Maria Hasse

Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

1966 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 2
Abschrift und LaTex-Satz: 2020 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das vorliegende Büchlein ist aus einer Reihe von Vorträgen hervorgegangen, die der Verfasser im Winter 1963/64 vor Lehrern des Bezirkes Dresden gehalten hat. An dieser Veranstaltung nahmen auch einige Schüler von Dresdener Oberschulen teil, und es zeigte sich, dass diese durchaus in der Lage waren, dem Vortrag zu folgen.

Hieraus und aus der Tatsache, dass in einer Reihe anderer Länder die Grundbegriffe der Aussagenlogik und der Mengenlehre - teils explizit, teils implizit - in den obligatorischen Schulunterricht aufgenommen wurden und bei uns ebenfalls Bestrebungen in dieser Richtung bestehen, glauben wir die Berechtigung herleiten zu dürfen, dieses zunächst nicht für Schüler abgefasste Manuskript in die Mathematische Schülerbibliothek aufzunehmen.

Wir empfehlen seine Lektüre jedoch in erster Linie den Schülern der 11. und 12. Klasse unserer Oberschulen. Darüber hinaus glauben wir, dass dieses Buch auch Lehrern, Ingenieuren und mathematisch interessierten Studenten naturwissenschaftlicher Fachrichtungen von Nutzen sein könnte.

Sowohl Herrn Dr. Ilse vom Institut für Schulmathematik an der Humboldt-Universität Berlin als auch vor allem meinem Mitarbeiter Herrn Dr. Michler bin ich für wertvolle Anregungen zu Dank verpflichtet. Bei der Durchsicht der Korrekturen haben mich meine Assistenten Frau Geisler, Frau Ludwig und Herr Reichel freundlicherweise unterstützt.

Dresden, den 13. Januar 1965
Maria Hasse

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Unter einer Aussage verstehen wir einen Satz, der die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein, oder - wie wir auch sagen wollen - genau einen der Wahrheitswerte "das Wahre" (W) oder "das Falsche" (F) zu besitzen:
Beispiele für Aussagen sind etwa:

a) 13 ist eine Primzahl.
b) $\sqrt{2}$ ist eine transzendente Zahl.
c) Zu keiner natürlichen Zahl n, die größer als 2 ist, lassen sich drei natürliche Zahlen x, y, z so angeben, dass

$$x^n + y^n = z^n$$

ist.
Die Aussage a) hat den Wahrheitswert W, die Aussage b) den Wahrheitswert F und die Aussage c), die Fermatsche Vermutung, hat ebenfalls einen Wahrheitswert, den wir Mathematiker allerdings im Augenblick noch nicht angeben können.

In enger Beziehung mit dem Begriff der Aussage steht der Begriff der Aussageform. Eine Aussageform hat die Gestalt (Form) eines Satzes, in dem eine oder mehrere Variable auftreten, und besitzt die Eigenschaft, dass man jedesmal eine Aussage erhält, wenn man für diese Variablen beliebige Objekte oder, genauer, Namen für Objekte einer irgendwie festliegenden Gesamtheit einsetzt.

Ist $a(x)$ eine Aussageform, in der für x Objekte einer Gesamtheit X einzusetzen sind, so spricht man von einer Aussageform $a(x)$ über X.

So ist beispielsweise "x ist durch 3 teilbar" eine Aussageform setzt man hier für x eine beliebige, aber feste ganze rationale Zahl ein, so kommt man zu einer Einzelaussage, die wahr oder falsch ist, je nachdem, welche Zahl man für x gesetzt hat. Für $x = 26$ etwa ergibt sich eine falsche, für $x = 27$ dagegen eine wahre Aussage.
Eine Aussageform über der Gesamtheit der reellen Zahlen ist etwa "$y = 3x + 5$" oder "$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$". Während die erstere Aussageform z.B. für $x = 1$, $y = 8$ eine wahre Aussage liefert und für $x = 1$, $y = 9$ eine falsche, ergibt die letztere Aussageform für jede Wahl von x und y eine wahre Aussage. Dabei kann man ohne Änderung des Sachverhalts den Bereich der reellen Zahlen zu dem Bereich der komplexen Zahlen erweitern.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass man aus einer Aussageform auch dadurch eine Aussage gewinnen kann, dass man vor die Aussageform noch gewisse sprachliche Gebilde setzt, die eine Quantifizierung der in der Aussage auftretenden Variablen bewirken.
Diese vorgestellten sprachlichen Gebilde lauten:

"Für alle x" ("Zu jedem x") bzw. "Es gibt ein x" ("Es existiert ein x), in Zeichen

$$\forall x \qquad \text{bzw.} \exists x$$

Ihrem Inhalt entsprechend nennt man die Symbole $\forall$ und $\exists$ Quantifikatoren. Aussagen, die auf diese Weise erhalten werden, heißen, je nachdem, welcher der Quantifikatoren auftritt, Allaussagen oder Existentialaussagen.

Neben den Aussageformen spielen bei der Erzeugung von Aussagen auch die sogenannten Aussagenverbindungen eine Rolle.
Eine solche Aussagenverbindung erhält man, wenn man vor eine Aussage das Wort "nicht" setzt oder wenn man zwei Aussagen zu einer neuen Aussage verknüpft, beispielsweise mit Hilfe der folgenden aussageerzeugenden Wörter:

"und", "oder", "wenn - so", "genau dann - wenn".

Dabei wird festgelegt, wenn man eine beliebige Aussage durch einen der Buchstaben p, q, r, ... kennzeichnet:

Die Negation "nicht b" (in Zeichen: $\sim p$) ist genau dann wahr, wenn die Aussage p falsch ist.

Die Konjunktion "p und q" (in Zeichen: $p \wedge q$) ist genau dann wahr, wenn sowohl die Aussage p als auch die Aussage q wahr ist.

Die Alternative (auch Disjunktion genannt) "p oder q" (in Zeichen: $p \vee q$) ist genau dann falsch, wenn sowohl die Aussage p als auch die Aussage q falsch ist.

Die Implikation "wenn p, so q" (in Zeichen: $p \Rightarrow q$) ist genau dann falsch, wenn die Aussage p wahr und die Aussage q falsch ist.

Die Äquivalenz "genau dann p, wenn q" (in Zeichen: $p \Leftrightarrow q$) ist genau dann wahr, wenn die Aussagen p und q beide den gleichen Wahrheitswert haben.

Hierbei ist wesentlich, dass sich der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen ergibt.
Die oben angegebenen Festsetzungen kann man in Form von logischen Matrizen oder Wahrheitstafeln wie folgt ausdrücken:

$\sim$	
W	F
F	W

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

$\vee$	W	F
W	W	W
F	W	F

$\Rightarrow$	W	F
W	W	F
F	W	W

$\Leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

Entsprechend kann man die Negation, Konjunktion, Alternative, Implikation und Äquivalenz von Aussageformen bilden, deren Variable durch die Objekte einer und derselben Gesamtheit ersetzt werden dürfen.

Unter den Aussagenverbindungen $\mathfrak{a}(p_1, p_2, ..., p_n)$ von n Aussagen p_1, p_2, ..., p_n gibt es solche, die unabhängig davon, welche Aussagen man für $p_1, ..., p_n$ einsetzt, stets den Wahrheitswert W bzw. stets den Wahrheitswert F haben.
Solche Aussagenverbindungen nennt man Tautologien oder auch Identitäten bzw. Kontradiktionen.

Beispielsweise ist die Aussagenverbindung $p \vee (\sim p)$ eine Tautologie (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) und die Aussagenverbindung $p \wedge (\sim p)$ eine Kontradiktion (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch).[1]

Zwei Aussagenverbindungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ heißen logisch äquivalent, im Zeichen: $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2$, wenn sie unabhängig davon, welche Aussagen für $p_1, p_2, ..., p_n$ eingesetzt werden, stets denselben Wahrheitswert haben, d.h., wenn die Aussagenverbindung

$$\mathfrak{a}_1(p_1, p_2, ..., p_n) \Leftrightarrow \mathfrak{a}_2(p_1, p_2, ..., p_n)$$

eine Tautologie ist.

Wir bemerken, dass die logische Äquivalenz eine Beziehung zwischen Aussagen ist. Diese genügt den folgenden Gesetzen:

a) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$ (Reflexivität);

b) aus $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{a}_1$ (Symmetrie);

c) aus $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{a}_3$ folgt $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_3$ (Symmetrie);

d) aus $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2$ folgt $\sim \mathfrak{a}_1 \equiv \sim \mathfrak{a}_2$;

e) aus $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \equiv \mathfrak{a}_4$ folgt $(\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_3) \equiv (\mathfrak{a}_2 \wedge \mathfrak{a}_4)$, $(\mathfrak{a}_1 \vee \mathfrak{a}_3) \equiv (\mathfrak{a}_2 \vee \mathfrak{a}_4)$, $(\mathfrak{a}_1 \Rightarrow \mathfrak{a}_3) \equiv (\mathfrak{a}_2 \Rightarrow \mathfrak{a}_4)$, $(\mathfrak{a}_1 \Leftrightarrow \mathfrak{a}_3) \equiv (\mathfrak{a}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{a}_4)$.

Man kann daher eine in einer Äquivalenz auftretende Aussagenverbindung durch eine zu ihr äquivalente Aussagenverbindung ersetzen, ohne dadurch das Bestehen der Äquivalenz zu zerstören.

Beispiele für Tautologien:

(1) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$,

(2) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,

(3) $(p \wedge q) \Rightarrow p, \quad (p \wedge q) \Rightarrow q$,

(4) $p \Rightarrow (p \vee q), \quad q \Rightarrow (p \vee q)$,

(5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,

(6) $([(p \Rightarrow 9) \wedge (q \Rightarrow r))] \wedge p) \Rightarrow r$.

Beispiele für logische Äquivalenzen:

(7) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p), \quad (p \vee q) = (q \vee p)$,

(8) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r], \quad [p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$,

(9) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)], \quad [p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

(10) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$,

(11) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$,

[1] Treten in einem Ausdruck gleichzeitig mehrere logische Zeichen auf, so ist zu beachten, dass $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ stärker binden als $\wedge$ und $\vee$.

(12) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \equiv (p \Rightarrow q)$,

(13) $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$,

(14) $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$,

(15) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q), \quad \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$,

(16) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)] \equiv [(p \vee r) \Rightarrow q]$,

(17) $[p \vee (q \wedge \sim q)] \equiv p$,

(18) $[p \wedge (q \vee \sim q)] \equiv p$.

Den Nachweis der logischen Äquivalenz zweier Aussagenverbindungen erbringt man, indem man das Symbol $\equiv$ ersetzt durch das Symbol $\Leftrightarrow$ und mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigt, dass die so entstehende Aussagenverbindung eine Tautologie ist, d.h. stets den Wahrheitswert W hat.
Bei Kenntnis gewisser Tautologien kann man den Beweis führen, ohne eine Wahrheitstafel aufzustellen, indem man mit Hilfe dieser Tautologien die linke Seite der betrachteten Äquivalenz in die rechte Seite überführt. Wir werden beide Arten des Beweises am Beispiel (14) vorführen.

a) Beweis mit einer Wahrheitstafel:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W	F	F	F	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F	F	W	F
F	F	F	W	W	W	W	W	W

b) Beweis mit Hilfe von Umformungen bei Kenntnis von (7), (8), (9), (10), (13) und (17):

$$\begin{aligned}(p \Leftrightarrow q) &\overset{(13)}{\equiv} [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \overset{(10)}{\equiv} [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)]\\ &\overset{(8),(9)}{\equiv} [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge p)]\\ &\overset{(7),(8),(17)}{\equiv} [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]\end{aligned}$$

Folglich ist wegen der Transitivität von $\equiv$: $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.
Wir machen abschließend noch eine für das Weitere wesentliche Bemerkung:
Ist p eine wahre Aussage und ist die Aussagenverbindung $p \Rightarrow q$ ebenfalls wahr, so ist auch q eine wahre Aussage. Man nennt diese Schlussweise die Abtrennungsregel oder den modus ponens; sie wird symbolisch so ausgedrückt:

$$\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Allgemeiner erhält man durch n-malige Anwendung der Abtrennungsregel

$$\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow p_1 \\ p_1 \Rightarrow p_2 \\ \dots \\ p_{n-2} \Rightarrow p_{n-1} \\ p_{n-1} \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Man hat also bewiesen, dass eine Aussage q wahr ist, wenn man zeigen kann, dass die Aussagenverbindungen $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2$, ..., $p_{n-2} \Rightarrow p_{n-1}$, ..., $p_{n-1} \Rightarrow q$ sämtlich wahr sind, und wenn obendrein die Aussage p, von der wir ausgehen, ebenfalls wahr ist.
Im folgenden werden wir für: "Die Aussagenverbindungen $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2$, ..., $p_{n-1} \Rightarrow q$ sind wahr" sehr oft abkürzend schreiben:
"Es gilt: $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2, ..., p_{n-1} \Leftrightarrow q$".

Sind die Aussagenverbindungen

$$p \Leftrightarrow p_1, p_1 \Leftrightarrow p_2, ..., p_{n-1} \Leftrightarrow q$$

alle wahr, so ist mit p auch q und mit q auch p wahr. Anstelle von: "Die Aussagenverbindungen $p \Leftrightarrow p_1, p_1 \Leftrightarrow p_2, ..., p_{n-1} \Leftrightarrow q$ sind wahr"schreiben wir wieder kurz: Es gilt:

$$p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow p_{n-1} \Leftrightarrow q$$

Aufgabe:
Man beweise die Tautologien (1) bis (6) und die logischen Äquivalenzen (7) bis (18).

2 Mengen und Teilmengen

Der Prozess der Mengenbildung als Zusammenfassung von verschiedenen Einzelobjekten zu einem einheitlichen Ganzen ist jedem von Kindheit an geläufig. So bilden z.B. alle Schüler, die gemeinsamen Unterricht haben, eine Menge, nämlich eine Schulklasse. Auch die Bewohner eines Hauses bilden eine Menge, die Hausgemeinschaft des betreffenden Hauses.

Schließlich betrachten wir hier noch die Menge M_a, die von allen Punkten einer Ebene mit den Koordinaten (a, y) gebildet wird, wo a eine beliebige, aber feste ganze rationale Zahl bedeutet und y über der Menge der ganzen Zahlen variiert.
Zur Menge M_a gehören also alle Punkte mit den Koordinaten $(a, 0)$, $(a, 1)$, $(a, -1)$, $(a, 2)$, $(a, -2)$, ... und nur diese.

Es ist üblich, die Objekte x, die eine bestimmte Menge M bilden, die Elemente der Menge M zu nennen und den Sachverhalt "x ist Element von M" symbolisch mit Hilfe des Zeichens für die Elementrelation $\in$ in der Form "$x \in M$" auszudrücken.
Anstelle von "$\sim (x \in M)$" schreibt man: "$x \notin M$" und liest dies: "x ist kein Element von M".

Ist die Anzahl der Elemente einer Menge endlich, so spricht man auch von einer endlichen Menge und im entgegengesetzten Fall von einer unendlichen Menge.

In allen drei oben angegebenen Beispielen sind die Elemente der betrachteten Mengen ihrerseits keine Mengen. Sowohl ein Schüler als ein Hausbewohner als auch ein Punkt sind Einzelobjekte. Man kann aber auch Mengen bilden, deren Elemente selbst Mengen sind, z.B. die Menge aller Klassen einer Schule, die Menge aller Hausgemeinschaften einer Straße oder die Menge aller Mengen M_a, wo jetzt a alle ganzen Zahlen durchläuft.
Die erste Festsetzung über Mengen, die wir treffen, betrifft die Gleichheit von Mengen, und zwar fordern wir die Gültigkeit der folgenden Aussage:

Genau dann sind die Mengen M_1 und M_2 gleich - in Zeichen: $M_1 = M_2$ -, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 und umgekehrt jedes Element von M_2 auch Element von M_1 ist.

Für die Aussage "$\sim (M_1 = M_2)$" schreibt man: "$M_1 \neq M_2$". Hiernach ist also eine Menge bereits durch ihre Elemente eindeutig bestimmt. Man kann daher eine endliche Menge notieren, indem man ihre Elemente in irgendeiner beliebigen Reihenfolge, jeweils durch ein Komma getrennt, nacheinander aufschreibt und diese dann unter Verwendung des Klassifikators $\{...\}$ nach links und rechts gegen andere, nicht zur Menge gehörige Elemente abgrenzt. So schreiben wir z.B. die Menge mit den Elementen 1 und 2 in der Form $\{1, 2\}$ und die Menge, die nur das Element 1 besitzt, als $\{1\}$.

Beispiele für gleiche Mengen:

$$\{i, s, e, r\} = \{r, e, s, i\} = \{r, e, i, 3\}, \quad \{1, 2, 2, 1\} = \{1, 2\}, \quad \{a, b\} = \{b, a\}$$

Man beachte wohl, dass dagegen nach unserer Festsetzung der Mengengleichheit die Schülerschaft einer Schule A, die Einwohnerschaft einer Straße B und die Menge der

"Gitterpunkte" (x, y) $(-\infty < x, y < +\infty; x, y$ ganz rational) verschieden ist von der Menge der Klassen der Schule A, der Menge der Hausgemeinschaften der Straße B und der Menge der Mengen M_a.

Im ersteren Falle sind die Elemente Schüler, Hausbewohner und Punkte, im letzteren dagegen Schulklassen, Hausgemeinschaften und Punktmengen.

Wir treffen nunmehr unsere zweite Festsetzung über Mengen.
Wir denken uns eine Menge M und eine Aussageform $\mathfrak{e}(x)$ über M gegeben und fordern dann die Gültigkeit der folgenden Aussage:

Es gibt eine Menge N, die genau diejenigen Elemente von M umfasst, für die $\mathfrak{e}(x)$ eine wahre Aussage liefert oder - wie wir kurz dafür sagen wollen - für die $\mathfrak{e}(x)$ wahr ist.
Diese Forderung ist naheliegend. Betrachten wir z.B. die Aussageform "x ist durch 2 teilbar" über der Menge Γ der ganzen rationalen Zahlen, so bilden diejenigen ganzen Zahlen, für die diese Aussage zutrifft, ihrerseits eine Menge, nämlich die der geraden Zahlen.

Offenbar ist die Menge N durch $\mathfrak{e}(x)$ und M eindeutig bestimmt. Man drückt diesen Sachverhalt symbolisch aus durch die Schreibweise

$$N = \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\}$$

was man liest: "N ist die Menge aller x aus M, für die $\mathfrak{e}(x)$ wahr ist" oder "N ist die Menge aller x aus M, die die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ besitzen".
Es ist dabei durchaus möglich, dass sprachlich verschiedene Aussageformen die gleiche Menge N in M definieren. So lässt sich z.B. die Menge $\{1, 2\}$ in Γ erklären als

$$\{x \in \Gamma : x^2 - 3x + 2 = 0\} \qquad \text{oder auch als} \qquad \{x \in \Gamma : 0 < x \leq 2\}$$

Dabei gilt jedoch ersichtlich für jedes $x \in \Gamma$

$$(x^2 - 3x + 2 = 0) \Leftrightarrow (0 < x \leq 2)$$

Man überlegt sich unschwer, dass die hier im Spezialfall gewonnene Erkenntnis allgemein gilt:
Zwei über einer Menge M erklärte Aussageformen $\mathfrak{e}_1(x)$ und $\mathfrak{e}_2(x)$ definieren genau dann dieselbe Menge N in M, wenn $\mathfrak{e}_1(x) \Leftrightarrow \mathfrak{e}_2(x)$ für jedes $x \in M$ gilt.

Wir haben im Vorhergehenden diejenigen Elemente einer Menge M zu einer Menge N zusammengefasst, die eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{e}$ besitzen. Da mit $\mathfrak{e}(x)$ auch $\sim \mathfrak{e}(x)$ eine Aussageform über M ist, so existiert nach unserer Festsetzung auch eine Menge N^*, die genau diejenigen Elemente von M umfasst, die die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ nicht besitzen, nämlich

$$N^* = \{x \in M : \sim \mathfrak{e}(x)\}$$

Nun ist nach unserer Definition des Begriffes der Aussageform $\mathfrak{e}(x)$ für jedes Element x der Menge M entweder wahr oder falsch - eine dritte Möglichkeit haben wir nicht zugelassen. Also gehört jedes Element von M auch einer der Mengen N oder N^* als

Element an, jedoch niemals beiden gemeinsam.

Unter Beachtung der für jedes $x \in M$ bestehenden Äquivalenz $\mathfrak{e}(x) \equiv\sim (\sim \mathfrak{e}(x))$ erhalten wir weiter

$$(N^*)^* = \{x \in M :\sim (\sim \mathfrak{e}(x))\} = \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\} = N$$

Es ist üblich, für die so erklärten Mengen N und N^* eine Bezeichnung einzuführen.

Definition 1: Es sei M eine Menge und $\mathfrak{e}(x)$ eine Aussageform über M. Dann heißen die Mengen

$$N = \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\} \qquad \text{und} \qquad N^* = \{x \in M :\sim \mathfrak{e}(x)\}$$

in M komplementäre Mengen, und man sagt auch, dass N^* die Komplementärmenge von N in M ist. Umgekehrt ist dann N die Komplementärmenge von N^* in M.

So ist die zur Menge der ungeraden Zahlen in Γ komplementäre Menge die Menge der geraden Zahlen, und die zur Menge der Primzahlen in $\Gamma^+ = \{x \in F : x > 0\}$ komplementäre Menge enthält außer der Zahl 1 genau alle zusammengesetzten Zahlen.
Setzt man für $\mathfrak{e}(x)$ speziell die für jedes $x \in M$ wahre Aussage "$x = x$", so ergibt sich: $\{x \in M : x = x\} = M$, also

$$M^* = \{x \in M :\sim (x = x)\} = \{x \in M : x \neq x\}$$

N^* enthält offensichtlich überhaupt keine Elemente; dennoch haben wir M^* nach unserer obigen Festsetzung als Menge anzusehen.
Wir nennen M^* die in M leere Menge und bezeichnen sie mit $\varnothing_M$. Diese ist nach ihrer Konstruktion von M abhängig.

Wir werden jedoch sofort sehen, dass diese Abhängigkeit nur eine scheinbare ist. Dazu zeigen wir, dass für zwei ganz beliebige Mengen M_1 und M_2 stets $\varnothing_{M_1} = \varnothing_{M_2}$, ist, d.h., dass jedes Element von $\varnothing_{M_1}$ auch Element von $\varnothing_{M_2}$ ist und umgekehrt.
Es sei a ein beliebiges, aber festes Element von M_1. Dann ist die Aussage "a ist Element von $\varnothing_{M_1}$"sicherlich falsch, und demzufolge (siehe § 1) ist die Implikation "Wenn a Element von $\varnothing_{M_1}$, so a Element von $\varnothing_{M_2}$" wahr.
Ist b ein beliebiges Element von M_2, so ist die Aussage "b ist Element von $\varnothing_{M_2}$" wiederum falsch und demzufolge die Implikation "Wenn b Element von $\varnothing_{M_2}$, so b Element von $\varnothing_{M_1}$"wahr.

Da die beiden Implikationen für jedes beliebige $a \in \varnothing_{M_1}$ und jedes beliebige $b \in \varnothing_{M_2}$ gelten, so ist tatsächlich $\varnothing_{M_1} = \varnothing_{M_2}$.
Es gibt also unter allen Elementen nur eine Menge, die keine Elemente enthält. Diese heißt die leere Menge und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.

Wie wir gesehen haben, enthält eine Menge N, die in einer Menge M durch eine Aussageform $\mathfrak{e}(x)$ bestimmt ist, zu Elementen ausschließlich Elemente von M, im allgemeinen enthält dagegen M jedoch auch Elemente, die nicht in N gelegen sind.
Den Sachverhalt, dass eine Menge N zu Elementen nur gewisse Elemente einer anderen Menge M hat, treffen wir in der Mathematik häufig an. Man führt daher für Mengen

M und N, die in dieser Beziehung zueinander stehen, eine Bezeichnung ein.

Definition 2: Es seien M und N Mengen. Dann heißt N eine Teilmenge oder Untermenge von M - in Zeichen: $N \subseteq M$ - oder M eine Obermenge von N - in Zeichen: $M \supseteq N$ -, wenn jedes Element von N auch Element von M ist.
Gilt speziell für zwei Mengen M und N die Aussage

$$(N \subseteq M) \wedge (N \neq M)$$

so heißt N eine echte Teilmenge von M - in Zeichen: $N \subset M$ - oder M eine echte Obermenge von N - in Zeichen: $M \supset N$.

Ist N eine Teilmenge einer Menge M, so lässt sich N eindeutig (bis auf logische Äquivalenz) eine Aussageform $\mathfrak{e}(x)$ über M zuordnen, so dass gilt

$$N = \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\}$$

Beispielsweise kann man stets die Aussageform "$x \in N$" wählen.
Wir bemerken, dass es durchaus üblich ist, auch bei echtem Enthaltensein das Zeichen $\subseteq$ zu setzen. $N \subset M$ schreibt man gewöhnlich nur dann, wenn man ausdrücklich betonen will, dass $M \neq N$ ist.
Stets ist, wie erwähnt,

$$N = \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\} \subseteq M$$

und damit speziell

$$\varnothing \subseteq M \qquad \text{und} M \subseteq M$$

Weitere Beispiele sind:
a) $\{s, i, e\} \subseteq \{r, e, s, i\}$
b) Es bezeichne jetzt und im folgenden P_0 die Menge der rationalen Zahlen, P (manchmal auch E) die Menge der reellen Zahlen, K die Menge der komplexen Zahlen und Π die Menge der Primzahlen. Dann gilt

$$\Pi \subseteq \Gamma^+, \quad \Gamma^+ \subseteq \Gamma, \quad \Gamma \subseteq P_0, \quad P_0 \subseteq P, \quad P \subseteq K$$

Ist M eine beliebige Menge und sind $\mathfrak{e}_1(x)$ und $\mathfrak{e}_2(x)$ Aussageformen über M, so ist - wie man sich leicht überlegt - genau dann die Menge $N_1 = \{x \in M : \mathfrak{e}_1(x)\}$ eine Teilmenge der Menge $N_2 = \{x \in M : \mathfrak{e}_2(x)\}$, wenn für jedes $x \in M$, für das $\mathfrak{e}_1(x)$ wahr ist, auch $\mathfrak{e}_2(x)$ gilt. Beispielsweise ist für $M = \Gamma$, $\mathfrak{e}_1(x)$: "x ist Primzahl" und $\mathfrak{e}_2(x)$: "x ist positiv"

$$N_1 = \{x \in \Gamma : x \text{ ist Primzahl}\} \subseteq \{x \in \Gamma : x \text{ ist positiv}\} = N_2$$

Folglich gilt für jede ganze Zahl x: "Wenn x Primzahl ist, so ist x positiv".

Folgt wie hier für alle x einer Menge N die Behauptung $\mathfrak{e}_2(x)$ aus der Voraussetzung $\mathfrak{e}_1(x)$, so nennt man $\mathfrak{e}_2(x)$ eine notwendige Bedingung für $\mathfrak{e}_1(x)$ und umgekehrt $\mathfrak{e}_1(x)$ eine hinreichende Bedingung für $\mathfrak{e}_2(x)$.

Die Menge derjenigen x von M, für die die hinreichende Bedingung erfüllt, d.h. $\mathfrak{e}_1(x)$ wahr ist, ist demnach stets Teilmenge der Menge derjenigen x von M, für die die notwendige Bedingung gilt, d.h. $\mathfrak{e}_2(x)$ zutrifft.
In unserem Beispiel ist "x ist Primzahl" eine hinreichende Bedingung dafür, dass x positiv ist, und "x ist positiv" eine notwendige Bedingung dafür, dass x Primzahl ist.

Betrachten wir dagegen die beiden Aussageformen "x ist Quadratzahl" und "x ist ungerade" über Γ, so lässt sich zwischen den Mengen $\{x \in \Gamma : x \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $\{x \in \Gamma : x \text{ ist ungerade}\}$ keine Enthaltenseinsbeziehung angeben, und das besagt, dass "x ist Quadratzahl" weder hinreichend noch notwendig ist für "x ist ungerade".

Ist $\mathfrak{e}$ eine definierende Eigenschaft einer Teilmenge von M und sind $e\mathfrak{e}_1(x)$ eine hinreichende und $\mathfrak{e}_2(x)$ eine notwendige Bedingung für $\mathfrak{e}(x)$, so gilt

$$\{x \in M : \mathfrak{e}_1(x)\} \subseteq \{x \in M : \mathfrak{e}(x)\} \subseteq \{x \in M : \mathfrak{e}_2(x)\}$$

Satz 1: Für beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow [(M_1 \subseteq 2) \wedge (M_2 \subseteq M_1)]$$

Beweis: Ist $M_1 = M_2$, so ist jedes Element von M_1 auch Element von M_2, also $M_1 \subseteq M_2$, und jedes Element von M_2 ist auch Element von M_1, also $M_2 \subseteq M_1$.
Gilt gleichzeitig $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$, so ist jedes Element von M_1 in M_2 enthalten und jedes Element von M_2 in M_1, also $M_1 = M_2$.

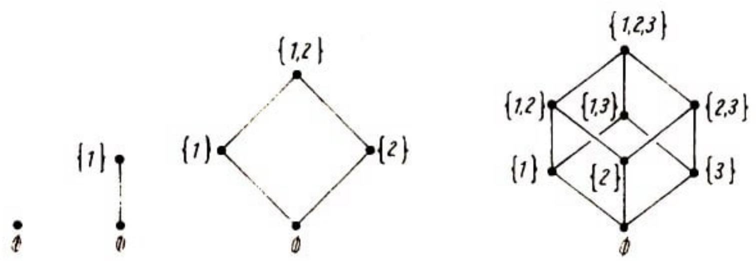
Wir kommen nun zur dritten Festsetzung über Mengen, indem wir die Gültigkeit der folgenden Aussage fordern:

Zu jeder Menge M gibt es eine weitere Menge, die genau die Teilmengen von M zu Elementen hat. Sie heißt die Potenzmenge von M und wird mit $P(M)$ bezeichnet, also

$$P(M) = \{N : N \subseteq M\}$$

Man beachte, dass als Teilmengen von M stets auch $\varnothing$ und M als Elemente zu $P(M)$ gehören.

Besteht die Menge M nur aus endlich vielen Elementen, so kann man $P(M)$ ein Diagramm zuordnen. Teilmengen mit gleich vielen Elementen werden auf gleicher Höhenlinie eingetragen, Teilmengen mit ungleicher Elementezahl so, dass die mit größerer Elementezahl jeweils oberhalb von denjenigen mit niederer Elementezahl stehen.
Zwei Teilmengen N_1 und N_2 werden durch eine Linie verbunden, wenn $N_1 \subset N_2$ ist, aber kein N_3 mit $N_1 \subset N_3$ und $N_3 \subset N_2$ existiert.
Beispielsweise erhält man für $P(\varnothing)$, $P(\{1\})$, $P(\{1,2\})$ und $P(\{1,2,3\})$ die folgenden Diagramme:



Man kann, da $P(M)$ nach unserer Festsetzung wiederum eine Menge ist, die Menge $P(P(M))$ bilden, die man auch mit $P^2(M)$ bezeichnet, und diesen Vorgang iterieren. So kommt man zu

$$P^m(M) = \underbrace{P(P(...P(M))...)}_{m-\text{mal } P}$$

Wie man sich leicht überlegt, besitzt $P(M)$ für den Fall, dass M eine Menge von n Elementen ist, genau $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2n$ Elemente, und entsprechend ist die Elementeanzahl von $P^m(M)$ gleich

$$\underbrace{2^{2^{2^{\cdots 2^n}}}}_{m-\text{mal}}$$

Aufgaben:
1. Man schreibe folgende Mengen in der Form $\{x \in K : \mathfrak{e}(x)\}$:
a) $\{2, 4, 6, ...\}$, b) $\{1, -1, i, -i\}$
c) $\{0, 1, 0, 01, 0, 001, ...\}$, d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right\}$

2. Man zeige:

$$\{P \in E_2 : PP_0 = 1\} \cup \{P \in E_2 : PP_0 \leq 1\}$$

dabei bezeichnet P einen variablen und P_0 einen festen Punkt der euklidischen Ebene E_2.

3. Man betrachte die folgenden Teilmengen von P:

$$P, \Gamma^+, \Gamma, P_0, I = \{x \in P : x \notin P_0\},$$
$$A = \{x \in P : x \text{ algebraisch}\}, T = \{x \in P : x \text{ transzendent}\}$$

und stelle die zwischen diesen Mengen bestehenden Enthaltenseinsbeziehungen durch ein Diagramm dar.

4. Man zeige:

$$\begin{aligned}(a, b) = \{x \in P : a < x < b\} \subset \{x \in P : a \leq x < b\} = \langle a, b)\\ \subset \{x \in P : a \leq x \leq b\} = \langle a, b\rangle\end{aligned}$$

5. a) Man bilde die Menge $P^2(\{a, b\})$;
b) Man überlege sich die Richtigkeit der Beziehungen

$$\Pi \in P(\Gamma), \qquad \{\Pi, \Gamma^+, \Gamma\} \in P^2(P)$$

6. Man beweise durch Betrachtung der zugehörigen Teilmengen von K:
"$x \in A$" ist notwendig für "$x \in P_0$";
"$x \in \Gamma$" ist hinreichend für "$\Im(x) = 0$";
"$x^4 = 1$"ist hinreichend für "$|x| = 1$".
Dabei bedeutet $\Im(x)$ den Imaginärteil der komplexen Zahl x und $|x|$ ihren absoluten Betrag.

3 Vereinigung, Durchschnitt und Produkt von Mengen

Wir wenden uns nun der "Mengenalgebra" zu. Die drei Verknüpfungen von Mengen, die wir betrachten wollen, sind die Vereinigungsbildung, die Durchschnittsbildung und die Produktbildung.
Dabei handelt es sich jeweils um Zuordnungvorschriften, bei denen zwei oder mehreren gegebenen Mengen eine durch diese eindeutig bestimmte weitere Menge - als Resultat der betreffenden Verknüpfung - zugeordnet wird.

Den Mengen $\{1,2,3\}$ und $\{2,3,4\}$ lassen sich offenbar eindeutig die beiden Mengen $\{1,2,3,4\}$ und $\{2,3\}$ zuordnen, von denen die erstere genau diejenigen Zahlen zu Elementen hat, die in $\{1,2,3\}$ oder in $\{2,3,4\}$ gelegen sind, und die letztere genau diejenigen, die sowohl in $\{1,2,3\}$ als auch in $\{2,3,4\}$ enthalten sind. Man sagt im ersteren Falle, man hat $\{1,2,3\}$ mit $\{2,3,4\}$ vereinigt, im letzteren, man hat $\{1,2,3\}$ mit $\{2,3,4\}$ geschnitten. Allgemein erklärt man:

Definition 3: Es seien M_1 und M_2 Mengen. Dann ist die Gesamtheit aller der Elemente, die in M_1 oder M_2 gelegen sind, wieder eine Menge. Diese heißt die Vereinigung von M_1 und M_2 und wird mit $M_1 \cup M_2$ bezeichnet Man schreibt[2]

$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee \in M_2\}$$

Definition 4: Es seien M_1 und M_2 Mengen. Dann heißt die Menge aller der Elemente, die in M_1 und M_2 gelegen sind, der Durchschnitt von M_1 und M_2 und wird mit $M_1 \cap M_2$ bezeichnet. Man schreibt

$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

Wie man unmittelbar erkennt, ist dann

$$M_1 \cap M_2 = \{x \in M_1 : x \in M_2\} = \{x \in M_2 : x \in M_1\}$$

also $M_1 \cap M_2$ sowohl Teilmenge von M_1 als auch Teilmenge von M_2.

Beispiele:
a) $(a,b) \cup \{a,b\} =< a,b > \qquad (a,b \in P)$;
b) $P_0 \cup I = P$;
c) $\{x \in K : x^2+1=0\} \cup \{x \in K : x^2-1=0\} = \{x \in K : x^4-1=0\}$;
d) $\langle a,b) \cup \cap (a,b\rangle = (a,b)$;
e) $P_0 \cap I = \varnothing$;
f) $\{(x,y) \in E^2 : x^2+y^2=4\} \cap \{(x,y) \in E^2 : y=3x+2\} = \{(0,2), \left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)\}$

Satz 2: Für beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$M_1 \cap M_2 \subseteq M_1 \subseteq M_1 \cup M_2 \qquad ; \qquad M_1 \cap M_2 \subseteq M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$$

[2]Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen wird gelesen: "nach Definition"

Beweis: Wir beweisen die erstere der beiden Aussagen.
Ist $x \in M_1 \cap M_2$, so ist wegen

$$x \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow x \in M_1 \wedge x \in M_2 \Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_1 \vee x \in M_2$$

auch $x \in M_1 \cup M_2$. Man beachte dabei (3) und (4) (§ 1).

Satz 3: Für jede Menge M gilt

$$M \cup M = M \qquad ; \qquad M \cap M = M$$

Beweis: Ist $x \in M \cup M$, so ist wegen

$$x \in M \cup M \Leftrightarrow x \in M \vee x \in M \Leftrightarrow x \in M$$

auch $x \in M$ und umgekehrt. Ist $x \in M \cap M$, so ist wegen

$$x \in M \cap M \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in M \Leftrightarrow x \in M$$

auch $x \in M$ und umgekehrt.
Man beachte hierbei, dass die logischen Äquivalenzen

$$p \vee p \equiv p \qquad \text{und} \qquad p \wedge p \equiv p$$

Satz 4: Für beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \qquad ; \qquad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

Beweis: Es gilt unter Beachtung von (7) (§ 1)

$$x \in M_1 \cup M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \vee x \in M_2 \Leftrightarrow x \in M_2 \vee x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2 \cup M_1$$

Bei $x \in M_1 \cup M_2$ ist folglich $x \in M_2 \cup M_1$ und umgekehrt. Die Richtigkeit der zweiten Aussage beweist man entsprechend.

Satz 5: Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \qquad ; \qquad (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

Der Beweis verläuft wie der obige unter Beachtung von (8) (§ 1).

Satz 6: Für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3 gilt

$$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3) \quad ; \quad (M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3)$$

Beim Beweis beachte man (7) und (9) (§ 1).

Satz 7: Für beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1 \qquad , \qquad M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$$

Beweis: Wie man leicht nachprüft (z.B. an Hand einer Wahrheitstafel) bestehen die logischen Äquivalenzen

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad , \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Aus diesen lassen sich die Behauptungen leicht herleiten.

Satz 8: Für beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow M_1 \cup M_2 = M_2 \qquad , \qquad M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = M_2$$

Beweis: Es sei $M_1 \subseteq M_2$. Dann gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$, was unter Beachtung von (10) (§ 1) mit $(\sim (x \in M_1) \vee (x \in M_2))$ logisch äquivalent ist.
Somit gilt Wegen (7), (8), (9), (17) sowie der logischen Äquivalenzen $p \wedge p \equiv p$, $(p \wedge q) \vee p \equiv p$:

$$\begin{aligned}
&(x \in M_1 \cup M_2) \wedge (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)\\
&\Rightarrow (x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge (\sim (x \in M_1) \vee (x \in M_2)\\
&\Rightarrow (x \in M_1 \wedge \sim (x \in M_1)) \vee (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \vee (x \in M_2 \wedge \sim (x \in M_1))\\
&\vee (x \in M_2 \wedge x \in M_2) \Rightarrow (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \vee (x \in M_2 \wedge \sim (x \in M_1)) \vee x \in M_2\\
&\Rightarrow (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \vee x \in M_2 \Rightarrow x \in M_2
\end{aligned}$$

also ist $M_1 \cup M2 \subseteq M_2$. Nach Satz 2 ist $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, und daher ist, wie behauptet, $M_1 \cup M_2 = M_2$.

Es sei nun $M_1 \cup M_2 = M_2$. Dann gilt

$$x \in M_1 \vee x \in M_2 \Rightarrow x \in M_2 \qquad \text{also}$$

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \qquad \text{d.h.} \qquad M_1 \subseteq M_2$$

Der Beweis der zweiten Behauptung sei dem Leser zur Übung überlassen.
Man verdeutliche sich den Inhalt der Sätze 2-8, indem man zwei oder drei sich paarweise überlappende ebene Punktmengen betrachtet.

Definition 5: Es sei M eine Menge, $P(M)$ die Potenzmenge von M und T eine Teilmenge von $P(M)$. Dann ist die Vereinigung bzw. der Durchschnitt aller in T enthaltenen Teilmengen N von M

$$\bigcup_{N \in T} N \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcap_{N \in T} N$$

erklärt als die folgende Teilmenge von M

$$\bigcup_{N \in T} N := \{x \in M : \text{ es existiert ein } N \in T, \text{ so dass } x \in N\}$$

bzw.

$$\bigcap_{N \in T} N := \{x \in M : \text{ für alle } N \in T \text{ ist } x \in N\}$$

Beispiele:

a) $M = \Gamma^+, T = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6,7\},\{7,8,9\}\}$. Dann ist

$$\bigcup_{N\in T} N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \qquad ; \qquad \bigcap_{N\in T} N = \varnothing$$

b) $M = \Gamma, T = \{N_1, N_2, N_3, ...\}$ mit $N_k = \{x \in \Gamma : 2^k \mid x\}$ $(k = 1, 2, ...)$. Dann ist

$$\bigcup_{N\in T} N = \{x \in \Gamma : 2 \mid x\} \qquad ; \qquad \bigcap_{N\in T} N = \{0\}$$

c) $M = K; T = \{N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}, N_{31}, N_{32}, ...\}$
mit $N_{k1} = \{z \in K : \Re(z) = k\}$, $N_{k2} = \{z \in K : \Im(z) = k\}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$. Dann ist

$$\bigcup_{N\in T} N = \{z \in K : \Re(z) \in \Gamma^+ \vee \Im(z) \in \Gamma^+\} \qquad ; \qquad \bigcap_{N\in T} N = \varnothing$$

Die Produktmenge von Mengen M_1 und M_2, deren Betrachtung wir uns nun zuwenden wollen, wird als eine Menge von geordneten Paaren (x, y) erklärt. Während nach der Festsetzung der Mengengleichheit eine Menge durch ihre Elemente eindeutig bestimmt ist, die Reihenfolge der Elemente dagegen als unwesentlich angesehen und demzufolge von ihr abstrahiert wird, sehen wir ein geordnetes Paar als eine Gesamtheit von zwei Elementen an, die erst durch Angabe dieser Elemente und deren Reihenfolge eindeutig gekennzeichnet ist. Mit anderen Worten, wir fordern für diese Gesamtheiten eine andere Festsetzung der Gleichheitsbeziehung:[3]

$$(a, b) = (c, d) :\Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Man kann das geordnete Paar als einen neuen Begriff in die Mengenlehre einführen. Das ist jedoch nicht notwendig; denn es lässt sich zeigen, dass man die geordneten Paare mit bestimmten Mengen identifizieren kann.

Dass die im allgemeinen zweielementige Menge $\{a, b\}$ der von einem geordneten Paar geforderten Gleichheitsdefinition nicht genügt, ist bereits früher gesagt; es ist stets $\{a, b\} = \{b, a\}$.
Auch die Menge $\{\{a\}, \{b\}\}$ genügt aus denselben Gründen nicht unseren Anforderungen. Man könnte jedoch eine Menge von im allgemeinen zwei Mengen betrachten, die im allgemeinen in der Anzahl ihrer Elemente verschieden sind, um dadurch eine Festlegung der Reihenfolge von a und b zu gewinnen.
Betrachten wir etwa Mengen der Gestalt

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

so gilt für diese

Satz 9: Die Mengen $M_1 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ und $M_2 = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

Beweis: Aus $M_1 = M_2$ folgt nach unserer Festsetzung der Mengengleichheit, dass

$$\{a\} = \{c\} \quad \text{und} \quad \{a, b\} = \{c, d\} \qquad \text{oder} \qquad \{a\} = \{c, d\} \quad \text{und} \quad \{a, b\} = \{c\}$$

[3]Der Doppelpunkt nach (c, d) wird gelesen: "nach Definition".

ist. Im ersten Fall folgt aus der linken Beziehung $a = c$ und damit aus der rechten Gleichung $b = d$. Im zweiten Fall folgt aus der linken Beziehung $a = c = d$ und aus der rechten $a = b = c$, also $a = c$, $b = d$.

Ist umgekehrt $a = c$ und $b = d$, so ist $\{a\} = \{c\}$, $\{b\} = \{d\}$ und $\{a, b\} = \{c, d\}$ und damit auch

$$\{\{d\}, \{d, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Der vorstehende Satz berechtigt uns, eine gewisse Menge als ein geordnetes Paar zu bezeichnen:

Definition 6: Eine Menge der Gestalt

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

heißt ein geordnetes Paar und wird mit (a, b) bezeichnet:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Bemerkungen: Man kann den Begriff des geordneten Paares verallgemeinern zu dem eines geordneten n-Tupels ($n > 1$). Dieses wird rekursiv erklärt durch

$$(a_1, a_2, ..., a_n) := \{\{(a_1, a_2, ..., a_{n-1})\}, \{(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n\}\}$$

Ein geordnetes Paar nennt man auch eine zweielementige Folge, ein geordnetes Tripel eine dreielementige Folge und allgemein ein geordnetes n-Tupel eine n-elementige Folge.

Der Begriff des geordneten Paares ist uns z.B. aus der Geometrie bekannt. Bekanntlich lässt sich jedem Punkt einer affinen Ebene bzw. eines affinen Raumes umkehrbar eindeutig ein geordnetes Paar bzw. ein geordnetes Tripel reeller Zahlen zuordnen.
Bei $n > 3$ definiert man in sinnvoller Verallgemeinerung der Verhältnisse in den "anschaulichen" Räumen der Dimensionen 1, 2, 3 einen Punkt als eine n-elementige Folge reeller Zahlen.

Die Gesamtheit aller dieser Punkte wird ein n-dimensionaler affiner Raum, oder, wenn man ihm noch die euklidische Metrik aufprägt, ein n-dimensionaler euklidischer Raum genannt. Es ist also, Wenn man den euklidischen Raum der Dimension n mit E^n bezeichnet und, wie schon früher bemerkt, die Menge der reellen Zahlen mit E angibt,

$$E^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in E\} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Unter E^1 ist die Menge E zu verstehen.

Die hier betrachteten Mengen E^n sind Spezialfälle sogenannter Produktmengen, die wie folgt erklärt sind:

Definition 7: Es seien M_1 und M_2 zwei nicht notwendig verschiedene Mengen. Dann ist die Gesamtheit aller geordneten Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ ebenfalls eine Menge.

Diese heißt die Produktmenge von M_1 und M_2 - in Zeichen: $M_1 \times M_2$:

$$M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$$

Allgemeiner erklärt man ein Produkt von n Faktoren ($n \geq 1$) in der folgenden Weise:

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2 \wedge ... \wedge x_n \in M_n\}$$

Für $n = 1$ ist darunter die Menge M_1 zu verstehen.
Unter Beachtung der Bemerkung zu Definition 6 ist bei $n \geq 3$

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = (M_1 \times M_2 \times ... \times M_{n-1}) \times M_n$$

Ist speziell $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$, so schreibt man für $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ auch M^n. In dem Sinne ist die oben betrachtete Menge E^n nichts anderes als die Produktmenge

$$\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n-\text{mal}}$$

Weiter setzt man für jede beliebige Menge M

$$M \times \varnothing = \varnothing \qquad , \qquad \varnothing \times M = \varnothing$$

Beispiele:
a) Bei $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ist

$$M_1 \times M_2 = \{(a, \alpha), (a, \beta), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma)\}$$

b) Es seien r, ϕ und θ beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Mengen

$$M_r = \{r \in P : 0 < r < \infty\},$$

$$M_\phi = \{\phi \in P : -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2}\} \qquad , \qquad M_\theta = \{\theta \in P : -\pi < \theta \leq +\pi\}$$

Fasst man r, ϕ, θ als räumliche Polarkoordinaten auf, so entspricht mit Ausnahme des Ursprungs jedem Punkt des dreidimensionalen affinen Raumes umkehrbar eindeutig ein Element (r, ϕ, θ) aus $M_r \times M_\phi \times M_\theta$ und umgekehrt.

Die Produktbildung und die Vereinigungsbildung sind durch das folgende distributive Gesetz miteinander verkettet:

Satz 10: Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

$$M_1 \times (M_2 \cup M_3) = (M_1 \times M_2) \cup (M_1 \times M_3)$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned}
(x, y) \in M_1 \times (M_2 \cup M_3) &\Leftrightarrow x \in M_1 \wedge (y \in M_2 \vee y \in M_3) \\
&\Leftrightarrow (x \in M_1 \wedge y \in M_2) \vee (x \in M_1 \wedge y \in M_3) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in M_1 \times M_2 \vee (x, y) \in M_1 \times M_3 \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in [(M_1 \times M_2) \cup (M_1 \times M_3)]
\end{aligned}$$

ist bei $(x,y) \in M_1 \times (M_2 \cup M_3)$ auch $(x,y) \in (M_1 \times M_2) \cup (M_1 \times M_3)$ und umgekehrt.

Entsprechend gilt für die Produktbildung und die Durchschnittsbildung

Satz 11: Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

$$M_1 \times (M_2 \cap M_3) = (M_1 \times M_2) \cap (M_1 \times M_3)$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned}(x,y) \in M_1 \times (M_2 \cap M_3) &\Leftrightarrow x \in M_1 \wedge (y \in M_2 \wedge y \in M_3) \\ &\Leftrightarrow (x \in M_1 \wedge y \in M_2) \wedge (x \in M_1 \wedge y \in M_3) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in M_1 \times M_2 \wedge (x,y) \in M_1 \times M_3 \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in [(M_1 \times M_2) \cap (M_1 \times M_3)]\end{aligned}$$

ist bei $(x,y) \in M_1 \times (M_2 \cap M_3)$ auch $(x,y) \in (M_1 \times M_2) \cap (M_1 \times M_3)$ und umgekehrt.

Beim Beweis von Satz 10 wurde (9) (§ 1) und beim Beweis von Satz 11 neben (7), (8) (§ 1) noch beachtet, dass $p \equiv p \wedge p$ gilt.

Aufgaben:
1. Es sei $M_1 = \{s,c,h,a,u,m\}$, $M_2 = \{w,e,i,n\}$. Man bilde $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$.
2. Es bezeichne Q die Menge aller Polynome von höchstens zweitem Grade mit reellen Koeffizienten, und es sei

$$M_1 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in Q : a_0 = 1\} \qquad , \qquad M_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in Q : a_1 = 1\}$$

Man bestimme $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$.
3. Gegeben seien die folgenden Teilmengen der Menge E^2:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{(x,y) \in E^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\} \\ M_2 &= \{(x,y) \in E^2 : 2 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 2\} \\ M_3 &= \{(x,y) \in E^2 : 2 \leq y \leq 3 \wedge y - 2 \leq x \leq 4 - y\} \\ M_4 &= \{(x,y) \in E^2 : 2 \leq y \leq 3 \wedge 4 - y \leq x \leq 7 - y\}\end{aligned}$$

Man bestimme $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ und $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$ (Skizze!).
4. Es sei $M = K$ und $T = \{N_k \in P(K) : k \in \Gamma^+\}$ mit $N_k = \{z \in K : z^k = 1\}$. Man zeige, dass gilt

$$\bigcup_{N_k \in T} N_k = \{z \in K : |z| = 1 \wedge \frac{\arg z}{\pi} \in P_0 \cap (-1, +1\rangle\} \qquad , \qquad \bigcap_{N_k \in T} N_k = \{1\}$$

5.Es sei $M = K$ und $T = \{N_a \in P(K) : a \in P\}$ mit

$$N_a = \{z \in K : |z - ai| = |1 + ai|\}$$

Man beweise, dass gilt

$$\bigcup_{N_a \in T} N_a = \{z \in K : (z = \pm\sqrt{1 + 2ay - y^2} + iy) \wedge (a, y \in P) \wedge (1 + 2ay - y^2 \in \langle 0, \infty))\}$$

$$\bigcap_{N_a \in T} N_a = \{+1, -1\}$$

6. Man bilde die Produktmengen der folgenden Mengen:

a) $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{a, b\}$;
b) $M_1 = \{x \in P : 2 \leq x \leq 3\}$, $M_2 = \{x \in P : 5 \leq x \leq 7\}$;
c) $M_1 = \{p, q\}$, $M_2 = \{\wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$, $M_3 = \{r\}$

7. Man überlege sich an einem Beispiel, dass im allgemeinen

$$M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$$

ist.

4 Relationen

Im vorigen Paragraphen wurde die Produktmenge $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, ..., M_n als Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mit $x_i \in M_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$ eingeführt.
Im folgenden wollen wir Teilmengen solcher Produktmengen näher betrachten. Diese haben - wie wir sehen werden - eine selbständige und sehr wichtige Bedeutung für die Mathematik. Man gibt ihnen daher einen eigenen Namen.

Definition 8: Es sei $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ die Produktmenge von n (≥ 1) nicht notwendig paarweise verschiedenen gegebenen Mengen M_1, M_2, ..., M_n.
Eine n-stellige Relation R zwischen den Mengen M_1, M_2, ..., M_n ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Bei $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$ schreibt man auch $R\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ und sagt: "$x_1, x_2, ..., x_n$ stehen zueinander in der Relation R". -
Ist speziell $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$ so heißt R eine n-stellige Relation in der Menge M.

Von besonderer Wichtigkeit sind für uns die zweistelligen oder binären Relationen, mit denen wir uns im folgenden vornehmlich beschäftigen wollen. Statt $(x, y) \in R$ oder $R\{x, y\}$ schreibt man hier meist xRy und sagt: "x steht in der Relation R zu y".

Um den Namen "Relation" besser zu verstehen, überlege man sich, dass sich jeder Teilmenge N einer Menge M umkehrbar eindeutig eine Aussageform $\mathfrak{e}(x)$ über M zuordnen lässt[4], die genau für diejenigen $x \in M$ wahr ist, die in N enthalten sind.

Es gilt also für jedes $x \in M : x \in N \Leftrightarrow \mathfrak{e}(x)$ ist wahr oder bei $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ für jedes Element $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in N \Leftrightarrow \mathfrak{e}((x_1, x_2, ..., x_n))$$

ist wahr.
Spricht man nicht von einer Aussageform $\mathfrak{e}((x_1, x_2, ..., x_n))$, die für das Element $(x_1, x_2, ..., x_n)$ genau dann wahr ist, wenn dieses in der Teilmenge N gelegen ist, sondern von einer Beziehung oder Relation R, die zwischen den Elementen x_1 von M_1, x_2 von M_2, ..., x_n von M_n genau dann besteht, wenn $(x_1, x_2, ..., x_n) \in N$ ist, und schreibt man, um dieses auszudrücken, statt $\mathfrak{e}((x_1, x_2, ..., x_n))$ dann $R\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, so gilt

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in N \Leftrightarrow R\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Es entsprechen sich also die Teilmengen N von $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ und die so erklärten n-stelligen Relationen umkehrbar eindeutig, und man ist daher berechtigt, jede solche Teilmenge mit der ihr bei der eineindeutigen Zuordnung entsprechenden Relation zu identifizieren und die Teilmengen demzufolge auch als Relationen zu bezeichnen.

Eine solche "Identifizierung" wird beispielsweise auch vorgenommen, wenn man von den "Punkten (x, y)" einer euklidischen (affinen) Ebene spricht und dabei in Gedanken

[4] Zwei Aussageformen $\mathfrak{e}(x)$ und $\mathfrak{e}'(x)$ über M werden hierbei als gleich angesehen, wenn $\mathfrak{e}(x)$ und $\mathfrak{e}'(x)$ für jedes $x \in M$ denselben Wahrheitswert haben.

einen Punkt mit dem von ihm begrifflich wohl zu unterscheidenden geordneten Paar reeller Zahlen (x, y) identifiziert.
Die Berechtigung dazu liefert auch hier - wie stets - die Tatsache, dass sich jedem Punkt der affinen Ebene umkehrbar eindeutig ein geordnetes Paar reeller Zahlen, nämlich das seiner Koordinaten in einem bestimmten Koordinatensystem, zuordnen lässt.

Beispiele:
a) $M_1 = M_2 = M_3 = E$; $R = \{(a, b, c) \in E^3 : (a \leq b) \wedge (b \leq c)\}$
R heißt die Zwischen-Relation in E, und man sagt bei $(a, b, c) \in R$: "b liegt zwischen a und c". Wegen $2 \leq 5$ und $5 \leq 8$, ist $(2, 5, 8) \in R$, dagegen ist $(2, 5, 3) \notin R$.

b) M_1 bezeichne die Menge aller Geraden g eines euklidischen Raumes, M_2 die Menge aller Ebenen ϵ desselben Raumes, und R sei die wie folgt definierte Teilmenge von $M_1 \times M_2$:

$$R = \{(g, \epsilon) \in M_1 \times M_2 : g \text{ parallel } \epsilon\}$$

R heißt die Parallelitätsrelation zwischen M_1 und M_2. Anstelle von $gR\epsilon$ ist es in diesem Falle üblich, $g \parallel \epsilon$ zu schreiben.

c) $M_1 = M_2 = \Gamma^+$; $R = \{(a, b) \in (\Gamma^+)^2 : a \text{ teilt } b\}$.
R heißt die Teilbarkeitsrelation in Γ^+, und man schreibt statt aRb gewöhnlich: $a \mid b$. Da 3 die Zahl 18, dagegen nicht die Zahl 17 teilt, ist $(3, 18) \in R$, $(3, 17) \notin R$.

d) $M_1 + M_2 = \Gamma^+$; $R = \{(a, b) \in (\Gamma^+)^2 : a \text{ kleiner oder gleich } b\}$.
R heißt die natürliche Größenordnungsrelation in Γ^+. Statt aRb schreibt man hier $a \leq b$.

Wir wollen uns im folgenden auf binäre Relationen in einer Menge M beschränken. Wenn wir in Zukunft von einer Relation sprechen, ist damit stets eine binäre Relation gemeint.
Spezielle Relationen, die in jeder Menge M erklärt sind, sind die Nullrelation $R = \varnothing$, die Allrelation $R = M \times M$ und die Gleichheitsrelation $R = \Delta_M = \{(x, x) : x \in M\}$. Die Menge Δ_M heißt die Diagonale von $M \times M$. Die Gleichheitsrelation wird bisweilen auch die identische Relation von M genannt und mit Id_M angegeben.

Es seien nun R und S Relationen in einer Menge M, d.h. definitionsgemäß Teilmengen von $M \times M$.
Ist R speziell eine Teilmenge von S, so sagt man auch, die Relation R sei in der Relation S enthalten. Weiter ist man berechtigt, von der Vereinigung und dem Durchschnitt der Relationen R und S zu sprechen. Es ist

$$R \subseteq S \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow xSy \text{ für alle } x, y \in M);$$
$$x(R \cup S)y \Leftrightarrow (x, y) \in R \cup S \Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in S \Leftrightarrow xRy \vee xSy \text{ für alle } x, y \in M$$
$$x(R \cap S)y \Leftrightarrow (x, y) \in R \cap S \Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \Leftrightarrow xRy \wedge xSy \text{ für alle } x, y \in M$$

Schließlich führt man noch das Kompositum von binären Relationen R und S ein.

Definition 9: Es sei R eine Relation zwischen einer Menge M_1 und einer Menge M_2 und S eine Relation zwischen M_2 und einer Menge M_3. Dann ist das Kompositum von

R und S - in Zeichen: $R \circ S$ - die wie folgt definierte Relation zwischen M_1 und M_3: Genau dann steht ein Element x_1 aus M_1 in der Relation $R \circ S$ zu einem Element x_3 aus M_3, wenn es ein Element x_2 aus M_2 gibt mit $x_1 R x_2$ und $x_2 R x_3$.

Das Kompositum von R und S wird auch das Produkt der Relationen R und S genannt. Dieses ist wohl zu unterscheiden von dem Produkt $R \times S$ der Mengen R und S.

Beispiele:
e) In der Menge aller Dreiecke einer euklidischen Ebene ist die Kongruenzrelation $\cong$ in der Ähnlichkeitsrelation N enthalten, da aus $x \cong y$ (lies: "Dreieck x ist kongruent zu Dreieck y") stets $x \sim y$ (lies: "Dreieck x ist ähnlich zu Dreieck y") folgt.

f) In der Menge Γ^+ ist die Teilbarkeitsrelation in der natürlichen Größenordnungsrelation enthalten ; denn es gilt: $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ für beliebige $a, b \in \Gamma^+$.

g) In der Menge Γ^+ bezeichne R die natürliche Größenordnungsrelation, und es sei $S = \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x \geq y\}$. Dann ist $R \cup S$ die Allrelation und $R \cap S$ die Gleichheitsrelation.

h) Es seien R und S die beiden wie folgt definierten Relationen in Γ^+:

$$\begin{aligned}
R &= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : (x \mid y) \wedge (1 \leq x) \wedge (x < y)\} \\
&= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x \text{ echter Teiler von } y\} \\
S &= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x + y \text{ gerade}\} \\
&= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : (x \text{ gerade und } y \text{ ungerade}) \vee (x \text{ ungerade und } y \text{ gerade}\} \\
&= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x \text{ und } y \text{ von gleicher Parität}\}
\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
R \cup S &= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : (x \text{ echter Teiler von } y) \vee (x \text{ und } y \text{ von gleicher Parität})\} \\
R \cap S &= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : (x \text{ echter Teiler von } y) \wedge (x \text{ und } y \text{ von gleicher Parität})\} \\
R \circ S &= \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x \text{ ungerade oder } y \text{ gerade}\}
\end{aligned}$$

i) Es sei $R = \{(x,y) \in E^2 : y = x^2\}$ und $S = \{(x,y) \in E^2 : y = e^x\}$ Dann ist

$$R \circ S = \{(x,y) \in E^2 : (\exists z) : (z \in E \wedge z = x2 \wedge y = e^z)\} = \{(x,y) \in E^2 : y = e^{x^2}\}$$

Definition 10: Es seien M_1 und M_2 Mengen und R eine Relation zwischen M_1 und M_2. Dann heißen die wie folgt erklärten Teilmengen von M_1 bzw. von M_2 der Definitionsbereich oder Vorbereich der Relation R - in Zeichen: $D(R)$ - bzw. der Wertebereich oder Nachbereich von R - in Zeichen: $W(R)$.

$$\begin{aligned}
D(R) &:= \{x \in M_1 : \text{ es existiert ein } y \in M_2, \text{ so dass } (x,y) \in R\} \\
W(R) &:= \{y \in M_2 : \text{ es existiert ein } x \in M_1, \text{ so dass } (x,y) \in R\}
\end{aligned}$$

So ist beispielsweise bei $M_1 = \{a, b, c\}$ und $M_2 = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(a,1), (b,2), (0,3)\}$

$$D(R) = M_1 \qquad \text{und} \qquad W(R) = M_2$$

Bei $M_1 = M_2 = \Gamma^+$ und $R = \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : y = x^2\}$ ist

$$D(R) = \Gamma^+ \qquad \text{und} \qquad W(R) = \{x^2 \in \Gamma^+ : x \in \Gamma^+\}$$

Ist R eine Relation zwischen den Mengen M_1 und M_2, so ist die Teilmenge

$$\{(y,x) \in M_2 \times M_1 : (x,y) \in R\}$$

von $M_2 \times M_1$ offenbar eine Relation zwischen M_2 und M_1. Diese ist durch die Relation R eindeutig bestimmt. Um sie nicht jedesmal, wenn man von ihr spricht, explizit aufschreiben zu müssen, gibt man ihr einen Namen.

Definition 11: Es seien M_1 und M_2 Mengen und R eine Relation zwischen M_1 und M_2. Dann heißt die Relation

$$\{(y,x) \in M_2 \times M_1 : (x,y) \in R\}$$

zwischen M_2 und M_1 die zu R inverse oder duale Relation und wird mit R^{-1} oder R^* bezeichnet.
Ist etwa $R = \{(x,y) \in E^2 : x \geq 0 \land y = x^2\}$, so ist

$$R^{-1} = \{(x,y) \in E^2 : x \geq_0 \land y = \sqrt{x}\}$$

Satz 12: Es sei M eine Menge, und R, S und T seien Relationen in M. Dann gilt:

$$\begin{array}{l}
(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \quad , \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad , \quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \\
(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T \quad , \quad T \circ (R \cap S) \subseteq T \circ R \cap T \circ S \\
(R \cup S) \circ T = \circ T \cup S \circ T \quad , \quad T \circ (R \cup S) = T \circ R \cap T \circ S
\end{array}$$

Beweis: Es gilt für beliebige $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$:

$$\begin{aligned}
x(R \cap S)^{-1}y &\Leftrightarrow y(R \cap S)x \Leftrightarrow yRx \land ySx \Leftrightarrow xR^{-1}y \land xS^{-1}y \Leftrightarrow x(R^{-1} \cap S^{-1})y \\
x(R \cup S)^{-1}y &\Leftrightarrow y(R \cup S)x \Leftrightarrow yRx \lor ySx \Leftrightarrow xR^{-1}y \lor xS^{-1}y \Leftrightarrow x(R^{-1} \cup S^{-1})y \\
x(R \circ S)^{-1}y &\Leftrightarrow y(R \circ S)x \Leftrightarrow (\exists z) : z \in M \land yRz \land zSx \Leftrightarrow (\exists z) : z \in M \land zSx \land yRz \\
x((R \cap S) \circ T)y &\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land x(R \cap S)z \land zTy \\
&\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land (xRz \land xSz) \land zTy \\
&\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land (xRz \land zTy) \land (xSz \land zTy) \\
&\Rightarrow x(R \circ T)y \land x(S \circ T)y \Rightarrow x((R \circ T) \cap (S \circ T))y \\
x((R \cup S) \circ T)y &\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land x(R \cup S)z \land zTy \\
&\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land (xRz \lor xSz) \land zTy \\
&\Rightarrow (\exists z) : z \in M \land (xRz \land zTy) \lor (xSz \land zTy) \\
&\Rightarrow x(R \circ T)y \lor x(S \circ T)y \Rightarrow x((R \circ T) \cup (S \circ T))y
\end{aligned}$$

Unter Beachtung des modus ponens ergeben sich hieraus die Behauptungen. Der Beweis für die beiden rechts stehenden Beziehungen der 3. und 4. Formelzeile in Satz 12 sei dem Leser als Übung überlassen. Man überlege sich weiter, warum in der 3. Zeile nicht das Gleichheitszeichen steht.

Definition 12: Es sei M eine Menge und R eine Relation in M. Die Relation R heißt

reflexiv (in M)	bei xRx für alle $x \in M$;
symmetrisch	bei $xRy \Rightarrow yRx$ für beliebige $x, y \in M$;
antisymmetrisch	bei $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für beliebige $x, y \in M$;
transitiv	bei $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für beliebige $x, y, z \in M$;
eindeutig	bei $xRy \wedge xRy' \Rightarrow y' = y$ für beliebige $x, y, y' \in M$.

So ist beispielsweise $R = \{(1,1), (1,2), (2,2)\} \in P(\{1,2\}^2)$ eine reflexive Relation in $\{1,2\}$ und $R = \{(x,y) \in P^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ eine symmetrische Relation in P.
Für eine beliebige Menge M ist $R = \{(N_1, N_2) \in P(M) \times P(M) : N_1 \subseteq N_2\}$ eine transitive Relation in $P(M)$. Schließlich ist $R = \{(x,y) \in P^2 : y = 3x + 1\}$ eine eindeutige Relation in P.

Eine besondere Rolle in der Mathematik spielen diejenigen binären Relationen in einer Menge M, die gleichzeitig reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, und diejenigen, die gleichzeitig reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sind. Die Eindeutigkeit erklärt man auch dann, wenn R eine Relation zwischen zwei verschiedenen Mengen M und M' ist.

Ist m eine beliebige, aber fest gewählte Zahl aus Γ^*, so ist beispielsweise die Relation

$$R_m = \{(a,b) \in (\Gamma)^2 : m \mid a - b\}$$

wegen der für beliebige $a, b, c \in \Gamma$ geltenden Beziehungen

$$m \mid a - a, \qquad m \mid a - b \Rightarrow m|b - a, \qquad m \mid a - b \wedge m \mid b - c \Rightarrow m \mid a - c$$

eine reflexive, symmetrische und transitive Relation in Γ.
Die Relation

$$R = \{(a,b) \in (\Gamma^+)^2 : a \mid b\}$$

ist wegen der für alle $a, b, c \in \Gamma^+$ geltenden Beziehungen

$$a \mid a, \qquad a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b, \qquad a \mid \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation in Γ^+.
Die Relation

$$R = \{(x,y) \in E^2 : y = 3x\}$$

ist eine eindeutige Relation in E. Da sich zu jedem beliebigen festen $y_0 \in E$ stets ein $x_0 \in E$, nämlich $x_0 = \frac{y_0}{3}$ angeben lässt, so dass $(x_0, y_0) \in R$ ist, stimmt der Wertebereich von R mit E überein.

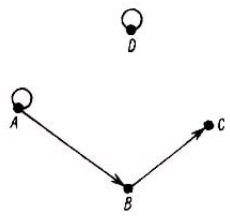
Abschließend sei an dieser Stelle noch vermerkt, dass sich eine Relation R in einer endlichen Menge M in der folgenden Weise graphisch veranschaulichen lässt:

Jedem Element x von M wird umkehrbar eindeutig ein Punkt X einer Zeichenebene zugeordnet. Genau dann, wenn das Element x von M in der Beziehung R zu dem Element y von M steht, verbindet man den Punkt X mit dem Punkt Y durch einen von X nach Y weisenden "Pfeil", und bei Gültigkeit von xRx zeichnet man im Punkte X eine "Schlinge".

So entspricht etwa der Relation

$$R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(d,d)\}$$

in der Menge $\{a,b,c,d\}$ der nebenstehende "Relationsgraph".



Aufgaben:
1. Man untersuche, welche der in Definition 12 angegebenen Eigenschaften die folgenden Relationen in $\{1,2,3\}$ haben:
a) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$;
b) $\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$;
c) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$.

2. Es sei R eine Relation in einer Menge M. Man beweise:
Genau dann ist R eine reflexive Relation in M, wenn gilt: $\Delta_M \subseteq R$.
Genau dann ist R symmetrisch, wenn gilt: $R^{-1} \subseteq R$ oder - gleichbedeutend damit - $R^{-1} = R$.
Genau dann ist R transitiv, wenn gilt: $R \circ R \subseteq R$.
Genau dann ist R antisymmetrisch, wenn gilt: $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_M$.

3. Es sei M eine endliche Menge. Man überlege sich, wie sich die in Definition 12 angegebenen Eigenschaften einer Relation R in M in dem zugehörigen Relationsgraphen widerspiegeln.

4. Man beweise: Hat eine Relation R in einer Menge M eine der ersten 4 Eigenschaften von Definition 12, so hat auch R^{-1} diese Eigenschaft. Man zeige an einem Beispiel, dass diese Aussage für die Eindeutigkeit von R nicht gilt.

5. Man zeichne den Relationsgraphen für die drei in Aufgabe 1) angegebenen Relationen in $\{1,2,3\}$.

6. Man zeige an dem Beispiel der beiden folgenden Relationen R und S in Γ^+, dass $R \circ S$ im allgemeinen von $S \circ R$ verschieden ist:

$$R = \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : (x \mid y) \wedge (1 \leq x) \wedge (x < y)\}, \quad S = \{(x,y) \in (\Gamma^+)^2 : x + y \text{ gerade}\}$$

7. Man beweise: Ist R eine Relation zwischen M_1 und M_2, S eine Relation zwischen M_2 und M_3 und T eine Relation zwischen M_3 und M_4, so gilt stets

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

5 Äquivalenzrelationen

Einige spezielle Relationen treten in der Mathematik so häufig auf, dass es sinnvoll ist, sie als selbständige Begriffe in die Mengenlehre aufzunehmen. Dem Studium solcher spezieller Relationen sind dieser und die nächstfolgenden Paragraphen gewidmet.

Definition 13: Eine binäre Relation R in einer Menge M ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Statt xRy schreibt man dann gewöhnlich $x \sim y(R)$ und liest dies: "x ist äquivalent zu y modulo R". Kann es bezüglich der Relation R zu keinen Verwechslungen führen, so schreibt man auch kurz: $x \sim y$, und man spricht dann auch von der Äquivalenzrelation $\sim$.

Bemerkung: Spezielle Äquivalenzrelationen sind, wie man sich leicht überlegt, die Gleichheitsrelation und die Allrelation in einer Menge M.

Beispiele:
a) Es sei M die Menge aller Waren eines Kaufhauses. Dann ist die Relation $\sim$ mit

$$W_1 \sim W_2 :\Leftrightarrow \text{ Preis von } W_1 = \text{ Preis von } W_2 (W_1, W_2 \in M)$$

eine Äquivalenzrelation in der Menge M.

b) Es sei M die Menge aller Exemplare eines bestimmten in einem Betrieb hergestellten Produktes. Dann ist die Relation $\sim$ mit

$$E_1 \sim E_2 :\Leftrightarrow \text{ Gütezeichen von } E_1 = \text{ Gütezeichen von } E_2 (E_1, E_2 \in M)$$

eine Äquivalenzrelation in der Menge M.

c) Die in § 4 angegebene Relation R_m ist eine Äquivalenzrelation in Γ. Man schreibt bei aR_mb in diesem besonderen Fall $a \equiv b(m)$ und liest dies: "a ist kongruent b modulo m".

d) Es sei $M = P \times (P - \{0\})$)[5]. Dann ist die wie folgt definierte Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation in M:

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc \quad (a, c \in P; b, d \in P - \{0\})$$

e) Es sei M die Menge aller gerichteten Strecken s eines zweidimensionalen euklidischen Raumes. Weiter bezeichne $|s|$ die Länge der Strecke s, α ihren Winkel mit der positiv gerichteten x-Achse ($0 \leq \alpha < \pi$) und $o(s)$ ihre Orientierung. Dann ist die Relation $\sim$ mit

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow (|s_1| = |s_2|) \wedge (\alpha_1 = \alpha_2) \wedge (o(s_1) = o(s_2)) \quad (s_1, s_2 \in M)$$

eine Äquivalenzrelation in M.

[5] Ist M' eine Teilmenge von M, so verstehen wir unter $M - M'$ die Menge $\{x \in M : x \notin M'\}$, d.h. die zu M' in M komplementäre Menge.

f) Die in P erklärte Relation $\sim$ mit

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \text{ für alle } x, y \in P$$

ist eine Äquivalenzrelation.

g) Es bezeichne M die Menge aller $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., n$ und es seien $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$, $Q = [q_1, q_2, ..., q_n]$, ... die Elemente von M. Dann ist die Relation $\sim$ in M, die definiert ist durch[6]

$$P \sim Q \Leftrightarrow \operatorname{sgn} \prod_{i<k} (p_i - p - k) = \operatorname{sgn} \prod_{i<k} (q_i - q - k) \quad (P, Q \in M))$$

eine Äquivalenzrelation in M.

h) Es bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge aller endlichen Teilmengen N einer unendlichen Menge M und $|N|$ die Anzahl der Elemente von $N \in \mathfrak{M}$. Dann ist die wie folgt definierte Relation $\sim$

$$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow |N_1| = |N_2| \quad (N_1, N_2 \in \mathfrak{M})$$

eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{M}$.

Der Begriff einer Äquivalenzrelation steht in engem Zusammenhang mit dem einer Zerlegung einer Menge M.

Definition 14: Es sei M eine nicht leere Menge. Eine Zerlegung Z von M ist eine Teilmenge von $P(M)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:
1. $N \in Z \Rightarrow N \neq \varnothing$ für alle $N \in Z$;
2. $N_1 \in Z \wedge N_2 \in Z \wedge N_1 \neq N_2 \Rightarrow N_1 \cap N_2 = \varnothing$ für alle $N_1, N_2 \in Z$;
3. $M = \bigcup\limits_{N \in Z} N$.

Bemerkung: Die Elemente N von Z heißen die Klassen von M bei der Zerlegung Z.
Nach Definition 14 wird M durch Z in nicht leere, paarweise elementefremde Mengen zerlegt, deren Vereinigung mit M übereinstimmt.

So ist beispielsweise $Z = \{\{1\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\}$ eine Zerlegung der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dagegen ist $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}\}$ keine Zerlegung von M.

Den oben erwähnten Zusammenhang zwischen einer Äquivalenzrelation $\sim$ in einer Menge M und einer Zerlegung Z von M liefert der folgende wichtige

Satz 13: Es sei M eine beliebige nicht leere Menge. Jede Äquivalenzrelation $\sim$ in M definiert eindeutig eine Zerlegung Z von M, und umgekehrt bestimmt jede Zerlegung Z von M eindeutig eine Äquivalenzrelation $\sim$ in M.

Beweis: 1. In der Menge M sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben. Dann ist die Teilmenge Z von $P(M)$

$$Z = \{N_a = \{x \in M : x \sim a\} : a \in M\}$$

[6] $\operatorname{sgn} x$ (Signum von x) bedeutet das Vorzeichen der reellen Zahl x.

eine Zerlegung von M.
Wir zeigen zunächst, dass jedes Element N_a von Z eine nicht leere Menge ist. N_a enthält genau diejenigen Elemente x von M, die zu dem festen Element a aus M äquivalent sind. Wegen der Reflexivität von $\sim$ gilt für jedes $a \in M$: $a \sim a$. Demnach ist a Element von N_a, also $N_a \neq \varnothing$.

Als zweites weisen wir nach, dass zwei beliebige Elemente $N_a = \{x \in M : x \sim a\}$ und $N_b = \{x \in M : x \sim b\}$ von Z bei $N_a \neq N_b$ elementefremd sind.
Es gilt unter Beachtung der Symmetrie und Transitivität von $\sim$:
Ist $N_a \cap N_b \neq \varnothing$, so existiert ein $d \in M$ mit $d \in N_a$ und $d \in N_b$, d.h. mit $d \sim a$ und $d \sim b$, also mit $a \sim d$ und $d \sim b$. Daraus folgt $a \sim b$, und das besagt gerade:

$$N_a = \{x \in M : x \sim a\} = \{x \in M : x \sim b\} = N_b$$

Schließlich stimmt die Vereinigung der Mengen $N_a (a \in M)$ mit M überein. Wegen $a \in N_a$ für jedes $a \in M$ ist nämlich $\bigcup\limits_{a \in M} N_a \supseteq M$, und aus $N_a \subseteq M$ für jedes $a \in M$ folgt $\bigcup\limits_{a \in M} N_a \subseteq M$. Folglich ist $\bigcup\limits_{a \in M} N_a = M$.

2. In der Menge M sei eine Zerlegung gegeben. Dann sieht man zwei nicht notwendig verschiedene Elemente von M, die bei der Zerlegung Z in der gleichen Klasse liegen, als äquivalent an und definiert dementsprechend eine binäre Relation $\sim$ in M durch die Forderung

$$x \sim y :\Leftrightarrow N_x = N_y (x, y \in M)$$

Dabei bezeichnen N_x bzw. N_y die das Element x bzw. y enthaltende Klasse bei der Zerlegung Z. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in M, denn es gilt:

a) $x \sim x$ wegen $N_x = N_x$ für jedes $x \in M$;
b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ wegen $N_x = N_y \Rightarrow N_y = N_x$ für alle $x, y \in M$;
c) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in M$ wegen

$$[(N_x = N_y) \wedge (N_y = N_z)] \Rightarrow N_x = N_z$$

Bemerkung: Wird eine Zerlegung Z der Menge M durch Vorgabe einer Äquivalenzrelation $\sim$ in M bewirkt, so heißen die Klassen von M bei der Zerlegung Z die Äquivalenzklassen modulo $\sim$.

Statt wie oben die Klassen der Zerlegung mit N_a zu bezeichnen, schreibt man für die das Element a von M enthaltende Äquivalenzklasse modulo $\sim$: $a \mod \sim$ (manchmal auch $[a]_\sim$) oder - Wenn bezüglich der Äquivalenzrelation keine Verwechslungen möglich sind - einfach $\overline{a}$.

Man beachte, dass nach der Definition der Zerlegung jede Klasse bereits durch die Angabe eines beliebigen Elements dieser Klasse eindeutig festgelegt ist und dass jedes Element von M auf diese Weise genau eine Klasse bestimmt (jedes Element von M liegt in einer und nur einer Klasse bei der Zerlegung Z!). Die Äquivalenzklassen $\overline{a}$ und $\overline{b}$ modulo $\sim$ sind genau dann gleich, wenn $a \sim b$ gilt.

Zu den oben angegebenen Äquivalenzrelationen werden im folgenden die zugehörigen Zerlegungen bestimmt. Da jede Menge durch Angabe ihrer Elemente eindeutig festgelegt ist, können wir uns im folgenden auf die Angabe der die Zerlegung bestimmenden Klassen beschränken. Man überlege sich, dass die unten stehenden Zerlegungen umgekehrt eindeutig die oben angegebenen Äquivalenzrelationen bestimmen.

a) Es sei W_i ein beliebiges, aber festes Element aus M. Dann ist die das Element W_i enthaltende Klasse gegeben durch

$$\overline{W_i} : \{W \in M : \text{ Preis von } W = \text{ Preis von } W_i\}$$

mit anderen Worten beinhaltet die Klasse $\overline{W_i}$ genau diejenigen Waren W von M, die preisgleich zur Ware W_i sind. Wir nennen eine solche Klasse eine Preisklasse. Offenbar besteht zwischen den Preisklassen und den Preisen der Waren von M eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$\overline{W_i} \leftrightarrow \text{ Preis von } W_i \quad (W_i \in M)$$

während die Zuordnung

$$W_i \to \text{ Preis von } W_i \quad (W_i \in M)$$

im allgemeinen nur eindeutig ist.
Liegt in jeder Äquivalenzklasse genau ein Element W aus M, d.h., haben je zwei verschiedene Waren verschiedene Preise, so stimmt die Anzahl der Elemente von Z mit der Anzahl der Elemente von M überein.
Bei $M = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$ ist nämlich $Z = \{\overline{W_1}, \overline{W_2}, ..., \overline{W_N}\}$ mit $\overline{W_i} \neq \overline{W_j}$ bei $i \neq k$. Haben sämtliche Waren den gleichen Preis, so besitzt die Menge Z als einziges Element die Menge $M : Z = M$.

b) Es bezeichne E_i ein beliebiges, aber festes Element aus M. Dann ist die E_i enthaltende Äquivalenzklasse gegeben durch $\overline{E_i} = \{E \in M : \text{ Gütezeichen von } E = \text{ Gütezeichen von } E_i\}$.
Mit anderen Worten beinhaltet die Klasse $\overline{E_i}$ genau diejenigen Erzeugnisse, die mit E_i gütegleich sind. Wir nennen eine solche Klasse eine Güteklasse. Offenbar besteht zwischen den Güteklassen und den Gütezeichen der Erzeugnisse eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$\overline{E_i} \leftrightarrow \text{ Gütezeichen von } E_i \quad (E_i \in M)$$

während die Zuordnung

$$E_i \to \text{ Gütezeichen von } E_i \quad (E_i \in M)$$

im allgemeinen nur eindeutig ist.

c) Es bezeichne a ein beliebiges, aber festes Element aus Γ und m ein festes Element aus Γ^+. Dann ist die a enthaltende Äquivalenzklasse

$$\overline{a} = \{x \in \Gamma : x \equiv a(n)\} = \{x \in \Gamma : m \mid x - a\} = \{x = qm + a : q \in \Gamma\}$$

Wir beachten nun, dass sich in Γ die Division mit Rest stets eindeutig ausführen lässt, d.h., dass es bei fest vorgegebenem $m \in \Gamma^+$ zu jeder beliebigen ganzen Zahl a eine ganze Zahl q und eine ganze Zahl r mit $0 \leq r \leq m-1$ gibt, so dass gilt

$$a = qm + r$$

Die Zahlen q und r sind dabei durch a eindeutig bestimmt. Wegen $m \mid a - r$ sind die Zahl a und ihr Rest r demnach stets kongruent modulo m, und somit stimmt die Äquivalenzklasse $\overline{a}$ mit der Äquivalenzklasse $\overline{r}$ überein.
Die bei Division durch m auftretenden Reste sind $0, 1, ..., m-1$. Je zwei verschiedene Reste sind modulo m inkongruent.
Also besteht Z genau aus den Klassen $\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}$. Diese sind

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{x \in \Gamma : x \equiv 0(m)\} = \{x = qm : q \in \Gamma\} \\
\overline{1} &= \{x \in \Gamma : x \equiv 1(m)\} = \{x = qm + 1 : q \in \Gamma\} \\
&\dots \\
\overline{m-1} &= \{x \in \Gamma : x \equiv m-1(m)\} = \{x = qm + m - 1 : q \in \Gamma\}
\end{aligned}$$

Die Klasse $\overline{a}$ enthält demnach genau diejenigen ganzen Zahlen, die bei Division durch m restgleich mit der Zahl a sind. Wir nennen eine solche Klasse eine Restklasse modulo m. Offenbar besteht zwischen den Restklassen und den Resten eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$\overline{a} \leftrightarrow r \qquad (a \in \Gamma, 0 \leq r \leq m-1)$$

während die Zuordnung

$$a \to r \qquad (a \in \Gamma, 0 \leq r \leq m-1)$$

nur eindeutig ist.

d) Es sei (a, b) ein beliebiges, aber festes Element aus $P \times (P - \{0\})$. Dann ist

$$\overline{(a,b)} = \{(x, y) \in P \times (P - \{0\}) : xb = ya\}$$

die das Element (a, b) enthaltende Äquivalenzklasse. Eine solche Klasse heißt eine rationale Zahl und wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Bei $(a, b) \sim (c, d)$ gilt also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

e) Es sei s_i ein beliebiges, aber festes Element aus M. Dann ist

$$\overline{s_i} = \{s \in M : |s| = |s_i| \wedge \alpha = \alpha_i \wedge o(s) = o(s_i)\}$$

die das Element s_i enthaltende Äquivalenzklasse. Sie enthält alle zu s_i gleichlangen, gleichgerichteten und gleichsinnig orientierten Strecken. Jede solche Klasse heißt ein Vektor und wird mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet. Bei $s_i \sim s_k$ ist $\mathfrak{s}_\mathfrak{i} = \mathfrak{s}_\mathfrak{k}$.

Wie schon oben bemerkt, bestimmt jedes Element einer Klasse diese eindeutig. In diesem Falle besagt das, dass jede gerichtete Strecke den Vektor, nämlich die Klasse aller zu dieser Strecke äquivalenten Strecken, eindeutig bestimmt. Man nennt daher

häufig auch die gerichteten Strecken selbst Vektoren, muss sich dabei aber im klaren sein, dass diese Sprechweise zwar bequem, aber unkorrekt ist.
Eine gerichtete Strecke bestimmt zwar einen Vektor, und umgekehrt kann ein Vektor durch eine gerichtete Strecke repräsentiert werden.

Begrifflich sind aber gerichtete Strecken und Vektoren etwas Verschiedenes, was schon allein daraus hervorgeht, dass die Gleichheit zweier gerichteter Strecken anders definiert ist als die Gleichheit zweier Vektoren.

f) Es sei a eine beliebige, aber feste reelle Zahl. Dann ist die a enthaltende Äquivalenzklasse

$$\overline{a} = \{x \in P : x^2 = a^2\} = \{+a, -a\}$$

Bis auf die einelementige Klasse $\overline{0}$ ist jede andere Klasse zweielementig. Man könnte eine solche Klasse eine Betragsklasse nennen.
Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Klassen $\overline{a}$ und den absoluten Beträgen $|a|$.

g) Es sei Q ein beliebiges, aber festes Element aus M. Dann ist

$$\overline{Q} = \{P \in M : \operatorname{sgn} \prod_{i<k} (p_i - p_k) = \operatorname{sgn} \prod_{i<k} (q_i - q_k)\}$$

die das Element Q enthaltende Äquivalenzklasse.
Die Zerlegung Z besteht, wenn M mehr als ein Element enthält, aus genau zwei Klassen. In der einen liegen alle die Permutationen, für die das in Rede stehende Vorzeichen positiv ist, in der anderen alle die, für die dieses Vorzeichen negativ ist. Die Permutationen der ersten Klasse sind bekanntlich durch eine gerade Anzahl von Inversionen, die der zweiten durch eine ungerade Anzahl von Inversionen charakterisiert.

h) Es sei N^+ eine beliebige, aber feste endliche Teilmenge von M. Dann ist, wenn wiederum $\mathfrak{M}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M angibt,

$$\overline{N^*} = \{N \in \mathfrak{M} : |N| = |N^*|\}$$

die das Element N^* aus $\mathfrak{M}$ enthaltende Äquivalenzklasse. Diese Klasse enthält sämtliche Teilmengen von M, die die gleiche Anzahl von Elementen haben wie N^*.
Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Äquivalenzklassen $\overline{N}$ und den nicht negativen ganzen Zahlen $n = |N|$. Man nennt n die Mächtigkeit der Menge N, wenn $|N| = n$ ist.

Definition 15: Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in einer nicht leeren Menge M mit der zugehörigen Zerlegung Z. Dann wird die als Teilmenge von $P(M)$ definierte Zerlegung Z gewöhnlich die Quotientenmenge oder Faktormenge von M nach $\sim$ genannt und mit $M/\sim$ bezeichnet.

So ist etwa in Beispiel c): $\Gamma/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$.

Satz 14: Sind R und S Äquivalenzrelationen in einer Menge M, so ist $R \cap 5$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation in M.

Beweis: $R \cap S$ ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation in M, denn
a) wegen xRx und xSx ist auch $x(R \cap S)x$ für alle $x \in M$;

b) $x(R \cap S)y \Rightarrow xRy \wedge xSy \Rightarrow yRx \wedge ySx \wedge y(R \cap S)x$ für alle $x, y \in M$;

c)

$$\begin{aligned} x(R \cap S)y \wedge y(R \cap S)z &\Rightarrow (xRy \wedge xSy) \wedge (yRx \wedge ySz) \\ &\Rightarrow (xRy \wedge yRz) \wedge (xSy \wedge ySz) \Rightarrow xRz \wedge xSz \Rightarrow x(R \cap S)z \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in M$.

Satz 15: Es seien R und S Äquivalenzrelationen in einer Menge M. Genau dann ist $R \circ S$ eine Äquivalenzrelation in M, wenn gilt

$$R \circ S = S \circ R$$

Beweis: Ist $R \circ S$ eine Äquivalenzrelation in M, dann gilt (siehe Aufgabe 2, § 4)

$$(R \circ S)^{-1} = R \circ S, \text{ also } S^{-1} \circ R^{-1} = R \circ S \quad \text{also} \quad S \circ R = R \circ S$$

Umgekehrt ist bei $R \circ S = S \circ R$ die binäre Relation $R \circ S$ eine Äquivalenzrelation in M. Wegen $\Delta_M \subseteq R$, $\Delta_M \subseteq S$ ist zunächst

$$\Delta_M = \Delta_M \circ \Delta_M \subseteq R \circ S$$

Weiter ist

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$$

Schließlich ist wegen $R \circ R \subseteq R$, $S \circ S \subseteq S$ unter Beachtung von Aufgabe 7, § 4, auch

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ (S \circ R) \circ S = R \circ (R \circ S) \circ S = (R \circ R) \circ (S \circ S) \subseteq R \circ S$$

Satz 16: Es seien R_1 bzw. R_2 Äquivalenzrelationen in den Mengen M_1 bzw. M_2. Dann ist $R_1 \times R_2$ eine Äquivalenzrelation in $M_1 \times M_2$.

Beweis: Es gilt a) $x_1R_1x_1$ und $x_2R_2x_2$, also $(x_1, x_2)(R_1 \times R_2)(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$;

b) $(x_1, x_2)(R_1 \times R_2)(y_1, y_2) \Rightarrow x_1R_1y_1 \wedge x_2R_2y_2 \Rightarrow y_1R_1x_1 \wedge y_2R_2x_2 \Rightarrow (y_1, y_2)(R_1 \times R_2)(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x2), (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$.

c)
$$\begin{aligned} &((x_1, x_2)(R_1 \times R_2)(y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2)(R_1 \times R_2)(z_1, z_2)) \\ &\qquad \Rightarrow (x_1R_1y_1 \wedge x_2R_2y_2) \wedge (y_1R_1z_1 \wedge y_2R_2z_2) \\ &\qquad \Rightarrow (x_1R_1y_1 \wedge y_1R_1z_1) \wedge (x_2R_2y_2 \wedge y_2R_2z_2) \Rightarrow x_1R_1z_1 \wedge x_2R_2z_2 \\ &\qquad \Rightarrow (x_1, x_2)(R_1 \times R_2)(z_1, z_2) \end{aligned}$$

für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M_1 \times M_2$.

Der nun folgende Satz sagt aus, dass jede beliebige binäre Relation R in einer nicht leeren Menge M eindeutig eine Äquivalenzrelation in M und damit auch eine Zerlegung von M in paarweise elementefremde, nicht leere Klassen bewirkt.

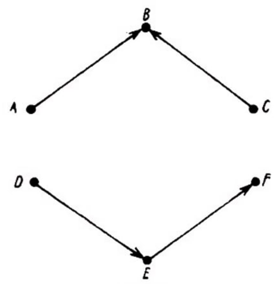


Abb. 3

Bevor wir den Satz formulieren, wollen wir uns seinen Inhalt an einem Beispiel verdeutlichen:
Es sei eine Relation

$$R = \{(a,b),(c,b),(d,e),(e,f)\}$$

in einer Menge $M = \{a,b,c,d,e,f\}$ gegeben.

Offenbar ist R eine binäre Relation in M, die weder reflexiv noch symmetrisch noch transitiv ist.
Wir zeichnen uns zunächst (s. Abb. 3) den zu R gehörigen Relationsgraphen. Man erkennt aus der Figur, dass der Graph eindeutig in zwei "zusammenhängende Komponenten"zerfällt.
Dabei gehören zwei Eckpunkte des Graphen genau dann zur gleichen zusammenhängenden Komponente, wenn sie durch eine Kette von Pfeilen - die Orientierung der Pfeile spielt dabei keine Rolle - verbunden sind. Zwei Eckpunkte, die zu verschiedenen zusammengehörigen Komponenten des Graphen gehören, sind dagegen niemals durch eine solche Pfeilkette miteinander verbunden.

Wir erklären nun eine - von R abhängige - binäre Relation $\overline{R}$ in M auf die folgende Art:
Das Element x von M steht genau dann in der Relation $\overline{R}$ zu dem Element y von M, wenn der dem Element x in dem R zugehörigen Relationsgraphen entsprechende Punkt X zur gleichen zusammenhängenden Komponente gehört, wie der y entsprechende Punkt Y.

Wie man sich leicht überlegt, ist $\overline{R}$ sogar eine Äquivalenzrelation in M, und die durch $\overline{R}$ bewirkte Zerlegung Z von M lautet in dem betrachteten Beispiel

$$Z = \{\{a,b,c\},\{d,e,f\}\}$$

In Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes erhalten wir den

Satz 17: Es sei M eine nicht leere Menge und R eine beliebige binäre Relation in M. Dann ist die wie folgt definierte binäre Relation $\overline{R}$ eine Äquivalenzrelation in M. Es ist $x\overline{R}y$ genau dann, wenn in M endlich viele Elemente $x_1, x_2, ..., x_n$ existieren, so dass

$$x_\nu = x_{\nu+1} \text{ oder } x_\nu R x_{\nu+1} \text{ oder } x_{\nu+1} R x_\nu \quad (\nu = 0,1,2,...,n)$$

ist mit $x_0 = x$, $y_0 = y$.

Beweis: Wegen $x = x$ ($x_0 = x_1 = x_2 = x$; $n = 1$) gilt $x\overline{R}x$ für jedes $x \in M$; die Symmetrie von $\overline{R}$ folgt daraus, dass in der Definition von $\overline{R}$ x_ν mit $x_{\nu+1}$ vertauscht werden darf.
Schließlich gibt es bei $x\overline{R}y$ und $y\overline{R}z$ Elemente $x_1, x_2, ..., x_n$ und $y_1, y_2, ..., y_m$ aus M, so dass $x_\nu = x_{\nu+1}$ oder $x_{nu} R x_{\nu+1}$ oder $x_{nu+1} R x_\nu$ ($\nu = 0,1,2,...,n$) und

$$y_\mu = y_{\mu+1} \text{ oder } y_\mu R y_{\mu+1} \text{ oder } y_{\mu+1} R y_\mu \quad (\mu = 0,1,2,...,m)$$

mit $x_0 = x$, $x_{n+1} = y = y_0$, $y_{m+1} = 2$ gilt. Dann ist aber mit $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, ..., $z_n = x_n$, $z_{n+1} = y$, $z_{n+2} = y_1$, ..., $z_{n+m+1} = y_m$:

$$z_\rho = z_{\rho+1} \text{ oder } z_\rho R z_{\rho+1} \text{ oder } z_{\rho+1} R z_\rho \qquad (\rho = 0, 1, ..., n+m+1; z_0 = x, z_{n+m+2} = z)$$

Also gilt auch $x\overline{R}z$.

Definition 16: Die in dem vorstehenden Satz erklärte Äquivalenzrelation $\overline{R}$ in M heißt die durch R in M induzierte Äquivalenzrelation.
So ist beispielsweise, wenn M die Menge aller lebenden Menschen bedeutet und R die wie folgt definierte binäre Relation in M ist:

$$xRy :\Leftrightarrow x \text{ Elternteil von } y \quad (x, y \in M)$$

die durch R induzierte Äquivalenzrelation $\overline{R}$ gegeben durch

$$x\overline{R}y :\Leftrightarrow (x = y) \vee (x \text{ verwandt mit } y)(x, y \in M)$$

Aufgaben:
1. Es bezeichne $M = \{e_1, e_2, ..., w_n\}$ die Menge aller im April 1964 hergestellten Erzeugnisse eines bestimmten Produkts. Dann sind die wie folgt definierten binären Relationen R und S in M

$$e_i R e_k :\Leftrightarrow \text{ Gütezeichen von } e_i = \text{ Gütezeichen von } e_k \quad (e_i, e_k \in M)$$

$$e_i S e_k :\Leftrightarrow \text{ Herstellungszeit von } e_i = \text{ Herstellungszeit von } e_k \quad (e_i, e_k \in M)$$

Äquivalenzrelationen in M. Wann stehen die Elemente e_i, e_k von M zueinander in der Relation $R \cap S$?

2. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sei die folgende Zerlegung gegeben:

$$Z = \{\{1, 7\}, \{2, 3, 9\}, \{4\}, \{5, 6, 8, 10\}\}$$

Wie lautet die durch Z definierte Äquivalenzrelation in M ? -
Sind die Mengen a) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{8, 9\}\}$, b) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}\}$ ebenfalls Zerlegungen von M ? (Begründung!)

3. Es sei $M = \{(x, y) \in P^2 : x, y > 0\}$, und R, S und T seien die binären Relationen in M, die folgendermaßen definiert sind:

$$(x, y)R(x', y') :\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$
$$(x, y)S(x', y') :\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$
$$(x, y)T(x', y') :\Leftrightarrow x = x'((x, y), (x', y') \in M)$$

Man überlege sich, dass R, S und T Äquivalenzrelationen in M sind, und veranschauliche sich geometrisch die Bedeutung der Äquivalenzklassen mod R, mod S und mod T.

4. Der 1. Januar 1964 fiel auf einen Mittwoch; man überlege sich, auf welchen Tag der 31. Oktober 1964 fiel.
(Anmerkung: Man betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ in der Menge $M = \{1, 2, ..., 366\}$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow x \equiv y(7)$.)

5. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ sei die Relation $R = \{(1, 4), (2, 7), (3, 6), (4, 4), (5, 4), (5, 12), (6, 6), (7, 2), (9, 7), (9, 9), (10, 4), (11, 3), (11, 6), (11, 8)\}$ gegeben. $\overline{R}$ sei die durch R in M induzierte Äquivalenzrelation. Wieviel Elemente besitzt $M/\overline{R}$?
Wie lauten die Äquivalenzklassen mod $\overline{R}$?

6. Es seien R und S Äquivalenzrelationen in einer Menge M. Dann ist die binäre Relation $R \cup S$ in M im allgemeinen keine Äquivalenzrelation, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$M = \Gamma, \quad R = \{(x, y) \in \Gamma^2 : x \equiv y(6)\}, \quad S = \{(x, y) \in \Gamma^2 : x \equiv y(9)\}$$

Es ist

$$R \cup S = \{(x, y) \in \Gamma^2 : x \equiv y(6) \vee x \equiv y(9)\}$$

Die Relation $R \cup S$ ist nicht transitiv, denn wegen $1 \equiv 7$ (6), $7 \equiv 16$ (9), aber $1 \not\equiv 16$ (6) und $1 \not\equiv 16$ (9) gilt[7]

$$1(R \cup S)7, \quad 7(R \cup S)16, \quad \text{aber nicht: } 1(R \cup S)16$$

Man zeige, dass die durch $R \cup S$ induzierte Äquivalenzrelation $\overline{R \cup S}$ die kleinste R und S umfassende Äquivalenzrelation in M ist, d.h., dass $R \subseteq \overline{R \cup S}$ und $S \subseteq \overline{R \cup S}$ ist und dass für jede Äquivalenzrelation T in M mit $R \subseteq T$, $S \subseteq T$ gilt:

$$\overline{R \cup S} \subseteq T$$

Wie lautet $\overline{R \cup S}$ in dem oben angegebenen Beispiel?

7. Es seien R und S Äquivalenzrelationen in einer Menge M mit $R \subseteq S$. Man beweise: Bezeichnet $\overline{x}$ die $x \in M$ enthaltende Äquivalenzklasse mod R, so ist durch

$$\overline{x} T \overline{y} :\Leftrightarrow xSy \quad (x, y \in M)$$

in der Menge M/R der Äquivalenzklassen mod R eine binäre Relation T definiert, die sogar eine Äquivalenzrelation in M/R ist.
(Anmerkung: Die so erklärte Äquivalenzrelation T in M/R heißt die Quotientenrelation von S nach R und wird mit S/R bezeichnet.)
Man bestimme $T = S/R$, falls $M = \Gamma$, $R = \{(x, y) \in \Gamma^2 : x \equiv y(10)\}$ und $S = \{(x, y) \in \Gamma^2 : x \equiv y(2)\}$ ist.

[7] Statt $\sim (a \equiv b)$ schreibt man $a \not\equiv b$

6 Halbordnungsrelationen

Wir wenden uns nun der Betrachtung von Mengen zu, in denen eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation definiert ist.

Definition 17: Eine binäre Relation R in einer Menge M heißt eine Halbordnungsrelation in M, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Bei xRy schreibt man im Falle einer Halbordnungsrelation gewöhnlich $x \leq y$ (manchmal auch $x \subseteq y$ oder $x \preceq y$) und liest dies: "x ist kleiner oder gleich y" ("x ist enthalten in y" oder "x steht vor y") und spricht dann auch von der Halbordnungsrelation $\leq$, $\subseteq$ oder $\preceq$.

Bemerkung: In der Literatur gibt man häufig auch einer reflexiven und transitiven Relation R in einer Menge M einen Namen, und zwar bezeichnet man sie als Quasihalbordnungsrelation.

Bevor wir Beispiele für Halbordnungsrelationen angeben, wollen wir noch den Begriff der Ordnungsrelation und der Wohlordnungsrelation erklären.

Definition 18: Eine Halbordnungsrelation $\leq$ in einer Menge M heißt eine Ordnungsrelation in M, wenn für beliebige Elemente x, y aus$M$ gilt.

$$x \leq y \vee y \leq x$$

Definition 19: Eine Ordnungsrelation $\leq$ in einer Menge M heißt eine Wohlordnungsrelation in M, wenn jede nicht leere Teilmenge N von M ein kleinstes Element besitzt, d.h., wenn es ein $x_0 \in N$ gibt mit $x_0 \leq x'$ für jedes $x' \in N$.

Ist $\leq$ eine Halbordnungsrelation in einer Menge M, so schreibt man anstelle von $x \leq y$ und $y \leq z$ auch kurz: $x \leq y \leq z$.

Beispiele:
a) Es bezeichne $M = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$ die Menge aller Waren eines Kaufhauses und $P(W)$ den Preis der Ware W. Dann ist die binäre Relation R in M, die folgendermaßen definiert ist:

$$W_iRW_k :\Leftrightarrow P(W_i) = P(W_k) \quad (W_i, W_k \in M)$$

eine Quasihalbordnungsrelation in M; denn es ist wegen $P(W) = P(W) : WRW$ für alle $W \in M$. Weiter ist wegen

$$\begin{aligned} W_iRW_k \wedge W_kRW_l &\Rightarrow P(W_i) = P(W_k) \wedge P(W_k) = P(W_l) \\ &\Rightarrow P(W_i) = P(W_l) \Rightarrow W_iRW_l \end{aligned}$$

bei W_iRW_k und W_kRW_l auch W_iRW_l erfüllt.
Es folgt aber aus $P(W_i) = P(W_k)$ und $P(W_k) = P(W_i)$ nicht, dass $W_i = W_k$ ist, da es sich bei W_i und W_k um zwei verschiedene Waren gleichen Preises handeln kann.
R ist also im allgemeinen nicht antisymmetrisch. Das wäre nur dann der Fall, wenn sämtliche Waren des Kaufhauses verschiedene Preise hätten.

b) Es sei M eine beliebige Menge und $P(M)$ ihre Potenzmenge. Dann ist die mengentheoretische Inklusion in $P(M)$ eine Halbordnungsrelation in $P(M)$. Für beliebige Teilmengen N_1, N_2 und N_3 gilt nämlich

$$N_1 \subseteq N_1, \quad N_1 \subseteq N_2 \wedge N_2 \subseteq N1 \Rightarrow N_1 = N_2, \quad N_1 \subseteq N_2 \wedge N_2 \subseteq N_3 \Rightarrow N_1 \subseteq N_3$$

Daraus folgt unmittelbar die Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität von der in Rede stehenden Relation in $P(M)$.

c) Es sei M eine Menge von Aussagen mit der logischen Äquivalenz als Gleichheitsrelation. Dann ist die Implikation eine Halbordnungsrelation in M; denn es gilt bei beliebigen p, q, $r \in M$

$$p \Rightarrow p; \quad \text{aus } p \Rightarrow q \text{ und } q \Rightarrow p \text{ folgt } p \equiv q, \quad \text{aus } p \Rightarrow q \text{ und } q \Rightarrow r \text{ folgt } p \Rightarrow q$$

und daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

d) Die in Γ^+ erklärte Teilbarkeitsrelation ist eine Halbordnungsrelation in Γ^+, wie wir schon in § 4 feststellten. Sie ist jedoch keine Ordnungsrelation in Γ^+, denn es gibt Zahlenpaare (a, b) in $(\Gamma^+)^2$ für die weder $a \mid b$ noch $b \mid a$ gilt, wie etwa $(2, 3)$.

e) Die in Γ erklärte natürliche Größenordnungsrelation ist eine Ordnungsrelation in Γ; denn sie ist bekanntlich reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, und weiter gilt für beliebige ganze rationale Zahlen a und b stets $a \leq b \vee b \leq a$. Sie ist jedoch keine Wohlordnungsrelation in Γ, da Γ Teilmengen besitzt, die bezüglich $\leq$ kein kleinstes Element enthalten, z.B. $\Gamma^- = \{g \in \Gamma : g < 0\}$.

Man sieht ebenso, dass Γ bei der zu $\leq$ dualen Relation $\geq$ geordnet ist. Da in diesem Fall Γ^+ kein bezüglich $\geq$ kleinstes Element besitzt, so ist Γ auch bei der Relation $\geq$ nicht wohlgeordnet.

f) Die Beschränkung[8] der in e) definierten Relation $\leq$ auf Γ^+ ist eine Wohlordnungsrelation in Γ^+; denn jede nicht leere Teilmenge positiver ganzer Zahlen besitzt bezüglich $\leq$ ein kleinstes Element.
Ebenso ist die Beschränkung von $\geq$ auf die Menge Γ^- eine Wohlordnungsrelation in Γ^-.

g) Ist M eine endliche Menge, so ist jede Ordnungsrelation in M eine Wohlordnungsrelation.

Satz 18: Es sei M eine nicht leere Menge und R eine Quasihalbordnungsrelation in M. Dann ist die wie folgt definierte Relation $\sim$ in M:

$$x \sim y :\Leftrightarrow xRy \wedge yRx \quad (x, y \in M)$$

eine Äquivalenzrelation in M. In der Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen mod $\sim$ ist die durch R eindeutig bestimmte Relation S in $M/\sim$ mit

$$\overline{x} S \overline{y} :\Leftrightarrow xRy \quad (x, y \in M)$$

[8] Es sei R eine binäre Relation in M, also R eine Teilmenge von $M \times M$. Weiter sei $N \subseteq M$. Dann heißt die Teilmenge $R \cap (N \times N)$ die Beschränkung von R auf N.

eine Halbordnungsrelation. Dabei bezeichnet - wie immer - $\overline{a}$ die $a \in M$ enthaltende Äquivalenzklasse mod $\sim$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation in M ist. Wegen xRx gilt $x \sim x$ für alle $x \in M$;
wegen $x \sim y \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow y \sim x$ gilt bei $x \sim y$ auch $y \sim x$;
wegen $x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy \Rightarrow xRz \wedge zRx \Rightarrow x \sim z$ gilt bei $x \sim y$ und $y \sim z$ auch $x \sim z$.

Wir zeigen zweitens, dass S eine Halbordnungsrelation in $M/\sim$ ist. S ist zunächst eine binäre Relation in $M/\sim$, denn bei $x'Rx$, xRy und yRy' gilt wegen der Transitivität von R auch $x'Ry'$.
Weiter ist wegen xRx auch $\overline{x}S\overline{x}$ für alle $x \in M$. Die Antisymmetrie von S folgt aus

$$\overline{x}S\overline{y} \wedge \overline{y}S\overline{x} \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x \sim y \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

Die Transitivität von S ergibt sich unmittelbar aus der Transitivität von R.

So ist in Beispiel a) die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch

$$W_i \sim W_k :\Leftrightarrow P(W_i) = P(W_k) \quad (W_i, W_k \in M)$$

Eine Äquivalenzklasse mod $\sim$ enthält in diesem Fall also genau alle Waren von M eines gleichen Preises. Die durch R bestimmte Relation S in $M/\sim$ ist offenbar eine Wohlordnungsrelation in $M/\sim$.

Satz 19: Es sei M eine Menge und R eine Halbordnungsrelation in M. Dann ist die zu R duale Relation R^* ebenfalls eine Halbordnungsrelation in M.

Beweis: Die Reflexivität von R^* in M folgt aus der Tatsache, dass die Gleichheitsrelation zu sich selbst dual ist.
Die Antisymmetrie von R^* folgt aus

$$xR^*y \wedge yR^*x \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

Die Transitivität von R^* folgt aus:

$$xR^*y \wedge yR^*z \Rightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRy \wedge yRx \Rightarrow zRx \Rightarrow xR^*z$$

Wie man sich leicht überlegt, ist mit R auch stets R^* eine Ordnungsrelation in M. Dagegen ist die zu einer Wohlordnungsrelation R in M duale Relation im allgemeinen keine Wohlordnungsrelation, wieder Leser sich am Beispiel f) klarmachen möge.

Aufgaben:
1. Welche der folgenden Relationen in $\{1,2,3\}$ sind Halbordnungsrelationen und welche sind Ordnungsrelationen?
a) $\{(1,1),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
b) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$;
c) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3),(3,1)\}$;

d) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$;
f) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

2. Es seien R_1 und R_2 Halbordnungsrelationen in einer Menge M. Man überlege sich, ob $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ oder $R_1 \circ R_2$ ebenfalls Halbordnungsrelationen in M sind.

3. Man beweise: Ist M eine endliche Menge und ist R eine Wohlordnungsrelation in M, so ist auch die zu R duale Relation R^* eine Wohlordnungsrelation in M.

7 Funktionen und Abbildungen

Die im folgenden eingeführten Begriff der Funktion und der Abbildung sind zentrale Begriffe in der Mathematik und werden für den Aufbau jeder mathematischen Disziplin benötigt.
Man nennt eine Menge von geordneten Paaren, die beispielsweise durch eine Tabelle oder eine Kurve gegeben sein kann, eine Zuordnungsvorschrift und bezeichnet sie gewöhnlich mit dem Buchstaben f. Ist das geordnete Paar (a,b) ein Element von f, so nennt man a die erste und b die zweite Projektion des Paares (a,b) - in Zeichen: $a = p_1((a,b))$, $b = p_2((a,b))$ -, und man sagt, b sei a bei f zugeordnet.

Beispiele:
a) Die durch die nebenstehende Tabelle gegebene Zuordnungsvorschrift lautet beispielsweise:

$$f = \{(1,3),(1,2),(2,1),(3,2)\}$$

x	y
1	3
1	2
2	1
3	2

b) Durch den Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung einer euklidischen Ebene wird als Menge der Punkte dieses Kreises die folgende Zuordnungsvorschrift definiert:

$$f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

c) Die Menge $f = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ ist eine Zuordnungsvorschrift. Bei ihr wird den Zahlen 1 und 3 der Buchstabe a und der Zahl 2 der Buchstabe b zugeordnet.

Bei einer Zuordnungsvorschrift f ist es durchaus möglich (siehe Beispiel a) und b)), dass neben dem Element (a,b) auch ein Element (a,c) mit $c \neq b$ in f liegt; mit anderen Worten: die zweite Projektion ist durch die erste Projektion im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.
Wir sondern nun unter den Zuordnungsvorschriften f diejenigen aus, für die, wie im Beispiel c), gilt:

$$(x,y_1) \in f \land (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ für beliebige } (x,y_1),(x,y_2) \in f$$

Diese Zuordnungsvorschriften tragen einen eigenen Namen.

Definition 20: Eine die obige Bedingung erfüllende Zuordnungsvorschrift f nennt man eine funktionale Zuordnungsvorschrift oder kurz eine Funktion. Die Menge $D(f)$ der ersten Projektionen von f heißt der Definitionsbereich und die Menge $W(f)$ der zweiten Projektionen der Wertebereich von f. Bei $(x,y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$.

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich M und dem Wertebereich M' ist demnach nichts anderes als eine eindeutige Relation $R = f$ zwischen $D(R) = M$ und $W(R) = M'$.
So ist beispielsweise der Definitionsbereich der in c) angegebenen Funktion die Menge $\{1,2,3\}$ und der Wertebereich die Menge $\{a,b\}$. Man beachte, dass die in a) und b) angegebenen Zuordnungsvorschriften in unserem Sinne keine Funktionen sind.

Man überlege sich weiter, wie eine Kurve beschaffen sein muss, damit die durch diese bestimmte Zuordnungsvorschrift eine Funktion ist.

Man kann jede Funktion f, deren Definitionsbereich und Wertebereich jeweils eine Menge reeller Zahlen ist, stets graphisch darstellen, indem man bei $y = f(x)$ dem Paar (x, y) reeller Zahlen aus f den Punkt $P(x, y)$ einer euklidischen Ebene mit den Koordinaten x, y zuordnet. In herkömmlicher Weise nennt man die Menge aller Punkte $P(x, y)$, mit $y = f(x)$ die Kurve "y = f(x)". Man würde besser von dem Bild der Funktion f sprechen oder von der durch f erklärten Kurve.

Definition 21: Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich M und dem Wertebereich M' heißt eine umkehrbar eindeutige oder eineindeutige Funktion, wenn sie der Bedingung

$$(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ für beliebige } (x_1, y), (x_2, y) \in f$$

genügt.
Eine eineindeutige Funktion f mit $D(f) = M$, $W(f) = M'$ bestimmt eindeutig eine Funktion g mit $D(g) = M'$, $W(g) = M$ und

$$(y, x) \in g \Leftrightarrow (x, y) \in f \qquad \text{oder} \qquad x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Diese Funktion g heißt die zu f inverse Funktion oder die Umkehrfunktion von f, und man bezeichnet sie mit f^{-1}. Auch f^{-1} ist eine eineindeutige Funktion, und es gilt

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Man beachte, dass in der Sprache der Relationen f^{-1} nichts anderes ist als die zu f inverse Relation zwischen M' und M.

So ist beispielsweise die Funktion f mit $f(x) = 2x + 3$ bzw. $f(x) = e^x$ eine umkehrbar eindeutige Funktion mit $D(f) = P$, $W(f) = P$ bzw. $D(f) = P$, $W(f) = P^+$.
Die Umkehrfunktion f^{-1} ist gegeben durch $f^{-1}(x) = \frac{y-3}{2}$ mit $D(f^{-1}) = W(f^{-1}) = P$ bzw. $f^{-1}(x) = \ln x$ mit $D(f^{-1}) = P^+$, $W(f^{-1}) = P$.

Definition 22: Eine Abbildung F aus der Menge M in die Menge M' ist ein Tripel (M, f, M'), wobei f eine Funktion mit $D(f) \subseteq M$, $W(f) \subseteq M'$ ist.
Um auszudrücken, dass F eine Abbildung aus M in M' ist, schreibt man symbolisch:

$$F : M \to M'$$

Interessiert dabei, wie die Abbildung elementweise aussieht, d.h., auf welches Element y von M' das Element x von M abgebildet wird, so muss man auch die der Abbildung zugrunde liegende Funktion f - die sogenannte Abbildungsvorschrift - angeben, und dies geschieht symbolisch in der folgenden Weise:

$$(F) : x \to y = f(x)$$

Nach der gegebenen Definition sind die Abbildungen $F_1 : (M_1, f_1, M_1')$ und $F_2 : (M_2, f_2, M_2')$ gleich, wenn $M_1 = M_2$, $M_1' = M_2'$ und $f_1 = f_2$ im mengentheoretischen Sinn ist.

Stimmt der Definitionsbereich von f mit der Menge M überein, so nennt man die Abbildung $F = (M, f, M')$ speziell eine Abbildung von der Menge M in die Menge M'; stimmt der Wertebereich von f mit der Menge M' überein, so spricht man von einer Abbildung F aus der Menge M auf die Menge M'.

Sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, so nennt man F eine Abbildung von der Menge M auf die Menge M'. Im letzteren Falle ist F offenbar durch f eindeutig bestimmt und umgekehrt, so dass man die Funktionen mit dem Definitionsbereich M und dem Wertebereich M' mit den Abbildungen von M auf M' identifizieren kann.
Im Sinne dieser Identifizierung sind also Funktionen spezielle Abbildungen, und es wird daher in Zukunft nur noch von Abbildungen die Rede sein.

Beispiele:
a) $M = M' = \Gamma$; $f = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$.
$F = (M, f, M')$ ist eine Abbildung aus M in M'.

b) $M = \{1,2,3\}$; $M' = \Gamma$; $f = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$.
$F = (M, f, M')$ ist eine Abbildung von M in M'.

c) $M = \Gamma$; $M' = \{2,3\}$; $f = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$.
$F = (M, f, M')$ ist eine Abbildung aus M auf M'.

d) $M = \{1,2,3\}$; $M' = \{2,3\}$; $f = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$.
$F = (M, f, M')$ ist eine Abbildung von M auf M'.

Da in der Mathematik hauptsächlich Abbildungen von einer Menge M in eine Menge M' auftreten und die Abbildungen aus einer Menge M in eine Menge M' nur eine untergeordnete Rolle spielen, so wollen wir uns in Zukunft auf die ersteren beschränken. Wir werden im folgenden einfach von Abbildungen (M, f, M') sprechen; gemeint ist dann damit immer eine Abbildung von M in M'.

Definition 23: Es sei $F = (M, f, M')$ eine Abbildung von M in M'. Ist N eine Teilmenge von M, so heißt die Teilmenge

$$N' = \{f(x) : x \in N\}$$

von M' das Bild von N bei F - in Zeichen: $N' = F(N)$. Ist N' eine Teilmenge von M', so heißt die Teilmenge

$$N = \{x \in M : f(x) \in N'\}$$

von M das Urbild von N' bei F - in Zeichen: $N = F^{-1}(N')$. Ist speziell N' eine einelementige Menge $\{b\}$ $(b \in M')$, so setzt man für $F^{-1}(\{b\})$ auch einfach $F^{-1}(b)$.

Beispiele:
a) Bei $F = (P^+, f, P)$ mit $(F) : x \to \log x$ ist das Bild der Menge $\{1, 10, 100\}$ die Menge $\{0, 1, 2\}$.

b) Bei $F = \left(\langle -1, +1\rangle f, \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\rangle\right)$ mit $(F) : x \to \arcsin x$ ist das Urbild der Menge $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ die Menge $\{-1, 0, +1\}$.

Definition 24: Die Abbildung $F = (M, f, M')$ von M in M' heißt eine umkehrbar eindeutige oder eineindeutige Abbildung von M in M', wenn f eine umkehrbar eindeutige Funktion ist.
Ist speziell F eine eineindeutige Abbildung von M auf M', so ist (M', f^{-1}, M) eine eineindeutige Abbildung von M' auf M. Diese heißt die Umkehrbeziehung von F und wird mit F^{-1} bezeichnet.

Anstelle von "F ist eine Abbildung von M auf M' " sagt man auch "F ist surjektiv". Anstelle von "F ist eine eineindeutige Abbildung von M in M'" sagt man auch "F ist injektiv". Schließlich sagt man im Falle, dass F eine eineindeutige Abbildung von M auf M' ist, auch "F ist bijektiv".

Ist $F = (M, f, M')$ eine Abbildung von M in M', so ist durch $xRy :\Leftrightarrow f(x) = f(y)(x, y \in M)$, wie man leicht sieht, eine Äquivalenzrelation R in M definiert. Diese heißt die zu F gehörige Abbildungsäquivalenz.

Bemerkung: Existiert eine eineindeutige Abbildung von der Menge M auf die Menge M', so nennt man die beiden Mengen M und M' gleichmächtig. Ist M speziell eine endliche Menge, so ist auch M' eine endliche Menge, und M und M' haben die gleiche Elementezahl.
Jede zur Menge Γ^+ gleichmächtige Menge heißt abzählbar-unendlich. Alle anderen unendlichen Mengen heißen nicht abzählbar. So ist etwa $< -1, +1 >$ ein Beispiel für eine nicht abzählbare Menge.

Ist M eine fest vorgegebene Menge und $F = (I, f, M)$ eine Abbildung von einer beliebigen nicht leeren Menge I in M, so ist nach Definition f eine bestimmte Teilmenge von $I \times M$.
Bei $(\iota, x) \in f$ ist x durch ι eindeutig bestimmt. Mit $f(\iota) = x_\iota (\iota \in I)$ schreibt man für f auch $(x_\iota)_{\iota \in I}$ und nennt dann $(x_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Elementen aus M.

Die Menge I wird als die Indexmenge dieser Familie bezeichnet, und $\{x_\iota : \iota \in I\} = F(I)$ heißt die Menge der Elemente der Familie $(x_\iota)_{\iota \in I}$.
Ist z.B. $F = (\Pi, f, P(\Gamma))$, wobei wieder Π die Menge aller Primzahlen und $P(\Gamma)$ die Menge der Teilmengen von Γ bezeichnet, die Abbildung von Π in $P(\Gamma)$ mit

$$(F) : p \to M_p = \{p^n : n \in \Gamma^+\} \quad (p \in \Pi)$$

so schreibt man für f in diesem Fall $(M_p)_{p \in \Pi}$. Die Indexmenge ist hier also die Menge der Primzahlen.

Definition 25: Es sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M. Dann versteht man unter $\bigcap\limits_{\iota \in I} M_\iota$ und $\bigcup\limits_{\iota \in I} M_\iota$, die wie folgt definierten Mengen

$$\bigcap_{\iota \in I} M_\iota := \{m : m \in M_{iota} \text{ für alle } \iota \in I\}$$

$$\bigcup_{\iota \in I} M_\iota := \{m : m \in M_{iota} \text{ für mindestens ein } \iota \in I\}$$

Beispiel: Es sei $(M_n)_{n \in \Gamma^+}$ die Familie von Elementen von $P(\Gamma^+)$ mit

$$M_n = \{n^\lambda : \lambda \in \Gamma^+ \cup \{0\}\}, \quad (n \in \Gamma^+)$$

Dann ist $\bigcap\limits_{n\in\Gamma^+} M_n = \{1\}$ und $\bigcup\limits_{n\in\Gamma^+} M_n = \Gamma^+$.

Wir betrachten abschließend noch die Hintereinanderausführung von Abbildungen $F = (M, f, M')$ und $G = (M', g, M'')$, für die also $W(f) = D(g)(= M')$ gilt.

Satz 20: Es sei $F = (M, f, M')$ eine Abbildung von M in M' und $G = (M', g, M'')$ eine Abbildung von M' in M''.
Dann ist $f \circ g$ (s. Def. 9) eine Funktion mit $D(f \circ g) = M$, $W(f \circ g) \subseteq M''$, also $(M, f \circ g, M'')$ eine Abbildung von M in M'':
Für $(M, f \circ g, M'')$ schreibt man FG und nennt FG das Produkt der Abbildungen F und G. Es gilt

$$(FG) : x \to (f \circ g)(x) = g(f(x)) \quad (x \in M)$$

Beweis: Wegen $D(g) = M'$ ist offenbar $D(f \circ g) = D(f)$. Weiter existieren bei $z_1 = (f \circ g)(x)$ und $z_2 = (f \circ g)(x)$ $(x \in M; z_1, z_2 \in M'')$ Elemente y_1, y_2 von M'' mit $y_1 = f(x)$, $z_1 = g(y_1)$, $y_2 = f(x)$ und $z_2 = g(y_2)$. Daraus folgt sofort $y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$.

Bemerkung: In der Analysis ist $f \circ g$ die durch f und g bestimmte mittelbare Funktion mit f als innerer und g als äußerer Funktion.

Aufgaben:
1. Man überlege sich, welche der folgenden Zuordnungsvorschriften Funktionen sind, und gebe dann ihren Definitions- und Wertebereich an. Wie lauten die inversen Relationen, und in welchen Fällen sind diese Funktionen?

a) $f = \{(x, y) \in P^2 : y = x^2 + 2x + 1\}$
b) $f = \{(x, y) \in P^2 : y = \sqrt{1 - x^2}\}$
c) $f = \{(x, y) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle : y = \sqrt{1 - x^2}\}$
d) $f = \{(x, y) \in P^2 : x = \tan y\}$
e) $f = \{(x, y) \in P \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) : x = \tan y\}$

2. Es sei $F = (M, f, M')$ eine Abbildung von der Menge M in die Menge M'. Weiter seien N_1 und N_2 Teilmengen von M mit $N_1 \subset N_2$. Man zeige, dass $F(N_1) \subseteq F(N_2)$ ist und überlege sich, ob dabei das Gleichheitszeichen weggelassen werden darf.

3. Es sei $F = (M, f, M')$ eine Abbildung, und es seien N, N_1, $N_2 \subseteq M$ sowie N', N'_1, $N'_2 \subseteq M'$. Dann gilt

a) $N \subseteq F^{-1}(F(N))$;
b) $F(F^{-1}(F(N')) \subseteq N'$;
c) $F(N_1 \cup N_2) = F(N_1) \cup F(N_2)$;
d) $F(N_1 \cap N_2) \subseteq F(N_1) \cap F(N_2)$;
e) $F^{-1}(N'_1 \cup N'_2) = F^{-1}(N'_1) \cup F^{-1}(N'_2)$;
f) $F^{-1}(N'_1 \cap N'_2) = F^{-1}(N'_1) \cap F^{-1}(N'_2)$;

Man überlege sich weiter, dass in a), b) und (1) genau dann stets das Gleichheitszeichen gilt, wenn F injektiv bzw. surjektiv bzw. injektiv ist.

4. Es seien $F = (M, f, M')$, $G = (M', g, M'')$, $H = (M'', h, M''')$ Abbildungen. Man

beweise, dass

$$(FG)H = F(GH)$$

ist (Assoziativgesetz für die Multiplikation der Abbildungen).

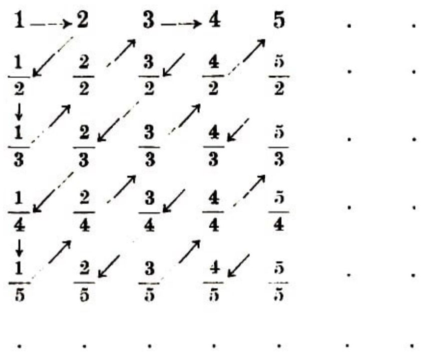
5. Es sei $F = (M, f, M')$ eine eineindeutige Abbildung von M auf M'. Man zeige, dass

$$FF^{-1} = (M, Id_M, M), \quad F^{-1}F = (M', Id_{M'}, M')$$

ist.

6. Es seien $F = (M, f, M')$ und $G = (M, g, M')$ Abbildungen. Man überlege sich, ob die Relationen $f \cap g$ und $f \cup g$ (s. § 4) Funktionen sind, und gebe ihre graphische Darstellung für zwei spezielle Abbildungen $F = (\langle -1, +1\rangle, f, P)$, $G = (\langle -1, +1\rangle, g, P)$ an.

7. Man überlege sich an Hand der Figur



dass eine eineindeutige Abbildung $F = (\Gamma^+, f, P_0^+)$ existiert. Man gebe $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(10)$ an. Hiernach ist die Menge der positiven rationalen Zahlen und damit auch die Menge der rationalen Zahlen abzählbar:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = -2, x_6 = \frac{1}{2}, x_7 = -\frac{1}{2}, ...$$

8 Operative Mengen, Halbordnungen

In der Mathematik beschäftigt man sich nicht nur mit Mengen selbst, sondern vor allem mit Mengen, in denen noch gewisse Relationen erklärt sind.
Solche Relationen können beispielsweise die im folgenden erklärten Operationen oder Halbordnungsrelationen sein.
Um eine erste Vorstellung von den in dieser Weise "strukturierten Mengen" zu geben, betrachten wir im folgenden als einfachsten Spezialfall hiervon eine Menge, in der eine einzige binäre Operation oder eine einzige Halbordnungsrelation definiert ist.

Definition 26: Eine n-stellige Operation oder n-stellige Verknüpfung in einer Menge M ist eine Funktion ϕ mit $D(\phi) = M^n$ und $W(\phi) \subseteq M$.

Insbesondere nennen wir eine zweistellige Verknüpfung in M auch eine binäre Verknüpfung in M. Da wir uns hier auf binäre Operationen beschränken wollen, sprechen wir im folgenden einfach von einer Operation oder Verknüpfung und meinen damit stillschweigend eine binäre Operation.

Definition 27: Ein geordnetes Paar $A = (M, \phi)$, wobei M eine Menge und ϕ eine Verknüpfung in M ist, heißt eine operative Menge. Man nennt M die Trägermenge von A und ϕ die definierende Operation von A.

Die operativen Mengen (M, ϕ) und (M', ϕ') sind genau dann gleich, wenn $M = M'$ und $\phi = \phi'$ ist.
Ist $A = (M, \phi)$ eine operative Menge, so schreibt man anstelle von $\phi((a, b))((a, b) \in M \times M)$ meist $a \cdot b$ oder $a + b$ oder $a \circ b$ oder $a \top b$ usw. und bezeichnet dann auch ϕ einfach bzw. mit $\cdot$ oder $+$ oder $\circ$ oder $\top$ usw.

So ist beispielsweise $(\Gamma, +)$ und $(\Gamma, \cdot)$, wobei $+$ die Addition und $\cdot$ die Multiplikation ganzer Zahlen bedeutet, je eine operative Menge.

Definition 28: Sind $A = (M, \top)$ und $A' = (M', \top')$ operative Mengen, so heißt eine Abbildung $F = (M, f, M')$ von M in bzw. auf M' eine homomorphe Abbildung von A in bzw. auf A', wenn

$$f(a \top b) = f(a) \top' f(b) \qquad \text{für beliebige } a, b \in M$$

gilt.

So ist z.B. $F = (P^+, f, P)$ mit $(F) : x \to f(x) = \ln x$ unter Beachtung von $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ $(x, y \in P^+)$ eine homomorphe Abbildung von $A = (P^+, \cdot)$ auf $A' = (P, +)$, wenn hier $\cdot$ die Multiplikation positiver reeller Zahlen und $+$ die Addition reeller Zahlen ist.

Ist die homomorphe Abbildung $F = (M, f, M')$ von $A = (M, \phi)$ in $A' = (M', \phi')$ insbesondere eine eineindeutige Abbildung von M auf M', so heißt F eine isomorphe Abbildung von A auf A'.
Man nennt dann A' zu A isomorph - in Zeichen: $A \cong A'$. So ist z.B. die vorhin angegebene homomorphe Abbildung $F = (P^+, f, P)$ mit $(F) : x \to f(x) = \ln x$ von

$(P^+, \cdot)$ auf $(P, +)$ eine isomorphe Abbildung, also $(P^+, \cdot) \cong (P, +)$.

Da (M, Id_M, M) eine isomorphe Abbildung der operativen Menge $A = (M, \phi)$ auf sich ist, so ist $A \cong A$ für jede operative Menge A. Ist $F = (M, f, M')$ eine isomorphe Abbildung von $A = (M, \top)$ auf $A' = (M', \top')$, so ist $F^{-1} = (M', f^{-1}, M)$ eine isomorphe Abbildung von A' auf A; denn F^{-1} ist bijektiv, und es gilt für beliebige $x', y' \in M'$ mit $x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$:

$$f^{-1}(x' \top' y') = f^{-1}(f(x) \top' f(y)) = f^{-1}(f(x \top y)) = x \top y = f^{-1}(x') \top f^{-1}(y')$$

Folglich gilt mit $A \cong A'$ auch $A' \cong A$, so dass wir auch von zwei isomorphen operativen Mengen A und A' sprechen können.

Ist $F = (M, f, M')$ eine isomorphe Abbildung von $A = (M, \top)$ auf $A' = (M', \top')$ und $G = (M', g, M'')$ eine isomorphe Abbildung von $A' = (M', \top')$ auf $A'' = (M'', \top'')$, so ist $FG = (M, f \circ g, M'')$ eine isomorphe Abbildung von A auf A''; denn FG ist bijektiv, und es gilt für beliebige $x, y \in M$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x \top y) &= g(f(x \top y)) = g(f(x) \top' f(y)) = g(f(x)) \top'' g(f(y)) \\ &= (f \circ g)(x) \top'' (f \circ g)(y)\end{aligned}$$

Folglich ist bei $A \cong A'$ und $A' \cong A''$ auch $A \cong A''$.

Definition 29: Eine Kongruenzrelation einer operativen Menge $A = (M, \top)$ ist eine Äquivalenzrelation R in M mit der zusätzlichen Eigenschaft:

$$a_1 R a_2 \wedge b_1 R b_2 \Rightarrow (a_1 \top b_1) R (a_2 \top b_2) \quad \text{für beliebige } a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$$

Für jede feste Zahl $m \in \Gamma^+$ ist die in § 5, Beispiel c) definierte Äquivalenzrelation R_m in Γ eine Kongruenzrelation sowohl der operativen Menge $(\Gamma, +)$ als auch der operativen Menge $(\Gamma, \cdot)$.
Es gilt nämlich für jede feste Zahl $m \in \Gamma^+$ bei beliebigen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}a_1 R_m a_2 \wedge b_1 R_m b_2 &\Rightarrow m \mid (a_1 - a_2) \wedge m \mid (b_1 - b_2) \Rightarrow m \mid [(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)] \\ &\Rightarrow m \mid [(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)] \Rightarrow (a_1 + b_1) R_m (a_2 + b_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}a_1 R_m a_2 \wedge b_1 R_m b_2 &\Rightarrow m \mid (a_1 - a_2) \wedge m \mid (b_1 - b_2) \Rightarrow m \mid [(a_1 - a_2) \cdot b + a_2 \cdot (b_1 - b_2)] \\ &\Rightarrow m \mid (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) \Rightarrow m \mid (a_1 \cdot b_1) R_m (a_2 \cdot b_2)\end{aligned}$$

Es gilt

Satz 21: Ist $F = (M, f, M')$ eine homomorphe Abbildung von einer operativen Menge $A = (M, \top)$ in eine operative Menge $A' = (M', \top')$, so ist die zugehörige Abbildungsäquivalenz R

$$xRy :\Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (x, y \in M)$$

eine Kongruenzrelation von A.

Beweis:

Für beliebige $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$ gilt

$$\begin{aligned} a_1Ra_2 \wedge b_1Rb_2 &\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \wedge f(b_1) = f(b_2) \\ &\Rightarrow f(a_1 \top b_1) = f(a_1) \top' f(b_1) = f(a_2) \top' f(b_2) = f(a_2 \top b_2) \\ &\Rightarrow (a_1 \top b_1)R(a_2 \top b_2) \end{aligned}$$

Definition 30: Ein geordnetes Paar $H = (M, R)$, wo M eine Menge und R eine Halbordnungsrelation (§ 6) in M ist, heißt eine Halbordnung oder auch eine halbgeordnete Menge.
Man nennt M die Trägermenge von H und R die definierende Halbordnungsrelation von H.

Die Halbordnungen (M, R) und (M', R') sind hiernach genau dann gleich, wenn $M = M'$ und $R = R'$ ist.

Beispiele für Halbordnungen sind:
a) $(\Gamma^+, \leq)$, wobei $\leq$ die natürliche Größenordnungsrelation in Γ^+ ist;
b) $(\Gamma^+, |)$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation in Γ^+ ist, also für alle $a, b \in \Gamma^+$ gilt:

$$a \mid b :\Leftrightarrow \text{(Es gibt ein } n \in \Gamma^+ : b = na) \quad (a, b \in \Gamma^+)$$

c) $(P(M), \subseteq)$, wobei $\subseteq$ die mengentheoretische Inklusion in der Menge $P(M)$ der Teilmengen der Menge M ist.

Ist R speziell eine Ordnungsrelation bzw. eine Wohlordnungsrelation in der Menge M, so heißt $H = (M, R)$ auch eine Ordnung oder geordnete Menge bzw. eine Wohlordnung oder wohlgeordnete Menge.

Definition 31: Sind $H = (M, \leq)$ und $H' = (M', \preceq)$ Halbordnungen, so heißt eine Abbildung $F = (M, f, M')$ von M in bzw. auf M' eine homomorphe Abbildung von H in bzw. auf H', wenn für beliebige $a, b \in M$ gilt

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$$

Ist die homomorphe Abbildung $F = (M, f, M')$ von $H = (M, \leq)$ auf $H' = (M', \preceq)$ insbesondere eine eineindeutige Abbildung von M auf M' und ist auch F^{-1} eine homomorphe Abbildung von H' auf H, d.h. ist F bijektiv und gilt

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \preceq f(b) \qquad \text{für beliebige } a, b \in M$$

so heißt F eine isomorphe Abbildung von H auf H'. Man sagt dann: H' ist eine zu H isomorphe Halbordnung - in Zeichen: $H \cong H'$.

Man überlegt sich wieder leicht, dass $H \cong H$ für jede Halbordnung H gilt, dass mit $H \cong H'$ auch $H' \cong H$ ist und dass bei $H \cong H'$ und $H' \cong H''$ auch $H \cong H''$ gilt.

Definition 32: Es sei $H = (M, \leq)$ eine Halbordnung. Dann heißt ein Element s von M

eine obere Schranke bzw. eine untere Schranke der Teilmenge N von M (in H), wenn für jedes $x \in N$ gilt: $x \leq s$ bzw. $s \leq x$.
Eine Teilmenge N von M, die eine obere bzw. untere Schranke (in H) besitzt, heißt (in H) nach oben bzw. nach unten beschränkt. Existiert gleichzeitig eine untere und eine obere Schranke, so wird N beschränkt genannt.
Besitzt M selbst eine untere Schranke, so ist diese durch H eindeutig bestimmt und heißt das kleinste Element oder das Nullelement der Halbordnung H. Hat M eine obere Schranke, so heißt dieses durch H eindeutig bestimmte Element das größte Element oder das Einselement der Halbordnung H.

Definition 33: Es sei $H = (M, \leq)$ eine Halbordnung. Gibt es zu der Teilmenge N von M eine obere Schranke g (in H) mit der Eigenschaft, dass für jede obere Schranke s von N (in H) $g \leq s$ gilt, so heißt dieses durch N eindeutig bestimmte Element g von M die obere Grenze oder das Supremum von N (in H) - in Zeichen: $g = \sup N$.
Ist g eine untere Schranke von N und gilt $s \leq g$ für jede untere Schranke s von N, so heißt das durch N eindeutig bestimmte Element g von M die untere Grenze oder das Infimum von N (in H) - in Zeichen: $g = \inf N$.

So ist beispielsweise bei $H = (\Gamma, \leq)$, wobei $\leq$ die natürliche Größenordnungsrelation in Γ ist, jede nicht positive ganze Zahl eine untere Schranke und 0 die untere Grenze von $N = \Gamma^+ \cup \{0\}$. Diese Teilmenge N von F besitzt weder eine obere Grenze noch eine obere Schranke in H.

In der Halbordnung $H = (P, \leq)$, wobei $\leq$ die natürliche Größenordnungsrelation in P ist, hat die Teilmenge P^+ von P jede nicht positive reelle Zahl als untere Schranke, und 0 ist die - im Gegensatz zu oben nicht zu P^+ gehörende - untere Grenze von P^+ in H.

In der Halbordnung $H = (\Gamma^+, |)$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation in Γ^+ ist, hat jede zweielementige Teilmenge $\{a, b\}$ von Γ^+ sowohl ein Infimum als auch ein Supremum, und zwar gilt

$$\inf\{a, b\} = (a, b) \quad \text{(g.g.T. von } a \text{ und } b)$$
$$\inf\{a, b\} = [a, b] \quad \text{(k.g.V. von } a \text{ und } b)$$

(Beweis!).
Diese Halbordnung H hat zwar ein Nullelement, nämlich 1, aber kein Einselement.

Ist $H = (M, \leq)$ eine Wohlordnung, so besitzt jede nicht leere Teilmenge N von M ein (in N enthaltenes) Infimum.

Aufgaben:
1. Wie muss man die definierende Operation $\top$ der operativen Menge $A' = (P, \top)$ festsetzen, damit $F = (P, f, P)$ mit

$$(F) : x \to f(x) = ax + b \quad (a, b \in P; a \neq 0, b \neq 0, \text{ fest})$$

eine isomorphe Abbildung von $A = (P, +)$ auf A' ist? Dabei ist $+$ die Addition reeller Zahlen.

2. Es sei $M = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$ und $R' = \{(d, a), (a, b), (a, 0), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$
Man zeige, dass $H = (M, R)$ und $H' = (M, R')$ Halbordnungen sind und dass $F = (M, Id_M, M)$ eine eineindeutige homomorphe Abbildung von H auf H', aber keine isomorphe Abbildung von H auf H' ist!

3. Es sei $H = (P_0, \leq)$, wobei $\leq$ die natürliche Größenordnungsrelation in P_0 ist. Man gebe im Falle ihrer Existenz die Grenzen der Teilmenge

$$N = \left\{ ..., \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ..., \frac{n+1}{n}, ... \right\}$$

von P_0 (in H) an!

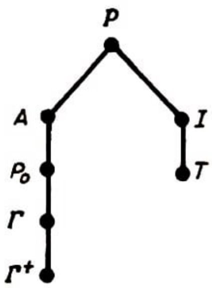
4. Es ist zu zeigen, dass in der Halbordnung $(P(M), \subseteq)$, wobei $\subseteq$ die mengentheoretische Inklusion in der Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist, jede Teilmenge T von $P(M)$ ein Infimum und ein Supremum besitzt und dass bei $T \neq \varnothing$

$$\inf T = \bigcap_{N \in T} N \qquad \text{und} \qquad \sup T = \bigcup_{N \in T} N$$

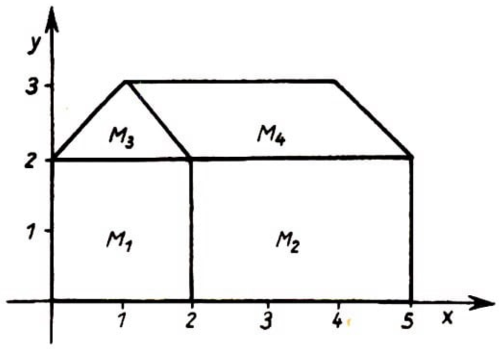
gilt. Weiterhin ist $\inf \varnothing = M$ und $\sup \varnothing = \varnothing$.

9 Lösungen der Aufgaben

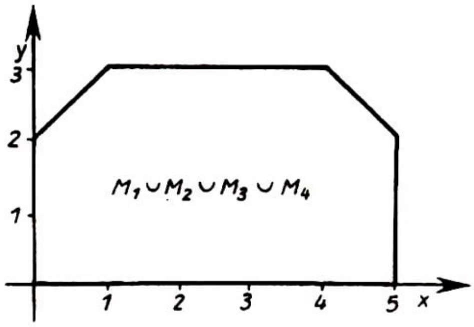
§ 2
1.a) $\{x \in K : x \in \Gamma + \wedge 2 \mid x\}$
b) $\{x \in K : x^4 = 1\}$
c) $\{x \in K :$ es gibt ein $n \in \Gamma^+$ mit $x = 10^{-n}\}$
d) $\{x \in K :$ es gibt Elemente $m, n \in \Gamma^+$ mit $m + n = 5$ und $x = \frac{m}{n}\}$ 3.



§ 3
1. $M_1 \cup M_2 = \{s, c, h, a, u, m, w, e, i, n\}$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.
2. $M_1 \cup M_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in Q : a_0 = 1 \vee a_1 = 1\}$,
$M_1 \cap M_2 = \{1 + x + a_2x^2 \in Q : a_2 \in P\}$
3.



$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ ist, geometrisch ausgedrückt, die Menge der Punkte im Innern und auf dem Rande der Fläche in Abb. 6.



Weiterhin ist $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 = \{(2, 2)\}$

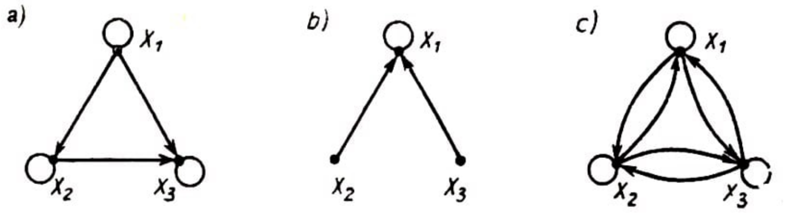
6. a) $M_1 \times M_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

b) $M_1 \times M_2 = \{(x,y) \in P^2 : (2 \leq x \leq 3) \wedge (5 \leq y \leq 7\}$
c) $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(p, \wedge, q), (p, \vee, q), (p, \Leftrightarrow, q), (q, \wedge, r), (q, \vee, r), (q, \Leftrightarrow, r)\}$

§ 4
1. a) reflexiv in $\{1, 2, 3\}$, antisymmetrisch, transitiv.
b) antisymmetrisch, transitiv, eindeutig.
c) reflexiv in $\{1, 2, 3\}$, symmetrisch, transitiv.

3. R ist reflexiv in M : In jedem Punkt ist eine Schlinge vorhanden.
R ist symmetrisch: Gibt es einen Pfeil vom Punkte X nach dem Punkte Y, so gibt es auch einen Pfeil vom Punkte Y nach dem Punkt X.
R ist antisymmetrisch: Zu zwei verschiedenen Punkten X und Y existiert nicht gleichzeitig ein Pfeil von X nach Y und von Y nach X.
R ist transitiv: Gibt es einen Pfeil von einem Punkt X nach einem Punkt Y und einen Pfeil von Y nach einem Punkt Z, so gibt es auch einen Pfeil von X nach Z.
R ist eindeutig: Ist in einem Punkt X eine Schlinge vorhanden, so gibt es keinen Pfeil von X nach einem Punkt Y. Gibt es einen Pfeil von X nach einem Punkt Y, so gibt es außer diesen keinen weiteren von X ausgehenden Pfeil und auch keine Schlinge in X.

5.



Bemerkung: Hierbei wurde der dem Element ν von $\{1, 2, 3\}$ entsprechende Punkt mit X_ν bezeichnet.

§ 5
1. Genau dann, wenn die Herstellungszeit und das Gütezeichen von e_i und e_k übereinstimmen.

2. Die durch Z definierte Äquivalenzrelation in M lautet:

$$R = \{(1,1), (1,7), (2,2), (2,3), (2,9), (3,2), (3,3), (3,9), (4,4), (5,5), (5,6), (5,8), (5,10), (6,5), (6,6), (6,8), (6,10), (7,1), (7,7), (8,5), (8,6), (8,8), (8,10), (9,2), (9,3), (9,9), (10,5), (10,6), (10,8), (10,10)\}$$

Die unter a) und b) angegebenen Mengen sind keine Zerlegungen von M.

3. Betrachtet man (x, y) als Koordinaten eines Punktes in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem, so gilt geometrisch ausgedrückt:
Jede Äquivalenzklasse mod R ist die Menge aller Punkte eines Kreisbogens mit einem von 0 verschiedenen Radius um den Koordinatenursprung, der im Innern des ersten Quadranten verläuft. Jede Äquivalenzklasse mod 5 ist die Menge aller Punkte einer

im Innern des ersten Quadranten verlaufenden Geraden, die dem Koordinatenursprung beliebig nahe kommt.
Jede Äquivalenzklasse mod T ist die Menge aller Punkte einer im ersten Quadranten verlaufenden Parallelen zur y-Achse.

4. Der 31. Oktober 1964 fiel auf einen Sonnabend.

5. $M/\overline{R}$ ist eine dreielementige Menge. Die Äquivalenzklassen mod $\overline{R}$ sind $\{1, 4, 5, 10, 12\}$, $\{2, 7, 9\}$ und $\{3, 6, 8, 11\}$.

6. $\overline{R \cup S} = \{(x, y) \in \Gamma^+ : x \equiv y(3)\}$

7. Die durch S/R definierte Zerlegung von Γ/R ist die Menge

$$\{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\} \quad , \quad \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}\}\}$$

mit $\overline{a} = \{x \in \Gamma : x \equiv a(10)\}$ für jedes $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

§ 6
1. a), b), c) keine Halbordnungsrelationen, d) Halbordnungsrelation, e) Ordnungsrelation.

2. $R_1 \cup R_2$ und $R_1 \circ R_2$ sind im allgemeinen keine Halbordnungsrelationen in M. Dagegen ist $R_1 \cap R_2$ eine Halbordnungsrelation in M.

§ 7
1. a) f ist eine Funktion mit $D(f) = P$, $W(f) = P^+ \cup \{0\}$.
b) f ist eine Funktion mit $D(f) = \langle -1, +1 \rangle$, $W(f) = (0, 1)$.
c) f ist eine Funktion mit $D(f) = \langle 0, 1 \rangle$, $W(f) = \langle 0, 1 \rangle$.
d) f ist keine Funktion.
e) f ist eine Funktion mit $D(f) = P$, $W(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

6. $f \cap g$ ist eine Funktion, dagegen im allgemeinen nicht $f \cup g$.

§ 8
I. $x \top y = x + y - b$ für beliebige $x, y \in P$.

3. $\inf N = 0$, $\sup N = \frac{3}{2}$