W. Lietzmann

Riesen und Zwerge im Zahlenreich

1969 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
8. Auflage, überarbeitet von A. Baumgarten
MSB: Nr. 13
Abschrift und LaTex-Satz: 2020 https://mathematikalpha.de

Vorwort zur fünften Auflage

Das zuerst 1916 erschienene Büchlein will denjenigen, die am Spiel der Zahlen ihre Freude haben, einige angeregte Stunden bringen.
Es soll dadurch mithelfen, Zahlverständnis und Zahlanschauung zu finden; beides tut uns bitter not. So steht hinter der Unterhaltung im Plauderton, hinter dem lustigen Gesicht ein ernster Gedanke.
Lange Zeit war das Bändchen vergriffen. In der vierten und fünften Auflage konnte ich für manche Erweiterungen Platz schaffen. Ich würde mich freuen. wenn sich zu den vielen alten Freunden der Schrift zahlreiche neue gesehen.

Göttingen, im Januar 1953
W. Lietzmann

Vorwort zur siebenten Auflage

Das vorliegende kleine Werk ist heute noch genau so lebendig und anregend wie vor 50 Jahren, als es zum ersten Mal erschien.
In der siebenten Auflage ist an seinem Wesen nichts geändert worden.
Aber die Welt entwickelt sich ständig. Die Leistungen der Maschinen wachsen, Rechenautomaten ermöglichen es, die Arbeit vieler Menschen in einem Bruchteil an Zeit zu bewältigen, Raketen tragen künstliche Satelliten auf ihre Umlaufbahnen um die Erde.
Manche mathematischen Gedankengänge sind daher heute für breite Kreise interessant und aktuell, die es vor Jahren noch nicht waren. Dieser Entwicklung will die siebente Auflage Rechnung tragen.

Staßfurt, im November 1965
Adelheid Baumgarten

Inhaltsverzeichnis

1 Vom Zählen

Zeichne auf einem Bogen Papier eine Anzahl kleiner Kreise, so etwa, wie du es in Bild 1 siehst. Dein Freund möge die Augen schließen; du legst das Blatt vor ihn, er soll die Augen schnell öffnen und gleich wieder schließen. Jetzt soll er sagen, wieviel Kreise er gesehen hat.
Er wird fast immer daneben raten - wenn er nicht gemogelt hat, aber das wollen wir ihm nicht zutrauen. Also kann dein Freund nicht einmal bis neun zählen, wirst du denken, wenn du etwa gerade neun Kreise gezeichnet hast.

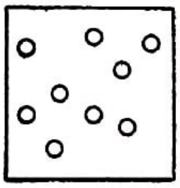

Bild 1

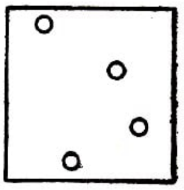

Bild 2

Jetzt mache den Versuch noch einmal. Wir wollen nur vier Kreise hinmalen, etwa so wie in Bild 2. Dein Freund wird jetzt ziemlich sicher die richtige Anzahl angeben. Wir können also nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Gegenständen gleichzeitig übersehen.
Vielleicht stellst du nun bei dir selbst fest, wo die Grenze zwischen der Anzahl der übersehbaren und der nicht übersehbaren Dinge liegt.

Ich erinnere an ein damit zusammenhängendes Gesellschaftsspiel: Einer der Anwesenden muss sich umdrehen. Die anderen legen mehrere Gegenstände in einer Reihe auf den Tisch, wie sie gerade zur Hand sind: ein Taschenmesser, eine Schere, einen Bleistift, ein Stückchen Papier, einen Knopf, eine Briefmarke usf.

Jetzt darf das "Versuchskaninchen" die Reihe der Gegenstände etwa zwei Minuten lang betrachten.
Dann soll er dem Tisch wieder den Rücken kehren und aufzählen, was er behalten hat. Man staunt, wie wenig es ist. Auch hier ist es eine dankbare Aufgabe, den Auffassungsbereich bei den einzelnen Personen festzustellen.

Nun ist es gar nicht so schwer, durch einen Kunstgriff die Zahl der übersehbaren Gegenstände zu vergrößern. Wenn ich die neun Kreise in Bild 1 so anordne, wie es Bild 3 anzeigt, so wird die Versuchsperson wahrscheinlich schon beim ersten Blick die richtige Zahl sagen. Auch bei jenem Gesellschaftsspiel hat man Aussicht, besser abzuschneiden und nicht nur die Anzahl, sondern auch die Art der einzelnen Gegenstände, womöglich sogar ihre Reihenfolge zu behalten.

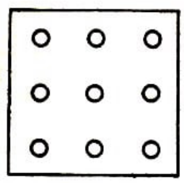

Bild 3

Du denkst dir schnell, wenn du die Gegenstände siehst, eine Geschichte aus, je absonderlicher, um so besser.
Also etwa: Ein einbeiniges Messer und eine zweibeinige Schere gehen spazieren, da treffen sie einen Bleistift. Den musst du anspitzen, sagt die Schere zum Messer, ich schneide inzwischen von dem Papier ein Stückchen ab, dann schreibt uns der Bleistift einen Brief, und wir siegeln ihn, da wir nichts anderes haben, mit dem Knopf und kleben die Briefmarke drauf,

Die Geschichte ist zwar reichlich "verdreht", aber das schadet nichts, um so eher behält man sie. Das Kunststück ist nur, in den zwei Minuten eine solche Geschichte auszudenken.

Wenn die Versuchsperson, der du die erste Figur vorgelegt hast, wissen will, wieviel Kreise denn nun eigentlich auf dem Blatt waren, so wird sie die Dinge einfach zählen. Man kann auch Dinge lediglich nach der Erinnerung zählen, der eine stellt sich dabei geschickter an als der andere. Wenn dich jemand fragt, wieviel Fenster deine Schule oder dein Wohnhaus nach vornheraus hat, dann wirst du vielleicht die Antwort nicht sofort wissen, so oft du auch schon dort ein- und ausgegangen bist.
Aber du kannst vielleicht ein Erinnerungsbild zu Rate ziehen und daran die Fenster regelrecht zählen. Oder du überlegst, wieviel Klassen nach vornheraus liegen und wieviel Fenster jede hat.
Es ist das Verfahren von vorhin:

Bei den neun in der Weise von Bild 3 angeordneten Punkten konntest du ein Erinnerungsbild zu Hilfe nehmen - es handelte sich ja um eine dir sehr bekannte Anordnung von Punkten, wie sie sich etwa auf Dominosteinen findet. Auch im Falle des Gesellschaftsspieles nahmst du eine Überlegung zu Hilfe, ähnlich wie bei den Fenstern des Gebäudes.

Wir wollen sehen, was weiter nötig ist, wenn wir Gegenstände zählen wollen. Das Grunderfordernis ist, dass die Anzahl sich nicht etwa unterdessen ändert. Du wirst sagen, das ist doch selbstverständlich. Nicht ganz!
Du kennst wohl die Geschichte vom Hirtenbüblein, das zum König gerufen wird und ihm drei Fragen beantworten soll? Eine von ihnen ist die: Wieviel Wassertropfen sind im Meer? Das Büblein weiß sich sehr gut zu helfen. Es lehnt die Frage ab, weil sich diese Zahl dauernd ändert: "Verstopf erst alle Flüsse und Bäche, die sich ins Meer ergießen, dann will ich dir Antwort geben."

Eine weitere Forderung kommt hinzu: Der Zähler muss zählen können. Auch das ist nicht selbstverständlich! Kleine Kinder können es nicht; sie müssen schon ein gewisses Alter haben. Wie beim Kinde, so bei einigen Naturvölkern.
Manche haben hinter dem Zahlnamen von vier nur noch einen Ausdruck für viel, wird berichtet. Die Yancos am Amazonenstrom sollen für 3 das Wort Poettarrarorincoaroac haben.
"Gott sei Dank hört damit aber ihre Arithmetik auf", sagt dazu der, von dem diese Nachricht stammt.

Auch bei dem erwachsenen Kulturmenschen gehört Übung zum Zählen. Wir wollen es ja so weit bringen, dass wir schnell und deshalb mechanisch zählen. Solange wir nach jeder Zahl erst überlegen müssen, wie nun die nächste heißt, so lange fehlt noch etwas.

Beim mechanischen Zählen macht man aber leicht Fehler. Lass jemand zählen: 1090, 1091, 1092 usf.; manch einer lässt gedankenlos auf 1099 die Zahl 2000 folgen.
Eine Quelle vieler Zählfehler ist die im Deutschen übliche, unzweckmäßige Inversion der Einer und Zehner: Statt sechsundfünfzig sagten wir viel besser fünfzig- sechs. Eine

Änderung dieser Gewohnheit würde von allen Berufen, die viel mit Zahlen zu tun haben, freudig begrüßt werden.
Weniger beim Zählen, wohl aber bei der mündlichen Mitteilung von Zahlen macht sich der geringe Lautunterschied von 2 und 3 unliebsam durch häufige Verwechslungen bemerkbar. Manche sagen deshalb zwo statt zwei.

Einer anderen Schwierigkeit beim Zählen begegnet man, wenn die Dinge in sehr großen Abständen aufeinanderfolgen. Wie zählt der Kohlenträger, der einen Sack nach dem andern in den Keller trägt? Wie zählt der Schulbub die Tage, die ihn noch vom Weihnachtsfest trennen?
Dass im letzten Fall rückwärts statt vorwärts gezählt wird, ändert nichts Wesentliches an der Sachlage. - Beide können nicht die ganze Zeit über die Zahl im Kopf behalten. Also machen sie sich Zeichen. Die Kohlenträger setzt einen Strich neben den anderen, jedesmal, wenn er einen Sack in den Keller trägt; der Junge streicht umgekehrt jeden Tag einen Strich weg. Man zählt dann die Zeichen, nicht die Dinge selber.

Wir haben nun schon so viel über das Zählen gesagt, wie man es in diesem Falle macht und in jenem. Nun wollen wir endlich auch einmal selbst die Sache praktisch ausprobieren. Zähle die Streichhölzer in einer Schachtel! Fülle ein Wasserglas mit Erbsen und stelle deren Anzahl fest!
Zähle die Buchstaben auf einer Seite dieses Buches! - Diese drei Beispiele lehren dich, dass es nicht ganz leicht ist, größere Zahlen wirklich sicher festzustellen. Du wirst sorgfältig und zur Vorsicht mehrfach zählen müssen.

Man kann sich übrigens im Zählen üben. Der Bankangestellte, der Geldscheine oder Geldstücke, der Postangestellte, der Postkarten abzuzählen hat, ist geübter im Zählen dieser Dinge als andere Leute.
Man kann nun aber nicht alle Gegenstände, deren Anzahl man wissen möchte, wirklich abzählen. Die beste Zeit seines Lebens würde man mit diesem Zählgeschäft verlieren und doch manches überhaupt nicht zählen können. Wenn jemand bei gewissenhaftem Zählen in der Sekunde um 1 weiterzählt, so kommt er in einer Minute bis 60, in einer Stunde bis 3600, an einem zehnstündigen "Arbeitstage" also bis 36000.
Und wenn er jährlich 300 Arbeitstage 50 Jahre lang mit dieser geistreichen Beschäftigung verbrächte, so käme er bis 540000000, also etwa bis zu einer halben Milliarde.
Alles, was über diese Zahl hinausgeht - und wieviel ist das nicht in unserem Leben -, übersteigt die Leistungsfähigkeit eines einzelnen, wenn man auf tatsächliches Abzählen Wert legt.

Hier greifen nun Zählmaschinen ein. Wir kennen sie alle von der Gasuhr, der Wasseruhr, dem Elektrizitätszähler, dem Kilometerzähler. Wie wollten wir es anstellen, wenn wir Gas, Wasser und Elektrizität selbst abmessen sollten? Wie lästig wäre es für den Autofahrer, wenn er mit Hilfe von Kilometersteinen die Länge der Strecke, die er gefahren ist, ermitteln müsste!
Aber auch da, wo wir selbst fertig werden würden, kommen uns Apparate zu Hilfe, so etwa beim Schrittmesser. Wo schließlich menschliche Leistung versagt, weil wir die erforderliche Zählgeschwindigkeit nicht aufbringen können, bleibt die Maschine unsere

einzige Zuflucht.

Das Zählwerk einer Zeitungsrotationsmaschine zählt in einer Stunde 24000 Zeitungen zu zwölf Seiten in Packen zu je 200 ab. Du kannst dir selber ausrechnen, wieviel Menschen, die je Sekunde eine Zeitung zählen, die gleiche Arbeit verrichten müssten - und dabei muss man noch bedenken, dass die zwölfseitigen Zeitungen vorher zusammengelegt werden müssten; das Ordnen in Packen ist dabei auch noch nicht erledigt!

Weil man nicht alles wirklich zählen kann oder will, auch wenn man die Anzahl gern wissen möchte, begnügt man sich oft mit ungefähren Angaben. Aus der einen befruchteten Eizelle des Menschen entstehen 18000 Billionen Zellen, beim Elefanten gar 700000 Billionen. Eine Termitenkönigin soll zehn Jahre lang alle 2 Sekunden ein Ei "legen", das macht also 15552000 im Jahr.
Niemand wird annehmen, dass diese Zahlen genau stimmen, man hat sie geschätzt. Schätzen von Zahlen ist von größter praktischer Bedeutung. Aber Übung gehört dazu.

Versuche selbst einmal, größere Anzahlen zu schätzen! Es ist etwa auf dem Festplatz eine große Menschenmenge versammelt. Sind es 200 oder 1000 oder 5000? Oder es wird einer Gesellschaft ein Gefäß mit Erbsen gezeigt. Wer ihre Zahl am besten schätzt, gewinnt einen Preis. Es ist kaum zu glauben, wie weit die Schätzungen untereinander und vom wahren Wert abweichen. Und doch verlangt man nicht selten von einem Menschen, dass er solchen Fragen nicht ratlos gegenüberstehe.

Wie kann man das Schätzen üben? Zunächst heißt es, wirkliche Mengen auszählen oder ausmessen. Dann muss der Schätzer sich gewisse Werte fest einprägen. Er muss also ein "Gefühl" dafür bekommen, wieviel 100, 500, 1000 Mann sind, wieviel 100, 200, 300, 400, 500 Meter. Handelt es sich um Dinge, bei denen eine unmittelbare Zählung nicht ausführbar ist, dann muss er die Überlegung zu Hilfe nehmen; er muss mit Überschlagswerten rechnen.

Ein einfaches Beispiel: In einer Stadt sollten während des Krieges, als es für Lebensmittel Bezugscheinkarten gab, an alle Familien mit Kindern Milchkarten ausgegeben werden. Die Stadt zählte 50000 Einwohner. Es wurden für die Ausgabe der Milchkarten zwei Tage angesetzt, an jedem Tage fünf Stunden. Die Karten für die einzelnen Familien mussten ausgefüllt werden; dabei waren für die milchberechtigten Kinder die Geburtsscheine vorzuzeigen, und die Milchhändler hatten die Namen und Milchmengen in ihre Listen einzutragen.
Als es zur Ausführung kam, gab es allgemeines Erstaunen, dass man die Menschenmenge nicht bewältigen konnte!

Stundenlanges, bei den meisten ergebnisloses Warten! Ein wenig Überlegung und Schätzung hätte da geholfen. Wenn jede Person zur Abfertigung auch nur 2 Minuten braucht, dann kommen in einer Stunde 30 Personen, in den zehn Stunden 300 Personen an die Reihe. Setzt man also bloß 5 Leute hin, die gleichzeitig arbeiten, so ist die Arbeit nicht zu bewältigen, wenn auch noch so schnell geschafft wird.

Mit diesem Beispiel sind wir eigentlich schon einen Schritt über das Ziel dieses Abschnittes hinaus. Wir haben gerechnet und nicht gezählt. Ehe wir auf diesem Wege weitergehen, müssen wir eine Frage aufnehmen, der wir vorhin aus dem Wege gingen. Wie können wir auch große Zahlen beherrschen, wie können wir Zahlenriesen meistern, die durch wirkliches Zählen praktisch gar nicht erreichbar sind?

2 Zahlsysteme

Wenn ich eine größere Anzahl von Dingen abzuzählen habe, tue ich gut, die Zählung mehrfach vorzunehmen. Wenn ich bei der Sparkasse 532 Mark abholen will, so zählt mir der Kassenangestellte das Geld auf, ich zähle mit; er zählt es nach, und ehe ich es nehme, zähle ich es wahrscheinlich noch einmal nach.
Und auch jetzt wäre ich nicht sicher, wenn nicht die Zählung in einer besonderen Weise vorgenommen würde. Ich will einmal annehmen, der Kassenangestellte hat die 532 Mark in einzelnen Markstücken ausgezahlt - im allgemeinen wird das ja nicht zutreffen. Er wird dann die Markstücke nicht in regellosem Haufen aufeinanderlegen, sondern sie in übersichtlicher Weise gruppieren, etwa so, dass er sie in kleine Berge von je 10 Stück abzählt und von diesen je 10 in eine Reihe legt. Dann hat er 5 solcher Reihen, dazu noch 3 Berge und noch 2 einzelne Markstücke auszuzahlen.

Damit haben wir ein Verfahren angewandt, das überall wiederkehrt, wo es sich um die Zählung größerer Mengen handelt. Der Kaufmann verkauft Waren, die in großen Zahlen in den Handel kommen, wie Stecknadeln, Knöpfe, Bogen Papier, etwa nach Dutzend oder zu hundert Stück.
Der Kohlenträger, von dem wir vorhin sprachen, setzt nicht Strich neben Strich, er legt vielmehr jeden fünften Strich quer über die vorangehenden vier.
Seine Zahl 13 sieht also so aus: ~~IIII~~ ~~IIII~~ III.

Auch beim Abschätzen größerer Mengen benutzt man eine solche Gruppenbildung.
Von allen Gruppierungen ist die wichtigste die, die uns schon durch die Bildung unserer Zahlen, durch ihre Schreibung und Aussprache nahegelegt wird. Wie jener Kassenangestellte fassen wir zehn Gegenstände zu einem Zehner zusammen, zehn Zehner zu einem Hunderter usf. Diese Art der Zusammenfassung kann man sehr wohl als Veranschaulichung größerer Zahlen nehmen.
So wird bei dem alten Rechenlehrer Busse, der um 1800 lebte, die Zahl 2326 in der Weise des Bildes 4 dargestellt: Zuletzt stehen 6 Einer, dann folgen zwei Tüten, die die Zehner darstellen, die drei Säckchen zeigen die Hunderter, die Rechtecke vorn sollen Kisten sein, die die Tausender wiedergeben.

Bild 4

Wie groß die Bedeutung dieses Zehnersystems für die Beherrschung großer Zahlen ist, merkt man an Ziffern, die diesen Vorteil nicht oder nicht durchweg ausnutzen. Römische Zahlen wie z.B. MDCCLIX oder MMDCCCLXXIV liest man nicht so schnell wie etwa 1759 oder 2874.

Handelt es sich um sehr große Zahlen, so ist auch die einfache Aneinanderreihung von Ziffern für Lesen und Schreiben noch nicht sehr praktisch. Der folgende Satz steht in einem mathematischen Scherzbuch aus dem Jahre 1636, das sich "Mathematische Erquickstunden" nennt:

"Es haben die Astronomen gefunden und durch ihre Instrumente observiert, dass der inwendige Umbkreiss dess Firmaments halte 508781250 Meilen ... der Inhalt dess Firmaments hölen fläche 82364023748224431 9/11 gevierdte meilen ... So folget nun, dass der gantze Cörperliche Inhalt solcher Kugel nahe 3596299963139791266979190761957504 Cubicmeilen."

Wirst du so ohne weiteres Zahlenriesen, zumal den letzten, lesen können? Übrigens - du kennst die Formeln der Kugeloberfläche und des Rauminhaltes der Kugel. Nimm an, der "inwendige Umbkreiss" des Firmaments sei richtig, wenn du auch weißt, dass unser heutiges Weltbild anders aussieht! Haben dann die Astronomen, von denen das mathematische Scherzbuch aus dem Jahre 1636 spricht, "dess Firmaments hölen fläche" und den "gantzen Cörperlichen Inhalt" richtig berechnet?

Wie macht man die Schreibung solcher großen Zahlen übersichtlicher? Man fasst immer drei Ziffern zusammen, von rechts nach links beginnend. Man führt also in unserem Zehnersystem zusätzlich eine Tausendergruppierung durch. Die Zahlen

508 781 250	Meilen
82 364 023 748 224 431	Quadratmeilen
3 596 299 963 139 791 266 979 190 761 957 504	Kubikmeilen

sind nun schon weit übersichtlicher. Allerdings gehört jetzt noch zum Lesen eine eingehende Bekanntschaft mit den Namen größerer Zahlen. Bis Tausend kennt sie der kleine Schulbub.
Von da bis zur Million geht's auch noch an. Ich beherrsche damit alle Zahlen bis hin zur Zahl 999 999 999 999, in Worten neunhundertneunund-neunzigtausend-neunhundert-neunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzigtausend-neunhundertneunund-neunzig.
Die Zahl in der erste Zeile der Tabelle heißt, abgekürzt geschrieben, 508 Millionen 781 tausend 250.
Eine Zahl, die wir häufig nennen, ist dabei übergangen worden, die Milliarde. Es ist das ein uns heute ganz geläufiges Wort für tausend Millionen, das in Deutschland erst seit dem 19. Jahrhundert häufiger gebraucht wurde.

Doch weiter in unserem Zahlensystem. Eine Million Millionen nennt man eine Billion.[1] Die zweite der oben genannten Zahlen heißt 82 tausend 364 Billionen 23 tausend 748 Millionen 224 tausend 431. Weiter nennt man dann eine Million Billionen eine Trillion, eine Million Trillionen eine Quadrillion usf. Die dritte unserer obigen Zahlen beginnt mit 3 tausend 596 Quintillionen. Wie sie weiter lautet, magst du selbst lesen? [2]

Wenn man jetzt die Reihe der Namen Billion, Trillion, Quadrillion genügend weit fortsetzt, kann man jede Zahl, so groß sie auch sein mag, nicht nur schreiben, sondern auch lesen. Uns erscheint dieser Gedanke, dass das möglich ist, selbstverständlich.

[1]1) Abweichend von dem in Deutschland und z.B. England herrschenden Gebrauch bezeichnet man z.B. in Frankreich und in Amerika mit einer Billion die Zahl, die wir eine Milliarde nennen.

[2]Entsprechend dem Wort Milliarde wird im, Volksmund auch häufig die Bezeichnung Billiarde für tausend Billionen, Trilliarde für tausend Trillionen usw. verwendet.

Das war aber nicht immer so. Der griechische Mathematiker Archimedes, wohl der bedeutendste Mathematiker des Altertums, hat eine in dieser Hinsicht sehr lehrreiche Abhandlung verfasst, die uns erhalten ist, die "Sandrechnung".

Er stellt sich die Aufgabe, die Anzahl der Sandkörner anzugeben, die in eine Kugel von der Größe der ganzen Welt hineingehen. Was Archimedes dabei unter Weltall versteht, geht uns hier nichts an, so bedeutsam es für eine Geschichte der Astronomie sein mag. Auch Archimedes kommt es gar nicht darauf an, die Zahl der Sandkörner, die seine Welt anfüllen, wirklich genau anzugeben. Wichtig ist ihm vielmehr nur, dass man Zahlen bilden kann, die jedenfalls größer als die doch gewiss ungeheuer große Anzahl jener eingebildeten Sandkörnchen ist. Sein Problem ist nicht ein astronomisches, sondern ein zahlentheoretisches !

Er nimmt an, 10000 Sandkörner gehen auf ein Mohnkorn - das ist reichlich gerechnet; 40 Mohnkörner nebeneinandergelegt geben eine Fingerbreite.[3]
Wenn er dann den Halbmesser der Weltallkugel kennt, kann er leicht angeben, welche Zahl von Sandkörnern in ihr Platz hätte. Dazu gibt es Formeln, die Archimedes sehr gut kennt. Doch so einfach wäre die Aufgabe nur, wenn bereits ein Zahlsystem da wäre, wie wir es heute haben. Das aber musste erst geschaffen werden. Und das war der wahre Zweck der Arbeit von Archimedes.

Wir wollen ihm dabei ein wenig folgen. Die größte Zahl, für die die Griechen einen besonderen Namen hatten, war 10000. Sie nannten sie eine Myriade.
Die Zahlen bis zu einer Myriade Myriaden (also bis $10000 \cdot 10000 = 100000000$) nannte Archimedes Zahlen erster Ordnung. Die Zahlen von da bis $100000000 \cdot 100000000$ heißen dann Zahlen zweiter Ordnung, die Zahlen von da bis $100000000 \cdot 100000000 \cdot 100000000$ Zahlen dritter Ordnung, und so geht das fort bis zu den Zahlen der 100000000ten oder myriad-myriadsten Ordnung.

Diese Zahl, eine 1 mit 800000000 Nullen dahinter, wollen wir mit P bezeichnen. Archimedes nennt nun weiter die Zahlen von 1 bis P die Zahlen der ersten Periode. Jetzt lässt er die Zahlen bis 100000000 P die erste Ordnung der zweiten Periode bilden, dann kommt er zur zweiten Ordnung in der zweiten Periode, zur dritten usf. bis zur 100000000ten Ordnung der zweiten Periode; da lässt er die dritte Periode beginnen.
Nun kann man so eine vierte, fünfte Periode usf. angeben.

Er geht bis zur 100000000ten, zur myriad-myriadsten Periode und findet schließlich in ihr als letzte Zahl: Eine myriaden-myriade Einheiten der myriad-myriadsten Ordnung der myriad-myriadsten Periode.
Für den, der griechisch lesen kann, will ich diese Zahl auch noch in griechischen Lettern hersetzen:
$A\iota \quad \mu\upsilon\rho\iota\alpha\kappa\iota\sigma\mu\upsilon\rho\iota o\sigma\tau\alpha\varsigma \quad \pi\epsilon\rho\iota o\delta o\upsilon \quad \mu\upsilon\rho\iota\alpha\kappa\iota\sigma\mu\upsilon\rho\iota o\sigma\tau\omega\nu \quad \alpha\rho\iota\vartheta\mu\omega\nu \quad \mu\upsilon\rho\iota\alpha\iota\mu\upsilon\rho\iota\alpha\delta\epsilon\varsigma$

Das ist in Ziffern geschrieben eine 1 mit 80000 Billionen Nullen hinterher. Fürwahr ein

[3]Einige Schüler haben geduldig einige Kubikzentimeter schönen Sand wirklich gezählt und so die Grundannahme von Archimedes geprüft. Sie sind auf ganz andere Zahlen gekommen. Man muss die Arbeit von Archimedes besser "Staubrechnung" nennen, so klein sind seine Körner.

Zahlenriese, der alles Erfassbare übersteigt! -

Archimedes hätte es, wenn ihn nicht die Aufstellung des Zahlsystems selbst gereizt hätte, gar nicht nötig gehabt, diesen gewaltigen Apparat von Zahlen in Bewegung zu setzen. Er kommt nämlich, um seine Frage zu beantworten, mit einer verhältnismäßig sehr kleinen Zahl aus. Er braucht gar nicht in die zweite Periode, geschweige denn in eine höhere in seinem Zahlsystem zu steigen. Die Zahl der Staubkörner bleibt unter 10000000 Einheiten der achten Ordnung in der ersten Periode.

Für uns Menschen des 20. Jahrhunderts ist es ganz selbstverständlich, dass wir uns zur Schreibweise von Zahlen eines Zahlensystems bedienen, unseres Dezimalsystems. Jedes Schulkind arbeitet mehr oder weniger bewusst damit.
Weit weniger vertraut sind wir mit anderen Zahlsystemen, die aus unserem Zeitalter der immer weiter wachsenden Automatisierung nicht mehr hinwegzudenken sind. Am 31. 12. 1964 wurde in der gesamten DDR eine Bevölkerungszählung durchgeführt; vielleicht war dein Vater ehrenamtlicher Helfer dabei. Die ehrenamtlichen Helfer leisteten nur die Vorarbeit; die Auswertung der einzelnen Angaben in den Fragebögen übernahmen elektronische Rechenmaschinen.

Die vermögen sehr viel zu leisten, du wirst darüber noch einiges erfahren; aber sie können nicht in unserem Dezimalsystem rechnen. Da sie im allgemeinen auf eine "Entscheidungsfrage" zu antworten haben, können sie nur mit "ja" oder "nein" reagieren. Sie arbeiten daher im wesentlichen mit dem Zahlsystem zur Basis 2, dem Dualsystem. Für bestimmte Zwecke kommt auch das Zahlsystem zur Basis 8 vor, das ja mit dem zur Basis 2 dadurch eng verwandt ist, dass $2^3 = 8$ ist; auch das Zahlsystem zur Basis 3 wird verwendet. Unser Dezimalsystem jedoch kann die Maschine nicht gebrauchen.

Zahlen, die in unserer Dezimalschreibweise dargestellt sind, lassen sich sehr leicht auf ein anderes Zahlsystem umstellen. Wir wollen es am Beispiel der Umwandlung von der dezimalen zur dualen Form durchdenken. Das Problem ist also:
Wie sieht ein und dieselbe Zahl in dezimaler und in dualer Schreibweise aus?

Zur Vorbereitung blättern wir ein paar Seiten weiter; im Abschnitt 5 finden wir eine Tabelle der Potenzen von 2, die wir für unsere Umrechnung benutzen. Wir müssen nur noch eine kleine Ergänzung vornehmen: Laut Festsetzung gibt es auch 2^0, und zwar hat man $2^0 = 1$ festgelegt.
Wir wollen als Beispiele zwei Zahlen wählen, die im Dezimalsystem dreistellig bzw. vierstellig sind: 387 und 5104. Die dezimale Schreibweise 387 bedeutet, die Zahl ist gleich der Summe

$$3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 300 + 80 + 7$$

Ganz entsprechend ist auch

$$5104 = 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Im Dualsystem zerlegen wir die Zahlen auch in Summanden, aber wir bilden Summen von Zweierpotenzen:

$$387 = 256+128+2+1 = 1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$$

Benutzen wir die aus dem Dezimalsystem vertrauten Ziffern 1 und 0 auch im Zweiersystem, so sieht die Zahl 387 in dualer Schreib- weise folgendermaßen aus: 110000011. Im Dualsystem ist sie eine neunstellige Zahl.

Entsprechend entwickeln wir die Zahl 5104:

$$5104 = 4096 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16$$

Man erkennt leicht, dass die Zahl 5104 im Dualsystem eine dreizehnstellige Zahl ist, nämlich 1001111110000.

Du kannst dir nun einmal überlegen, wie die beiden Zahlen 387 und 5104 im System zur Basis 3 oder in dem zur Basis 8 aussehen!
Bei unserem Ausflug in das Dualsystem haben wir erkannt, dass die Potenzschreibweise auch unserem Dezimalsystem zugrunde liegt. Sie erleichtert uns das Schreiben sehr großer und sehr kleiner Zahlen.
Die Zahl 10000, die Myriade des Archimedes, lässt sich ja noch schnell schreiben und überblicken. Die letzte Zahl zweiter Ordnung des Archimedes, 100 000 000 · 100 000 000 = 10 000 000 000 000 000, kann man kaum noch auf einen Blick erfassen; 10^{16} ist sehr viel übersichtlicher.

Du findest die Potenzschreibweise heute überall in Tabellen, die sehr große (und sehr kleine) Zahlen enthalten. Die Masse der Erde beträgt rund 5 975 000 000 000 000 000 000 000 kg; wir schreiben statt dessen 5,975 · 10^{24} und können daran sofort die Größenordnung erkennen.

Für Zahlen, die kleiner sind als 1, wenden wir die Potenzschreibweise nach folgender Festsetzung an:

$$\begin{aligned} 0,1 &= 10^{-1} \\ 0,01 &= 10^{-2} \\ 0,001 &= 10^{-3} \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Demnach ist 0,000000000000003 = 3 · 10^{-15} und 0,0000000587 = 5,87 · 10^{-8}.

Der Radius des Wasserstoffatomkerns wird mit $r = 1,3 \cdot 10^{-13}$ cm angegeben. Du wirst ihn auch als Dezimalzahl schreiben können!

Bei vielen physikalischen und technischen Größen benutzt man je nach Bedarf unterschiedliche Maßeinheiten, die ein Vielfaches oder ein Bruchteil einer Grundeinheit sind.
Die Grundeinheit für die elektrische Spannung ist das Volt; die Netzspannung in eurer Wohnung beträgt 220 V. Die großen Überlandleitungen stehen unter Hochspannung von 100 und mehr Kilovolt, Bandgeneratoren erzeugen Spannungen von einigen Megavolt.
Die elektrische Leitung in eurer Wohnung ist mit einer 6-Ampere-Sicherung oder durch eine 10-Ampere-Sicherung geschützt. Im Rundfunkapparat haben wir Ströme von einigen Milliampere.

Das Vielfache der Grundeinheit wird durch einen Vorsatz angegeben. Die folgende Tabelle der wichtigsten Vorsätze gibt das Vielfache der Grundeinheit in Potenzschreibweise an.

Aus der Tabelle können wir ersehen, dass 1 MV eine Million Volt, 1 nm den milliardsten Teil eines Meters und 1 pF die Kapazität von einem billionstel Farad bedeuten.

Vorsatz	Kurzzeichen	Vielfaches der Grundeinheit
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{12}

3 Veranschaulichung großer Zahlen durch Weg und Zeit, durch Fläche und Körper

Dir sind gewiss schon Zahlenriesen begegnet, bei denen du im stillen gesagt haben wirst: "Das kann ich mir nicht vorstellen!"
Du erinnerst dich, wie in Zeitungen, Büchern und Tabellen zuweilen große Zahlen durch Vergleiche irgendwelcher Art begreiflich gemacht werden. In der Astronomie z.B., wo wir es fast durchweg mit Größen zu tun haben, die irdisches Maß überschreiten, wird in volkstümlichen Darstellungen gern zu solchen Veranschaulichungen gegriffen.

Man schreibt die Zahlen, um sich von ihrer Aufeinanderfolge, ihrer Größe und den Rechenoperationen mit ihnen ein Bild zu machen, in regelmäßigen Abständen an einen Strahl (Bild 5). Wir sprechen von einem Zahlenstrahl.

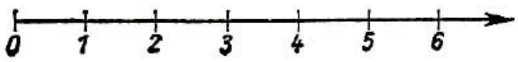

Bild 5

Aus begreiflichen Gründen können wir nur einen Teil des Strahles zeichnen. Wir müssen uns ihn in Richtung des Pfeiles verlängert und dann immer weiter Zahlen in regelmäßigen Abständen angeschrieben denken.
In unserer Zeichnung hat der Zahlstrahl links einen Anfangspunkt, an dem die Zahl 0 steht. Es kommt nun bei dieser Art der Darstellung vor allem auf die Länge der Einheitsstrecke an, also auf den Abstand des Punktes 1 von 0.

Wählen wir als Einheitsstrecke 1 cm, so würde der Weg vom Anfangspunkt bis zur Zahl 7 die Länge 7 cm haben, bis zur Zahl 817 die Länge 8 m und 17 cm, bis Zur Zahl 233588 die Länge 2 km 335 m 88 cm.
Von den Millionen kann man sich auf diese Weise noch eine ganz gute Vorstellung machen. (Wie lang ist der Weg vom Anfangspunkt bis zur Zahl 1000000, wenn die Einheit 1 cm, wenn sie 1 mm ist?) Zahlen aber, die sich in die Billionen hinein erstrecken, sind auf diese Weise schlecht darstellbar; die Strecken werden zu lang.
Für 1 Milliarde braucht man, wenn man 1 mm zur Einheit nimmt, schon eine Strecke von 1000 km. Um also z.B. eine Milliarde Mark zu veranschaulichen, die in Fünfzigpfennigstücken als eine einzige Rolle nebeneinandergelegt wird, braucht man, unter der Annahme, dass die Dicke eines Geldstückes angenähert 1 mm ist, eine Rolle von 2000 km Länge.

In Deutschland wurden vor dem letzten Kriege jährlich etwa 80 Milliarden Zigaretten geraucht. Bei 6,5 cm Länge eines Stückes geben diese Zigaretten aneinandergereiht eine Strecke von 5200000 km. Die Länge des Kilometers ist so gewählt, dass auf den Äquator etwa 40000 gehen. So reichen also die Zigaretten 130mal um den Äquator.
Noch ein anderes Beispiel einer Streckendarstellung: Da hat jemand ausgerechnet, dass die Cheopspyramide bei Gizeh aus 2678257 Kubikmeter Gestein besteht. Ihr Gewicht wäre danach 7231294 Tonnen. Die letzten Ziffern werden ja wohl nicht stimmen, vielleicht aber die ersten.

Um nun dieses gewaltige Gewicht zu veranschaulichen, laden wir das Gestein in Gedanken in Güterwagen. Die Lademenge ist stets an der Seite der Wagen angeschrieben. In der DDR liegt die Ladekapazität in den Grenzen von etwa 15 Tonnen bis etwa 50 Tonnen. Wir borgen uns für unser Gedankenexperiment 20-Tonnen-Güterwagen aus. Ein Zug mit 50 Wagen befördert also 1000 Tonnen. Es wären über 7000 Güterzüge zum Herbeischaffen des Materials für die eine Pyramide nötig; wahrlich eine gewaltige Zahl! Wieviel arme Menschen aber hatten diese Sklavenarbeit zu leisten?

Ein anderes vertrautes Veranschaulichungsmittel ist die Zeit. Wir wissen alle, was eine Sekunde, eine Minute, ein Tag, ein Jahr ist. Die Älteren überblicken einen Zeitraum von mehreren Jahrzehnten. Aber auch Jahrhunderte und Jahrtausende erscheinen übersehbar, wenn wir sie mit den Ereignissen der Geschichte angefüllt denken.
Zieht man die Folge geologischen Formationen heran, über deren Zeitdauer man sich neuerdings ein einigermaßen begründetes Urteil zutraut, dann steht man im Reich der Jahrmillionen. Bis zum Beginn des Tertiärs zurück sind z.B. etwa 60, bis zurück zum Kambrium 540, bis zum Beginn des Präkambriums 1900 Jahrmillionen, wie die Tafel nach J. B. Marble zeigt.

Geologische Formation	Dauer in Jahrmillionen	Alter in Jahrmillionen
Quartär	0.6	0.6
Tertiär	60	60
Kreide	80	140
Jura	35	175
Trias	25	200
Perm	40	240
Karbon	70	310
Devon	40	350
Silur	100	450
Kambrium	90	540
Präkambrium	1360	1900

Eine moderne Theorie der Entstehung der Welt billigt ihr eine Dauer von rund zwölf Milliarden Jahren zu.

Um einen Begriff von dem Umfang der Erdkugel zu geben, pflegt man anzugeben, welche Zeit man zu einer Reise um die Erde braucht. In den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts war ein nach einem gleichnamigen Roman von Jules Verne bearbeitetes Theaterstück "Die Reise um die Welt in 80 Tagen" in aller Munde. Ein modernes Düsenverkehrsflugzeug, etwa die TU 114, hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 800 km pro Stunde. Sie brauchte für die Reise um die Erde nur 50 Stunden, also etwa 2 Tage, wenn ihre Reichweite unbegrenzt wäre und sie nicht zwischenlanden müsste.

Natürlich macht man auch "Reisepläne" zur Veranschaulichung von Entfernungen im Weltraum. Setzen wir wieder die Geschwindigkeit unserer TU 114 voraus, so würde mit ihr eine Reise zum Mond, der durchschnittlich 384000 km von der Erde entfernt ist, gerade 480 Stunden dauern, also 20 Tage. Die Entfernung zwischen Erde und Sonne beträgt rund 150000000 km. Die TU 114 brauchte dafür rund 200000 Stunden. Da ein Jahr angenähert 10000 Stunden hat, dauerte die Reise rund 20 Jahre! -

Das lässt sich fein merken: mit der TU 114 um die Erde in 2 Tagen, zum Mond in 20 Tagen, zur Sonne in 20 Jahren!

Da hat sich schon der Dichter Hebel in seinem "Schatzkästlein" ein anderes Beförderungsmittel ausgedacht:
Ein Kanonier steht auf der Sonne und schießt eine Kanonenkugel ab, ausgerechnet auf dich. Du rennst erschreckt fort. Da tröstet dich der Dichter:
Du hast noch recht viel Zeit, ehe du auszurücken brauchst. Sehen wir einmal selbst zu. Die Geschwindigkeit einer Weltraumrakete, die als Trägerrakete für einen künstlichen Satelliten dient, ist sehr viel größer als die einer Kanonenkugel. Sie beträgt rund 8 km pro Sekunde oder 28800 km in der Stunde. Das "Geschoss" brauchte zur Bewältigung der Strecke etwas mehr als 5000 Stunden, also mehr als ein halbes Jahr, und Johann Peter Hebels Kanonenkugel brauchte noch viel mehr Zeit!

Nun zählen Entfernungen wie die eben genannten im Himmelsraum zu den ganz kleinen. So ist z.B. der Planet Neptun 30 mal so weit von der Sonne entfernt wie die Erde und der neuentdeckte letzte Planet Pluto noch etwas mehr. Diese dreißig Einheiten - ich kann in die Entfernung von der Sonne zur Erde als Einheit für eine Streckendarstellung im Planetenraum annehmen - lesen sich recht einfach, aber nur deswegen, weil die gewählte Einheit selbst so groß ist.

Wenn wir nun aber bis zum nächsten Fixstern gehen, so haben wir eine Reise von etwa 270000 Erdbahnhalbmessern vor uns. Das geht hoch in die Billionen Kilometer. Man ist gezwungen, abermals eine neue Einheit einzuführen, um doch nicht immer mit solchen Zahlenriesen zu operieren. Man rechnet nach Lichtjahren.
In einer Sekunde legt das Licht einen Weg von 300000 km zurück. Von der Sonne bis zu uns braucht das Licht also etwa 8 Minuten (prüfe schnell den Wert!). Wie lang der Weg des Lichtes in einer Stunde, an einem Tage, in einem Jahre ist, kannst du auch feststellen; schwerlich aber wird es dir gelingen, eine rechte Vorstellung damit zu verbinden. Jedenfalls sind wir so zu einer neuen Einheit gekommen, in der gemessen die Fixsternentfernungen wieder ganz passabel aussehen, der nächste Fixstern, Proxima Centauri, den wir von unseren Breiten aus nicht sehen können, ist "nur" etwa 4 Lichtjahre von uns entfernt.

Wir sind eben schon zu Zahlenriesen gekommen, bei denen nur durch einen Kunstgriff der Anschein einer Veranschaulichung erweckt wurde:
Wir nahmen den Maßstab so groß, dass wir uns scheinbar einigermaßen im Bereiche der kleinen Zahlen bewegten. Es gibt nun aber Zahlenriesen, bei denen auch ein solches Verfahren noch versagt. Die im Abschnitt 2 genannte Zahl P des Archimedes, erst recht seine größte Zahl, die 1 mit 80000 Billionen Nullen, würde allen solchen Bemühungen trotzen. Um die außerordentliche Größe wenigstens etwas deutlich zu machen, wollen wir uns nicht ihren Wert, sondern ihre Länge, wenn man sie in unserem Zahlsystem niedergeschrieben denkt, veranschaulichen.

Nehmen wir an, auf den Raum von 1 cm kommen etwa zwei Ziffern. Wie lang ist dann die ganze Zahl? 40000 Billionen Zentimeter oder 400 Milliarden Kilometer, rechnest du aus, eine Strecke von etwa 3000 Erdbahnhalbmessern.

Du wirst jetzt selbst einsehen, die Ausführung unserer vorschnellen Annahme, dass wir uns die Zahl hingeschrieben denken, stößt auf Schwierigkeiten. Nimm an, es könnte jemand, die Erholungspausen eingeschlossen, 100 Nullen in der Minute schreiben.
Dann brächte er, von Anbeginn unserer Zeitrechnung (es sind seitdem etwas über 1 Milliarde Minuten verflossen), eine Zehntelbillion zustande. Es hätten also 800000 Menschen von Beginn unserer Zeitrechnung an dauernd Nullen schreiben müssen! So nur käme man dazu, die Zahl, die Archimedes erdacht hatte, wirklich hinzuschreiben.

Wenn wir nebeneinanderlegen: Eine Strecke von 10 cm Länge, ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge, einen Würfel von 10 cm Kantenlänge, und wir verdoppeln die genannten Längen, so erhalten wir eine Strecke, die noch einmal so groß ist wie die erste, ein Quadrat, das viermal so groß ist wie das erste, einen Würfel, der achtmal so groß ist wie der erste. Dieses verschiedene Verhalten ist der Kern mannigfacher Abschätzungsfehler.

Wieviel Menschen würden auf den Müritzsee gehen, wenn er gefroren ist? Gewiss eine recht große Anzahl, wirst du sagen, vielleicht eine Million. Stellen wir die Menschen so, dass etwa drei auf einen Quadratmeter gehen. Das ist eine ganz bequeme Aufstellung; im Gedränge stehen die Menschen enger beieinander. Der Müritzsee hat einen Flächeninhalt von 115 km^2. Nun ist 1 km^2 = 1000000 m^2; auf ein Feld von einem Quadratkilometer Größe gehen also 3 Millionen Menschen. Auf dem Müritzsee haben demnach mehr als 300 Millionen Menschen Platz, das ist etwa ein Zehntel der gesamten Bevölkerung der Erde!

Noch mehr sind Schätzungsfehler bei Raumgrößen an der Tagesordnung. Man macht sich in der Regel nicht klar, dass eine Zigarre, der man in Länge, Breite und Höhe die doppelten Ausmessungen gibt als einer Vorlage, den achtfachen Inhalt hat, dass man an der Riesenzigarre achtmal so lange rauchen kann.
Als Gulliver bei den Liliputanern war, wurde in einem Vertrag ausgemacht, dass er ebensoviel an Speise und Trank erhalten sollte wie 1728 Liliputaner. Die kleinen Leute hatten nämlich seine Höhe zu der zwölffachen ihrer eigenen bestimmt - und nun überlege selbst, wie sie zu der Zahl im Vertrage gekommen sind!

Wenn dich jemand fragt, wieviel Ziegelsteine oder wieviel Streichholzschachteln auf einen Kubikkilometer gehen, so wirst du gewiss eine viel zu niedrige Zahl angeben. Berechne einmal diese Zahlen; du brauchst ja nur die Seiten dieser Körper auszumessen, durch Multiplikation dreier aneinanderstoßender Kanten den Rauminhalt festzustellen und nun auszurechnen, wie oft dieser Raum in einem Kubikkilometer enthalten ist. -
Die Sonne hat den 109fachen Durchmesser der Erde. Daraus ergibt sich, dass die Oberfläche der Sonne schon 11900 mal so groß, der Rauminhalt gar 1300000 mal so groß ist wie der der Erde.

Ich muss da an eine schöne Rechnung von Leberecht Hühnchen (in Heinrich Seidels so betitelten Geschichten) denken. Hühnchen liegt auf seinem Grundstück und grübelt darüber nach, ob nun auch die Erde unter ihm und die Luft über ihm sein eigen sind.
Nach dem Satz, dass der Flächeninhalt eines Pyramidenquerschnittes sich mit dem Quadrat der Entfernung von der Spitze vergrößert, überschlägt er, dass sein auf der Erde 1300 m^2 großes Grundstück in Sonnenweite (rund 24000 Erdhalbmesser) größer

als der Flächenraum von Deutschland ist, und er dehnt diese Betrachtung dann auf die Größe seines Grundstückes in Fixsternweite aus. Was dabei herauskommt, lies bei Seidel nach oder rechne und phantasiere selbst drauflos!

Das Gewicht eines Körpers erhält man, wenn man seinen Rauminhalt mit einer physikalischen Größe multipliziert, den man das spezifische Gewicht oder die Wichte nennt. Unter Wichte verstehen wir Dichte mal Erdbeschleunigung. Sie gibt an, wieviel mal so schwer ein Kubikdezimeter des Körpers ist wie ein Kubikdezimeter Wasser.
Auch hier sind grobe Schätzungsfehler überaus häufig.

Wie schwer ist eine Korkkugel von einem Meter Halbmesser? Du schätzt vielleicht 5 bis 10 kp, vielleicht etwas mehr. Kork ist ja ein sehr leichter Körper. Seine Wichte ist 0,24 kp/dm^3, d.h., er ist nur etwa den vierten Teil so schwer wie eine gleich große Menge Wasser.
Für die Berechnung des Kugelinhaltes gibt es eine einfache Formel, er ist $\frac{4}{3}\pi r^3$, worin r den Radius bedeutet und π eine Zahl, die uns noch näher beschäftigen wird. Hier genügt, dass ihr Wert etwa 3,14 ist.
Ein Liter Wasser wiegt 1 kp. Ein Liter ist dasselbe wie ein Kubikdezimeter. Ein Kubikmeter hat 1000 Liter. Das Gewicht eines Kubikmeters Wasser beträgt also 1000 kp.
Die Korkkugel wiegt also $\frac{4}{3}\pi \cdot 0,24 \cdot 1000$ kp, das sind, da π etwas größer als 3 ist, ungefähr 1000 kp. Nicht 10 kp wiegt die Korkkugel, sondern reichlich hundertmal so viel.

Hier noch ein paar Aufgaben, die du selbst durchführen sollst, um den Unterschied zwischen oberflächlicher Schätzung und rechnerischem Überschlag zu erkennen; du kannst damit deine Freunde aufs Glatteis führen:

Wie groß ist die Seite eines Goldwürfels, der ebensoviel wiegt wie alle Menschen auf der Erde zusammen? - Nimm an, dass das Durchschnittsgewicht jedes der rund 3 Milliarden Menschen 50 kp ist! Die Wichte von Gold ist etwas über 19 kp/dm^3.

Wie schwer ist die Luft in einem Saal von 12 m Breite, 30 m Länge und 8 m Höhe? Die Wichte der Luft ist 0,001293 kp/dm^3 (bei 0°C und 760 Torr).

Man kann nun das Anwachsen von Flächen- und Raumgrößen zur Veranschaulichung großer Zahlen ausnutzen. Wir stießen bei Verwendung von Strecken schon bei Größen von einer Milliarde auf Schwierigkeiten. Wir kamen zu Strecken, die unsere Erfahrungen übersteigen. Anders, wenn ich Raumgrößen heranziehe. Veranschauliche ich die 1 durch einen Würfel von 1 mm^3, so wird 10 durch eine Säule aus solchen kleinen Würfeln von 1 cm Höhe, 100 durch eine Platte von 1 cm Länge und 1 cm Breite dargestellt, 10 solcher Platten liefern wieder einen Würfel, der nun die Zahl 1000 darstellt. Aus den Kubikzentimetern kann ich mir ein Kubikdezimeter aufbauen.
Es stellt bereits die Zahl 1000000 dar. Ein Kubikmeter würde eine Milliarde darstellen, ein Kubikkilometer (um sich eine solche Größe vorzustellen, muss man schon zu Bergen seine Zuflucht nehmen) würde eine Trillion darstellen.

Bei dieser räumlichen Veranschaulichung können wir überdies mit Leichtigkeit in noch

größere Zahlengebiete übergehen, wenn wir statt der irdischen Verhältnisse Größen des Weltraumes heranziehen. Die Rauminhalte der Erde (wieviel Kubikkilometer sind das?), der Sonne (wieviel sind das?), der Raum, der unserem Planetensystem zukommt, usf. reichen zur Veranschaulichung ungleich größerer Zahlen als der Trillionen aus.
Und doch sind auch hier Grenzen gezogen. Jene Annahmen, die Archimedes über die Größe des Weltenraumes machte, oder etwa die Tatsache, dass nach heutiger Ansicht die weitesten Objekte des Sternhimmels einige Millionen Lichtjahre von uns entfernt sind, deuten diese Grenzen an.

4 Etwas vom Rechnen mit großen Zahlen

Man kann das Addieren als Abkürzung des Weiterzählens betrachten. Danach würde 7 + 3 bedeuten, es soll von 7 aus um 3 weitergezählt werden, also 8, 9, 10. Tatsächlich erledigt man nicht selten Additionen kleiner Zahlen durch Weiterzählen. Mancher Rechner wird z.B. in der Aufgabe 1 die Zehntel addieren, indem er von unten nach oben zählt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Die fetten Zahlen, die er etwas betont, geben die Teilergebnisse an.

Aufgabe 1	Aufgabe 2
0,10 Mark	0,15 Mark
0,20 Mark	0,25 Mark
0,25 Mark	0,95 Mark
0,15 Mark	0,20 Mark
0,30 Mark	0,35 Mark
0,20 Mark	0,85 Mark
0,10 Mark	1,20 Mark
0,05 Mark	0,75 Mark
0,20 Mark	1,05 Mark
1,55 Mark	5,75 Mark

Wie das Addieren als Abkürzen des Weiterzählens, so kann man das Subtrahieren als Abkürzung des Rückwärtszählens und das Multiplizieren als Abkürzung des Addierens gleicher Summanden ansehen. In der Aufgabe 2 wird man z.B. die Fünfen der letzten Stelle einfach zählen und schließen $7 \cdot 5 = 35$.
Das Dividieren schließlich wäre danach eine Abkürzung einer mehrmaligen Subtraktion.
-

Man kann die Erklärung der Rechenarten auch anders geben; unsere Fassung ist auch nur für ganze Zahlen berechnet. Aber ich will hier ja kein Rechenbuch schreiben.
Wir wollen nun zunächst den Nachdruck auf das Wort "Abkürzung" legen. Es ist ja klar, wenn ich die Aufgabe 7388 + 5149 wirklich in der Weise rechnen wollte, dass ich von 7388 um 5149 weiterzählte, so würde das recht langweilig werden, und obendrein liefe ich Gefahr, mich zu verzählen. Ich muss nämlich genau aufpassen, da ich, näher betrachtet, zwei Zählungen gleichzeitig vornehme.
Wenn es sich gar um noch größere Zahlen handelt, um Millionen und Billionen, dann würde ich, wie unsere früheren Überlegungen zeigen, Jahre brauchen und oft doch nicht fertig werden.

Es gibt da eine nette Geschichte: Karlchen bekommt in der Schule die Aufgabe: Wie oft kann man 3 von einer Million abziehen? Er setzt sich zur gewohnten Stunde an die Arbeit.
Nur langsam kommt er vorwärts. Da greift Mutter ein und hilft.
Und als der Vater von der Arbeit heimkommt, hilft auch er. Die Geschwister, Onkel und Tanten werden mobil gemacht, sie arbeiten, bis ihnen die Augen vor Müdigkeit zufallen - und dann schimpfen sie am nächsten Tag auf den unvernünftigen Lehrer, der kleinen Kindern solche Aufgaben stellt!

Ein Hamburger Mathematiker, H. Schubert, hat ausgerechnet, dass am 29. April 1902 um 10 Uhr 40 Minuten gerade eine Milliarde Minuten seit dem Beginn unserer Zeitrechnung verflossen war. Es ist das ein sehr gutes (von uns schon benutztes) Beispiel zur Veranschaulichung der Zahl 1000000000.
Ein Witzblatt machte nun bei der Meldung davon die sehr geistreiche Bemerkung: "Wieviel Tausende von Minuten muss dieser Gelehrte zu verlieren haben?" Das Blatt schien zu glauben, dass es sich um das Ergebnis langwieriger Zählungen und Berechnungen handelte. Es ist im gleichen Irrtum wie die brave Familie von oben:

Dividiert man eine Milliarde durch die Anzahl der Minuten eines Jahres und wertet den Rest aus, so hat man das gewünschte Ergebnis.[4] Worauf es Schubert überhaupt ankam, einen anschaulichen Begriff von der Größe einer Milliarde zu geben, das hatte jener Spötter im Witzblatt nicht verstanden.

Ich will nun hier nicht weiter auf die vier Grundrechenarten mit großen Zahlen eingehen. Du wirst keine Schwierigkeiten haben, solche Rechnungen auszuführen, wenn sie auch Zeit und Sorgfalt erfordern. In der Praxis greift man vielfach zu besonderen Rechenmitteln, deren wichtigstes die Rechenmaschinen sind, von den "Registrierkassen" der Kaufläden über die Multiplikationsmaschinen, Rechenstäbe bis hin zu den modernsten elektronischen Großapparaten.

Die modernen Rechenautomaten haben uns schon im 2. Abschnitt dieses Büchleins kurz beschäftigt, denn ihretwegen ist das Dualsystem für uns so wichtig. An dieser Stelle wollen wir uns vergegenwärtigen, wie groß die Hilfe ist, die diese Rechenautomaten den Menschen leisten.

Vor etwa 20 Jahren begann die stürmische Entwicklung auf dem Gebiet dieser Maschinen, hervorgerufen durch die ständig wachsenden Anforderungen aus dem Bereich der Statistik, des Verkehrs, der Wirtschaft. Howard Aiken beschäftigte sich seit 1936 theoretisch mit der Konstruktion der Relais-Ziffernrechenmaschine "Mark I", die nach seiner Anleitung 1944 gebaut wurde.
Sie brauchte zur Addition oder Subtraktion zweier 23stelliger Zahlen nur 0,3 Sekunden. Du kannst ja mal mit der Stoppuhr feststellen, wie lange das bei dir dauert! - Aber schon während des Baus der "Mark I", die elektromagnetische Relais enthält, konstruierte man in den USA die erste elektronische Ziffernrechenmaschine "ENIAC".
Die elektronischen Relais sind den elektromagnetischen in bezug auf Umschaltgeschwindigkeit weit überlegen. Die ENIAC konnte in einer Sekunde 5000 Additionen oder Subtraktionen ausführen. Die "BESM", die 1953 in der UdSSR entwickelt wurde, bringt es auf 10000 Operationen in der Sekunde. Heute gibt es bereits einige Rechenautomaten, die über eine Million Rechenoperationen in der Sekunde ausführen!

Das sind für uns unvorstellbare Rechengeschwindigkeiten. Aber sie allein genügen noch nicht, um die Maschine "wirtschaftlich" zu machen. Du bist sicher gut in Mathematik, nicht wahr?

[4] Natürlich musste er auch die Schaltjahre u. dgl. noch berücksichtigen. Schubert hat übrigens, wie von W. Ahrens, einem Magdeburger Mathematiklehrer, berichtet wurde, an das Blatt geschrieben und gesagt, er habe nur 15 Minuten zu der Berechnung gebraucht.

Da hast du schon manchmal erlebt, dass du in der Mathematikstunde tatenlos auf deinem Platz saßest, weil deine Klassenkameraden mit der Aufgabe noch nicht fertig waren. Sicher hat dir dein Mathematiklehrer dann eine besonders reizvolle Zusatzaufgabe gegeben. Du brauchtest eben mehr "geistiges Futter" als die anderen, weil du so schnell rechnen konntest.

Wieviel mehr noch kann ein Rechenautomat verarbeiten! Vor 20 Jahren brauchten die Menschen für das Eingeben der Programme mit der Hand und mit Hilfe von Verteilertafeln und von Schaltern so viel Zeit, dass sich die große Rechengeschwindigkeit der Maschinen gar nicht auswirken konnte.
J. von Neumann beseitigte diese Schwierigkeit, indem er das Programm in den Speicher der Maschine eingab, in das "Gedächtnis" des Automaten, von wo es die Maschine selbsttätig wieder entnehmen kann. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Programmeingabe und der Resultatausgabe wurde dadurch so sehr erhöht, dass sich die große Rechengeschwindigkeit endlich lohnte, die bis dahin gar nicht zur Geltung kam.

Wozu braucht man denn diese unvorstellbaren Rechengeschwindigkeiten, 10000 Operationen in der Sekunde? Zwei Beispiele sollen uns das zeigen.

Wir sind so sehr daran gewöhnt, durch Zeitung, Rundfunk und Fernsehen die tägliche Wettervorhersage zu erhalten, dass wir gar nicht auf den Gedanken kommen, es könne etwas Außerordentliches dahinterstecken. Und doch ist es so. Ein dichtes Beobachtungsnetz meteorologischer Stationen liefert die Vorarbeit:
Messwerte über Temperatur, Luftdruck, Bewölkung, Wind- und Niederschlagsverhältnisse. Diese Messwerte gehen in die Rechnung ein, in ein System von Gleichungen, zu dessen Lösung mehr als 10^8 Operationen durchzuführen sind!

Setzte man ein großes Rechenbüro mit mechanischen Tischrechenmaschinen zur Lösung der Aufgabe ein, das Wetter von morgen vorherzusagen, so bekäme man das Ergebnis in etwas mehr als einer Woche heraus - es wäre eine sinnlose Arbeit. Dagegen liefern elektronische Rechenmaschinen die Ergebnisse in zwei bis drei Stunden.

Künstliche Satelliten brauchen, um der Anziehungskraft der Erde das Gleichgewicht halten zu können und nicht herunterzufallen, eine Fluggeschwindigkeit von rund 8 km in der Sekunde, eine Venus- oder Marssonde, die sogar die Anziehungskraft der Erde überwinden muss, über 11 km pro Sekunde.
Weicht solch künstlicher Himmelskörper nur ein wenig von dem vorgeschriebenen Kurs ab, so kann sich bei der großen Fluggeschwindigkeit seine Bahn wesentlich verändern. Damit kann aber das ganze Programm gefährdet werden. Daher überwacht eine Steuerrechenmaschine den Kurs des künstlichen Weltraumkörpers, der ständig Radiosignale aussendet.
Wird der Kurs nur einen Augenblick nicht eingehalten, reagiert die Steuerrechenmaschine sofort auf die Abweichung, berechnet in Bruchteilen einer Sekunde die nötigen Korrekturen und funkt sie an den künstlichen Himmelskörper, dessen Apparaturen die Befehle sofort ausführen.
Die Maschine ist viel reaktionsschneller als ein Mensch; darum werden auch bemannte Satelliten von der Erde aus durch Maschinen gesteuert.

Nach diesem kleinen Abstecher ins Reich der Rechenautomaten wollen wir zu unseren Rechnungen mit großen Zahlen zurückkehren.

Nicht selten kann man verhältnismäßig umfangreiche Rechnungen, die schnell auf große Zahlen führen, durch Überlegung sehr einfach gestalten. Dafür will ich wenigsten zwei Beispiele geben, wir hören später noch mehr davon.
Wieder eine Geschichte, diesmal aus der Kindheit des großen Mathematikers Carl Friedrich Gauß. Er besuchte in seiner Jugend die Katharinenschule in Braunschweig. Der Lehrer stellte einmal, um einen Teil der hundert Schüler verschiedensten Alters zu beschäftigen, die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 40 zu addieren.

Kaum hat er das getan, als schon der kleine Gauß vorkommt, die Tafel auf den Tisch des Lehrers legt: "Ligget se!".
Der Lehrer denkt wie üblich an die wenig ruhmvolle Wahl zwischen Dummheit und Faulheit. Und doch ist das Ergebnis richtig: Der kleine Mathematikus hat überlegt, dass 1 und 40, 2 und 59, 3 und 38 usf. jedesmal 41 ergibt.
Da 20 solcher Paare vorhanden sind, erhält er als Ergebnis $20 \cdot 41 = 820$.

Man sieht leicht, dass man das nicht bloß mit Zahlenfolgen so machen kann, die mit 1 beginnen, sondern auch dann, wenn sie mit irgendeiner anderen Zahl anfangen. Auch braucht es sich nicht immer um aufeinanderfolgende Zahlen zu handeln. Ich stelle z.B. die Aufgabe, die ungeraden Zahlen von 1001 bis 1999 zu addieren. Ich erhalte 250 Paare, deren jedes die Summe 3000 hat; das Ergebnis ist also 750000.

Das Verfahren führt immer zum Ziel, wenn die Zahlen eine sogenannte arithmetische Folge bilden, d.h., wenn eine Zahl der Folge immer um den gleichen Wert größer ist als die vorhergehende. (Berechne z.B. die Summe der geraden Zahlen von 1200 bis 1500!)

Es wurde jemand die Aufgabe gestellt, die Quersumme aller Zahlen von 1 bis zu einer Milliarde zu bilden. Er überlegte so:
999999999 hat die Quersumme 81. Ebenso hat $1 + 999999998$ die Quersumme 81, weiter $2 + 999999997$ usf. Das sind 500000000 Zahlenpaare. Also ist die Quersumme von 1 bis 999999999 und dazu noch die von einer Milliarde

$$500000000 \cdot 81 + 1 = 40500000001$$

Wir sprachen bisher von der genauen Durchführung von Rechnungen mit großen Zahlen. Weit häufiger sind im praktischen Leben Überschlagsrechnungen.

Der Ingenieur, der Meister im Betrieb, der Forstmann im Walde und viele, viele andere sparen sich heute Zeit und Arbeit mit Hilfe des Rechenstabes. " Rechenstabgenauigkeit" bedeutet, dass nur die ersten zwei, höchstens etwa bei bestimmten Fällen drei Stellen genau ermittelt werden können; die nächste schätzt man, die weiteren rundet man.
In der Praxis genügt Rechenstabgenauigkeit sehr oft, die bedeutungslosen Abweichungen vom genauen Ergebnis nimmt man gern in Kauf, dafür geht es eben schnell. Allerdings muss man von vornherein das Endergebnis grob schätzen, um die Größenordnung zu ermitteln. Die Arbeit mit dem Rechenstab erfolgt nämlich völlig ohne Beachtung der Stellenwerte, nur die Ziffernfolge ist entscheidend. Das Verfahren ist das gleiche,

ob es sich um die Aufgabe

$$\begin{array}{rl} 17,3 \cdot 0,0466 \cdot 9,81 & \text{oder um} \\ 173 \cdot 46,6 \cdot 98,1 & \text{oder um} \\ 173000 \cdot 0,0000466 \cdot 0,0981 & \ldots \end{array}$$

handelt. Der Rechenstab liefert als Ergebnis stets nur die Ziffernfolge 817 - wobei die letzte Ziffer schon geschätzt ist - ohne Stellenwerte. Ehe du mit dem Rechenstab zu arbeiten beginnst, machst du daher folgenden Überschlag, falls es sich um das erste der drei Beispiele handelt:

$$1,73 \cdot 10^1 \cdot 4,66 \cdot 10^{-2} \cdot 9,81 = 1,73 \cdot 4,66 \cdot 9,81 \cdot 10^1 \cdot 10^{-2} \approx 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10^{-1} = 10$$

Dein Ergebnis ist also beim ersten Beispiel 8,17. Es sei dir überlassen, den Überschlag für die anderen beiden Beispiele durchzuführen.

Bei der Rechenstabarbeit begnügt man sich mit einer Annäherung, die auf etwa drei Stellen richtig ist. Manchmal ist man bei einer Näherungsrechnung sogar schon zufrieden, wenn man nur eine erste Stelle oder sogar nur ihren Stellenwert übersieht, wenn man also nur die Größenordnung richtig bestimmen kann. Ein Beispiel:

Denke dir um den Äquator einen Strick gelegt. Wenn er straff angezogen wird, bleibt noch ein Ende von 10 m übrig. Dieses Ende soll man dazu benutzen, den Strick überall ein wenig zu lockern.
Die Frage ist: Kann zwischen der Erde und dem also gelockerten Strick eine fliege durchkriechen oder nicht?

Du wirst zunächst nach dem Gefühl die Frage kräftig verneinen. Der Überschuss von 10 m, auf den ganzen Äquator (es waren ja, wie wir hörten, 40000000 m) verteilt, wird nur einen verschwindend kleinen Betrag ergeben.
Sehen wir genauer zu. Der Abstand des gelockerten Stricks habe die uns unbekannte Größe x. Der Erdumfang ist $2\pi \cdot R$, wobei R für den Erdhalbmesser steht und π die uns bereits bekannte Zahl ist, die das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser angibt; ihr Wert ist ungefähr 3,14.
Der Radius des größeren Kreises, der dem Strick zukommt, ist $R+x$, sein Umfang also $2\pi \cdot (R+x)$. Die Differenz beider Kreisumfänge ist also $2\pi \cdot (R+x) - 2\pi \cdot R$, das ist aber $2\pi \cdot x$. Andererseits sind das unsere 10 m. Da 2π eine Kleinigkeit mehr als 6 ist, ergibt sich x ungefähr zu $1\frac{1}{2}$ m. Das Zahlenvorstellungsvermögen hat getrogen.

Ich will das Problem in einer etwas anderen Form vorlegen, dann wirst du weit eher auf das richtige Ergebnis kommen. Ein Mensch geht auf dem Äquator um die Erde (praktisch ist auch das natürlich nicht ausführbar). Um wieviel ist der Weg, den der Kopf zurücklegt, größer als der, den die Füße zurücklegen?
Es handelt sich hier im Grunde um die gleiche Aufgabe wie oben, nur ist jetzt die vorhin gesuchte Größe x gegeben und die dort gegebene Größe 10 m gesucht. Es ist klar, dass der Kopf nicht einige tausend Meter mehr zurücklegen wird als die Beine.
Eben haben wir noch gerechnet, wenn auch überall mit Abschätzung. Nun noch ein Beispiel, bei dem es lediglich auf eine kleine Überlegung ankommt. Man erzählt, dass

jemand dem großen Philosophen Kant, als er noch ein Knabe war, die Frage vorgelegt habe, ob wohl in dem großen Walde, durch den man gerade ging, zwei Bäume zu finden wären, die die gleiche Zahl von Blättern haben. Man könnte auch etwa fragen, ob wohl in der Welt zwei Menschen umherlaufen, die gleich viel Haare auf dem Kopfe haben.

Um die Antwort zu geben, braucht man durchaus nicht die Blätter auf all den Bäumen, die Haare auf all den Köpfen zu zählen. Es genügt zu wissen, wie groß die Höchstzahl der Blätter eines Baumes, die Höchstzahl der Haare auf dem Kopf eines Menschen ist, beides natürlich nur der Größenordnung nach.
Da z.B. die Anzahl der Haare auf dem Kopf eines Menschen höchstens 200000 beträgt, kann man sicher sein, dass unter 200001 Menschen mindestens zwei die gleiche Anzahl Haare ihr eigen nennen. Diese einzige Überschlagsbestimmung genügt, um die obige Frage zu beantworten.
Bei der Frage nach den Bäumen versuche nun selbst die Antwort zu geben, du musst allerdings auch hier eine Überschlagszahl für die Blätter an den Bäumen und für die Bäume in einem großen Walde haben. Eins will ich dir sagen. Man rechnet auf einen ausgewachsenen Baum bei der Eiche 2000000 Blätter, bei der Kiefer 10000000 Nadeln.

5 Die größte Zahl, die mit drei Ziffern geschrieben werden kann

Du hast gewiss schon von der Geschichte gehört, wie der Erfinder des Schachspiels sich als Belohnung die Summe von Weizenkörner ausbat, die herauskommt, wenn man auf das erste Feld eines Schachbrettes 1 Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte 8 usf., immer auf ein Feld doppelt so viel wie auf das vorhergehende.
Das sieht recht bescheiden aus, und auch der König, dem diese Bitte vorgetragen wurde, ahnte nicht, um welche gewaltige Menge es sich handelte. Auf dem letzten Felde liegt eine Anzahl von Weizenkörnern, die durch ein Produkt aus 63 Faktoren 2 dargestellt wird.
Diese Schreibweise ist recht langweilig. Man kürzt das 2^{63} ab - die Potenzschreibweise ist dir ja schon vom Abschnitt 2 her vertraut. Ich will hier eine Tabelle einschalten, die die ersten vierzig Potenzen von 2 umfasst:

Tabelle der Potenzen von 2

Exponent	Potenz	Exponent	Potenz
1	2	21	2 097 152
2	4	22	4 194 304
3	8	23	8 388 608
4	16	24	16 777 216
5	32	25	33 554 432
6	64	26	67 108 864
7	128	27	134 217 728
8	256	28	268 435 456
9	512	29	536 870 912
10	1 024	30	1 073 741 824
11	2 048	31	2 147 483 648
12	4 096	32	4 294 967 296
13	8 192	33	8 589 934 592
14	16 384	34	17 179 869 184
15	32 768	35	34 359 738 368
16	65 536	36	68 719 467 736
17	131 072	37	137 438 953 472
18	262 144	38	274 877 906 944
19	524 288	39	549 755 813 888
20	1 048 576	40	1 099 511 627 776

Jetzt wirst du, obwohl diese Tabelle nicht bis zur 63. Potenz geht, leicht beantworten können, wieviel Weizenkörner auf dem Felde liegen, du brauchst nur die 40. Potenz mit der 23. zu multiplizieren.
Zu welchen ungeheuren Mengen man damit kommt, erkennst du, wenn du jetzt die Weizenkörner in Säcken, Wagenladungen usf. errechnest. Das sei dir selbst überlassen.

Man nehme ein genügend großes Stück Papier von, sagen wir, 1/10 mm Dicke. Wir

falten es einmal, ein zweites Mal, ein drittes Mal usf. bis zum vierzigsten Mal. Wie dick ist jetzt die Papierschicht?
Nun, wie die Tabelle lehrt, 109951162777,6 mm. Das sind aber mehr als 100000 km, also 2,5 Erdäquatorlängen.

Die Potenzen der Zahl 2 bis zu 2^{400} hat J. Molterer ausgerechnet. Ich will die Zahl 2^{400} hierhin schreiben, das wird besser als Worte zeigen, um welche Zahlenriesen es sich bei solchen doch höchst harmlos aussehenden Potenzen handelt.
Was hier in mehreren Reihen steht, musst du dir hintereinander geschrieben denken.

2 582 249 878 086 908 589 655 919 172 003 011 874 329 705 792 829 223 512 830 659 356 540 647 622 016 841 194 629 645 353 280 137 831 435 903 171 972 747 493 376 $\approx 2{,}6 \cdot 10^{120}$.

Für dieses rasche Anwachsen der Potenzen mit steigendem Exponenten gibt schon das Altertum ergötzliche Beispiele. In dem ältesten Rechenbuch, das wir kennen (ein gewisser Ahmes hat es um 1700 v.u.Z. geschrieben), steht folgende Aufgabe:
7 Personen besitzen 7 Katzen, jede Katze frisst 7 Mäuse, jede Maus frisst 7 Ähren Gerste, aus jeder Gerstenähre können 7 Maß Getreide entstehen. Wieviel Maß Getreide sind das insgesamt?
In Potenzform geschrieben heißt die gesuchte Zahl 7^5. Du wirst sie selbst ausrechnen können.

Die am häufigsten bei der Angabe von Größenordnungen benutzte Basis ist natürlich die 10, die Basis unseres Dezimalsystems. Du kennst schon die Masse der Erde (etwa $6 \cdot 10^{27}$ g); die der Sonne ist $2 \cdot 10^{33}$ g. (Du kannst dir danach ausrechnen, wieviel Erdmassen die Sonnenmasse ergeben!)
Für die Masse eines Milchstraßensystems, einer "Galaxis", nimmt man heute etwa 10^{11} Sonnenmassen an. Von solchen Milchstraßensystemen soll es ungefähr 10^{12} geben. Noch einmal: Alles das sind nur Näherungszahlen. Setzt man die Anzahl der Protonen, d.h. der kleinsten materiellen Bausteine, in 1 g Masse mit $6 \cdot 10^{23}$ an, so ergibt sich für die Gesamtzahl der Protonen im Weltall ein Wert von

$$6 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{11} \cdot 10^{12}$$

Erinnern wir uns der Bedeutung des Potenzbegriffes, so finden wir für die Anzahl der Faktoren 10 insgesamt 23 + 33 + 11 + 12 = 79, und wenn wir 10 statt $6 \cdot 2 = 12$ schreiben - mit Kleinigkeiten geben wir uns bei dieser höchst problematischen Überschlagsrechnung nicht ab -, so kommen wir auf 10^{90} Protonen.
Es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, dass jene Staubkornzahl, die Archimedes ausrechnete, nämlich

$$10000000 \cdot 1000000000^8 = 10^7 \cdot (10^9)^8 = 10^7 \cdot 10^{72} = 10^{79}$$

beinahe den gleichen Wert liefert. Wie die Potenzrechnung in der obigen Zeile zu begründen ist, wirst du selbst erklären können.

Nun eine schöne Geschichte, die zunächst zeigt, dass man vorsichtig im Überlegen sein

muss, die uns dann aber auf die Bedeutung des Potenzbegriffes für die Lebewelt führen wird.
Jeder Mensch hat 2 Eltern, 4 Großeltern, 8 Urgroßeltern usf. Geht man 40 Generationen zurück, also etwa 1200 Jahre, so hat jeder Mensch 2^{40} oder nach unserer Tabelle 1 099 611 627 776 Vorfahren. Also ist es falsch, dass damals, etwa zur Zeit Karls des Großen, weniger Leute lebten als heute; im Gegenteil: jedem Menschen von heute entsprechen in jenen Zeiten mehr als eine Billion Leute, es gab also damals eine Billion mal so viel Menschen wie heute; stimmt's?

Du wirst den Trugschluss schnell gefunden haben. Aber kehren wir den Spieß um. Es gibt Spaltpilze, Bakterien, die unter günstigen Bedingungen so schnell heranwachsen, dass sie sich nach zwei Stunden schon wieder in zwei Teile teilen. Jeder Teil vermehrt sich in gleicher Weise. Nach 24 Stunden sind also aus einem Spaltpilz schon 2^{12}, nach zwei Tagen 2^{24} Spaltpilze geworden.
Das Anwachsen der Zahl wird nun schnell immer gewaltiger. Es gehört gar nicht viel Rechnung dazu, an Hand unserer Tabelle zu bestimmen, wie lange es dauern würde, bis so viele Bakterien durch fortgesetzte Spaltung entstanden wären, dass sie trotz ihrer Kleinheit in regelmäßiger Schicht die ganze Erde überdecken würden.

Die Vogelmiere produziert dreimal im Jahr 15000 Samen, aus einer Pflanze könnten also im Jahre $15000^3 = 3375$ Milliarden Pflanzen hervorgehen.
Der Hering erzeugt 30000 Eier, der Karpfen über 1 Million, der Dorsch 4 bis 6 Millionen, der Bandwurm etwa 42 Millionen, der Spulwurm etwa 64 Millionen Eier. Was sind dagegen die Hasen für faule Geschöpfe!

Auch bei langsamer Vermehrung einer Tierart würde doch in verhältnismäßig kurzer Zeit ein Landgebiet geradezu überflutet werden, wenn nicht eben der Kampf ums Dasein bald Schranken aufrichtete. Fehlen einmal für eine Zeit diese Hemmungen, dann beobachten wir ungeheure Vermehrungen.
Von den Verheerungen der Heuschreckenschwärme, die beim Anflug die Sonne verdunkeln, der Raupenzüge, die dicht an dicht gewaltige Flächen bedecken, hast du sicher gehört, und die verderbliche Ausbreitung von Epidemien ist auch nur durch die ins Riesenhafte gewachsene Anzahl gewisser Krankheitsträger zu erklären.

Du bist vielleicht schon einmal einem Problem begegnet, das auf den ersten Blick mit unserem Potenzbegriff nichts zu tun zu haben scheint:
Auf welche Summe wäre ein Pfennig angewachsen, wenn man ihn beim Beginn unserer Zeitrechnung auf Zinsen gelegt hätte? Hättest du ihn auf eine Sparkasse getragen, wie wir sie heute überall haben, so hätte er keinen Pfennig Zinsen gebracht. Pfennige verzinst man da nicht, nur volle Mark. Wir wollen ihn aber doch verzinsen. Dann bringt er jährlich zu 5% $\frac{5}{100}$ Pfennig, also in 1960 Jahren $\frac{5}{100}$ Pf $\cdot$ 1960 oder 98,- M.

Ganz anders aber, wenn Zinseszinsen zugelassen werden, wenn mit anderen Worten die Zinsen jährlich zum Kapital geschlagen und nun schon im nächsten Jahre mit verzinst werden. So machen es z.B. die Sparkassen.
Du wirst sagen: Nun, wenn Zinseszinsen zugelassen werden, dann wird es eine Kleinigkeit mehr werden als eben. Sehen wir zu!

Am Ende des ersten Jahres haben wir 1 Pf + 0,05 Pf = 1,05 Pf. Die Zinsen im zweiten Jahr betragen 1,05 Pf $\cdot$ 0,05. Das im zweiten Jahr entstandene Kapital ist also 1,05 Pf + 1,05 Pf $\cdot$ 0,05, d.h. 1,05(1 + 0,05) Pf oder $1{,}05^2$ Pf.
Das ist das im dritten Jahr zu verzinsende Kapital. Mit den Zinsen wächst es, wie man ebenso sieht, mit dem Ende dieses Jahres auf $1{,}05^3$ Pf an, nach vier Jahren auf $1{,}05^4$ Pf, nach 1960 Jahren auf $1{,}05^{1960}$ Pf. Du siehst jetzt, dass wir es mit einer Aufgabe der Potenzrechnung zu tun haben.
Man benutzt, um solche Potenzen auszurechnen, Logarithmen. Wir wollen dieses nützliche, aber nicht in zwei Zeilen zu erklärende Hilfsmittel hier nicht anwenden, vielmehr auf andere Weise uns einen ungefähren Überschlag über das Ergebnis verschaffen.

Wir stellen leicht fest, dass schon $1{,}05^{14}$ größer als 2 ist. Der auf Zinseszins gelegte Pfennig verdoppelt sich also nach etwas weniger als 14 Jahren. Nehmen wir näherungsweise an, nach 14 Jahren. Dann sind also nach 28 Jahren aus dem Pfennig schon 4, nach 3 $\cdot$ 14 oder 42 Jahren schon 8 Pfennig geworden. Nun ist 1960 : 14 = 140. Heute ist also der Pfennig jedenfalls auf mehr als 2^{140} Pfennige angewachsen.
Das ist ganz außerordentlich viel mehr, als wenn wir den Pfennig auf einfache Zinsen legen. Zehn Milliarden Mark sind 1 Billion Pfennige. Das sind, wie ein Blick auf die Tabelle lehrt, etwa 2^{40} Pfennige.
Jene Summe ist aber noch 2^{100} mal so groß, es ist, wenn du es genau wissen willst, eine mit 43 Ziffern zu schreibende Zahl. Es handelt sich um Summen, die alle auf Erden vorhandenen Geldsummen weit überschreiten. Du magst selbst mit einer Veranschaulichung dieser Summe einen Versuch machen.

Unsere Rechnung ist natürlich bedeutungslos. Es gab im Jahre 0 keine Mark und keine derartigen Sparkassen. Es kam uns ja auch nur darauf an zu zeigen: Auch wenn die Basis sehr wenig über 1 ist, wachsen die Potenzen mit dem Exponenten ins Riesenhafte.

Die Antwort auf die Frage, die unsere Überschrift stellt, wird nach dem, was wir bisher erfahren haben, nicht lauten 999, wie du vielleicht vorschnell gedacht hast, sondern wahrscheinlich 9^{99}; denn wenn ich die Wahl habe zwischen 99^9 und 9^{99}, so ist sofort einzusehen, dass die letzte Zahl weit größer ist als die erste.
Und doch bin ich mit dieser Antwort nicht zufrieden. Die Zahl 9^9 ist jedenfalls größer als 99, ihr Wert lässt sich durch wirkliches Ausrechnen genau bestimmen; sie heißt 387 420 489. Ich erhalte also eine weit größere mit drei Ziffern geschriebene Zahl als eben, wenn ich 9 in diese Potenz erhebe.

Ich werde das 9^{9^9} schreiben können. Genauer wäre die Schreibweise $9^{(9^9)}$, damit nicht eine Verwechslung mit $(9^9)^9$ eintritt. Diese zuletzt genannte Zahl bedeutet ein Produkt aus 9 Faktoren, deren jeder wieder aus neun Faktoren 9 besteht. Insgesamt handelt es sich also um ein Produkt aus 9 $\cdot$ 9 oder 81 Faktoren 9. Diese Zahl ist also kleiner als die vorhin erwähnte Potenz 9^{99}; sie hat "nur" 78 Ziffern.

Ich will noch einiges von der Zahl 9^{9^9} erzählen. Die Zahl 9^{9^9} hat 369693100, also etwa eine drittel Milliarde Ziffern, sie beginnt mit den Ziffern 428 124 773 175 747 048 036 987 115 930 563 521 339 055 482 241 443 514 174 753, die letzten Ziffern sind 24 178 799 359 681 422 627 177 289. Was dazwischen liegt, ist unbekannt.

Wenn man die Zahl einigermaßen lesbar auf einen Streifen Papier druckte, so hätte er eine Länge von 1200 bis 1800 km. Druckte man die Zahl hingegen in Bücher, etwa so, dass auf die Seite 14000 Ziffern gehen, so brauchte man bei einem Umfang von 800 Seiten 33 Bände.

In einem 1874 erschienenen Buch von Krönig mit dem Titel "Das Dasein Gottes" wird die Folge der Zahlen 2^2, 3^{3^3}, $4^{4^{4^4}}$ behandelt.
Von der zuletzt genannten Zahl sagt der Verfasser:

"Man denke sich eine gerade Linie von solcher Länge, dass ein Lichtstrahl eine Quintillion von Jahren gebrauchen würde. Ferner denke man sich mit dieser Linie als Halbmesser eine Kugel beschrieben und den Inhalt mit Druckerschwärze angefüllt. Diese letztere würde nicht hinreichen, um jene Zahl mit den kleinsten existierenden Lettern leserlich zu drucken."

H. Maurer hat sich mit diesen Zahlen, die er Abundanzen nennt, vom zahlentheoretischen Standpunkt aus beschäftigt. Bezeichnet man x^{x^x} zur Abkürzung mit ${}^3x$ und führt allgemein die Bezeichnung ${}^nx$ ein durch $x^{{}^{n-1}x}$, dann zeigt er, wie man für ganzzahliges x und n die letzten Stellen dieser Zahlenriesen berechnen kann.
So endet z.B. ^{29} mit 89, ^{39} mit 289, ^{49} mit 5289, ^{59} mit 45289 usf. ${}^{10}9$ mit 9 392 745 289. Die letzten Ziffern kehren also in den nächsthöheren Abundanzen wieder, und zwar werden in diesem Falle von der n-ten Abundanz in der $(n+1)$-ten Abundanz die letzten n Stellen übernommen und um eine weitere vermehrt, die an die Nachfolger mit weitergegeben wird. Bei anderen Abundanzen gelten ähnliche Beziehungen.

Nach dieser Wanderung in das Reich der Abundanzen kehren wir noch einmal zurück zu unserem Ausgangspunkt, den Potenzen von 2. Der Erfinder des Schachspiels erbat ja von dem König nicht die Weizenkörner, die auf dem letzten Felde des Schachbrettes lagen, sondern diejenigen von allen 64 Feldern zusammen.

Man hätte sich also nicht damit begnügen dürfen, die Zahl 2^{63} auszurechnen, sondern es käme darauf an, alle Potenzen von 2 bis zu 2^{63} auszurechnen und zu addieren. Das wäre ein höchst langwieriges Geschäft. Kann uns nicht auch hier ein glücklicher Gedanke, so wie ihn der kleine Gauß bei der arithmetischen Folge hatte, helfen?
Das ist in der Tat der Fall. Wir sehen ja, 1 + 2 = 2^2-1, 1 + 2 + 4 = 2^3-1, 1 + 2 + 4 + 8 = 2^4-1, und so vermuten wir, dass

$$1+2+4+...+2^{63}=2^{64}-1$$

ist. Wir wollen einmal annehmen, unsere Annahme sei für den Exponenten n als richtig erwiesen; es sei also

$$1+2+4+...+2^{n-1}=2^n-1$$

Dann stimmt es sicher auch für den nächstfolgenden Exponenten $n+1$. Dann haben wir nämlich nur 2^n zu addieren, also 2^n-1+2^n zu bilden, und das ist $2\cdot 2^n-1$ oder $2^{n+1}-1$. Damit ist aber unsere Vermutung ganz allgemein bewiesen.
Denn da sie für $n=4$ richtig ist, ist sie es auch für $n=5$, deshalb auch für $n=6$ usf., so weit wir wollen. Der Mathematiker nennt dieses Beweisverfahren vollständige Induktion.

6 Von Primzahlen, vollkommenen Zahlen und Teilerprotzen

Manche Zahlen lassen sich in Faktoren zerlegen, z.B. $6 = 2 \cdot 3$ und $18 = 2 \cdot 3^2$, andere nicht. Dabei ist von der selbstverständlichen Zerlegung einer Zahl in ein Produkt aus 1 und der Zahl selbst abgesehen. Zahlen, die wie 2, 3, 5, 7, 11, 13 usf. nicht zerlegbar sind, nennt man Primzahlen.

Wenn man die Reihe der Primzahlen aufschreibt, so wird man finden, dass sie immer seltener werden, mit anderen Worten, im Intervall von 1 bis 100 finden sich mehr Primzahlen als im Intervall von 101 bis 200 usf.
Wir werden das später durch eine Tafel belegen. Da war die Frage berechtigt: Hören die Primzahlen vielleicht irgendwo auf, gibt es eine letzte, größte Primzahl?

Schon der griechische Mathematiker Euklid hat den Nachweis erbracht, dass es eine solche letzte Primzahl nicht gibt. Nehmen wir einmal an, es wäre doch eine solche Primzahl vorhanden, sie heiße p.
Dann bilde ich das Produkt P_p, aus allen Primzahlen von 2, 3, 5 usf. bis hin zu p. Wenn schon p gewiss eine große Zahl sein wird, so erst recht P_p. Es ist nur gut, dass wir sie nicht wirklich auszurechnen brauchen. Zu diesem Produkt addiere ich jetzt die Zahl 1.

Ich behaupte, die Zahl $P_p + 1$ ist durch keine der bisher vorhandenen Primzahlen bis einschließlich p teilbar. Man überzeugt sich in der Tat leicht, dass bei der Division durch jede dieser Primzahlen der Rest 1 bleibt. Dividiere ich z.B. durch 2, so ist ja das lange Produkt durch 2 teilbar, nicht aber der hinzugefügte Summand 1.
Es bleibt also der Rest 1. Ebenso geht es mit der Division durch 3, durch 5 usf. bis p. So bleibt nichts anderes übrig, als dass diese neue Zahl entweder selbst eine Primzahl ist, die dann natürlich größer als p ist, oder dass sie andernfalls in Primzahlen zerlegbar ist, die aber sämtlich größer als p sind. In beiden Fällen haben wir Primzahlen gewonnen, die größer als p sind. Unsere Annahme, p sei die größte Primzahl, war nicht stichhaltig, es gibt überhaupt keine größte Primzahl; die Anzahl der Primzahlen ist "unendlich groß".

Nicht alle Probleme, die sich an die Primzahlen knüpfen, lassen sich so rasch erledigen. Ja, es gibt sogar nicht wenige, die überhaupt noch nicht beantwortet sind. Wir kennen Paare von Primzahlen, die sich nur um 2 unterscheiden, 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 usf. Der englische Mathematiker Glaisher hat durch unmittelbares Auszählen festgestellt, dass es zwischen 1 und 100000 insgesamt 1125 solcher Paare gibt, zwischen 1000000 und 1100000 aber nur 725, zwischen 8000000 und 8100000 gar nur 518.
Es werden also, wie es scheint, immer weniger. Hören die Paare nun einmal ganz auf, gibt es also ein letztes, größtes, oder aber ist ihre Anzahl unendlich? Die Antwort auf diese Frage ist heute noch nicht gefunden.

Ein Leser dieser Zeilen in einer früheren Auflage schrieb, die Antwort sei doch sehr leicht zu geben. Mit $P_p + 1$ sei doch auch $P_p - 1$ Primzahl, und damit habe man ja ein Primzahlpaar der gewünschten Art. Und da die Reihe solcher Primzahlpaare $P_p + 1$ und $P_p - 1$ nicht abreißt, gebe es eben unendlich viele. Der Leser untersuche selbst, warum diese Beweisführung fehlerhaft ist.

Weniger noch als bei diesen Primzahlzwillingen kennt man sich aus, wenn man die Fragestellung verallgemeinert. Man nennt $2q$-Paarlinge solche Primzahlen, die die Differenz $2q$ haben; eben sprachen wir vom Fall $q = 1$. Man weiß nicht, ob es für jedes q wenigstens ein Exemplar gibt; man weiß auch nicht, ob es wenigstens ein q gibt derart, dass unendlich viele Exemplare von $2q$-Paarlingen existieren.
Gibt es Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen von beliebiger Länge, sagen wir 100, 1000, ...? Wir bilden, um den ersten Fall zu erledigen, das Produkt der Primzahlen

$$P_{101} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 101$$

Dann ist von den 100 aufeinanderfolgenden Zahlen

$$P_{101} + 2, P_{101} + 3, P_{101} + 4, ..., P_{101} + 101$$

keine einzige Primzahl. Um den Fall 1000 zu erledigen, gehen wir - wie eben von der auf 100 folgenden ersten Primzahl 101 - von der ersten Primzahl 1009 nach 1000 aus, bilden also

$$P_{1009} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 1009$$

Dann bilden die Zahlen

$$P_{1009} + 2, P_{1009} + 3, P_{1009} + 4, ..., P_{1009} + 1001$$

sicher eine Folge von 1000 sämtlich teilbaren Zahlen. Der Leser überlege selbst, dass sich diese Schlussweise auf beliebige Zahlen verallgemeinern lässt.

Man hat versucht, dadurch hinter die verborgenen Geheimnisse der Primzahlen zu kommen, dass man sie möglichst weit aufsuchte. So sind Tabellen entstanden, die die Primzahlen und die Zerlegungen größerer Zahlen in Primfaktoren enthalten. Natürlich verzichtet man, um diese Tabellen nicht allzu umfangreich zu machen, auf die leicht erkennbaren Vielfachen, z.B. von 2, 3, 5 usf.
Man gibt auch nur immer den kleinsten Teiler einer zerlegbaren Zahl an; durch Division durch diesen Teiler kommt man auf eine neue Zahl, die man nun erneut in der Tabelle aufsucht, um dort nachzusehen, ob sie weiter zerlegbar ist oder nicht.

Schon im Anfang des 19. Jahrhunderts gab es Tafeln, die bis 3000000 reichten (von J. Chr. Burckhardt). Auf Veranlassung von Gauß hat dann ein Hamburger Rechenkünstler, Zacharias Dahse, Tafeln von 6000000 bis 8000000 berechnet, die später von Rosenberg vervollständigt und bis 9000000 veröffentlicht werden sind.
Der oben schon erwähnte Engländer Glaisher hat die Lücke von 3000000 bis 6000000 ausgefüllt. 1909 ist eine bis 10 Millionen, 1914 noch etwas verlängerte Primzahltafel von Lehmer erschienen, die auch die Irrtümer in früheren Tafeln berichtigt.
In den Archiven der Wiener Akademie der Wissenschaften befindet sich ein auf 8 Bände verteiltes, 4212 Seiten zählendes Manuskript von J. Ph. Kulik, das bis zu der Zahl 100000000 reicht. Der zweite Band dieser Sammlung scheint verlorengegangen zu sein. Lehmer fand allerdings in der 10. Million, die er mit seiner eigenen Tafel vergleichen

konnte, 226 Fehler. Er glaubt deshalb, dass die Arbeit von Kulik nur als Probe für weitere Berechnungen Wert hat.

Das, was man gernhaben möchte, ist ein Ausdruck A derart, dass, wenn man in ihn die Zahl n einsetzt, $A(n)$ die Anzahl der Primzahlen bis zu n angibt.
Um dieses "Primzahlproblem" haben sich die Mathematiker seit langem bemüht, freilich ohne es bisher ganz zu erledigen. Man kennt nur Näherungsfunktionen für $A(n)$. Eine wirkliche Auszählung zeigt, dass der Prozentsatz der Primzahlen mit wachsendem n abnimmt. Die Anfangswerte der "zahlentheoretischen" Funktion $A(n)$, die ja nur für ganzzahlige n existiert, zeigt Bild 6.

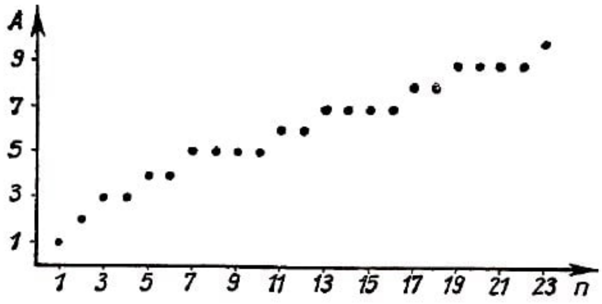

Bild 6

Den fallenden Prozentwert der Primzahlen kann man nach F. Lettenmayer unmittelbar der folgenden Tabelle entnehmen. Dabei ist 1 wie in Bild 6 als Primzahl mitgerechnet.

n	A(n)
10	5
100	26
1 000	169
10 000	1 230
100 000	9 593
1 000 000	78 499
10 000 000	664 580
100 000 000	5 761 456
1 000 000 000	50 847 479

In einzelnen Fällen ist man mit der Entscheidung über die Zerlegbarkeit von Zahlen weit über die größte Zahl der erwähnten Tabellen hinaus. In der Geometrie spielen die Zahlen $2^{2^n} + 1$ eine Rolle. Setze ich $n = 1$, so erhalte ich 5; für $n = 2$ erhält man 17, für $n = 3$ schon 257 und für $n = 4$ gar 65537, wie unsere Tabelle lehrt.
Nun hat Gauß gezeigt, dass man ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seitenzahl eine Primzahl von der Form $2^{2^n} + 1$ ist, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Er ist der erste gewesen, der das 17-Eck konstruiert hat. Mit dem Fall des 257-Ecks hat sich der Mathematiker Richelot (1832) beschäftigt. Später ist in einem Schulprogramm von Maywald eine kürzere Darstellung der Konstruktion des regelmäßigen 514-Ecks gegeben werden.

Weiter hat sich sogar an den Fall des 65537-Ecks später Hermes, ein Schüler Richelots, herangetraut. Gauß hatte seine für das 17-Eck angestellten Betrachtungen auf dem Raum einer Schiefertafel unterbringen können, die er seinem Studienfreunde Wolfgang

Bolyai geschenkt hat - der hat sie bis in sein Alter als wertvolles Erinnerungszeichen aufbewahrt.
Die Abhandlung von Richelot zählt schon 80 Seiten. Das Manuskript der Rechnungen von Hermes schließlich, an dem dieser 10 Jahre gearbeitet hat, füllt einen geräumigen Handkoffer, der im Mathematischen Institut der Göttinger Universität aufbewahrt wird.

Übrigens waren diese Arbeiten insofern überflüssig, als Gauß das ganze Problem bereits für den allgemeinsten Fall erledigt hatte. Das Ergebnis seiner Untersuchung ist:
Ein regelmäßiges m-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn m ein Produkt ist aus einer Potenz von 2 und Primzahlen F_n der Form $2^{2^n}+1$. Dabei ist der Fall des Exponenten 0 bei der Grundzahl 2 mit zu berücksichtigen.
Weiter sind konstruierbar die regelmäßigen m-Ecke, die sich aus den vorigen herleiten lassen, so z.B. das regelmäßige 15-Eck, denn $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

Im Umkreis der regelmäßigen Vielecke ist $\frac{1}{3}\cdot 360^\circ$ der Mittelpunktswinkel für die Seite des regelmäßigen Dreiecks, $\frac{1}{5}\cdot 360^\circ$ der für die Seite des regelmäßigen Fünfecks, $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot 360^\circ$ der für die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks, und der ist konstruierbar.
Die Aussage ist umkehrbar: Die Konstruktion ist unmöglich, wenn in nicht ein solches Aggregat ist.

Nun ist es eine interessante Frage, ob alle diese Zahlen F_n Primzahlen sind oder nicht. Der bekannte Mathematiker und Jurist Fermat bejahte die Frage. Ein gewisser Landry, der (1867) alle Zahlen $2^n + 1$ und 2^n - 1 bis zu $n = 64$ auf ihre Zerlegbarkeit hin untersucht hat (er überschritt damit erheblich die Grenze der früher erwähnten Tabellen), hat durch Gegenbeispiele gezeigt, dass Fermat sich geirrt hat. So ist z.B. $F_5 = 2^{32}+1$ durch 641 teilbar. Die größte Zahl, die Landry als Primzahl nachgewiesen hat, ist

$$2^{61}-1=2305843009213693951$$

Nebenbei bemerkt war die schlimmste Zahl, die Landry zu bewältigen hatte, $2^{55}+1$. Die letzte Zahl, die hier bei der Zerlegung noch weiter zu untersuchen war, hieß 57 646 075 230 342 349. Landry hielt sie erst für eine Primzahl, bis sich herausstellte, dass sie in das Produkt zweier neunzifferiger Zahlen zerfällt. Das mag einen Begriff davon geben, welche Schwierigkeiten die Zerlegung mancher Zahlen machte.

Beachtet man die folgenden Zerlegungen, so hätte Landry $2^{58}+1$ sehr schnell ermittelt:

$$2^6+1=(1^2+2^2)\cdot(2^2+3^2) \qquad 2^{10}+1=(3^2+4^2)\cdot(4^2+5^2)$$

allgemein

$$\begin{aligned}((2^n-1)^2+2^{2n})\cdot(2^{2n}+(2^n+1)^2) &= (2^{2n}-2^{n+1}+1+2^{2n})\cdot(2^{2n}+2^{n+1}+1+2^{2n})\\ &= (2^{2n+1}-2^{n+1}+1)\cdot(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)\\ &= (2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}\\ &= 2^{4n+2}+2^{2n+2}+1-2^{2n+2}=2^{4n+2}+1\end{aligned}$$

Doch zurück zu den Zahlen $2^{2^n} + 1$. Auch hier entsteht, nachdem sich die Annahme von Fermat als falsch erwiesen hat, die Frage: Gibt es in der Reihe dieser Zahlen unendlich viele Primzahlen oder nur endlich viele? Wenn ja, welche von ihnen ist die größte?
Die Antwort ist bis heute nicht gefunden. Man hat sich damit begnügen müssen, die Zahlen selbst zu untersuchen. Für $n = 5$ erhält man, wie oben schon erwähnt, die zerlegbare Zahl

$$4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Die Zahl, die man für $n = 6$ erhält, hat 274177 zum kleinsten Teiler, es ist $F_6 =$ 274177 · 67280421310721. Auch der zweite Faktor ist eine Primzahl. F_7 und F_9 sind nicht prim. F_9 hat den Faktor $37 \cdot 2^{16} + 1$, F_{11} ist nicht prim, F_{16} hat die Faktoren $7 \cdot 2^{14} + 1$, $397 \cdot 2^{16} + 1$ und $7 \cdot 139 \cdot 2^{16} + 1$. F_{18} hat den Faktor $13 \cdot 2^{30} + 1$, F_{23} ist durch $5 \cdot 2^{25} + 1$ teilbar, F_{36} durch $5 \cdot 2^{39} + 1$, F_{38} durch $3 \cdot 2^{41} + 1$, F_{73} durch $5 \cdot 2^{75} + 1$. Das ist wahrscheinlich die größte je auf Faktoren untersuchte Zahl.

Diese Zahl ist nach einer Bemerkung von Carmichael so lang, dass, wenn sie in 400-Seiten-Bänden gedruckt wird, eine Bücherei zustande käme, aus der auf jeden Erdenbewohner eine Bibliothek von je 2 Millionen Bänden käme. Selbstverständlich hat man diese Riesenzahlen selbst und deshalb auch ihre noch immer reichlich langen Teiler nicht auf dem üblichen Wege mit wirklichen Teilungsversuchen gefunden. Aus den bisherigen Untersuchungen ergibt sich also, dass außer F_0 bis F_4 keine weitere Primzahl F_b gefunden worden ist.

Wirklich rechnerisch durchgeführt wurde vor längerer Zeit eine Riesen-Zahlenrechnung von einem Schüler einer Berliner Oberschule. Es war bewiesen werden durch zahlentheoretische Betrachtungen, dass 2^{364}-1 durch 1093^2 teilbar ist - diese Tatsache steht in Beziehung zu einem wichtigen zahlentheoretischen Problem.
Der Schüler hat die Rechnung wirklich durchgeführt - es handelt sich um die Division einer 110stelligen Zahl, deren Ergebnis eine 104stellige Zahl ist -, natürlich ergab sich, dass die Division in der Tat restlos aufging. Hätte der Rechner die erwähnte Tafel von Molterer zur Hand genommen, so hätte er sich auf diese Division beschränken können.

Die Zahl 6 hat die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe aller ihrer Teiler gleich der Zahl selbst ist. Es ist in der Tat

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Dabei ist, wie wir ausdrücklich hinzufügen, die Zahl 1 als Teiler mitgezählt, nicht aber die Zahl selbst. Die nächste Zahl, bei der wir die gleiche Eigenschaft beobachten, ist 28. Es ist

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Solche Zahlen nennt man vollkommene Zahlen. Das Altertum kannte noch zwei weitere vollkommene Zahlen, 496 und 8128. (Untersuche, ob das stimmt!) Die nächste vollkommene Zahl ist 33550336; sie findet sich zuerst in einem Münchner Manuskript aus dem Jahre 1461. Dann fand man, noch im 16. Jahrhundert, drei weitere vollkommene

Zahlen, 8589869056, 137438691328 und 2 305 843 008 139 952 128. Erst am Ende des 19. Jahrhunderts fügten zwei Mathematiker (P. Seelhoff und J. Pervušin) eine neunte vollkommene Zahl hinzu. Dieser Zahlenriese heißt 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176.

Vollkommene Zahlen erhält man, wie schon Euklid (ungefähr 300 v.u.Z.) gezeigt hat, wenn man $2n-1$ mit 2^n-1 multipliziert, vorausgesetzt, dass 2^n-1 eine Primzahl ist. Das wollen wir uns klarmachen. Wir haben zunächst festzustellen, welche Teiler die Zahl

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

hat. Ich setze für die Primzahl 2^n-1 zur Abkürzung p. Dann haben wir zwei Gruppen von Teilern, nämlich

$$1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1} \quad (1) \qquad ; \qquad p, 2p, 2^2p, ..., 2^{n-2}p \quad (2)$$

da ja die Zahl $2^{n-1}p$ selbst nicht mitzählt. Diese Teiler haben wir zu addieren. Nun ist nach der hergeleiteten Formel

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

und

$$p + 2p + 2^2p + ... + 2^{n-2}p = p(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2}) = p(2^{n-1} - 1)$$

Mithin ist die Summe beider Reihen

$$2^n - 1 + p(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}(2^n -) = N$$

Es kommt nun alles auf die Untersuchung der Zahlen 2^n-1, der sogenannten Mersenneschen Zahlen, an. Man kann sich mit den Fällen begnügen, in denen n eine Primzahl ist. Wenn nämlich n etwa $= p \cdot q$ ist, wo p eine Primzahl und q ein Faktor größer als 1 ist, dann ist $2^{p \cdot q} - 1$ durch $2^p - 1$ teilbar, also keine Primzahl.
Andererseits genügt die Forderung nicht, dass n eine Primzahl ist. So ist z.B. 2^{11}-1 = 23 · 89. Lucas hat eine von $p = 11$ bis $p = 251$ reichende Liste aufgestellt und die kleinsten Teiler d angegeben. Die folgende Tafel gibt diese Liste wieder:

p =	11	23	29	37	41	43	47	53
d =	23	47	233	223	13367	431	2351	6361
p =	59	73	79	83	97	113	131	151
d =	179951	439	2687	167	11447	3391	263	18121
p =	179	191	211	223	233	239	251	
d =	359	383	15193	18287	1399	479	503	

Die in dieser Tafel fehlenden Primzahlen, abgesehen von den Fällen $p = 1, 2, 3, 5, 7$, sind in der nächsten Tafel aufgeführt. Unter jeder Zahl ist mit einem t vermerkt, dass sie teilbar, mit einem p, dass sie prim, mit einem u, dass das Ergebnis unbekannt ist:

p =	13	17	19	31	61	67	71	89	101	103
	p	p	p	p	p	t	t	p	t	t
p =	107	109	127	137	139	149	157	163	173	181
	p	t	p	u	u	u	u	t	t	t
p =	193	197	199	227	229	241	257			
	u	t	u	u	u	u	u			

Hiernach war die bislang größte bekannte Primzahl dieser Form - ich bemerke ausdrücklich, dass die tatsächliche Anzahl der Primzahlen, wie wir gesehen, unendlich ist - $p = 2^{127} - 1$.
Vollkommene Zahlen erhält man deshalb für $p = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$.
Hingegen ist die größte zur Zeit bekannte Primzahl 2^{2281}-1, eine Zahl mit 687 Ziffern.
An Einzelheiten bemerke ich: Eine Zeitlang hielt man 2^{67}-1 für eine Primzahl. Es ist aber

$$2^{67} - 1 = 193707721 \cdot 761838257287$$

und beide Faktoren sind Primzahlen. Für $p = 71$ hat $2^p - 1$ den Faktor 228479, für $p =$ 163 den Faktor 150 287, für $p =$ 173 den Faktor 730753, für $p =$ 181 den Faktor 43441, für $p =$ 197 den Faktor 7487. Übrigens kennt man auch Faktoren für die Fälle $p =$ 317, 337 und sogar für 5011.

Mit 2^{89}-1, 2^{107}-1 und 2^{127}-1 als Primzahl muss man natürlich drei weitere vollkommene Zahlen erhalten. Molterer hat sie ausgerechnet. Sie heißen

191 651 942 608 236 107 294 793 378 084 303 638 130 997 321 548 169 216,

131 164 036 458 569 648 337 239 753 460 458 722 910 223 472 318 386 943 117 783 728 128 und

14 474 011 154 664 524 427 946 373 126 085 988 481 573 677 491 474 853 889 066 354 349 131 199 152 128.

Alle diese vollkommenen Zahlen sind gerade, sie enden entweder mit 6 oder 28. Ob ihre Anzahl, wenn man ihre Folge fortsetzen wollte, endlich oder unendlich ist, weiß man nicht. Euler hat nachgewiesen, dass es für geradzahlige vollkommene Zahlen nicht noch andere Bildungsgesetze als das von uns angegebene gibt.

Jede gerade vollkommene Zahl - ausgenommen 6 - ist nach R. V. Heath als Summe von $2^{\frac{n-1}{2}}$ ungeraden Kubikzahlen darstellbar, z.B. $1^3 + 3^3 = 28$, $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496$, $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 = 8128$.

Um das allgemein zu zeigen, benutzen wir die Formeln

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Es ist

$$S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2k-1)^3 = \sum_{r=1}^{k}(2r-1)^3$$
$$= \sum_{r=1}^{k}(8r^3 - 12r^2 + 6r - 1) = 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - k$$

Also wird

$$S = 2k^2(k+1)^2 - 2k(k+1)(2k+1) + 3k(k+1) - k$$
$$= 2k^4 + 4k^3 - 2k^2 - 4k^3 - 6k^2 - 2k + 3k^2 + 3k - k = 2k^4 - k^2 = k^2(2k^2 - 1)$$

Setzt man hier $k = 2^{\frac{n-1}{2}}$, dann folgt

$$S = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

und von dieser Form ist jede der geraden vollkommenen Zahlen.

Man hat aber die Frage aufgeworfen, ob es nicht vielleicht auch ungerade vollkommene Zahlen gibt, wenn auch bis heute keine einzige dieser Art bekannt ist. H. J. Kanold hat sich z.B. mit dieser Frage beschäftigt. Soviel steht fest, wenn es sie gibt, sind es gewaltige Zahlenriesen, kleiner als 10^{36} ist jedenfalls keine.

Das Gegenstück zu den Primzahlen oder, wie wir auch sagen können, teilerärmsten Zahlen, sind die teilerreichsten Zahlen. Als Maßeinheiten wurden gern solche teilerreiche Zahlen gewählt, so das Dutzend 12, das Buch (Schreibpapier) 24, das Schock 60, das Gros 144, der Tag mit 24 Stunden, 1440 Minuten oder 86400 Sekunden, der Vollwinkel mit 360 Grad, 21600 Minuten, 1296000 Sekunden.
Allgemein gilt der Satz, dass die Anzahl der Teiler einer Zahl

$$N = p^m \cdot q^n \cdot r^o \cdot ... \qquad \text{durch}$$

$$T_N = (m+1)(n+1)(o+1)... - 1$$

gegeben ist, wenn wieder 1 als Teiler mitgezählt wird, nicht jedoch die Zahl N selbst. So erhalten wir z.B. $T_{12} = 5$ für $12 = 2^2 \cdot 3$, $T_{24} = 7$ für $24 = 2^3\ cdot\ 3$, $T_{60} = 11$ für $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $T_{144} = 14$ für $144 = 2^4 \cdot 3^2$.
Die obengenannte Zahl $86400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ hat 95 Teiler, die Zahl $1896000 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ hat 159 Teiler.

H. Maurer hat einmal eine Tafel solcher "Teilerprotzen", wie er sie nennt, aufgestellt. So hat z.B. die Zahl 21621600 die Teilerzahl 575. Mersenne hat angegeben, dass die kleinste Zahl, die eine Million Teiler zulässt,

$$N = (1267650600228229401496703205376)^{66} \cdot (847288609443)^4$$

ist. Das ist eine Zahl mit 2028 Ziffern. Die erste Basis soll 100 Teiler besitzen. Mit den Zahlen selbst steigt also auch die Anzahl ihrer Teilerzahlen, die Primzahlen sorgen allerdings dafür, dass die Bäume nicht in den Himmel wachsen.

7 Noch einige Beispiele von Zahlenriesen

Zunächst ein paar ganz einfache Dinge: Du hast zwei Gegenstände, etwa einen Punkt · und einen Strich —. Auf wieviel verschiedene Weisen kannst du die beiden Gegenstände in einer Linie aufeinanderfolgen lassen?
Nun, natürlich auf zwei Weisen. Entweder ·— oder —·. Bei drei Gegenständen ist die Anordnung schon mannigfaltiger. Nehme ich ein Messer, eine Gabel und einen Löffel, dann habe ich insgesamt sechs Anordnungen:

Messer-Gabel-Löffel	Messer-Löffel-Gabel	Gabel-Messer-Löffel
Gabel-Löffel-Messer	Löffel-Messer-Gabel	Löffel-Gabel-Messer

mehr sind nicht möglich. Kommt ein vierter Gegenstand dazu, etwa ein Bleistift, so kann ich ihn in jede dieser sechs Stellungen an vier Stellen einschalten, vor jeden der drei Gegenstände und hinter den letzten. Jede der sechs Stellungen liefert also vier neue Anordnungen. Ich erhalte für die Anordnung von vier Gegenständen 6 · 4 Möglichkeiten, die alle verschieden sind.
Man wird auch die 6, die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten bei drei Gegenständen, in 2 · 3 auflösen. Kommt noch ein fünfter Gegenstand dazu, so erhalte ich 2 · 3 · 4 · 5 Anordnungsmöglichkeiten usf.

Man führt zur Abkürzung der Produkte das Zeichen ! (gelesen Fakultät) ein und schreibt also 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, usf. Man sieht, wie schnell die Ergebnisse dieser Rechenart wachsen.

Es gibt ein Spiel Boss puzzle, das 1878 ein Amerikaner erfunden haben soll und das eine Zeitlang sehr beliebt war. Man hat ein in 16 kleine Quadrate geteiltes größeres Quadrat und 15 Steine von der Größe der kleinen Quadrate; sie lassen in der Grundstellung das sechzehnte Feld rechts unten frei.
Die Aufgabe besteht darin, von irgendeiner anderen Stellung aus zu dieser Grundstellung zu kommen. Die Änderung einer Stellung in die nächstfolgende darf nur in der Weise erfolgen, dass ein Stein in ein freistehendes Nachbarfeld geschoben wird. Wieviel Ausgangsstellungen gibt es?

Die Antwort ist mit unseren neuen Rechensymbolen leicht geschrieben: 15! . Die sind 1 307 674 368 000, also weit über eine Billion verschiedene Spiele. Lässt man gar die Einschränkung fallen, dass das zahlenfreie Feld unten rechts sein soll, dann hat man 16! Spielfälle, das 16fache der eben angegebenen Zahl. Es ist 16! = 20 922 789 888 000.

Ein Leser dieses Bändchens hat vorgeschlagen, um eine noch größere mit drei Ziffern zu schreibende Zahl zu erhalten, als wir sie im Abschnitt 5 gewonnen haben, auch noch das Fakultätsymbol ! zuzulassen.
Man hat also dann die Auswahl zwischen $[9^{9^9}]!$ und $9!^{9!^{9!}}$ oder gar $[9!^{9!^{9!}}]!$. Das heißt dann aber das grausame Spiel der Zahlen gar zu weit treiben.

Um an einem Beispiel noch einmal recht nachdrücklich das Anwachsen von $n!$ mit wachsendem n zu zeigen, gebe ich den Wert von 100! wieder, den ich J. Molterer verdanke:

93 326 215 443 944 152 681 699.238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000.

Warum hat diese Zahl am Ende 24 Nullen?

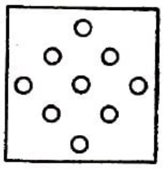

Bild 7

Die nachfolgende Untersuchung wird uns auf eine schon bekannte Rechenart führen. Beim Kegelspiel werden die neun Kegel auf einem Feld aufgestellt, das Bild 7 andeutet.
Irgendwelche auf diesem Brett stehenden Kegel bilden ein "Bild". Das "Bild" in Bild 8 (die vollen Kreise bedeuten Kegel, die anderen leere Felder) heißt z.B. hierzulande eine "Schnurgasse". Die Namen für die einzelnen Bilder, soweit es solche überhaupt gibt, wechseln. Fallen alle Kegel, so hat man "die Vollen" oder "alle Neun", steht nur der König in der Mitte, einen "Kranz", d.i. ein Wurf, der höher als "alle Neun" gewertet wird. Der Kegel auf dem äußersten Felde rechts ist "der rechte Eckbauer" usf.

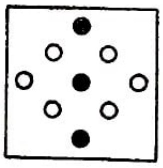

Bild 8

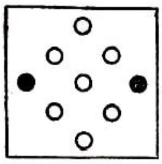

Bild 9

Es gibt neun Gruppen von Bildern. Zur ersten Gruppe zählen die Bilder, die aus nur einem Kegel bestehen, zur zweiten diejenigen, die aus zweien bestehen usf.
Die erste Gruppe umfasst 8 neun verschiedene Bilder; wieviel zählt die zweite Gruppe?

Ich nehme zunächst einen Kegel und stelle ihn irgendwohin. Dann bleiben für den zweiten Kegel noch 8 Felder frei. Ich erhalte also 8 Bilder.
Nun kann ich dem ersten Kegel 9 solcher Stellungen geben; immer bleiben 8 Felder zu beliebiger Besetzung frei. Es gibt also $8 \cdot 9$ Bilder der zweiten Gruppe. Doch halt!
Der Schluss ist vorschnell. Ich habe auf diese Weise jedes Bild zweimal erhalten. In der Tat kann ich z.B. das in Bild 9 dargestellte Bild so bekommen, dass ich erst den rechten, dann den linken Kegel aufstelle; ich kann es aber auch umgekehrt machen. Und so in jedem der 72 Fälle. Es gibt also nur $72 : 2 = 36$ verschiedene Bilder der zweiten Gruppe.

Nun kommen die Bilder aus drei Kegeln. Ich will sie aus der Anzahl der Bilder mit zwei Kegeln ableiten. Ich setze irgendeines der Bilder aus der Zweiergruppe auf. Dann bleiben 7 Felder frei. Auf diese 7 Felder kann ich den dritten Kegel nach Belieben setzen. Es gibt also $36 \cdot 7$ Bilder der Dreiergruppe. Wieder aber müssen wir Obacht geben, ob nicht Bilder mehrfach auftreten. Und das ist in der Tat der Fall. Nehme ich z.B. die Schnurgasse in Bild 8. Sie kann durch Hinzufügen eines dritten Kegels aus drei ganz verschiedenen Bildern der Zweiergruppe entstanden sein. Entweder können nämlich die beiden vorderen oder die beiden hinteren oder der vordere und der hintere Kegel zu Anfang dagestanden haben.
Ich muss also die erhaltene Zahl $36 \cdot 7$ noch durch 3 dividieren.

Das geht nun so weiter, wenn ich von der Dreiergruppe zur Vierergruppe übergehe.

Wieder gibt es eigentlich 6 mal so viel Bilder, da der vierte Kegel bei jedem Bild auf 6 Felder gestellt werden kann. Jedes so entstehende Viererbild kann aber aus vier verschiedenen Dreierbildern entstanden sein, ich habe also noch durch 4 zu dividieren. Gehe ich zu den Fünferbildern über, so habe ich die Anzahl der Viererbilder mit 5 zu multiplizieren, gleichzeitig aber durch 5 zu dividieren, und so geht das fort. In der folgenden Liste ist die Entstehungsweise der einzelnen Zahlen dadurch angedeutet, dass ich zunächst die Multiplikation und Division unausgeführt gelassen habe:

Einer-Gruppe	9	$= 9$
Zweier-Gruppe	$\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}$	$= 36$
Dreier-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$	$= 84$
Vierer-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$= 126$
Fünfer-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$= 126$
Sechser-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$= 84$
Siebener-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$	$= 36$
Achter-Gruppe	$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$	$= 9$

Das sind zusammen 510 Bilder. Mit den beiden Bildern, die ich erhalte, wenn alle Kegel stehen und wenn kein Kegel steht, habe ich 512 Bilder. Das sind gerade 2^9. Ob das wohl Zufall ist?
Es lässt sich aus unserer kleinen Tabelle noch mancherlei Merkwürdiges herauslesen. Jedenfalls ist die Anzahl der Bilder weit größer, als man wohl erst angenommen hat. Würde es sich um ein ähnliches Spiel mit 10 Feldern handeln, so wäre, wenn unsere Vermutung richtig, die Anzahl der möglichen Bilder 1024, bei 12 Feldern 4096 usf.

Ich könnte noch eine ganze Reihe ähnlicher Untersuchungen anknüpfen. Soweit sie sich auf bekannte Spiele beziehen, wird darüber gelegentlich in Zeitschriften berichtet, z.B. wieviel verschiedene Spiele bei irgendeinem Kartenspiel, etwa dem beliebten Skat, möglich sind.
Dahin gehört auch, um auf ein anderes Gebiet überzugreifen, wieviel verschiedene Melodien man aus den sieben Tönen einer Oktave zusammenstellen kann. Immer kommt man auf ganz gewaltige Zahlen; im letzten Fall wird die Anzahl besonders groß, wenn man auch Wiederholungen der Töne bis zu einem gewissen Grade gestattet.

Kurd Laßwitz hat vor langen Jahren eine Geschichte erzählt, die auf eine lehrreiche Rechnung führt. Ich gebe hier nur die Aufgabe an, um die es sich da handelt und ihre Lösung, lasse die Rechnung weg.
Man will eine Bücherei anlegen, die alles, was man wissen kann, umfassen soll, eine Universalbibliothek. Es sollen Bände von 500 Seiten werden, die Seite zu 40 Zeilen mit je 50 Buchstaben. Denn das ist klar, irgendwie drucken muss sich all diese Weisheit doch lassen, drucken in unseren Buchstaben. mit besonderen Lettern für die Zeichen , ; : usf. und noch einigen anderen, den Ziffern usf.
Mehr als hundert Typen wird der Setzer jedenfalls nicht nötig haben. Man braucht nun nur alle möglichen Stellungen dieser verschiedenen Drucktypen auszuprobieren, und

neben allerlei Unsinn und dummem Zeug wird sich dann auch alles Gescheite in diesen Bänden finden.

Die Anzahl der Bände dieser Universalbibliothek ist "nur" $10^{2000000}$. Die Bände seien alle 2 cm dick und wie in einer Bücherei nebeneinander aufgestellt. Das Licht mit seinen 300000 km in der Sekunde gleite an ihnen vorbei; wieviel Jahre braucht es zu seiner Reise?
Laßwitz hat auch das ausgerechnet. Die Anzahl der Jahre ist eine 1 mit 1999982 Nullen hinterher. Und diese Zahl dürfte genausowenig anschaulisch sein wie die Länge der Buchreihe.

Doch kehren wir zurück zu den mathematischen Überlegungen.
Wir haben im vorigen Abschnitt von der Zerlegung der Zahlen in Faktoren gesprochen. Wir können sie aber auch zerlegen in Summanden. Die Zahl 4 ist 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.
Ich kann sie also auf vier verschiedene Weisen als Summe von ganzen Zahlen darstellen. Ich will mit $p(n)$ die Anzahl solcher Summendarstellungen von n bezeichnen und dabei die Zahl n selbst mitrechnen.
Dann ist $p(1) =$ 1, $p(2) =$ 2, $p(3) =$ 3, $p(4) =$ 5, $p(5) =$ 7 usf. Es wird also z.B. $p(22) =$ 1002, $p(33) = =$ 10143, $p(46) =$ 105558, $p(61) =$ 1121505 usf. Nach einer Tafel, die Mac Mahon berechnet hat, ist

$$p(100) = 190569292 \qquad ; \qquad p(200) = 3972999029388$$

Es gibt Näherungsformeln für $p(n)$, die zwar den Wert von $p(n)$ nicht ganz genau angeben, aber doch mit großer Annäherung und für kleine Werte von n sogar genau. Als Beispiel gebe ich die wahrscheinlich genauen Werte an

$$p(599) = 435350207840317348270000$$
$$p(721) = 161061755750279477635534762$$

die D. H. Lehmer berechnet hat.

Nun noch ein paar Zahlenriesen da, wo sie auch der Mathematiker nicht ohne weiteres vermuten wird. Unter diophantischen Gleichungen versteht man algebraische Gleichungen in einer oder mehreren Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten. Für diese werden nur ganzzahlige Lösungen gesucht.
Das bekannteste Beispiel ist die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, die unendlich viele Lösungen hat, z.B. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ oder $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$.
Fermat hat einmal die Aufgabe gestellt, den Zahlen x, y und z der pythagoreischen Gleichung noch die Nebenbedingung aufzuerlegen, dass sowohl $x + y$ als auch z das Quadrat je einer ganzen Zahl ist. Er gibt als kleinstes Lösungstripel an

$$x = 1061652293520 \qquad ; \qquad y = 4565486027761 \qquad ; \qquad z = 4687298610289$$

Die nächstgrößere Lösung - die Aufgabe hat ihrer unendlich viele - hat schon erheblich mehr Ziffern.

Die diophantische Gleichung $x^2 - 109y^2 = 1$, die recht harmlos aussieht, hat als kleinste (ganzzahlige) Lösung

$$x = 158070671986249 \qquad \text{und} \qquad y = 15140424455100$$

Euler stellte das Problem, die Gleichungen $x+y+z = u$, $xy+xz+zy = v^2$, $xyz = w^3$ in ganzen Zahlen zu lösen. Das führt auf ganzahlige Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - ux^2 + v^2x - w^3 = 0$$

wo u, v, w ganze Zahlen sind. Die kleinsten Lösungen sind

$$x = 1633780814400 \quad ; \quad y = 252782198228 \quad ; \quad 7z = 3474741085973$$

Archimedes stellte folgendes "Rinderproblem": Es bedeute W weiße, Z schwarze, P bunte, B braune Stiere, w weiße, z schwarze, p bunte, b braune Kühe, dann soll sein

$$\begin{array}{llll} W = \frac{5}{6}Z + B & Z = \frac{9}{20}P + B & P = \frac{13}{42}W + B & w = \frac{7}{12}(Z+z) \\ z = \frac{9}{20}(P+p) & p = \frac{11}{30}(B+b) & b = \frac{13}{42}(W+w) & \end{array}$$

Außerdem soll sein $W + Z$ von der Form n^2, $P + B$ von der Form $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Beachtet man diese Nebenbedingungen nicht, so erhält man die Lösungen - x ist ein Proportionsfaktor -

$$\begin{aligned}
W &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657 \cdot x &&= 10366482x \\
Z &= 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657 \cdot x &&= 7460514x \\
P &= 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657 \cdot x &&= 7358060x \\
B &= 3^4 \cdot 11 \cdot 4657 \cdot x &&= 4149387x \\
w &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373 \cdot x &&= 7206360x \\
z &= 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991 \cdot x &&= 4893246x \\
p &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761 \cdot x &&= 3515820x \\
b &= 3^2 \cdot 13 \cdot 46489 \cdot x &&= 5439213x
\end{aligned}$$

Die kleinste Lösung führt unter Beachtung der Nebenbedingungen auf sehr große Zahlen. W ist eine Zahl von 206545 Ziffern und beginnt mit den Ziffern 1598...

8 Zahlenzwerge

Bisher hatten wir uns auf die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... beschränkt. Die kleinste unter ihnen ist 1. Kleiner ist noch, wenn man sie als Zahl anerkennt, die 0.
Wenn man sie als Zahl anerkennt! Uns erscheint das heute selbstverständlich; aber das war nicht immer so. Sogar die Eins ist nicht immer als Zahl angesehen worden. Die Griechen verstanden unter Zahlen nur die positiven ganzen Zahlen größer als 1.
Zur Zahl gehörte der Begriff der Vielheit; von der Eins hieß es noch um 500 u.Z. bei Boetius: Numerus non est, sed fons et origo numerorum. (Sie ist keine Zahl, sondern Quelle und Ursprung der Zahlen.)

Da braucht es uns nicht zu wundern, dass die Null noch härter um ihre Anerkennung als Zahl ringen musste!
Welch ungeheure Wandlung hat der Zahlbegriff im Laufe der Zeit durchgemacht! Heute gilt die Null als natürliche Zahl, während noch vor nicht allzu langer Zeit die Eins als kleinste natürliche Zahl angesehen wurde.
Die Brüche gehören für uns selbstverständlich auch zu den Zahlen - es sind rationale Zahlen, wie du weißt. Selbstverständlich? Bei den Griechen gab es keine rationalen Zahlen! Der erste, bei dem sie in seinen Arbeiten ganz versteckt enthalten sind, ist Diophant von Alexandria (3. Jh. u.Z.).

Die irrationalen Zahlen haben zwar die Gemüter schon im Altertum bewegt, weil das Verhältnis der Diagonalen zur Seite des Quadrats ein vielbeachtetes Problem war. Aber man behandelte es nur geometrisch und kam zu der Feststellung, dass zwar jeder Zahl eine Strecke, nicht aber jeder Strecke eine Zahl entspräche. Es gab eben nur natürliche Zahlen größer als 1.
Heute lernst du im 8. Schuljahr die Wurzeln als Vertreter der irrationalen Zahlen kennen, später Logarithmen und Winkelfunktionswerte. Dir erscheint es selbstverständlich, dass es irrationale Zahlen gibt, und ebenso selbstverständlich ist uns das Vorhandensein der negativen Zahlen; aber erst im 16. Jahrhundert werden diese allmählich als Zahlen anerkannt.

Dass das Wurzelziehen aus negativen Zahlen schließlich auf die komplexen Zahlen führte, sei hier der Vollständigkeit halber erwähnt. Aber wir wollten ja eigentlich von den Zahlenzwergen sprechen!

Die Berechtigung, von Zahlenzwergen zu reden, bekommen wir, wenn wir neben den natürlichen Zahlen auch die Brüche in den Kreis unserer Betrachtung ziehen. Die Frage nach den Zahlenzwergen ist eigentlich mit der nach den Zahlenriesen erledigt.
Ist nämlich n irgendein Zahlenriese, so ist $\frac{1}{n}$ ein Zahlenzwerg.
Der großen Zahl 1000000 entspricht die kleine, zu ihr "reziproke" Zahl, oder wie man auch sagt, ihr "Kehrwert" $\frac{1}{1000000}$.
In der Tat, je mehr der Nenner eines Bruches bei gleichbleibendem Zähler wächst, um so kleiner wird der Wert des Bruches, um so mehr nähert er sich der 0.

Wir wollen gleich dazu übergehen, einige solcher kleinen Zahlen in unserem Lebensbereich aufzusuchen. Im 3. Abschnitt hatten wir Zeit und Weg als geeignete Mittel kennengelernt, große, wenn auch nicht übergroße Zahlen zu veranschaulichen. Hier wollen wir nun zunächst etwas über kleine Zeiten und kleine Wege hören und uns einen Begriff von ihnen zu machen suchen.

Eine Sekunde ist eine reichlich kleine Zeiteinheit. Im Kino werden uns Einzelbilder in rascher Folge vorgeführt. Ein erstes Bild wird ruckweise im Apparat an die Stelle gebracht, von der aus es projiziert wird, dann wird es wieder ruckweise durch ein zweites ersetzt usf. Bei den üblichen Filmen werden 16 bis 24 solcher Einzelbilder in einer Sekunde dargeboten.
Wie kommt es nun, dass wir trotz dieser Einzelbilder den Eindruck einer stetigen Folge von Bildverwandlungen haben? Der Grund ist der, dass ein Bild, das in unser Auge fällt, noch einige Zeit nachwirkt, etwa $\frac{1}{10}$ Sekunde.

Den Nachweis dafür kann man in bekannter Weise erbringen, wenn man einen glühenden Körper möglichst rasch im Kreise schwingt. Dann sieht man nicht einen bewegten Punkt, sondern einen Kreis. Wenn man eine Stricknadel an dem einen Ende festklemmt und das andere zur Seite biegt und zurückschnellen lässt, dann beobachtet man eine flächenartige Verbreitung des freien Teils der Nadel, nicht etwa eine Aufeinanderfolge verschiedener Stellungen.

Diese Versuche zeigen, dass das Auge des Menschen[5] zur Beobachtung von Vorgängen, die sich in Zeiten kleiner als 0,1 Sekunde abspielen, nicht geeignet ist.
Dafür noch ein lehrreiches Beispiel:
Vor dem Aufkommen der Momentphotographie hat man die Beinstellung der Pferde bei einem Wettrennen immer falsch gesehen. Alle Bilder älterer Pferdemaler gaben die Beine in einer Stellung wieder, die sie tatsächlich in keinem Augenblick haben, nämlich die Vorderbeine nach vorn und gleichzeitig die Hinterbeine nach hinten geworfen. Erst seitdem die Photographie uns die Augen öffnete, sehen auch die Maler richtig.

Viele Taschenspielerkunststücke, z.B. mit Karten, beruhen auf Bewegungen von außerordentlicher Schnelligkeit. - So wird man es begreiflich finden, dass bei Beobachtungen kleiner Zeiten an Stelle des Auges vielfach die photographische Platte tritt. Du empfindest das Fernsehbild als ein geschlossenes Ganzes; dabei besteht es aus mehr als 10^7 einzelnen Bildpunkten, die vom Elektronenstrahl in $\frac{1}{25}$ Sekunde überstrichen werden. Die Zeit des Überstreichens für einen Bildpunkt ist demnach ungefähr $\frac{1}{25 \cdot 10000000}$ Sekunden oder $4 \cdot 10^{-9}$ Sekunden.

Überall, wo es sich um Bewegungsvorgänge handelt, sind Zeitmessungen mit Wegmessungen verbunden. Man teilt 1 mm in 1000 μm. Ein Mikrometer wird weiter in 1000 nm unterteilt. Ein Nanometer ist nun allerdings eine sehr, sehr kleine Strecke.
Sie verhält sich zu einem Millimeter wie ein Millimeter zu einem Kilometer. Wie das Millimeter der millionste Teil des Kilometers ist, so ist das Nanometer der millionste Teil des Millimeters.

Das Metermaß, ursprünglich gedacht als 40millionster Teil des Erdumfanges, ist festgelegt durch den Abstand zweier Striche auf dem im Bureau International des Poids

[5] Es gibt Tiere, deren Auge Zeiten, die weit kleiner als 0,1 Sekunden sind, unterscheiden können.

et Mesures in Sévres bei Paris aufbewahrten, aus Platin-Iridium gefertigten Urmeter. Die Genauigkeit dieser Festlegung wird auf 200 nm geschätzt. Neuerdings hat man das Meter durch die Länge eines Wellenzuges bestimmter Lichtarten festgelegt mit einer Genauigkeit von 20 nm.

Es ist, wenn λ_c die Wellenlänge der roten Linie des Kadmiumspektrums, λ_k diejenige der gelbgrünen Linie des Kryptonspektrums ist,

$$1\text{ m} = 1555164,13\lambda_c \qquad ; \qquad 1\text{ m} = 1769557,93\lambda_k$$

Wie lang sind hiernach λ_c und λ_k?

Die Frage ist: Haben solche kleinen Maße irgendeine praktische Bedeutung? Das stärkste optische Mikroskop macht ein Nanometer nicht sichtbar. Mit ihm können wir höchstens Größen von 200 nm Länge noch sehen.
Weiter bringt uns das Ultramikroskop, das um die Jahrhundertwende konstruiert wurde, noch weiter das Elektronenmikroskop und neuerdings das Feldelektronenmikroskop. Hiermit kann man noch Längen von etwa 2 nm erkennbar machen, unter besonderen Bedingungen sogar 1 nm. Das entspricht übrigens einer 150000- bzw. 300000fachen Vergrößerung.

Bei den Farbaufnahmen nach dem Verfahren Agfacolor werden die Filme mit drei verschiedenen lichtempfindlichen Schichten von 4 bis 5 μm Dicke belegt. Die Schichtdicke muss auf 1 μm genau sein. Gold kann man durch mechanisches Hämmern in außerordentlich dünne Blättchen verwandeln, 1 Kubikmillimeter (l mm^3) lässt sich zu einer Fläche von etwa einem Quadratdezimeter (1 dm^2) aushämmern.
Nennen wir die Dicke eines solchen Blättchens x, so ist, wenn wir alles in Millimetern ausdrücken, 1 mm^3 $= x\cdot$ 10000 mm^2; denn 1 dm^2 $=$ 10000 mm^2. Die Dicke des Blättchens ist danach $\frac{1}{10000}$ mm oder 100 nm.

Noch dünner sind gewisse Ölhäute, die entstehen, wenn man einen Tropfen Öl auf Wasser bringt. Das Öl breitet sich sofort so weit wie möglich auf der Wasserfläche aus, die Schicht wird dünner und dünner. Weiß man, wieviel Öl man auf das Wasser getan hat, und misst man die Fläche der Ölschicht, so lässt sich die Dicke leicht berechnen. Man beobachtet nun folgendes:
Die Haut zerreißt bei fortschreitender Verdünnung in Fetzen, etwa dann, wenn die Dicke 100 nm beträgt. Zwischen den einzelnen sichtbaren Fetzen befindet sich aber noch eine sehr dünne Ölschicht, deren Dicke 20 nm und weniger beträgt. Bei noch weitergehender Verdünnung der Fettschicht ändert sich das physikalische Verhalten, etwa wenn eine Dicke von 1 nm erreicht ist, wesentlich.

Diese Änderung lässt sich am besten durch Annahme einer körnigen Struktur des Öles erklären. Die Schicht verhält sich nicht mehr so wie eine zusammenhängende Flüssigkeit, sondern wie ein aus einzelnen voneinander getrennten Körnchen bestehender Stoff.

Man hat schon früh die Frage aufgeworfen, ob man die Materie immer weiter in kleine und kleinste Teile teilen kann.
Verschiedene Tatsachen haben zu der Annahme geführt, dass das nicht möglich ist, dass die Stoffe, feste, flüssige wie gasförmige, aus kleinsten Teilen zusammengesetzt

sind, den Molekülen und Atomen. Die Größe dieser Teilchen kann man auf Grund verschiedener Annahmen berechnen, man erhält Werte von der Größenordnung nm.
Versuche wie der eben beschriebene mit den Fetthäutchen stürzten diese Annahmen. 1912 wurde durch v. Laue ein Weg gewiesen, mit Hilfe der Röntgenstrahlen auch in die Welt dieser kleinen Größen, der Atome, einzudringen, von ihrer Lagerung in Kristallen Bilder zu erhalten, die wir messend und rechnend verfolgen können. Hierdurch wie durch weitere physikalische Erfahrungen entstand ein neuer Zweig der Physik, der sich mit der Struktur der Atome, mit ihrem Kern und ihrer Elektronenhülle beschäftigt.

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, dass es inzwischen gelungen ist, mit Hilfe des Elektronenmikroskopes einzelne Moleküle, z.B. des Tabakmosaikvirus, zu fotografieren und damit unmittelbar anschaulich zu machen. Das Feldelektronenmikroskop macht von einem Stoß, dem Kupferphthalocyanin, in Form von Gebilden in der Art vierblättriger Kleeblätter die vier Benzolringe des Moleküls dieses Stoffes sichtbar.

Um von der Größe solcher kleinsten Teilchen des Mikrokosmos einen Begriff zu geben, machen wir uns mit den Maßen für kleine Gewichtsmengen bekannt. Das Gewichtsmaß ist ja verknüpft mit dem Raummaß, insofern das Gewicht eines Kubikdezimeters reinen Wassers, also von 1 l, unter gewissen, sehr sorgfältig zu beachtenden äußeren Bedingungen gleich einem Kilopond gesetzt wird.
Weiter ist 1 kp = 1000 p, und ein Pond wird in 1000 Millipond (mp) unterteilt. Für kleinere Gewichtsmengen pflegt der Physiker sich der Potenzschreibweise mit negativen Exponenten zu bedienen, indem er $\frac{1}{10^n} = 10^n$, also z.B. $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ schreibt.

Der tägliche Vitaminbedarf des Menschen wird gewichtsmäßig geschätzt bei Vitamin A auf 2 bis 3 mp, bei B_1 und B_2 auf 1 bis 2 mp, bei C auf 50 bis 60 mp, bei D auf 10^{-3} mp.
Auf weit kleinere Gewichtsgrößen führen folgende Stoffe: Das Biotin, das bei der Zellteilung wirksam ist, kann im sogenannten Hefetest noch in einer Verdünnung von 1:400 Billionen festgestellt werden. 2500 kp Trockeneigelb von Enteneiern liefern 1,1 mp dieses Wirkstoffes - die Anreicherung ist 2,3 milliardenfach.
Das Auxin, ein Wuchsstoff an der Spitze der Haferkeimlinge, lässt sich in einer Lösung nachweisen, bei der 1 p auf eine Million Liter Wasser kommt. Die Wirksamkeit des Safranfarbstoffes, auf den eine Grünalge bei dem Kopulationsvorgang anspricht, ist derart, dass von einer Lösung von 10 p in 250 Milliarden Liter Wasser, d.i. etwa die Wassermenge des Müritzsees, ein Tropfen genügt, um Tausende von Algenzellen beweglich zu machen.
Wir kommen mit solchen kleinen, doch noch wirksamen Stoffmengen an die Größenordnung der Moleküle heran.

Die Loschmidtsche Zahl $6{,}022 \cdot 10^{23}$ gibt die Anzahl der Moleküle in einem Mol Wasser an, d.h. in 18 p. Man nehme 2 Esslöffel voll Wasser, kennzeichne alle Moleküle in dieser Menge, schütte sie ins Weltmeer, rühre gründlich um, so dass sich die Moleküle regelmäßig verteilen. Dann schöpfe man irgendwo aus dem 1370 Kubikkilometer fassenden Meer ein Liter heraus. Dann werden sich in ihm etwa 440 der vorher gekennzeichneten Moleküle finden.

Der Durchmesser der Moleküle des Wasserstoffgases ist etwa 0,4 nm. Wenn ich alle Moleküle eines Kubikzentimeters dieses Gases als Volumen zusammennehme, so bekomme ich natürlich weniger als einen Kubikzentimeter heraus, sogar weit weniger, dem zwischen den einzelnen Molekülen ist ein beträchtlicher Zwischenraum.
Wie nun aber, wenn ich die Moleküle wie die Perlen einer Perlenschnur aneinanderreihe, in einer einzigen langen Linie?
Ich erhalte dann eine Länge von etwa 11 Millionen Kilometer: Die Molekülkette würde fast dreihundertmal um die Erde herumreichen.

Wir wollen nun die Moleküle in einer Fläche ausbreiten. Wir nehmen ein Brett, dessen Breite $\frac{1}{2}$ Meter ist. Wie lang muss es sein, wenn es alle Moleküle aufnimmt?
Wir legen so viel Reihen nebeneinander, als $\frac{1}{2}$ Meter in den 11 Millionen Kilometern enthalten ist. Das sind 22 Milliarden. Jede dieser 22 Milliarden Reihen ist 0,4 nm breit, das war ja die Dicke jedes Moleküls. Ich erhalte also für die Länge des Brettes 0,4 nm $\cdot$ 22 Milliarden. Das sind 8,8 Meter. So gehen also die Moleküle auf ein Brett, das die Größe einer etwas ansehnlich gewählten Stubendiele hat. Auch ein größerer Tisch könnte sie aufnehmen.

Die Lehre, die uns dieses reine Gedankenexperiment vermittelt, hat übrigens, wenn wir es ein klein wenig abändern, die Natur schon lange selbst befolgt.
Ein Beispiel: Für Atmung und Blutkreislauf entscheidend ist die Oberfläche der Lungenbläschen, der roten Blutkörperchen und der Blutgefäße, insbesondere der Kapillaren. Ein Mensch stellt in seiner Lunge fast 100 Quadratmeter an Oberfläche, mit seinen roten Blutkörperchen ungefähr 130 Quadratmeter und in den Kapillaren etwa 80 Quadratmeter für den Atmungsprozess zur Verfügung.

Ein Atom ist nun aber kein homogener Körper, sondern ein System, das aus einem Atomkern besteht, um den Elektronen kreisen. Ist der Radius eines Wasserstoffatoms von der Größenordnung 10^{-8} cm, so ist derjenige des Atomkerns nur von der Größenordnung 10^{-13} cm, der eines Elektrons ebenfalls. F. Denk nahm als Radius eines Elektrons $3 \cdot 10^{-13}$ cm an und hat einmal folgende "Veranschaulichung" gegeben: Der Durchmesser des Weltalls sei etwa $3 \cdot 10^{28}$ cm.
Wieviel Elektronen kann man hintereinander quer durch die Welt legen? Man rechnet 10^{41}. Ordnet man diese Reihe als Quadrat an, so hat dessen Seite ungefähr 1000 km, ordnet man sie als Würfel an, so hat dieser eine Kantenlänge von ungefähr 30 cm.

Während das Rad eines ziemlich schnell fahrenden Autos sich in der Sekunde etwa 10mal, der Propeller eines Flugzeuges 25mal, der Kreiselkompass etwa 300mal und die Kugeln im Lager eines solchen Kompasses etwa 1000mal drehen, umkreist das Elektron das Wasserstoffatom in einer Sekunde etwa $7 \cdot 10^{15}$mal.
Eine Umkreisung dauert demnach rund $1{,}4 \cdot 10^{-16}$ Sekunden.
Und nun eine Folgerung aus dieser eigenartigen Atomstruktur. Ein Kubikmeter Blei wiegt 11,34 Tonnen. Das "Atomfleisch" nimmt aber nur einen Rauminhalt von der Größenordnung eines Kubikmillimeters ein. In diesem einen Kubikmillimeter konzentriert sich aber das Gewicht jener 11,34 Tonnen. Welche Perspektiven hören sich der Technik, wenn sie Atomkerne in Reinkultur gewinnen könnte!

Bei der Winkelmessung teilt man den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden. Beispielsweise erscheint uns der Durchmesser des Mondes bei mittlerer Entfernung ungefähr unter einem Winkel von 30 Minuten.
Der Astronom versteht unter 1 parsec die Entfernung eines Punktes, von dem aus der Durchmesser der Erdbahn unter einem Winkel von 1 Sekunde erscheint; es sind das 3,26 Lichtjahre. Er kennt Sternhaufen in 70000 parsec, vielleicht noch weit größerer Entfernung. Von dort aus erscheint die Erdbahn unter einem Winkel von $\frac{1}{70000}$ Sekunde und weniger.
Noch ein Beispiel der Winkelmessung: Bei Bestimmung der Erdanziehung benutzte S.v. Eötvös Instrumente, die eine Richtungsänderung der Schwerkraft von $\frac{356}{200000000}$ Sekunde anzeigen. Das ist der Sehwinkel, unter dem uns $\frac{1}{3}$ cm auf der Mondoberfläche erscheint.

Wir sahen, wie weit man in das Reich der kleinen Zeiten, Strecken, Gewichte und Winkel mit unseren Beobachtungsmitteln und Theorien vordringen kann. Wir kehren nun zurück in die Welt der reinen Zahlen.
In der Mathematik spielen die kleinen Größen besonders da eine Rolle, wo es sich um Werte handelt, die man mit unserem dezimalen Zahlsystem nicht genau ausdrücken kann, wo man Näherungswerte an ihre Stelle setzt. Ein ganz einfaches Beispiel wird zeigen, wie ich das meine.

Wenn man $\frac{1}{3}$ in einen Dezimalbruch entwickelt, kommt ein unendlicher periodischer Dezimalbruch heraus. Diese Zahl 0,3333... kann man nie genau hinschreiben.
Wo man auch abbricht, immer macht man einen Fehler. Es ist aber immer möglich, diesen Fehler unter jede verlangte Größe herabzudrücken. Ich kann dafür sorgen, dass der Fehler kleiner als 0,0001, kleiner als 0,0000001 wird usf.
Ich brauche zu dem Ende nur den periodischen Dezimalbruch weit genug hinzuschreiben, also 0,3333 und 0,3333333.

Im Falle des periodischen Dezimalbruches für $\frac{1}{3}$ ist die Periode kurz; sie beträgt nur eine Stelle. Man sieht leicht ein, dass die Periode eines Bruches $\frac{1}{p}$, wobei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl ist, höchstens $p-1$ Stellen haben kann. Wenn man nämlich die Division wirklich durchführt, dann sind nur $p-1$ verschiedene Reste nach der Subtraktion der Teilprodukte möglich, und wenn der erste Rest wieder aufgetaucht ist, wiederholt sich alles in gleicher Weise wie vorher.
Wie wir an dem Bruch $\frac{1}{3}$ oder aber $\frac{1}{11}$ sehen, brauchen aber keineswegs $p-1$ Stellen der Periode vorhanden zu sein. Bei $\frac{1}{3}$ sind es statt 2 nur 1, bei $\frac{1}{11}$ statt 10 nur 2.

Brüche, bei denen die größtmöglichen Periodenlängen auftreten, sind $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{1}{47}$, $\frac{1}{59}$, $\frac{1}{61}$, $\frac{1}{97}$, $\frac{1}{109}$ usf.

Da entstehen dann also recht lange Ziffernfolgen, ehe die Periode mit der gleichen Folge erneut anhebt. Ich nehme als Beispiel den Bruch $\frac{1}{109}$. Er lautet
0,009 174 311 926 605 504 587 155 963 302 752 293 577 981 651 376 146 788 990 825 688 073 394 495 412 844 036 697 247 706 422 018 348 623 853 211 ...

Die Periode beginnt erst nach der 108. Stelle. Die Zahlentheorie enthüllt wundervolle

Gesetzmäßigkeiten im Aufbau dieser Perioden![6] Wenn man z.B. $\frac{2}{109}$, $\frac{3}{109}$ usf. bis $\frac{108}{109}$ bildet, dann bekommt man in allen Fällen die gleiche Ziffernfolge, nur fängt sie an jeweils einer anderen Stelle an; so fängt z.B. $\frac{2}{109}$ mit 0,018348623853211 an; das sind die letzten 15 Stellen von $\frac{1}{109}$.

In der Regel zeigt man diese Zahlenmerkwürdigkeiten an der Entwicklung von $\frac{1}{7} =$ 0,142857... und stellt die Aufgabe so, dass man die Zahl 142857 mit 2, 3 usf. multiplizieren lässt. Der Freund von Zahlenriesen mag sich statt dessen an unserem obigen Dezimalbruch von $\frac{1}{109}$ erfreuen.

Wir wenden uns nun weiter einer bekannten Zahl zu, die uns in diesem Bändchen schon einmal begegnet ist, als es sich um die Ausrechnung des Inhalts einer Kugel handelte. π ist eine abkürzende Bezeichnung für die Zahl, mit der man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren muss, um den Umfang zu erhalten. Diese Zahl hat eine lange Geschichte.[7] Wenn man mit einem neuen Geldstück den Wert von π praktisch bestimmt, kommt man auf etwas mehr als 3. Vielfach begnügt man sich im praktischen Leben mit dem Werte $3\frac{1}{7}$ oder, wie wir es getan, mit der Dezimalzahl 3,14.

Aber dieser Wert ist nicht etwa genau. Archimedes, der um die Berechnung von π große Verdienste hat, zeigte schon, dass π zwischen $3\frac{10}{70}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt.
Im Laufe der Jahrhunderte hat man gelernt, π immer genauer auszurechnen. Die ersten Stellen sind 3,141592653... Um sie zu merken, hat man Verse erdacht, bei denen die Buchstabenzahl der einzelnen Worte die Ziffer angibt. Ich nenne von den nicht wenigen deutschen, französischen und englischen, oft fürchterlichen "Gedichten" eines, das von P. Weinmeister stammt:

Wie, o dies π.
Macht ernstlich so vielen viele Müh'.
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.

Die Zahl π nennt man zuweilen die Ludolfsche Zahl, weil Ludolf van Ceulen, der um 1600 lebte, sie zuerst auf eine größere Anzahl Stellen, erst 20, dann 32, schließlich 35, berechnet hat.
Vega, dessen Logarithmentafeln weit bekannt geworden sind, hat π auf 140 Stellen berechnet; der Rechenkünstler Zacharias Dahse rechnete 200 Dezimalen aus. Rutherford (1833) 440, Professor Richter in Elbing (1853) 500, schließlich ein Engländer W. Shanks (1873) 707 Stellen. Er hatte Pech. Bis vor 20 Jahren hatte keiner sein Ergebnis nachgeprüft.
Erst D.F. Ferguson und J.W. Wrench haben unabhängig voneinander und nach verschiedenen Formeln[8] sich erneut an die Berechnung gemacht und sie auf 808 Stellen durchgeführt. Sie haben dabei festgestellt, dass der Shankssche Wert von der 528. Dezimale an falsch war.

[6] Vgl. A. Leman-B. Schoenberg, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie.
[7] Vgl. E. Beutel, Die Quadratur des Kreises.
[8] Ferguson benutzte

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Die Zahl lautet:

3,
14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095
50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930
38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692
34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817 48815
20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951
94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446
23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430
86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674
81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290
21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951
05973 17328 16096 31859 50244 594(55)

Diese Zahl gibt Anlass zu allerlei Fragen. So kann man die Häufigkeit der einzelnen Ziffern feststellen. Durchschnittlich sollte jede 80 mal auftreten. Als man die Auszählung an der Shanksschen Ziffernfolge vornahm, da tanzte die Zahl 7 ganz aus der Reihe, sie kam, wie I.C.V. Hoffmann bei einem Bericht über die Shankssche Zahl feststellte, nur 53 mal statt 80 mal vor. Man hat damals viel darüber diskutiert, ob das an dem Bau der Zahl π liege oder nur "Zufall" sei.
Macht man jetzt die Auszählung an dem neuen Wert, dann sieht man, dass die Zahl 7 die ihr zustehende Wahrscheinlichkeit tatsächlich einigermaßen erreicht.[9] Der Leser wird leicht andere Wahrscheinlichkeitsfragen an diese Zahl anknüpfen können.

Wir wollen nun die Zahl π dazu benutzen, uns die Bedeutung des Fehlers bei den Näherungswerten deutlich zu machen. Wenn wir π auf nur vier Stellen nach dem Komma abkürzen, also den Wert 3,1416 wählen, so ist der Fehler, den wir damit begehen, jedenfalls kleiner als 0,0001. Wenn ich also den Durchmesser eines Kreises ganz genau messen könnte, so wäre der mit Hilfe dieses Näherungswertes berechnete Kreisumfang sicher bis auf $\frac{1}{10000}$ des Durchmessers genau richtig.
Würde es sich z.B. um einen Kreis von 100 m Durchmesser handeln., so wäre der Umfang auf $\frac{1}{10000}$ von 100 m, d.h. auf einen Zentimeter genau, berechnet. Man sieht, das ist schon eine ganz ansehnliche Genauigkeit, die z.B. die in der Architektur erreichbare weit übersteigt.

Doch weiter. - Wir nehmen für π einen Wert von 26 Stellen nach dem Komma. Dann ist der Fehler kleiner als Eins durch hundert Quadrillionen. Wählen wir jetzt einen Kreis

Wrench dagegen
$$\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1935}$$

[9] Das bestätigt eine mit der ENIAC-Rechenmaschine in 96 Stunden durchgeführte Berechnung von π auf 2040 Stellen. - In der fränzösischen Zeitschrift "Chiffres", Jahrgang 1 (1958), Nr. 1, ist π auf 10000 Dezimalstellen hinter dem Komma angegeben.

vom Radius fünfzig Billionen Kilometer; das ist etwa eine Strecke von fünf Lichtjahren oder etwas mehr als die Entfernung des nächsten Fixsterns.
Dann ist die Genauigkeit, mit der man mit Hilfe des 26stelligen Wertes von π den Umfang dieses Riesenkreises berechnen könnte, der hundertquadrillionste Teil dieses hundert Billionen Kilometer zählenden Kreisdurchmessers. Das bedeutet aber eine Genauigkeit von ein billionstel Kilometer oder, was dasselbe ist, von einem Nanometer.

Vergleiche diesen gewaltigen Kreis, der sich in Fixsternweiten erstreckt, mit diesem kleinen Fehler, der von der Größenordnung der Moleküle ist! Und doch sind da erst 26 Stellen von π berücksichtigt und nicht die 808, die wir soeben anführten.

Neben π ist der Mathematiker besonders an der Zahl e, der Basis der natürlichen Logarithmen, interessiert. Auf Euler geht die Bezeichnung e für die Zahl 2,718 281 828 459 04 ... zurück; Ende des 19. Jahrhunderts war e auf 346 Dezimalen bekannt; die ENIAC berechnete sie in 36 Stunden auf 2016 Stellen.

Eine merkwürdige Zahl ist i^i, wo i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ ist. Sie ist nämlich reell und hat den Wert $e^{-\frac{2}{2}}$. Ihr Wert wurde 1921 auf 55 Stellen angegeben. Die ersten Stellen sind 0,207 87957...

9 Auch im Lande der Riesen und der Zwerge wird mit gewöhnlichen Zahlen gerechnet

Denke dir ein Land von Riesen. Alle, die dort wohnen, sind große Menschen, im Durchschnitt vielleicht 10 Meter hoch, die Kinder natürlich kleiner. Meinst du, dass diese Leute sich untereinander als Riesen fühlen? -
Oder denke dir ein Land von Zwergen. Alle sind sie, die dort wohnen, höchstens 10 cm groß. Meinst du, diese Däumlinge fühlen sich als Zwerge? Gewiss nicht.
Aber wenn du, wie Gulliver einst, zu ihnen reistest! Kämst du zu den Riesen, würden sie ausrufen: "Welch ein Zwerg!" Und kämst du zu den Zwergen, würden sie sagen: "Welch ein Riese!"

Du verstehst: Es kommt alles auf die Einheit an, die man als Grundmaß nimmt. Du urteilst von deiner Körpergröße aus, die Riesen von ihren 10 Metern, die Zwerge von ihren 10 Zentimetern. Und nun male dir den Gedanken einmal weiter aus! Nimm an, die um ihren Atomkern kreisenden Elektronen seien bewohnt, auf ihnen lebten kleine Menschlein, wie wir auf der Erde, die Mathematik trieben wie wir.
Was uns Zahlenzwerge im Raume und in der Zeit sind, sind ihnen Zahlenriesen gewaltigster Art. - Und dem stelle ein Riesenlebewesen gegenüber! Die Erde, die Sonne und die Sterne sind die Atome und Elektronen, aus denen es aufgebaut ist. Was sind für diesen Übermenschen die Zahlenriesen, die unserer Anschauung verschlossen sind?

Was ich sagte, bezieht sich auf die Zahlen, in denen Strecken, Flächen, Körper, Zeiten ausgedrückt werden, Gewichte, Geschwindigkeiten und was mit jenen zuerst genannten Größen zusammenhängt.
Der Molekülmensch wird andere Einheiten haben als wir, wieder andere der Weltenmensch. Ihre Rechnungen aber werden so ähnlich aussehen wie die unseren. Sie werden nicht etwa mit einem Zwergeneinmaleins und einem Rieseneinmaleins rechnen. Ihr tägliches Brot beim Rechengeschäft wird genau so aussehen wie bei uns auch.

Raumgrößen kommt also an sich kein bestimmter Zahlenwert zu. Der hängt vielmehr ganz von der gewählten Einheit ab. Dass es mit Zeitgrößen, mit Gewichten, Geschwindigkeiten usf. ebenso ist, wirst du dir nun selbst klarmachen können.

Wir sind am Schluss unserer Wanderungen in jenem großen Gebiet, das sich zwischen 0 und ∞, zwischen Null und Unendlich, erstreckt. Wir haben uns, im Gegensatz zum Unterricht in unseren Schulen und zum Rechnen des täglichen Lebens, vornehmlich in den Gegenden bewegt, die den beiden Grenzen naheliegen, und sind doch nirgends an die Grenzen recht herangekommen.
Oft führen wir das Wort "unendlich" im Munde und meinen doch, gemessen an den endlichen Zahlen, wie sie z. B. Archimedes erdacht hat, Zahlenzwerge. Eine unendliche Farbenpracht, eine unendliche Fülle der Gedanken, der Ereignisse strömt auf den Menschen ein, umgibt ihn allerorten. So sagen wir. Und doch!

Die Zahl aller Gedanken, die je gedacht werden sind, ist endlich. Denn zu jedem Gedanken braucht man Zeit, und so kann jeder Mensch in seinem endlichen Leben nur endlich viele Gedanken denken. Und da die Zahl der Menschen, alle Altvorderen eingerechnet, auch endlich ist, ist auch die Anzahl aller je gedachten Gedanken endlich. Und mit den Sinneseindrücken, den Farben, den Tönen, ist es genauso.

Es gehört zum Größten, was die Mathematik geleistet hat, dass sie trotz dieser Atmosphäre des Endlichen, die den Menschen überall umgibt, die Idee des Unendlichen aus dem Bereiche nebelhafter Vorstellungen in die Welt exakter Wissenschaft übergeführt hat.

Literaturverzeichnis

1. Beutel, Die Quadratur des Kreises, 3. Aufl., Leipzig 1951
2. Brockhaus ABC der Astronomie, Leipzig 1961
3. Dynkin-Uspenski, Aufgaben aus der Zahlentheorie, 3. Aufl., MSB Nr. 20, Berlin 1966
4. Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen, 3. Aufl., MSB Nr. 22, Berlin 196
5. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. Bd. I und Bd. IV, Leipzig 1966
6. Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt. MSB Nr. 39, Leipzig 1968
7. Leman-Schoeneberg, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie, 2. Aufl., Leipzig 1952
8. Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz, 8. Aufl., MSB Nr. 6. Leipzig 1966
9. Lietzmann, Sonderlinge im Reich der Zahlen, Bonn 1948
10. Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I/II, MSB Nr. 3 und Nr.24, Leipzig 1966
11. Miller, Rechenvorteile, 4. Aufl., MSB Nr. 14. Leipzig 1968
12. Szava, Der Gigant von Syrakus. Leipzig 1963
13. Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen?, 4. Aufl., Berlin 1966
14. Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1. Zahlentheorie. MSB Nr. 36, Leipzig 1968