)** bis **c)**?

50. Die Streckungen **a)** bis **d)** sollen zerlegt werden in zwei Streckungen $(Z; m)$ und $\left(Z; \frac{1}{n}\right)$, wobei m und n natürliche Zahlen sind.

a) $\left(Z; \frac{3}{4}\right)$ **b)** $\left(Z; \frac{7}{5}\right)$ **c)** $(Z; 1)$ **d)** $(Z; \sqrt{3})$

---

9. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit 2 cm Seitenlänge! Konstruiere das Zentrum Z derjenigen Streckung, die sich durch Zusammensetzen von 1. $(A; 1{,}5)$ und 2. $(B; 3)$ ergibt! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

10. Ein Viereck $ABCD$ hat bei der Streckung $\left(A; \frac{5}{4}\right)$ das Bild $A'B'C'D'$. Bei der Streckung $\left(C'; \frac{5}{4}\right)$ hat $A'B'C'D'$ das Bild $A''B''C''D''$.

a) Vergleiche $ABCD$ mit $A''B''C''D''$!

b) Gibt es eine Streckung, bei der $ABCD$ und $A''B''C''D''$ einander entsprechen?

---

51. Suche in jedem der genannten Bilder nach einander ähnlichen Figuren! Gib, wenn möglich, Ähnlichkeitsfaktor und Ähnlichkeitspunkt an!

a) 3; 10; 13 **b)** 24; 25 **c)** 29; 33; 34
d) 65; 66 **e)** 75; 78 **f)** 79; 80

52. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = 2$ cm; $\overline{AC} = 1{,}5$ cm; $\sphericalangle\, BCA = 90°$!

a) Ermittle sein Bild $A'B'C'$ bei den Abbildungen (1) bis (4)!

(1) Streckung $(A; 2)$, dann Verschiebung $\overrightarrow{AC}$

(2) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung $(A; 2)$

(3) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung $(C; 2)$

(4) Streckung $(A; 2)$, dann Verschiebung $2\,\overrightarrow{AC}$.

b) Vergleiche jeweils $A'B'C'$ mit ABC und gib den Ähnlichkeitsfaktor an!

53. Zeichne das Dreieck von Aufgabe 52 und dazu die Parallele g zu AC durch B!

a) Untersuche das Bild $A'B'C'$ bei den Abbildungen (1) bis (4)!

(1) Spiegelung an g, dann Streckung $(B; 1{,}5)$

(2) Streckung $(B; 1{,}5)$, dann Spiegelung an g

(3) Spiegelung an g, dann Streckung $(C; 1{,}5)$

(4) Streckung $(C; 1{,}5)$, dann Spiegelung an g

b) Vergleiche die Bilder! Welche Vermutung liegt nahe?

54. Beschreibe eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der folgende Figuren (Bild 87) einander entsprechen!

a) Rechteck $EFGH$ und Rechteck $IKLM$
b) Rechteck $ABCD$ und Rechteck $IKLM$
c) Rechteck $ABCD$ und Rechteck $EFGH$
d) Dreieck ABD und Dreieck IKM
e) Trapez $IKFE$ und Trapez $KLFG$

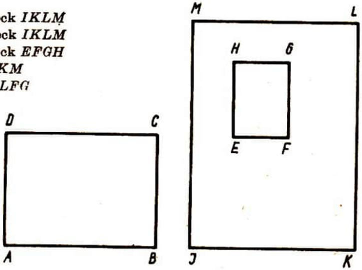


Bild 87

55. Zeichne ein Dreieck DEF und konstruiere dazu ein ungleichsinnig ähnliches mit $k = 3$ so, daß gilt:

a) $\triangle\, DEF$ und $\triangle\, D'E'F'$ haben genau einen Punkt gemeinsam;
b) $\triangle\, DEF$ und $\triangle\, D'E'F'$ haben keinen Punkt gemeinsam;
c) eine Seite von $\triangle\, DEF$ und eine Seite von $\triangle\, D'E'F'$ liegen auf ein und derselben Geraden.

56. Im Bild 87 entstehen durch die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{IL}$, $\overline{FH}$ sechs Dreiecke. Gib alle Paare gleichsinnig (ungleichsinnig) ähnlicher Dreiecke an!

57. Zeichne zwei stumpfwinklige Dreiecke ABC und DEF wie im Bild 44!

a) Konstruiere $A'B'C'$ bei der Streckung $\left(F; -\frac{3}{2}\right)$!

b) Konstruiere $D'E'F'$ bei der Streckung $\left(A; -\frac{1}{2}\right)$!

---

11. Zeichne zwei beliebige Punkte Z und P! Konstruiere die Bilder P_1 und P_2 bei den Streckungen $\left(Z; \frac{7}{4}\right)$ und $\left(Z; -\frac{7}{4}\right)$! Beschreibe die Lage von Z zu $\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$ mit den Begriffen „innere Teilung" und „äußere Teilung"!

12. Wie viele Streckungen lassen sich in Aufgabe 43 durch das Punkttripel A, B, C festlegen, wenn auch negative Streckfaktoren zugelassen werden? Stelle eine Tabelle auf!

---

58. Gib für die genannten Figuren gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse an!

a) Fünfecke in Bild 33 Seite 20 **b)** $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ in Bild 38a Seite 23

59. Begründe Wahrheit bzw. Falschheit der Aussage „Zwei Quadrate (Rhomben, Rechtecke, Parallelogramme, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke) sind stets einander ähnlich"! Ergänze im Falle der Falschheit so, daß eine wahre Aussage entsteht!

60. Im Bild 88 ist $EF \parallel AD$. Untersuche, ob die Trapeze $ABCD$ und $EBCF$ einander ähnlich sind!

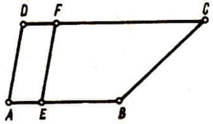


Bild 88

---

13. In zwei ähnlichen Rechtecken mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $k = 3$ unterscheiden sich die beiden kürzeren Seiten um 6 cm und die beiden längeren um 12 cm. Wie lang sind die Seiten beider Rechtecke?

---

61. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 70$ cm; $\overline{BC} = 60$ cm; $\overline{AC} = 50$ cm; $\sphericalangle CAB = 57{,}1°$; $\sphericalangle ABC = 44{,}4°$; $\sphericalangle BCA = 78{,}5°$. Prüfe nach, ob dieses Dreieck ABC zu einem Dreieck DEF ähnlich ist, wenn für $\triangle DEF$ folgendes gilt:

a) $\overline{DE} = 12$ cm; $\overline{EF} = 10$ cm; $\overline{FD} = 14$ cm

b) $\sphericalangle DEF = 57{,}1°$; $\sphericalangle FDE = 78{,}5°$; $\overline{DE} = 50$ cm

c) $\sphericalangle EFD = 44{,}4°$; $\overline{FD} = 42$ cm; $\overline{EF} = 45$ cm

d) $\overline{DE} = 84$ cm; $\overline{FD} = 60$ cm; $\sphericalangle EFD = 78{,}5°$

e) $\overline{DE} = 35$ cm; $\overline{EF} = 30$ cm; $\sphericalangle FDE = 57{,}1°$

f) $\sphericalangle DEF = 44{,}4°$; $\overline{DE} = 60$ cm; $\overline{EF} = 70$ cm

62. In jedem Trapez werden von den Diagonalen zwei ähnliche Dreiecke erzeugt.

a) Beweise diese Aussage!

b) Stelle Proportionen zwischen den Diagonalenabschnitten und den Grundseiten auf! Ziehe eine Folgerung für das Parallelogramm!

63. Beweise: Wenn D, E, F die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC sind, so gilt $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Gib Faktor und Zentrum einer entsprechenden Streckung an!

---

14. Beweise, daß für die Figur im Bild 89 $\triangle APT \sim \triangle BPT$ gilt und daß daraus $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$ folgt!

---

64. Konstruiere zu den Figuren in Bild 90 ähnliche im Verhältnis 2 : 1!

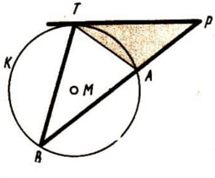


Bild 89

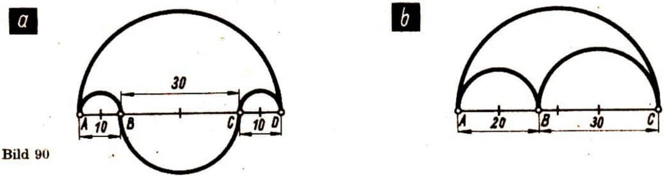


Bild 90

65. Einem Quadrat wird je ein Kreis ein- und umbeschrieben. Gib das Ähnlichkeitsverhältnis beider Kreise an!

66. Gib an, unter welchen Voraussetzungen zwei Kreisringe aus Kreisen mit den Radien r_1, R_1 bzw. r_2, R_2 einander ähnlich sind!

67. Gib Bedingungen an, unter denen zwei der genannten Körper einander ähnlich sind!

a) Quader b) quadratische Pyramiden c) Zylinder d) Kegel

68. Bei zwei ähnlichen Vielecken sind a und a' einander entsprechende Seiten, u und u' die Umfänge, A und A' die Flächeninhalte. Fülle die Tabelle aus!

	a	a'	u	u'	A	A'
a)	3 cm	6 cm	11 cm		5 cm²	
b)	12 cm		60 cm	35 cm	180 cm²	
c)	4 cm		18 cm		15 cm²	135 cm²

69. $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = 7$ cm; $\overline{AC} = 6$ cm; $\overline{BC} = 5$ cm ist durch eine Parallele zu $\overline{AB}$ folgendermaßen zu teilen:

a) Der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt von $\triangle ABC$ verhalten wie 4 : 25.

b) Der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt des entstehenden Trapezes verhalten wie 1 : 3.

70. Berechne den Quotient von Oberflächeninhalt und Volumen für Würfel verschiedener Kantenlängen!

a) $a = 20$ cm b) $a = 2$ cm c) $a = 0{,}2$ cm d) $a = 0{,}02$ cm

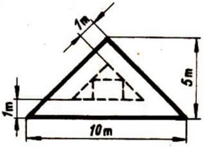
e) Ziehe Folgerungen für den Quotienten aus Oberflächeninhalt und Gewicht bei gleichem Material und damit für das Verhalten kleiner Teilchen im lufterfüllten Raum!

71. Einem Halbkreis ($r = 3$ cm) ist ein Quadrat (Rechteck mit dem Seitenverhältnis 4 : 3) einzubeschreiben. Dabei soll eine Seite auf dem Durchmesser liegen, die anderen Eckpunkte auf der Kreislinie.

72. Einem Rhombus $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm und $\sphericalangle ABC = 110°$ ist ein Quadrat einzubeschreiben.

73. Das Giebelfeld eines Satteldaches soll eine rechteckige Fensteröffnung erhalten, deren Ecken 1 m Abstand von den Dachsimsen haben und deren Breite sich zur Höhe wie 5 : 3 verhält. Entnimm die Maße dem Bild 91, und ermittle Lage und Maße der Fensteröffnung!

Bild 91



74. Einem gegebenen Dreieck ist ein anderes einzubeschreiben, dessen Seiten parallel (senkrecht) zu den Seiten des gegebenen Dreiecks verlaufen.

75. Konstruiere ein Dreieck mit den angegebenen Maßen, und achte auf nicht lösbare und nicht eindeutig lösbare Aufgaben!

a) $b : c = 1 : 0{,}75$; $\alpha = 65°$; $h_a = 5$ cm

b) $a : b = 3 : 5$; $\gamma = 60°$; $\alpha = 45°$

c) $a : c = 2 : 3$; $\gamma = 50°$; $s_a = 5$ cm

d) $a : c = 2 : 3$; $\alpha = 30°$; $h_c = 2$ cm

e) $a : b : c = 3 : 4 : 5$; $h_c = 6$ cm

f) $a : b : c = 4 : 3 : 2$; $s_a = 3$ cm

g) $a : b : c = 7 : 4 : 5$; $w_\beta = 6$ cm

h) $a : b : c = 7 : 8 : 9$; $\beta = 90°$

76. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\sphericalangle\, BCA = 90°$) mit $a : b = 5 : 6$; $h_c = 4$ cm!

77. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit c als Basis und $a : c = 4 : 5$; $h_c = 5{,}5$ cm!

78. Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AC} : \overline{AB} = 7 : 5$; $\overline{BC} = 4$ cm!

79. Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ mit $\overline{AC} : \overline{BD} = 3 : 2$; $\overline{AB} = 4{,}5$ cm!

80. Konstruiere alle Kreise durch P, die g_1 und g_2 berühren (Bild 92)!

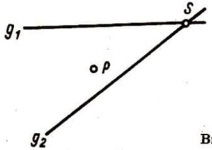


Bild 92

---

15. Gegeben sind eine Gerade g und zwei Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite von g. Konstruiere einen Kreis durch P_1 und P_2, der g berührt!

Anleitung: Konstruiere zunächst einen beliebigen Kreis, der g berührt und seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten m von $\overline{P_1P_2}$ hat! Verwende dann den Schnittpunkt von g und m als Streckzentrum!

16. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ (Diagonalenschnittpunkt S) aus $\overline{AB} = 4$ cm; $\sphericalangle\, BCD = 100°$; $\sphericalangle\, CDA = 95°$; $\sphericalangle\, DBC = 35°$; $\sphericalangle\, DSC = 85°$!

Anleitung: Überlege anhand einer Planfigur, wie zunächst ein zu $ABCD$ ähnliches Viereck $A'B'C'D'$ zu konstruieren ist! Dieses ist von $A' = A$ (oder $B' = B$) aus auf $\overline{AB} = 4$ cm zu strecken.

---

81. Wie hoch ist ein Baum, der einen 6 m langen Schatten wirft, wenn gleichzeitig ein 1,25 m langer Stab einen 0,75 m langen Schatten hat?

82. Die Drahtseilbahn auf den 1214 m hohen Fichtelberg überwindet bei einer Streckenlänge von 1175 m einen Höhenunterschied von 305 m.

a) Wie lange muß man im Durchschnitt fahren, damit man um 10 m steigt?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied, der durchschnittlich auf 100 m Streckenlänge überwunden wird?

83. Am Beginn einer 700 m langen Gefällstrecke steht ein Warnzeichen (Bild 93).

a) Ermittle zeichnerisch, wieviel Meter der Endpunkt der Strecke tiefer liegt als der Anfangspunkt!

b) Gib den Winkel an, unter dem die Straße fällt!

c) Welcher Winkel gehört zu einem Gefälle von 100 %?

Bild 93

84. Das Papierformat A0 ist ein Rechteck, dessen Fläche 1 m² beträgt und das beim Falten längs einer Symmetrieachse ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck (A1) ergibt.

a) Bestimme die Maße für die Formate A0 und A1 in mm!

b) Bestimme auch die Maße für die durch weiteres Falten entstehenden Formate A2 bis A6!

85. Um 200 v. u. Z. bestimmte der Grieche Eratosthenes den Erdumfang aus folgenden Messungen:

1. Entfernung Alexandria–Syene (heute Assuan) 5000 Stadien (1 Stadion = 184,3 m)
2. Genau zu dem Zeitpunkt, zu dem die Sonne senkrecht über Syene steht, wird in Alexandria aus der Länge eines senkrecht stehenden Stabes und seiner Schattenlänge ermittelt, daß die Sonnenstrahlen mit dem Stab einen Winkel von 7,2° bilden.

a) Erläutere anhand des (nicht maßstäblichen) Bildes 94, wie man daraus den Erdumfang u bestimmen kann! (A – Alexandria; S – Syene; M – Erdmittelpunkt)

b) Errechne den von Eratosthenes ermittelten Wert!

c) Ermittle den absoluten und den relativen Fehler dieser Messung!

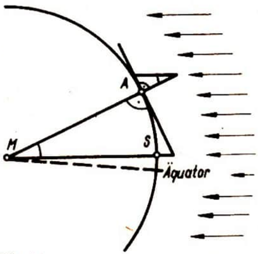
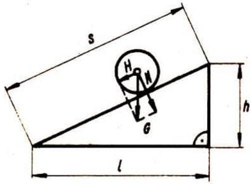


Bild 94

86. Eine Kugel mit dem Gewicht $G = 1{,}2$ kp rollt auf einer geneigten Ebene (Bild 95): $l = 184$ cm; $h = 43$ cm; $s = 189$ cm. Berechne die Normalkraft N und die Hangabtriebskraft H!

Bild 95



87. Gib Ähnlichkeitsabbildungen an, die im rechtwinkligen Dreieck ABC

a) $\triangle DBC$ in $\triangle ADC$,

b) $\triangle ADC$ in $\triangle ABC$,

c) $\triangle DBC$ in $\triangle ABC$

überführen!

88. Beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck ABC die Proportion $a^2 : b^2 = p : q$ gilt!

89. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ bekannt. Wie lang ist die Höhe $\overline{CD}$?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AD}$	2,0 cm	3 cm	3,5 cm	2,5 cm	4,1 cm	3,7 cm	5,3 cm
$\overline{DB}$	2,5 cm	3 cm	3,0 cm	4,5 cm	2,2 cm	2,8 cm	4,1 cm

90. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe 6 cm lang.

a) Wie lang könnten die Hypotenusenabschnitte sein?

b) Wie lang sind sie, wenn ihr Verhältnis $\frac{1}{4}$ beträgt?

c) Beantworte **a)** und **b)** für den Fall, daß die Höhe 10 cm lang ist!

91. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $h = 3{,}5$ cm.

a) Wie lang muß die Hypotenuse mindestens sein?

b) Wie lang kann die Hypotenuse höchstens sein?

92. Konstruiere zu den Rechtecken $ABCD$, $EFGH$, $IKLM$ aus Aufgabe 54 (Bild 87) je ein flächengleiches Quadrat!

93. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$ bekannt. Wie lang sind die Katheten?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	5 cm	6,1 cm	5,7 cm	4,9 cm	37 cm	97 cm	0,83 m
$\overline{AD}$	2 cm	4,7 cm	2,8 cm	1,3 cm	1,7 dm	620 mm	3,4 dm

94. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Kathete $\overline{AC}$ bekannt. Berechne die Hypotenusenabschnitte, die andere Kathete und die Höhe!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	9 cm	8 cm	21 cm	3,2 cm	9,4 cm	760 mm	85 cm
$\overline{AC}$	6 cm	5 cm	20 cm	1,4 cm	3,1 cm	43 cm	0,58 m

95. Fülle die folgende Tabelle aus unter der Voraussetzung, in $\triangle ABC$ sei $\sphericalangle ACB = 90°$!

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)			3,0 cm	4,0 cm		
b)		3,9 cm		5,1 cm		
c)	6,2 cm				3,5 cm	

96. Konstruiere zu einem gegebenen Quadrat $ABCD$ ein flächengleiches Rechteck $PQRS$, für das die Länge der Seite $\overline{PQ}$ gegeben ist! Miß $\overline{QR}$ und überprüfe rechnerisch!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\overline{AB}$	4 cm	5,6 cm	3,4 cm	2,9 cm	6,1 cm	4,3 cm
$\overline{PQ}$	3 cm	4,1 cm	4,8 cm	3,2 cm	3,7 cm	7,1 cm

97. Konstruiere zu einem gegebenen Rechteck $ABCD$ ein flächengleiches Quadrat! Miß die Quadratseite und überprüfe die Genauigkeit der Konstruktion!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\overline{AB}$	1,5 cm	2,4 cm	2,8 cm	4,9 cm	5,6 cm	6,3 cm
$\overline{BC}$	3,7 cm	3,1 cm	2,2 cm	3,6 cm	4,2 cm	1,7 cm

98. Die unterschiedlich großen Rechtecke einer Streichholzschachtel seien R_1, R_2, R_3. Konstruiere die zu ihnen jeweils flächengleichen Quadrate Q_1, Q_2, Q_3!

---

17. Konstruiere ein Quadrat, das flächengleich ist

a) mit einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck,

b) mit einem gegebenen Trapez!

---

99. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bekannt. Berechne die Länge der Hypotenuse!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AC}$	24 cm	2,0 cm	3,3 cm	2,7 cm	16 mm	6,32 dm	27,5 m
$\overline{BC}$	7 cm	2,1 cm	5,6 cm	0,9 cm	37 mm	23,8 cm	27,5 dm

100. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Kathete $\overline{BC}$ bekannt. Berechne $\overline{AC}$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	17 cm	3,7 cm	10,9 cm	0,85 m	23,5 cm	4,81 m	634 mm
$\overline{BC}$	15 cm	1,2 cm	9,1 cm	7,2 dm	118 mm	19,6 dm	2,75 dm

101. Fülle die Tabelle aus unter der Voraussetzung, in $\triangle\, PQR$ sei $\sphericalangle\, PQR = 90°$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{PQ}$	3,6 cm		2,3 cm	7,22 m	469 mm		37,1 m
$\overline{QR}$	7,7 cm	9,9 cm	1,4 cm	5,37 m		9,82 m	
$\overline{RP}$		10,1 cm			7,58 dm	10,5 m	27,5 m

102. Ermittle die Maße für die in Aufgabe 71 konstruierten einbeschriebenen Vierecke!

103. Konstruiere ein Quadrat, das den gleichen Flächeninhalt hat wie die Quadrate über Strecken von 3,8 cm und 4,5 cm Länge zusammen!

104. Konstruiere Strecken der Länge $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{8}$ cm!

105. Gib an, ob bei folgenden Maßangaben das $\triangle\, ABC$ mit dem Höhenfußpunkt D zwischen A und B rechtwinklig ist oder nicht!

a) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 4{,}3$ cm

b) $\overline{AC} = 12$ cm, $\overline{DB} = 18$ cm, $\overline{AD} = 6$ cm

c) $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 12$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm

d) $\overline{AB} = 1{,}5$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, $\overline{AC} = 2{,}5$ cm

e) $\overline{DB} = 5$ cm, $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm

f) $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 5$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm

106. Entscheide, ob $\sphericalangle\, PQR$ in $\triangle\, PQR$ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist! Höhenfußpunkt S liegt zwischen P und R.

a) $\overline{PS} = 9$ cm, $\overline{SR} = 16$ cm, $\overline{QS} = 12$ cm

b) $\overline{PS} = 6$ cm, $\overline{SR} = 5$ cm, $\overline{QS} = 7$ cm

c) $\overline{PS} = 9$ cm, $\overline{SR} = 5$ cm, $\overline{QS} = 4$ cm

d) $\overline{PR} = 11$ cm, $\overline{RS} = 4$ cm, $\overline{QR} = 7$ cm

e) $\overline{PQ} = 6$ cm, $\overline{QR} = 8$ cm, $\overline{RP} = 9$ cm

f) $\overline{PQ} = 12$ cm, $\overline{QR} = 5$ cm, $\overline{PR} = 14$ cm

g) $\overline{PQ} = 10$ cm, $\overline{PR} = 26$ cm, $\overline{QR} = 24$ cm

h) $\overline{PR} = 8$ cm, $\overline{RS} = 3$ cm, $\overline{PQ} = 6$ cm

107. Die Diagonalen eines Rhombus sind 42,4 cm und 35,2 cm lang. Bestimme Umfang und Flächeninhalt!

108. Gegeben sei ein Kreis mit 10 cm Radius.

a) Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat eine 14 cm lange Sehne?

b) Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat ein Punkt P, wenn die von ihm an den Kreis gelegte Tangente bis zum Berührungspunkt 15 cm lang ist?

109. a) Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 5,7 cm lang. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

b) Leite eine Formel für die Höhe (den Flächeninhalt) des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a her!

110. Ein **Oktaeder** ist ein regelmäßiger Körper mit drei gleich langen, paarweise aufeinander senkrecht stehenden und sich halbierenden Achsen (Bild 96).

a) Welche Form haben die Seitenflächen?

b) Bestimme die Länge der Kanten eines Oktaeders, bei dem die Körperachsen 12 cm lang sind!

c) Berechne den Oberflächeninhalt des Oktaeders von **b)**!

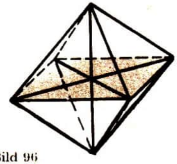


Bild 96

111. a) Wie lang ist die Raumdiagonale einer Streichholzschachtel?

b) Gib eine Formel für die Raumdiagonale d eines Quaders mit den Kanten a, b, c an!

112. Berechne den in der Aufgabe **83 a)** zeichnerisch ermittelten Höhenunterschied!

113. Gib die Steigung der Fichtelbergbahn (Aufgabe **82**) in Prozenten an!

114. Die Eisenbahnstrecke von Dresden nach Karl-Marx-Stadt steigt zwischen Tharandt und Klingenberg-Colmnitz bei 11,6 km Streckenlänge um 228 m an. Ermittle die Steigung, und vergleiche mit der für Hauptbahnen höchstzulässigen Steigung von 2,5%!

115. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre angefertigt werden. Berechne h für die im Bild 97 eingetragenen Maße!

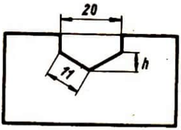


Bild 97

116. Jürgen läßt einen Drachen steigen, so hoch es der 87 m lange Bindfaden zuläßt. Michael sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe hat der Drachen erreicht, wenn Michael von Jürgen 60 Schritte von je 80 cm Länge entfernt steht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

117. Die Giebelseite eines Hauses, die der Wetterseite zugekehrt ist, muß neu verputzt werden. Der Dachgiebel hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Entnimm die Maße dem Bild 98 und berechne die Kosten, wenn 1 m² Verputzen 6,40 M kostet!

118. An eine 12 m lange Hauswand wird ein Schuppen mit einem einfachen Pultdach gebaut. Berechne nach den Maßen in Bild 99, wieviel Quadratmeter Bretter zum Bedecken des Daches erforderlich sind!

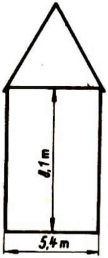
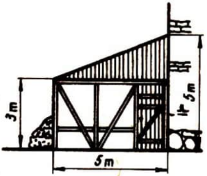


Bild 98

Bild 99



119. Von einem Feld in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 200 m und einer Kathete von 120 m wurden 900 dt Silomais geerntet. Berechne den Hektarertrag!

120. Ein Weg, der für eine kartographische Aufnahme vermessen wurde, steigt auf 330,0 m insgesamt um 46,0 m gleichmäßig an. In die Karte wird seine Projektion auf die Horizontalebene eingetragen. Wie lang erscheint sie auf einer Karte im Maßstab 1 : 40000?

121. Auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000 erscheint die Projektion eines Skilifts, der einen Höhenunterschied von 120 m überwindet, 12 mm lang.

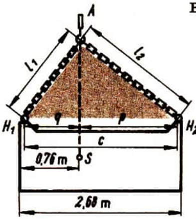
a) Wie lang etwa ist der Skilift in Wirklichkeit?

b) Ist der in **a)** errechnete Wert ein Mindest-, Höchst- oder Mittelwert?

122. Der Pkw Trabant 601 hat ein Leergewicht von 615 kp. Berechne Hangabtriebskraft und Normalkraft bei einer Straße mit 12% Gefälle (vgl. Aufgabe **86**)!

123. Ein Kasten mit einseitiger Schwerpunktlage hängt an einer gespreizten Kette (Bild 100). Die Kette bildet am Aufhängepunkt A einen rechten Winkel. Wie lang ist die Kette, wenn der Hakenabstand $\overline{H_1H_2}$ eine Länge von 2,68 m hat und der Abstand des Schwerpunktes S von der Kastenwand, über der sich Haken H_1 befindet, 0,76 m beträgt?

Bild 100



124. Wie groß sind bei dem Dachbinder in Bild 101 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m gilt?

125. a) Bestimme die Länge des Obergurts, der Diagonalen und der Senkrechten des Dachbinders aus Aufgabe **13** (Bild 66)!

b) Desgleichen für Bild 102!

Bild 101

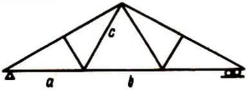
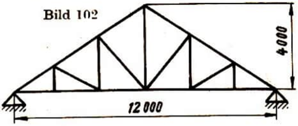


Bild 102



126. Berechne die Blickweite von einem 100 m hohen Turm auf das Meer! (Erdradius 6370 km)

127. Ein Kraftwerk wird von einem See her durch eine sechsfache Rohrleitung gespeist, für deren Hauptpunkte folgende Angaben gelten:

	Mündung am Turbinenhaus	Knickpkt. 1	Knickpkt. 2	Knickpkt. 3	Anfang am Wasserschloß
Waagerechte Entferng. vom Turbinenhaus	0	127,5 m	171,0 m	235,5 m	354,0 m
Höhe über NN	603,0 m	618,0 m	649,5 m	711,0 m	783,0 m

a) Zeichne einen Längsschnitt durch das Leitungssystem im Maßstab 1 : 5000 mit der Höhenlinie 600 über NN als Bezuglinie!

b) Berechne die Längen der Teilstücke der Leitung, die Gesamtlänge der Leitung und die Länge der Luftlinie vom Anfang bis zur Mündung!

---

18. In einer mindestens 2000 Jahre alten chinesischen Arithmetik findet sich folgende Aufgabe:

Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilf, das einen Fuß über der Wasserfläche emporsteht. Wenn man es ans Ufer nach der Mitte einer Seite hin zieht, reicht es gerade bis an den Rand des Teiches. Wie tief ist das Wasser?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Berechne die in der folgenden Tabelle fehlenden Strecken aus Bild 4 auf Seite 4!

	$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BD}$
a)			2,2 cm	2,7 cm	4,5 cm		1,8 cm	
b)				3,7 cm	5,3 cm	1,6 cm		3,0 cm
c)	17,8 cm	22,5 cm					14,3 cm	20,9 cm
d)	35 cm			56 cm	104 cm			26 cm

2. Von zwei Strecken a und b ist ihr Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ bekannt.

a) Konstruiere b für $a = 4{,}6$ cm!

b) Konstruiere a für $b = 5{,}4$ cm!

3. Löwenberg und Gransee liegen an der Fernverkehrsstraße 96 und sind 13 km voneinander entfernt. Von Gransee aus befährt ein Lkw die F 96 mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, von Löwenberg aus ein Pkw mit $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) In welcher Entfernung von Gransee begegnen sich beide Fahrzeuge, wenn sie einander entgegenfahren und ihre Fahrt zum gleichen Zeitpunkt antreten?

b) In welcher Entfernung von Gransee überholt der Pkw den Lkw, falls beide gleichzeitig in Richtung Neubrandenburg abfahren?

4. Das Bild 103 zeigt schematisch die Anordnung von Sonne, Mond und Erde bei einer Sonnenfinsternis.

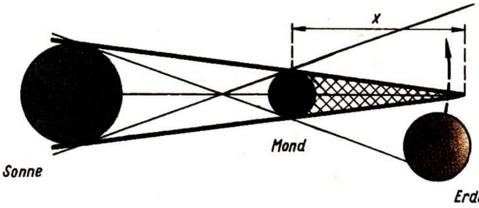


Bild 103

a) Berechne, wie weit der Kernschatten des Mondes reicht, unter Benutzung folgender Näherungswerte:

Sonnendurchmesser 1,4 Mill. km, Monddurchmesser 3500 km, mittlere Entfernung Sonne–Erde bzw. Sonne–Mond 150 Mill. km. Erläutere, warum man mit den Durchmessern statt mit den Berührungssehnen rechnen darf!

b) Vergleiche den unter **a)** ermittelten Wert mit der Entfernung Erde-Mond, die zwischen 356 000 km und 407 000 km schwankt! Was ergibt sich daraus für die Sichtbarkeit einer totalen Sonnenfinsternis?

c) Berechne entsprechend die Länge des Kernschattens der Erde (Erddurchmesser 12 740 km)! Für welche Finsternis ist dieses Ergebnis bedeutsam?

5. Zeichne einen Rhombus $ABCD$ mit $\sphericalangle ABC \neq 90°$ und dem Diagonalenschnittpunkt M! Gib möglichst je zwei Bewegungen an, bei denen

a) $\triangle ABM$ das Bild von $\triangle BCM$ ist;

b) $\triangle ABM$ das Bild von $\triangle DMC$ ist;

c) $\triangle ABC$ das Bild von $\triangle ABD$ ist;

d) der Rhombus Bild von sich selbst ist!

6. Zeichne das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 3$ cm! Diagonalenschnittpunkt sei S.

a) Konstruiere sein Bild $A''B''C''D''$ bei der Zusammensetzung $(Z; k)$ der Streckungen 1. $(A; 2)$ und 2. $\left(S; \frac{3}{4}\right)$!

b) Berechne $\overline{A''B''}$ und $\overline{B''C''}$!

c) Gib drei Geraden an, auf denen Z liegen muß!

d) Überprüfe an deiner Konstruktion, ob sich die unter **c)** genannten Geraden wirklich in einem Punkt schneiden!

e) Ergibt die Zusammensetzung 1. $\left(S; \frac{3}{4}\right)$, 2. $(A; 2)$ dieselbe zentrische Streckung $(Z; k)$?

7. Ein rechteckiges Bild hat einen 5 cm breiten Rahmen. Sind die beiden Rechtecke einander ähnlich?

8. Bei zwei ähnlichen Vielecken sind a und a' einander entsprechende Seiten, u und u' die Umfänge, A und A' die Flächeninhalte.

a) Berechne u' und A', wenn $a = 5$ cm, $a' = 8$ cm, $u = 20$ cm und $A = 9\ \text{cm}^2$ ist!

b) Berechne a' und u', wenn $a = 6$ cm, $u = 25$ cm, $A = 30\ \text{cm}^2$ und $A' = 60\ \text{cm}^2$ ist!

9. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und fülle sie aus unter der Voraussetzung, in $\triangle ABC$ sei $\sphericalangle ACB = 90°$ und der Punkt D der Fußpunkt der Höhe h_c!

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)	5,5 cm					4,1 cm
b)			2,1 cm			4,9 cm
c)		5,0 cm			5,4 cm	

10. Gib die Maße der in den genannten Aufgaben konstruierten Figuren an!

a) Dreieck in Aufgabe **77**

b) Rhombus in Aufgabe **79**

c) Rechteck in Aufgabe **78**

d) Dreieck in Aufgabe **76**

00 08 05 - 1 –,60