I.S. Sominski

Die Methode der vollständigen Induktion

Übersetzung von Wolfgang Ficker
1982 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 8
Abschrift und LaTex-Satz: 2020 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Die Methode der vollständigen Induktion, der dieses Büchlein gewidmet ist, findet in verschiedenen Gebieten der Mathematik weitgehende Anwendung. Sie wird sowohl im Schulunterricht als auch in den neuesten Untersuchungen in verschiedenen Disziplinen benutzt.
Es ist daher verständlich, dass man ohne Beherrschung dieser Methode nicht einmal die Schulmathematik ernsthaft betreiben kann. Abgesehen davon besitzen die Ideen der vollständigen Induktion auch einen großen allgemeinbildenden Wert. Daher dürften sie auch für Menschen, welche der Mathematik und ihren Anwendungen fernstehen, von Interesse sein.

Der Hauptinhalt der Methode und die einfachsten Beispiele für ihre Anwendung finden wir im Abschn. I und im § 1 des Abschn. II, zu deren Verständnis das auf der Grundschule erworbene Wissen völlig ausreicht. Die übrigen Paragraphen des Heftchens sind jedem Leser verständlich, der den mathematischen Wissensstoff einer Oberschule beherrscht.

Das Büchlein ist für Schüler der oberen Klassen der Oberschule, für Studenten der ersten Semester an pädagogischen Instituten, Universitäten und Fachschulen geschrieben; es kann aber auch in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft an der Schule verwendet werden.

Der Methode der vollständigen Induktion sind auch folgende Aufsätze gewidmet:

S. W. Serpinski, "Über vollständige Induktion", Mathematik und Physik in der Schule, Heft 3, 1936.

J. S. Besikowitsch, "Die Methode der vollständigen Induktion", Mathematik in der Schule, Heft 1, 1946.

I. S. Sominski, "Untersuchung der Methode der vollständigen Induktion auf der Oberschule", Mathematik in der Schule, methodische Sammlung, Heft 2, Institut für Lehrerfortbildung des Leningrader Gebietes, 1947.

F. F. Nagibin, "Die Methode der vollständigen Induktion im Unterricht der Oberschule", Mathematik in der Schule, Heft 4, 1949.

Aufgaben zur Methode der vollständigen Induktion kann der Leser in dem Buch von W. A. Kretschmar, "Aufgabensammlung zur Algebra", 2. Auflage, Gostechisdat, 1950 finden.

25. August 1950
I. Sominski

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Bei Aussagen unterscheidet man allgemeine und spezielle. Wir wollen zunächst einige Beispiele für allgemeine Aussagen anführen:

1. Alle Bürger der UdSSR besitzen das Recht auf Bildung.
2. In jedem Parallelogramm werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert.
3. Alle Zahlen, die mit einer Null enden, sind durch 5 teilbar.

Die entsprechenden Beispiele spezieller Aussagen sind:

Petrow besitzt das Recht auf Bildung.
1. In dem Parallelogramm $ABCD$ werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert.
2. 140 ist durch 5 teilbar.

Den Übergang von allgemeinen zu speziellen Aussagen nennt man Deduktion. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

1. Alle Bürger der UdSSR besitzen das Recht auf Bildung
2. Petrow ist Bürger der UdSSR.
3. Petrow besitzt das Recht auf Bildung.

Aus der allgemeinen Aussage 1 haben wir mit Hilfe der Aussage 2 die spezielle Aussage 3 gefolgert.
Den Übergang von speziellen Aussagen zu allgemeinen nennt man Induktion. Dabei kann die Induktion sowohl zu richtigen als auch zu falschen Schlussfolgerungen führen. Wir wollen dies an zwei Beispielen erläutern.

1. 140 ist durch 5 teilbar.
2. Alle Zahlen, die mit einer Null enden, sind durch 5 teilbar.

Aus der speziellen Aussage 1 erhielt man die allgemeine Aussage 2, und diese ist richtig.

1. 140 ist durch 5 teilbar.
2. Alle dreistelligen Zahlen sind durch 5 teilbar.

Aus der speziellen Ansage 1 entstand die allgemeine Aussage 2. Diese Aussage ist jedoch falsch.
Es fragt sich nun, wie die Induktion in der Mathematik zu handhaben ist, damit man richtige Folgerungen erhält. Die Antwort auf diese Frage soll in dieser Broschüre gegeben werden.

1 Die Methode der vollständigen Induktion

§ 1. Wir wollen zunächst zwei Beispiele für eine in der Mathematik unzulässige Induktion betrachten.
Beispiel 1. Es sei

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

Man bestätigt leicht, dass

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

ist. Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse behaupten wir, dass für jede natürliche Zahl n

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ist.
Beispiel 2. Wir betrachten das von dem Mathematiker L. Euler, einem der ersten Mitglieder der Berliner und der Petersburger Akademie, angegebene Trinom $x^4 + x + 41$. Setzen wir in diesem Trinom für x die Zahl Null, so erhalten wir die Primzahl 41. Setzen wir dann in dem gleichen Trinom x gleich Eins, so erhalten wir wiederum eine eine Primzahl, und zwar 43.
Lassen wir in dem Trinom x die Folge 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 durchlaufen, so erhalten wir die Primzahlen 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Auf Grund dieser Ergebnisse könnten wir behaupten, dass man stets eine Primzahl erhält, wenn man in diesem Trinom für x eine ganze nichtnegative Zahl einsetzt.

Warum ist die in diesen Beispielen angeführte Überlegung in der Mathematik unzulässig ? Worin liegt die Unzulänglichkeit unserer Schlussfolgerungen ?

Bei diesen Überlegungen machten wir eine allgemeine Aussage über jedes n (bzw. jedes x im 2. Beispiel) lediglich auf Grund dessen, dass sich diese Aussage für gewisse Werte von n (bzw. x) als richtig erwies.
Man wendet die Induktion in der Mathematik sehr oft an, aber man muss sie auch richtig anwenden, da man bei leichtfertiger Verwendung der Induktion zu unrichtigen Schlussfolgerungen gelangen kann.
So wird sich zwar unsere in Beispiel 1 aufgestellte allgemeine Aussage - wie später im Beispiel 5 bewiesen werden soll - als richtig, unsere allgemeine Aussage von Beispiel 2 dagegen als falsch herausstellen.

In der Tat ergibt sich bei aufmerksamer Untersuchung, dass das Trinom $x^2 + x + 41$ für $x = 0, 1, 2, ..., 39$ Primzahlen liefert, dass dieses Trinom aber für $x = 40$ gleich 41^2, d.h. gleich einer zusammengesetzten Zahl ist.

§ 2. Im Beispiel 2 begegneten wir einer Aussage, die sich in 40 Fällen als richtig, im allgemeinen aber als falsch erwies.
Wir wollen deshalb noch 2 Beispiele anführen, in denen die Aussagen in gewissen speziellen Fällen richtig, allgemein jedoch falsch sind.

Beispiel 3. Das Binom $x^n - 1$ (n eine natürliche Zahl) ist für die Mathematiker von großem Interesse, da es mit der geometrischen Aufgabe der Teilung des Kreises in n gleiche Teile eng verknüpft ist. Es ist daher nicht verwunderlich, dass dieses Binom in der Mathematik allseitig untersucht wird.
Insbesondere interessiert die Mathematiker die Frage der Zerlegung dieses Binoms in Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten.

Bei der Betrachtung dieser Zerlegung bei vielen speziellen Werten von n stellten die Mathematiker fest, dass die absoluten Beträge aller Koeffizienten bei einer Zerlegung die Zahl Eins nicht übertreffen. Es gelten nämlich die Identitäten

$$\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1,\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1),\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1),\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1),\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\\
&= ...
\end{aligned}$$

Es wurden Tabellen aufgestellt, innerhalb deren die Koeffizienten auch die genannte Eigenschaft besaßen. Versuche aber, diese Tatsache für jedes n zu beweisen, schlugen fehl.

Im Jahre 1938 erschien darauf in der Zeitschrift 'Fortschritte der mathematischen Wissenschaften', Heft IV, eine Veröffentlichung des hervorragenden sowjetischen Mathematikers und korrespondierenden Mitglieds der Akademie der Wissenschaften der UdSSR N. G. Tschebortarew, in der er die sowjetischen Mathematiker aufforderte, dieses Problem zu lösen.

Diese Aufgabe löste W. Iwanow. Es zeigte sich, dass die erwähnte Eigenschaft allen Binomen $x^n - 1$ zukommt, deren Grad kleiner als 105 ist. Einer der Faktoren von $x^{105} - 1$ aber ist das Polynom

$$\begin{aligned}
&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31}\\
&\quad - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8\\
&\quad - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

das diese Eigenschaft nicht mehr besitzt.

Beispiel 4. In wieviel Teile wird der Raum durch n Ebenen, die durch einen Punkt gehen, zerlegt, wenn keine drei von ihnen eine Schnittgerade gemeinsam haben ?
Wir betrachten die einfachsten Spezialfälle dieses Problems.
Eine Ebene zerlegt den Raum in 2 Teile. Zwei durch einen Punkt gehende Ebenen zerlegen den Raum in 4 Teile. Drei Ebenen, die einen Punkt, aber keine Gerade gemeinsam haben, zerlegen den Raum in 8 Teile.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, dass bei Vergrößerung der Anzahl der Ebenen um Eins der Raum in die doppelte Anzahl von Teilräumen zerlegt würde und dass daher vier Ebenen den Raum in 16 Teile, fünf in 32 Teile usw. zerlegen, allgemein, dass n Ebenen den Raum in 2^n Teile zerlegen.
In Wirklichkeit ist es jedoch nicht so, denn 4 Ebenen zerlegen den Raum in 14 Teile, 5 Ebenen in 22 Teile. Allgemein gilt, dass n Ebenen den Raum in $(n-1)n+2$ Teile zerlegen.[1]

Die betrachteten Beispiele erlauben den einfachen, aber gleichzeitig auch wichtigen Schluss:
Eine Aussage kann in einer ganzen Reihe spezieller Fälle richtig und trotzdem allgemein falsch sein.

§ 3. Es entsteht jetzt folgende Frage: Eine Aussage sei in einigen speziellen Fällen richtig; alle Fälle können jedoch unmöglich untersucht werden; wie kann man erkennen, ob diese Aussage allgemein richtig ist?
Diese Frage kann mit Hilfe einer besonderen Methode, der sogenannten Methode der vollständigen Induktion (Schluss von n auf $n+1$) manchmal gelöst werden.
Diese Methode beruht auf dem Prinzip der vollständigen Induktion, des in Folgendem besteht:

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl n richtig, wenn sie
1) für $n=1$ richtig ist und wenn
2) aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl $n=k$ die Richtigkeit für $n=k+1$ folgt.

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage sei nicht für jede natürliche Zahl n richtig. Es würde dann eine natürliche Zahl m existieren mit der Eigenschaft, dass
1) die Aussage für $n=m$ falsch.
2) für jedes n, das kleiner als m ist, die Aussage richtig ist. (Mit anderen Worten: m wäre die erste natürliche Zahl, für welche die Aussage falsch ist.)

Offenbar wäre $m>1$, da für $n=1$ die Aussage richtig ist (Bedingung 1). Folglich wäre $m-1$ eine natürliche Zahl. Daraus ergäbe sich weiter, dass für die natürliche Zahl $m-1$ die Aussage richtig, aber für die nachfolgende natürliche Zahl m falsch wäre. Dies widerspräche der Bedingung 2.

Bemerkung. Beim Beweis des Prinzips der vollständigen Induktion haben wir benutzt, dass in jeder Menge natürlicher Zahlen eine kleinste enthalten ist. Es ist leicht zu sehen,

[1] Lösung siehe Aufgabe 30.

dass diese Eigenschaft ihrerseits als Folgerung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion abgeleitet werden kann. Somit sind beide Aussagen äquivalent. Jede von ihnen kann man als Axiom ansehen, welches die Folge der natürlichen Zahlen definiert; die andere ist dann ein Satz. Gewöhnlich nimmt man als Axiom das Prinzip der vollständigen Induktion selbst.

§ 4. Einen auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruhenden Beweis nennt man Beweis durch vollständige Induktion. Ein derartiger Beweis muss notwendigerweise aus zwei Teilen bestehen, aus dem Beweis der beiden voneinander unabhängigen Sätze:

Satz 1. Die Aussage ist für $n = 1$ richtig.

Satz 2. Die Aussage ist für $n = k + 1$ richtig, wenn sie für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist.

Sind diese beiden Sätze bewiesen, so ist auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion die Aussage für jedes natürliche n richtig.

Beispiel 5. Man berechne die Summe (vgl. Beispiel 1)

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

Wir wissen, dass

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad , \quad S_4 = \frac{4}{5}$$

ist.
Jetzt wollen wir den Fehler, den wir im Beispiel 1 zuließen, nicht wiederholen und nicht gleich behaupten, für jedes natürliche n sei

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Wir sind vorsichtig und sagen, die betrachteten S_1, S_2, S_3, S_4 würden die Vermutung nahelegen, dass die Beziehung $S_n = \frac{n}{n+1}$ für jedes natürliche n gilt. Gleichzeitig wissen wir, dass diese Vermutung für $n = l, 2, 3, 4$ richtig ist. Zum Beweis der Allgemeingültigkeit jener Vermutung wollen wir nun die Methode der vollständigen Induktion benutzen.

Satz 1. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig, da $S_1 = \frac{1}{2}$ ist.

Satz 2. Wir nehmen an, die Vermutung sei für $n = k$ richtig, d.h., es sei

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

wobei k eine natürliche Zahl ist. Wir zeigen, dass dann die Vermutung auch für $n = k+1$ richtig ist. d.h., dass

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

gilt.

In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

und folglich nach Induktionsannahme

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Damit sind beide Sätze bewiesen. Auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion gilt also die Aussage, dass für jede natürliche Zahl n

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ist.

Bemerkung 1. Es ist notwendig, zu betonen, dass ein Beweis durch vollständige Induktion unbedingt den Beweis der beiden Sätze 1 und 2 verlangt.
Wir sahen schon, zu welchem Ergebnis die Nichtbeachtung des Satzes 2 führt (Beispiel 2). Nunmehr zeigen wir, dass auch Satz 1 niemals weggelassen werden darf. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 6. Behauptung. Jede natürliche Zahl ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich.
Wir "beweisen" dies durch vollständige Induktion. Wir nehmen dazu an, es sei

$$k = k+1 \tag{1}$$

und beweisen, dass dann

$$k+1 = k+2 \tag{2}$$

gilt.
In der Tat erhalten wir, wenn wir auf jeder Seite der Gleichung (1) eine 1 addieren, die Gleichung (2). Hieraus folgt: Ist die Aussage für $n = k$ richtig, so ist sie auch für $n = k+1$ richtig, und die Behauptung wäre bewiesen.

Folgerung. Alle natürlichen Zahlen sind einander gleich.

Wo ist hier aber der Fehler? Der Fehler liegt darin, dass der erste der für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion notwendigen Sätze hier nicht bewiesen wurde und auch gar nicht richtig ist, dass vielmehr nur der zweite Satz bewiesen wurde.

Die Sätze 1 und 2 haben beide ihre spezielle Bedeutung.
Satz 1 schafft sozusagen die Basis für die Durchführung der vollständigen Induktion. Satz 2 liefert die Berechtigung der automatischen Ausdehnung (Verbreiterung) dieser Basis, die Berechtigung für den Übergang von dem gegebenen speziellen Fall zu dem folgenden, von n auf $n+1$ (daher die Bezeichnung "Schluss von n auf $n+1$"; d. Red.)

Ist Satz 1 nicht bewiesen, wohl aber Satz 2 (siehe Beispiel 6), so ist die Basis für die Anwendung der Induktion nicht geschaffen; daher ist es sinnlos, Satz 2 anwenden zu wollen, da eigentlich nichts zum Verbreitern vorhanden ist.

Wurde aber Satz 2 nicht bewiesen, sondern nur Satz 1 gezeigt (vgl. Beispiel 1 und 2), so fehlt die Berechtigung für eine Verallgemeinerung, obgleich die Basis für die Anwendung der Induktion vorhanden ist.

Bemerkung 2. Die vollständige Induktion wurde im vorstehenden für einfachste Fälle untersucht. In komplizierteren Fällen müssen die Formulierungen der Sätze 1 und 2 entsprechend geändert werden.
Bisweilen stützt sich der zweite Teil des Beweises auf die Richtigkeit der Aussage nicht nur für $n = k$, sondern auch für $n = k - 1$. In diesem Falle muss die Aussage im ersten Teil für zwei aufeinanderfolgende Werte von n bewiesen werden (siehe später Aufgabe 18).

Manchmal kann man eine Aussage nicht für alle natürlichen n, wohl aber für alle ganzen n, die oberhalb einer gewissen ganzen Zahl m liegen, beweisen. In diesem Fall verifiziert man im ersten Teil des Beweises die Aussage für $n = m + 1$ und, wenn dies notwendig ist, auch für gewisse nachfolgende Werte von 1; (vgl. Aufgabe 24).

§ 5. Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir zur Klärung einer wesentlichen Seite der vollständigen Induktion noch einmal auf Beispiel 1 zurückkommen.

Als wir die Summe

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

für verschiedene Werte von n untersuchten, berechneten wir

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad , \quad S_4 = \frac{4}{5}, ...$$

Dies führte uns zu der Vermutung, dass für jedes n

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

gilt. Zum Beweis dieser Vermutung benutzten wir die vollständige Induktion.
Wir hatten Glück und sprechen eine Vermutung aus, die sich dann auch bestätigte. Hätten wir eine sich als falsch erweisende Vermutung aufgestellt, so hätte sich der Fehler beim Beweis des Satzes 2 gezeigt.

Beispiel 7. Wir wissen, dass

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{1}$$

ist. Nehmen wir an, wir hätten

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1} \tag{2}$$

vermutet.

Für $n = 1$ ist die Formel (2) richtig, da $S_1 = \frac{1}{2}$. Nehmen wir an, die Formel (2) sei für $n = k$ richtig, d.h., es gelte

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}$$

Wir versuchen nun zu zeigen, dass die Formel (2) dann auch für $n = k + 1$ richtig ist, d.h., dass

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}$$

gilt. Nun ist aber

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3 + 4k^2 + 8k + 3}{(k+1)(k+2)(3k+1}$$

d.h., wir finden ein anderes als das erwartete Resultat. Die beiden Ausdrücke für S_{k+1} sind nicht identisch; setzt man sie gleich, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für k, die keine reellen Lösungen hat.
Also folgt aus der Richtigkeit der Formel (2) für $n = k$ nicht die für $n = k + 1$. Wir haben vielmehr gefunden, dass die Formel (2) falsch ist.

Daher gestattet die vollständige Induktion, die bei der Suche nach einem allgemeinen Gesetz entstehenden Vermutungen zu prüfen, falsche zu verwerfen und richtige zu bestätigen.

2 Beispiele und Übungen

Um die vollständige Induktion anwenden zu lernen, muss man eine genügende Anzahl von Aufgaben betrachten.
In diesem Kapitel sind 52 Aufgaben angegeben, von denen 22 mit genauen Lösungen versehen sind, während man die Lösungen der übrigen 30 Aufgaben, die für selbständige Arbeit gedacht sind, am Ende der Broschüre findet.

§ 1. Aufgabe 1. Wir schreiben die ungeraden Zahlen der Größe nach auf; 1, 3, 5, 7, ... Die erste bezeichnen wir mit u_1 die zweite mit u_2 die dritte mit u_3 usw., d.h., wir wollen

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = 7, \quad ...$$

setzen. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, eine Formel zu finden, welche die ungeraden Zahlen u_n durch ihre Indizes n ausdrückt.

Lösung. Die erste ungerade Zahl u_1 kann man in der Form

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1 \tag{1}$$

schreiben, die zweite ungerade Zahl u_2 in der Form

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1 \tag{2}$$

die dritte ungerade Zahl u_3 in der Form

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1 \tag{3}$$

usw.
Bei aufmerksamer Betrachtung der Gleichungen (1), (2), (3) gelangt man zu der Annahme, dass man jede ungerade Zahl erhält, wenn man ihren Index mit 2 multipliziert und davon 1 subtrahiert, d.h., für die n-te ungerade Zahl gilt die Formel,

$$u_n = 2 \cdot n - 1 \tag{4}$$

Wir wollen beweisen, dass diese Formel richtig ist.

Satz 1. Die Gleichung (1) zeigt, dass die Formel (4) für $n = 1$ richtig ist.

Satz 2. Wir nehmen an, die Formel (4) sei für $n = k$ richtig. d.h., die k-te ungerade Zahl besitze die Form

$$u_k = 2k - 1$$

Wir beweisen, dass die Formel (4) dann auch für die $(k + l)$-te ungerade Zahl richtig sein muss, d.h., dass diese die Form

$$u_{k+1} = 2(k + 1) - 1$$

oder, was das gleiche ist,

$$u_{k+1} = 2k + 1$$

haben muss.

Um die $(k+1)$-te ungerade Zahl zu erhalten, genügt es, zur k-ten ungeraden Zahl die Zahl 2 zu addieren,d.h. $u_{k+1} = u_k + 2$ zu bilden. Nach Annahme ist $u_k = 2k - 1$. Daher gilt

$$u_{k+1} = (2k-1) + 2 = 2k + 1$$

was zu beweisen war.
Ergebnis: $u_n = 2n - 1$.

Aufgabe 2. Man berechne die Summe der ersten n ungeraden Zahlen.

Lösung. Wir wollen die gesuchte Summe mit S_n bezeichnen, also

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$$

Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es in der Mathematik eine bestimmte Formel. Für uns ist es aber interessant, nicht auf eine fertige Formel zurückzugreifen, sondern zur Lösung dieser Aufgabe vollständige Induktion zu benutzen. Dazu ist es zunächst notwendig, eine Vermutung aufzustellen, d.h. zu versuchen, die Lösung zu erraten.

Wir lassen n die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen, bis wir das nötige Material gesammelt haben, um auf dieser Grundlage eine mehr oder weniger aussichtsreiche Vermutung aufstehen zu können. Danach ist dann noch diese Vermutung durch vollständige Induktion zu beweisen.

Es ist

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 9, \quad S_4 = 16, \quad S_5 = 25, \quad S_6 = 36$$

Jetzt hängt alles von der Beobachtungsgabe des Studierenden ab, von seiner Fähigkeit, aus den speziellen Werten die allgemeine Lösung zu folgern.
Wir glauben, dass man in den gegebenen Fällen sehr schnell

$$S_1 = 1^2, \quad S_2 = 2^2, \quad S_3 = 3^2, \quad S_4 = 4^2$$

bemerkt. Auf Grund dessen kann man dann annehmen, dass allgemein $S_n = n^2$ gilt. Dass diese Annahme richtig ist, wollen wir jetzt beweisen.

Satz 1. Für $n = 1$ besteht die Summe aus der Zahl 1. Der Ausdruck n^2 ist für $n = 1$ ebenfalls gleich 1. Folglich ist die Annahme für $n = 1$ richtig.

Satz 2. Wir nehmen an, die Vermutung sei für $n = k$ richtig, d.h., es sei $S_k = k^2$. Wir beweisen, dass die Vermutung dann auch für $n = k + 1$ richtig sein muss, d.h.

$$S_{k+l} = (k+l)^2$$

ist. In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + (2k+1)$$

Da aber $S_k = k^2$ ist, gilt

$$S_{k+1} = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

was zu beweisen war.
Ergebnis: $S_n = n^2$.

Aufgabe 3. Man bestimme das allgemeine Glied u_n, wenn $u_1 = 1$ und für jede natürliche Zahl $k > 1$ die Beziehung

$$u_k = u_{k-1} + 3$$

gilt.
Hinweis: $u_1 = 3 \cdot 1 - 2$, $u_2 = 3 \cdot 2 - 2$.

Aufgabe 4. Man bestimme die Summe

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$$

Hinweis: 1) $S_1 = 2 - 1$; $S_2 = 2^2 - 1$; $S_3 = 2^3 - 1$, oder 2) man betrachte $2S_n - S_n$.

Aufgabe 5. Man beweise, dass die Summe der ersten n Zahlen der natürlichen Zahlenfolge gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Lösung. Diese Aufgabe unterscheidet sich von den vorhergehenden dadurch, dass es hier nicht nötig ist, eine Vermutung aufzustellen; sie ist gegeben. Es ist nur zu zeigen, dass diese Vermutung richtig ist.
Wir bezeichnen die gesuchte Summe mit S_n, d.h., es ist

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Satz 1. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig.
Satz 2. Es sei

$$S_k = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Wir beweisen, dass

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ist. In der Tat gilt

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Aufgabe 6. Man beweise, dass die Summe der Quadrate der ersten n Zahlen der natürlichen Zahlenfolge gleich $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist.

Aufgabe 7. Man beweise

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Lösung. Satz 1. Für $n = 1$ ist die Annahme offenbar richtig ($(-1)^0 = 1$).

Satz 2. Es sei

$$S_k = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

Wir beweisen, dass

$$S_{k+1} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

gilt. In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 =$$
$$= (-1)^k\left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1) = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Aufgabe 8. Man beweise

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Aufgabe 9. Man beweise, dass die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ist.

Aufgabe 10. Man beweise

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

Aufgabe 11. Man beweise

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Aufgabe 12. Man beweise

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Aufgabe 13. Man beweise

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Aufgabe 14. Man beweise

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Aufgabe 15. Man beweise

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Aufgabe 16. Man beweise
$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

Aufgabe 17. Man beweise
$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

Aufgabe 18. Man beweise, dass $v_n = 2^n + 1$ ist, wenn $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ und für jedes natürliche k die Beziehung
$$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$$
gilt.

Lösung. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Aussage nach Voraussetzung richtig. Nehmen wir an, es sei
$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \qquad ; \qquad v_k = 2^k + 1$$
denn gilt
$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) + 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

Aufgabe 19. Man beweise, dass
$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$
ist, wenn
$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} \qquad ; \qquad u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \qquad (\alpha \neq \beta)$$
und. für jedes natürliche $k > 2$ die Beziehung
$$u_k = (\alpha + \beta)u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2}$$
gilt.

Aufgabe 20. Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ bezeichnet man mit dem Zeichen $n!$ (lies "n-Fakultät"). Es gilt: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.
Man berechne
$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$$

Lösung.
$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \cdot 1! = 1\\
S_2 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5\\
S_3 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23\\
S_4 &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119
\end{aligned}$$

Bei einer genauen Betrachtung dieser Ergebnisse bemerkt man, dass
$$S_1 = 2! - 1, \qquad S_2 = 3! - 1, \qquad S_3 = 4! - 1, \qquad S_5 = 5! - 1$$

ist. Dies gibt zu der Vermutung Anlass, dass

$$S_n = (n+1)! - 1$$

gilt. Wir wollen diese Annahme beweisen.

Satz 1. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig, da

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1$$

ist.
Satz 2. Es sei

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

wir zeigen

$$S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1) \cdot (k+1)! = [(k+1)! - 1] + (k+1) \cdot (k+1)! = \\ &= (k+1)![1 + (k+1)] - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Man beweise die Identität

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Aufgabe 22. Es sei

$$\alpha + \beta = m, \qquad \alpha\beta = a, \qquad A_2 = m - \frac{a}{m-1}$$

$$A_3 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}, \qquad A_4 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}}, \quad \text{usw.}$$

gegeben, d.h. für $k > 1$ gelte

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \qquad (m \neq 1, \alpha \neq \beta)$$

Man beweise

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})} \tag{1}$$

Lösung. Satz 1. Wir beweisen zunächst, dass die Formel (1) für $n = 2$ richtig ist. Nach Voraussetzung gilt

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta) - 1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

Nach Formel (1) ist

$$A_2 = \frac{(\alpha - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$$

Kürzt man diesen Bruch durch $\alpha - \beta$, so erhält man

$$A_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

was zu beweisen war.

Satz 2. Die Formel (1) sei für $n = k$ richtig, d.h., es gelte

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k}{(\alpha^k - \beta^k) - (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})} \tag{2}$$

Wir beweisen, dass sie denn auch für $n = k + 1$ richtig sein muss, d.h.

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$

ist. In der Tat, es ist

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \qquad \text{oder} \qquad A_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}$$

Benutzt man die Gleichung (2), so erhält man

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta[(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)} \\ &= \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)} \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 23. Man vereinfache das Polynom

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$$

Ergebnis: $(-1)^n \frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{n!}$

Aufgabe 24. Man beweise, dass man jeden Rubelbetrag, der größer als 7 ist, mit Geldscheinen im Werte von 3 und 5 Rubel bezahlen kann, ohne dass herausgegeben werden muss.

Lösung. Für 8 Rubel ist die Aussage richtig.
Die Aussage sei für k Rubel richtig, wobei k eine ganze Zahl größer oder gleich 8 ist.
Es sind zwei Fälle möglich: 1) k Rubel werden ausschließlich in 3-Rubelscheinen bezahlt und 2) k Rubel werden in Geldscheinen bezahlt, unter denen sich mindestens ein 5-Rubelschein befindet.

Im ersten Falle dürfen es nicht weniger als drei 3-Rubelscheine sein, da in diesem Falle $k > 8$ ist. Um $k+1$ Rubel zu bezahlen, müssen wir drei 8-Rubelscheine durch zwei 5-Rubelscheine ersetzen.
Im zweiten Falle müssen wir einen 5-Rubelschein durch zwei 3-Rubelscheine ersetzen, um $k+1$ Rubel zu bezahlen.

Aufgabe 25. Man zeige, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Lösung. Die Summe $1^3+2^3+3^3$ ist durch 9 teilbar. Folglich ist die Behauptung richtig, falls die erste der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gleich 1 ist.
Sei nun die Summe $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist, durch 9 teilbar. Die Summe

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 = [k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$$

lässt sich aber in zwei Summanden zerlegen, von denen jeder durch 9 teilbar ist. Sie ist also ebenfalls durch 9 teilbar.

Aufgabe 26. Man zeige, dass für ganze nichtnegative Zahlen n der Ausdruck

$$A_n = 11^{n+2}+12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

Aufgabe 27. Man wähle aus den $2n$ Zahlen $1, 2, ..., 2n$ beliebig $(n+1)$ Zahlen aus und beweise, dass unter diesen mindestens zwei sind, von denen eine durch die andere teilbar ist.

Lösung[2]. 1. Wir nehmen an, aus den $2n$ Zahlen $1, 2, ..., 2n$ mit $n \geq 2$ hätte man $(n+1)$ Zahlen so aussuchen können, dass keine von diesen Teiler einer anderen ist. Die Menge dieser $(n+1)$ Zahlen bezeichnen wir zur Abkürzung mit M_{n+1}. Wir zeigen nun, dass aus den $2n-2$ Zahlen $1, 2, ..., 2n-2$ dann n Zahlen derart ausgewählt werden könnten, dass wiederum keine von ihnen durch eine andere teilbar ist.

Es sind vier Fälle möglich:

1. In M_{n+1} sind weder die Zahl $2n-1$ noch die Zahl $2n$ enthalten.
2. In M_{n+1} ist die Zahl $2n-1$ enthalten, jedoch nicht $2n$.
3. In M_{n+1} ist die Zahl $2n$ enthalten, jedoch nicht $2n-1$.
4. In M_{n+1} sind sowohl $2n-1$ als auch $2n$ enthalten.

Fall 1. Wir nehmen aus M_{n+1} eine beliebige Zahl heraus. Dann verbleiben in M_{n+1} noch in Zahlen, von denen keine größer als $2n-2$ ist. Keine dieser Zahlen ist durch eine andere teilbar.

Fall 2. Wir nehmen aus M_{n+1} die Zahl $2n-1$ heraus. Unter den restlichen n Zahlen ist ebenfalls keine größer als $2n-2$, und keine von ihnen ist durch eine andere teilbar.

[2] Diese Lösungsmethode wurde dem Verfasser von M. Fridmann, einem Studenten des Leningrader staatl. "Herzen-Instituts für Pädagogik" mitgeteilt.

Fall 3. Wir nehmen aus M_{n+1} die Zahl $2n$ heraus und kommen wieder zu dem gleichen Ergebnis.

Fall 4. Wir bemerken zunächst, dass in M_{n+1} die Zahl n nicht enthalten sein kann, da sonst in M_{n+1} zwei Zahlen, nämlich $2n$ und n, zu finden wären, von denen eine durch die andere teilbar ist. Wir nehmen nun aus M_{n+1} die Zahlen $2n-1$ und $2n$ heraus.
Die Menge der restlichen $n-1$ Zahlen werde mit M_{n-1} bezeichnet. Wir fügen nun die Zahl n zu M_{n-1} hinzu und erhalten n Zahlen, von denen keine größer als $2n-2$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass unter diesen n Zahlen keine durch eine andere teilbar ist.

In M_{n+1} existieren keine zwei Zahlen, von denen eine die andere teilt. Folglich gibt es auch in M_{n-1} keine solchen Zahlen. Man muss sich nur noch davon überzeugen, dass zwei solche Zahlen auch dann nicht vorhanden sind, wenn wir die Zahl n zur Menge M_{n-1} hinzunehmen.
Für diesen Fall genügt es nachzuprüfen, dass 1) keine der Zahlen aus M_{n-1} durch n teilbar ist und 2) die Zahl n nicht durch irgendeine Zahl aus M_{n-1} teilbar ist.
Dass die erste Forderung erfüllt ist, folgt aus der Tatsache, dass alle Zahlen aus M_{n-1} nicht größer als $2n-2$ sind.
Die zweite folgt daraus, dass die Zahl $2n$ durch keine der Zahlen aus M_{n-1} teilbar ist.

Nehmen wir also an, die Behauptung sei für die $2n$ Zahlen $1, 2, .., , 2n$ falsch, so muss sie auch für die $2(n-1)$ Zahlen $1, 2, ..., 2n-2$ falsch sein. Wäre also die Behauptung für die $2(n-1)$ Zahlen $1, 2, ..., 2n-2$ richtig, so müsste sie es auch für die $2n$ Zahlen $1, 2, ..., 2n$ sein.
Für zwei Zahlen 1, 2 gilt die Behauptung. Also ist sie auch für $2n$ Zahlen $1, 2, ..., 2n$ gültig, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein kann.

Diese Aufgabe kann man auch auf folgende einfache Art lösen:
Wir wählen aus den $2n$ Zahlen $1, 2, ..., 2n$ beliebige $n+1$ Zahlen aus und bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit M_{n+1}.
Jede gerade Zahl aus M_{n+1} teilen wir durch eine solche Potenz von 2, dass der Quotient ungerade ist. Aus diesen Quotienten und den ungeraden Zahlen aus M_{n+1} bilden wir die Menge $\overline{M}_{n+1}$. In $\overline{M}_{n+1}$ sind $n+1$ ungerade Zahlen enthalten, von denen jede kleiner als $2n$ ist.

Da es n positive ungerade Zahlen kleiner als $2n$ gibt, so muss es in $\overline{M}_{n+1}$ mindestens zwei gleiche Zahlen geben. Jede dieser gleichen Zahlen bezeichnen wir mit dem Buchstaben k.
Dieses Ergebnis bedeutet, dass es in M_{n+1} mindestens zwei Zahlen $2^s k$ und $2^t k$ geben muss. Eine von diesen ist jedoch durch die andere teilbar.

Aufgabe 28. Man beweise, dass n verschiedene Geraden, die in einer Ebene durch einen gemeinsamen Punkt gehen, die Ebene in $2n$ Teile zerlegen.

Aufgabe 29. Man zeige, dass n in einer Ebene liegende Geraden diese Ebene in Bereiche zerlegen, die man so weiß und schwarz färben kann, dass alle benachbarten Bereiche (d.h. Bereiche, die längs einer Strecke aneinandergrenzen) verschieden gefärbt sind.

§ 2. Aufgabe 30. Man zeige, dass n Ebenen, die durch einen Punkt gehen, aber so, dass nicht drei von ihnen eine gemeinsame Schnittgerade haben, den Raum in $A_n = n(n-1)+2$ Teile zerlegen.

Lösung. 1. Eine Ebene teilt den Raum in zwei Teile, also $A_1 = 2$. Für $n = 1$ gilt also die Behauptung.
2. Wir nehmen an, die Behauptung sei richtig für $n = k$, d.h., k Ebenen mögen den Raum in $k(k-1)+2$ Teile zerlegen. Wir zeigen nun, dass dann $k+1$ Ebenen den Raum in $(k+1)k+2$ Teile zerlegen.
Es sei P die $(k+1)$-te Ebene. Mit jeder der ersten k Ebenen hat die Ebene P eine Schnittgerade gemeinsam; sie wird daher durch die k verschiedenen Geraden, die alle durch einen Punkt gehen, zerlegt. Aus Aufgabe 28 folgt, dass die Ebene P demnach in $2k$ Teile zerlegt wird, von denen jeder einen ebenen Winkel mit dem Scheitel im gegebenen Punkt darstellt.

Die ersten k Ebenen teilen den Raum in gewisse Polyederecken, von denen einige durch die Ebene P in zwei Teile zerlegt werden.
Die gemeinsame Fläche zweier solcher Teile bildet der Teil der Ebene, welcher von zwei Strahlen begrenzt wird, längs welcher P die Flächen der gegebenen Polyederecke schneidet, d.h. einer der $2k$ ebenen Winkel, in welche die Ebene P zerlegt wird.

Das bedeutet, dass die Zahl der Polyederecken, die durch die Ebene P in zwei Teile zerlegt werden, nicht größer als $2k$ sein kann. Andererseits ist jeder der $2k$ Teile, in welche die Ebene P infolge ihres Schnitte mit den ersten k Ebenen zerlegt wird, die gemeinsame Fläche zweier Polyederecken und teilt folglich die Polyederecke, welche von den ersten k Ebenen gebildet wird, in zwei Teile.

Die Anzahl der Polyederecken, die durch die Ebene P in zwei Teile zerlegt werden, kann also auch nicht kleiner als $2k$ sein.
Die Ebene P teilt somit genau $2k$ Teile des Raumes, die von den ersten k Ebenen erzeugt werden, in zwei Teile. Teilen also k Ebenen den Raum in $k(k-1)+2$ Teile, so zerlegen $k+1$ Ebenen den Raum in $[k(k-1)+2]+2k = k(k+1)+2$ Teile. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 31. Man beweise die Identität

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot ... \cdot \cos 2^n\alpha = \frac{\sin^{2n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

Lösung. 1. Für $n = 0$ ist die Gleichung richtig, da

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$$

gilt.
2. Die Gleichung gelte für $n = k$, d.h.

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot ... \cdot \cos 2^k\alpha = \frac{\sin^{2k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$$

Dann gilt sie jedoch auch für $n = k + 1$, denn es ist

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot ... \cdot \cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin^{2k+1}\alpha \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin^{2k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$$

Aufgabe 32. Man zeige, dass $A_n = \cos n\Theta$ ist, wenn bekannt ist, dass $A_1 = \cos\Theta$, $A_2 = \cos 2\Theta$ und für jedes natürliche $k > 2$ die Beziehung

$$A_k = 2\cos\Theta A_{k-1} - A_{k-2}$$

gilt.

Lösung. 1. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$ und $n = 2$.
2. Es sei

$$A_{k-2} = \cos(k-2)\Theta \qquad , \qquad A_{k-1} = \cos(k-1)\Theta$$

Dann folgt

$$A_k = 2\cos\Theta \cdot \cos(k-1)\Theta - \cos(k-1)\Theta = \cos k\Theta$$

Aufgabe 33. Man beweise die Beziehung

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \sin\frac{nx}{2}$$

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig.
2. Es gelte

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \sin\frac{kx}{2}$$

Dann folgt

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x$$
$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2} + 2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x = \frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(k+1)x}{2}$$

da

$$2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{k+2}{2}x - \sin\frac{kx}{2}$$

Aufgabe 34. Man beweise

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 35. Man beweise die Beziehung

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 36. Man beweise die Beziehung

$$\cos x + 2\cos 2x + ... + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 37. Man beweise die Beziehung

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x \quad (x \neq m\pi)$$

Aufgabe 38. Man beweise die Beziehung

$$\begin{aligned}&\operatorname{arccot} 3 + \operatorname{arccot} 5 + ... + \operatorname{arccot}(2n+1) = \\ &\quad = \arctan 2 + \arctan\frac{3}{2} + ... + \arctan\frac{n+1}{n} - n\arctan 1\end{aligned}$$

Aufgabe 39. Man beweise die Beziehung

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, da

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

gilt.
2. Es sei

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(1+i)^{k+1} &= 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right) \cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 40. Man beweise

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

Aufgabe 41. Man beweise folgenden Satz:
Erhält man unter Anwendung endlich vieler rationaler Rechenoperationen (d.h. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) auf die komplexen Zahlen x_1, ..., x_n die Zahl u, so kommt man unter Anwendung derselben Operationen auf die konjugiert komplexen Zahlen $\overline{x}_1$, ..., $\overline{x}_n$ zur Zahl $\overline{u}$, d.h. der zu u konjugierten.

Lösung. Zunächst beweisen wir, dass die Behauptung für jede der vier Operationen bei zwei komplexen Zahlen erfüllt ist. Es sei $x_1 = a + bi$ und $x_2 = c + di$ $(a, b, c, d$ reell). Dann folgt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (a + c) + (b + d)i = u \\ \overline{x}_1 + \overline{x}_2 &= (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{u} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art lässt sich die Richtigkeit der Behauptung für die Subtraktion, Multiplikation und Division nachweisen.

Es sei jetzt ein gewisser rationaler Ausdruck der komplexen Zahlen $x_1, ..., x_n$ gegeben. Die Berechnung dieses Ausdrucks lässt sich bekanntlich auf die sukzessive Ausführung von je einer der vier Rechenoperationen auf zwei komplexe Zahlen zurückführen, wobei dies Operationen nummeriert werden können.
Es sei z.B.

$$u = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{x_1 + x_2 - x3}$$

Zur Berechnung von u genügt es, folgende Operationen auszuführen:

1.	$x_1x_2 = u_1$	4.	$u_3 - x_3 = u_4$
2.	$x_3x_4 = u_2$	5.	$u_1 + u_2 = u_5$
3.	$x_1 + x_2 = u_3$	6.	$u_5 : u_4 = u$

Wir nehmen an, die Behauptung sei richtig für alle Ausdrücke, zu deren Berechnung nicht mehr als k Operationen erforderlich sind. Unter Operationen verstehen wir hier Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division zweier komplexer Zahlen. Wir zeigen nun, dass dann die Behauptung auch für Ausdrücke gilt, die $k+1$ Operationen erfordern.

Die letzte, $(k + 1)$-te Operation führen wir an den Zahlen u_i und u_j aus, die selber mittels höchstem k Operationen berechenbar sind.
Ersetzt man die Zahlen $x_1, ..., x_n$ durch ihre Konjugierten, so gehen die Zahlen u_i und u_j in ihre Konjugierten $\overline{u}_i$ und $\overline{u}_j$ über.
Denn leistet dies aber auch die Anwendung der $(k + 1)$-ten Operation auf sie, d.h., auch die Zahl u geht in ihre Konjugierte $\overline{u}$ über.

Aufgabe 42. Man zeige, dass für jede natürliche Zahl n die Beziehung

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

gilt.

Aufgabe 43. Man zeige, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Beziehung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

gilt.

Lösung. Wir bezeichnen die linke Seite der Ungleichung mit S_n.
1. $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, folglich gilt für $n = 2$ die Behauptung.

2. Es sei $S_k > \frac{13}{24}$ für ein gewisses k. Wir beweisen nun, dass dann auch $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ ist; offenbar ist

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}$$
$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

Subtrahieren wir S_k von S_{k+1}, so erhalten wir

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \qquad \text{d.h.} \qquad S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

Für jede natürliche Zahl k ist die rechte Seite dieser Gleichung positiv. Daher ist $S_{k+1} > S_k$, und da $S_k > \frac{13}{24}$ ist erst recht $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Aufgabe 44. Man suche den Fehler in dem folgenden Beweis:
Behauptung. Für jede natürliche Zahl n gilt die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1$$

Beweis. Die Ungleichung möge für $n = k$ (k eine natürliche Zahl) erfüllt sein, d.h., es gelte

$$2^k > 2k + 1 \qquad (1)$$

Wir beweisen nun, dass dann die Ungleichung auch für $n = k + 1$ gilt, d.h.

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 \qquad (2)$$

Für jede natürliche Zahl k ist 2^k nicht kleiner als 2. Wir addieren zur linken Seite der Ungleichung (1) die Zahl 2^k, zur rechten Seite die Zahl 2. Wir erhalten die Ungleichung

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2$$

oder

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 45. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1 \qquad ?$$

Aufgabe 45. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$2^n > n^2 \qquad ?$$

Lösung.
Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, da $2^1 > 1^2$.
Für $n = 2$ ist die Behauptung falsch, da $2^2 = 2^2$.
Für $n = 3$ ist die Behauptung falsch, da $2^3 < 3^2$.

Für $n = 4$ ist die Behauptung falsch, da $2^4 = 4^2$.
Für $n = 5$ ist die Behauptung richtig, da $2^5 > 5^2$.
Für $n = 6$ ist die Behauptung richtig, da $2^6 > 6^2$.

Anscheinend gilt die Behauptung für $n = 1$ und für beliebiges $n > 4$. Wir wollen dies beweisen.
1. Für $n = 5$ gilt die Behauptung.
2. Es sei

$$2^k > k^2 \tag{1}$$

erfüllt, wobei k eine gewisse natürliche Zahl > 4 ist. Wir zeigen nun, dass dann auch

$$2^{k+1} > (k+1)^2 \tag{2}$$

gilt.
Wir wissen, dass $2^k > 2k + 1$ für $k > 4$ ist (Aufgabe 45). Addieren wir also zur linken Seite der Ungleichung (1) 2^k, zur rechten Seite $2k + 1$, so erhalten wir die richtige Ungleichung (2).
Antwort. $2^n > n^2$ für $n = 1$ und alle $n > 4$.

Aufgabe 47. Man beweise, dass

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$$

gilt, wenn $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ und n eine natürliche Zahl größer als Eins ist. (Das ist die sog. Bernoullische Ungleichung)

Lösung. 1. Für $n = 2$ ist die Ungleichung richtig, da $\alpha^2 > 0$ ist.
2. Die Ungleichung sei für $n = k$ erfüllt, wobei k eine gewisse natürliche Zahl ist, d.h., es gelte

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung dann auch für $n = k + 1$ gilt, d.h.

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha \tag{2}$$

Nach Voraussetzung ist nämlich $(1 + \alpha) > 0$, und daher gilt die Ungleichung

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha) \tag{3}$$

die man aus der Ungleichung (1) durch Multiplikation jeder ihrer Seiten mit dem Faktor $(1 + \alpha)$ erhält. Schreiben wir die Ungleichung (3) nun in der Form

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$$

und lassen auf der rechten Seite der letzten Ungleichung den positiven Summanden $k\alpha^2$ unberücksichtigt, dann erhalten wir die richtige Ungleichung (2).

Aufgabe 48. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

gilt.

Aufgabe 49. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Beziehung

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

gilt.

Aufgabe 50. Man beweise die Beziehung

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n \tag{1}$$

wenn $a + b > 0$, $a \neq b$ und n eine natürliche Zahl größer als 1 ist.

Lösung. 1. Für $n = 2$ hat die Ungleichung (I) die Form

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \tag{2}$$

Du $a \neq b$ vorausgesetzt wurde, gilt die Ungleichung

$$(a-b)^2 > 0 \tag{3}$$

Addieren wir auf jeder Seite der Ungleichung (3) den Ausdruck $(a+b)^2$, so erhalten wir die Ungleichung (2).
Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung (1) für $n = 2$ richtig ist.

2. Die Ungleichung (1) sei bereits für $n = k$ richtig, wobei k: eine beliebige natürliche Zahl ist, d.h., es gelte

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a+b)^k \tag{4}$$

Wir zeigen, dass die Ungleichung (1) dann auch für $n = k + 1$ gültig sein muss, d.h.

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a+b)^{k+1} \tag{5}$$

Wir multiplizieren beide Teile der Ungleichung (4) mit $(a+b)$. Da nach Voraussetzung $a + b > 0$ ist, erhalten wir die folgende Ungleichung

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) > (a+b)^{k+1} \tag{6}$$

Um die Richtigkeit der Ungleichung (5) zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \tag{7}$$

oder, was das gleiche ist,

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k \tag{8}$$

gilt. Die Ungleichung (8) kann nun umgeschrieben werden:

$$(a^k - b^k)(a-b) > 0 \tag{9}$$

Ist $a > b$, so ist auch $a^k > b^k$, und auf der linken Seite der Ungleichung (9) erhalten wir ein Produkt zweier positiver Zahlen.
Ist $a < b$, so ist auch $a^k < b^k$, und wir erhalten auf der linken Seite der Ungleichung (9) das Produkt zweier negativer Zahlen. Die Ungleichung (9) ist also in beiden Fällen richtig.
Damit ist gezeigt, dass aus der Richtigkeit der Ungleichung (1) für $n = k$ ihre Gültigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Aufgabe 51. Man zeige, dass für beliebiges $x > 0$ und für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + ... + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1 \qquad (1)$$

gilt.
Lösung. 1a): Für $n = 1$ besitzt die Ungleichung (1) die Form

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad (2)$$

Die Ungleichung (2) folgt aus der trivialen Ungleichung

$$(x - 1)^2 > 0$$

1b): Für $n = 2$ hat die Ungleichung (1) die Gestalt

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3 \qquad (3)$$

Die Ungleichung (2) gilt für beliebiges $x > 0$, man kann also x durch x^2 ersetzen und erhält

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

Fügen wir zu jeder Seite der letzten Ungleichung die Zahl 1 hinzu, so erhalten wir die Ungleichung (3).

2) Wir nehmen an, die Ungleichung (1) sei bereits für $n = k$ bewiesen, wo k eine beliebige natürliche Zahl ist, d. h.,es gelte

$$x^k + x^{k-2} + ... + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1 \qquad (4)$$

Wir beweisen nun, dass die Ungleichung (1) dann auch für $n = k + 2$ erfüllt ist, d.h., dass

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + ... + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3 \qquad (5)$$

gilt. Ersetzen wir in der Ungleichung (2) x durch x^{k+2}, so erhalten wir

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2 \qquad (6)$$

Addieren wir die beiden Ungleichungen (4) und (6), so bekommen wir die Ungleichung (5).

Fassen wir das Ergebnis kurz zusammen. In 1a) und 1b) haben wir bewiesen, dass die Ungleichung (1) für $n = 1$ und $n = 2$ gültig ist, und in 2) zeigten wir, dass aus der Richtigkeit der Ungleichung (1) für $n = k$ ihre Gültigkeit auch für $n = k+2$ folgt. Mit anderen Worten, 2) erlaubt uns den Übergang von $n = k$ zu $n = k + 2$.
Die Ergebnisse von 1a) und 2) geben uns das Recht auszusagen, dass die Ungleichung (1) für jedes ungerade n erfüllt ist. Genauso folgt aus den Ergebnissen von 1b) und 2) die Richtigkeit der Ungleichung (1) für jedes gerade n. Die Ungleichung (1) gilt also für jede natürliche Zahl n.

Aufgabe 52. Man beweise folgenden Satz:
Das geometrische Mittel einer gewissen Anzahl positiver Zahlen ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel, (d.h. bei positiven a_1, a_2, ..., a_n gilt

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \tag{1}$$

Lösung. 1) Für $n = 2$ nimmt die Ungleichung (1) die Form

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \tag{2}$$

an. Für beliebige positive a_1 und a_2 gilt die Ungleichung

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

Aus dieser Ungleichung ist aber die Ungleichung (2) leicht herzuleiten.

Die Ungleichung (2) besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Auf der Geraden AB seien die Abschnitte a_1 und a_2, nebeneinander abgetragen. Über ihrer Summe als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis. Dann ist $\frac{a_1+a_2}{2}$ der Radius dieses Kreises und $\sqrt{a_1 a_2}$ die Hälfte der Sehne, die senkrecht zum Durchmesser durch den gemeinsamen Punkt von a_1 und a_2, geht.

2) Wir nehmen an, die Ungleichung (1) sei für $n = k$ richtig. Wir werden zeigen, dass sie dann auch für $n = 2k$ gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_{2k}} &= \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}} \leq \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}}{2} \\ &\leq \frac{\frac{a_1+a_2+...a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+...+a_{2k}}{k}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + ... + a_{2k}}{2k} \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1) war richtig für $n = 2$, ist also dann auch gültig für $n = 4, 8, 16$ usw., d.h. allgemein für $n = 2^s$, wo s eine natürliche Zahl ist.

3) Um die Richtigkeit der Ungleichung (1) für jedes natürliche n zu zeigen, beweisen wir, dass aus der Gültigkeit der Ungleichung für $n = k$ auch ihre Gültigkeit für $n = k-1$ folgt.

Seien also $a_1, ..., a_{k-1}$ gewisse positive Zahlen. Es sei λ eine gewisse, vorläufig unbestimmte Zahl. Dann gilt

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_{k-1} \lambda} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + \lambda}{k}$$

Wir wählen λ so, dass

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}$$

d.h., wir setzen

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}$$

Wir erhalten

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 ... a_{k-1}(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})}{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}$$

d.h.

$$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 ... a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}}{k-1}$$

Sei nun m eine willkürliche natürliche Zahl. Ist $m = 2^s$, so ist nach 2) für m die Ungleichung erfüllt. Ist dagegen $m \neq 2^s$, so kann man ein s finden, so dass $m < 2^s$ ist, und daraus folgt auf Grund von 2) und 3) die Richtigkeit der Ungleichung auch für $n = m$.
Dieser hübsche Beweis stammt von A. Cauchy, 1789-1857.

3 Der Beweis einiger Sätze der elementaren Algebra mittels vollständiger Induktion

Satz 1. Das Quadrat eines Polynome ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder, vermehrt um alle möglichen doppelten Produkte je zweier verschiedener Glieder, d.h.

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n) \qquad (1)$$

Für $n = 2$ kann die Formel (1) durch unmittelbares Ausmultiplizieren bewiesen werden. Wir nehmen an, die Formel (1) sei richtig für $n = k - 1$, d.h., es gelte

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{k-1}^2 + 2S$$

wobei S die Summe aller möglichen Produkte je zweier verschiedener uns den $a_1, ..., a_{n-1}$ darstellt. Wir werden zeigen, dass dann auch

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1$$

gilt, wobei S_1 die Summe aller möglichen Produkte je zweier verschiedener aus den $a_1, ..., a_{k-1}, a_k$ ist, d.h.

$$S_1 = S + (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})a_k$$

In der Tat gilt dann

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k)^2 &= [(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}) + a_k]^2 \\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + ... + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\ &= a_1^2 + ... + a_{k-1}^2 + 2S + 2(a_1 + ... + a_{k-1})a_k + a^2k \\ &= a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 + 2S_1\end{aligned}$$

Satt 2. Das n-te Glied einer arithmetischen Reihe kann durch die Formel

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \qquad (1)$$

ausgedrückt werden, wobei a_1 das erste Glied der Reihe und d die Differenz der Reihe ist.

Für $n = 1$ ist die Formel (1) richtig.
Wir nehmen an, die Formel (1) gelte auch für $n = k$, d.h., es sei

$$a_k = a_1 + d(k - 1)$$

Dann folgt

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + dk$$

d.h., die Formel (1) erweist sich auch für $n = k + 1$ als richtig.

Satz 3. Das n-te Glied einer geometrischen Reihe kann in der Form

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{1}$$

dargestellt werden, wobei a_1 das erste Glied und q der Quotient der Reihe ist.

Für $n = 1$ ist die Formel (1) richtig.
Es sei

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

Dann folgt

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k$$

Satz 4. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen wird durch die Formel

$$P_m = m! \tag{1}$$

angegeben.

Zunächst bemerken wir, dass $P_1 = 1$, die Formel (1) für $m = 1$ also gültig ist. Es sei nun $P_k = k!$. Wir beweisen nun, dass dann auch

$$P_{k+1} = (k+1)!$$

gilt. Aus den gegebenen $k+1$ Elementen $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k-1}$ nehmen wir die ersten k heraus und bilden unter diesen sämtliche möglichen Permutationen. Nach unserer Annahme ist ihre Anzahl gleich $k!$.

In jede dieser Permutationen setzen wir nacheinander das Element a_{k+1} vor das erste Element, vor das zweite , ..., vor das k-te, hinter das k-te. Auf diese Weise erhalten wir aus einer einzigen Permutation von k Elementen $k+1$ Permutationen aus $k+1$ Elementen. Insgesamt haben wir also

$$k!(k+1) = (k+1)!$$

Permutationen von $k+1$ Elementen.

Dabei muss noch geklärt werden:
1) Gibt es unter diesen $(k+1)!$ Permutationen nicht zwei gleiche ?
2) Haben wir auch sämtliche Permutationen von $k+1$ Elementen erfasst ?

1) Wir nehmen an, unter den $(k+1)!$ Permutationen wären zwei gleiche vorhanden. Wir nennen sie p_1 und p_2. In der Permutation p_1 stehe das Element a_{k+1} an der s-ten Stelle, von links gerechnet. Dann muss auch in p_2 das Element a_{k+1} an der s-ten Stelle von links stehen.
Wir nehmen nun aus p_1 und p_2 das Element a_{k+1} heraus und erhalten zwei gleiche Permutationen von k Elementen: $\overline{p}_1$ und $\overline{p}_2$.

Es ergibt sich folgendes: Um p_1 und p_2 aus ein und derselben Permutation aus den Elementen $a_1, a_2, ..., a_k$ zu erhalten, muss das Element a_{k+1} zweimal an dieselbe Stelle gesetzt werden. Dies widerspricht aber der Regel, nach welcher die Permutationen gebildet wurden.

2) Wir nehmen an, eine gewisse Permutation p von $k+1$ Elementen sei von uns nicht erfasst werden. In p stehe das Element a_{k+1} an der s-ten Stelle von links. Wir nehmen aus p das Element a_{k+1} heraus und erhalten eine Permutation $\overline{p}$ aus den ersten k Elementen.
Das bedeutet aber, dass es zur Bildung von p genügt, die Permutation $\overline{p}$ zu nehmen und in ihr das Element a_{k+1} so einzusetzen, dass es die s-te Stelle von links einnimmt.

Wir konnten jedoch die Permutation $\overline{p}$ nicht heranziehen, da alle möglichen Permutationen der ersten k Elemente bereits erfasst sind. Wir konnten auch nicht a_{k+1} an der bezeichneten Stelle einsetzen, da wir es sowohl an der ersten, zweiten, ..., als auch der $(k+1)$-ten Stelle von links eingesetzt hatten.
Unsere Permutationen sind also alle verschieden, und jede Permutation von $k+1$ Elementen ist erfasst worden.

Aus dem Gesagten folgt also, dass tatsächlich

$$P_{k+1} = (k+1)!$$

gilt.

Satz 5. Die Anzahl der Kombinationen zu je n von m verschiedenen Elementen (unter Berücksichtigung der Anordnung) kann nach der Formel

$$A_m^n = m(m-1)...(m-n+1) \tag{1}$$

berechnet werden.

Wir stellen zunächst fest, dass $A_m^1 = m$, die Formel (1) also, für $n=1$ richtig ist. Wir nehmen nun an, die Formel

$$A_m^k = m(m-1)...(m-k+1)$$

sei richtig, falls $k < m$ ist. Wir beweisen nun, dass dann

$$A_m^{k+1} = m(m-1)...(m-k)$$

gilt.

Um alle Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung von m Elementen zu erhalten, genügt es, alle Kombinationen k-ter Ordnung dieser m Elemente zu nehmen und jeder von ihnen jedes der verbleibenden $(m-k)$ Elemente als letztes Element hinzuzufügen.
Man überzeugt sich leicht davon, dass die so gebildeten Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung von m Elementen alle verschieden sind und außerdem jede Kombination zu je $(k+1)$ von m Elementen erfasst ist. Man erhält also

$$A_m^{k+1} = A_m^k(m-k) = m(m-1)...(m-k)$$

Satz 6. Die Anzahl der Kombinationen zu je n von m Elementen (ohne Berücksichtigung der Anordnung) wird durch den Ausdruck

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} \tag{1}$$

gegeben.

Wir bemerken zunächst, dass $\binom{m}{1} = m$, und daher die Formel (1) für $n = 1$ richtig ist. Nehmen wir an, es gelte

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

Wir wollen zeigen, dass dann

$$\binom{m}{k+1} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)}$$

gilt.
Um alle Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung von m Elementen zu erhalten, schreiben wir alle Kombinationen k-ter Ordnung von m Elementen auf und fügen zu jeder von ihnen als $(k+1)$-tes Element jedes der $(m-k)$ restlichen Elemente hinzu.
Es ist klar, dass man auf diese Weise alle Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung von m Elementen erhält, aber jede von ihnen $(k+1)$-mal.

Die Kombination $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ erhält man nämlich, indem man zur Kombination a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1} das Element a_1 hinzunimmt, indem man zur Kombination $a_1, a_3, ..., a_k, a_{k+1}$ das Element a_2 hinzufügt usw., schließlich, wenn man zur Kombination $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ das Element a_{k+1} hinzufügt. Auf diese Weise erhalten wir

$$\binom{m}{k+1} = \binom{m}{k}\frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)}$$

Satz 7. Für beliebige Zahlen a und b und für jede natürliche Zahl n gilt die Gleichung

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{s}a^{n-s}b^s + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \tag{1}$$

(der binomische Satz).

Für $n = 1$ gilt $a + b = a + b$, für diesen Fall ist die Gleichung (1) also richtig.
Es sei nun

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + b^k$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) = \left(a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + ... + b^k\right)(a+b)\\ &= a_{k+1} + \left(1+\binom{k}{1}\right)a^k b + \left(\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right)a^{k-1}b^2 + ...\\ &+ \left(\binom{k}{s}+\binom{k}{s+1}\right)a^{k-s}b^s + ... + b^{k+1}\end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$\binom{k}{s}+\binom{k}{s+1}=\binom{k+1}{s+1}$$

ist, so ergibt sich

$$(a+b)^{k+1} = a_{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k+1}{s+1}a^{k-s}b^s + ... + b^{k+1}$$

4 Lösungen

3. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$u_k = 3k - 2$$

Dann folgt
$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2$$

4. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$S_k = 2^k - 1$$

Dann folgt
$$S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

6. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es gelte

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Dann folgt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

8. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es gelte

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Dann folgt

$$1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2+(2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

9. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

Dann folgt

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

10. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1 + x + x^2 + ... + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

Dann folgt

$$1 + x + x^2 + ... + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$$

11. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

12. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &\quad = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

13. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &\quad = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

14. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + ... + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + ... + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} \\ &\quad = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = (k+1)\frac{k(2k+3) + 2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} \\ &\quad = \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \end{aligned}$$

15. Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\\&=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}\end{aligned}$$

16. Für $n=1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}\\&=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}\end{aligned}$$

17. Für $n=1$ ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}\\&=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}\end{aligned}$$

19. Für $n=1$ und $n=2$ gilt die Behauptung. Es sei

$$u_{k-2}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\qquad;\qquad u_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$$

Dann folgt

$$u_k=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$$

21. Für $n=0$ erhalten wir

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}$$

Die Behauptung gilt also für $n=0$. Angenommen, es sei

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}\\&=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}\end{aligned}$$

23. Für $n = 1$ gilt
$$1 - \frac{x}{1!} = -\frac{x-1}{1}$$
für $n = 2$
$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = -\frac{x-1}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{(x-1)(x-2)}{2!}$$
für $n = 3$
$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = -\frac{(x-1)((x-2)(x-3)}{3!}$$
Dies führt zu der Vermutung
$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x(x-1)...(x-n+1}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)((x-2)...(x-n)}{n!}$$
Für $n = 1$ ist die Vermutung richtig. Gilt
$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - ... + (-1)^k \frac{x(x-1)...(x-k+1}{k!} = (-1)^k \frac{(x-1)((x-2)...(x-k)}{k!}$$
so folgt
$$\begin{aligned}
1 - \frac{x}{1!} &+ \frac{x(x-1)}{2!} - ... + (-1)^k \frac{x(x-1)...(x-k+1}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)...(x-k}{(k+1)!} \\
&= (-1)^k \frac{(x-1)((x-2)...(x-k)}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)...(x-k}{(k+1)!} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(x-1)((x-2)...(x-k)}{k!} \left(\frac{x}{k+1} - 1 \right) \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(x-1)((x-2)...(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

26. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für $n = k$, d.h.
$$A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$$
sei durch 133 teilbar. Dann folgt
$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= 11^{k+3} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11 \cdot 11^{k+2} + 133 \cdot 12^{2k+1} + 11 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11 A_k + 133 \cdot 12^{2k+1}
\end{aligned}$$
Wir haben A_{k+1} als Summe zweier Summanden dargestellt, die beide durch 133 teilbar sind. Folglich ist auch A_{k+1} durch 133 teilbar.

28. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, da eine Gerade die Ebene in zwei Teile zerlegt.
Wir nehmen an, dass k verschiedene Geraden, die durch einen Punkt gehen, die Ebene in $2k$ Teile zerlegen. Dann zerlegt die $(k+1)$-te Gerade, die durch den gleichen Punkt geht, zwei dieser Teile in je zwei Teile, die Ebene wird also in $2k + 2 = 2(k+1)$ Teile zerlegt.

29. 1. Eine Gerade AB teilt die Ebene P in zwei Halbebenen P_1 und P_2. Wir färben P_1 weiß, P_2 schwarz und genügen damit den Forderungen der Aufgabe. Für $n = 1$ ist somit die Behauptung richtig.

2. Die Behauptung gelte für $n = k$, und die Ebene P sei entsprechend der Aufgabenstellung gefärbt. Die $(k+1)$-te Gerade CD teilt die Ebene P in zwei Halbebenen Q_1 und Q_2. Überall auf Q_1 behalten wir die Färbung bei, und in Q_2 ersetzen wir weiß durch schwarz und umgekehrt. Es seien nun O_1 und O_2 beliebige Nachbarbereiche aus der Figur nach Einführung der Geraden CD.
Dabei ist einer der beiden Fälle möglich:

a) O_1 und O_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden CD.
b) O_1 und O_2 liegen auf der gleichen Seite der Geraden CD.

Im ersten Fall bilden O_1 und O_2 nachdem die ersten k Geraden gezogen sind, die Gerade CD jedoch noch nicht gezogen ist, einen einheitlichen Bereich und sind mit der gleichen Farbe gefärbt. Derjenige von beiden, der in Q_1 liegt, behält seine Farbe, der andere, in Q_2 liegende, hat seine Farbe geändert. Folglich sind in diesem Falle O_1 und O_2 verschieden gefärbt.

Im zweiten Fall sind O_1 und O_2 nachdem die ersten k Geraden gezogen sind, die Gerade CD jedoch noch nicht gezogen ist, in zwei benachbarten verschieden gefärbten Bereichen enthalten, deren gemeinsame Grenze eine der ersten k Geraden ist. Ursprünglich waren also O_1 und O_2 verschieden gefärbt.
Liegen O_1 und O_2 in Q_1, so ändert sich ihre Färbung beim Ziehen der Geraden CD nicht, liegen sie in Q_2 dann ändert sich die Färbung jedes von ihnen. In beiden Fällen sind O_1 und O_2 auch nachher verschieden gefärbt.

34. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, da

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x$$

gilt, dann folgt

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos kx + \cos(k+1)x = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos(k+1)x$$
$$= \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x + 2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x + (\sin\frac{2k+3}{2}x - \sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{2k+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 35. Für $n = 1$ gilt die Behauptung wegen

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \sin x$$

Es sei

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + ... + k\sin kx = \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+k\sin kx+(k+1)\sin(k+1)x\\
&\quad=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\sin(k+1)x\\
&\quad=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x+2(k+1)\sin(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\
&\quad=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\
&\quad=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{(k+1)[\sin(k+2)x+\sin kx]}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\
&\quad=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

36. Für $n=1$ ist die Behauptung richtig, weil

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x^{-}2\cos^2 x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x(1-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cos x$$

gilt. Gilt nun

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
&\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x\\
&\quad=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\cos(k+1)x\\
&\quad=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\
&\quad=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{(k+1)[\cos(k+2)x+\cos kx]+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\\
&=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

37. Für $n=1$ ist die Behauptung richtig wegen

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$$

Es sei

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x$$

dann folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}\\
&\qquad=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{\cot^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\cot\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\cot\frac{x}{2^{k+1}}}-\cot x\\
&\qquad=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x
\end{aligned}$$

38. Es gilt

$$\tan(\arctan 2-\arctan 1)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}\quad\text{folglich ist}\quad \arctan 2-\arctan 1=\arctan\frac{1}{3}=\operatorname{arccot} 3$$

Für $n=1$ ist die Behauptung also richtig. Wir beweisen zunächst

$$\operatorname{arccot}(2k+3)=\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1 \tag{1}$$

Es ist nämlich

$$\tan\left(\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1\right)=\frac{\frac{k+2}{k+1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}}=\frac{1}{2k+3}$$

also

$$\arctan\frac{1}{2k+3}=\operatorname{arccot}(2k+3)=\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1$$

Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für $n=k$ richtig, d.h., es gelte

$$\operatorname{arccot} 3+\operatorname{arccot} 5+\ldots+\operatorname{arccot}(2k+1)=\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}+\ldots+\arctan\frac{k+1}{k}-k\arctan 1 \tag{2}$$

Wir beweisen, dass sie dann auch für $n=k+1$ erfüllt ist, d.h.

$$\operatorname{arccot} 3+\operatorname{arccot} 5+\ldots+\operatorname{arccot}(2k+3)=\arctan 2+\ldots+\arctan\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\arctan 1 \tag{3}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (1) und (2) erhalten wir die Gleichung (3).

40. Für $n=1$ gilt die Behauptung wegen

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Es sei

$$(\sqrt{3}-i)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$$

dann folgt daraus

$$(\sqrt{3}-i)^{k+1}=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right]$$

42. Für $n=1$ gilt die Behauptung. Es sei

$$(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$$

dann ergibt sich

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = (\cos kx + i\sin kx)(\cos x + i\sin x) = \cos(k+1)x + i\sin(k+1)x$$

44. Fehlerhaft ist gerade der letzte Satz: "Damit ist die Behauptung bewiesen".
In Wirklichkeit haben wir gezeigt, dass die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1$$

für $n = k + 1$ gültig ist, wenn sie für $n = k$ gilt, wo k eine beliebige natürliche Zahl ist.
Daraus folgt aber noch nicht, dass diese Ungleichung auch nur für einen einzigen Wert von n oder gar für jede natürliche Zahl n gilt.
Kurz gesagt, der Fehler liegt darin, dass nur Aussage 2. bewiesen wurde, die Aussage 1. jedoch nicht beachtet und keine Induktionsbasis geschaffen wurde.

45. Man sieht leicht, dass 3 die kleinste natürliche Zahl n ist, für welche die Ungleichung $2^n > 2n + 1$ erfüllt ist.
Berücksichtigen wir, dass aus der Gültigkeit der Ungleichung für $n = k$ ihre Richtigkeit für $n = k+1$ (Aufgabe 44) folgt, so können wir schließen, dass die Ungleichung für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ richtig ist.

48. Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig wegen

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \tag{1}$$

Wir beweisen nun, dass dann auch

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \tag{2}$$

gilt. Für beliebiges $k \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \tag{3}$$

denn die Ungleichung (3) folgt aus der Ungleichung

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1$$

durch Multiplikation beider Seiten mit der positiven Zahl $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Addieren wir die Ungleichungen (1) und (3) gliedweise, so erhalten wir die Ungleichung (2).

49. Für $n = 2$ hat die Ungleichung die Form $\frac{16}{3} < 6$ und ist richtig. Es sei

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

und $k \geq 2$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass für $k > 0$ die Beziehung

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

gilt. Daher gilt

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

d.h. aber

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}$$