N. P. Antonow

M. I. Wygodski

W. W. Nikitin

A. I. Sankin

Aufgabensammlung zur Elementarmathematik

Band 1

N. P. ANTONOW, M. J. WYGODSKI, W. W. NIKITIN, A. I. SANKIN

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEMENTARMATHEMATIK

BAND I

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1963

Titel der Originalausgabe:

Сборник задач по элементарной математике

Erschienen 1961 im Staatlichen Verlag für physikalische und mathematische Literatur, Moskau.
Herausgegeben von Prof. Dr. Herbert Karl,
K. Direktor des Instituts für Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Potsdam.
Übersetzt von Rolf Lindner, Potsdam, und Rolf Zander, Potsdam.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer
Redaktionsschluß: 1. September 1963
Schutzumschlag und Einband: Werner Fahr
ES 10 C · Bestell-Nr. 00 21 01-1
Lizenz-Nr. 203 · 1000/63 (E)
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort zur dritten Auflage der russischen Ausgabe

Das vorliegende Übungsbuch ist für das Selbststudium von Personen bestimmt, die über eine nichtabgeschlossene Mittelschulbildung verfügen oder schon vor einiger Zeit dieselbe abgeschlossen haben und sich nun auf den Besuch einer Hochschule vorbereiten wollen. Das Leserecho auf die ersten beiden Auflagen (die übrigens unter anderem Titel erschienen) zeigte, daß viele Menschen, die sich selbständig mit der Mathematik beschäftigt haben, dieses Übungsbuch benötigen. Die Verfasser wollen solchen Personen das Verständnis für die Lösungswege mathematischer Aufgaben näherbringen. Aus diesem Grunde gaben sie die Lösungswege in der Mehrzahl der Probleme an.

Die Aufgaben, die durch ihren Lösungsweg miteinander verwandt sind, wurden entsprechend gruppiert. Für die ersten Aufgaben einer jeden Gruppe sind die Lösungen ausführlicher gegeben als für die folgenden. Dabei wurden zweitrangige Überlegungen und Rechnungen in der Regel nicht angestellt, um die Selbständigkeit der Lernenden nicht einzuschränken, während prinzipiellen Fragen, die für die Lösung der Aufgaben wesentlich sind, mehr Beachtung beigemessen wurde.

Besondere Aufmerksamkeit wurde den Fragen geschenkt, die in der (*sowjetischen, Anm. d. Übers.*) Schülerliteratur wenig beleuchtet werden. So diskutiert man die Brauchbarkeit der Wurzeln von Gleichungen, den exakten (eindeutigen) Wurzelbegriff und Verfahren zur Darstellung von räumlichen Gebilden. Die Verfasser glauben, daß diese Erläuterungen auch für Lehrer einige Vorteile bringen.

In der Regel wurde die einmal gegebene Erklärung in den folgenden Aufgaben nicht wiederholt. Überall dort jedoch, wo Hilfe angebracht ist, wird auf Aufgaben verwiesen, die ähnliche Erläuterungen enthalten. Diese Regelung traf man im Interesse derer, die ihre Kräfte an besonderen Aufgaben messen wollen. Die Autoren empfehlen darüber hinaus, die Aufgaben eines jeden Kapitels in der Reihenfolge ihrer Numerierung zu lösen.

Es ist zweckmäßig, die Lösung einer Aufgabe erst dann durchzulesen, wenn das Problem selbständig erkannt und gelöst wurde, es sei denn, die Aufgabe übersteigt die Kräfte des Lesers. Wenn es sich nach dem Lösen einiger Aufgaben gezeigt hat, daß für den Studierenden keine Schwierigkeiten mehr bestehen, kann er dazu übergehen, die folgenden lediglich durchzulesen, wobei abzuwägen bleibt, wieviel Aufgaben man durchliest und mit ihren jeweiligen Lösungen vergleicht.

Vorwort zur vierten Auflage der russischen Ausgabe

Obwohl die vierte Auflage der dritten gleichwertig ist, war es möglich, die von den Lesern bezüglich der Rationalisierung der Lösungen gemachten Bemerkungen zu berücksichtigen und die Fehler zu korrigieren, die in den ersten Auflagen entdeckt wurden.

Die Verfasser drücken ihre Dankbarkeit all denen aus, die ihre Gutachten über das Buch einschickten.

Außer den im Vorwort zur zweiten Auflage Erwähnten, möchten die Verfasser noch E. Babuschkina (Moskau), Browak (Moskau), B. A. Dobrowolsko (Labinsk), A. Koba (Leningrad), W. Krawtschenko (Wolgograd), G. Kubizkowo (Wilnjus), W. I. Lysowa (Donezk), R. M. Nachumowitsch (Baku), E. Panowa (Kuibyschew), Tsch. A. Startschewskowo, Teplowu (Kemerowo), A. G. Filaijowitscha (Sofia, Bulgarien), W. F. Fominkowa (Saporoshje), G. M. Chowanowa, A. Schilnikowu (Kirow) und S. Schmelkina (Leningrad) danken.

Vorwort zur sechsten Auflage der russischen Ausgabe

In der vorliegenden Auflage sind die Formulierungen einiger Aufgaben präzisiert und einige Ergänzungen in die Erklärungen eingefügt worden.

Die Verfasser drücken ihren tiefen Dank denen aus, die ihre Meinungen zum Buch einsandten.

Außer denen, die in den Vorwörtern zur zweiten und vierten Auflage erwähnt wurden, danken sie besonders M. Archarowu (Taganrog), J. Sakolodnina (Gorki), W. F. Klopkowa (Moskau), W. S. Kusmina (Lwow), A. Leshnewa, W. W. Turtschaninowa (Charkow) und A. Schewtschenko (Odessa).

Im voraus wird all den Lesern gedankt, die ihre Anregungen und Wünsche übermitteln werden.

N. Antonow, M. Wygodski, W. Nikitin

Die zunehmende Technisierung und Automatisierung unserer Volkswirtschaft braucht Menschen, die ein exaktes und anwendungsbereites mathematisches Grundwissen besitzen, das sie jederzeit befähigt, mit minimalem Kraftaufwand Spezialkenntnisse zu erwerben. Der Stand der gesellschaftlichen Entwicklung verlangt also eindeutig, daß die mathematische Denkweise vermittelt wird, nicht aber eine Anzahl von Aufgabentypen.

Offensichtlich unterscheiden sich in einigen dieser Punkte Ausbildungsform und -inhalt in einer Reihe von sozialistischen Ländern, namentlich in der Sowjetunion, von den unsrigen. Ausdruck dieser Tatsache scheint auch die vorliegende Aufgabensammlung zu sein. Welches Ziel die Autoren mit der Herausgabe des Buches verfolgten, geht aus dem Vorwort zur dritten Auflage der russischen Ausgabe hervor. Die Übersetzung soll dazu beitragen, daß den Zirkeln junger Mathematiker eine breitere Stoffauswahl zur Verbesserung des logischen Denkens zur Verfügung steht. Darüber hinaus empfiehlt sich dieses Buch den zukünftigen Studenten, die ihren mathematischen Gesichtskreis erweitern wollen. Auch Lehrer werden mit Hilfe dieser Aufgabensammlung ihren Unterricht in Mathematik verbessern und interessanter gestalten können. Der Lehrer sollte jedoch, bevor er seinen Schülern Aufgaben stellt, selbst jeweils den Lösungsgang durchdenken, um die Anforderungen kennenzulernen.

Besonders erwähnenswert ist die exakte Definition des Wurzelbegriffs. Sie wurde in der Übersetzung konsequent angewendet und führte zu geringfügigen inhaltlichen Änderungen, die der Verlag freundlicherweise gestattete.

Die Gliederung des Originals in zwei Teile (Arithmetik und Algebra; Geometrie und Trigonometrie) ermöglicht die Herausgabe der deutschen Übersetzung in zwei Bänden.

Unser herzlicher Dank gilt Frau Tamara Golowanowa, Moskau.

Rolf Lindner, Rolf Zander

Proportionen

1. In der Proportion $a : b = c : d$ sind a und d die äußeren, b und c die inneren Glieder.
   Produktform der Proportion: $a \cdot d = b \cdot c$.
2. Vertauschung der Glieder von Proportionen:
   a) $a : b = c : d$ b) $d : b = c : a$ c) $a : c = b : d$ d) $d : c = b : a$
3. Abgeleitete Proportionen:
   Gegeben sei die Proportion $a : b = c : d$. Dann gelten auch folgende Proportionen:
   a) $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$, b) $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d$.

Potenzgesetze

1. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ und $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$.
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ und $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. 3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
4. $a^m : a^n = a^{m-n}$. 5. $1 : a^n = a^0 : a^n = a^{-n}$. 6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Wurzelgesetze[1]

1. $\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$ und $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a \cdot b \cdot c}$.
2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ und $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.
3. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ und $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.
4. $(\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}}$. 5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$ und $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

[1] Vergleichen Sie hierzu auch die Bemerkungen auf den Seiten 75 bis 78!

1. Eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ wird mit Hilfe der Formel
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ gelöst.

2. Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ wird mit Hilfe der Formel
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gelöst.

3. Eine Gleichung der Form $ax^2 + 2kx + c = 0$ wird mit Hilfe der Formel
$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ gelöst.

4. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

5. Es ist $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, wenn x_1 und x_2 Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind.

6. Es ist $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, wenn x_1 und x_2 Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind.

Folgen und Reihen; Logarithmen[1]

1. Die Schreibweisen $\log_a N = x$ und $a^x = N$ sind gleichbedeutend, denn es gilt die Identität $a^{\log_a N} = N$.

2. $\log_a a = 1$ 3. $\log_a 1 = 0$ 4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$

5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$ 6. $\log_a (N^m) = m \cdot \log_a N$

7. $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$.

8. Über den Modul für die Verwandlung aus dem Logarithmensystem mit der Basis b in ein Logarithmensystem mit der Basis a werden auf den Seiten 154 und 155 Hinweise gegeben.

[1] Die Zahlen a (Basis des Logarithmus) und N werden positiv angenommen, wobei $a \neq 1$ zu wählen ist.

Kombinatorik

1. $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

2. $K_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$

3. $V_n^{(k)} = k!\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdot \dots \cdot (n-k+1)$

4. $K_n^{(k)} = K_n^{(n-k)}$, bzw. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Binomischer Satz

1. $$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-2}x^2 a^{n-2} + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + a^n$$

2. Das $(k+1)$-te Glied dieser Entwicklung lautet
$$K_n^{(k)} x^{n-k} a^k = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

3. $1 + K_n^{(1)} + K_n^{(2)} + \dots + K_n^{(n-2)} + K_n^{(n-1)} + 1 = 2^n$

4. $1 - K_n^{(1)} + K_n^{(2)} - K_n^{(3)} + \dots \pm 1 = 0$

AUFGABEN

1. Arithmetische Berechnungen

1. $\dfrac{\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$

2. $\dfrac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$

3. $\dfrac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}0001 : 0{,}005}$

4. $\left(\dfrac{0{,}012}{5} + \dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560 - 42\frac{1}{3}$

5. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3}}{0{,}04}$

6. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}\right) : 18\frac{1}{6}}{0{,}002}$

7. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4} + 0{,}373}{0{,}2}$

8. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3} + 0{,}6}{0{,}2}$

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5 + 0{,}111}{0{,}02}$

10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12} + 2\frac{5}{32} + \frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5} + 2{,}13}{0{,}4}$

11. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$

12. $\dfrac{2\frac{5}{8} - \frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4{,}375\right) : 19\frac{8}{9}}$

13. $\dfrac{0{,}134 + 0{,}05}{18\frac{1}{6} - 1\frac{11}{14} - \frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$

14. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15} - 56\frac{7}{24}\right) : 0{,}8 + 2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$

15. $\dfrac{\left(68\dfrac{7}{30}-66\dfrac{5}{18}\right):6\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{7}{40}+\dfrac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}$

16. $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$

17. $\dfrac{\left[\left(40\dfrac{7}{30}-38\dfrac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\dfrac{7}{8}-\dfrac{7}{30}\right)\cdot 1\dfrac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}$

18. $\left[\dfrac{\left(2{,}4+1\dfrac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}}-\dfrac{\left(2{,}75-1\dfrac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\dfrac{3}{20}-0{,}45}\right]:\dfrac{67}{200}$

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\dfrac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\dfrac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\dfrac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot 1\dfrac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{1}{80}}\right]:2\dfrac{1}{20}$

20. $26:\left[\dfrac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\dfrac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right]+\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{21}$

21. $\dfrac{3:\dfrac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}15:2\dfrac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}$

22. $1\dfrac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\dfrac{3}{40}\right)$

23. $\left(10:2\dfrac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\dfrac{3}{40}-\dfrac{7}{30}\cdot 0{,}25+\dfrac{157}{360}\right)$

24. $\left(\dfrac{0{,}216}{0{,}15}+\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{15}\right)+\left(\dfrac{196}{225}-\dfrac{7{,}7}{24\dfrac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39$

25. $1{,}7:\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\dfrac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\dfrac{7}{135}}{\dfrac{5}{9}}-\left(0{,}5+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{12}\right)$

26. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3} + 0{,}228 : \left[\left(1{,}5291 - \frac{14{,}53662}{3 - 0{,}095}\cdot 0{,}305\right) : 0{,}12\right]$

27. $\left(\frac{8{,}8077}{20 - [28{,}2 : (13{,}333 \cdot 0{,}3 + 0{,}0001)] \cdot 2{,}004} + 4{,}9\right)\cdot \frac{5}{32}$

28. $$\frac{\left[\left(6{,}2 : 0{,}31 - \frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)\cdot 0{,}2 + 0{,}15\right] : 0{,}02}{\left(2 + 1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22 : 0{,}1\right)\cdot \frac{1}{33}}$$

29. $$6 : \frac{1}{3} - 0{,}8 : \frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6 - \frac{46}{1 + 2{,}2 \cdot 10}}$$

30. $$\frac{\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0{,}0325\right) : 400} : (6{,}79 : 0{,}7 + 0{,}3)$$

31. $$\frac{4{,}5 : \left[47{,}375 - \left(26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0{,}75\right)\cdot 2{,}4 : 0{,}88\right]}{17{,}81 : 1{,}37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}}$$

32. Bestimmen Sie die Zahl, von der sich 3,6% durch den folgenden Ausdruck darstellen lassen!

$$\frac{3 + 4{,}2 : 0{,}1}{\left(1 : 0{,}3 - 2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$$

33. $\left(46\frac{2}{25} : 12 + 41\frac{23}{35} : 260\frac{5}{14} + 800 : 12\frac{28}{31}\right)\cdot\frac{0{,}8 \cdot 7{,}2 \cdot 4{,}5 \cdot 1{,}3}{6{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 1{,}92}$

34. $$\left[15 : \frac{(0{,}6 + 0{,}425 - 0{,}005) : 0{,}01}{30\frac{5}{9} + 3\frac{4}{9}}\right]\left(0{,}645 : 0{,}3 - 1\frac{107}{180}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(4 : 6{,}25 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right)$$

35. $\left[\left(7\frac{2}{3} - 6\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14}\right) : \left(8\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - 1\frac{1}{6}\right) + \frac{7}{18} : \frac{14}{27}\right]\left(\frac{5}{6} - 0{,}75\right) \cdot \frac{20{,}4 \cdot 4{,}8 \cdot 6{,}5}{22{,}1 \cdot 1{,}2}$

36. $\dfrac{2{,}045 \cdot 0{,}033 + 10{,}518395 - 0{,}464774 : 0{,}0562}{0{,}003092 : 0{,}0001 - 5{,}188}$

37. $\left(7\frac{1}{9} - 2\frac{14}{15}\right) : \left(2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20}\right) \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14}\right)$

38. $\left(41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}\right)\left\{\left[4 - 3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right] : 0{,}16\right\}$

39. $\dfrac{45\frac{10}{63} - 44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9}\right) : 4 - \frac{3}{4}} : 31$

40. $\dfrac{0{,}8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1{,}25\right)}{0{,}64 - \frac{1}{25}} + \dfrac{\left(1{,}08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} + (1{,}2 \cdot 0{,}5) : \frac{4}{5}$

41. $\left[41\frac{29}{72} - \left(18\frac{7}{8} - 5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3}\right)\right] : 22\frac{7}{18}$

42. $\left[\dfrac{\left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0{,}003}{\left[\left(3\frac{1}{20} - 2{,}65\right)4\right] : \frac{1}{5}} - \dfrac{\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) \cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{1}{8}}\right] : 62\frac{1}{20} + 17{,}81 : 0{,}0137$

43. Berechnen Sie x, wenn

$$5\frac{4}{7} : \left\{x : 1{,}3 + 8{,}4 \cdot \frac{}{7} \cdot \left[6 - \frac{(2{,}3 + 5 : 6{,}25) \cdot 7}{8 \cdot 0{,}0125 + 6{,}9}\right]\right\} = 1\frac{1}{14}$$

ist!

44. Berechnen Sie x, wenn

$$\frac{\left[\left(4{,}625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26}\right) : x + (2{,}5 : 1{,}25) : 6{,}75\right] : 1\frac{53}{8}}{\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\frac{5}{} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 1{,}4796 : 13{,}7)} = \frac{17}{27}$$

ist!

45. Berechnen Sie x, wenn

$$\frac{(2{,}7 - 0{,}8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2 - 1{,}4) : \frac{3}{7}} + x + 8\frac{9}{11} - \frac{(1{,}6 + 154{,}66 : 70{,}3) : 1{,}9}{\left(2\frac{2}{5} - 1{,}3\right) : 4{,}3} = 2{,}625$$

ist!

2. Algebraische Umformungen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

46. $(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \dfrac{a + b - c}{a + b + c}$

Berechnen Sie den Wert dieses Ausdrucks für

$$a = 8{,}6; \quad b = \sqrt{3}; \quad c = 3\frac{1}{3}\ !$$

47. $\dfrac{a^2 - 1}{n^2 + an} \cdot \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{n}} - 1\right) \cdot \dfrac{a - an^3 - n^4 + n}{1 - a^2}$

48. $\dfrac{x}{ax - 2a^2} - \dfrac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a} \cdot \left(1 + \dfrac{3x + x^2}{3 + x}\right)$

49. $\dfrac{2a}{a^2 - 4x^2} + \dfrac{1}{2x^2 + 6x - ax - 3a} \cdot \left(x + \dfrac{3x - 6}{x - 2}\right)$

50. $\left(\dfrac{2a + 10}{3a - 1} + \dfrac{130 - a}{1 - 3a} + \dfrac{30}{a} - 3\right) \cdot \dfrac{3a^3 + 8a^2 - 3a}{1 - \dfrac{1}{4}a^2}$

51. $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} - \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

52. $\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4}$

53. $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$

54. $\left[\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right]\cdot$

$$\cdot\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$$

55. $\left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:$

$$:\left[\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right]$$

56. $\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$

57. $\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]$

58. $\dfrac{2a^2(b+c)^{2n}-\dfrac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\dfrac{2a(b+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}$

59. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

60. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$

Berechnen Sie den Wert dieses Ausdrucks für $x=\frac{1}{a-1}$!

61. $\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^nb+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}$

62.[1] $\dfrac{\left[1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right]a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}$

63. $\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

64. $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\,\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$

[1] Bevor man an die Lösung der folgenden Aufgaben geht, lese man die Vorbemerkungen zum Kapitel 2 der Lösungen.

65. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\cdot(a^2-1)\cdot(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$

66. $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\;\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$

67. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$

68. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$

69. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$

70. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[-2]{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}$

71. $\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}$

72. Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}$$

für $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$; $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ mit $a \geqq 1$ und $b \geqq 1$!

73. Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

für $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$ mit $|m|<1$!

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

74. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$.

In diesem Ausdruck soll $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$ mit $m>0$ und $0<n<1$ gesetzt werden.

75. $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

In diesem Ausdruck soll $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ mit $k>1$ gesetzt werden.

76. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\dfrac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right]$

77. $\left(2\sqrt{x^4-a^2x^2}-\dfrac{2a^2}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}\right)\cdot\dfrac{(x^2a^{-2}-4+4a^2x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{2ax(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}$

78. $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$

79. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$.

80. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$

81. $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

82. Berechnen Sie

$$\left[a^{-\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$$

für $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$!

83. Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$$

für $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ und $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$!

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

84. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$

85. $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$

86. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$

87. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$

88. $\left(2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}\right):\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$

89. Zeigen Sie, daß die folgende Identität gilt!

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0$$

90. Berechnen Sie

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

für $a=1,2$ und $b=\dfrac{3}{5}$!

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

91. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)$

Berechnen Sie den Wert für $a=54$ und $b=6$!

92. $\dfrac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}$

93. $a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{1+\left[a(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2}\cdot\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}$

94. $\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)}-\left(x-\dfrac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{(1+x^2)^{-1}}-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$

95. $(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+R^2\dfrac{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2-x^2)\left[1+\left(\dfrac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}$

96. $\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(p^{-1}+q^{-1})+\dfrac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^3}\cdot\left(p^{-\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right)$

97. $\left[\dfrac{(a+\sqrt[3]{a^2x}):(x+\sqrt[3]{ax^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6$

98. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2\,\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}$

99. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$

100. $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right]$

101. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$

102. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

103. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}$

104. $x^3\left[\dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

105. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}$

106. $\dfrac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}$

107. $\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\right\}^{-6}-\dfrac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$

108. $[(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})^{-1}+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})^{-1}]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}$

109. $\left[\dfrac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4(x+1)+(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1)^2$

110. $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

111. $\sqrt[-\frac{1}{2}]{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2$

112. $\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3+2x+a}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3-x-2a}\right]^3+\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}:a}$

113. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]:\dfrac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

114. $\left(\dfrac{a-4b}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}$

115. $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$

116. $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$

117. $\left[\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}$

118. $\left[\dfrac{\frac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}$

119. $\left[\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right]\cdot[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})^2]$

120. $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):(a+\sqrt[6]{a^3b^2})-\sqrt[3]{b}\right]^2$

121. $\left[\dfrac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4$

122. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$

123. $\sqrt{a}\left[\dfrac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^2}-b\right]^{-1}+\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}$

124. $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}$

125. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$

126. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$

127. $\dfrac{\sqrt{a^3b}\,\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-a^{-\frac{2}{3}}\left(\dfrac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\dfrac{a+b}{3a-ab}-\dfrac{ab}{a+b}\right)$

128. $$\left[\frac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2}+\frac{bx-x^2-ax+ab}{2x+a}:(b-x)-2\right]\cdot\left[\frac{(a+2x)^{-\frac{1}{2}}+(2x-a)^{\frac{1}{2}}}{(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^2$$

129. $$\left[\frac{x+4}{2x^2-2x-4}+\frac{x+2}{2(x^2+3x+2)}\right]\sqrt{2x}-$$
$$-\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}-\frac{x+6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

130. $$\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}:\frac{\sqrt{1-x}}{x-2}+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right)$$

131. $$\frac{a^2\sqrt{ab^{-1}}\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}}-2\sqrt{a^3b}\sqrt[6]{ab^5}}{(a^2-ab-2b^2)\sqrt[3]{a^5b}}-$$
$$-\frac{a-3}{a+2b}\left[\frac{a+2b}{a^2+ab-3a-3b}-(a-1)(a^2-4a+3)^{-1}\right]$$

132. $$\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}-(ab)^{\frac{3}{4}}:\sqrt{a}}{(a^2-b^2)\,a^{-1}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)+$$
$$+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{2a+2b}{a-4b}+\frac{a+3b}{2a+2b}-\frac{a^2+21ab}{2a^2-6ab-8b^2}\right)$$

133. $$\left[\frac{(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab\sqrt{a}})^2}{ab\sqrt[6]{ab}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+$$
$$+\frac{b^2-4a^2}{4a}\cdot\left(\frac{1}{b^2+3ab+2a^2}-\frac{3}{2a^2+ab-b^2}\right)$$

134. $$\frac{4(2ab)^{\frac{3}{4}}(a+2b)^{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}:\frac{\sqrt{2b\sqrt{2ab}}+\sqrt[4]{2a^3b}}{\sqrt{2ab}}-$$
$$-6\left(\frac{a}{6a-48b}-\frac{2b}{3a-6b}-\frac{8b^2}{a^2-10ab+16b^2}\right)$$

3. Algebraische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden algebraischen Gleichungen! Die Unbekannte ist jeweils x, y oder z.

135. $\dfrac{6b + 7a}{6b} - \dfrac{3ay}{2b^2} = 1 - \dfrac{ay}{b^2 - ab}$

136. $\dfrac{ax - b}{a + b} + \dfrac{bx + a}{a - b} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

137. $\dfrac{x - a - b}{c} + \dfrac{x - b - c}{a} + \dfrac{x - c - a}{b} = 3$

138. $\dfrac{c + 3z}{4c^2 + 6cd} - \dfrac{c - 2z}{9d^2 - 6cd} = \dfrac{2c + z}{4c^2 - 9d^2}$

139. $\dfrac{x - 1}{n - 1} + \dfrac{2n^2(1 - x)}{n^4 - 1} = \dfrac{2x - 1}{1 - n^4} - \dfrac{1 - x}{1 + n}$

140. $\dfrac{3ab + 1}{a}x = \dfrac{3ab}{a + 1} + \dfrac{(2a + 1)x}{a(a + 1)^2} + \dfrac{a^2}{(a + 1)^3}$

141. $\dfrac{3abc}{a + b} + \dfrac{a^2b^2}{(a + b)^3} + \dfrac{(2a + b)b^2x}{a(a + b)^2} = 3cx + \dfrac{bx}{a}$

142. $\dfrac{x + m}{a + b} - \dfrac{ax}{(a + b)^2} = \dfrac{am}{a^2 - b^2} - \dfrac{b^2x}{a^3 - ab^2 + a^2b - b^3}$

143. $\dfrac{m}{z} + \dfrac{z}{m} + \dfrac{m(z - m)}{z(z + m)} - \dfrac{z(z + m)}{m(z - m)} = \dfrac{mz}{m^2 - z^2} - 2$

144. $\dfrac{a^2 + x}{b^2 - x} - \dfrac{a^2 - x}{b^2 + x} = \dfrac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}$

145. $\dfrac{an}{a - x} + \dfrac{(a + n)(anx + nx^2 + x^3)}{x^3 + nx^2 - a^2x - a^2n} = \dfrac{ax}{n + x} + \dfrac{nx^2}{x^2 - a^2}$

146. $\left(\frac{a+1}{ax+1}+\frac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right):\left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a}-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right]=\frac{x}{2}$

147. $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$

148. $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+a+b=\sqrt{x}$

149. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$

150. $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$

151. $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$

152. $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}+\frac{x}{bc}$

153. $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$

154. $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$

155. $\frac{a-x^2}{(a-x)^2}-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$

156. $1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$

157. $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$

158. $\frac{a+x-2n}{2a-n}-\frac{a-2n}{x}=1$

159. $\frac{a}{nx-x}-\frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2}=1$

160. $\frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2+a^2-2ax}=\frac{5}{9x^2}$

161. $\frac{x+x^2}{1-x^2}:\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\frac{ab}{(b-a)^2}$

162. Zerlegen Sie den Ausdruck $11x-3x^2+70$ in ein Produkt linearer Faktoren!

163. Es soll $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ als Produkt zweier Faktoren dargestellt werden, deren Summe gleich $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ist.

164. Zerlegen Sie $15x^3+x^2-2x$ in Faktoren!

165. Zerlegen Sie $x^3+2x^4+4x^2+2+x$ in Faktoren!

165a. Die Gleichung $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$ ist zu lösen.

166. Stellen Sie die quadratische Gleichung auf, die die Wurzeln $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ hat!

167. Es ist die quadratische Gleichung gesucht, die die Wurzeln

$$\frac{1}{10-\sqrt{72}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{10+6\sqrt{2}} \text{ hat.}$$

168. Bestimmen Sie die quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}!$$

169. Die Wurzeln x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + 12 = 0$ genügen der Beziehung $x_1 - x_2 = 1$. Bestimmen Sie den Koeffizienten p!

170. In der Gleichung $5x^2 - kx + 1 = 0$ ist k so zu wählen, daß die Differenz der Wurzeln 1 ergibt.

171. Die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ genügen der Beziehung $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Der Wert von a ist zu bestimmen.

172. Man wähle die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ so, daß die Wurzeln der Gleichung gleich p und q sind.

173. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ seien x_1 und x_2. Stellen Sie eine neue Gleichung 2. Grades auf, deren Wurzeln gleich $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{x_2}{x_1}$ sind!

174. Gegeben ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Gesucht ist diejenige neue quadratische Gleichung, deren Wurzeln gleich

a) dem Doppelten der Wurzelwerte der gegebenen Gleichung;

b) den reziproken Werten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

175. Stellen Sie die quadratische Gleichung auf, deren Wurzeln gleich den Kuben der Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind!

176. Es ist eine biquadratische Gleichung zu ermitteln. Die Summe der Quadrate der Wurzeln dieser Gleichung soll 50, das Produkt der Wurzeln 144 ergeben.

177. Bestimmen Sie die restlichen Wurzeln der Gleichung

$$4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0,$$

wenn eine Wurzel $3 + i\sqrt{6}$ ist.

178. Berechnen Sie den Wert von m in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0,$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat!
Berechnen Sie auch die anderen beiden Wurzeln!

179. Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von m und n, und geben Sie die dritte Wurzel an!

180. Welche Zahlenwerte muß a in der Gleichung

$$x^2 + 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

haben, damit a Wurzel dieser Gleichung ist?

180a. In welchem Intervall muß die Zahl m liegen, damit beide Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

zwischen -2 und 4 liegen?

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

181. $\sqrt{y+2} - \sqrt{y-6} = 2$

182. $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$

183. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$

184. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$

185. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$

186. $\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{x+2} - 2$

187. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

188. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1$

189. $\dfrac{3+x}{3x} = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{x^2}}}$

190. $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}} = \dfrac{7}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$

191. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$

192. $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

193. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} - \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{x}$

194. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}} - \sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}} = \sqrt[4]{28}$

195. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

196. $\frac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}=\frac{27}{x}$

197. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$

198. $\frac{\sqrt{1+a^{-2}x^2}-xa^{-1}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}+xa^{-1}}=\frac{1}{4}$

199. $\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-ax}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax}=\frac{1}{c^2}$

200. $\frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9(x+c)}{8c}$

201. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

202. $2\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

203. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$

204. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$

205. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$

206. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$

207. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

208. $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$

209. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}$

210. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

211. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$

212. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=$

213. $2\sqrt[3]{z^2}-3\sqrt[3]{z}=20$

214. $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$

215. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$

216. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

217. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$

218. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$

219. $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$

220. $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2-x}{2}}$

221. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$

222. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$

223. $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$

224. $\sqrt{y^2 + 4y + 8} + \sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{2(y^2 + 4y + 6)}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

225. $\left| \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2(xy + 2) \\ x + y &= 6 \end{aligned} \right|$

226. $\left| \begin{aligned} x + xy + y &= 11 \\ x^2y + xy^2 &= 30 \end{aligned} \right|$

227. $\left| \begin{aligned} x + y^2 &= 7 \\ xy^2 &= 12 \end{aligned} \right|$

228. $\left| \begin{aligned} x^2 - y &= 23 \\ x^2y &= 50 \end{aligned} \right|$

229. $\left| \begin{aligned} (x^2 - y^2)\,xy &= 180 \\ x^2 - xy - y^2 &= -11 \end{aligned} \right|$

230. $\left| \begin{aligned} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 35 &= 0 \\ 5x^2 - 10y^2 - 5 &= 0 \end{aligned} \right|$

231. $\left| \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{5}{2}xy \\ x - y &= \frac{1}{4}xy \end{aligned} \right|$

232. $\left| \begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 13 \\ x + y &= 4 \end{aligned} \right|$

233. $\left| \begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right|$

234. $\left| \begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 &= 7 \end{aligned} \right|$

235. $\left| \begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^n &= c \\ \left(\frac{x}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^m &= d \end{aligned} \right|$

Beschränken Sie sich auf die positiven Lösungen für $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ und $m \neq n$!

236. $\left| \begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x^3 + y^3 &= 35 \end{aligned} \right|$

237. $\left| \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 7 \\ xy(x + y) &= -2 \end{aligned} \right|$

Geben Sie nur die reellen Lösungen an!

238. $\left| \begin{aligned} xy(x + y) &= 30 \\ x^3 + y^3 &= 35 \end{aligned} \right|$

239. $\left| \begin{aligned} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} &= 5\frac{1}{5} \\ xy &= 6 \end{aligned} \right|$

240. $\left|\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 \end{aligned}\right|$

241. $\left|\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 30 \\ 2x - 3y + 5z - 2u &= 3 \\ 3x + 4y - 2z - u &= 1 \\ 4x - y + 6z - 3u &= 8 \end{aligned}\right|$

242. $\left|\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \end{aligned}\right|$

243. $\left|\begin{aligned} \sqrt{4x + y - 3z + 7} &= 2 \\ \sqrt[3]{2y + 5x + z + 25{,}5} &= 3 \\ \sqrt{y + z} - \sqrt{6x} &= 0 \end{aligned}\right|$

244. $\left|\begin{aligned} x + y + z &= 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 61 \\ xy + xz &= 2yz \end{aligned}\right|$

245. $\left|\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ xy + yz + zx &= 47 \\ (z - x)(z - y) &= 2 \end{aligned}\right|$

246. $\left|\begin{aligned} a^3 + a^2x + ay + z &= 0 \\ b^3 + b^2x + by + z &= 0 \\ c^3 + c^2x + cy + z &= 0 \end{aligned}\right|$

247. $\left|\begin{aligned} \frac{12}{\sqrt{x - 1}} + \frac{5}{\sqrt{y + \frac{1}{4}}} &= 5 \\ \frac{8}{\sqrt{x - 1}} + \frac{10}{\sqrt{y + \frac{1}{4}}} &= 6 \end{aligned}\right|$

248. $\left|\begin{aligned} x + y - 2\sqrt{xy} &= 4 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right|$

249. $\left|\begin{aligned} \sqrt{\frac{3x}{x + y}} - 2 + \sqrt{\frac{x + y}{3x}} &= 0 \\ xy - 54 &= x + y \end{aligned}\right|$

250. $\left|\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{17} &= 0 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} &= 6 \end{aligned}\right|$

251. $\left|\begin{aligned} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} &= 4\sqrt{a} \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} &= (\sqrt{41} - 3)a \end{aligned}\right|$

252. $\left|\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} &= y \\ x^4 - y^4 &= 144a^4 \end{aligned}\right|$

253. $\left|\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 84 \\ x + \sqrt{xy} + y &= 14 \end{aligned}\right|$

253a. Geben Sie alle Werte von m an, für die das Gleichungssystem

$$\left|\begin{aligned} x - y &= m(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy &= 0 \end{aligned}\right|$$

reelle Lösungen hat!

4. Logarithmische Gleichungen und Exponentialgleichungen

Bestimmen Sie x, ohne Tabellen zu benutzen!

254. $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$ **255.** $x = 100^{\frac{1}{2} - \lg \sqrt[4]{4}}$

256. $x = \sqrt{10^{2 + \frac{1}{2}\lg 16}}$ **257.** $x = 49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

258. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$

259. $\log_a\{1 + \log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)]\} = 0$

260. $\log_4\{2 \log_3[1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

261. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$

262. $\log_a y + \log_a(y + 5) + \log_a 0{,}02 = 0$

263. $\frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} = 3$

264. $1 + \lg x = \frac{1}{3} \lg\left[b - \frac{(3a - b)(a^2 + ab)^{-1}}{b^{-2}}\right] - \frac{4}{3} \lg b + \frac{1}{3} \lg (a^3 - ab^2)$

265. $\lg\left[x - a(1 - a)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2} \lg\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \lg \sqrt{\frac{a^3 + a}{a + 1} - a^2} = 0$

266. $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$

267. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

268. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$ **269.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

270. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

271. $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

272. $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$

273. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

274. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$

275. $\left[2\,(2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

276. $2\,(2^{\sqrt{x}+3})^{2^{-1}x^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2} = 0$

277. $\sqrt[x^2-1]{a^3}\;\sqrt[2x-2]{a}\;\sqrt[4]{a^{-1}} = 1$

278. $3 \log_{xa^2} x + \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$

279. $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$

280. $\log_x (5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$

281. $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{x-1} + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$

282. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$

283. $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$

284. $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

285. $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

286. $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$

287. $\lg (4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1) - 1 = \lg(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2) - 2 \lg 2$

288. $2 (\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$

289. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$

290. $x^{2\lg^3 x - 1{,}5 \lg x} = \sqrt{10}$

291. $\lg (64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0$

292. $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

293. $\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) = 1 + \lg (2^{x-2} + 1)$

294. $2 \lg 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \lg 3 - \lg(\sqrt[x]{3} + 27) = 0$

295. $\lg (3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - \sqrt{x + 0{,}25} \lg 4$

296. $\dfrac{2 \lg 2 + \lg (x - 3)}{\lg (7x + 1) + \lg (x - 6) + \lg 3} = \dfrac{1}{2}$

297. $\log_5 120 + (x - 3) - 2 \log_5 (1 - 5^{x-3}) = -\log_5 (0{,}2 - 5^{x-4})$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

298. $\left| \begin{array}{r} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{array} \right|$

299. $\left| \begin{array}{r} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3\frac{1}{3} \end{array} \right|$

300. $\left| \begin{array}{l} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{array} \right|$

301. $\left| \begin{array}{r} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13 \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = 3 \lg 2 \end{array} \right|$

302. $\left| \begin{array}{l} \log_{xy} (x - y) = 1 \\ \log_{xy} (x + y) = 0 \end{array} \right|$

303. $\left| \begin{array}{l} \log_a \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y \\ \log_b x + \log_b y = 4 \end{array} \right|$

304. $\left| \begin{array}{c} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a = 0 \end{array} \right|$

305. $\left| \begin{array}{c} xy = a^2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5 \lg^2 (a^2) \end{array} \right|$

306. $\left| \begin{array}{r} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4 \end{array} \right|$

307. $\left| \begin{array}{r} \lg x + \lg y = \lg a \\ 2 (\lg x - \lg y) = \lg b \end{array} \right|$

308. $\left| \begin{array}{l} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2} \end{array} \right|$

309. $\left| \begin{array}{r} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1 \end{array} \right|$

310. $\left| \begin{array}{r} \log_v u + \log_u v = 2 \\ u^2 + v = 12 \end{array} \right|$

311. $\left| \begin{array}{c} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{a} + \log_{\frac{y}{\sqrt{b}}} \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{array} \right|$

312. $\left| \begin{array}{r} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{array} \right|$

313. $\left| \begin{array}{l} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{array} \right|$

314. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)\,2^{y-x} = 3 \end{array}\right|$

315. $\left|\begin{array}{r} \sqrt[10]{2^x}\,\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128} \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y) \end{array}\right|$

316. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y} \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{9^{1-y}} \end{array}\right|$

317. $\left|\begin{array}{r} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x} - 27\sqrt[x]{27^y} = 0 \\ \lg(x-1) - \lg(1-y) = 0 \end{array}\right|$

318. $\left|\begin{array}{r} \dfrac{1}{2}\lg x + \dfrac{1}{2}\lg y - \lg(4-\sqrt{x}) = 0 \\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}} - 125\cdot 5^{\sqrt{y}} = 0 \end{array}\right|$

319. $\left|\begin{array}{l} \log_x ay = p \\ \log_y bx = q \end{array}\right|$

5. Folgen und Reihen

Bezeichnungen

a_1: erstes Glied einer arithmetischen Folge
a_n: n-tes Glied einer arithmetischen Folge
d: Differenz einer arithmetischen Folge (Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder)
u_1: erstes Glied einer geometrischen Folge oder Reihe
u_n: n-tes Glied einer geometrischen Folge oder Reihe
q: Quotient einer geometrischen Folge (Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder)
S_n: Summe der ersten n Glieder einer Folge
S: Summe einer konvergenten geometrischen Reihe

Formeln

n-tes Glied einer arithmetischen Folge:

(1) $$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge:

(2) $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

oder

(3) $$S_n = \frac{[2a_1 + d(n - 1)]\, n}{2}.$$

n-tes Glied einer geometrischen Folge:

(4) $$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge:

(5) $$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}, \quad (q > 1) \quad \text{oder} \quad S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q}, \quad (q < 1)$$

(6) $$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q > 1) \quad \text{oder} \quad S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (q < 1).$$

Summe einer konvergenten geometrischen Reihe:

(7) $$S = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Arithmetische Folgen

320. Wieviel Glieder der arithmetischen Folge

$$5, 9, 13, 17, 21, \ldots$$

muß man wählen, damit ihre Summe 10877 ergibt?

321. Bestimmen Sie die arithmetische Folge, von der bekannt ist, daß die Summe ihrer ersten vier Glieder gleich 26 und das Produkt dieser Glieder 880 ist!

322. In einer arithmetischen Folge ist $a_p = q$ und $a_q = p$. Wie kann a_n durch n, p und q ausgedrückt werden?

323. Bestimmen Sie die Summe aller zweistelligen natürlichen Zahlen!

324. Bestimmen Sie die vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, von denen bekannt ist, daß die Summe ihrer Quadrate um 48 größer ist als die Summe der Quadrate der von ihnen eingeschlossenen geraden Zahlen!

325. Eine arithmetische Folge habe 20 Glieder. Die Summe derjenigen Glieder a_n, deren Index eine gerade Zahl ist, ist gleich 250. Die Summe der Glieder mit ungeradzahligem n ist gleich 220. Bestimmen Sie die Glieder a_{10} und a_{11} dieser Folge!

326. Gegeben sind die folgenden Ausdrücke:

$$(a + x)^2, \quad (a^2 + x^2), \quad (a - x)^2.$$

Die Ausdrücke bilden die ersten drei Glieder einer arithmetischen Folge. Bestimmen Sie die Summe ihrer ersten n Glieder!

327. Wir bezeichnen mit S_1 die Summe der ersten n_1 Glieder, mit S_2 die Summe der ersten n_2 Glieder und mit S_3 die Summe der ersten n_3 Glieder einer arithmetischen Folge. Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

gilt.

328. Berechnen Sie die Glieder der arithmetischen Folge, in der das erste Glied gleich 1 ist und die Summe der ersten fünf Glieder gleich $\frac{1}{4}$ der Summe der folgenden fünf Glieder ist!

329. Bestimmen Sie die arithmetische Folge, bei der, unabhängig von der Anzahl der Glieder, immer die Summe der Glieder gleich dem Dreifachen des Quadrats der Anzahl dieser Glieder ist!

330. Bestimmen Sie die Summe aller zweistelligen Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 1 ergeben!

Geometrische Folgen

331. Die Zahlen 1 und 256 sind das erste bzw. fünfte Glied einer geometrischen Folge. Bestimmen Sie das zweite, dritte und vierte Glied dieser Folge!

332. Bestimmen Sie drei Zahlen, die Glieder einer geometrischen Folge sind und von denen bekannt ist, daß die Summe des ersten und dritten Gliedes gleich 52, das Quadrat des zweiten Gliedes gleich 100 ist!

333. Die Differenz aus dem dritten und ersten Glied einer geometrischen Folge ist gleich 9, und die Differenz aus dem fünften und dritten Glied ist gleich 36. Bestimmen Sie einige der ersten Glieder dieser Folge!

334. Die Summe aus dem ersten und dem vierten Glied einer geometrischen Folge ist gleich 27, das Produkt aus dem zweiten und dritten Glied gleich 72. Bestimmen Sie die vier Glieder!

335. Die Summe aus dem ersten und dem vierten Glied einer geometrischen Zahlenfolge ist gleich 35, die Summe aus dem zweiten und dritten Glied ist gleich 30. Bestimmen Sie die vier Glieder!

336. Von einer geometrischen Folge sind die Summen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31$$

und

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62$$

gegeben. Bestimmen Sie die ersten sechs Glieder!

337. In einer geometrischen Folge von fünf Gliedern ist die Summe aus den letzten vier Gliedern gleich 19,5 und die Summe aus den ersten vier Gliedern gleich 13. Berechnen Sie das erste und das letzte Glied!

338. Das Produkt aus dem ersten und dem neunten Glied einer geometrischen Folge ist gleich 2304, und die Summe aus dem vierten und dem sechsten Glied ist gleich 120. Bestimmen Sie u_1 und q!

339. Die Summe aus drei Gliedern einer geometrischen Folge ist gleich 126. Das Produkt aus diesen Gliedern ist gleich 13824. Bestimmen Sie die drei Zahlen!

340. Die Anzahl der Glieder einer geometrischen Folge ist gerade. Die Summe aller Glieder dieser Folge ist dreimal so groß wie die Summe der Glieder, deren n gerade ist. Bestimmen Sie den Quotienten der Folge!

Konvergente geometrische Folgen und Reihen

341. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots$$

aufeinanderfolgende Glieder einer konvergenten geometrischen Folge sind, und bestimmen Sie die Summe der daraus gebildeten Reihe!

342. Beweisen Sie, daß die Summanden in der eckigen Klammer des Ausdrucks

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\cdots\right]$$

Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe sind, und berechnen Sie den Wert des Ausdrucks!

343. Das erste Glied einer konvergenten geometrischen Reihe, deren Glieder positiv sind, ist gleich 4. Die Differenz aus dem dritten Glied und dem fünften Glied ist gleich $\frac{32}{81}$. Bestimmen Sie die Summe dieser Reihe!

344. Bestimmen Sie die Summe einer konvergenten geometrischen Reihe, wenn bekannt ist, daß die Summe des ersten und vierten Gliedes gleich 54, die Summe des zweiten und dritten Gliedes gleich 36 ist!

345. Eine geometrische Folge $\{u_n\}$ mit den Gliedern u_n $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ werde in zwei Teilfolgen zerlegt. Die erste Folge enthalte alle Glieder der Form

$$u_{2n} \; (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

die zweite Folge alle Glieder der Form

$$u_{2n-1} \; (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Die beiden Reihen, die aus den Folgen gebildet werden können, sind konvergent, und zwar hat die erste Reihe die Summe 36 und die zweite Reihe die Summe 12. Bestimmen Sie die Glieder der ursprünglichen Folge!

346. Die Summe einer konvergenten geometrischen Reihe ist gleich 56. Bildet man die Folge der Quadrate der Glieder und bestimmt die Summe der dazugehörigen konvergenten Reihe, so erhält man 448. Berechnen Sie das erste Glied und den Quotienten!

347. Die Summe einer konvergenten geometrischen Reihe ist gleich 3. Bildet man die Folge der dritten Potenzen der Glieder und bestimmt die Summe der dazu gehörenden konvergenten Reihe, so erhält man $\frac{108}{13}$. Berechnen Sie die Glieder dieser Folge!

348. Das zweite Glied einer konvergenten geometrischen Reihe ist gleich 6. Die Summe der Reihe ist gleich $\frac{1}{8}$ der Summe der Reihe, deren Glieder die Quadrate der ursprünglichen Glieder sind. Berechnen Sie die Glieder dieser Folge!

Aufgaben über arithmetische und geometrische Folgen

349. In einer arithmetischen Folge ist das zweite Glied gleich 14, das dritte Glied gleich 16. Stellen Sie eine geometrische Folge auf, deren Quotient gleich der Differenz der arithmetischen Folge ist, wenn die Summe der ersten drei Glieder in beiden Folgen gleich groß ist.

350. Eine arithmetische und eine geometrische Folge stimmen in drei Gliedern überein. Das erste Glied ist bei beiden Folgen gleich 3. Bestimmen Sie die Glieder der Folgen, wenn das zweite Glied der arithmetischen Folge um 6 größer ist als das zweite Glied der geometrischen Folge!

351. Das erste, dritte und fünfte Glied einer geometrischen Folge kann man als erstes, viertes bzw. sechzehntes Glied einer arithmetischen Folge schreiben. Bestimmen Sie das vierte Glied dieser arithmetischen Folge, wenn man weiß, daß das erste Glied gleich 5 ist!

352. Drei Zahlen, deren Summe gleich 93 ist, sind aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge. Bestimmen Sie das erste, zweite und siebente Glied dieser Folge!

353. In einer arithmetischen Folge ist das erste Glied gleich 1 und die Summe der ersten sieben Glieder gleich 2555. Bestimmen Sie das vierte Glied der geometrischen Folge, die aus sieben Gliedern besteht und deren erstes und letztes Glied mit den entsprechenden Gliedern der gegebenen arithmetischen Folge übereinstimmen!

354. Drei Zahlen, deren Summe gleich 15 ist, sind aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge. Wenn man zu ihnen 1, 4 bzw. 19 addiert, so erhält man drei Zahlen, die Glieder einer geometrischen Folge sind. Bestimmen Sie diese Zahlen!

355. Bestimmen Sie drei Zahlen, die eine geometrische Folge bilden, wenn bekannt ist, daß die Summe dieser Zahlen 26 ist! Durch Addition von 1, 6 bzw. 3 erhalten Sie drei neue Zahlen, die eine arithmetische Folge darstellen. Bestimmen Sie die ursprünglichen Zahlen!

356. Drei Zahlen stellen eine geometrische Folge dar. Wenn Sie das erste Glied um 64 vermindern, dann bilden diese drei Zahlen eine arithmetische Folge. Wenn Sie das zweite Glied dieser arithmetischen Folge um 8 vermindern, erhalten Sie wieder eine geometrische Folge. Bestimmen Sie diese Zahlen!

357. Können drei Zahlen gleichzeitig Glieder einer arithmetischen und einer geometrischen Folge sein?

6. Kombinatorik und binomischer Satz[1]

358. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen verhält sich zur Anzahl der Permutationen von $n + 2$ Elementen wie $0{,}1 : 3$. Bestimmen Sie n!

359. Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur dritten Klasse beträgt $\frac{1}{5}$ der Anzahl der Kombinationen von $n + 2$ Elementen zur vierten Klasse. Bestimmen Sie n!

360. Welches ist das mittlere Glied der binomischen Entwicklung

$$\left(\frac{a}{x} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}?$$

361. Wieviel Glieder hat die binomische Entwicklung

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}?$$

Welches Glied enthält a^7?

362. Bestimmen Sie den Index des Gliedes der binomischen Entwicklung

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

dessen Exponent für a und b gleich groß ist!

363. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{a-1}{a - a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10},$$

und bestimmen Sie den Summanden der Entwicklung, der a nicht enthält!

[1] Der allgemeine **Binomische Satz** wurde zum ersten Mal von Newton in seinem berühmten Werk „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (1687) bewiesen. Daher ist es in der sowjetischen mathematischen Literatur üblich, vom Newtonschen Binom zu sprechen (*Anm. d. Übers.*)

364. Der Exponent des einen Binoms ist um 3 größer als der des anderen. Bestimmen Sie diese Exponenten, wenn die Summe der Binomialkoeffizienten beider Entwicklungen gleich 144 ist!

365. Bestimmen Sie das dreizehnte Glied der Entwicklung $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, wenn der Binomialkoeffizient des dritten Gliedes der Entwicklung gleich 105 ist!

366. In der Entwicklung von $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^n$ sind die Koeffizienten des vierten und des dreizehnten Gliedes gleich groß. Bestimmen Sie das Glied, das x nicht enthält!

367. Bestimmen Sie das mittlere Glied der Entwicklung

$$\left(a^{-2}\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n,$$

wenn bekannt ist, daß sich der Koeffizient des fünften Gliedes zum Koeffizienten des dritten Gliedes wie 14 : 3 verhält!

368. Die Summe der Koeffizienten des ersten, zweiten und dritten Gliedes der Entwicklung $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ ist gleich 46. Bestimmen Sie das Glied, das x nicht enthält!

369. Bestimmen Sie das Glied der binomischen Entwicklung $(x\sqrt{x} + \sqrt[-3]{x})^n$, das x^5 enthält, wenn die Summe aller Binomialkoeffizienten gleich 128 ist!

370. Bestimmen Sie das sechste Glied der geometrischen Folge, deren erstes Glied gleich $\frac{1}{i}$ ist! Der Quotient der Folge ist die komplexe Zahl $(1 + i)$.

371. Bestimmen Sie das siebente Glied der geometrischen Folge, deren Quotient gleich $\left(1 + \frac{1}{i}\right)$ und deren erstes Glied gleich i ist!

372. Für welches n stellen die Koeffizienten des zweiten, dritten und vierten Gliedes der binomischen Entwicklung von $(1 + x)^n$ Glieder einer arithmetischen Folge dar?

373. Die Koeffizienten des fünften, sechsten und siebenten Gliedes der binomischen Entwicklung von $(1 + x)^n$ sind Glieder einer arithmetischen Folge. Bestimmen Sie n!

4 [00 21 01]

374. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck

$$\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}} + a\,\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$$

so, daß das vierte Glied der binomischen Entwicklung $56a^{5,5}$ ist!

375. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck

$$\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$$

so, daß das dritte Glied der binomischen Entwicklung gleich 240 ist!

376. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck

$$\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$$

so, daß sich das siebente Glied der binomischen Entwicklung zum $(x - 6)$-ten Glied wie $1 : 6$ verhält!

377. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck $(x + x^{\lg x})^5$ so, daß das dritte Glied der Entwicklung gleich 1000000 ist!

378. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck

$$\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$$

so, daß das vierte Glied der Entwicklung gleich 200 ist!

379. Bestimmen Sie x in dem Ausdruck

$$\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} + x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$$

so, daß das dritte Glied der binomischen Entwicklung gleich 36000 ist!

380. Das sechste Glied der binomischen Entwicklung von

$$\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} + x^{2\lg x}\right)^8$$

ist gleich 5600.
Bestimmen Sie x!

381. Das zehnte Glied der binomischen Entwicklung von

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\lg x}} + x^{2\lg x}\sqrt{x}\right]^{10}$$

ist gleich 450.
Bestimmen Sie x!

382. Bestimmen Sie x, wenn das vierte Glied der Entwicklung von

$$\left(10^{\lg\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[\lg x]{10}}\right)^{7}$$

gleich 3500000 ist!

383. Gegeben ist die Entwicklung des Binoms

$$\left(\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

Bestimmen Sie dasjenige Glied, in dem der Exponent von x doppelt so groß ist wie der des folgenden Gliedes! Bestimmen Sie ferner den Wert von x, wenn das gesuchte Glied um 30 kleiner ist als das nachfolgende!

384. Der Binomialkoeffizient des vierten Gliedes der binomischen Entwicklung von

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^{n}$$

ist fünfmal so groß wie der Binomialkoeffizient des zweiten Gliedes. Für welches x ist das vierte Glied dieser binomischen Entwicklung zwanzigmal so groß wie der Exponent des Binoms?

385. Der Exponent des Binoms

$$\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^{n}$$

ist um 20 kleiner als der Binomialkoeffizient des dritten Gliedes der Entwicklung dieses Binoms. Für welches x ist die Differenz aus dem zweiten und dem sechsten Glied der binomischen Entwicklung gleich 56?

386. Für welches x ist in der binomischen Entwicklung von

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^{n}$$

die Summe des dritten und des fünften Gliedes gleich 135? Es ist bekannt, daß die Summe der Binomialkoeffizienten der letzten drei Glieder gleich 22 ist.

387. Für welches x ist das sechste Glied der binomischen Entwicklung von

$$\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right]^n$$

gleich 21? Es ist bekannt, daß der Binomialkoeffizient des ersten, dritten und vierten Gliedes der Entwicklung mit dem ersten, dritten und fünften Glied einer arithmetischen Folge übereinstimmt.

388. Für welches x ist das vierte Glied der binomischen Entwicklung von

$$\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{1}{2}\lg(6-\sqrt{8x})} + \sqrt[6]{\frac{5^{\lg(x-1)}}{25^{\lg 5}}}\right]^n$$

gleich 16,8? Es ist bekannt, daß $\frac{14}{9}$ des Binomialkoeffizienten des dritten Gliedes der Entwicklung und die Binomialkoeffizienten des vierten und fünften Gliedes die ersten Glieder einer geometrischen Folge darstellen.

389. Für welches x ist die Differenz zwischen dem Neunfachen des dritten Gliedes der binomischen Entwicklung von

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^n$$

und dem fünften Glied gleich 240? Es ist bekannt, daß die Differenz zwischen dem Logarithmus des verdreifachten Binomialkoeffizienten des vierten Gliedes und dem Logarithmus des Binomialkoeffizienten des zweiten Gliedes gleich 1 ist.

7. Algebraische und arithmetische Aufgaben[1]

390. Bestimmen Sie die Masse einer Granatpatrone! Es ist bekannt, daß die Ladung 0,8 kg wiegt. Die Masse des Geschosses beträgt $\frac{2}{3}$ der Masse der ganzen Patrone. Die Masse der Hülse beträgt $\frac{1}{4}$ der Masse der Patrone.

391. In einem Werk sind 35% aller Beschäftigten Frauen, die übrigen sind Männer. Es arbeiten in diesem Werk 252 Männer mehr als Frauen. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Beschäftigten!

392. Beim Verkauf einer Ware für 1386 Rubel erhält man 10% Gewinn. Bestimmen Sie den Selbstkostenpreis der Ware!

393. Eine Arbeiterproduktionsgenossenschaft verkauft eine Warenmenge für 3348 Rubel. Dabei hat sie 4% Verlust. Wie groß sind die Selbstkosten bei der Herstellung dieser Warenmenge?

394. Aus 225 kg Erz erhält man 34,2 kg Kupfer. Wieviel Prozent Kupfer sind in dem Erz enthalten?

395. Ein Päckchen Zigaretten kostete vor der Preissenkung 2 Rubel 90 Kopeken. Nach der Preissenkung kostet es nur noch 2 Rubel 60 Kopeken. Um wieviel Prozent wurde der Preis gesenkt?

396. Ein Kilogramm einer Ware kostet 6 Rubel 40 Kopeken. Nach der Preissenkung kostet die gleiche Ware noch 5 Rubel 70 Kopeken. Um wieviel Prozent wurde der Preis der Ware gesenkt?

[1] Die Verfasser lösen diese Aufgabe nicht auf algebraischem *und* arithmetischem Wege, weil alle arithmetisch gelösten Aufgaben sich auch algebraisch lösen lassen. Andererseits lassen sich Aufgaben, die mit Hilfe von Gleichungen gelöst werden, nicht selten auf arithmetischem Wege einfacher lösen. Bei einem Teil der Lösungen geben die Verfasser manchmal den algebraischen, manchmal den arithmetischen Lösungsweg an. Das soll keineswegs die Initiative der Leser bei der Wahl der Lösungsmöglichkeiten einschränken.

397. Die bei der Trocknung der Weintrauben erhaltenen Rosinen stellen 32% der Masse der Trauben dar. Aus welcher Menge Trauben erhält man 2 kg Rosinen?

398. Für eine Exkursion muß Geld gesammelt werden. Wenn jeder Teilnehmer 75 Kopeken gibt, dann fehlen 4,4 Rubel am notwendigen Gesamtbetrag. Gibt jeder 80 Kopeken, dann bleiben 4,4 Rubel übrig. Wieviel Schüler nahmen an der Exkursion teil?

399. Es sind 72 Rubel zu bezahlen. Jede der anwesenden Personen gibt die gleiche Summe. Wären 3 Personen weniger anwesend, dann müßte jeder 4 Rubel mehr geben als vorher. Wieviel Personen waren anwesend?

400. Von einem literarischen Werk kosten 60 Exemplare des ersten Bandes und 75 Exemplare des zweiten Bandes 405 Rubel. Man erhält für die Exemplare des ersten Bandes 15%, für die des zweiten Bandes 10% Rabatt. Die Bücher kosten unter diesen Bedingungen nur noch 355 Rubel 50 Kopeken. Wieviel Rubel kostet der erste Band und wieviel der zweite!

401. Ein Antiquitätengeschäft kauft zwei Gegenstände für 225 Rubel und verkauft diese Gegenstände mit 40% Gewinn. Was kostet jeder Gegenstand beim Einkauf, wenn der erste Gegenstand 25%, der zweite 50% Gewinn bringt?

402. Meerwasser enthält 5 (Massen-)Prozent Salz. Wieviel Kilogramm Süßwasser muß man zu 40 kg Meerwasser hinzufügen, wenn der Salzgehalt 2% betragen soll?

403. Die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge $3\sqrt{5}$ m. Verlängert man die eine Kathete um $133\frac{1}{3}\%$ ihrer ursprünglichen Länge, die andere um $16\frac{2}{3}\%$, so beträgt die Summe der neuen Kathetenlängen 14,00 m. Wie lang waren die Katheten vor der Verlängerung?

404. In zwei Säcken befinden sich 140 kg Mehl. Bringt man aus dem ersten Sack in den zweiten 12,5% von der Masse des Mehles, das sich im ersten Sack befindet, so ist in beiden Säcken die gleiche Menge enthalten. Wieviel Kilogramm Mehl waren in jedem Sack?

405. Zwei Werke *A* und *B* übernahmen es, einen Auftrag in 12 Tagen auszuführen Nach zwei Tagen wurde das Werk *A* wegen Renovierung geschlossen. Demzufolge arbeitet an der Ausführung des Auftrages nur das Werk *B*.

Es ist bekannt, daß die Produktivität des Werkes *B* nur $66\frac{2}{3}\%$ der des Werkes *A* beträgt. Berechnen Sie, wieviel Tage zur Ausführung des Auftrages benötigt wurden!

406. In einer Mathematikarbeit lösten 12 % der Schüler keine der gestellten Aufgaben, 32 % lösten die Aufgaben mit Fehlern, die übrigen 14 Schüler lösten die Aufgaben richtig. Wieviel Schüler waren in dieser Klasse?

407. Von einer Schiene wird ein Stück abgeschnitten, das 72 % der Länge der gesamten Schiene darstellt. Die Masse des übrigbleibenden Stückes beträgt 45,2 kg. Bestimmen Sie die Masse des abgeschnittenen Teiles!

408. Eine Legierung hat die Masse von 2,000 kg und besteht aus Silber und Kupfer, wobei die Masse des Silbers $14\frac{2}{7}\,\%$ der Masse des Kupfers beträgt. Wieviel Gramm Silber sind in der gegebenen Legierung enthalten?

409. Drei Arbeiter erhalten zusammen 4080 Rubel Lohn. Die Summen, die der erste und der zweite Arbeiter bekommen, verhalten sich wie $7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$. Die Summe, die der dritte Arbeiter erhält, stellt $43\frac{1}{3}\,\%$ des Verdienstes des ersten dar. Wieviel Lohn erhält jeder?

410. In drei Kästen befinden sich 64,2 kg Zucker. Im zweiten Kasten befindet sich $\frac{4}{5}$ des Inhalts des ersten Kastens und im dritten $42\frac{1}{2}\,\%$ des Inhaltes des zweiten Kastens. Wieviel Zucker befindet sich in jedem Kasten?

411. Zwei Stahlsorten enthalten 5 % bzw. 40 % Nickel. Wieviel Stahl von jeder Sorte sind erforderlich, um 140 t eines Stahls mit einem Nickelgehalt von 30 % zu schmelzen?

412. Ein Stück einer Legierung aus Kupfer und Zinn hat die Masse von 12,0 kg und enthält 45 % Kupfer. Wieviel Kilogramm reines Zinn muß man der Schmelze zugeben, damit der Kupfergehalt auf 40 % sinkt?

413. Wieviel Gramm reinen Alkohol muß man zu 735 g einer 16prozentigen Jodlösung (Lösungsmittel Alkohol) hinzufügen, um eine 10prozentige Lösung zu erhalten?

414. Taucht man ein 24 kp schweres Stück einer Kupfer-Zink-Legierung in Wasser ein, so verliert es $2\frac{8}{9}$ kp seines Gewichtes. Berechnen Sie die Anteile des Kupfers und des Zinks, wenn ferner bekannt ist, daß das Kupfer im Wasser $11\frac{1}{9}\,\%$ seines ursprünglichen Gewichtes und das Zink $14\frac{2}{7}\,\%$ seines Gewichtes verliert!

415. Eine eingleisige Eisenbahnstrecke von 20 km Länge soll gebaut werden. Zum Verlegen stehen Schienen von 25 m und 12,5 m zur Verfügung. Wenn man alle Schienen von 25 m Länge verlegt, dann muß man 50 % der 12,5 m langen Schienen hinzufügen. Wenn man alle 12,5 m langen Schienen verlegt, dann muß man $66\frac{2}{3}\,\%$ der Menge der 25 m langen Schienen hinzufügen. Bestimmen Sie die Anzahl der Schienen jeder Sorte!

416. Bei der Schulentlassung tauschen alle Schüler untereinander ihre Fotografien aus. Wieviel Schüler wurden entlassen, wenn 870 Fotografien getauscht wurden?

417. Die mittlere Proportionale zweier Zahlen ist um 12 größer als die kleinere der beiden Zahlen. Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist um 24 kleiner als die größere Zahl. Bestimmen Sie die beiden Zahlen!

418. Von drei Zahlen ist die zweite Zahl im Vergleich zur ersten Zahl um soviel größer wie die dritte Zahl im Vergleich zur zweiten größer ist. Außerdem ist das Produkt aus den beiden kleineren der drei Zahlen gleich 85 und das Produkt aus den beiden größeren Zahlen 115. Bestimmen Sie die drei Zahlen!

419. Die Zahl a ist das arithmetische Mittel dreier Zahlen, b ist das arithmetische Mittel ihrer Quadrate. Drücken Sie durch a und b das arithmetische Mittel der paarweisen Produkte der gegebenen Zahlen aus!

420. Aus einem rechteckigen Blech mit dem Umfang von 96 cm wird ein oben offener Kasten dadurch gebaut, daß man an den Ecken des Bleches Quadrate mit den Seitenlängen 4 cm herausschneidet und die Kanten zusammenlötet. Welche Maße hatte das Blech, wenn der Rauminhalt des Kastens 768 cm³ beträgt?

421. Bestimmen Sie eine zweistellige ganze Zahl so, daß die Zahl, dividiert durch das Produkt ihrer Ziffern, $2\frac{2}{3}$ ergibt! Ferner soll die Differenz zwischen der ursprünglichen Zahl und der Zahl, die durch Vertauschen der ursprünglichen Ziffern entsteht, gleich 18 sein.

422. Bestimmen Sie eine zweistellige ganze Zahl, deren Ziffer mit dem Stellenwert eins um 2 größer ist als die Ziffer mit dem Stellenwert zehn! Das Produkt aus der gesuchten Zahl und der Summe der Ziffern ist gleich 144.

423. Gesucht wird eine positive ganze Zahl, von der folgendes bekannt ist:
Hängt man ihr rechts die Ziffer 5 an, so ist sie ohne Rest durch eine Zahl teilbar, die um 3 größer ist als die gesuchte. Als Wert dieses Quotienten erhält man eine Zahl, die um 16 kleiner ist als der Divisor.

424. Gesucht werden zwei zweistellige ganze Zahlen, die folgende Eigenschaften besitzen:
Die Summe aus dem Doppelten der größeren gesuchten Zahl und dem Dreifachen der kleineren ist gleich 72. Hängt man an die größere der gesuchten Zahlen rechts eine Null an und dann noch die Ziffern der kleineren Zahl (in der Reihenfolge von links nach rechts), so erhält man eine fünfstellige Zahl. Gleichfalls eine fünfstellige Zahl ergibt sich, wenn man an die Ziffern der kleineren Zahl die Ziffern der größeren und noch eine Null anhängt. Dividiert man die erste der so erhaltenen fünfstelligen Zahlen durch die zweite, so erhält man als Wert des Quotienten 2 und den Rest 590.

425. Ein Schüler soll 78 mit einer zweistelligen ganzen Zahl multiplizieren, in der die Ziffer, die die Anzahl der Zehner angibt, dreimal so groß ist wie die Ziffer, die die Anzahl der Einer angibt. Bei der Rechnung unterläuft ihm ein Fehler, indem er die Ziffern des zweiten Faktors vertauscht. Er erhält ein Produkt, das um 2808 kleiner ist als das gesuchte. Bestimmen Sie das gesuchte Produkt!

426. Die Entfernung zwischen zwei Bahnhöfen beträgt 96 km. Der erste Zug benötigt beim Durchfahren dieser Strecke 40 min weniger als der zweite. Die Geschwindigkeit des ersten Zuges ist um 12 km · h^{-1} größer als die des zweiten. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Züge!

427. Ein Zug verläßt den Bahnhof in A zur Fahrt nach dem 24 km entfernten Ort B. Gleichzeitig tritt ein Zug in B die Fahrt nach A an. Der Zug von A nach B hat eine um 2 km · h^{-1} höhere Geschwindigkeit und trifft eine Stunde früher in B ein als der Gegenzug in A. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten beider Züge!

428. Die Entfernung zwischen A und B beträgt auf dem Schienenweg 66,0 km, auf dem Wasserweg 80,5 km. Von A fährt ein Zug 4 Stunden später ab als ein Dampfer. Der Zug ist 15 Minuten früher in B als der Dampfer. Bestimmen Sie die mittleren Geschwindigkeiten des Zuges und des Dampfers, wenn der erste 30 km · h^{-1} schneller fährt als der zweite!

429. Ein Konfektionsbetrieb soll 810 Kostüme nähen, ein zweiter Betrieb in der gleichen Zeit 900 Kostüme. Der erste Betrieb kann drei Tage vor dem Termin liefern, der zweite sogar sechs Tage vor dem Termin. Wieviel Kostüme schneidert jeder Betrieb täglich, wenn der zweite an einem Tage vier Kostüme mehr näht als der erste? (Eine gleichmäßige Tagesproduktion wird vorausgesetzt.)

430. Zwei Schiffe begegnen sich auf hoher See. Ein Schiff setzt seine Fahrt nach Süden fort und das andere nach Westen. Zwei Stunden nach dem Vorbeifahren beträgt die Entfernung zwischen beiden 60 km. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der Schiffe, wenn bekannt ist, daß die Geschwindigkeit des ersten um $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ größer ist als die des anderen!

431. Ein Hund, der sich an einem Punkt A befindet, jagt einen Fuchs, der sich 30 m vom Hund entfernt befindet. Die Sprunglänge des Hundes beträgt 2 m, die des Fuchses 1 m. Der Hund führt zwei Sprünge in der gleichen Zeit aus, in der der Fuchs drei Sprünge macht. In welcher Entfernung vom Punkt A holt der Hund den Fuchs ein?

432. Die Zeiger einer Uhr bewegen sich ohne Sprünge. Wieviel Minuten nach 4 Uhr holt der Minutenzeiger den Stundenzeiger ein?

433. Auf der Fahrt von A über B nach C benötigte ein Zug für beide Teilstrecken die gleiche Zeit. Dabei war auf der Hinfahrt die Geschwindigkeit auf dem Streckenabschnitt $\overline{BC}$ um 25% kleiner als auf dem Abschnitt $\overline{AB}$. Auf dem Rückweg legte der Zug den Streckenabschnitt $\overline{CB}$ mit der gleichen Geschwindigkeit zurück wie auf der Hinfahrt die Strecke $\overline{AB}$. Dagegen verringerte sich die Geschwindigkeit auf der Strecke $\overline{BA}$ um 25% gegenüber der Geschwindigkeit auf der Fahrt von C nach B. Wieviel Zeit benötigte der Zug für die Hinfahrt, also von A nach C, wenn für diese Fahrt $\frac{5}{12}$ Stunden weniger benötigt wurden als für den Rückweg?

434. Ein Radfahrer will zu einer festgelegten Zeit in einem 30 km entfernten Ort sein. Da er 3 min später abfährt als er ursprünglich beabsichtigt hatte, muß er mit einer Geschwindigkeit fahren, die um $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ größer ist als die ursprünglich geplante. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Radfahrers!

435. Ein Schnellzug hat an einem Signal 16 min Aufenthalt. Er holt die Verspätung nach 80 km wieder auf und überschreitet dabei die vorgeschriebene Geschwindigkeit um $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Welche Geschwindigkeit war für den Schnellzug festgelegt?

436. Ein Zug muß eine Strecke von 840 km in einer festgesetzten Zeit durchfahren. Nach der Hälfte der Strecke hat der Zug an einem Signal einen Aufenthalt von einer halben Stunde. Um aber zum festgelegten Zeitpunkt an Ort und Stelle zu sein, vergrößert er seine Geschwindigkeit um $2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Wie lange benötigt der Zug für diese Strecke?

437. Von zwei Orten, die voneinander 650 km entfernt sind, fahren zwei Züge einander entgegen. Wenn beide Züge gleichzeitig an ihrem Ziel sind, begegnen sie sich nach 10 Stunden. Ist der zweite Zug 4 h und 20 min eher am Ziel als der erste, dann begegnen sie sich 8 Stunden nach der Abfahrt des ersten Zuges. Bestimmen Sie für jeden Zug die mittlere Geschwindigkeit auf dieser Strecke!

438. Zwei Züge fahren einander entgegen. Sie fahren gleichzeitig von den Bahnhöfen A und B ab, deren Entfernung voneinander 600 km beträgt. Der erste Zug ist 3 Stunden eher im Bahnhof B als der zweite im Bahnhof A. In der Zeit, in der der erste 250 km fährt, fährt der zweite 200 km. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit jedes Zuges!

439. Ein Urlauber, der zum Bahnhof geht, legt in der ersten Stunde 3,5 km zurück. Er rechnet sich aus, daß er bei dieser Geschwindigkeit eine Stunde zu spät kommt. Deshalb legt er den Rest des Weges mit einer Geschwindigkeit von $5\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ zurück und ist 30 Minuten vor Abfahrt des Zuges am Bahnhof. Bestimmen Sie die Länge des Weges, den der Urlauber zurücklegen mußte!

440. Die Entfernung von Moskau nach Mytisch beträgt auf der Chaussee 19 km. Von Moskau nach Mytisch fährt ein Radfahrer mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Nachdem er 15 min gefahren ist, fährt in der gleichen Richtung ein Auto ab. Es fährt 10 min nach der Abfahrt am Radfahrer vorüber und setzt seinen Weg bis Mytisch fort, von wo es ohne Aufenthalt zurückfährt. Nach 50 min (gerechnet vom Zeitpunkt seiner Abfahrt aus Moskau) begegnet es dem Radfahrer ein zweites Mal. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autos und die des Radfahrers!

441. Um 5.00 Uhr fährt von A ein Postzug nach B ab. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 1080 km. Um 8.00 Uhr fährt von B ein Schnellzug in Richtung A ab, dessen Geschwindigkeit um $15\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ größer ist als die des Postzuges. Wann begegnen sich beide Züge, wenn ihre Begegnung auf halbem Wege von A nach B erfolgt?

442. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 78 km. Von A fährt ein Radfahrer in Richtung B. Nach einer Stunde begegnet ihm ein aus B kommender Radfahrer, der mit einer um $4\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ größeren Geschwindigkeit fährt als der erste. Die Begegnung erfolgt 36 km von B entfernt. Wie lange war jeder bis zur Begegnung gefahren, und mit welcher Geschwindigkeit fuhr jeder?

443. Zwei Wanderer beginnen zur gleichen Zeit einander entgegenzugehen und begegnen sich nach 3 h 20 min. In welcher Zeit legt jeder von ihnen die ganze Entfernung zurück, wenn der erste an der Stelle, von der der zweite losging, fünf Stunden später eintrifft als der zweite an der Stelle, von der der erste diese Wanderung begann?

444. Zwei Touristen gehen einander entgegen, der eine vom Punkt A, der andere vom Punkt B aus. Der erste geht von A sechs Stunden später los als der zweite von B. Als sie sich treffen, hat der erste 12 km weniger zurückgelegt als der zweite. Sie setzen nach der Begegnung den Weg mit einer solchen Geschwindigkeit fort, daß der erste in B nach 8 Stunden, der zweite in A nach 9 Stunden ankommt (gerechnet vom Zeitpunkt des Losgehens). Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AB}$ und die Geschwindigkeit eines jeden Touristen!

445. Ein Flugzeug und ein Luftschiff fliegen gleichzeitig los. Sie fliegen einander entgegen. Bis zum Zeitpunkt ihrer Begegnung hat das Luftschiff 100 km weniger zurückgelegt als das Flugzeug. Auf dem Startplatz des Flugzeuges kommt das Luftschiff 3 Stunden nach der Begegnung an. Das Flugzeug kommt auf dem Flugplatz, auf dem das Luftschiff startete, 1 h 20 min nach der Begegnung an. Bestimmen Sie die Entfernung der Flugplätze sowie die Geschwindigkeiten des Flugzeuges und des Luftschiffes!

446. Von zwei Punkten A und B gehen gleichzeitig zwei Wanderer los. Sie laufen einander entgegen. Als sie sich treffen, hat der erste a km mehr zurückgelegt als der zweite. Wenn sie ihren Weg mit den gleichen Geschwindigkeiten fortsetzen, trifft der erste m Stunden nach der Begegnung in B, der zweite n Stunden nach der Begegnung in A ein. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Fußgänger!

447. Auf einem Kreis bewegen sich zwei Körper. Der erste benötigt für einen Umlauf 5 Sekunden weniger als der zweite. Wenn sie sich in einer Richtung bewegen, findet jeweils nach 100 Sekunden ein Überholen statt. Wie groß ist der Zentriwinkel (in Grad), der zu dem Kreisbogen gehört, den jeder in einer Sekunde zurücklegt?

448. Zwei Körper bewegen sich auf einem Kreis in ein und derselben Richtung mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Jeweils nach 56 Minuten überholt der schnellere den langsameren Körper. Bewegen sich die Körper mit den gleichen Geschwindigkeiten entgegengesetzt zueinander, so begegnen sie sich nach jeweils 8 Minuten. Weiterhin ist bekannt, daß sich bei der Bewegung auf dem Kreis in entgegengesetzter Richtung zueinander die Entfernung beim Annähern in 24 Sekunden von 40 m auf 26 m verringert. Wieviel Meter legt jeder Körper in der Minute zurück, und wie lang ist der Kreisumfang?

449. Auf einem Kreis mit dem Umfang u bewegen sich zwei Punkte mit konstanten Bahngeschwindigkeiten und gleichem Umlaufsinn. Sie begegnen sich nach t Sekunden. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit jedes Punktes, wenn bekannt ist, daß der erste für das Zurücklegen des gesamten Umfanges n Sekunden weniger benötigt als der andere!

450. Die Entfernung zwischen zwei Städten beträgt auf dem Flußwege 80 km. Ein Motorschiff legt diesen Weg gegen die Strömung in 8 h 20 min zurück. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die das Motorschiff in stehendem Gewässer erreicht hätte, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 4 km $\cdot$ h^{-1} beträgt!

451. Ein Motorboot fährt 28 km flußabwärts und kehrt sofort zurück. Für den Weg dorthin und zurück benötigt es sieben Stunden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die das Boot im stehenden Gewässer erreicht hätte, wenn die Strömungsgeschwindigkeit $3\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ beträgt!

452. Jemand fährt mit einem Boot auf einem Fluß von A nach B und zurück. Er benötigt dazu 10 Stunden. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 20 km. Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit des fließenden Wassers, wenn bekannt ist, daß der Betreffende 2 km gegen die Strömung in der gleichen Zeit bewältigt, in der er 3 km mit der Strömung des Flusses fährt!

453. Ein Dampfer fährt von Kiew nach Dnepropetrowsk in zwei Tagen. Für den Rückweg benötigt er drei Tage. Berechnen Sie die Zeit, die ein Floß für die Strecke von Kiew nach Dnepropetrowsk benötigt!

454. Auf einer 60 m langen Strecke $\overline{AB}$ bewegen sich gleichförmig zwei Körper M_1 und M_2 einander entgegen. Der Körper M_1 beginnt seine Bewegung vom Punkt A aus 15 Sekunden eher als der Körper M_2 von B aus. Jeder Körper bewegt sich bis zum anderen Ende der Strecke und bewegt sich dann sofort mit der gleichen Geschwindigkeit zum Ausgangspunkt zurück. Die erste Begegnung zwischen ihnen erfolgt 21 Sekunden, die zweite 45 Sekunden nach dem Beginn der Bewegung des Körpers M_1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit jedes Körpers!

455. Der Weg von A nach B steigt anfangs auf einer Strecke von 3 km, verläuft dann 5 km lang in gleicher Höhe und fällt danach auf einer Länge von 6 km ab. Ein Bote bemerkt auf halbem Wege, daß er nicht alle Pakete mitgenommen hat. Er kehrt sofort um und trifft 3 h 36 min nach seinem Fortgehen aus A wieder in A ein. Er geht abermals von A los und benötigt für den ganzen Weg nach B 3 h 27 min. Den Rückweg bewältigt er in 3 h 51 min. Mit welcher Geschwindigkeit legte der Bote die einzelnen Wegstrecken (bergauf, horizontal und bergab) zurück, wenn man diese Geschwindigkeiten als konstant betrachtet?

456. Eine Stenotypistin berechnet, daß sie die übernommene Arbeit 3 Tage vor dem festgesetzten Termin beenden kann, wenn sie täglich 2 Blatt über ihre Norm schreibt. Schreibt sie täglich 4 Blatt mehr als ihre Norm vorsieht, dann beendet sie die Arbeit 5 Tage vorfristig. Wieviel Blatt mußte sie schreiben, und wieviel Zeit stand ihr zur Verfügung?

457. Ein Arbeiter fertigt in einer bestimmten Zeit eine Anzahl gleicher Einzelteile an. Wenn er täglich 10 Stück mehr produziert, dann beendet er seine Arbeit $4\frac{1}{2}$ Tage vorfristig. Schafft er fünf Einzelteile weniger, dann überschreitet er den Termin um 3 Tage. Wieviel Einzelteile stellt er her, und wieviel Zeit war festgelegt?

458. Eine Stenotypistin soll eine Arbeit in einer festgelegten Zeit ausführen. Sie rechnet sich aus, wieviel Blätter täglich bei gleichmäßiger Arbeit fertig werden müssen. Wenn sie täglich zwei Blatt mehr schreibt, dann beendet sie die Arbeit 2 Tage vorfristig, wenn sie 60% mehr als die Norm schreibt, dann beendet sie die Arbeit 4 Tage vor der Frist und kann außerdem noch 8 Blätter mehr schreiben als die vorgegebene Arbeit umfaßt. Wieviel Blätter mußte sie am Tage schreiben, und in welcher Zeit beendete sie ihre Arbeit?

459. Zwei Arbeiter mit unterschiedlicher Leistung bewältigen eine Arbeit in 8 Stunden, wenn sie zusammen arbeiten. Führt der erste die Arbeit allein aus, so beendet er die Arbeit 12 Stunden eher als der zweite Arbeiter (wenn auch dieser allein arbeitet). Wieviel Stunden benötigt jeder für diese Arbeit, wenn er allein tätig ist?

460. Zwei Pumpen füllen ein Wasserbecken in 6 h, wenn sie beide eingeschaltet werden. Würde jeweils nur eine Pumpe verwendet werden, so braucht die zweite 5 h mehr als die erste. Wieviel Stunden benötigt jede der beiden Pumpen bei Einzelbetrieb?

461. Zwei Arbeiter sollen eine Serie von gleichen Einzelteilen herstellen. Nachdem der erste 7 Stunden und der zweite 4 Stunden gearbeitet hat, haben sie $\frac{5}{9}$ dieser Teile gefertigt. Sie arbeiten zusammen noch 4 Stunden und stellen fest, daß sie dann noch $\frac{1}{18}$ ihrer Arbeit zu erledigen haben. In wieviel Stunden kann jeder, wenn er allein arbeitet, die gesamte Arbeit bewältigen?

462. Ein Schiff wird mit Hilfe von Kränen beladen. Zunächst werden vier Kräne mit gleicher Leistung eingesetzt. Nach zwei Stunden kann noch über zwei weitere Kräne mit einer kleineren Leistung verfügt werden. Mit allen sechs Kränen wird nun noch 3 Stunden gearbeitet bis das Verladen abgeschlossen ist. Wenn alle Kräne von Anfang an zur Verfügung gestanden hätten, wäre die Arbeit nach 4,5 Stunden beendet gewesen. Berechnen Sie, wieviel Stunden ein Kran mit größerer Leistung bzw. ein Kran mit kleinerer Leistung allein zum Beladen benötigt hätte!

463. Für ein Bauvorhaben werden im Verlaufe von 8 Stunden Baumaterialien vom Bahnhof herangefahren. Für den Transport stehen 30 Lastkraftwagen mit einer Ladefähigkeit von 3 t zur Verfügung. Nach zweistündiger Arbeit werden noch zusätzlich 9 Lastkraftwagen mit 5 t Ladefähigkeit eingesetzt. Der Transport wird in der dafür vorgesehenen Zeit geschafft. Wenn von Anfang an die Fünftonner im Einsatz gewesen wären und nach zwei Stunden die Dreitonner zusätzlich eingesetzt worden wären, dann hätten innerhalb der festgelegten Zeit nur $\frac{13}{15}$ der gesamten Transportarbeiten durchgeführt werden können. Berechnen Sie, wieviel Stunden ein einzelner Dreitonner bzw. Fünftonner und wieviel Stunden dreißig Fünftonner benötigt hätten!

464. Zwei Stenotypistinnen hatten einen Auftrag zu erfüllen. Die zweite begann mit der Arbeit eine Stunde später als die erste. Drei Stunden, nachdem die erste angefangen hatte, waren noch $\frac{9}{20}$ des Auftrages zu bewältigen. Nach Beendigung der Arbeit zeigte sich, daß jede Stenotypistin die Hälfte der gesamten Arbeit erledigt hatte. In welcher Zeit hätte jede von ihnen allein diese Arbeit verrichtet?

465. Von zwei Bahnhöfen A und B fahren zwei Züge einander entgegen, wobei der zweite eine halbe Stunde später abfährt als der erste. Zwei Stunden nach Abfahrt des ersten Zuges beträgt die Entfernung zwischen ihnen $\frac{19}{30}$ des gesamten Weges zwischen A und B. Sie bewegen sich ohne Halt weiter und begegnen sich in der Mitte des Weges zwischen A und B. Wieviel Zeit braucht jeder Zug, um den gesamten Weg zwischen den beiden Bahnhöfen zurückzulegen?

466. Zum Spülen fotografischer Negative benutzt man eine Wanne, die die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds[1] mit den Maßen 20 cm × 90 cm × 25 cm hat. Für die Herstellung einer Wassermischung fließt aus einem Hahn Wasser zu und gleichzeitig aus einem anderen Wasser ab. Um mit Hilfe des zweiten Hahnes die volle Wanne zu leeren, braucht man 5 min mehr Zeit als man zum Füllen mit Hilfe des ersten Hahnes braucht, wenn der zweite geschlossen ist. Öffnet man beide Hähne, dann ist die volle Wanne in einer Stunde entleert. Bestimmen Sie die Wassermenge, die in einer Minute durch jeden Hahn fließt!

467. Für den Bau eines Gebäudes sollen 8000 m^3 Erde in einer festgelegten Zeit bewegt werden. Die Arbeit war acht Tage früher beendet als vorgesehen, da die Erdarbeiterbrigade den Plan täglich mit 50 m^3 übererfüllte. Bestimmen Sie, in welcher Zeit die Arbeit zu beenden war, und berechnen Sie den Prozentsatz der täglichen Übererfüllung!

468. Die Bauarbeiten auf einer Straße wurden von zwei Brigaden durchgeführt. Jede der beiden Brigaden besserte 10 km Straßendecke aus, obgleich die zweite Brigade einen Tag weniger arbeitete als die erste. Wieviel Kilometer Straße

[1] Ein Parallelepiped ist ein Prisma, dessen Grund- und Deckfläche Parallelogramme sind. Demnach haben bei diesem Körper sämtliche sechs Begrenzungsflächen die Gestalt eines Parallelogramms. Im vorliegenden Fall sind Grund- und Deckfläche Rechtecke.

wurden täglich von jeder Brigade ausgebessert, wenn die Leistung beider zusammen täglich 4,5 km betrug?

469. Zwei Arbeiter schafften eine Arbeit in 12 Stunden. Wenn der erste allein die erste Hälfte der Arbeit fertiggestellt hätte und danach der andere allein die zweite Hälfte, dann wäre die Arbeit nach 25 Stunden geschafft worden. In welcher Zeit kann jeder der beiden Arbeiter allein die gesamte Arbeit bewältigen?

470. Zwei Traktoren mit verschiedener Leistung arbeiten zusammen und pflügen ein Feld in t Tagen. Wenn nur ein Traktor die Hälfte des Feldes pflügt und der andere dann die Arbeit beendet, dann wird das Feld in k Tagen gepflügt sein. In wieviel Tagen pflügt jeder der Traktoren allein das ganze Feld?

471. Für die Vertiefung der Fahrrinne in einem Hafen arbeiten drei verschiedene Bagger. Wenn nur der erste von ihnen tätig ist, werden für die Arbeit 10 Tage mehr Zeit benötigt. Wenn nur der zweite arbeitet, dann wird die Arbeit mit 20 Tagen Verspätung fertig. Wenn bloß der dritte an der Vertiefung der Fahrrinne arbeitet, braucht man 6mal soviel Zeit, als wenn gleichzeitig alle drei Bagger arbeiten. Wieviel Zeit benötigt jeder Bagger für die Fertigstellung der Arbeit, wenn er allein arbeitet?

472. Zwei Arbeiter können eine Arbeit in sieben Tagen bewältigen. Der zweite Arbeiter beginnt $1\frac{1}{2}$ Tage später als der erste. Wenn jeder allein diese Arbeit durchführt, braucht der erste drei Tage länger als der zweite. In wieviel Tagen schafft jeder allein diese Arbeit?

473. Mit Hilfe zweier Traktoren verschiedener Leistung soll ein Feld eines Staatsgutes in acht Tagen gepflügt werden. Wenn die Hälfte des Feldes von einem Traktor gepflügt wird und für die weitere Arbeit beide Traktoren zur Verfügung stehen, wird die Arbeit in zehn Tagen bewältigt. Wieviel Tage benötigt man, wenn jeweils nur einer der beiden Traktoren zur Verfügung steht, um das ganze Feld zu pflügen?

474. Mehrere Männer eines Dorfes nehmen sich vor, einen Graben auszuheben. Die Arbeit könnte nach sechs Stunden beendet sein, wenn sie gleichzeitig angefangen hätten. Sie fangen aber nacheinander, nach jeweils gleichen Zeitabständen an. Nachdem der letzte Teilnehmer beim Grabenbau erschienen ist, nimmt die Arbeit bis zur Vollendung noch einmal soviel Zeit in Anspruch, wie vorher zwischen dem Erscheinen eines Mitarbeiters und des unmittelbar folgenden verging. Wieviel Zeit brauchen sie zum Ausheben des Grabens, wenn der erste 5mal solange arbeitet wie der letzte?

475. Drei Arbeiter könnten eine Arbeit in t Stunden bewältigen. Der erste Arbeiter kann, wenn er allein arbeitet, die Arbeit doppelt so schnell wie der dritte und eine Stunde eher als der zweite beenden. In welcher Zeit kann jeder allein diese Arbeit bewältigen?

476. Ein Bassin wird durch zwei Pumpen mit Wasser gefüllt. Die erste Pumpe war ein Drittel der Zeit in Betrieb, die nötig wäre, um das Bassin zu füllen, danach war nur die zweite Pumpe in Betrieb. Wenn dagegen die zweite Pumpe nur ein Drittel der Zeit gearbeitet hätte, die nötig ist, um das Bassin zu füllen und danach nur die erste, so wären nur $\frac{13}{18}$ des Bassins gefüllt worden. Berechnen Sie, in welcher Zeit das Bassin durch jede Pumpe allein gefüllt wird, wenn bekannt ist, daß beide zusammen das Bassin in 3 h 36 min füllen!

477. Beim Bau eines Elektrizitätswerkes soll eine Maurerbrigade in einem festgelegten Zeitraum 120000 Ziegel vermauern. Die Brigade erfüllt die Aufgabe vier Tage vorfristig. Berechnen Sie, wie groß die tägliche Norm im Ziegelvermauern ist, und wieviel Ziegel in Wirklichkeit täglich vermauert werden, wenn bekannt ist, daß die Brigade in drei Tagen 5000 Ziegel mehr vermauert als die Norm in vier Tagen vorsieht!

478. In drei Gefäße wird Wasser gegossen. Wenn ein Drittel des Wassers aus dem ersten Gefäß in das zweite gegossen wird, danach ein Viertel des Wassers aus dem zweiten Gefäß in das dritte und dann ein Zehntel des Wassers aus dem dritten Gefäß in das erste, dann befinden sich in jedem Gefäß 9 l. Wieviel Wasser befand sich vorher in jedem Gefäß?

479. Aus einem Behälter, in dem sich reiner Alkohol befindet, wird ein Teil des Alkohols ausgegossen und die gleiche Menge Wasser zugegeben. Danach laufen aus dem Behälter ebensoviel Liter Gemisch heraus wie vorher reiner Alkohol. Das im Behälter verbleibende Gemisch enthält noch 49 l reinen Alkohol. Das Fassungsvermögen des Behälters beträgt 64 l. Wieviel Liter Alkohol laufen beim ersten Mal, wieviel beim zweiten Mal aus dem Behälter heraus?[1]

480. Aus einem Gefäß mit 20 l Alkohol wird so viel Alkohol in ein anderes zum Teil mit Wasser gefülltes gegossen, daß das zweite Gefäß 20 l enthält. Nun wird aus dem zweiten Gefäß wieder so viel Gemisch zurückgegossen, daß das erste wieder 20 l enthält. Gießt man dann schließlich $6\frac{2}{3}$ l Gemisch aus dem ersten in das zweite, so enthalten beide Gefäße die gleiche Menge Alkohol. Wieviel Liter Alkohol wurden anfangs aus dem ersten in das zweite Gefäß gegossen?

[1] Die Aufgabe wurde unter der Voraussetzung gestellt, daß das Volumen des Gemisches die Summe der Volumina des Alkohols und des Wassers darstellt. Tatsächlich ist es ein wenig kleiner.

481. In einem Gefäß mit 8 l Fassungsvermögen befindet sich Luft mit einem Sauerstoffgehalt von 16%. Aus diesem Gefäß läßt man eine gewisse Menge Luft austreten und füllt die gleiche Menge Stickstoff hinein. Danach entnimmt man ebensoviel Gemisch wie im ersten Fall Luft und gibt die gleiche Menge Stickstoff zu. In dem letzten Gemisch sind 9% Sauerstoff enthalten. Bestimmen Sie, wieviel Liter jedesmal aus dem Gefäß entwichen sind!

482. Zwei Kolchosbäuerinnen bieten auf dem Markt zusammen 100 Eier zum Verkauf an. Jede der beiden nimmt die gleiche Summe Geldes ein. Wenn die erste soviel Eier verkauft hätte wie die zweite, dann hätte sie 72 Rubel erhalten. Wenn die zweite soviel Eier verkauft hätte wie die erste, dann hätte sie 32 Rubel erhalten. Wieviel Eier hatte jede?

483. Zwei Kolchosbäuerinnen verkaufen zusammen a Liter Milch für einen bestimmten Preis, und jede erhält die gleiche Summe. Wenn die erste soviel verkauft wie die zweite, dann erhält sie m Rubel. Wenn die zweite soviel verkauft wie die erste, dann erhält sie n Rubel ($m > n$). Wieviel Liter Milch hatte jede Bäuerin?

484. Bei einer Leistungsprüfung für zwei Verbrennungsmotoren wurde unter gleichen Bedingungen festgestellt, daß der erste 600 g Benzin benötigt, der zweite, der zwei Stunden weniger arbeitete, 384 g. Wenn jeder die gleiche Zeit wie im ersten Versuch arbeitet und der erste in einer Stunde soviel Benzin verbraucht wie der zweite, der zweite aber soviel wie der erste, dann verbrauchen sie gleich viel Benzin. Wieviel Benzin je Stunde braucht jeder Motor?

485. Zwei Gold-Silber-Legierungen enthalten die Edelmetalle in unterschiedlichen Anteilen. In der einen Legierung sind die Metalle im Verhältnis 2 : 3 enthalten, in der anderen im Verhältnis 3 : 7. Wieviel muß man von jeder Legierung nehmen, um 8 kg einer neuen Legierung zu erhalten, in der Gold und Silber im Verhältnis 5 : 11 enthalten sein sollen?

486. Ein Bottich enthält ein Alkohol-Wasser-Gemisch mit einem Mischungsverhältnis von 2 : 3. Ein anderer Bottich enthält ein Gemisch mit einem Mischungsverhältnis von 3 : 7. Wieviel Eimer muß man aus jedem Bottich nehmen, um 12 Eimer Alkohol-Wasser-Gemisch mit einem Mischungsverhältnis von 3 : 5 zu erhalten?

487. Eine Legierung besteht aus zwei Metallen, die im Verhältnis 1 : 2 enthalten sind. Eine andere besteht aus den gleichen Metallen; ihr Verhältnis beträgt 2 : 3. Aus wieviel Teilen der beiden Legierungen kann man eine neue erhalten, die die Metalle im Verhältnis 17 : 27 enthält?

488. Bei einem Riementrieb führt die kleinere der beiden Rollen 400 Umdrehungen je Minute mehr aus als die andere. Die größere Rolle braucht für 5 Umdrehungen eine Sekunde mehr als die kleinere. Wieviel Umdrehungen führt jede Rolle in einer Minute aus?

489. Auf einer Strecke von 18 m führt ein Vorderrad einer Equipage 10 Umdrehungen mehr aus als ein hinteres Rad. Wenn der Umfang des Vorderrades 6 dm größer wäre und der des Hinterrades 6 dm kleiner, dann würde auf der gleichen Strecke das Vorderrad 4 Umdrehungen mehr als das Hinterrad ausführen. Bestimmen Sie die Umfänge beider Räder!

490. Ein Kran löscht eine Fracht von 600 t in drei Tagen. Er schafft am ersten und dritten Tag zusammen zwei Drittel der gesamten Entladearbeit; am zweiten Tag lädt er weniger als am ersten, am dritten weniger als am zweiten aus. Die Differenz zwischen dem Verhältnis der Verringerung des Ausladens am dritten Tag zur Lademenge des zweiten Tages in Prozenten und dem Verhältnis der Verringerung am zweiten Tag zur Lademenge des ersten in Prozenten ist gleich 5. Bestimmen Sie, wieviel täglich ausgeladen wurde, und berechnen Sie den Prozentsatz der Verringerung am zweiten und dritten Tag!

491. Zwei Lösungen, von denen die erste 800 g und die zweite 600 g wasserfreie Schwefelsäure enthält, werden zusammengegossen, und man erhält 10000 g einer neuen Schwefelsäuremischung. Berechnen Sie die Massen der ersten und der zweiten Lösung, die zur Herstellung der neuen verwendet wurden, wenn bekannt ist, daß der Prozentgehalt an wasserfreier Schwefelsäure in der ersten Lösung um 10% größer ist als in der zweiten!

492. Von zwei verschiedenen Kupferlegierungen enthält die eine 40% weniger Kupfer als die zweite. Beide Legierungen ergeben zusammengeschmolzen eine Legierung mit einem Kupfergehalt von 36%. Bestimmen Sie den prozentualen Gehalt an Kupfer in der ersten und in der zweiten Legierung, wenn bekannt ist, daß in der ersten Legierung 6 kg, in der zweiten 12 kg Kupfer enthalten waren!

493. Zwei Züge, ein Güterzug mit einer Länge von 490 m und ein Personenzug mit einer Länge von 210 m, fahren auf zwei zueinander parallelen Gleisen einander entgegen. Der Lokführer des Personenzuges bemerkt den Güterzug, als er sich 700 m von ihm entfernt befindet. Beide Züge begegnen sich 28 s danach. Berechnen Sie die Geschwindigkeit jedes Zuges, wenn bekannt ist, daß der Güterzug zum Vorbeifahren an einem Signal 35 s länger braucht als der Personenzug!

494. Ein Güterzug besteht aus zwei- und vierachsigen Kesselwagen, die mit Erdöl gefüllt sind. Der gesamte Zug hat eine Länge von 940 m. Es soll die Anzahl der vier- und der zweiachsigen Kesselwagen berechnet werden und auch ihre Masse, wenn bekannt ist, daß die Anzahl der zweiachsigen um 5 größer ist als die Anzahl der vierachsigen. Jeder der vierachsigen Kesselwagen hat eine dreimal so große Masse wie ein zweiachsiger. Die Masse des Erdöls (ohne die Masse der Kesselwagen) in allen vierachsigen Kesselwagen ist um 100 t größer als die Masse der beladenen zweiachsigen Kesselwagen auf einer Länge von 100 m. Die Masse des Erdöls in den vierachsigen Kesselwagen beträgt 40 t. Die in den Zweiachsern befindliche Masse stellt $\frac{3}{10}$ der Masse des Erdöls in den Vierachsern dar.

495. Ein Tunnel wird mit zwei Maschinen von zwei Seiten vorgetrieben. Die Arbeit soll nach 60 Tagen beendet sein. Wenn die erste Maschine 30% der gesamten Arbeit verrichtet, die für diese Zeit vorgesehen war, und die zweite $26\frac{2}{3}\%$ der gesamten Arbeit, dann schaffen beide zusammen 60 m Tunnelvortrieb. Wenn die erste Maschine $\frac{2}{3}$ aller Arbeiten der zweiten Maschine beim Durchbrechen des Tunnels, die zweite aber $\frac{3}{10}$ aller Arbeiten der ersten Maschine verrichtet, dann benötigt die erste sechs Tage mehr als die zweite. Berechnen Sie, wieviel Meter jede Maschine täglich bewältigt!

496. Zwei Straßenbaubrigaden arbeiten zusammen und beenden die Ausbesserung der Straßendecke eines Straßenabschnitts in sechs Tagen. Die erste Brigade benötigt, wenn sie allein arbeitet, zur Erfüllung von 40% der gesamten Arbeit zwei Tage mehr als die zweite Brigade, wenn diese allein arbeitet und $13\frac{1}{3}\%$ der gesamten Arbeit schaffen will. Berechnen Sie, in wieviel Tagen jede Brigade allein das Straßenstück ausbessern kann!

497. Vom Hafen zum Bahnhof sollen 690 t Güter mit Hilfe von fünf Lastkraftwagen mit je 3 t Ladefähigkeit und zehn Lastkraftwagen mit je 1,5 t Ladefähigkeit befördert werden. Nach einiger Zeit sind $\frac{25}{46}$ aller Güter abtransportiert. Zur termingerechten Abwicklung des Transports steht für das Abfahren der restlichen Güter noch ein Zeitraum zur Verfügung, der um zwei Stunden kürzer ist als der, der für den Transport des ersten Teils der Waren benötigt wurde. Die Fahrer der LKW führten daraufhin eine Fahrt je Stunde mehr durch als vorher und konnten so den Transport termingemäß beenden. Berechnen Sie, in wieviel Stunden die gesamte Last transportiert worden ist und wieviel Fahrten je Stunde die LKW anfangs durchführten, wenn die 1,5tonner je Stunde eine Fahrt mehr durchführten als die 3tonner!

498. Ein Sportplatz hat die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen a Meter und b Meter. Der Platz wird von einer Aschenbahn umgeben. Die äußere Begrenzung hat die Form eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu denen des Sportplatzes verlaufen. Gleichzeitig bildet die Aschenbahn die Begrenzung des Sportplatzes. Die Fläche der Aschenbahn ist gleich der Fläche des Sportplatzes. Bestimmen Sie die Breite der Aschenbahn!

499. In einem Zuschauerraum befinden sich a Sitzplätze, die in Reihen mit jeweils gleicher Sitzplatzzahl angeordnet sind. Fügt man in jeder Reihe b Sitzplätze hinzu und vermindert die Anzahl der Reihen um c, so vergrößert sich die Gesamtsitzplatzzahl im Zuschauerraum um ein Drittel gegenüber der ursprünglichen. Wieviel Plätze waren in jeder Reihe?

500. Zwei Körper, die sich in einer Entfernung von d Metern voneinander befinden, bewegen sich aufeinander zu und treffen sich nach a Sekunden. Wenn sie sich mit unveränderter Geschwindigkeit in die gleiche Richtung bewegen, dann begegnen sie sich nach b Sekunden. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Bewegung eines jeden Körpers!

501. Von den Punkten A und B, die eine Entfernung von d Kilometern voneinander haben, fahren gleichzeitig ein Motorradfahrer und ein Radfahrer einander entgegen. Nach zwei Stunden begegnen sie sich und setzen ohne zu verweilen ihre Fahrt fort. Der Motorradfahrer kommt in B t Stunden früher an als der Radfahrer in A. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Motorradfahrers und die des Radfahrers!

502. Vom Punkt A nach dem Punkt B bewegt sich ein Fußgänger. Nach a Stunden fährt ihm von B aus ein Radfahrer entgegen und begegnet b Stunden nach seiner Abfahrt dem Fußgänger. Wieviel Zeit brauchen der Fußgänger und der Radfahrer, um den Weg von A nach B bzw. von B nach A zurückzulegen, wenn der Radfahrer c Stunden weniger benötigt als der Fußgänger?

503. Ein Zug A fährt mit einer Geschwindigkeit von v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ hinter einem Zug B, der mit einer Geschwindigkeit von v_1 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ fährt, her. Die Abfahrt des Zuges A ist so berechnet, daß beide Züge gleichzeitig am Bestimmungsbahnhof ankommen. Der Zug B mußte aber, nachdem er zwei Drittel des Weges zurückgelegt hatte, seine Geschwindigkeit um die Hälfte vermindern. Infolgedessen holte A den anderen schon a Kilometer vor dem Bestimmungsbahnhof ein. Bestimmen Sie die Entfernung der beiden Bahnhöfe A und B!

504. Ein Sparer erhält für sein Guthaben nach einem Jahr 15 Rubel Zinsen. Er zahlt noch 85 Rubel ein und läßt das Geld ein weiteres Jahr auf der Sparkasse. Nach Verlauf dieses Jahres besitzt er zusammen mit den Zinsen 420 Rubel. Wie groß war das ursprüngliche Guthaben, und wieviel Prozent Zinsen erhielt er?

505. Die Produktionskapazität einer Drehmaschine A betrug $m\%$ der Summe der Produktionskapazitäten der Drehmaschinen B und C. Die Kapazität der Drehmaschine B stellt $n\%$ der Summe der Kapazitäten der Drehmaschinen A und C dar. Wieviel Prozent stellt die Produktionskapazität der Drehmaschine C im Verhältnis zur Summe der Produktionskapazitäten der Drehmaschinen A und B dar?

506. Der Produktionszuwachs stellt im ersten Jahr (gegenüber dem vorhergehenden) $p\%$ dar, im zweiten Jahr $q\%$. Wieviel Prozent Produktionszuwachs muß man im dritten Jahr erreichen, damit der mittlere jährliche Produktionszuwachs $r\%$ beträgt?

507. Von einer bestimmten Warenmenge werden $a\%$ mit einem Gewinn von $p\%$ verkauft. Vom übrigbleibenden Teil werden $b\%$ mit einem Gewinn von $q\%$ verkauft. Mit welchem Gewinn verkauft man den ganzen noch übrigbleibenden Teil der Ware, wenn der Gesamtprozentsatz des Gewinns $r\%$ beträgt?

508. Zwei Legierungen mit verschiedenem Kupfergehalt wiegen m kg bzw. n kg. Von ihnen schneidet man jeweils ein Stück gleicher Masse ab. Jeder der abgeschnittenen Teile der einen Legierung wird mit dem übrigbleibenden Teil der anderen verschmolzen. Danach ist der prozentuale Anteil des Kupfers in beiden Legierungen gleich. Wieviel wiegt jeder der abgeschnittenen Teile?

509. Eine Geldsumme wurde in n Anteile aufgeteilt. Danach wird vom ersten Anteil der n-te Teil des sich dort befindenden Geldes auf den zweiten Anteil übertragen. Danach wird vom zweiten Anteil der n-te Teil des sich jetzt (nach dem ersten Hinüberlegen) dort befindenden Geldes auf den dritten Anteil gelegt. Danach wird der n-te Teil des Geldes, das sich nach dem letzten Hinüberlegen im dritten Anteil befand, auf den vierten gelegt usw. Schließlich wird vom n-ten Anteil der n-te Teil des Geldes, das sich nach dem letzten Hinüberlegen in diesem Anteil befand, auf den ersten Anteil gelegt. Danach befanden sich in jedem Anteil A Rubel. Wieviel Geld befand sich in jedem Anteil vor dem Hinüberlegen des Geldes? (Man kann sich den Fall z. B. für $n = 5$ veranschaulichen.)

LÖSUNGEN

1. Arithmetische Berechnungen

1. 6,5625	**2.** $29\frac{7}{12}$	**3.** $365\frac{5}{8}$
4. $3\frac{4}{15}$	**5.** $18\frac{1}{3}$	**6.** 50
7. 23,865	**8.** $36\frac{25}{72}$	**9.** 599,3
10. 84,075	**11.** 2,5	**12.** $2\frac{17}{21}$
13. 0,0115	**14.** $\frac{157}{280}$	**15.** $38\frac{15}{64}$
16. 6	**17.** 700	**18.** 100
19. 10	**20.** $7\frac{1}{2}$	**21.** 5
22. 3	**23.** $2\frac{3}{80}$	**24.** 5
25. $1\frac{17}{84}$	**26.** 10	**27.** 1
28. 1320	**29.** 11	**30.** 250
31. 4	**32.** 4000	**33.** 66
34. 2	**35.** 9,5	**36.** 0,09
37. $\frac{35}{48}$	**38.** 2	**39.** $-\frac{1}{16}$
40. $2\frac{1}{3}$	**41.** $\frac{1}{8}$	**42.** 1301
43. $-20,384$	**44.** 2,25	**45.** $1\frac{1}{8}$

2. Algebraische Umformungen

Vorbemerkungen

Wir bitten, bei der Lösung der folgenden Aufgaben (ab Aufgabe 62) die nachstehenden Erläuterungen zu beachten.

1. Die in den Aufgaben dieses Kapitels vorkommenden Wurzeln werden wie folgt definiert:

   (I) In $b = \sqrt[n]{a}$ sollen $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ sein.

   Der Exponent n soll eine natürliche Zahl sein.
   Im Original werden (entsprechend dem Gebrauch in der Sowjetunion) Wurzeln, die diesen Bedingungen genügen, „arithmetisch" genannt.
   Wir haben diesen Begriff nicht übertragen, da er in der deutschsprachigen Literatur nicht gebräuchlich ist. An allen entsprechenden Stellen wurden Hinweise auf (I) gegeben. (*Anm. d. Übers.*)

   Beispiel:
   Der Ausdruck $\sqrt[3]{-27}$ ist nicht erklärt, denn der Radikand ist negativ.

2. Die üblichen Wurzelgesetze sind nur dann allgemeingültig, wenn Wurzeln, die den Bedingungen (I) genügen, vorliegen. So ist z. B. die Gleichung $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$ nur für $x \geqq 0$ gültig, weil im Falle $x < 0$ die linke Seite nicht erklärt wäre.
   Die Bedingungen (I) erfordern bei Verwendung allgemeiner Zahlensymbole besondere Untersuchungen.
   In den Aufgaben 65 bis 71 bedingt die Natur der Aufgaben sofort die erforderlichen Einschränkungen, in anderen Aufgaben dagegen muß man die Forderungen, denen die Radikanden unterworfen sind, dem Text entnehmen.
   Man unterlasse nie, für die gefundenen Lösungen nachzuweisen, daß die Radikanden nichtnegativ sind.

3. Es soll hier noch besonders bemerkt werden, daß die Gleichung $\sqrt{x^2} = x$ nur für $x \geqq 0$ gilt. Ist $x < 0$, dann gilt statt dessen $\sqrt{x^2} = -x$ $(x < 0)$. Wenn wir beide Aussagen zusammenfassen wollen, dann müssen wir $\sqrt{x^2} = |x|$ schreiben.

Zum Beispiel gilt für $x = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}$.

$\sqrt{(-3)^2}$ ist eine Wurzel im Sinne von (I), denn der Radikand ist positiv. Die Gleichung $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ist richtig.

Diese Ausführungen werden durch die folgenden Beispiele erläutert.

Beispiel 1:

Der Ausdruck $\sqrt{m^2 - 2mn + n^2}$ soll vereinfacht werden.

Die Lösung

$$\sqrt{m^2 - 2mn + n^2} = \sqrt{(m-n)^2} = m - n$$

gilt nur dann, wenn $m \geqq n$ ist.

Ist dagegen $m < n$, dann wird

$$\sqrt{m^2 - 2mn + n^2} = -(m - n)$$

oder

$$\sqrt{m^2 - 2mn + n^2} = n - m.$$

Zusammengefaßt gilt:

$$\sqrt{m^2 - 2mn + n^2} = |m - n| = |n - m|.$$

Beispiel 2:

Der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{4 + 4p + p^2} - \sqrt{4 - 4p + p^2}}{\sqrt{4 + 4p + p^2} + \sqrt{4 - 4p + p^2}}$$

ist zu vereinfachen. Der Kürze halber soll dieser Ausdruck mit A bezeichnet werden, also

$$A = \frac{|2 + p| - |2 - p|}{|2 + p| + |2 - p|} = \frac{1 - \left|\frac{2 - p}{2 + p}\right|}{1 + \left|\frac{2 - p}{2 + p}\right|}.$$

Da bei dieser Umformung durch $|2 + p|$ dividiert wurde, muß $|2 + p| \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen A vereinfacht werden kann.

Für $\frac{2 - p}{2 + p} > 0$ erhält man

$$A = \frac{1 - \frac{2 - p}{2 + p}}{1 + \frac{2 - p}{2 + p}} = \frac{p}{2}.$$

Wenn dagegen $\frac{2-p}{2+p} < 0$ gilt, erhält man

$$A = \frac{1 + \frac{2-p}{2+p}}{1 - \frac{2-p}{2+p}} = \frac{2}{p}.$$

Der Fall $\frac{2-p}{2+p} > 0$ ist nur möglich, wenn entweder

a) Zähler und Nenner gleichzeitig positiv oder
b) Zähler und Nenner gleichzeitig negativ sind.

zu a) Die Forderungen $2 - p > 0$ und $2 + p > 0$ sind für $-2 < p < 2$ erfüllt.
zu b) Die Forderungen $2 - p < 0$ und $2 + p < 0$ lassen sich nicht gleichzeitig verwirklichen, denn $2 - p < 0$ gilt für $p > 2$ und $2 + p < 0$ dagegen für $p < -2$.

Also gilt $A = \frac{p}{2}$ für $|p| < 2$.

Der andere Fall $\frac{2-p}{2+p} < 0$ tritt nur ein, wenn Zähler und Nenner entgegengesetzte Vorzeichen haben.
Diese Forderung wird sowohl durch $p > 2$ als auch durch $p < -2$ erfüllt.

Also gilt $A = \frac{2}{-}$ für $|p| > 2$.

Ist $|p| = 2$, so erhält man aus $A = \frac{|2+p| - |2-p|}{|2+p| + |2-p|}$

$$A = 1 \quad (p = 2)$$

oder

$$A = -1 \quad (p = -2).$$

Beispiel 3:
Die Gleichung $\sqrt{a^6} = a^3$ ist nur richtig für $a \geqq 0$.
Für $a < 0$ erhält man an Stelle der vorigen Gleichung

$$\sqrt{a^6} = -a^3.$$

So gilt für $a = -1$: $\sqrt{(-1)^6} = -(-1)^3 = 1$.
In diesem Beispiel ist $\sqrt{(-1)^6}$ eine Wurzel gemäß (I), denn der Radikand $(-1)^6 = 1$ ist positiv.

Beispiel 4:
Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen für a der Wurzelausdruck

$$\sqrt{(a-5)^6 (a-3)^3}$$

vereinfacht werden kann.

Der Wurzelwert ist nur reell, wenn $a \geqq 3$ ist. Für $a < 3$ ist die Potenz $(a-3)^3$ und damit auch der Radikand negativ, da der andere Faktor $(a-5)^6$ stets nichtnegativ ist. Wollen wir teilweise radizieren, müssen wir diese Bedingung verschärfen:

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3} = (a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3} \quad (a \geqq 5).$$

Für $3 \leqq a < 5$ müssen wir schreiben

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3} = -(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3} \quad (3 \leqq a < 5).$$

Zusammenfassend gilt:

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3} = |a-5|^3(a-3)\sqrt{a-3} \quad (a \geqq 3).$$

4. Die Gleichung $\sqrt[n]{x^n} = x$ gilt allgemein für $x \geqq 0$. Ist n gerade, dann ist die Gleichung $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ für jedes reelle x gültig. Ist n ungerade, dann ist die Wurzel $\sqrt[n]{x^n}$ für $x < 0$ nicht erklärt.

Lösungen

46. Der Dividend läßt sich vereinfachen:

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b-c)^2$$
$$= (a+b-c)(a-b+c).$$

Für die Aufgabe heißt das:

$$(a+b-c)(a-b+c)\cdot\frac{a+b+c}{a+b-c} = (a+c)^2 - b^2.$$

Lösung: $(a+c)^2 - b^2$

Nach dem Einsetzen: $139\,\frac{91}{225}$

47. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}} - 1 = \dfrac{1}{n-1}$

Im Zähler und Nenner des folgenden Bruches erweitert man mit (-1) und formt den Zähler zu einem Produkt um:

$$\frac{-a + an^3 + n^4 - n}{a^2 - 1} = \frac{(a+n)(n-1)(n^2+n+1)}{a^2-1}.$$

Lösung: $\dfrac{n^2+n+1}{n}$

48. Der Nenner des zweiten Bruches ist gleich $(1 + x)(x - 2a)$. Der Ausdruck in der Klammer ist gleich $1 + x$.

Folglich gilt: $\dfrac{x}{a(x - 2a)} - \dfrac{2}{(x - 2a)(1 + x)}(1 + x) = \dfrac{1}{a}$.

Lösung: $\dfrac{1}{a}$

49. Der Lösungsweg wird analog zu dem in Aufgabe 48 aufgebaut.

Lösung: $\dfrac{1}{a + 2x}$

50. Erweitert man den zweiten Summanden der Klammer mit (-1) und bringt alle Summanden der ersten Klammer auf den Hauptnenner, so erhält man:

$$\frac{-3(2a^2 + 9a + 10)}{a(3a - 1)}.$$

Setzt man nun den zweiten Faktor des Zählers gleich Null, so ergeben sich die Wurzeln $a_1 = -2$ und $a_2 = -\frac{5}{2}$.

Demzufolge gilt: $2a^2 + 9a + 10 = 2(a + 2)\left(a + \frac{5}{2}\right)$.

Es ergeben sich also die Teilergebnisse

(I) $$\frac{-3(a + 2)(2a + 5)}{a(3a - 1)}$$

und

(II) $$\frac{3a^3 + 8a^2 - 3a}{1 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{4a(a + 3)(3a - 1)}{(2 + a)(2 - a)}.$$

Nun werden (I) und (II) miteinander multipliziert.

Lösung: $\dfrac{12(2a + 5)(a + 3)}{a - 2}$

51. Jeder Bruch kann zunächst gekürzt werden.

Lösung: $\dfrac{ab}{a + b}$

52. Der Nenner des zweiten Bruches wird in ein Produkt zerlegt

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y),$$

und anschließend kann man kürzen.

Lösung: $\dfrac{1}{x + y}$

53. Die Nenner der Brüche erhalten nach Vereinfachung die Form

$$\frac{4(x^2 + x + 1)}{3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4(x^2 - x + 1)}{3}.$$

Dann gilt: $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x^2 + x + 1} + \dfrac{1}{x^2 - x + 1}\right) = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - x^2}.$

Lösung: $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$

54. Die Nenner der ersten vier Brüche werden in Produkte zerlegt und der erste Bruch durch $(a - 1)$ gekürzt.
Der Klammerausdruck erhält dann die Form:

$$\frac{1}{a - 1} + \frac{2(a - 1)}{(a + 2)(a - 2)} - \frac{4(a + 1)}{(a - 1)(a + 2)} +$$
$$+ \frac{a}{(a - 1)(a - 2)} = \frac{2(a + 3)}{(a - 1)(a + 2)(a - 2)}.$$

Für die sich anschließende Multiplikation mit $\dfrac{36a^3 - 144a - 36a^2 + 144}{a^3 + 27}$

ist es zweckmäßig, auch bei diesem Bruch Zähler und Nenner in Produkte zu zerlegen. Im Nenner geht man hierzu von der Summe $a^3 + 3^3$ aus. Man erhält

$$\frac{36(a - 1)(a + 2)(a - 2)}{(a + 3)(a^2 - 3a + 9)}.$$

Lösung: $\dfrac{72}{a^2 - 3a + 9}$

55. Bezeichnet man die Summe der Brüche der ersten Klammer mit A und formt alle Zähler und Nenner in Produkte um, so erhält man:

$$A = \frac{3(x + 2)}{2(x + 1)(x^2 + 1)} + \frac{(x + 2)(2x - 5)}{2(x - 1)(x^2 + 1)}.$$

Man kann nun $\frac{x+2}{2(x^2+1)}$ ausklammern und findet:

$$A = \frac{x+2}{2(x^2+1)} \cdot \left(\frac{3}{x+1} + \frac{2x-5}{x-1}\right) = \frac{(x+2)(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}.$$

Analog erhält man für die Summe der Brüche in der zweiten Klammer, die im folgenden mit B bezeichnet wird:

$$B = \frac{2(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}.$$

Dividiert man A durch B, so erhält man die

Lösung: $\frac{x+2}{2}$.

56. Der Dividend sei A, der Divisor B.
Setzt man das Polynom $x^2 - xy - 2y^2$ gleich Null und löst diese Gleichung nach einer Unbekannten, z. B. nach x, auf, dann erhält man:

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$x_1 = -y$$

$$x_2 = 2y.$$

Folglich gilt: $x^2 - xy - 2y^2 = (x+y)(x-2y)$.
Man formt um und erhält:

$$A = \frac{2x^2 + y - 2}{(2y-x)(x+y)}.$$

In B schreibt man den Zähler als Produkt, wobei man zunächst $(2x^2 + y)^2 - 4$ und dann nach der 3. binomischen Formel $([2x^2 + y] + 2)([2x^2 + y] - 2)$ bilden kann.
Also gilt

$$B = \frac{(2x^2 + y + 2)(2x^2 + y - 2)}{(x+y)(x+1)}.$$

Dividiert man A durch B, so erhält man die

Lösung: $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

57. Man stellt die Polynome als Produkte dar und erhält:

$$\frac{(a+2)(a+1)}{a^n(a-3}\left(\frac{4(a+1)}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right).$$

Lösung: $\dfrac{a+2}{a^{n+1}}$

58. Der Dividend sei A, der Divisor B. Der Zähler des Bruches von A läßt sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\frac{1}{2}[4a^2(b+c)^{2n}-1]=\frac{1}{2}[2a(b+c)^n+1][2a(b+c)^n-1].$$

Der Nenner wird in ähnlicher Weise umgeformt:

$$a(n^2-a^2-2a-1)=a[n^2-(a+1)^2]=a(n+a+1)(n-a-1).$$

Im Bruch von B wird der Zähler nicht verändert. Im Nenner wird $-ac$ ausgeklammert: $-ac(n-a-1)$.

Lösung: $\dfrac{[2a(b+c)^n+1]\,c}{2(n+a+1)}$

59. *Erster Lösungsweg:*

Zunächst werden alle Brüche auf den Hauptnenner gebracht:

$$\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}. \tag{1}$$

Man multipliziert dann im Zähler die Faktoren aus und im Nenner die Binome und erhält:

$$\frac{a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2}{abc(a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2)}.$$

Lösung: $\dfrac{1}{abc}$

Zweiter Lösungsweg:

Im Zähler des Bruches (1) wird $a=b$ gesetzt. Der Zähler nimmt dann den Wert Null an. Der Zähler muß sich also durch $(a-b)$ dividieren lassen.
Man findet für den Quotienten

$$a(b-c)-c(b-c)=(b-c)(a-c).$$

Also muß der ganze Zähler die Form

$$(a - b)(b - c)(a - c)$$

haben.

Dritter Lösungsweg:

Es werden nur die ersten beiden Brüche gleichnamig gemacht:

$$\frac{b^2 - bc - a^2 + ac}{ab(a - b)(a - c)(b - c)}.$$

Man faßt die Glieder zusammen und klammert aus (erstes und drittes, zweites und viertes Glied):

$$(b + a)(b - a) - c(b - a) = (a - b)(c - a - b).$$

Den Ausdruck dividiert man durch $(a - b)$ und addiert schließlich den dritten Bruch.

Lösung: $\dfrac{1}{abc}$

60. Den ersten Faktor formt man um in $\dfrac{a + x + 1}{a + x - 1}$, den zweiten Faktor in

$$\frac{(a + x)^2 - 1}{2ax} = \frac{(a + x + 1)(a + x - 1)}{2ax}.$$

Als Produkt erhält man: $\dfrac{(a + x + 1)^2}{2ax}$.

Durch die Substitution $x = \dfrac{1}{a - 1}$ nimmt der Zähler die Form $\dfrac{a^4}{(a - 1)^2}$ an, und der Nenner ist gleich $\dfrac{2a}{a - 1}$.

Lösung: $\dfrac{a^3}{2(a - 1)}$

61. Bezeichnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer, also den Dividenden, mit A und den Divisor mit B, so erhält man: $A : B^{-1} = A \cdot B$. In A können die Potenzen mit negativem Exponenten beseitigt werden. Man erhält:

$$A = \frac{2b^2 - 3ab - 2a^2}{a(a + 2b)(2b - a)} = \frac{(b - 2a)(2b + a)}{a(a + 2b)(2b - a)} = \frac{b - 2a}{a(2b - a)},$$

und analog in B:

$$B = a^n\left(2b + 3a - \frac{6a^2}{2a - b}\right) = a^n \frac{b(a - 2b)}{2a - b}.$$

Schließlich findet man: $A \cdot B = a^{n-1}b$.
Lösung: $a^{n-1}b$

62. Der Zähler nimmt die Form $a^2 - b^2$ an, der Nenner ergibt $a + b$.

Lösung: $a - b$

Bemerkung: Damit die Wurzeln den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen genügen, dürfen die Zahlen a und b nicht negativ sein.

63. Die erste Wurzel wird umgeformt in $\sqrt[3]{(a-b)^3 (a+b)^2}$. Man kann partiell radizieren und erhält $(a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2}$.

Lösung: $b(a^3 - b^3)$

Bemerkung: Man muß voraussetzen, daß $a \geqq b$ ist, anderenfalls sind die Bedingungen (I) der Vorbemerkungen nicht erfüllt.

64. In den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen forderten wir für jede Wurzel, daß ihr Radikand nicht negativ ist. Berücksichtigt man diese Forderung, so sind die Wurzeln $\sqrt{6x}$ und $\sqrt{2x}$ nur für $x \geqq 0$ definiert. Daher wird der Wert der Differenz

$$2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x} = \sqrt{24x} - \sqrt{32x} \leqq 0.$$

Also ist die Wurzel $\sqrt[3]{2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x}}$ für kein reelles $x \neq 0$ erklärt.

Da der Radikand der ersten Wurzel den Faktor x enthält, muß er gleichfalls Null sein, so daß der vorgegebene Ausdruck nur den Wert Null annehmen kann.

Lösung: 0

65. Die erste Wurzel wird umgeformt in $\sqrt[4]{(a+1)^4 (a-1)}$. Man kann partiell radizieren und erhält $|a+1|\sqrt[4]{a-1}$.

Der ganze Ausdruck lautet: $\dfrac{a}{2}|a+1|\sqrt[4]{a-1} \cdot \dfrac{\sqrt{a-1}}{(a+1)(a+2)}$.

Man kann also schreiben: $\dfrac{a|a+1|\sqrt[4]{(a-1)^3}}{2(a+1)(a+2)}$.

Wenn $a + 1$ positiv ist, dann ist $|a+1| = a + 1$. Man erhält durch Kürzen

$\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a+2}$.

Bemerkung: Die Zahl $a + 1$ wird tatsächlich positiv: Den Radikanden $(a + 1)^4 (a - 1)$ muß man als positiv (oder gleich Null) voraussetzen. Das Produkt $(a + 1)^4$ kann in keinem Falle negativ sein, also muß auch $a - 1 \geqq 0$ gelten, d. h. $a \geqq 1$. Für den Ausdruck $a + 1$ gilt danach $a + 1 \geqq 2$.

Lösung: $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a+2}$

66. Man setzt voraus, daß alle Wurzeln nichtnegative Radikanden aufweisen und wendet auf den zweiten Faktor folgende Umformung an:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9 + 18a^{-1} + 9a^{-2}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}a^2}{9(1+a)^2}}.$$

Nun macht man die beiden Wurzeln gleichnamig.
Die Wurzeln lauten dann:

$$\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}} = \sqrt[6]{\frac{(1+a)^3\,(1+a)}{27a^3}} = \sqrt[6]{\frac{(1+a)^4}{27a^3}}$$

bzw.

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}a^2}{9(1+a)^2}} = \sqrt[6]{\frac{3a^4}{81(1+a)^4}}.$$

Multipliziert man beide miteinander, so ergibt sich $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$.

Hinweis:

(Vergleichen Sie bitte mit den Bedingungen (I) in den Vorbemerkungen!)

Für $a < -1$ ist die erste Wurzel nicht erklärt.

Für $a = -1$ ist der Radikand der zweiten Wurzel nicht erklärt (Division durch Null).

Für $-1 < a < 0$ ist die erste Wurzel nicht erklärt.

Für $a = 0$ sind beide Radikanden nicht erklärt (Division durch Null).

Folglich kann a in dieser Aufgabe nur positiv sein.

Lösung: $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$

67. Das Produkt *ab* bringt man unter das erste Wurzelzeichen. Man erhält

$$\sqrt[n]{a-b}\,\frac{1}{\sqrt[n]{a-b}} = 1.$$

Hinweis: Man erhält Wurzeln gemäß den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen, wenn $a \geqq b$ ist. Der Fall $a = b$ muß ausgeschlossen werden, da der zweite Faktor nicht definiert ist (Division durch Null).

Lösung: 1

68. Man macht die Nenner rational und erhält:

$$(\sqrt{6} - 11)(\sqrt{6} + 11) = -115.$$

Lösung: -115

69. Der Dividend ist gleich $\dfrac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{b}$,

der Divisor gleich $\dfrac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$,

folglich ergibt sich für den Wert des Quotienten

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b}.$$

Damit alle Wurzeln nichtnegative Radikanden haben, müssen drei Bedingungen gelten: $a \geqq 0$, $a - b \geqq 0$, $a + b \geqq 0$.

Man kann sie zu zwei Bedingungen zusammenfassen:

$$a \geqq 0, \ |b| < |a|.$$

Lösung: $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b}$

70. Der Dividend ist gleich $\dfrac{2b}{b^2 - a}$, der Divisor $\dfrac{3b}{b^2 - a}$.

Folglich ist der Wert des Quotienten gleich $\dfrac{2}{3}$.

Die Zahl a kann beliebig positiv sein, b ist beliebig wählbar, jedoch ungleich $\pm\sqrt{a}$.

Lösung: $\dfrac{2}{3}$

71. Der Zähler des ersten Bruches läßt sich vereinfachen:

$$\frac{(\sqrt{1+a})^2+(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{|1+a|+|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Wenn $1 + a$ und $1 - a$ beide positiv sind, dann ist der Wert des Bruches gleich

$$\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}.$$

(Vergleichen Sie mit den Bedingungen (I) in den Vorbemerkungen!)

Für diesen Fall ist der Nenner gleich

$$\frac{|1+a|-|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Der Bruch ist also gleich $\frac{1}{a}$, der ganze Ausdruck muß also gleich Null sein.

Lösung: 0

Hinweis: Um Wurzeln zu erhalten, die den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen genügen, müssen die Ausdrücke $1 + a$ und $1 - a$ die gleichen Vorzeichen besitzen. Es ist aber nicht möglich, daß beide negativ werden, denn dann wäre $1 + a < 0$ und damit $a < -1$. Wäre dagegen $1 - a < 0$, dann müßte $a > 1$ sein. Beide Bedingungen sind also nicht gleichzeitig zu erfüllen. Sind beide Ausdrücke positiv, so gilt für a die Bedingung $-1 < a < 1$, d. h. $|a| < 1$. (Die Werte $a = \pm 1$ entfallen, da man in jeweils einem der Brüche $\frac{1+a}{1-a}$ oder $\frac{1-a}{1+a}$ im Nenner den Wert 0 erhält. Der Wert $a = 0$ entfällt ebenfalls, da der Bruch $\frac{1}{a}$ in der Aufgabe auftritt.)

72. Setzt man $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ in den Ausdruck $\sqrt{x^2-1}$, so erhält man:

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|a-\frac{1}{a}\right|.$$

Wenn $a \geqq 1$ ist, dann ist auch $a-\frac{1}{a}\geqq 0$.

Deshalb ist $\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$.

Analog dazu erhält man:

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right).$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man die

Lösung: $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2b^2 + 1}$.

73. Setzt man $x = \dfrac{2am}{b(1 + m^2)}$ in die Ausdrücke $\sqrt{a + bx}$ und $\sqrt{a - bx}$ ein, so erhält man:

$$\sqrt{a + bx} = \sqrt{a + \frac{2am}{1 + m^2}} = |1 + m| \cdot \sqrt{\frac{a}{1 + m^2}}.$$

$$\sqrt{a - bx} = |1 - m| \cdot \sqrt{\frac{a}{1 + m^2}}.$$

Der Ausdruck $1 + m^2$ ist für jedes m positiv. Also muß auch a positiv sein, damit der Radikand $\dfrac{a}{1 + m^2}$ den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen genügt.

Für $a < 0$ genügen die Radikanden den Bedingungen nicht.

Für $a = 0$ sind die Radikanden gleich Null, und der gegebene Ausdruck ist unbestimmt.

Für den Fall $|m| < 1$ sind die beiden Ausdrücke $1 + m$ und $1 - m$ positiv, und man erhält:

$$\frac{(1 + m)\sqrt{\dfrac{a}{1 + m^2}} + (1 - m)\sqrt{\dfrac{a}{1 + m^2}}}{(1 + m)\sqrt{\dfrac{a}{1 + m^2}} - (1 - m)\sqrt{\dfrac{a}{1 + m^2}}} = \frac{1}{m}.$$

Lösung: $\dfrac{1}{m}$ (für $a > 0$ und $|m| < 1$)

74. Analog zur Aufgabe 73 erhält man:

$$(m - x)^{\frac{1}{2}} = \left(m - \frac{2mn}{n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(n - 1)^2}}{\sqrt{n^2 + 1}} = m^{\frac{1}{2}} \frac{|n - 1|}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Für $n < 1$ gilt

$$(m - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{1}{2}}(1 - n)}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Analog dazu

$$(m + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{1}{2}}(1 + n)}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Lösung: $\frac{1}{n}$

75. Setzt man $x = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}$ in den Ausdruck $1 - x^2$ ein, so erhält man

$$1 - x^2 = \frac{(1 + k)^2 - 4k}{(1 + k)^2} = \frac{(1 - k)^2}{(1 + k)^2}.$$

Nun wird mit $-\frac{1}{2}$ potenziert:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{|1 + k|}{|1 - k|}.$$

Für $k > 1$ ist der Wert $1 + k$ positiv und der Wert $1 - k$ negativ. Man muß also schreiben:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + k}{k - 1}.$$

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer lautet demnach $\frac{k}{k - 1}$, der in der zweiten eckigen Klammer $\frac{1}{k - 1}$.

Als Summe erhält man dann:

$$\left(\frac{k}{k - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{k - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k - 1}}{\sqrt{k}} + \sqrt{k - 1}.$$

Lösung: $\sqrt{k - 1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

76. Der Ausdruck in der ersten Klammer ist gleich $\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a}$. (Der Exponent -2 bezieht sich nur auf den Zähler des dritten Bruches.) Nach einer Umformung erhält man $\frac{-(a-1)^2}{4a}$ oder $\frac{(1-a)^2}{4a}$.

Die Ausdrücke

$$\sqrt[3]{(a+1)^{-3}} = \frac{1}{a+1} \quad \text{und} \quad (a+1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(a+1)^3}$$

genügen den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen nur für $a > -1$. Unter den obengenannten Bedingungen genügt auch die Wurzel

$$\sqrt{(a^2-1)(a-1)} = \sqrt{(a-1)^2(a+1)}$$

den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen, denn $(a-1)^2$ kann nur positiv sein.

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = (a-1)\sqrt{a+1}$$

gilt nur für $a \geqq 1$. Dagegen muß man für $-1 < a < 1$ schreiben:

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = -(a-1)\sqrt{a+1}.$$

Der ganze Ausdruck lautet also:

$$-\frac{(a-1)^2}{4a}\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}\right).$$

Bemerkung: Für $a = \pm 1$ ist der Ausdruck nicht definiert.

Lösung: $\frac{a-1}{a+1}$ für $a > 1$; $\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(a+1)}$ für $-1 < a < 1$, d. h. für $|a| < 1$.

77. Der Ausdruck läßt sich vereinfachen:

$$2\left(\sqrt{x^2(x^2-a^2)} - a^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2ax\sqrt{\left(\frac{x}{a} - 2\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Setzt man voraus, daß $x^2 - a^2 > 0$ ist, dann ist $|x| > |a|$. Für den Fall $|x| < |a|$ genügt die Wurzel $\sqrt{x^2 - a^2}$ nicht den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen. Für $|x| = |a|$ ist der Subtrahend der Klammer nicht erklärt.

Den ersten Faktor des Ausdrucks kann man umformen und erhält

$$2|x|\frac{|x^2-a^2|-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = 2|x|\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

denn wenn $x^2 - a^2 > 0$ ist, dann ist $|x^2 - a^2| = x^2 - a^2$.

Der Ausdruck $\sqrt{\left(\frac{x}{a} - 2\frac{a}{x}\right)^2}$ läßt sich ebenfalls vereinfachen:

$$\sqrt{\left(\frac{x^2-2a^2}{ax}\right)^2} = \frac{|x^2-2a^2|}{|a|\cdot|x|}.$$

Hierbei kann man den Zähler als $x^2 - 2a^2$ schreiben, muß aber voraussetzen, daß $x^2 - 2a^2 \geqq 0$ ist, d. h. $|x| \geqq |a|\sqrt{2}$. Der ganze Ausdruck lautet also jetzt:

$$2|x|\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,|a|\,|x|}{2ax|x^2-2a^2|}.$$

Führt man die Beziehung $|x|\cdot|x| = |x|^2 = x^2$ ein, so erhält man

$$\frac{x^2-2a^2}{a}\cdot\frac{|a|}{|x^2-2a^2|}x = \frac{x^2-2a^2}{a}\cdot\left|\frac{a}{x^2-2a^2}\right|x.$$

Lösung: Für $|x| > |a|$ ist der Ausdruck gleich $\pm x$.

Das positive Vorzeichen für x gilt, wenn $\frac{x^2-2a^2}{a} > 0$ ist, das negative Vorzeichen, wenn $\frac{x^2-2a^2}{a} < 0$ ist.

Wenn $\frac{x^2-2a^2}{a} = 0$ ist, d.h., wenn $|x| = |a|\sqrt{2}$ ist, dann erhält man einen unbestimmten Ausdruck.

78. Man schreibt zunächst die Summanden im Zähler und im Nenner mit positiven Exponenten.

Der Zähler ergibt: $\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2ab.$

Der Nenner ergibt: $2ab\left(\frac{1}{a+\sqrt{ab}} + \frac{1}{b+\sqrt{ab}}\right).$

Im Nenner werden danach folgende Umformungen vorgenommen:

$$a + \sqrt{ab} = \sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \text{und}$$

$$b + \sqrt{ab} = \sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Dadurch kann der Nenner vereinfacht werden:

$$2ab\left(\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}\right) = \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

Lösung: $\sqrt{ab}$

79. Der Ausdruck in der ersten Klammer läßt sich vereinfachen:

$$\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a + x}\,(\sqrt{a} + \sqrt{x})}.$$

Potenziert man den Ausdruck mit -2, so erhält man $\dfrac{(a + x)\,(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{4ax}$.

Analog dazu kann man den Ausdruck in der zweiten Klammer vereinfachen:

$$\frac{(a + x)\,(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{4ax}.$$

Nun wird $\dfrac{a + x}{4ax}$ ausgeklammert, und man erhält:

$$\frac{a + x}{4ax}\,[(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2] = \frac{a + x}{4ax} \cdot 4\sqrt{ax}$$

und schließlich die

Lösung: $\dfrac{a + x}{\sqrt{ax}}$.

80. Der zweite Summand läßt sich umformen:

$$\frac{a}{2\sqrt{x^2 + a}}.$$

Im ersten Summanden macht man die Brüche gleichnamig und erhält

$$\frac{2x^2 + a}{2\sqrt{x^2 + a}}.$$

Die ganze Summe ist also gleich $\dfrac{2(x^2+a)}{2\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a}$.

Lösung: $\sqrt{x^2+a}$

81. *Lösung:* $2(x+\sqrt{x^2-1})$

82. Als Basis der dritten Potenz erhält man:

$$a^{-\frac{3}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{4}{3}}b^2.$$

Potenziert man diesen Ausdruck $a^{-\frac{4}{3}}b^2$ mit 3, so erhält man $a^{-4}b^6$.

Nach dem Einsetzen von $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ und $b = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ ergibt sich als

Lösung: 1.

83. Den Ausdruck kann man umformen in $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1}$.

Nun werden in den Werten für a und b die Nenner rational gemacht:

$$a = (2+\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

bzw.

$$b = (2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Folglich gelten $a+1 = 3-\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ usw.

Lösung: 1

84. *Lösung:* $\sqrt{x^2-4x}$

85. *Lösung:* n

86. Damit alle Wurzeln den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen genügen, muß $x - a^2 > 0$ sein.
Der Ausdruck in der Klammer ergibt nach der Umformung:

$$-\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}{a^2}.$$

Das Produkt kann man vereinfachen:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\left(-\frac{a^2}{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}\right) = -\frac{a^2}{4(x-a^2)}.$$

Lösung: $\dfrac{a^2}{4(x-a^2)}$

87. Der Nenner des zweiten Bruches ist gleich

$$x^{\frac{3}{2}} - 1 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 1 = \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x + x^{\frac{1}{2}} + 1\right).$$

Nach dem Kürzen erhält man die

Lösung: $x - 1$.

88. Der Dividend läßt sich umformen in

$$2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(3y^{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{5}}\right)\left(2 - 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{5}} + 9y^{\frac{2}{5}}\right).$$

Der Divisor ist gleich $2^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{5}}$.

Lösung: $2 - 3\sqrt[10]{32y^2} + 9\sqrt[5]{y^2}$

89. Um die negativen Exponenten im zweiten Summanden zu beseitigen, wird mit a^2 erweitert. Im Zähler erhält man dann $a^3 - 1$ und im Nenner

$$a^2\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{3}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)\right] = a^{\frac{3}{2}}(a - 1).$$

Durch Kürzen vereinfacht sich der zweite Summand zu

$$\frac{a^2 + a + 1}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Analog dazu erhält man für den dritten Summanden:

$$\frac{a - 1}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Der ganze Ausdruck erhält also die Form:

$$\frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2 + a + 1}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{a - 1}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$0 \equiv 0.$$

Hinweis: Es muß hierbei $a \neq 0$ vorausgesetzt werden (*Anm. d. Übers.*).

90. Der Dividend ergibt: $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}(a - b)^{\frac{2}{3}}}$.

Der Divisor ergibt: $\dfrac{(a - b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)}$.

Nach der dritten binomischen Formel gilt:

$$\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right) = a^3 - b^3.$$

Es wird dividiert, und man erhält: $a^2 + ab + b^2$.

Lösung: $a^2 + ab + b^2$; mit $a = 1{,}2$ und $b = 0{,}6$ erhält man 2,52

91. Nach dem Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man im Dividenden

$$6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 9b = 3b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right).$$

Der Divisor ergibt: $a^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)$.

Der Quotient ist gleich $3\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Lösung: $3\sqrt{\frac{b}{a}}$; mit $a = 54$ und $b = 6$ erhält man 1

92. Der Bruch wird mit $\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]$ erweitert.
Im Zähler erhält man:

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right] = 2(a+b)^{-\frac{1}{2}},$$

und im Nenner:

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right] - \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right] = -2(a-b)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lösung: $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

93. Der Subtrahend ist ein Produkt aus zwei Faktoren. Der erste dieser Faktoren kann in $1 - a^2$ umgeformt werden. Der Ausdruck nimmt dann die folgende Form an:

$$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{(1-a^2)\left[(1-a^2)^{\frac{1}{2}} + a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{1-a^2}.$$

Nach dem Kürzen ergibt sich:

$$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}} - (1-a^2)^{\frac{1}{2}} - a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}} = -(1-a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lösung: $-\sqrt{1-a^2}$

94. Der Ausdruck ist gleich

$$\frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}(x + 1)(x^2 + 1)} - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}(x + 1)(x^2 + 1)} + \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^2)} = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}.$$

Lösung: $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

95. Der Zähler des dritten Summanden ergibt $R^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, der Nenner ist gleich R^2.
Der gesamte Ausdruck ist gleich

$$(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + R^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(R^2 - x^2) = 2(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lösung: $2\sqrt{R^2 - x^2}$

96. Der erste Summand ergibt $\dfrac{p + q}{pq\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)^2}$,
der zweite Summand ergibt nach Umformung

$$\frac{2\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)^3 p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)^2 p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man beide Ausdrücke ein, so erhält man:

$$\frac{p + q + 2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{pq\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Der Zähler des Ausdrucks ist gleich $\left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Lösung: $\dfrac{1}{pq}$

97. Die Wurzeln werden zunächst in Potenzen mit gebrochenen Exponenten umgewandelt.

Im Ausdruck $a + a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ klammert man $a^{\frac{2}{3}}$ aus, und im Ausdruck $x + a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ wird $x^{\frac{2}{3}}$ ausgeklammert. Man erhält als Zähler des ersten Bruches:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1 = \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Der Minuend in der eckigen Klammer ergibt:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Die eckige Klammer lautet also:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Lösung: $\dfrac{a^2}{x^4}$

98. Das Binom $a - \sqrt{ax}$ ergibt durch Ausklammern

$$\sqrt{a}\,(\sqrt{a} - \sqrt{x}).$$

Der Zähler des Bruches ergibt

$$(\sqrt{a} + 1)^2 - \sqrt{a} = a + \sqrt{a} + 1.$$

Der Nenner ist gleich $3(a + \sqrt{a} + 1)$.

Lösung: 27

99. Man schreibt die Potenzen so um, daß nur positive Exponenten auftreten. Der erste Summand ergibt $\dfrac{2a + 3}{a^{\frac{1}{2}}}$ (nach dem Kürzen durch $2a - 3$), der zweite ergibt $\dfrac{a - 3}{a^{\frac{1}{2}}}$ (nach dem Kürzen durch $a - 1$).

Lösung: $9a$

100. Der gemeinsame Faktor $(a - b)$ kann ausgeklammert werden. Die Radikanden $\dfrac{a + b}{a - b}$ können nicht negativ sein, da sie dann nicht den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen entsprechen.

Das Produkt ergibt also:

$$(a-b)^2\left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1\right]\left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right]$$

$$=(a-b)^2\left[\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2-1\right]$$

$$=(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

Lösung: $2b(a-b)$

101. Der Dividend ergibt $\dfrac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Der Divisor ergibt $\dfrac{\sqrt[4]{b}\,(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{a-b}$.

Man kann durch $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$ kürzen, wenn man folgendermaßen umformt:

$$\begin{aligned} a-b &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\ &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}). \end{aligned}$$

Lösung: $a\sqrt[4]{b}\,(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$

102. Nach Umformen des ersten und des zweiten Faktors erhält man:

$$\left[\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}}:\frac{a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Den Zähler des Dividenden kann man in Faktoren zerlegen. (Siehe Anmerkung zur Aufgabe 88!) Nach dem Kürzen erhält man als Wert des Klammerausdrucks:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

Lösung: $\sqrt[3]{(a-b)^2}$

103. Den Bruch $\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}$ kann man durch $\sqrt[3]{x}$ kürzen; man erhält $\dfrac{2}{x-4}$.
Der Ausdruck in der Klammer ergibt $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$.

Den Bruch kann man kürzen (dritte binomische Formel); man erhält $\sqrt{x}+2$.

Der ganze Ausdruck ergibt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)^{-2} - \sqrt{(x+4)^2} = (\sqrt{x}-2)^2 - |x+4|.$$

Setzt man voraus, daß $x > 0$ ist (das muß gewährleistet sein, denn $\sqrt[3]{x}$ genügt für $x < 0$ nicht den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen, für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert), so gilt auch: $x + 4 > 0$.

Man erhält demzufolge als

Lösung: $-4\sqrt{x}$.

104. Der Bruch in der eckigen Klammer ist gleich:

$$\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Der ganze Ausdruck ist also gleich:

$$x^3\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5 \sqrt[3]{x\sqrt{x}} = x^3 \cdot 32x^{-\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 32x.$$

Lösung: $32x$

105. Im Zähler des ersten Bruches klammert man $\sqrt[4]{ax}$ aus. Unter Berücksichtigung der Gleichung $\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{a^2} = \sqrt{x} - \sqrt{a}$ kann man dann den Bruch kürzen.

Der erste Faktor ergibt:

$$\left[-\sqrt[4]{ax} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2} = \sqrt{ax}.$$

Der zweite Faktor ergibt:

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}.$$

Da für $\sqrt{\frac{a}{x}}$ die Bedingungen (I) der Vorbemerkungen gelten, muß der Wert der Wurzel $1 + \sqrt{\frac{a}{x}}$ immer positiv sein.

Lösung: $\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

106. Die Werte von a und c müssen positiv sein, denn die Wurzeln müssen den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen genügen.

Der Nenner des ersten Bruches erhält die Form:

$$\sqrt{2(a-b^2)^2+8ab^2}=\sqrt{2(a+b^2)^2}=\sqrt{2}(a+b^2).$$

Der Zähler des ersten Bruches ist gleich $\sqrt{3}\,(a+b^2)$. Der zweite Bruch ist gleich $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{ac}$.

Lösung: $-\sqrt{ac}$

107. Der Minuend ergibt:

$$\left\{\sqrt{1+\left[a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right]}\right\}^{-6}=\frac{x^2}{a^2}.$$

Der Radikand des Subtrahenden ist gleich $(a^2+x^2)^2$ (der Ausdruck a^2+x^2 ist stets nichtnegativ).

Lösung: -1

108. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist gleich $\dfrac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

Potenziert man mit -2, erhält man $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{4\sqrt{x}}$.

Der Divisor ist nach dem Kürzen durch $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ gleich $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{4}$.

Lösung: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$

109. Im Zähler des Bruches klammert man $\sqrt[6]{x}$ aus und kürzt anschließend. Der ganze Ausdruck ergibt dann:

$$(2\sqrt[6]{x})^3+4x+4+(\sqrt{x}+1)^2=5x+10\sqrt{x}+5.$$

Lösung: $5\,(\sqrt{x}+1)^2$

110. Den ersten Bruch kürzt man durch $x^{-\frac{1}{3}}$ und erhält $\dfrac{3}{x-2}$. Den zweiten Bruch kürzt man durch $x^{\frac{1}{3}}$ und erhält $\dfrac{1}{x-1}$. Die weitere Rechnung ergibt dann:

$$\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}-\frac{3x-2}{1-2x}.$$

Lösung: $\dfrac{x^2}{2x-1}$

111. Der erste Faktor ist gleich $\dfrac{1}{a}$. Der zweite Faktor, der Ausdruck in der eckigen Klammer, lautet nach dem Quadrieren $2a^2 - 2ab$.

Lösung: $2(a-b)$

112. Die Differenz kann man umschreiben: $-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$.

Der Zähler des Bruches ergibt

$$3x-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=3x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right).$$

Der Nenner ist gleich:

$$-3a-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=-3a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right).$$

Der Wert des Bruches ist gleich: $-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

Der ganze Ausdruck ergibt $\left(-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^3+\sqrt{[(a+x)^3]^{\frac{2}{3}}:a}=1.$

Lösung: 1

113. Der Zähler des ersten Bruches ist gleich

$$\begin{aligned}a+2\sqrt{ab}-3b&=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}-3(\sqrt{b})^2\\&=(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}).\end{aligned}$$

Lösung: $\dfrac{1}{2b}$

114. Der Nenner des ersten Bruches in der Klammer ist gleich

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - 6\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right).$$

Der Nenner des zweiten Bruches in der Klammer ist gleich $\left(a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Man zerlegt die Zähler in Faktoren.

Lösung: $\dfrac{5}{a - 9b}$

115. Der Bruch in der Klammer wird durch $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ gekürzt. Dann zerlegt man den Zähler und den Nenner des ersten Bruches und erhält so

$$\frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{3\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3]} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Der zweite Bruch ist gleich $\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{a}(a - b)} = -\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

Lösung: 0

116. *Lösung:* 3

117. Man schreibt die Ausdrücke mit positiven Exponenten und wendet folgende Umformung an:

$$a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3.$$

Lösung: 1

118. Den ersten Summanden in der eckigen Klammer kann man folgendermaßen umformen:

$$\frac{1 - a^2}{\sqrt[3]{a}[(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a} + 1][(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a} + 1]}.$$

Den Zähler des Bruches kann man zerlegen in:

$$(1 - a)(1 + a) = [1 - (\sqrt[3]{a})^3][1 + (\sqrt[3]{a})^3].$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung betrachtet man als Differenz bzw. Summe von Kuben.

Lösung: a

119. Im Zähler des Bruches klammert man $\sqrt[3]{a}$ aus.

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer ist also gleich $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}$. Der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer ergibt $4(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2})$.

Lösung: $4(a - x)$

120. Der erste Summand des Dividenden ist gleich

$$\frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3]}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} = \sqrt{a}(a + \sqrt{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}).$$

Der Dividend kann nun umgeformt werden in

$$\sqrt{a}(a + 2\sqrt{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^2.$$

Der Divisor wird in den folgenden Ausdruck umgeformt:

$$\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}).$$

Führt man die Division aus und subtrahiert $\sqrt[3]{b}$, so erhält man die Basis $\sqrt{a}$.

Lösung: a

121. Der Nenner des Minuenden läßt sich umformen:

$$\sqrt{a}\sqrt[4]{x}(\sqrt{a} + \sqrt[4]{x}).$$

Der Zähler ist gleich $\sqrt{a}\sqrt[4]{x}[(\sqrt{a})^3 + (\sqrt[4]{x})^3]$.

Nach dem Kürzen erhält der Minuend die Form: $a - \sqrt{a}\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}$.

Der Subtrahend ist gleich

$$\sqrt{(a + \sqrt{x})^2} = |a + \sqrt{x}|.$$

Man kann für diesen Ausdruck $a + \sqrt{x}$ schreiben, da $a + \sqrt{x}$ stets ein positiver Wert ist. Um nämlich den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen und denen der Aufgabe zu genügen, müssen x und a positiv sein.

Lösung: a^2x

122. Die Faktoren im Nenner sind gleich $1 + \sqrt[4]{x}$ und $1 - \sqrt[4]{x}$. Im Zähler erhält man $-x(1 - \sqrt{x})$.

Lösung: $-x^3$

123. Der Zähler des Bruches in der eckigen Klammer läßt sich umformen:

$$\sqrt[4]{a^3}(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + b\sqrt[4]{b^2}(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})$$
$$= (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})\,[(\sqrt[4]{a})^3 + (\sqrt{b})^3]$$
$$= (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}\sqrt{b} + b).$$

Der ganze Ausdruck ergibt nach der Vereinfachung:

$$\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}\sqrt{b})^{-1} + \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b} - \sqrt[4]{a}}$$
$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt{b}} = 0.$$

Lösung: 0

124. Der Zähler des Minuenden läßt sich vereinfachen in:

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{a})^2 - (\sqrt[3]{x})^2} - \frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})^2} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}.$$

Lösung: $\sqrt[6]{a}$

125. Es ist zweckmäßig, zunächst nur die ersten beiden Brüche gleichnamig zu machen. Hierbei kann das Produkt der Nenner folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\left[\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right) + a^{\frac{1}{8}}\right]\left[\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right) - a^{\frac{1}{8}}\right] = \left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2 - a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} + 1.$$

Die Summe dieser beiden Brüche ist gleich

$$\frac{2\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} + 1}.$$

Nun wird von dieser Summe der dritte Bruch subtrahiert. Bei dieser Subtraktion lautet der Hauptnenner $a + a^{\frac{1}{2}} + 1$.

Lösung: $\dfrac{4}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1}$

126. Zunächst wird der erste Summand im Zähler vereinfacht:

$$\sqrt{\sqrt{2} - 1}\,\sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt{2} - 1)^2 (3 + 2\sqrt{2})} = 1.$$

Die analoge Umformung läßt sich im Nenner durchführen.

Man erhält auch im Nenner den Wert 1.

Der Radikand des zweiten Summanden im Zähler läßt sich als $(\sqrt{x} - 2)^3$ schreiben.

Den Bruch $\dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ kürzt man durch $\sqrt{x} - 1$.

Lösung: 1

127. Der Zähler des ersten Bruches ist gleich

$$a^2 \sqrt[6]{a^5b^3} + ab\sqrt[6]{a^5b^3} = a(a + b)\sqrt[6]{a^5b^3}.$$

Der Nenner ergibt $(b + a)(b - 2a)\sqrt[6]{a^3b^3}$.

Nach dieser Umformung ist der erste Bruch gleich $\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{b - 2a}$. Der Dividend in der runden Klammer ist gleich $\dfrac{3a^2}{(b - 2a)(3 - b)}$.

Man dividiert durch $\dfrac{a + b}{3a - ab}$ und erhält:

$$\frac{3a^3}{(b - 2a)(a + b)}.$$

Davon werden $\dfrac{ab}{a + b}$ subtrahiert. Es ergibt sich dabei

$$\frac{a(3a^2 + 2ab - b^2)}{(a + b)(b - 2a)} = \frac{a(3a - b)}{b - 2a}.$$

Wenn man nun die Subtraktion ausführt:

$$\frac{a\sqrt[3]{a}}{b - 2a} - \frac{a^{-\frac{2}{3}}a(3a - b)}{b - 2a},$$

so erhält man die

Lösung: $\sqrt[3]{a}$.

128. Durch Umformung erhält man für den ersten Faktor $\dfrac{2x + a}{2x - a}$ und für den zweiten Faktor $\sqrt{2x - a}$.

Lösung: $2x + a$

129. *Lösung:* $\sqrt{2}$

130. *Lösung:* $\dfrac{1}{x(x-1)}$

131. Der Minuend ist gleich $\dfrac{1}{a+b}$, der Subtrahend ist gleich $\dfrac{b}{(a+b)(a+2b)}$.

Lösung: $\dfrac{1}{a+2b}$

132. Der erste Summand ist gleich $\dfrac{a}{a+b}$, der zweite Summand gleich

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{2a+b}{a+b}.$$

Lösung: $\dfrac{a+b}{a}$

133. Der erste Summand ist gleich $\dfrac{a-b}{ab}$, der zweite Summand gleich $\dfrac{1}{a}$.

Lösung: $\dfrac{1}{b}$

134. *Lösung:* $\dfrac{2b-a}{2b+a}$

3. Algebraische Gleichungen

Vorbemerkung

Bei der Lösung der Aufgaben dieses Kapitels müssen wir den Einfluß der gegebenen Größen auf die Lösbarkeit der Gleichung untersuchen. Für besondere Werte der Zahlensymbole erhält man entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung oder einen nichtdefinierten Ausdruck (Division durch Null).
So erhalten wir z. B. in der Aufgabe 135 für $b = 0$ und für $b - a = 0$ einen nichtdefinierten Ausdruck, denn für $b = 0$ werden die Nenner auf beiden Seiten gleich Null, für $b - a = 0$ wird der Nenner des zweiten Summanden der rechten Seite gleich Null. Für $a = 0$ und $b \neq 0$ erhalten wir unendlich viele Lösungen, da die Gleichung eine Identität wird ($1 \equiv 1$).
Für $b = 3a \neq 0$ hat die Gleichung keine Lösung, denn wir erhalten $0 \cdot y = \frac{7}{18}$. Es existiert aber kein y, das diese Gleichung erfüllt.

135. Den Bruch $\frac{6b + 7a}{6b}$ kann man umformen in $1 + \frac{7}{6} \cdot \frac{a}{b}$.

Die Gleichung lautet dann:

$$\frac{a(b - 3a)}{2b^2(b - a)} y = \frac{7}{6} \cdot \frac{a}{b}.$$

Lösung: $y = \dfrac{7b(b - a)}{3(b - 3a)}$

Um sich jeweils von der Richtigkeit der gefundenen Lösung zu überzeugen, ist es notwendig, eine Probe durchzuführen. Dabei gilt es festzustellen, ob nach dem Einsetzen der gefundenen Werte für die Unbekannte eine Identität vorliegt. In diesem Buch wird jedoch im folgenden auf die Probe verzichtet (*Anm. d. Übers.*).

136. Man multipliziert die Gleichung mit dem Hauptnenner $a^2 - b^2$.

Lösung: $x = 0$

137. Man bildet

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 3 + \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b}$$

und multipliziert die Gleichung mit abc.

Folglich gilt:

$$x = \frac{3abc + ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}{ab + bc + ca}.$$

Diesen Bruch kann man kürzen. Dazu zerlegt man den Zähler in Faktoren und beachtet, daß

$$3abc = abc + abc + abc$$

ist, und fügt jedem der Summanden im Zähler einmal abc hinzu. Nachdem man ausgeklammert und gekürzt hat, erhält man die

Lösung: $x = a + b + c$.

Die Lösung kann man einfacher mit Hilfe des folgenden Verfahrens erhalten: Den Quotienten $\frac{x - a - b}{c}$ bringt man auf die Form $\frac{x - (a + b + c)}{c} + 1$ und verfährt analog bei den beiden anderen Quotienten der linken Seite. Dann nimmt die Gleichung die Form an:

$$[x - (a + b + c)]\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0.$$

138. Der Hauptnenner ist

$$6cd(2c + 3d)(2c - 3d).$$

Lösung: $z = \frac{c(4c^2 - 9d^2)}{8c^2 + 27d^2}$

139. Den Bruch $\frac{2n^2(1 - x)}{n^4 - 1}$ kann man in der Form $\frac{2n^2(x - 1)}{1 - n^4}$ schreiben. Man erhält so den gleichen Nenner, den auch der erste Bruch auf der rechten Seite der Gleichung hat. Den Bruch $\frac{x - 1}{n - 1}$ schreibt man in der Form $\frac{1 - x}{1 - n}$.

Nun wird die Gleichung so umgeformt, daß auf der rechten Seite 0 steht. Aus dem ersten und vierten Glied kann man $(1 - x)$ und aus dem zweiten und dritten Glied $\frac{1}{1 - n^4}$ ausklammern:

$$(1 - x)\left(\frac{1}{1 - n} + \frac{1}{1 + n}\right) + \frac{1}{1 - n^4}[2n^2(x - 1) - (2x - 1)] = 0.$$

Indem man $\frac{1}{1 - n} + \frac{1}{1 + n}$ in der Form $\frac{2}{1 - n^2}$ schreibt und mit dem Hauptnenner multipliziert, erhält man die

Lösung: $x = \frac{3}{4}$.

140. Man formt die Gleichung so um, daß alle Ausdrücke, die x enthalten, auf der linken und alle übrigen Glieder auf der rechten Seite stehen. Dann werden auf beiden Seiten alle Glieder auf den Hauptnenner gebracht:

$$\frac{(3ab + 1)(a + 1)^2 - (2a + 1)}{a(a + 1)^2} x = \frac{3ab(a + 1)^2 + a^2}{(a + 1)^3}$$

oder

$$\frac{3ab(a + 1)^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a - 1}{a(a + 1)^2} x = \frac{a[3b(a + 1)^2 + a]}{(a + 1)^3}$$

$$\frac{a[3b(a + 1)^2 + a]}{a(a + 1)^2} x = \frac{a[3b(a + 1)^2 + a]}{(a + 1)^3}.$$

Man kürzt und erhält die

Lösung: $x = \frac{a}{a + 1}$.

141. Man formt die Gleichung wie in Aufgabe 140 um und erhält:

$$\frac{ab[3c(a + b)^2 + ab]}{(a + b)^3} = \frac{a[3c(a + b)^2 + ab]}{a(a + b)^2} x.$$

Lösung: $x = \frac{ab}{a + b}$

142. Der Hauptnenner ist $(a + b)^2 (a - b)$.

Lösung: $x = \frac{m(a + b)}{a}$

143. Den Bruch $\frac{mz}{m^2 - z^2}$ schreibt man in der Form $-\frac{mz}{z^2 - m^2}$.

Man multipliziert anschließend mit dem Hauptnenner

$$mz(z^2 - m^2)$$

und erhält nach dem Zusammenfassen:

$$m^2z^2 - 4m^3z = 0.$$

Die Gleichung hat zwei Wurzeln: $z_1 = 0$, $z_2 = 4m$.

Eine entsprechende Untersuchung zeigt, daß $z = 0$ nicht Lösung sein kann, da im Nenner des ersten und des dritten Summanden der Wert 0 auftritt. (Division durch Null ist nicht möglich.)
Die Wurzel $z = 4m$ ist brauchbar, da keine Division durch Null auftritt.

Lösung: $z = 4m$

144. Man multipliziert mit dem Hauptnenner $b^4 - x^2$ und erhält

$$2x(a^2 + b^2 - 2ab) = 2(a^2 - b^2).$$

Dann ergibt sich $x = \dfrac{a+b}{a-b}$.
Der Nenner $b^4 - x^2$ wird für $x = \dfrac{a+b}{a-b}$ nicht Null, also ist x Lösung.

Lösung: $x = \dfrac{a+b}{a-b}$

145. Man multipliziert mit dem Hauptnenner $(x^2 - a^2)(x + n)$ und erhält $x = \dfrac{n^2}{a}$.

Die Nenner werden für dieses x nicht gleich Null, d. h., x ist Lösung der Gleichung.

Lösung: $x = \dfrac{n^2}{a}$

146. Man schreibt: $x + a^{-1} = x + \dfrac{1}{a}$. Durch Umformen erhält man:

$$\frac{2a}{ax+1} : \frac{2}{ax+1} = \frac{x}{2}.$$

Nun wird durch $ax + 1$ gekürzt, und es ergibt sich $x = 2a$.
Bemerkung: Das Kürzen durch $ax + 1$ ist nur möglich für $ax + 1 \neq 0$. Für $x = 2a$ gilt aber: $ax + 1 = 2a^2 + 1 > 0$. Die erhaltene Lösung ist also brauchbar. Wenn zum Beispiel die Gleichung $\dfrac{2a}{x-2a} : \dfrac{2}{x-2a} = \dfrac{x}{2}$ vorliegt, und man kürzt durch $x - 2a$, so erhält man $x = 2a$. Dann ist x nicht Lösung, da $\dfrac{2a}{x-2a}$ und $\dfrac{2}{x-2a}$ für $x = 2a$ nicht definiert sind.
Die genannte Gleichung $\dfrac{2a}{x-2a} : \dfrac{2}{x-2a} = \dfrac{x}{2}$ hat keine Lösung.

Lösung: $x = 2a$

147. Die Gleichung wird zunächst umgeformt in

$$\frac{a+x}{a^2 + x^2 + ax} + \frac{a-x}{a^2 + x^2 - ax} = \frac{3a}{x(a^4 + a^2x^2 + x^4)}.$$

Der Hauptnenner der linken Seite ist

$$([a^2 + x^2] + ax)([a^2 + x^2] - ax).$$

Man erhält

$$[a^2 + x^2]^2 - (ax)^2 = a^4 + a^2x^2 + x^4.$$

Folglich gilt:

$$\frac{2a^3}{a^4 + a^2x^2 + x^4} = \frac{3a}{x(a^4 + a^2x^2 + x^4)}.$$

Lösung: $x = \dfrac{3}{2a^2}$

148. Man formt die Gleichung so um, daß alle Glieder, die x enthalten, auf der linken Seite, alle anderen auf der rechten Seite stehen:

$$(a - b - 1)\sqrt{x} = (a^2 - b^2) - (a + b).$$

Man zerlegt nun die rechte Seite in Faktoren und erhält

$$(a - b - 1)\sqrt{x} = (a + b)(a - b - 1)$$

oder

$$\sqrt{x} = a + b.$$

$\sqrt{x}$ genügt den Bedingungen (I) der Vorbemerkungen nur, wenn $a + b \geqq 0$ ist. Für $a + b < 0$ existiert keine Lösung.

Lösung: $x = (a + b)^2$, wobei $a + b \geqq 0$ gilt.

149. Nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner und einer Umformung erhält man:

$$2x^2 + 6ax + 3a^2 = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{a(\sqrt{3} - 3)}{2}; \quad x_2 = -\frac{a(\sqrt{3} + 3)}{2}$$

150. Der Hauptnenner ist $4(x + b)(x - b)$. Nach einer Vereinfachung erhält man

$$12x^2 - 4bx - b^2 = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{b}{2}; \quad x_2 = -\frac{b}{6}$$

151. Nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner $(x - a)^2$ erhält man

$$(x - a)^2 - 2a(x - a) + (a^2 - b^2) = 0.$$

Diese quadratische Gleichung führt auf

$$x - a = a \pm b$$

und schließlich auf die

Lösungen:

$$x_1 = 2a + b; \; x_2 = 2a - b.$$

152. Man multipliziert mit dem Hauptnenner $bc^2(a - 2b)$ und erhält:

$$(cx)^2 - (a - 2b)(cx) - b(a - b) = 0.$$

Diese quadratische Gleichung führt auf

$$cx = \frac{(a - 2b) \pm a}{2}$$

und schließlich auf die

Lösungen:

$$x_1 = \frac{a - b}{c}; \quad x_2 = -\frac{b}{c}.$$

153. Nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner erhält man die Gleichung

$$4x(x - a) + 8x(x + a) = 5a^2$$

oder

$$12x^2 + 4ax - 5a^2 = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad x_2 = -\frac{5a}{6}$$

154. Der Hauptnenner ist $n(nx - 2)$. Nach Umformung erhält man:

$$(n - 1)x^2 - 2x - (n + 1) = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{n + 1}{n - 1}; \quad x_2 = -1$$

155. Man multipliziert mit dem Hauptnenner $a(a - x)^2$ und erhält:

$$(a + 1)x^2 - 2ax + (a - 1) = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{a - 1}{a + 1}$$

156. Man multipliziert die Gleichung mit dem Hauptnenner $(x - a)^2$ und erhält

$$(x - a)^2 - 2b(x - a) - (a^2 - b^2) = 0,$$

$$x - a = b \pm a.$$

Lösungen:

$$x_1 = 2a + b; \quad x_2 = b$$

157. Der Hauptnenner ist $nx(x - 2)(x + 2)$. Nach dem Umformen erhält man die Gleichung

$$x^2 - (2 - n)x - (2n^2 + 4n) = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = n + 2; \quad x_2 = -2n$$

158. *Erstes Verfahren:*

Nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner erhält man die Gleichung

$$x^2 + (a - 2n - 2a + n)x - (a - 2n)(2a - n) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung kann man sofort finden, wenn man beachtet, daß das absolute Glied gleich dem Produkt der Ausdrücke $-(a - 2n)$ und $(2a - n)$, der Koeffizient von x gleich der Summe dieser Ausdrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen ist.

Zweites Verfahren:

Man subtrahiert auf beiden Seiten 1 und macht gleichnamig:

$$\frac{a + x - 2n}{2a - n} - \frac{a - 2n + x}{x} = 0$$

$$(a - 2n + x)\left(\frac{1}{2a - n} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$1)\ a - 2n + x = 0, \quad x_1 = 2n - a;$$

$$2)\ \frac{1}{2a - n} - \frac{1}{x} = 0, \quad x_2 = 2a - n.$$

Lösungen:

$$x_1 = 2n - a; \quad x_2 = 2a - n$$

159. Zunächst wird die Gleichung umgeformt in

$$(n - 1)^2 x^2 - a(n - 1)x + (a - 1) = 0.$$

Setzt man nun $(n-1)x = z$, so kann man schreiben:

$$z^2 - az + (a-1) = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a-2}{2}$$

$$z_1 = a - 1$$

$$z_2 = 1$$

Folglich gilt:

$$(n-1)x_1 = a - 1$$

$$x_1 = \frac{a-1}{n-1}$$

$$(n-1)x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{n-1}.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{a-1}{n-1}; \quad x_2 = \frac{1}{n-1}$$

160. Der Nenner der linken Seite ist gleich $(a-x)^2$. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit diesem Nenner, so erhält man:

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{5}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2, \quad \frac{4}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Radizieren beider Seiten führt entweder auf

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a-x}{x} = \frac{a}{a+b}$$

oder auf

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a-x}{x} = -\frac{a}{a+b}.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{2a(a+b)}{5a+2b}; \quad x_2 = \frac{2a(a+b)}{2b-a}$$

161. Man formt zuerst den Ausdruck

$$(1+ax)^2 - (a+x)^2 = 1 + a^2x^2 - a^2 - x^2$$

um und schreibt die rechte Seite als Produkt: $(1-x^2)(1-a^2)$. Damit erhält die gegebene Gleichung die Form

$$x(x + 1) = \frac{ab}{(a - b)^2}.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{a}{b - a}; \quad x_2 = \frac{b}{a - b}$$

162. Das Trinom $ax^2 + bx + c$ wird wie folgt in ein Produkt linearer Faktoren zerlegt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

wobei x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind. Im gegebenen Falle gilt: $a = -3$; $x_1 = 7$ und $x_2 = -\frac{10}{3}$. Man erhält damit $11x - 3x^2 + 70 = -3(x - 7)\left(x + \frac{10}{3}\right)$.

Lösung: $(7 - x)(3x + 10)$

163. Da $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{(a + b)(a - b)}{ab}$ gilt, liegt die Vermutung nahe, daß sich die gegebene Differenz als ein Produkt mit den Faktoren $\frac{a + b}{a}$ und $\frac{a - b}{b}$ $\left(\text{ihre Summe ist gleich } \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ darstellen läßt. Es muß jedoch noch geklärt werden, ob es sich dabei um die einzige Lösung handelt.

Nehmen wir an, u und v seien die gesuchten Faktoren. Sie erfüllen dann nach Voraussetzung die Gleichungen:

$$uv = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad u + v = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Daraus folgt, daß u und v Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 0$$

sind. In den Lösungen dieser Gleichungen tritt in den Ausdrücken für u und v das Radikal $\sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}$ auf.

Da die Aufgabenstellung nur rationale Lösungen zuläßt, muß man versuchen, die Wurzel zu ziehen.

Dazu schreibt man statt $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$ den Ausdruck $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$ und fügt zum Ausgleich $4 \cdot \frac{a \cdot b}{b \cdot a}$, d. h. 4, hinzu. Unter der Wurzel erhält man so das Quadrat eines Trinoms $\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) - 2\right]^2$.

Lösung: $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$

164. $15x^3 + x^2 - 2x = x(15x^2 + x - 2)$.

Die Wurzeln der Gleichung $15x^2 + x - 2 = 0$ sind $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$. Daraus folgt

$$15x^2 + x - 2 = 15\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right) = (3x - 1)(5x + 2).$$

Antwort: $x(3x - 1)(5x + 2)$

165. *Erstes Verfahren:*
Man stellt die Summe $2x^4 + 4x^2 + 2$ als Produkt $2(x^2 + 1)^2$ dar.

Zweites Verfahren:
Man ordnet die Glieder des Polynoms nach fallenden Potenzen von x und stellt $4x^2$ dar als $4x^2 = 2x^2 + 2x^2$. Nachdem die ersten und letzten drei Glieder umgeordnet wurden, erkennt man, daß sich die Summe wie folgt als Produkt darstellen läßt:

Antwort: $(x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$.

165a. Indem man die linke Seite der Gleichung in $(1 - x^2)^2 + 4x^2$ umformt, erhält die Gleichung die Form:

$$(1 - x^2)^2 - 4x(1 - x^2) + 4x^2 = 0$$

$$[(1 - x^2) - 2x]^2 = 0.$$

Lösungen: $x_1 = -1 + \sqrt{2}$; $x_2 = -1 - \sqrt{2}$

166. Die Produktform der gesuchten Gleichung lautet:

$$\left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Antwort: $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

167. Nach dem Satz von VIETA ergibt die Summe der Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ den Faktor $-p$ und ihr Produkt das absolute Glied q.

Im vorliegenden Fall gilt:

$$p = -\left(\frac{1}{10-\sqrt{72}} + \frac{1}{10+\sqrt{72}}\right) = \frac{(-2)\cdot 10}{100-72} = -\frac{20}{28}$$

$$q = \frac{1}{10-\sqrt{72}} \cdot \frac{1}{10+\sqrt{72}} = \frac{1}{28}$$

$$x^2 - \frac{20}{28}x + \frac{1}{28} = 0.$$

Lösung: $28x^2 - 20x + 1 = 0$

168. Diese Aufgabe wird analog zur vorangegangenen Aufgabe gelöst.

Antwort: $bx^2 - 2a\sqrt{ax} + a^2 = 0$

169. Nach dem Satz von VIETA gilt $x_1 \cdot x_2 = 12$, und nach Voraussetzung gilt $x_1 - x_2 = 1$. Aus diesem Gleichungssystem kann man x_1 und x_2 (4 und 3 oder -3 und -4) bestimmen. Man findet $p = -(x_1 + x_2)$.

$$p_1 = 7; \quad p_2 = -7$$

Um $x_1 + x_2$ zu berechnen, ist es jedoch nicht nötig, x_1 und x_2 einzeln zu bestimmen. Man kann auch folgendermaßen vorgehen:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 1^2 + 4 \cdot 12 = 49.$$

Daraus ergibt sich sofort $p = -(x_1 + x_2)$.

Lösungen: $p_1 = 7; \quad p_2 = -7$

170. Nach dem Satz von VIETA gilt $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{5}$, und nach Voraussetzung gilt $x_1 - x_2 = 1$. Weiterhin erhält man wie in der vorangegangenen Aufgabe $x_1 + x_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. In Verbindung mit der zweiten Gleichung nach dem Satz von VIETA $x_1 + x_2 = \frac{k}{5}$ erhält man schließlich die

Lösungen: $k_1 = 3\sqrt{5}; \quad k_2 = -3\sqrt{5}$.

171. Nach Voraussetzung und nach dem Satz von VIETA gelten die folgenden Gleichungen:

$$(1)\; x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75; \qquad (2)\; x_1 \cdot x_2 = a^2; \qquad (3)\; x_1 + x_2 = 3a.$$

Von den drei Unbekannten x_1, x_2 und a soll a bestimmt werden. Aus (2) und (3) gewinnt man $x_1^2 + x_2^2 = 7a^2$.

Setzt man nun in die erste Gleichung ein, so erhält man $7a^2 = 1{,}75$.

Lösungen: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{2}$

172. Nach dem Satz von Vieta gelten $p + q = -p$ und $p \cdot q = q$. Dieses System hat zwei Lösungen

1. $p_1 = 0;\quad q_1 = 0$
2. $p_2 = 1;\quad q_2 = -2.$

Im ersten Fall erhält man die Gleichung $x^2 = 0$, im zweiten Fall die Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$.

Lösungen:

1) $p_1 = 0;\quad q_1 = 0$

2) $p_2 = 1;\quad q_2 = -2$

173. Die Wurzeln der gesuchten Gleichung seien

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1}.$$

Die Summe $y_1 + y_2$ wird nun durch die Koeffizienten a, b und c der gegebenen Gleichung ausgedrückt. Dazu bringt man die rechte Seite der Gleichung

$$y_1 + y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

auf die Form

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

und ersetzt $(x_1 + x_2)$ durch $-\frac{b}{a}$ sowie $x_1 \cdot x_2$ durch $\frac{c}{a}$:

$$y_1 + y_2 = \frac{b^2 - 2ac}{ac}.$$

Außerdem gilt:

$$y_1 y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1.$$

Damit kann die Normalform der gesuchten Gleichung aufgestellt werden:

$$y^2 - \frac{b^2 - 2ac}{ac} y + 1 = 0.$$

Antwort: $acy^2 - (b^2 - 2ac)\,y + ac = 0$

174. Die Aufgabe kann man wie die vorige lösen, es ist aber besser, den folgenden kürzeren Weg einzuschlagen.

Im ersten Falle sind beide Wurzeln der gesuchten Gleichung gleich den doppelten Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Daraus folgt, daß man die Unbekannte y, die doppelt so groß ist wie die Unbekannte x, bestimmen muß. Die Unbekannte x erfüllt die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Aus der Voraussetzung $y = 2x$ erhält man $x = \frac{y}{2}$ und, in die gegebene Gleichung eingesetzt,

$$a\left(\frac{y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y}{2}\right) + c = 0.$$

Im zweiten Falle gilt $x = \frac{1}{y}$.

Die Gleichung lautet dann:

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c = 0$$

Antworten:

1) $ay^2 + 2by + 4c = 0$

2) $cy^2 + by + a = 0$

175. *Erstes Verfahren:*

(Vergleichen Sie auch mit der Lösung der Aufgabe 173!)

Es gilt:

$$y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

Ersetzt man hier $x_1 + x_2$ durch $-\frac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2$ durch $\frac{c}{a}$, so erhält man

$$y_1 + y_2 = \frac{b^3 - 3abc}{a^3}.$$

Weiterhin gilt $y_1 \cdot y_2 = (x_1x_2)^3 = \frac{c^3}{a^3}$,

wodurch es möglich wird, mit Hilfe des Satzes von VIETA die gesuchte Gleichung zu ermitteln.

Zweites Verfahren:

(Vergleichen Sie auch mit der Lösung der Aufgabe 174!)

Die Voraussetzung liefert hier $y = x^3$, also $x = \sqrt[3]{y}$.

Man setzt in die gegebene Gleichung ein und erhält:

$$a\sqrt[3]{y^2} + b\sqrt[3]{y} = -c.$$

Um die Wurzeln zu beseitigen, erhebt man beide Seiten der Gleichung in die dritte Potenz und formt die Summe

$$3(a\sqrt[3]{y^2})^2\, b\sqrt[3]{y} + 3a\sqrt[3]{y^2}(b\sqrt[3]{y})^2$$

zum Ausdruck $3aby[a(\sqrt[3]{y})^2 + b\sqrt[3]{y}]$ um.

Die Summe in der Klammer ist gleich $-c$.

Antwort: $a^3y^2 + (b^3 - 3abc)\,y + c^3 = 0$

176. Die Normalform einer Bestimmungsgleichung n-ten Grades habe die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. In Produktform lautet diese Gleichung:

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0.$$

Eine biquadratische Gleichung hat immer zwei Wurzelpaare, von denen je ein Paar entgegengesetzte Vorzeichen und gleiche Absolutbeträge hat. Wenn man $x_3 = -x_1$ und $x_4 = -x_2$ setzt, kann die biquadratische Gleichung auf die Form

$$(x - x_1)(x - x_2)(x + x_1)(x + x_2) = 0$$

d. h.

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) = 0$$

oder

$$x^4 - (x_1^2 + x_2^2)\,x^2 + x_1^2x_2^2 = 0$$

gebracht werden.

Nach Voraussetzung gilt: $x_1^2 + x_2^2 + (-x_1)^2 + (-x_2)^2 = 50,$

$$x_1x_2(-x_1)(-x_2) = 144.$$

Daraus folgt:

$$x_1^2 + x_2^2 = 25 \quad \text{und} \quad x_1^2x_2^2 = 144.$$

Antwort: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

177. Wenn eine algebraische Gleichung mit einer Unbekannten und reellen Koeffizienten eine komplexe Wurzel $a + bi$ hat, dann tritt stets die dazu konjugierte komplexe Wurzel $a - bi$ auf. Im vorliegenden Fall sind deshalb sofort die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung bekannt, nämlich $3 + i\sqrt{6}$ und $3 - i\sqrt{6}$. Mit Hilfe dieser Wurzeln werden nun die folgenden Umformungen durchgeführt.

Nach dem Satz von BEZOUT ist die linke Seite der Gleichung ohne Rest durch $x - (3 + i\sqrt{6})$ und $x - (3 - i\sqrt{6})$ teilbar. Demnach muß die gegebene Gleichung auch durch das Produkt

$$[(x - 3) - i\sqrt{6}]\,[(x - 3) + i\sqrt{6}] = x^2 - 6x + 15$$

ohne Rest teilbar sein. Führt man die Division durch, so ergibt sich $4(x^2 - 3)$.

Also läßt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt in zwei Faktoren zerlegen:

$$4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = (x^2 - 6x + 15)(4x^2 - 3).$$

Man erhält zwei quadratische Gleichungen

$$1)\ x^2 - 6x + 15 = 0 \qquad 2)\ 4x^2 - 3 = 0.$$

Die erste liefert die schon bekannten Wurzeln, die zweite die beiden fehlenden

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösungen:

$$x_1 = 3 + i\sqrt{6}; \quad x_2 = 3 - i\sqrt{6}; \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

178. Man setzt $x = 2$ in die Gleichung ein und erhält

$$6 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + m = 0,$$

woraus $m = 12$ folgt. Damit erhält die gegebene Gleichung die Form $6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 0$, wobei eine der Wurzeln den Wert 2 hat. Nach dem Satz von BEZOUT läßt sich die linke Seite der Gleichung ohne Rest durch $(x - 2)$ dividieren. Man erhält so $6x^2 + 5x - 6$.

Die gegebene Gleichung liegt dann in der Form $(6x^2 + 5x - 6)(x - 2) = 0$ vor.

Die restlichen Wurzeln sind Wurzeln der Gleichung

$$6x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Lösungen:

$$m = 12; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = -\frac{3}{2}.$$

179. Man setzt in die gegebene Gleichung $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ ein. (Vergleichen Sie auch mit der Aufgabe 178!) Man erhält $4m + n = 10$ und $9m + n = -15$. Dieses Gleichungssystem hat das Lösungspaar $m = -5$; $n = 30$.
Die Gleichung lautet

$$2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich sowohl durch $(x - 2)$ als auch durch $(x - 3)$ und deshalb auch durch $(x - 2)(x - 3)$ dividieren:

$$(x - 2)(x - 3)(2x + 5) = 0.$$

Die Wurzeln sind $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -\frac{5}{2}$.

Lösungen:

$$m = -5; \quad n = 30; \quad x_3 = -\frac{5}{2}$$

180. Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat dann und nur dann gleiche Wurzeln, wenn der Wert der Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ gleich Null ist.

Im gegebenen Fall muß $(a\sqrt{a^2 - 3})^2 - 4 = 0$ sein, d. h. $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$. Diese biquadratische Gleichung hat zwei reelle Wurzeln ($a_1 = 2$ und $a_2 = -2$) und zwei komplexe Wurzeln ($a_3 = i$ und $a_4 = -i$).
Unter Verwendung der reellen Wurzeln[1] erhält man

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Die erste Gleichung hat die Wurzeln $x_1 = x_2 = -2$, die zweite die Wurzeln $x_1 = x_2 = 2$.

Lösungen:

$$a = 2 \quad \text{und} \quad a = -2$$

180a. Die Wurzeln der Gleichung sind

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - m^2 + 1} = m \pm 1.$$

Nach Voraussetzung gelten folgende Ungleichungen:

$$-2 < m + 1 < 4 \qquad -3 < m < 3$$

oder

$$-2 < m - 1 < 4 \qquad -1 < m < 5.$$

Lösung: $-1 < m < 3$

181. Man isoliert einen Wurzelausdruck, z. B. den ersten, und erhält so

$$\sqrt{y + 2} = 2 + \sqrt{y - 6}.$$

Anschließend quadriert man beide Seiten der Gleichung. Nach dem Ordnen gleichnamiger Glieder und nach dem Zusammenfassen erhält man die Gleichung $\sqrt{y - 6} = 1$, worin $y = 7$ ist.

[1] Es wird vorausgesetzt, daß die Koeffizienten der gegebenen Gleichung reelle Zahlen sind.

Die Probe zeigt, daß diese Lösung Wurzel der Gleichung ist.

Lösung: $y = 7$

Bemerkung 1: Hier und im folgenden setzen wir bei quadratischen und bei vierten Wurzeln ($b = \sqrt[n]{a}$, $n = 2$; $n = 4$) voraus, daß die Ungleichungen $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ erfüllt sind.
Vergleichen Sie dazu die einleitenden Bemerkungen am Beginn der Lösungen des Kapitels 2! Bezüglich der ungeraden Wurzeln vergleichen Sie mit den Bemerkungen zur Aufgabe 209!

Bemerkung 2: Die Probe wird durchgeführt, um unechte Lösungen von echten Lösungen unterscheiden zu können (erstere können beim Quadrieren der beiden Seiten der Gleichung entstehen). Im gegebenen Falle gibt es keine solche Scheinlösung. Quadrieren wir beide Seiten der Gleichung

$$\sqrt{y+2} + \sqrt{y-6} = 2,$$

so stellen wir fest, daß nur hinsichtlich der Vorzeichen Unterschiede zu oben genannten Gleichungen auftreten. Der Lösungsgang ist dem vorangegangenen analog. Wir erhalten

$$\sqrt{y-6} = -1.$$

Wenn wir diese Gleichung quadrieren, erhalten wir ebenfalls $y = 7$. Diese Lösung erfüllt nicht die Gleichung

$$\sqrt{y+2} + \sqrt{y-6} = 2.$$

Es gibt für diese Gleichung überhaupt keine Lösung. Bei dieser Aufgabe erkennt man den Sachverhalt auch ohne Probe, weil ohnehin ersichtlich ist, daß $\sqrt{y-6}$ nicht gleich -1 sein kann (s. Bem. 1). In anderen Fällen (s. Aufg. 184 u. 190) ist ohne Probe nichts zu erkennen.

182. Diese Aufgabe wird wie die vorige gelöst.

Lösung: $x = 6$

183. Man isoliert den ersten Wurzelausdruck, quadriert, ordnet und erhält $x - 1 = 2\sqrt{x-1}$. Anschließend wird noch einmal quadriert. Es ergibt sich

$$(x-1)^2 - 4(x-1) = 0.$$

Diese Gleichung wird durch $(x - 1)$ dividiert. Man überzeugt sich davon, daß $x = 1$ eine der Wurzeln der Gleichung ist. Außerdem erhält man eine zweite Wurzel, und zwar $x = 5$.

Es ist auch möglich, die Klammern zu beseitigen und anschließend die quadratische Gleichung zu lösen. Die Probe zeigt, daß beide Lösungen richtig sind.

Lösungen:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 5$$

184. Verfährt man wie im vorigen Falle, so erhält man aus $x + 22 = 7\sqrt{3x - 2}$ die Gleichung $x^2 - 103x + 582 = 0$ mit den Wurzeln $x_1 = 6$ und $x_2 = 97$. Die gegebene Gleichung wird nur durch die erste Lösung erfüllt. Die zweite Lösung ist unecht. (Diese Lösung erfüllt die Gleichung

$$\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3} = 7,$$

die sich von der gegebenen durch das Vorzeichen zwischen den Wurzeln unterscheidet.)

Lösung: $x = 6$

185. Die Aufgabe wird wie die vorige gelöst. Von den Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ ist nur die erste verwendbar.

Bemerkung: $x = 3$ ist Lösung der Gleichung

$$-\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 1.$$

Lösung: $x = -1$

186. *Lösungen:*

$$x_1 = 34; \quad x_2 = 2$$

187. *Lösung:* $x = 4$

188. Beide Seiten der Gleichung werden ins Quadrat erhoben, und man erhält nach einer Umformung die Gleichung

$$x\sqrt{x^2 + 24} - x^2 - 2x = 0.$$

Diese zerfällt in zwei Gleichungen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + 24} - x - 2 = 0.$$

Die zweite Gleichung hat $x_2 = 5$ als Lösung. Führt man die Probe durch, so erhält man die Bestätigung für die

Lösungen:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 5.$$

189. Die gegebene Gleichung bringt man auf die Form

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}}.$$

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert und anschließend wird mit x^2 multipliziert. (Man beachte, daß durch das Multiplizieren mit x^2 die Gefahr besteht, die unechte Lösung $x = 0$ einzuführen!) Man erhält die Gleichung

$$1 + \frac{2}{3}x = x\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}.$$

Durch abermaliges Quadrieren ergibt sich die

Lösung: $x = \frac{3}{4}$.

190. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $\sqrt{(x+2)(x+3)}$, so erhält man

$$\sqrt{(x-5)(x+3)} + \sqrt{(x-4)(x+2)} = 7.$$

Der weitere Lösungsweg kann wie in Aufgabe 181 entwickelt werden. Man stößt auf die Gleichung $\sqrt{(x-4)(x+2)} = 4$ und gewinnt die beiden Wurzeln: $x_1 = 6$ und $x_2 = -4$. Die Proben zeigen, daß x_2 die Gleichung nicht erfüllt, denn dieser Wert führt zu der widersprüchlichen Aussage

$$\frac{7}{2}\sqrt{2} = -\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

Lösung: $x = 6$

191. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner, so ergibt sich:

$$\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = 7.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$. Für $x = -5$ hat jedoch der Ausdruck $\sqrt{x-3}$ keinen Sinn mehr. (Vergleichen Sie auch mit der Bemerkung zur Aufgabe 181!)

Lösung: $x = 5$

192. Man bringt die linke Seite der Gleichung auf den Hauptnenner:

$$\frac{3x - 5\sqrt{x^2 + x}}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Daraus folgt:

$$3(x+1) = 5\sqrt{x(x+1)}.$$

Nach dem Quadrieren ergibt sich:

$$9(x+1)^2 - 25(x+1)\,x = 0$$

oder

$$(x+1)\,[9(x+1) - 25x] = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{9}{16}$$

193. Die Aufgabe wird in der gleichen Weise wie Aufgabe 192 gelöst.

Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1{,}6$$

194. Man quadriert beide Seiten der gegebenen Gleichung. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\sqrt{28 - x} = \sqrt{7}.$$

Beim Quadrieren besteht die Gefahr, eine fremde Wurzel einzuführen. Es handelt sich dabei um die Wurzel, die die Gleichung, die sich von der gegebenen durch das Vorzeichen der rechten Seite unterscheidet, erfüllt. Die Gleichung $\sqrt{28 - x} = \sqrt{7}$ hat eine Lösung: $x = 21$. Sie ist brauchbar, weil

$$\sqrt{2\sqrt{7} + \sqrt{21}} > \sqrt{2\sqrt{7} - \sqrt{21}}$$

gilt.

Lösung: $x = 21$

195. Man formt die Gleichung folgendermaßen um:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

Anschließend multipliziert man mit dem Nenner der rechten Seite. Dabei besteht die Gefahr, daß die unechte Lösung $x = 0$ eingeführt wird, da der Nenner für $x = 0$ zu Null wird. Weitere fremde Wurzeln können nicht auftreten, weil die Gleichung $\sqrt{x + \sqrt{x}} = 0$ als einzige Lösung $x = 0$ zuläßt. (Vergleichen Sie mit der Lösung der Aufgabe 143!) Nach dieser Vorbetrachtung ergibt sich

$$2x - 2\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} = 0.$$

Eine der Wurzeln dieser Gleichung ist gleich Null. Diese Lösung ist aber unzulässig, da die rechte Seite der gegebenen Gleichung für $x = 0$ nicht erklärt ist.

Man klammert $\sqrt{x}$ aus:

$$\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1} - 1) = 0.$$

Für die Gleichung $2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1} - 1 = 0$ (Vgl. Sie mit der Lösung der Aufgabe 181!), erhält man die Lösung $x = \frac{25}{16}$. Die Probe bestätigt das Resultat.

Lösung: $x = \frac{25}{16}$

196. Zuerst macht man den Nenner der linken Seite rational. Zu diesem Zweck wird die linke Seite mit $\sqrt{27+x} + \sqrt{27-x}$ erweitert, und es ergibt sich:

$$\frac{(\sqrt{27+x} + \sqrt{27-x})^2}{2x} = \frac{27}{x}$$

oder nach Vereinfachung

$$\frac{27 + \sqrt{27^2 - x^2}}{x} = \frac{27}{x}.$$

Lösungen:

$$x_1 = 27; \quad x_2 = -27$$

Die Lösungen $x_1 = 27$ und $x_2 = -27$ sind beide verwendbar.

197. Man isoliert den Wurzelausdruck, quadriert beide Seiten und erhält

$$x^2 - 2ax = -x\sqrt{x^2 + a^2}.$$

Diese Gleichung hat die Wurzel $x_1 = 0$. Um auch die anderen Wurzeln zu ermitteln, dividiert man beide Seiten durch x. (Das ist möglich, weil dabei $x \neq 0$ ist.) Danach werden wiederum beide Seiten quadriert, und man erhält:

$$x_2 = \frac{3}{4}a.$$

Bei der Probe kann man zu der irrigen Annahme kommen, daß $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{4}a$ stets die gegebene Gleichung befriedigen.

Mit Hilfe eines Zahlenbeispiels kann der vorliegende Fall besser verständlich gemacht werden.
Wenn $a = -1$ ist, bekommt die gegebene Gleichung die Form

$$x = -1 - \sqrt{1 - x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Weder $x_1 = 0$ noch $x_2 = \frac{3}{4}a = -\frac{3}{4}$ erfüllen diese Gleichung, denn es gibt in diesem Falle gar keine Lösung.

Ähnlich verhält es sich auch mit anderen beliebigen negativen Werten von a.

Die Fehlerquelle liegt darin, daß der Wert $\sqrt{a^2}$ nur dann gleich a sein kann, wenn $a \geqq 0$ ist. Für $a < 0$ gilt nämlich $\sqrt{a^2} = -a$, z. B. $\sqrt{(-3)^2} = -(-3)$. Die richtige gemeinsame Formel (s. Vorbemerkung zur Aufgabe 119, Nr. 3) lautet:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Benutzt man diese Formel, so findet man, daß für $x_1 = 0$

$$a - \sqrt{a^2} = a - |a|$$

wird. (Die linke Seite der Gleichung ist dann gleich Null). Für $a \geqq 0$ ist diese Differenz gleich Null, für $a < 0$ ist sie jedoch gleich $2a$.

Daraus folgt:

Wenn $a \geqq 0$ ist, dann ist $x_1 = 0$ Lösung der Gleichung; wenn $a < 0$ ist, dann erfüllt $x_1 = 0$ nicht die Gleichung. Analoge Betrachtungen treffen auch für $x_2 = \frac{3}{4}a$ zu.

Lösung: Für $a \geqq 0$ sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{4}a$ Lösungen der Gleichung.

Für $a < 0$ existieren keine Lösungen.

198. Schreibt man die gegebene Gleichung um, indem man Potenzen mit negativen Exponenten vermeidet, so erhält die Gleichung die Form[1]:

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}} = \frac{1}{4}.$$

[1] In der ersten Auflage (*gemeint ist die sowjetische Ausgabe — Die Red.*) begingen die Autoren bedauerlicherweise einen Fehler. Auf ihn soll an dieser Stelle rechtzeitig aufmerksam gemacht werden. Es handelt sich darum, daß die Gleichung (1) in die Form $\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x}{\sqrt{a^2 + x^2} + x} = \frac{1}{4}$ verwandelt wurde. Dieser Fehler entstand folgendermaßen: In der Gleichung (1) wurde die linke Seite mit a erweitert und dann a als Faktor unter die Wurzel genommen: $a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$. Die Gleichung gilt aber nicht für $a < 0$. In diesem Fall erhält man nämlich:

$$a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\sqrt{a^2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Die obige Umformung für $a < 0$ war also fehlerhaft.

Erstes Verfahren:
Man multipliziert mit dem Nenner:

$$3\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = 5\,\frac{x}{a}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist positiv, also muß es auch die rechte sein. Durch Quadrieren erhält man

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} = \frac{3}{4}.$$

$\left(\text{Der Wert } -\frac{3}{4} \text{ kommt nicht in Betracht, weil } \frac{x}{a} > 0 \text{ gilt.}\right)$

Zweites Verfahren:
Man macht den Nenner der linken Seite rational:

$$\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{x}{a}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Der Ausdruck in der Klammer kann nicht negativ sein, deshalb ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{a}.$$

Nun wird quadriert, und es ergibt sich:

$$1+\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{x}{a} = \frac{3}{4}.$$

Lösung: $x = \frac{3}{4}a$

199. Man löst die Gleichung wie die vorangegangene Aufgabe. Verwendet man dabei das zweite Lösungsverfahren, so findet man

$$(\sqrt{1+a^2x^2} - ax)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{1+a^2x^2} - ax$ ist immer positiv.

Deshalb gilt $\sqrt{1+a^2x^2} - ax = \frac{1}{|c|}$, d. h. $\sqrt{1+a^2x^2} = ax + \frac{1}{|c|}$. Nun wird quadriert, und es ergibt sich:

$$x = \frac{|c|^2 - 1}{2a|c|} \quad \text{oder} \quad x = \frac{c^2 - 1}{2a|c|}.$$

Probe: Es wird $x = \dfrac{c^2 - 1}{2a|c|}$ eingesetzt, und man findet:

$$1 + a^2x^2 = \frac{4c^2 + (c^2 - 1)^2}{4c^2} = \frac{(c^2 + 1)^2}{4c^2}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß $c^2 + 1$ stets positiv ist, so erhält man:

$$\sqrt{1 + a^2x^2} = \frac{c^2 + 1}{2|c|}.$$

Die weitere Rechnung zeigt, daß die gegebene Gleichung stets nach dem Einsetzen der ermittelten Lösung erfüllt wird.

Lösung: $x = \dfrac{c^2 - 1}{2a|c|}$; d. h. für $c > 0$

$$x = \frac{c^2 - 1}{2ac} \quad \text{und für } c < 0$$

$$x = \frac{1 - c^2}{2ac}$$

200. Man klammert im Zähler und Nenner der linken Seite der Gleichung $\sqrt{x + c}$ aus und kürzt anschließend[1]:

$$\frac{\sqrt{x + c} + \sqrt{x - c}}{\sqrt{x + c} - \sqrt{x - c}} = \frac{9(x + c)}{8c}.$$

Danach macht man den Nenner auf der linken Seite der Gleichung rational und erhält nach einer Vereinfachung:

$$8\sqrt{x^2 - c^2} = x + 9c,$$

$$x_1 = \frac{5c}{3}; \quad x_2 = -\frac{29}{21}c.$$

Die Probe zeigt, daß beide Werte für $c > 0$ die Gleichung erfüllen, während es für $c \leqq 0$ nicht der Fall ist.

Lösung: Für $c > 0$ ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = \frac{5}{3}c \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{29}{21}c.$$

Für $c \leqq 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

[1] Wenn man $\sqrt{x + c}$ ausklammert, so setzt man $x \neq -c$ voraus. Würde man bei der Lösung der umgeformten Gleichung $x = -c$ erhalten, so wäre klar, daß diese Lösung nicht verwendbar ist. Aus dem folgenden Lösungsweg geht aber hervor, daß eine solche Wurzel nicht auftritt.

201. Den ersten Radikanden formt man folgendermaßen um:

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (x-1) - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2.$$

Der zweite Radikand vereinfacht sich analog zu

$$(\sqrt{x-1} - 3)^2.$$

Die gegebene Gleichung liegt dann in der Form

(1) $$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$$

vor. (Siehe Vorbemerkungen zum Kapitel 2, Abs. 3!).
Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

I. $\sqrt{x-1} > 3$ II. $\sqrt{x-1} < 2$ III. $2 \leqq \sqrt{x-1} \leqq 3$.

Im ersten Fall läßt sich (1) folgendermaßen umformen:

$$\sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x-1} = 3.$$

Dieses Resultat steht nicht mit der Bedingung $\sqrt{x-1} > 3$ in Einklang.
Im zweiten Fall nimmt (1) die Form

$$-(\sqrt{x-1} - 2) - (\sqrt{x-1} - 3) = 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x-1} = 2$$

an. Dieses Ergebnis genügt ebensowenig der Bedingung $\sqrt{x-1} < 2$.
Untersucht man den dritten Fall, so ergibt sich aus (1)

(2) $$(\sqrt{x-1} - 2) - (\sqrt{x-1} - 3) = 1.$$

Die Gleichung (2) stellt eine Identität dar, d. h., die Gleichung (1) wird von allen Werten x, die im Intervall $2 \leqq \sqrt{x-1} \leqq 3$ liegen, erfüllt.
Da $\sqrt{x-1} > 0$ ist, lassen sich alle drei Seiten der Ungleichung quadrieren:

$$5 \leqq x \leqq 10.$$

Die Lösungen der gegebenen Gleichung liegen zwischen den Grenzen 5 und 10 (einschließlich der Zahlen 5 und 10 selbst). Sie alle erfüllen die gegebene Gleichung, weil sie der Bedingung III genügen und damit auf die Identität (2) führen.

Lösung: $5 \leqq x \leqq 10$

202. Man quadriert beide Seiten der Gleichung und verändert die Gleichung so, daß auf einer Seite 0 steht. Danach klammert man $\sqrt{a+x}$ aus:

$$\sqrt{a+x}\,(4\sqrt{a+x} + 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}) = 0.$$

Nun ist, wenn ein Produkt zweier Zahlen gleich Null ist, mindestens ein Faktor gleich Null. Deshalb kann man annehmen:

(1) $$\sqrt{a+x} = 0;$$

(2) $$4\sqrt{a+x} + 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x} = 0.$$

Aus $\sqrt{a+x} = 0$ folgt $x_1 = -a$. Die Probe zeigt, daß die Lösung für $a \geqq 0$ die gegebene Gleichung erfüllt. Für $a < 0$ verliert die Gleichung ihren Sinn, da $\sqrt{a-x}$ imaginär wird. Aus der Gleichung

$$4(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) = \sqrt{x}$$

erhält man, wenn man sie wie die entsprechenden Gleichungen in den Aufgaben 183 bis 187 löst, den Wert $x_2 = \frac{64a}{1025}$ (außer der unzulässigen Lösung $x = 0$). Die Probe zeigt, daß der Wert $x_2 = \frac{64a}{1025}$ unbrauchbar ist, d. h., die zweite Gleichung hat überhaupt keine Lösung. In diesem Falle sollte man sich überlegen, ob die folgende Lösungsmöglichkeit anwendbar ist:
Man schafft sich auf der linken Seite der Gleichung einen Bruch mit irrationalem Nenner, indem man die Gleichung

$$4(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) = \sqrt{x}$$

auf der linken Seite mit $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}$ erweitert. Es entsteht:

$$\frac{8x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{x}.$$

Diese Gleichung kann durch $\sqrt{x}$ dividiert werden, da $x = 0$ keine Wurzel darstellt. Es geht also keine Lösung dabei verloren. Man erhält

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = 8\sqrt{x}.$$

Nun subtrahiert man von dieser Gleichung die Gleichung

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$$

und erhält

$$2\sqrt{a-x} = -\frac{31}{4}\sqrt{x}.$$

Diese Gleichung ist widersprüchlich, da die linke Seite nichtnegativ, die rechte Seite aber nichtpositiv ist. Würde man nicht darauf achten und beide Seiten quadrieren, so erhielte man die unzulässige Lösung $x = \frac{64a}{1025}$.

Lösung: Wenn a positiv ist, dann ist $x = -a$ Lösung der Gleichung.
Wenn a negativ ist, hat die Gleichung keine Lösung.

203. Hier kann man mit Erfolg das Verfahren, das in der Aufgabe 202 verwandt wurde, anwenden, d. h. einen irrationalen Nenner einführen.
Lösung: $x = 0$

204. *Lösungen:*

$$x_1 = a; \quad x_2 = -b$$

205. *Lösung:* $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ (für $a \geqq 1$)

Für $a < 1$ hat die Gleichung keine Lösung.

206. Die gegebene Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{(\sqrt{a+x})^3}{ax} = \sqrt{x}$$

oder $(a+x)^{\frac{3}{2}} = ax^{\frac{3}{2}}$ bringen. Man potenziert auf beiden Seiten mit $\frac{2}{3}$ und erhält

$$a + x = a^{\frac{2}{3}}x.$$

Daraus folgt für x der Wert $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$.

Probe: $a + x = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$; $(a+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$;

$$\frac{(a+x)^{\frac{3}{2}}}{ax} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Lösung: $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$

Wenn $-1 \leqq a \leqq 1$ gilt, hat die Gleichung keine Lösung.

207. Substituiert man $\sqrt[4]{x} = z$, dann gilt:

$$\sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2 = z^2.$$

Die Gleichung erhält dann die Form

$$z^2 + z - 12 = 0$$

mit den Wurzeln

$$z_1 = 3; \quad z_2 = -4.$$

Da $\sqrt[4]{x}$ positiv sein muß, ist die zweite Lösung nicht verwendbar.
Lösung: $x = 81$

208. Man setzt für $(x - 1)^{\frac{1}{4}}$ das Zeichen z und verfährt wie bei der Lösung der Aufgabe 207.

Lösung: $x = 17$

209. Wir fordern (siehe Bedingung (I) der Vorbemerkungen) für $\sqrt[3]{a} = b$, daß $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ sind. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die gegebene Gleichung in der Form $A = -B$ ($A \geqq 0$, $B \geqq 0$) schreiben. Bekanntlich wird diese Gleichung nur für $A = B = 0$ erfüllt. Also müßte jede der Wurzeln für ein und dasselbe x den Wert Null haben.
Der Radikand $\sqrt{15 - 2x} - 9$ ist für $x = -33$ gleich Null, der andere Radikand dagegen wird für keinen Wert von x zu Null. Also hat die gegebene Gleichung keine Lösung.

210. Beide Seiten der Gleichung werden in die dritte Potenz erhoben. Unter Anwendung der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

erhält man so:

$$x + 3\sqrt[3]{x(2x - 3)}\,[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}] + 2x - 3 = 12(x - 1).$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann auf Grund der gegebenen Gleichung durch $\sqrt[3]{12(x - 1)}$ ersetzt werden:

$$\sqrt[3]{x(2x - 3) \cdot 12(x - 1)} = 3(x - 1).$$

Anschließend werden beide Seiten der Gleichung in die dritte Potenz erhoben und so umgeformt, daß die rechte Seite gleich 0 wird.

$$(x - 1)\,[12x(2x - 3) - 27(x - 1)^2] = 0.$$

Daraus entnimmt man, daß entweder

(1) $x - 1 = 0$ oder (2) $12x(2x - 3) - 27(x - 1)^2 = 0$ gilt.

Man erhält: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. Der Wert $x_1 = 1$ ist keine Lösung, da $\sqrt[3]{2x - 3}$ für $x_1 = 1$ nicht erklärt ist.

Lösung: $x = 3$

211. Diese Aufgabe wird wie die Aufgabe 210 gelöst.

Lösungen: $x_1 = a; \quad x_2 = b; \quad x_3 = \dfrac{a + b}{2}$

Bemerkung: $x_1 = a$ ist nur verwendbar, wenn $b \geqq a$ gewählt wird (sonst ist die zweite Wurzel nicht erklärt, ebenso die rechte Seite).

$x_2 = b$ ist nur verwendbar, wenn $a \geqq b$ ist (denn sonst ist die erste Wurzel nicht erklärt, ebenso die rechte Seite).

$x_3 = \dfrac{a + b}{2}$ ist nur für $a = b$ brauchbar, denn im Fall $a \neq b$ würde auf der linken Seite der gegebenen Gleichung jeweils ein Summand nicht reell sein. Aus der notwendigen Gleichheit von a und b folgt $x_3 = a$, was wegen $x_1 = a$ unberücksichtigt bleiben kann.

212. Setzt man $\sqrt[3]{x} = z$ und damit $\sqrt[3]{x^2} = z^2$ in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man $2z^2 + z - 3 = 0$ mit $z_1 = 1$; $z_2 = -\dfrac{3}{2}$. Der gefundene Wert $z_2 = -\dfrac{3}{2}$ kommt nicht in Betracht, weil dafür die Gleichung $\sqrt[3]{x} = z_2$ nicht erklärt ist. (Siehe Bedingung (I) der Vorbemerkungen!)

Lösung: $x = 1$

213. Die Aufgabe wird wie die Aufgabe 212 gelöst.
Substituiert man etwa $y = \sqrt[3]{z}$ und damit $y^2 = \sqrt[3]{z^2}$, so erhält man $y_1 = 4$, $y_2 = -\dfrac{5}{2}$. Der negative Wert y_2 kommt wiederum nicht in Betracht.

Lösung: $z = 64$

214. Man setzt z für $\sqrt[6]{a + x}$. Dann folgt:

$$\sqrt{a + x} = z^3 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{a + x} = z^2.$$

Lösungen: $x_1 = -a; \quad x_2 = 1 - a$

215. Man substituiert $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = z$ und demzufolge $\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{1}{z}$. Die Gleichung wird umgeformt in $12z^2 - 7z - 12 = 0$, und es ergeben sich die Werte: $z_1 = \frac{4}{3}$; $z_2 = -\frac{3}{4}$. Den Wert $z_2 = -\frac{3}{4}$ kann man nicht verwenden. (Vgl. Sie hierzu mit der Bemerkung zur Aufgabe 181!) Für die Bestimmung von x erhält man also nur die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3}.$$

Lösung: $x = 7$

216. *Lösungen:* $x_1 = 5$; $x_2 = -5$

217. Man substituiert $\sqrt[3]{x} = z$ und damit $\sqrt[3]{x^2} = z^2$; $x = z^3$.

Es entsteht die Gleichung

$$\frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} - \frac{z^2 - 1}{z + 1} = 4.$$

Man kürzt den ersten Quotienten durch $z^2 - 1$, den zweiten durch $z + 1$ und erhält $z^2 - z - 2 = 0$.
Das Kürzen des ersten Bruches ist jedoch nur für $z^2 - 1 \neq 0$, das des zweiten nur für $z + 1 \neq 0$ möglich.
Von den beiden Wurzeln $z_1 = 2$ und $z_2 = -1$ erfüllt eine die Gleichung $z + 1 = 0$. Sie ist nicht verwendbar, denn für $z = -1$ ist $\sqrt[3]{x} = z$ nicht erklärt.

Lösung: $x = 8$

218. Man setzt $\sqrt{x} = z$ und bringt die Gleichung auf die Form

$$\frac{z^2 - 4}{z + 2} = z^2 - 8.$$

Anschließend kürzt man durch $z + 2$ (siehe Erklärung zur Aufgabe 217!) und erhält

$$z^2 - z - 6 = 0; \quad z_1 = 3; \quad z_2 = -2.$$

Mit der zweiten Lösung kann man nicht weiterrechnen, weil erstens damit der Ausdruck $\frac{z^2 - 4}{z + 2}$ unbestimmt ist und weil zweitens z nicht negativ sein kann (siehe Substitution).

Lösung: $x = 9$

219. Hier kann man (im Gegensatz zur vorigen Aufgabe) durch Substitution nicht zum Ziel kommen.
Man formt die Gleichung um

$$\frac{(\sqrt{a-x})^3 + (\sqrt{x-b})^3}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = a - b$$

und kürzt den Bruch mit $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}$.
(Das ist deshalb möglich, weil diese Summe für $a \neq b$ nicht gleich Null werden kann.) Nach Vereinfachung erhält man

$$\sqrt{(a-x)(x-b)} = 0.$$

Lösungen: $x_1 = a; \quad x_2 = b$

220. Die gegebene Gleichung bringt man auf die Form

$$\sqrt{2-x}\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Man entnimmt daraus, daß entweder

$$(1) \qquad \sqrt{2-x} = 0 \quad \text{oder} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Aus der Gleichung (1) erhält man $x_1 = 2$. Aus der Gleichung (2) erhält man nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\sqrt{2(2-x)} = 2 - \sqrt{x}$$

die Lösungen $x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{16}{9}$.

Lösungen: $x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{16}{9}$

221. *Lösung:* $x = 81$

222. Würde man die Wurzel isolieren und anschließend beide Seiten der Gleichung quadrieren, so erhielte man eine Bestimmungsgleichung vierten Grades. Durch Anwendung eines Kunstgriffes kann man das vermeiden. Die Gleichung wird umgeformt in

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 = 12.$$

Indem man nun $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = z$ setzt, erhält man

$$z^2 + z - 12 = 0.$$

Von den Lösungen dieser quadratischen Gleichung kann nur die positive Lösung $z = 3$ verwendet werden.

Lösungen: $x_1 = 4; \quad x_2 = -1$

223. Hier könnte auch das Verfahren angewendet werden, das in Aufgabe 222 zum Ziel führte. Statt dessen kann hier vorher nachgewiesen werden, daß die Gleichung keine Lösung haben kann. In der Tat ist die algebraische Summe $3x^2 + 5 + 1$ für jedes x größer als $3x^2 + 5x - 8$.
Deshalb gilt die Ungleichung

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 1} > \sqrt{3x^2 + 5x - 8}.$$

Die linke Seite der gegebenen Gleichung wird für jedes x negativ, deshalb ist die Gleichung nicht lösbar.

Antwort: Die Gleichung hat keine Lösung.

224. Man bezeichnet einen der Radikanden mit z, zweckmäßig ist $y^2 + 4y + 6 = z$. Die Gleichung bekommt dann die Form: $\sqrt{z + 2} + \sqrt{z - 2} = \sqrt{2z}$.
Nachdem man die Wurzel beseitigt hat, erhält man $z^2 = 4$. Davon ist nur die Lösung $z_1 = 2$ verwendbar, denn für $z_2 = -2$ sind zwei Radikanden negativ. Man löst die Gleichung $y^2 + 4y + 6 = 2$ und überprüft die Lösung.

Lösung: $y = -2$

225.[1] Man löst die Gleichungen durch das Substitutionsverfahren. Aus der zweiten Gleichung entnimmt man $y = 6 - x$ oder $x = 6 - y$ und setzt in die erste Gleichung ein.
Oft führt folgender Kunstgriff schneller zum Ziel: Die erste Gleichung wird auf die Form $(x - y)^2 = 4$ gebracht, wobei $x - y = 2$ oder $x - y = -2$ ist. Es ergeben sich zwei Systeme:

$$\text{I)}\ \begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \text{II)}\ \begin{aligned} x - y &= -2 \\ x + y &= 6. \end{aligned}$$

Lösungen: 1) $x_1 = 4; \quad y_1 = 2$ 2) $x_2 = 2; \quad y_2 = 4$

226. Man bringt das gegebene System auf die Form

$$xy + (x + y) = 11$$
$$xy(x + y) = 30$$

und setzt: $z_1 = xy$; $z_2 = x + y$.

[1] In der Aufgabe 225 und in der Mehrzahl der folgenden Aufgaben dieses Kapitels führt die Anwendung von Kunstgriffen zu einfacheren Lösungswegen. Der Hauptzweck der Aufgaben dieses Kapitels besteht darin, die Besonderheiten der gegebenen Systeme zu erkennen, um entsprechende Kunstgriffe ausfindig machen zu können.

Dann lautet das Gleichungssystem:

$$z_1 + z_2 = 11$$
$$z_1 z_2 = 30.$$

Nach dem Satz von VIETA sind z_1 und z_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - 11z + 30 = 0$.

Man erhält $z_1 = 6$; $z_2 = 5$ oder $z_1 = 5$, $z_2 = 6$.

Es ergeben sich demzufolge zwei Systeme

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ xy &= 5 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 6. \end{aligned}$$

Jedes dieser Systeme kann mit dem Satz von VIETA oder durch die Substitutionsmethode gelöst werden.

Lösungen:

1) $x = 5;\quad y = 1$ 2) $x = 1;\quad y = 5$

3) $x = 2;\quad y = 3$ 4) $x = 3;\quad y = 2$

227. Indem man $y^2 = z$ setzt, erhält man das Gleichungssystem:

$$x + z = 7$$
$$xz = 12.$$

Lösungen:

1) $x = 4;\quad y = \sqrt{3}$ 2) $x = 4;\quad y = -\sqrt{3}$

3) $x = 3;\quad y = 2$ 4) $x = 3;\quad y = -2$

228. Ersetzt man x^2 durch z_1 und $-y$ durch z_2, so erhält man das Gleichungssystem:

$$z_1 + z_2 = 23$$
$$z_1 z_2 = -50.$$

Lösungen:

1) $x = 5;\quad y = 2$ 2) $x = -5;\quad y = 2$

3) $x = i\sqrt{2};\quad y = -25$ 4) $x = -i\sqrt{2};\quad y = -25$

229. Setzt man $-xy = z$; $x^2 - y^2 = w$, so erhält man das Gleichungssystem

$$z \cdot w = -180$$
$$z + w = -11$$

mit den Lösungen $z_1 = 9$; $w_1 = -20$ oder $z_2 = -20$; $w_2 = 9$.

Damit ergeben sich zwei Systeme:

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} xy &= -9 \\ x^2 - y^2 &= -20 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \text{II)} \quad \begin{aligned} xy &= 20 \\ x^2 - y^2 &= 9. \end{aligned}$$

Zur Lösung des ersten Systems wird die erste Gleichung nach y entwickelt: $y = -\frac{9}{x}$. In der zweiten Gleichung wird nun $y^2 = \frac{81}{x^2}$ gesetzt. Es entsteht die biquadratische Gleichung $x^4 + 20x^2 - 81 = 0$ mit den Wurzeln

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-10 + \sqrt{181}} \approx \pm\sqrt{3{,}45} \approx \pm\, 1{,}86$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-10 - \sqrt{181}} \approx \pm\sqrt{-23{,}45} \approx \pm\, 4{,}84\, i.$$

Damit läßt sich y bestimmen:

$$y_{1,2} = \frac{\mp 9}{\sqrt{-10 + \sqrt{181}}} \approx \frac{\mp 9}{1{,}86} \approx \mp\, 4{,}84$$

$$y_{3,4} \approx \frac{\mp 9}{4{,}84\, i} \approx \pm\, 1{,}86\, i.$$

Ebenso löst man das zweite Gleichungssystem.

Lösungen:

1) $x \approx 1{,}86;\ y \approx -4{,}84$ 2) $x \approx -1{,}86;\ y \approx 4{,}84$
3) $x \approx 4{,}84\, i;\ y \approx 1{,}86\, i$ 4) $x \approx -4{,}84\, i;\ y \approx -1{,}86\, i$
5) $x = 5;\ y = 4$ 6) $x = -5;\ y = -4$
7) $x = 4\, i;\ y = -5\, i$ 8) $x = -4\, i;\ y = 5\, i$

230. Man isoliert die absoluten Glieder, multipliziert die zweite Gleichung mit 7 und subtrahiert sie von der ersten. Es ergibt sich

$$-32x^2 - 2xy + 75y^2 = 0.$$

Das ist eine homogene Gleichung zweiten Grades (d. h. eine Gleichung der allgemeinen Form $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$). Man dividiert beide Seiten durch x^2 (das ist möglich, weil $x = 0$ keine Lösung ist).
Anschließend formt man um:

$$-32 - 2\frac{y}{x} + 75\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen sind

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} = -\frac{16}{25}.$$

Mit Hilfe dieses Verfahrens konnte also aus einer homogenen Gleichung zweiten Grades die Lösung $\frac{y}{x}$ ermittelt werden. Nun müssen zwei Systeme gelöst werden:

I.) $5x^2 - 10y^2 - 5 = 0$ und II.) $5x^2 - 10y^2 - 5 = 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \qquad\qquad \frac{y}{x} = -\frac{16}{25}.$$

Es empfiehlt sich, das Substitutionsverfahren anzuwenden.

Lösungen:

1) $x = 3;\quad y = 2$ 2) $x = -3;\quad y = -2$

3) $x = \frac{25}{\sqrt{113}};\ y = -\frac{16}{\sqrt{113}}$ 4) $x = -\frac{25}{\sqrt{113}};\ y = \frac{16}{\sqrt{113}}$

231. Die erste Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}xy.$$

Dann erhält man

$$(x-y)^2 = \frac{1}{2}xy.$$

Die zweite Gleichung wird auf die Form

$$2(x-y) = \frac{1}{2}xy$$

gebracht. Daraus folgt:

$$(x-y)^2 - 2(x-y) = 0,$$

$$x - y = 0;\ x - y = 2.$$

Man erhält zwei Gleichungssysteme:

$$\text{I) } \begin{aligned} x - y &= 0 \\ xy &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \text{II) } \begin{aligned} x - y &= 2 \\ xy &= 8. \end{aligned}$$

Lösungen:

1) $x = y = 0$ 2) $x = 4;\quad y = 2$ 3) $x = -2;\quad y = -4$

232. Die erste Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 13 + xy$$

oder

$$(x+y)^2 - 13 = xy.$$

Nun wird die zweite Gleichung $x + y = 4$ in die erste eingesetzt, und man erhält:

$$16 - 13 = xy.$$

Jetzt gilt es, das System

$$xy = 3$$
$$x + y = 4$$

zu lösen. Es ergeben sich die

Lösungen:

1) $x = 3; \quad y = 1$ 2) $x = 1; \quad y = 3.$

233. Man verfährt bei dieser Aufgabe wie bei der Aufgabe 232 und erhält das Gleichungssystem:

$$xy = 6$$
$$x - y = 1$$

mit den

Lösungen: 1) $x = 3; \quad y = 2$ 2) $x = -2; \quad y = -3.$

234. Man setzt $\frac{x}{y} = z$ und formt um in $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$.

Die erste Gleichung erhält nach dem Einsetzen die Form

$$z + \frac{1}{z} = \frac{25}{12} \quad \text{oder} \quad 12z^2 - 25z + 12 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $z_1 = \frac{4}{3}$ und $z_2 = \frac{3}{4}$.

Damit lassen sich zwei Gleichungssysteme aufstellen:

$$\text{I)} \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \qquad \text{und} \qquad \text{II)} \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$
$$x^2 - y^2 = 7 \qquad\qquad x^2 - y^2 = 7.$$

Man löst diese Gleichungen am besten durch Substitution der Unbekannten x aus der ersten Gleichung in die zweite.

Lösungen: 1) $x = 4; \quad y = 3$ 2) $x = -4; \quad y = -3$

3) $x = 3i; \quad y = 4i$ 4) $x = -3i; \quad y = -4i$

235. Das Gleichungssystem kann man auf die Form

$$(1) \qquad x^m y^n = c a^m b^n$$
$$(2) \qquad x^n y^m = d a^m b^n$$

bringen. Multipliziert man einmal die Gleichungen miteinander und dividiert sie zum anderen durcheinander, so erhält man:

$$(xy)^{m+n} = cd a^{2m} b^{2n}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{c}{d}.$$

Daraus folgt:

$$xy = (cd)^{\frac{1}{m+n}} \cdot a^{\frac{2m}{m+n}} \cdot b^{\frac{2n}{m+n}}$$

und

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$x^2 = c^{\frac{2m}{m^2-n^2}} d^{\frac{2n}{n^2-m^2}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}.$$

Den Ausdrúck für y^2 kann man analog unter Verwendung der Gleichung $\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{d}{c}$ finden. Er unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung für x nur durch die Exponenten von c und d.

Lösung: $x = c^{\frac{m}{m^2-n^2}} d^{\frac{n}{n^2-m^2}} a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}$

$$y = c^{\frac{n}{n^2-m^2}} d^{\frac{m}{m^2-n^2}} a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}.$$

236. In der zweiten Gleichung kann $x^3 + y^3$ in die Faktoren $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ zerlegt werden. Man dividiert nun die zweite Gleichung durch die erste und erhält:

$$x + y = 5.$$

In der zweiten Gleichung addiert man zu beiden Seiten $3xy$. Nach Umformung ergibt sich so die Gleichung

$$(x + y)^2 = 7 + 3xy.$$

Nun wird in letzterer Gleichung für $x + y$ der Wert 5 eingesetzt. Dann geht diese Gleichung über in $xy = 6$. Damit erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

mit den

Lösungen: 1) $x = 3$; $y = 2$ und 2) $x = 2$; $y = 3$.

237. Man multipliziert die zweite Gleichung mit 3 und addiert sie zur ersten. Es entsteht $(x + y)^3 = 1$.
Wenn man nur die reellen Lösungen berücksichtigt, gilt

$$x + y = 1.$$

Man setzt in der zweiten Gleichung für $x + y$ den Wert 1 ein und erhält so $xy = -2$.

Damit erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ xy &= -2 \end{aligned}$$

mit den

Lösungen: 1) $x = 2$; $y = -1$ und 2) $x = -1$; $y = 2$.

238. Diese Aufgabe wird wie die Aufgabe 237 gelöst.

Lösungen: 1) $x = 3$; $y = 2$ 2) $x = 2$; $y = 3$

239. Man setzt: $\frac{x + y}{x - y} = z$. Dann erhält die erste Gleichung die Form $z + \frac{1}{z} = 5\frac{1}{5}$.

Hier ist $z_1 = 5$ und $z_2 = \frac{1}{5}$.

Daraus folgen $\frac{x + y}{x - y} = 5$ und $\frac{x + y}{x - y} = \frac{1}{5}$.

Aus der Gleichung $\frac{x + y}{x - y} = 5$ erhält man $y = \frac{2}{3}x$.

Diese Gleichung kann unter Verwendung der gegebenen Gleichung $xy = 6$ gelöst werden. Auf die gleiche Art und Weise wertet man die Gleichung $\frac{x + y}{x - y} = \frac{1}{5}$ aus.

Lösungen: 1) $x = 3$; $y = 2$ 2) $x = -3$; $y = -2$
3) $x = 3i$; $y = -2i$ 4) $x = -3i$; $y = 2i$

240. Man eliminiert aus dem System zunächst die Unbekannte z. Die erste Gleichung wird mit c multipliziert, und von ihr wird die zweite Gleichung subtrahiert. Die dritte Gleichung subtrahiert man von der mit c multiplizierten zweiten Gleichung. Es entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$(c-a)x + (c-b)y = c-d$$

$$a(c-a)x + b(c-b)y = d(c-d).$$

Aus diesem System können die Unbekannten x und y ermittelt werden. Anschließend berechnet man z.

Lösung:

$$x = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}; \qquad y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};$$

$$z = \frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}$$

241. Um die Unbekannte u zu eliminieren, geht man folgenden Weg:

1. Die zweite Gleichung multipliziert man mit 2 und addiert sie zur ersten.
2. Die dritte Gleichung multipliziert man mit (-2) und addiert sie zur zweiten.
3. Die dritte Gleichung multipliziert man mit (-3) und addiert sie zur vierten.

Es entsteht folgendes Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$5x - 4y + 13z = 36,$$

$$-4x - 11y + 9z = 1,$$

$$-5x - 13y + 12z = 5.$$

Nun kann x eliminiert werden. Hierzu wird zuerst von der zweiten Gleichung die dritte subtrahiert:

$$\text{a)} \quad 5x - 4y + 13z = 36,$$

$$\text{b)} \quad x + 2y - 3z = -4,$$

$$\text{c)} \quad -5x - 13y + 12z = 5.$$

Danach addiert man die Gleichungen a) und c). Das Fünffache der Gleichung b) addiert man dann zur Gleichung c). Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$-17y + 25z = 41 \quad \text{oder} \quad -17y + 25z = 41$$

$$-3y - 3z = -15 \qquad\qquad y + z = 5.$$

Hieraus folgen $z = 3$ und $y = 2$. Aus der Gleichung b) erhält man x und aus der dritten gegebenen Gleichung den Wert der Unbekannten u.

Lösung:

$$x = 1; \quad y = 2; \quad z = 3; \quad u = 4$$

242. Man subtrahiert die erste Gleichung von der zweiten und erhält $y + 2z = 1$, d. h. $y = 1 - 2z$. Den Ausdruck für y setzt man in die erste Gleichung ein und bekommt $x = z + 3$. Weiter setzt man die gefundenen Ausdrücke für x und y in die dritte Gleichung ein:

$$3z^2 + z - 2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $z_1 = \frac{2}{3}$; $z_2 = -1$.

Da man in die Substitutionsvorschriften $x = z + 3$ und $y = 1 - 2z$ jeweils zwei verschiedene Werte für z einsetzen muß, erhält man auch zwei verschiedene Wertepaare für x und y.

Lösungen:

$$1)\; x = \frac{11}{3}; \quad y = -\frac{1}{3}; \quad z = \frac{2}{3}$$

$$2)\; x = 2; \quad y = 3; \quad z = -1$$

243. Die erste Gleichung wird in die zweite Potenz erhoben, die zweite Gleichung in die dritte Potenz, und die dritte Gleichung wird quadriert, nachdem auf beiden Seiten $\sqrt{6x}$ addiert wurde. Man erhält dann das Gleichungssystem

$$4x + y - 3z = -3$$

$$5x + 2y + z = 1{,}5$$

$$6x - y - z = 0.$$

Lösung:

$$x = \frac{9}{58}; \quad y = -\frac{6}{29}; \quad z = \frac{33}{29}$$

244. Man quadriert die erste Gleichung, subtrahiert davon die zweite und erhält:

$$xy + xz + yz = 54.$$

Auf Grund der dritten Gleichung kann man die ersten zwei Summanden der gefundenen Gleichung durch $2yz$ ersetzen.
Man erhält

$$3yz = 54 \quad \text{oder} \quad (1)\; yz = 18.$$

Jetzt kann man die dritte Gleichung in der Form

$$xy + xz = 2 \cdot 18 \quad \text{oder} \quad (2)\ x(y + z) = 36$$

angeben.

Da die erste Gleichung die Form

$$(3) \qquad x + (y + z) = 13$$

hat, ist es möglich, aus den Gleichungen (2) und (3) x und $y + z$ zu ermitteln. Man erhält

$$x = 9 \quad \text{und} \quad x = 4$$
$$y + z = 4 \qquad y + z = 9.$$

Zur Bestimmung der Werte von x und y wird nun auch die Gleichung (1) herangezogen. Es ergeben sich zwei Gleichungssysteme:

$$\text{I)}\ y + z = 4 \quad \text{und} \quad \text{II)}\ y + z = 9$$
$$yz = 18 \qquad\qquad yz = 18.$$

Bemerkung: Beim Quadrieren der ersten Gleichung könnte es passieren, daß eine unechte Lösung auftritt. Wenn aber eine solche Lösung auftreten würde, müßte sie die Gleichung $x + y + z = -13$ erfüllen. Das stünde jedoch im Widerspruch zur Gleichung (3).

Lösungen:

1) $x = 9;\quad y = 2 + i\sqrt{14};\quad z = 2 - i\sqrt{14}$

2) $x = 9;\quad y = 2 - i\sqrt{14};\quad z = 2 + i\sqrt{14}$

3) $x = 4;\quad y = 6;\quad z = 3$

4) $x = 4;\quad y = 3;\quad z = 6$

245. Die dritte Gleichung kann zunächst folgendermaßen umgeformt werden:

$$z^2 - xz - yz + xy = 2.$$

Die dritte Gleichung addiert man nun in dieser Form zur zweiten und erhält:

$$z^2 + 2xy = 49$$

oder

$$z^2 = 49 - 2xy.$$

Diesen Ausdruck setzt man in die erste Gleichung ein. Nach Umformung ergibt sich daraus:

$$(x + y)^2 = 49,$$

d. h.

$$x + y = \pm 7.$$

Im folgenden wird nun zuerst mit $x + y = 7$ weiter gerechnet.

Die zweite Gleichung wird auf die Form

$$xy + z(x + y) = 47$$

gebracht, und man substituiert

$$xy = \frac{49 - z^2}{2} \quad \text{[aus (1)]} \quad \text{und} \quad x + y = 7.$$

Man erhält die quadratische Gleichung

$z^2 - 14z + 45 = 0$ mit den Lösungen

$z_1 = 5; \; z_2 = 9.$

Für $z = 5$ ist $xy = \dfrac{49 - z^2}{2} = 12,$

für $z = 9$ ist $xy = \dfrac{49 - z^2}{2} = -16.$

Es entstehen zwei Gleichungssysteme:

$$\text{I)}\; x + y = 7 \quad \text{und} \quad \text{II)}\; x + y = 7$$
$$xy = 12 \qquad\qquad xy = -16.$$

Diese Systeme ergeben wiederum je zwei Lösungspaare:

1) $x = 3; \; y = 4; \; z = 5$

2) $x = 4; \; y = 3; \; z = 5$

3) $x = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}; \; y = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}; \; z = 9$

4) $x = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}; \; y = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}; \; z = 9.$

Weiterhin ist $x + y = -7$ zu betrachten. Es ergeben sich auf die gleiche Art und Weise weitere vier Lösungen.

Lösungen:

1) 1 bis 4 (s. o.)

5) $x = -3; \; y = -4; \; z = -5$

6) $x = -4; \; y = -3; \; z = -5$

7) $x = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2}; \; y = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2}; \; z = -9$

8) $x = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2}; \; y = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2}; \; z = -9$

246. Man subtrahiert zuerst die zweite und dann die dritte Gleichung von der ersten und erhält auf diese Weise:

$$(1) \qquad (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2)x + (a - b)y = 0$$

$$(2) \qquad (a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)x + (a - c)y = 0.$$

Dann dividiert man die Gleichung (1) durch $(a - b)$ und die Gleichung (2) durch $(a - c)$:

$$(1a) \qquad (a^2 + ab + b^2) + (a + b)x + y = 0$$

$$(2a) \qquad (a^2 + ac + c^2) + (a + c)x + y = 0.$$

Subtrahiert man schließlich (2a) von (1a), so erhält man den Wert für die Unbekannte x:

$$(ab - ac + b^2 - c^2) + (b - c)x = 0$$

$$x = -\frac{ab - ac + b^2 - c^2}{b - c} = -(a + b + c).$$

Die Unbekannte y kann man nun mit Hilfe der Gleichungen (1a) oder (2a) bestimmen und anschließend aus einer der Gleichungen auch z.

Lösung:

$$x = -(a + b + c); \quad y = ab + bc + ca; \quad z = -abc$$

247. Man substituiert $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = u; \quad \dfrac{1}{\sqrt{y + \frac{1}{4}}} = v$

und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$12u + 5v = 5,$$

$$8u + 10v = 6$$

mit den Lösungen:

$$u = \frac{1}{4}; \quad v = \frac{2}{5}.$$

Setzt man diese Werte von u und v in die Substitutionsgleichungen ein, so ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen für x bzw. y, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{y + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{5}.$$

Lösung:

$$x = 17; \; y = 6$$

248. Unter Verwendung der zweiten Gleichung kann die erste folgende Form erhalten:

$$10 - 2\sqrt{xy} = 4,$$

$$xy = 9.$$

Man stellt nun das Gleichungssystem

$$x + y = 10$$

$$xy = 9$$

auf und erhält die

Lösungen:

1) $x = 9;\ y = 1$ 2) $x = 1;\ y = 9.$

249. Man substituiert $\sqrt{\dfrac{3x}{x+y}} = z$ und bringt die erste Gleichung auf die Form $z - 2 + \dfrac{1}{z} = 0$, woraus $z = 1$, d. h. $\sqrt{\dfrac{3x}{x+y}} = 1$, folgt. Aus dieser Gleichung erhält man $y = 2x$ und setzt in die zweite Gleichung ein.

Lösungen:

1) $x = 6;\ y = 12$ 2) $x = -4{,}5;\ y = -9$

250. Die erste Gleichung bringt man auf die Form

$$\sqrt[3]{x^2 + y^2} = 2\sqrt[3]{17},$$

woraus

(1) $\qquad x^2 + y^2 = 136$

folgt.

Wenn man ferner die zweite Gleichung quadriert, erhält man

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 18 - x,$$

d. h.

(2) $\qquad y^2 = 36x - 324.$

Den Ausdruck für y^2 in (2) setzt man in (1) ein. Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 36x - 460 = 0$$

mit den Wurzeln $x_1 = 10$ und $x_2 = -46$. Setzt man schließlich diese Werte in (2) ein, so findet man die Werte von y.

Es ergeben sich vier Lösungen:

1) $x = 10;\ y = 6$ 2) $x = 10;\ y = -6$

3) $x = -46;\ y = 6\sqrt{55}\, i$ 4) $x = -46;\ y = -6\sqrt{55}\, i.$

Die dritte und vierte Lösung sind nicht verwendbar.

Begründung:

In den Wurzeln $\sqrt{x+y}$ und $\sqrt{x-y}$ muß es sich nämlich um Wurzeln gemäß (I) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel handeln, die aber für komplexe Radikanden nicht erklärt sind.

Lösungen:

1) $x = 10;\ y = 6$ 2) $x = 10;\ y = -6$

251. Das System ist nur für $a \geqq 0$ sinnvoll (siehe Vorbemerkung). Man quadriert die erste Gleichung:

$$(1) \qquad \sqrt{x^2 - y^2} = 8a - x.$$

Diesen Ausdruck setzt man in die zweite Gleichung ein:

$$(2) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = (\sqrt{41} + 5)\, a - x.$$

Anschließend werden die Gleichungen (1) und (2) quadriert. Somit erhält man das Gleichungssystem

$$(1\text{a}) \qquad y^2 = -64a^2 + 16ax$$

$$(2\text{a}) \qquad y^2 = (\sqrt{41} + 5)^2 a^2 - 2(\sqrt{41} + 5)\, ax.$$

Aus diesem System kann y durch Gleichsetzen eliminiert werden. Nach Umformung erhält man

$$(130 + 10\sqrt{41})a^2 = (26 + 2\sqrt{41})ax,$$

also

$$x = 5a.$$

Mit Hilfe des Wertes $x = 5a$ kann man dann aus (1a) $y = \pm 4a$ ermitteln.

Lösungen:

1) $x = 5a;\ y = 4a$ 2) $x = 5a;\ y = -4a$

252. Man quadriert die erste Gleichung. Man erhält

$$2x^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4} = y^2$$

und ersetzt den Radikanden $x^4 - y^4$ mit Hilfe der zweiten Gleichung durch $144a^4$.

Nach Umformung ergibt sich dann

(1) $\qquad y^2 = 2x^2 - 24a^2.$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird y^4 gebildet. Der dafür gefundene Ausdruck wird dann in die zweite der gegebenen Gleichungen eingesetzt. Es entsteht

$$x^4 - 32a^2x^2 + 240a^4 = 0,$$

woraus

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{20}\,a \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{12}\,a$$

folgen.
Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (1) erhält man die entsprechenden Werte für y, und zwar für $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}\,a$ die Werte $y_{1,2} = \pm 4a$ und für $x_{3,4} = \pm\sqrt{12}\,a$ die Werte $y_{3,4} = 0$.
Die Probe zeigt, daß von diesen vier Lösungspaaren ein Lösungspaar für $a > 0$ unbrauchbar ist, während die anderen für $a < 0$ unbrauchbar sind. Das soll am Beispiel des Lösungspaares $x_1 = a\sqrt{20}$; $y_1 = 4a$ gezeigt werden. Setzt man das Lösungspaar in die erste Gleichung ein, so erhält man $\sqrt{36a^2} - \sqrt{4a^2} = 4a$, d. h. $6\,|a| - 2\,|a| = 4a$. Diese Relation führt im Fall $a \geqq 0$ zur Identität, im Fall $a < 0$ ist sie aber nicht richtig.

Lösungen: Für $a \geqq 0$ lauten die Lösungen:

1) $x = a\sqrt{20};\ y = 4a;$ $\qquad$ 2) $x = -a\sqrt{20};\ y = 4a$

3) $x = a\sqrt{12};\ y = 0$ $\qquad$ 4) $x = -a\sqrt{12};\ y = 0.$

Für $a < 0$ lauten die Lösungen:

5) $x = a\sqrt{20};\ y = -4a$ $\qquad$ 6) $x = -a\sqrt{20};\ y = -4a.$

253. *Erstes Verfahren:*
Die zweite Gleichung wird umgeformt in

$$x + y = 14 - \sqrt{xy}$$

und quadriert:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 196 + xy - 28\sqrt{xy}$$

$$x^2 + y^2 + xy = 196 - 28\sqrt{xy}.$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung findet man

$$84 = 196 - 28\sqrt{xy},$$

d. h.

$$\sqrt{xy} = 4 \quad \text{oder} \quad xy = 16.$$

4. Logarithmische Gleichungen und Exponentialgleichungen

Vorbemerkungen

Bei Aufnahmeprüfungen werden nicht selten Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen, in denen Logarithmen zu verschiedenen Basen auftreten, verlangt (z. B. in den Aufgaben 267 und 268 sowie in den Aufgaben 309 bis 313). Aus diesen Gründen ist es vorteilhaft, zu zeigen, daß sich alle Logarithmen als Logarithmen mit gemeinsamer Basis darstellen lassen. Hierzu kann man die folgenden Formeln heranziehen.

1. Die Formel

$$(1) \qquad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

ermöglicht uns, zu Logarithmen überzugehen, die durch Vertauschung von Basis und Numerus entstehen, z. B.

$$\log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} = \frac{1}{3}.$$

Erklärung: Um $\log_2 8$ zu bestimmen, muß man den Exponenten suchen, mit dem man 2 potenzieren muß, um 8 zu erhalten. Aus diesem Grunde sind $\log_2 8 = 3$ und $2^3 = 8$ gleichbedeutende Schreibweisen. Die letzte Gleichung läßt sich auch so schreiben:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \text{d. h.} \quad 8^{\frac{1}{3}} = 2,$$

mit anderen Worten

$$\log_8 2 = \frac{1}{3}.$$

Allgemein kann man die Gleichung $a^x = b$ auch folgendermaßen schreiben: $b^{\frac{1}{x}} = a$.

Die erste Gleichung ist äquivalent mit $x = \log_a b$, die zweite ist äquivalent mit $\frac{1}{x} = \log_b a$.

Damit ist die Formel bewiesen.

2. Die Formel (1) ist ein Spezialfall der wesentlich allgemeineren Formel

$$\text{(2)} \qquad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

die folgenden wichtigen Sachverhalt ausdrückt. Wenn der Logarithmus einer beliebigen Zahl zur Basis b bekannt ist, kann man den Logarithmus derselben Zahl zur Basis a bestimmen, indem man diesen bekannten Logarithmus durch den Logarithmus der neuen Basis zur alten Basis ($\log_b a$) dividiert.
Anstatt durch $\log_b a$ zu dividieren, kann man auch mit $\log_a b$ multiplizieren [vgl. Sie hierzu mit Gleichung (1)!]:

$$\text{(3)} \qquad \log_a N = \log_a b \cdot \log_b N.$$

Der Faktor $\log_a b$ wird als **Modul der Umrechnung** (von einem Logarithmensystem zur Basis b in ein Logarithmensystem zur Basis a) bezeichnet.
Beispiel: Wir haben eine Tafel der dekadischen Logarithmen und wollen eine solche der Logarithmen zur Basis 2 aufstellen. Dazu brauchen wir nur Divisionen durch $\lg 2 = 0{,}3010$ oder Multiplikationen mit $\log_2 10 = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}322$ durchzuführen. Auf diese Weise würde man beispielsweise für $\log_2 3$ erhalten:

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = 1{,}585.$$

Erklärung: Die Definitionsgleichung dieser Logarithmen lautet:

$$2^{\log_2 3} = 3.$$

Logarithmieren wir diese Gleichung zur Basis 10, so erhalten wir

$$\log_2 3 \cdot \lg 2 = \lg 3$$

oder

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2}.$$

Ebenso führt die Gleichung $a^{\log_a N} = N$, wenn sie zur Basis b logarithmiert wird, auf die Formel (2).

254. *Erstes Verfahren:*

$$x = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)} = 10 \cdot 10^{\lg 9 - 2\lg 2} = 10 \cdot 10^{\lg \frac{9}{4}}.$$

Nach der Definitionsgleichung des Logarithmus ist $10^{\lg \frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$,
d. h. $x = 10 \cdot \frac{9}{4} = 22{,}5.$

Lösung: $x = 22{,}5$

Zweites Verfahren:
Wenn man beide Seiten der Gleichung logarithmiert, so erhält man

$$\lg x = \lg 10 + \left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)\lg 100$$

oder

$$\lg x = \lg 10 + \lg 9 - 2\lg 2 = \lg\frac{10 \cdot 9}{2^2}.$$

Lösung: $x = 22{,}5$

255. Man verfährt wie in Aufgabe 254 (*Zweites Verfahren*) und erhält

$$\lg x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lg 4\right)\lg 100$$

$$\lg x = 1 - \frac{1}{2}\lg 4 = \lg\frac{10}{\sqrt{4}}; \quad x = \frac{10}{\sqrt{4}}.$$

Lösung: $x = 5$

256. Ähnlich wie in den vorangegangenen Aufgaben erhält man

$$\lg x = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\lg 16\right)\lg 10 = 1 + \frac{1}{4}\lg 16 = \lg(10\sqrt[4]{16})$$

$$x = 10\sqrt[4]{16}.$$

Lösung: $x = 20$

257. *Erstes Verfahren:*

$$x = 7^{2-2\log_7 2} + \frac{1}{5^{\log_5 4}} = \frac{7^2}{7^{\log_7 4}} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$$

(Vgl. Sie auch mit der Lösung der Aufgabe 254, *erstes Verfahren*!)

Zweites Verfahren:
Man setzt $49^{1-\log_7 2} = y$ und $5^{-\log_5 4} = z$.
Dann gilt: $x = y + z$.
Wie im ersten Verfahren ergibt sich

$$\log_7 y = (1 - \log_7 2)\log_7 49$$

oder

$$\log_7 y = (\log_7 7 - \log_7 2)\, 2 = 2 \log_7 \frac{7}{2} = \log_7 \frac{49}{4}.$$

Hier ist $y = \frac{49}{4}$. Analog erhält man $z = \frac{1}{4}$.

Dann folgt $x = \frac{25}{2}$.

Lösung: $x = \frac{25}{2}$

258. Es ist $\log_4 \log_3 \log_2 x = \log_4 1$ gegeben.
Daraus folgt $\log_3 \log_2 x = 1$, d. h. $\log_2 x = 3$.

Lösung: $x = 8$

259. Genau wie in der Aufgabe 258 erhält man

$$1 + \log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)] = 1$$

$$\log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)] = 0$$

und weiter:

$$1 + \log_c(1 + \log_p x) = 1$$

$$\log_c(1 + \log_p x) = 0$$

$$1 + \log_p x = 1; \quad \log_p x = 0.$$

Lösung: $x = 1$

260. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer muß größer als Null sein, weil es für einen verschwindenden oder negativen Numerus keinen reellen Logarithmus zur Basis 4 gibt. Man formt deshalb die gegebene Gleichung folgendermaßen um:

$$2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)] = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}.$$

Man verwendet nur den positiven Wert von $\sqrt{4}$, d. h. 2. Analoge Umformung wendet man auf $\log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)] = 1$ an:

$$1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x) = 3,$$

$$\log_2 (1 + 3 \log_2 x) = 2.$$

Folglich ist $1 + 3 \log_2 x = 4$,

$$\log_2 x = 1.$$

Lösung: $x = 2$

261. Die gegebene Gleichung bringt man auf die Form:

$$\log_2 (x + 14)(x + 2) = 6 \quad \text{oder} \quad (x + 14)(x + 2) = 2^6 = 64.$$

Dann erhält man $x^2 + 16x - 36 = 0$,

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -18.$$

Die Lösung x_2 ist nicht brauchbar, weil auf der linken Seite der Gleichung die Ausdrücke $\log_2 (x + 14)$ und $\log_2 (x + 2)$ auftreten, die bekanntlich für negatives x keine Bedeutung mehr haben.

Lösung: $x = 2$

262. Man bringt die gegebene Gleichung auf die Form

$$\log_a [y (y + 5) \cdot 0{,}02] = 0.$$

Man findet dann

$$y (y + 5) \cdot 0{,}02 = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 + 5y - 50 = 0$$

mit

$$y_1 = 5; \quad y_2 = -10.$$

Die zweite Lösung ist nicht brauchbar. (Vergleichen Sie auch mit der Erklärung in der Lösung der Aufgabe 261!)

Lösung: $y = 5$

263. Man erhält durch Umformung:

$$\lg (35 - x^3) = 3 \lg (5 - x) \quad \text{oder} \quad \lg (35 - x^3) = \lg (5 - x)^3.$$

Dann gilt

$$35 - x^3 = (5 - x)^3,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

264. Es wird zuerst der Ausdruck in der eckigen Klammer umgeformt in

$$b - \frac{(3a - b)(a^2 + ab)^{-1}}{b^{-2}} = \frac{b (a - b)^2}{a (a + b)}.$$

Dann erhält die gegebene Gleichung folgendes Aussehen:

$$1 + \lg x = \frac{1}{3} \lg \frac{b (a - b)^2}{a (a + b)} - \frac{4}{3} \lg b + \frac{1}{3} \lg [a (a + b)(a - b)].$$

Jetzt wendet man auf der rechten Seite der Gleichung die Gesetze für das Logarithmieren von Produkten und Quotienten an:

$$1 + \lg x = \lg(a - b) - \lg b.$$

Man kann 1 als lg 10 auffassen und schreiben

$$\lg 10 + \lg x = \lg(a - \mathrm{b}) - \lg b$$

oder

$$\lg(10x) = \lg \frac{a - b}{b}.$$

Folglich ist

$$10x = \frac{a - b}{b}.$$

Lösung: $x = \dfrac{a - b}{10b}$

265. Die gegebene Gleichung vereinfacht man folgendermaßen:

$$\lg\left(x - \frac{a}{\sqrt{1 - a}}\right) = \lg\sqrt{1 + \frac{1}{a}} + \lg\sqrt{\frac{a(1 - a)}{1 + a}}.$$

Potenziert man 10 mit beiden Seiten der Gleichung, so erhält man

$$x - \frac{a}{\sqrt{1 - a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\sqrt{\frac{a(1 - a)}{1 + a}}$$

$$x - \frac{a}{\sqrt{1 - a}} = \sqrt{1 - a}.$$

Lösung: $x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - a}}$

266. Die gegebene Gleichung kann man folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{2}\log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - 2{,}25 = \left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2.$$

Da $\log_x x = 1$ ist, ergibt die Umformung

$$(\log_x 5)^2 - 6\log_x 5 + 5 = 0.$$

Wenn man diese quadratische Gleichung für die Unbekannte $\log_x 5$ löst, so erhält man

$$(\log_x 5)_1 = 5; \quad (\log_x 5)_2 = 1,$$

d. h.

$$\log_{x_1} 5 = 5 \quad \text{und} \quad \log_{x_2} 5 = 1.$$

Lösungen:

$$x_1 = \sqrt[5]{5}; \quad x_2 = 5$$

267. *Erstes Verfahren:*

Man substituiert $\log_{16} x = z$, d. h. $x = 16^z$ und erhält

$$\log_4 x = z \log_4 16 = 2z \quad \text{und} \quad \log_2 x = z \log_2 16 = 4z.$$

Die gegebene Gleichung bringt man damit auf die Form

$$z + 2z + 4z = 7,$$

d. h.

$$z = 1.$$

Zweites Verfahren:

Man bringt alle Logarithmen auf die Basis 2. Nach Formel (2) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel erhält man

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2},$$

analog

$$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{4}.$$

Es entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7, \quad \log_2 x = 4.$$

Lösung: $x = 16$

268. Die Berechnung erfolgt wie in Aufgabe 267.

Lösung: $x = a$

269. Die gegebene Gleichung bringt man auf die Form

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}, \quad 3x - 7 = 3 - 7x.$$

Lösung: $x = 1$

274. Es gilt $\frac{\lg 4}{\lg 8} = \frac{2 \lg 2}{3 \lg 2} = \frac{2}{3}$. Darum bringt man die gegebene Gleichung auf die Form

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{(1-x)3} = \frac{2}{3}.$$

Es folgt: $2x + 3(1 - x) = 1$.

Lösung: $x = 2$

275. Die gegebene Gleichung wird auf die Form

$$2^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 2^2$$

gebracht.
Durch Exponentenvergleich erhält man

$$\frac{3\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = 2 \quad \text{oder} \quad 2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0.$$

Man substituiert nun $\sqrt{x} = z$, wodurch die Gleichung übergeht in

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \quad \text{mit} \quad z_1 = 3; \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die zweite Lösung ist nicht brauchbar, da in $\sqrt{x} = z$ gemäß den Bedingungen (I) der Vorbemerkung zum Kapitel 2 der Wert z nichtnegativ sein muß. Also bleibt nur z_1, das, in $z = \sqrt{x}$ eingesetzt, die Lösung $x = 9$ ergibt.

Lösung: $x = 9$

276. Man formt die gegebene Gleichung folgendermaßen um:

$$2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}.$$

Dann folgt:

$$1 + \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x} - 1},$$

und man erhält $3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0$.
Setzt man hierin $\sqrt{x} = z$, so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$3z^2 - 8z - 3 = 0 \quad \text{mit} \quad z_1 = 3; \quad z_2 = -\frac{1}{3}.$$

Die zweite Lösung $z_2 = -\frac{1}{3}$ ist nicht brauchbar (siehe Aufgabe 275).

Lösung: $x = 9$

277. Man formt die gegebene Gleichung folgendermaßen um:

$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}} = a^0.$$

Es folgt:

$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4} = 0.$$

Nach einigen Umformungen erhält man $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Lösungen:

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -3$$

278. Unter Verwendung der Formel (1) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel erhält man

$$\frac{3}{\log_x x + 2\log_x a} + \frac{1}{2(\log_x x - \frac{1}{2}\log_x a)} = 2$$

oder

$$\frac{3}{1 + 2\log_x a} + \frac{1}{2 - \log_x a} = 2.$$

Diese Gleichung wird nach $\log_x a$ aufgelöst:

$$(\log_x a)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}.$$

Lösungen:

$$x_1 = a; \quad x_2 = a^{\frac{4}{3}}$$

279. Nach der Formel (2) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel gilt:

$$\log_x 2 = \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = \frac{1}{2\log_4 x}.$$

Damit erhält die gegebene Gleichung die folgende Form:

$$\log_4 (x + 12) = 2\log_4 x,$$

d. h.

$$x + 12 = x^2.$$

Man verwendet nur die positive Wurzel $x = 4$, denn $\log_x 2$ ist für negatives x im Reellen nicht erklärt.

Lösung: $x = 4$

280. Die gegebene Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$(\log_x 5 + 2)(\log_5 x)^2 = 1.$$

Da $\log_x 5 = \dfrac{1}{\log_5 x}$ ist, entsteht

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right)(\log_5 x)^2 = 1.$$

Man löst diese Gleichung nach $\log_5 x$ auf und findet

$$(\log_5 x)_1 = \frac{1}{2}, \quad (\log_5 x)_2 = -1.$$

Lösungen:

$$x_1 = \sqrt{5}; \quad x_2 = \frac{1}{5}$$

281. Die linke Seite der Gleichung ist die Summe einer geometrischen Reihe mit $x + 1$ Gliedern. Für $a \neq 1$ gilt deshalb:

$$\frac{1 - a^{x+1}}{1 - a} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

$$1 - a^{x+1} = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

$$1 - a^{x+1} = 1 - a^{16}.$$

Also ist $a^{x+1} = a^{16}$ und damit $x + 1 = 16$,

$$x = 15.$$

Für $a = 1$ ist die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Reihe nicht anwendbar. In diesem Falle ist die linke Seite der gegebenen Gleichung die Summe von $(x + 1)$ gleichen Summanden der Größe 1, so daß die Gleichung die Form $x + 1 = 16$ erhält.
Man erhält erneut $x = 15$.

Lösung: $x = 15$

282. Die gegebene Gleichung stellt man folgendermaßen dar:

$$5^{2+4+6+\cdots+2x} = 5^{56}.$$

Es folgt: $2 + 4 + \cdots + 2x = 56$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x = 28.$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine arithmetische Reihe mit n Gliedern. Mit Hilfe der Summenformel erhält man:

$$\frac{(1+x)\,x}{2} = 28$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 7; \quad x_2 = -8.$$

Die zweite Lösung ist unbrauchbar, weil in der Aufgabe das Symbol x eine positive ganze Zahl verkörpert.

Lösung: $x = 7$

283. Die gegebene Gleichung wird in die Form

$$2^{2x} \cdot 2^{-4} - 17 \cdot 2^x \cdot 2^{-4} + 1 = 0$$

umgeschrieben.

Man substituiert $2^x = z$ und erhält

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

mit

$$z_1 = 16, \qquad z_2 = 1.$$

Lösungen:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 0$$

284. Wie in der Aufgabe 283 ersetzt man 4^x durch z und erhält die quadratische Gleichung $2z^2 - 17z + 8 = 0$.

Lösungen:

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

285. Man substituiert $9^{\frac{1}{x}} = z$ und erhält $3z^2 - 10z + 3 = 0$.

Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2$$

286. Man logarithmiert die gegebene Gleichung zur Basis 10 und erhält

$$\frac{\lg x + 7}{4} \lg x = \lg x + 1$$

oder

$$\lg^2 x + 3 \lg x - 4 = 0.$$

Es sind dann

$$\lg x_1 = 1, \quad \lg x_2 = -4.$$

Lösungen: $x_1 = 10, \quad x_2 = 0{,}0001$

287. Man formt diese Gleichung so um, daß jede Seite der Gleichung nur noch einen Logarithmus aufweist. Deshalb faßt man auf der linken Seite der Gleichung das Glied 1 als lg 10 auf. Dann entsteht folgende Gleichung:

$$\lg \frac{4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \lg \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{2^2}.$$

Aus der Gleichheit der Logarithmen folgt die Gleichheit der Numeri:

$$\frac{4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man die Gleichung

$$2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 24 = 0.$$

Weil $2^{\sqrt{x}} = \left(2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$ gilt, setzt man $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = z$

und gewinnt so die Gleichung $z^2 - 5z - 24 = 0$.
Die Wurzeln dieser Gleichung sind $z_1 = 8$; $z_2 = -3$. Für $z_1 = 8$ erhält man

$$2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 8, \quad \text{daraus} \quad \frac{\sqrt{x}}{2} = 3,$$

d. h. $x = 36$. Die zweite Wurzel führt zur Gleichung

$$2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = -3.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, denn keine Potenz mit der positiven Basis 2 hat einen negativen Potenzwert.

Lösung: $x = 36$

288. Nacheinander findet man auf gleiche Weise wie in der Aufgabe 287:

$$2\lg\frac{2}{10} + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg\left(\frac{5}{5^{\sqrt{x}}} + 5\right)$$

$$\lg\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 (5^{\sqrt{x}} + 1)\right] = \lg\left(\frac{5(1 + 5^{\sqrt{x}})}{5^{\sqrt{x}}}\right)$$

(1) $$\frac{1}{25}(5^{\sqrt{x}} + 1) = \frac{5(1 + 5^{\sqrt{x}})}{5^{\sqrt{x}}}.$$

Nach entsprechender Umformung entsteht

$$5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0,$$

wobei $5^{\sqrt{x}} = 125$ oder $5^{\sqrt{x}} = -1$ ist. Die zweite Gleichung hat keine Lösung, die erste ergibt $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$. Die Gleichung (1) könnte man auch anders lösen, indem man sie durch $5^{\sqrt{x}} + 1 \neq 0$ dividiert.
Man erhält dann

$$\frac{1}{25} = \frac{5}{5^{\sqrt{x}}} \quad \text{und daraus} \quad 5^{\sqrt{x}} = 125.$$

Lösung: $x = 9$

289. Man bringt die gegebene Gleichung auf die Form

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1}.$$

Die Faktoren $5^{\lg x}$ und $3^{\lg x}$ werden ausgeklammert:

$$5^{\lg x}(1 + 5^{-1}) = 3^{\lg x}(3 + 3^{-1}).$$

Die weitere Rechnung verläuft dann folgendermaßen:

$$\frac{5^{\lg x}}{3^{\lg x}} = \frac{25}{9}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

$$\lg x = 2.$$

Lösung: $x = 100$

290. Logarithmiert man die Gleichung zur Basis 10, so erhält man

$$2\lg^4 x - 1{,}5\lg^2 x = \frac{1}{2}.$$

Diese biquadratische Gleichung mit der Unbekannten $\lg x$ hat zwei reelle Lösungen. Aus $\lg x_1 = 1$ und $\lg x_2 = -1$ folgen nämlich die

Lösungen: $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}1$.

291. Wenn man potenziert, erhält man

$$64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1 \quad \text{oder} \quad 2^{x^2-40x} = \left(\frac{1}{64}\right)^{24},$$

d. h. $2^{x^2-40x} = 2^{-6\cdot 24}$ und daraus $x^2 - 40x + 144 = 0$.

Lösungen: $x_1 = 36$; $x_2 = 4$

292. Laut Definitionsgleichung der Logarithmen ist die gegebene Gleichung der Gleichung $9 - 2^x = 2^{3-x}$ äquivalent.
Es gilt also

$$9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$$

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Löst man diese Gleichung (sie ist quadratisch in der Unbekannten 2^x), so erhält man die

Lösungen: $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

293. Wie in der Aufgabe 288 erhält man

$$2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung kann man 2^{x-2} folgendermaßen umformen:

$$2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x.$$

Entsprechend gilt auf der linken Seite die Vereinfachung:

$$4^{x-2} = 4^x \cdot 4^{-2} = \frac{1}{16} \cdot 4^x.$$

Man gelangt auf diese Weise zu der Gleichung

$$2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0,$$

woraus, analog zu den vorangegangenen Fällen, $x_1 = 4$ und $x_2 = 2$ folgen.

Lösungen: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$

294. Man addiert auf beiden Seiten der Gleichung den Ausdruck

$$\lg(\sqrt[x]{3} + 27) = 0.$$

Dann erhält man wie in Aufgabe 288:

$$4 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27.$$

Auf der linken Seite läßt sich die folgende Umformung vornehmen:

$$3^{1+\frac{1}{2x}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}.$$

Daraus erhält man

$$12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27.$$

Setzt man $3^{\frac{1}{2x}} = z$, dann gilt es zu beachten, daß

$$\left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{x}}$$

ist. So entsteht die Gleichung $z^2 - 12z + 27 = 0$ mit den Wurzeln $z_1 = 9$, $z_2 = 3$.

Lösungen: $x_1 = \dfrac{1}{4}$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$

295. Potenziert man (siehe Lösung der Aufgabe 288), so hat man

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100} = \frac{\sqrt[4]{16}}{4^{\sqrt{x+0,25}}}.$$

Diese Gleichung kann auf die Form

$$\frac{1}{100}\left(3^{\sqrt{4x+1}} - \frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right) = \frac{2}{2^{\sqrt{4x+1}}}$$

gebracht werden.
Man erhält nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$6^{\sqrt{4x+1}} - 16 = 200, \quad \text{d. h.} \quad 6^{\sqrt{4x+1}} = 6^3$$

mit der

Lösung: $x = 2$.

296. Man bringt die gegebene Gleichung auf die Form

$$4 \lg 2 + 2 \lg(x-3) = \lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3 .$$

Potenziert man 10 mit beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man

$$2^4(x-3)^2 = 3(7x+1)(x-6).$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$x_1 = 9; \quad x_2 = -3{,}6.$$

Die zweite Wurzel ist nicht brauchbar, weil sich damit $x-3 = -6{,}6$ ergeben würde, d. h., der Ausdruck $\lg(x-3)$ wäre im Reellen nicht erklärt. (Ebenso läßt sich das auch an den Ausdrücken $\lg(7x+1)$ und $\lg(x-6)$ zeigen.)

Lösung: $x = 9$

297. Die rechte Seite der Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$-\log_5(0{,}2 - 0{,}2 \cdot 5^{x-3}) = -\log_5 0{,}2 - \log_5(1 - 5^{x-3}).$$

Die Differenz $(x-3)$ drückt man als $\log_5 5^{x-3}$ aus.
Nach diesen Veränderungen erhält man die Gleichung

$$\log_5 120 + \log_5 5^{x-3} + \log_5 0{,}2 = 2\log_5(1 - 5^{x-3}) - \log_5(1 - 5^{x-3})$$

oder

$$120 \cdot 0{,}2 \cdot 5^{x-3} = 1 - 5^{x-3}.$$

Lösung: $x = 1$

298. Die gegebenen Gleichungen werden folgendermaßen umgeformt:

$$2^{6x+3} = 2^{4y+4}$$

$$5^{1+x-y} = 5^{\frac{4y+2}{2}}.$$

Durch Exponentenvergleiche erhält man:

$$6x - 4y = 1$$

$$x - 3y = 0.$$

Lösung: $x = \frac{3}{14}$; $y = \frac{1}{14}$

299. Man potenziert die Identität $3 \equiv 3$ mit beiden Seiten der ersten Gleichung und erhält das Gleichungssystem

$$xy = 1,$$

$$x + y = \frac{10}{3}.$$

Lösungen:

$$x_1 = 3; \quad y_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}; \quad y_2 = 3$$

300. In der Algebra betrachten wir gewöhnlich nur Logarithmen positiver Numeri zu positiven Basen. Andere Werte haben im allgemeinen keine reellen Logarithmen. Deshalb müssen wir beachten, daß die bekannten Werte a und b (die Basen der Logarithmen) positiv und die unbekannten Numeri x und y auch positiv sind.

Durch Potenzieren findet man das Gleichungssystem

$$xy = a^2$$

$$\frac{x}{y} = b^4.$$

Dieses System hat zwei Lösungen:

1) $$x = ab^2; \quad y = \frac{a}{b^2},$$

2) $$x = -ab^2; \quad y = -\frac{a}{b^2}.$$

Die zweite Lösung ist jedoch nicht brauchbar, weil für positive a und b negative x und y entstehen.

Lösung: $x = ab^2; \quad y = \dfrac{a}{b^2}$

301. Durch Potenzieren erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{x^2 + y^2}{10} = 13,$$

$$\frac{x + y}{x - y} = 8.$$

Aus der zweiten Gleichung setzt man $y = \frac{7}{9}x$ in die erste Gleichung ein und errechnet die beiden Lösungen

$$1)\ x_1 = 9; \quad y_1 = 7 \quad \text{und} \quad 2)\ x_2 = -9; \quad y_2 = -7,$$

von denen die zweite unbrauchbar ist, weil unter dieser Bedingung $x + y < 0$ und $x - y < 0$ wären. Vergleichen Sie auch mit der Lösung der Aufgabe 300!

Lösung: $x = 9; \quad y = 7$

302. Durch Potenzieren entsteht das Gleichungssystem

$$x - y = xy$$

$$x + y = 1.$$

Dieses System hat zwei Lösungen:

$$1)\ x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{und}$$

$$2)\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Für die erste Lösung gilt

$$x - y = xy = -2 + \sqrt{5} > 0.$$

Für die zweite Lösung erhält man

$$x - y = xy = -2 - \sqrt{5} < 0.$$

Die zweite Lösung ist nicht brauchbar, weil die Basis der Logarithmen $x \cdot y$ positiv sein muß (vgl. Aufgabe 300).

Lösung: $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

303. Wenn man potenziert, erhält man das Gleichungssystem

$$1 + \frac{x}{y} = \frac{a^2}{y}$$

$$xy = b^4$$

oder

$$x + y = a^2$$

$$xy = b^4.$$

Dieses System hat zwei Lösungen:

$$1)\ x_1 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}; \quad y_1 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2} \quad \text{und}$$

$$2)\ x_2 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}; \quad y_2 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}.$$

Als Basen der Logarithmen sind a und b positiv. Beide Werte treten unter der Wurzel auf, so daß folgende Fälle betrachtet werden müssen:

$$\text{a) } a^4 < 4b^4, \quad \text{d. h.} \quad a < b\sqrt{2}$$

und

$$\text{b) } a^4 \geqq 4b^4, \quad \text{d. h.} \quad a \geqq b\sqrt{2}.$$

Im ersten Fall hat das System keine Lösung, weil x und y komplex sind. Im zweiten Fall sind x und y nicht nur reell, sondern auch positiv, weil die Summe $x + y = a^2$ und das Produkt $xy = b^4$ positiv sind.

Lösung: $x = \dfrac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}; \quad y = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}$

304. Man potenziert a mit beiden Seiten der ersten Gleichung und erhält das Gleichungssystem

$$4xy = 9a^2$$
$$x + y = 5a.$$

Beide Lösungen dieses Systems sind brauchbar.

Lösungen:

$$1)\ x_1 = \frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{9}{2}a \qquad 2)\ x_2 = \frac{9}{2}a; \quad y_2 = \frac{a}{2}$$

305. Weil x und y in der zweiten Gleichung in den Numeri der Logarithmen stehen, müssen sie positiv sein, wenn überhaupt eine Lösung existieren soll. Für a bedeutet das nicht, daß es nicht auch negativ sein könnte, denn im Numerus des Logarithmus steht die positive Zahl a^2. Doch in diesem Falle muß man statt $\lg(a^2) = 2\lg a$ schreiben $\lg(a^2) = 2\lg|a|$. Verkürzt schreibt man

$$X = \lg x; \quad Y = \lg y; \quad A = \lg|a|.$$

Man logarithmiert die erste Gleichung des gegebenen Systems und erhält das neue System

$$X + Y = 2A$$
$$X^2 + Y^2 = 10A^2.$$

Quadriert man zunächst die erste Gleichung und subtrahiert davon die zweite, so bilden folgende Gleichungen das System:

$$X + Y = 2A$$
$$XY = -3A.$$

Daraus folgt, daß X und Y Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - 2Az - 3A^2 = 0$$

sind. Eine Lösung lautet also

$$X = 3A, \quad Y = -A;$$
$$x = |a|^3, \quad y = \frac{1}{|a|}$$

und die andere Lösung

$$x = \frac{1}{|a|}, \quad y = |a|^3.$$

Die Probe zeigt, daß beide Lösungen brauchbar sind.

Lösungen:

$$1)\ x_1 = |a|^3, \quad y_1 = \frac{1}{|a|} \qquad 2)\ x_2 = \frac{1}{|a|}, \quad y_2 = |a|^3$$

306. Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$y - x = (\sqrt{2})^4 = 4.$$

Dann folgt

$$y = x + 4.$$

Man setzt diesen Wert für y in die erste Gleichung ein und erhält

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576$$

oder

$$6^x \cdot 2^4 = 576.$$

Lösung: $x = 2;\quad y = 6$

307. Das gegebene Gleichungssystem kann man auf die folgende Form bringen:

$$xy = a$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = b.$$

Weil beide Zahlen x und y positiv sein müssen, erhält man das System

$$xy = a$$
$$\frac{x}{y} = \sqrt{b}.$$

Lösung: $x = \sqrt{a}\ \sqrt[4]{b}$; $y = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}$

308. Das gegebene Gleichungssystem kann man auf die folgende Form bringen:

$$\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\log_b x + \log_b y = \frac{3}{2},$$

woraus $x\sqrt{y} = a^{\frac{3}{2}}$ und $y\sqrt{x} = b^{\frac{3}{2}}$ folgen.

Wenn man diese Gleichungen miteinander multipliziert, so erhält man

$$x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad xy = ab.$$

Diese letzte Gleichung wird jeweils durch eine der beiden oberen dividiert.

Lösung: $x = \dfrac{a^2}{b}$; $y = \dfrac{b^2}{a}$

309. Die Gleichung wird analog zur Aufgabe 308 gelöst.

Lösung: $x = a\sqrt[3]{b^2}$; $y = \dfrac{a}{b\sqrt[3]{b}}$

310. Unter Anwendung der Formel (1) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel gewinnt man aus der ersten der gegebenen Gleichungen:

$$\log_v u + \frac{1}{\log_v u} = 2, \quad \text{und daraus} \quad \log_v u = 1,$$

d. h. $u = v$. Dieses Resultat setzt man in die zweite Gleichung ein und erhält $u^2 + u - 12 = 0$.
Brauchbar ist nur die positive Lösung (siehe Lösung der Aufgabe 300).

Lösung: $u = v = 3$

311. Man substituiert $\sqrt[x]{a} = u$, d. h. $\sqrt{a} = u^{\frac{x}{2}}$

und $\log_{\sqrt[x]{a}} \sqrt{a} = \log_u u^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}$.

Analog erhält man $\log_{\sqrt[y]{b}} \sqrt{b} = \frac{y}{2}$.

Folglich kann man die zweite Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Es ergibt sich auf diese Weise das Gleichungssystem:

(1) $x^2 + xy + y^2 = a^2$

(2) $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Es ist mit dem gegebenen äquivalent.
Man quadriert nun die Gleichung (2)

(2a) $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4a^2}{3}$

und subtrahiert anschließend (1) von (2a):

$$xy = \frac{a^2}{3}.$$

Auf diese Weise wird das System auf die Form

(2) $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

(3) $xy = \frac{a^2}{3}$

gebracht. Dieses System hat nur eine Lösung: $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Bemerkung: Beim Quadrieren irgendeiner Gleichung kann man eine unechte Lösung erhalten. So ist es auch im vorliegenden Fall: Die Gleichung (2a) hat eine unechte Lösung im Vergleich zu (2), z. B. erfüllt $x = y = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ die Gleichung (2a), aber nicht die Gleichung (2). Mit anderen Worten, die Gleichung $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4a^2}{3}$ ist nicht äquivalent mit $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, sie ist zwei verschiedenen Gleichungen äquivalent, nämlich der Gleichung

a) $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ und der Gleichung b) $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Nichtsdestoweniger ist das gegebene System mit dem System

$$x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$xy = \frac{a^2}{3}$$

äquivalent, weil im letzteren die Gleichung $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ vorkommt und dadurch die Möglichkeit $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ausschließt, sofern $a \neq 0$ ist (für $a = 0$ fallen die Gleichungen $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ und $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ zusammen).

Wenn man an Stelle des Systems mit den Gleichungen (2) und (3) das System

(1) $x^2 + xy + y^2 = a^2$

(3) $xy = \frac{a^2}{3}$

verwenden würde, dann hätte man es mit einem vom gegebenen verschiedenen System zu tun. Es hätte dann tatsächlich außer der Lösung $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ noch die Lösung $x = y = -\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Deshalb ist es in Fällen, in denen eine oder mehrere Gleichungen quadriert werden, immer erforderlich, die Äquivalenz zwischen neu hergeleiteten und alten Gleichungen zu überprüfen und ferner durch Einsetzen zu ermitteln, welche Lösungen in Frage kommen und welche nicht.

Lösung: $x = y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

312. Unter Verwendung der Formel (2) der Vorbemerkungen dieses Kapitels erhält man $\log_4 x = \dfrac{1}{2}\log_2 x$. Mit Hilfe dieser Gleichung kann die erste Gleichung auf die Form $x = y^2$ gebracht werden. Man löst das System

$$x = y^2$$

$$x^2 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Lösungen: 1) $x_1 = 4, \quad y_1 = 2;$ 2) $x_2 = 1, \quad y_2 = 1$

313. Mit Hilfe der Formel (2) der Vorbemerkungen dieses Kapitels kann man das gegebene Gleichungssystem folgendermaßen darstellen:

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = 2$$

$$\log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = 2$$

$$\log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = 2.$$

Nach dem Potenzieren findet man:

(1a) $\quad x\sqrt{yz} = 4$

(1b) $\quad y\sqrt{zx} = 9$

(1c) $\quad z\sqrt{xy} = 16.$

Man multipliziert nun die Gleichungen (1a), (1b) und (1c) miteinander und erhält

$$(xyz)^2 = 4 \cdot 9 \cdot 16;$$

und daraus

(2) $\quad xyz = 24.$

(Es wird nur der positive reelle Wert der Wurzel verwendet, weil für die Numeri x, y, z in den gegebenen Gleichungen positive Werte stehen müssen.)

Nun wird jede der Gleichungen (1a), (1b) und (1c) quadriert und durch (2) dividiert.

Lösung: $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{27}{8}$; $z = \frac{32}{3}$

314. Aus der ersten Gleichung gewinnt man $x + y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}}$ und aus der zweiten $x + y = 3 \cdot 2^{x-y}$, folglich gilt $3^{\frac{x-y}{2}} = 3$ oder $\frac{x-y}{2} = 1$.

Nach dem Einsetzen erhält man: $x + y = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Lösung: $x = 7$; $y = 5$

315. Das gegebene System läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\frac{x+y}{10} = \frac{7}{x}$$

$$x^2 - y^2 = 40.$$

Man dividiert die zweite Gleichung durch die erste und erhält $x - y = \frac{4x}{7}$. Man muß nunmehr das Gleichungssystem

$$x + y = \frac{70}{x}$$

$$x - y = \frac{4x}{7}$$

lösen und erhält $x_1 = 7$; $y_1 = 3$ und $x_2 = -7$; $y_2 = -3$. Die zweite Lösung befriedigt die Gleichungen des gegebenen Systems nicht, weil $x_2 + y_2$ und $x_2 - y_2$ negativ sind.

Lösung: $x = 7$; $y = 3$

316. Man bringt das gegebene System zunächst auf die Form

$$2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5 + \frac{3y}{x}}$$

$$3^{\frac{x}{y}} = 3^{1 + \frac{2-2y}{y}}$$

und erhält durch Exponentenvergleich

$$\frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}$$

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{2 - 2y}{y}.$$

Es wird nun die Substitution $\frac{x}{y} = t$ verwendet, so daß aus der ersten Gleichung $2t^2 - 5t - 3 = 0$ die Lösungen $t_1 = 3$; $t_2 = -\frac{1}{2}$ ermittelt werden können. Aus der Substitutionsgleichung erhält man dann

$$\frac{x}{y} = 3 \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Man formt um in $x = 3y$ bzw. $x = -\frac{1}{2}y$ und setzt in die zweite Gleichung ein.

Lösungen: 1) $x_1 = -2$; $y_1 = 4$; 2) $x_2 = \frac{3}{2}$; $y_2 = \frac{1}{2}$

317. Das gegebene System wird folgendermaßen umgeformt:

$$\frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} = 5$$

$$x + y = 2.$$

Aus der ersten Gleichung (siehe Lösung der Aufgabe 316) erhält man $\frac{x}{y} = 3$ oder $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$. Die zweite Gleichung liefert

1) $x_1 = \frac{3}{2}$; $y_1 = \frac{1}{2}$; 2) $x_2 = -2$; $y_2 = 4$.

Die zweite Lösung ist unbrauchbar.

Lösung: $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$

318. Das gegebene System wird wie folgt umgeformt:

$$\sqrt{xy} = 4 - \sqrt{x},$$

$$2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y}.$$

Man substituiert $\sqrt{x} = u$ bzw. $\sqrt{y} = v$ und erhält

$$uv = 4 - u$$

$$2uv = 3 + v.$$

Lösungen: 1) $x_1 = 4$; $y_1 = 1$; 2) $x_2 = 1$; $y_2 = 9$

319. Das gegebene Gleichungssystem wird folgendermaßen umgeformt:

$$ay = x^p,$$

$$bx = y^q.$$

Weil x und y als Basen der Logarithmen positiv sein müssen, kann das Ausgangssystem nur für positive a und b Lösungen haben.

Aus der ersten Gleichung findet man $y = \frac{x^p}{a}$. Setzt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung ein, so erhält man $x^{pq} = a^q bx$. Verwirft man die Wurzel $x = 0$ (x muß positiv sein), so erhält man $x^{pq-1} = a^q b$.

Wenn $pq = 1$ ist, dann hat diese Gleichung entweder gar keine Lösung (für $a^q b \neq 1$), oder sie führt zur Identität (für $a^q b = 1$). Im letzten Falle hat das System unendlich viele Lösungen $\left(x \text{ beliebig, } y = \frac{x^p}{a};\ y \text{ beliebig, } x = \frac{y^q}{b}\right)$.

Wenn $pq \neq 1$ ist, dann erhält man die

Lösung: $x = \sqrt[pq-1]{a^q b}$; $y = \sqrt[pq-1]{b^p a}$ $(pq \neq 1)$.

5. Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen

320. Es gilt $a_1 = 5$, $d = 4$. Setzt man diese Werte in die Formel ein, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung $2n^2 + 3n - 10877 = 0$.
Ihre Lösungen sind $n_1 = 73$; $n_2 = -74{,}5$. Nur die erste Lösung ist brauchbar.

Lösung: 73 Glieder

321. Es gelten folgende Beziehungen:

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 26,$$

$$a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 880.$$

Die erste Gleichung nimmt die Form

$$4a_1 + 6d = 26$$

$$a_1 = \frac{13 - 3d}{2}$$

an.

Setzt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung ein und formt den Ausdruck um, so erhält man:

$$\frac{13 - 3d}{2} \cdot \frac{13 - d}{2} \cdot \frac{13 + d}{2} \cdot \frac{13 + 3d}{2} = 880.$$

Man berechnet das Produkt auf der linken Seite der Gleichung zweckmäßig so, daß man zunächst die Nenner multipliziert und im Zähler Teilprodukte bildet. Dann multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner und vereinfacht das erhaltene Produkt (den ersten Zähler mit dem vierten und den zweiten mit dem dritten multiplizieren):

$$9d^4 - 1690d^2 + 14481 = 0.$$

Man erhält vier Lösungen für diese biquadratische Gleichung:

$$d' = 3, \quad d'' = -3, \quad d''' = \frac{\sqrt{1609}}{3} \quad \text{und} \quad d^{\text{IV}} = -\frac{\sqrt{1609}}{3}.$$

Aus der Gleichung $a_1 = \frac{13 - 3d}{2}$ erhält man durch Einsetzen der gefundenen Werte:

$$a_1' = 2, \quad a_1'' = 11, \quad a_1''' = \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \quad a_1^{IV} = \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}.$$

Lösungen:

1) 2, 5, 8, 11, 14, ...

2) 11, 8, 5, 2, −1, ...

3) $\frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \quad \frac{39 - \sqrt{1609}}{6}, \quad \frac{39 + \sqrt{1609}}{6}, \quad \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}, \quad \ldots$

4) $\frac{13 + \sqrt{1609}}{2}, \quad \frac{39 + \sqrt{1609}}{6}, \quad \frac{39 - \sqrt{1609}}{6}, \quad \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \quad \ldots$

322. Man drückt a_p und a_q durch a_1 bzw. d aus und erhält auf diese Weise das Gleichungssystem

(I) $\qquad a_1 + d(p - 1) = q$

(II) $\qquad a_1 + d(q - 1) = p$

mit den Lösungen $d = -1$ und $a_1 = p + q - 1$. Setzt man diese Werte in die Formel (1) der zu Beginn des Kapitels 5 aufgeführten Formeln ein, so erhält man:

$$a_n = (p + q - 1) - (n - 1) = p + q - n.$$

Lösung: $a_n = p + q - n$

323. Die zweistelligen natürlichen Zahlen stellen eine arithmetische Folge mit der Differenz 1 dar. Das erste Glied a_1 ist gleich 10, das letzte Glied $a_n = 99$. Mit Hilfe der Formel (1) ermittelt man die Anzahl der Glieder zu $n = 90$. Setzt man nun in die Formel (2) ein, so erhält man

$$s_n = \frac{(10 + 99)\,90}{2} = 4905.$$

Lösung: 4905

324. Man ersetzt die geraden Zahlen durch n, $(n + 2)$, $(n + 4)$, $(n + 6)$. Die zwischen ihnen stehenden Glieder bezeichnet man mit $(n + 1)$, $(n + 3)$, $(n + 5)$.

Es gilt die folgende Beziehung:

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + (n + 6)^2 = (n + 1)^2 + (n + 3)^2 + (n + 5)^2 + 48$$

oder

$$n^2 + [(n+2)^2 - (n+1)^2] + [(n+4)^2 - (n+3)^2] + \\ + [(n+6)^2 - (n+5)^2] - 48 = 0.$$

Folglich gilt:

$$n^2 + (2n+3) + (2n+7) + (2n+11) - 48 = 0$$

oder

$$n^2 + 6n - 27 = 0.$$

Die Lösungen der letzten Gleichung lauten:

$$n_1 = 3, \quad n_2 = -9.$$

Lösungen:

1) 3, 5, 7, 9

2) −9, −7, −5, −3

325. Die Glieder $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{20}$ stellen eine arithmetische Folge dar. Die Differenz beträgt $2d$, und die Anzahl der Glieder ist gleich 10.
Man setzt in die Formel (3) ein (a_2 an Stelle von a_1 und $2d$ an Stelle von d) und erhält:

$$\frac{(2a_2 + 2d \cdot 9)\,10}{2} = 250$$

$$a_2 + 9d = 25.$$

Da $a_2 = a_1 + d$ gilt, kann man umformen in

(I) $\qquad a_1 + 10d = 25.$

Für die Folge $a_1, a_3, a_5, \ldots a_{19}$ ermittelt man die folgende Gleichung:

(II) $\qquad a_1 + 9d = 22.$

Aus (I) und (II) kann man a_1 und d berechnen. Dadurch erhält man alle Glieder der Folge.

In der Aufgabenstellung ist aber nur gefordert, die Glieder a_{10} und a_{11} zu berechnen:

$$a_{10} = a_1 + 9d \quad \text{und} \quad a_{11} = a_1 + 10d.$$

Mit Hilfe von (I) und (II) ermittelt man

$$a_{10} = 22, \quad a_{11} = 25.$$

Lösung: Die Glieder a_{10} und a_{11} sind 22 bzw. 25.

326. Es werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$b_1 = (a + x)^2, \quad b_2 = a^2 + x^2, \quad b_3 = (a - x)^2.$$

Man erhält:

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = -2ax.$$

Folglich stellen die Glieder b_1, b_2, b_3 den Anfang einer arithmetischen Folge mit der Differenz $d = -2ax$ dar. Setzt man in die Formel (3) ein, so erhält man

$$S_n = \frac{[2(a + x)^2 - 2ax(n - 1)]\,n}{2} = [a^2 + (3 - n)ax + x^2]\,n.$$

Lösung: $S_n = [a^2 + (3 - n)\,ax + x^2]\,n$

327. Unter Anwendung der Formel (3) erhält man:

$$S_1 = \frac{2a_1 + d(n_1 - 1)}{2}\,n_1,$$

$$S_2 = \frac{2a_1 + d(n_2 - 1)}{2}\,n_2,$$

$$S_3 = \frac{2a_1 + d(n_3 - 1)}{2}\,n_3$$

oder

$$\frac{S_1}{n_1} = a_1 + \frac{d}{2}(n_1 - 1),$$

$$\frac{S_2}{n_2} = a_1 + \frac{d}{2}(n_2 - 1),$$

$$\frac{S_3}{n_3} = a_1 + \frac{d}{2}(n_3 - 1).$$

Die drei Gleichungen werden nun mit

$(n_2 - n_3)$, $(n_3 - n_1)$ und $(n_1 - n_2)$ multipliziert:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) =$$

$$= a_1[(n_2 - n_3) + (n_3 - n_1) + (n_1 - n_2)] +$$

$$+ \frac{d}{2}[(n_1 - 1)(n_2 - n_3) + (n_2 - 1)(n_3 - n_1) + (n_3 - 1)(n_1 - n_2)].$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind beide gleich 0. Folglich gilt:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

Das war zu zeigen.

328. Aus der Aufgabenstellung folgt, daß $S_{10} = 5 \cdot S_5$ gelten muß. Die Summen S_5 und S_{10} werden in die Formel (3) eingesetzt. Berücksichtigt man, daß $a_1 = 1$ ist, erhält man:

$$\frac{(2 + 9d)\,10}{2} = 5\,\frac{(2 + 4d)\,5}{2}.$$

Also ist

$$d = -3.$$

Lösung: $+1, \ -2, \ -5, \ -8, \ \ldots$

329. Es gilt: $S_n = 3n^2$

oder $$\frac{[2a_1 + d(n - 1)]\,n}{2} = 3n^2.$$

Da $n \neq 0$ ist, kann die Gleichung durch n dividiert werden:

$$2a_1 + dn - d = 6n$$

oder (I) $$2a_1 - d = (6 - d)\,n.$$

Die Gleichung (I) muß sich für beliebiges n erfüllen lassen. Die linke Seite der Gleichung (I) enthält n nicht, während sich die rechte Seite mit n ändert (wenn nur $6 - d \neq 0$ ist). Ist aber der Faktor $6 - d = 0$, ändert die rechte Seite ihren Wert mit n nicht. Deshalb muß gefordert werden, daß $d = 6$ gilt. Setzt man nun in die Formel (3) ein, so erhält man:

$$2a_1 - d = 0$$

$$a_1 = \frac{d}{2} = 3.$$

Lösung: $3, \ 9, \ 15, \ 21, \ \ldots$

330. Alle Zahlen, die bei der Division durch 4 den Rest 1 ergeben, kann man in der folgenden Form schreiben:

$4k + 1$ (wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist).

Diese Zahlen stellen die Glieder einer arithmetischen Folge mit der Differenz 4 dar. Die erste der zweistelligen Zahlen, die diesen vorhergenannten Bedingungen genügt, ist 13 (man erhält diese Zahl für $k = 3$). Die letzte Zahl ist 97. Man setzt in die Formel (1) $a_1 = 13$ und $a_n = 97$ sowie $d = 4$ ein und erhält $n = 22$. Mit Hilfe der Formel (3) ermittelt man die geforderte Summe. Für die Feststellung, daß nur für bestimmte k der Wert $4k + 1$ eine zweistellige Zahl ergibt, benutzt man folgendes System von Ungleichungen:

$$4k + 1 \geqq 10$$

$$4k + 1 < 100.$$

Diese beiden Ungleichungen werden für k im Intervall $2\frac{1}{4} \leqq k < 24\frac{3}{4}$ erfüllt, Folglich durchläuft k die endliche Folge:

$$3, 4, 5, \ldots, 24.$$

Die Anzahl dieser Glieder ist gleich 22.

Lösung: 1210

Geometrische Folgen

331. Das geometrische Mittel der positiven Zahlen a und b ist die positive Zahl x, die folgende Beziehungen erfüllt:

$$a : x = x : b \quad (\text{oder } x = \sqrt{ab}).$$

Zwischen 1 und 256 liegen drei (verkettete) geometrische Mittel:

$$1 : u_2 = u_2 : u_3 = u_3 : u_4 = u_4 : 256.$$

Nach der Aufgabenstellung sind die Zahlen

$$u_1 = 1, u_2, u_3, u_4, u_5 = 256$$

jeweils die ersten Glieder einer geometrischen Folge.
Setzt man u_1 und u_5 in die Gleichung (4) ein, so erhält man: $256 = 1 \cdot q^4$. Diese Gleichung hat folgende Wurzeln:

$$q_1 = 4, \quad q_2 = -4, \quad q_3 = 4i, \quad q_4 = -4i.$$

Die Wurzeln q_2, q_3, q_4 sind nicht brauchbar.
Man erhält somit: $u_2 = 4$, $u_3 = 16$, $u_4 = 64$.

Lösung: 4, 16, 64

332. Es gilt: $u_1 + u_3 = 52$ und $u_2^2 = 100$. Die letzte Gleichung ergibt: $u_2 = \pm 10$. Da eine geometrische Folge vorliegt, muß gelten:

$$u_1 u_3 = u_2^2 = 100.$$

Folglich sind u_1 und u_3 die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - 52u + 100 = 0.$$

Man erhält:

$$u_1' = 50 \quad \text{und} \quad u_3' = 2$$

$$u_1'' = 2 \quad \text{und} \quad u_3'' = 50.$$

Lösung: Die Zahlen lauten: 1) 50, 10, 2,

2) 50, -10, 2.

Die Zahlen können auch in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden.

333. Es gilt das Gleichungssystem

(I) $\quad u_3 - u_1 = 9,$

(II) $\quad u_5 - u_3 = 36.$

Mit Hilfe der Formel (4) $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ erhält man das Gleichungssystem in folgender Form:

(I) $\quad u_1q^2 - u_1 = 9,$

(II) $\quad u_1q^4 - u_1q^2 = 36.$

Man dividiert die Gleichung (II) durch die Gleichung (I) und erhält $q^2 = 4$ und somit $q = \pm 2$. Setzt man diesen Wert in die Formel (4) ein, so kann man $u_1 = 3$ berechnen.

Lösung: 1) 3, 6, 12, 24, 48, ...

2) 3, -6, 12, -24, 48, ...

334. Es gelten $u_1 + u_4 = 27$ und $u_2 \cdot u_3 = 72$.

Ferner muß $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_4}{u_3}$ oder $u_2u_3 = u_1u_4$ sein.

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$u_1 + u_4 = 27,$$

$$u_1 \cdot u_4 = 72$$

mit den Lösungen 1) $u_1 = 3$; $u_4 = 24$ und 2) $u_1 = 24$; $u_2 = 3$.
Nun setzt man in die Formel $u_4 = u_1q^3$ ein und ermittelt für q die beiden Werte $q_1 = 2$ und $q_2 = \dfrac{1}{2}$.

Lösung: 3, 6, 12, 24 oder in umgekehrter Reihenfolge:

24, 12, 6, 3

335. Es gelten: $u_1 + u_4 = 35$ und $u_2 + u_3 = 30$.
Die folgenden Lösungsschritte sind denen in Aufgabe 333 gleich.
Man erhält für q die Gleichung

$$\frac{1 + q^3}{q(1 + q)} = \frac{35}{30},$$

in der noch beide Seiten gekürzt werden können:

$$\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{7}{6}.$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten:

$$1)\ q = \frac{3}{2};\quad u_1 = 8 \quad \text{und} \quad 2)\ q = \frac{2}{3};\quad u_1 = 27.$$

Diesen Lösungen entsprechen die Folgen:

$$1)\ 8,\ 12,\ 18,\ 27,\ 40{,}5,\ \ldots \quad \text{und} \quad 2)\ 27,\ 18,\ 12,\ 8,\ 5\frac{1}{3},\ \ldots$$

Vergleicht man die ersten vier Glieder der beiden Folgen, so stellt man fest, daß lediglich ihre Reihenfolge umgekehrt ist.

Lösung: 8, 12, 18, 27

336. In der zweiten gegebenen Summe ersetzt man jedes Glied durch das vorhergehende und klammert q aus:

$$u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 62$$

oder

$$q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = 62.$$

Der Ausdruck in der Klammer hat den Wert 31. Folglich ist $q = 2$.
Man setzt nun in die Formel (5) ein und erhält

$$31 = \frac{u_1(2^5 - 1)}{2 - 1}.$$

Folglich ist $u_1 = 1$.

Lösung: 1, 2, 4, 8, ...

337. Es gilt folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 19{,}5$

(II) $\quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 13.$

Die Lösung der Aufgabe erfolgt analog zur Lösung der Aufgabe 336.

Lösung: $u_1 = 1{,}6;\quad u_5 = 8{,}1$

338. Die Glieder u_4 und u_6 sind das vierte und das $(n-4)$te Glied der endlichen Folge. Es gilt also:

$$u_4 u_6 = u_1 u_9.$$

Es besteht die Beziehung $u_1 u_9 = 2304$, folglich gilt auch: $u_4 u_6 = 2304$. Ferner muß gelten: $u_4 + u_6 = 120$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$1)\ u_4' = 24; \quad u_6' = 96 \text{ und } \quad 2)\ u_4'' = 96; \quad u_6'' = 24.$$

Man setzt u_4' und u_6' in die Formel (4) ein und erhält das Gleichungssystem:

$$\text{(I)} \qquad 24 = u_1 q^3,$$

$$\text{(II)} \qquad 96 = u_1 q^5.$$

Dividiert man die Gleichung (II) durch die Gleichung (I), so erhält man $q^2 = 4$ und daraus $q_1 = 2$ oder $q_2 = -2$. Für die erste Lösung der Gleichung erhält man $u_1 = 3$, für die zweite Lösung $u_1' = -3$.
Die neun Glieder der Folge lauten im ersten Falle:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768$$

und im zweiten Falle

$$-3,\ 6,\ -12,\ 24,\ -48,\ 96,\ -192,\ 384,\ -768.$$

Setzt man $u_4'' = 96$ und $u_6'' = 24$ in die Formel (4) ein und führt die analoge Umrechnung durch, so erhält man zwei neue Folgen. Sie enthalten die gleichen Glieder wie die vorher genannten, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Lösungen: 1) $u_1 = 3; \quad q = 2$ 2) $u_1 = -3; \quad q = -2$

3) $u_1 = 768; \quad q = \frac{1}{2}$ 4) $u_1 = -768; \quad q = -\frac{1}{2}.$

339. Es gilt das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 126$$

$$\text{(II)} \qquad u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 13\,824.$$

Darin ist u_2 die mittlere Proportionale zwischen u_1 und u_3. Folglich muß gelten: $u_1 u_3 = u_2^2$.
In der Gleichung (II) kann man also schreiben:

$$u_2^3 = 13\,824,$$

woraus

$$u_2 = \sqrt[3]{13\,824}$$

und

$$u_2 = 24$$

folgt. Setzt man diesen Wert in die Gleichungen (I) und (II) ein, so erhält man

(Ia) $\quad u_1 + u_3 = 102,$

(IIa) $\quad u_1 \cdot u_3 = 576.$

Löst man das Gleichungssystem, so erhält man

$$1)\ u_1' = 6; \quad u_3' = 96 \quad \text{und} \quad 2)\ u_1'' = 96; \quad u_3'' = 6.$$

Diesen Werten entsprechen zwei Folgen: 6, 24, 96 und 96, 24, 6. Sie unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge ihrer Glieder.

Lösung: 6, 24, 96

340. Nach Voraussetzung muß die Summe der Glieder mit geradzahligem Index doppelt so groß sein wie die Summe der Glieder mit ungeradzahligem Index. Man kann also folgendermaßen schreiben:

$$\frac{u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}} = 2.$$

Ersetzt man die Glieder $u_2, u_4, \ldots, u_{2n}$ durch $u_2 = u_1 q$, $u_4 = u_3 q, \ldots,$ $u_{2n} = u_{2n-1}\, q$, so erhält man $q = 2$.

Lösung: Der Quotient der Folge ist gleich 2.

Unendliche konvergente Folgen und Reihen

341. Für den Beweis, daß die gegebenen Zahlen Glieder einer geometrischen Folge sind, ist es notwendig, die Quotienten $\frac{u_2}{u_1}$ und $\frac{u_3}{u_2}$ zu bilden. Man erhält:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}},$$

und

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Weil $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = q = \frac{1}{2+\sqrt{2}} < 1$ ist, stellen die gegebenen Zahlen Glieder einer konvergenten Folge dar.

Nach der Summenformel erhält man dann:

$$S = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\left(1-\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\right)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 4 + 3\sqrt{2}.$$

Lösung: $S = 4 + 3\sqrt{2}$

342. Wie in der Aufgabe 341 findet man, daß der Wert der eckigen Klammer gleich $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1}$ ist. Den Wert des gegebenen Ausdrucks kann man dann folgendermaßen berechnen:

$$(4\sqrt{3}+8)\,\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1} = -\frac{12}{\sqrt{3}-1} = -6(\sqrt{3}+1).$$

Lösung: $-6(\sqrt{3}+1)$

343. Es gilt hier folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad u_1 = 4$

(II) $\quad u_3 - u_5 = \frac{32}{81}.$

Nach der Formel $u_n = u_1 q^{n-1}$ erhält man aus der Gleichung (II) die Gleichung

(IIa) $u_1 q^2 - u_1 q^4 = \frac{32}{81}.$

Da $u_1 = 4$ ist, geht die Gleichung (IIa) nach dem Einsetzen von (I) über in $81q^4 - 81q^2 + 8 = 0.$

Die biquadratische Gleichung hat die Wurzeln

$$q_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{und} \quad q_{3,4} = \pm\frac{1}{3}.$$

Die negativen Werte sind nicht brauchbar, da alle Glieder positiv sein sollten. Die positiven Werte sind beide brauchbar, da sie kleiner als 1 sind. Man erhält zwei unendliche Folgen, deren Summen mit $S_1 = 12(3 + 2\sqrt{2})$ bzw. $S_2 = 6$ ermittelt werden.

Lösungen: $S_1 = 12(3 + 2\sqrt{2})$; $\quad S_2 = 6$

344. Es gilt das Gleichungssystem

(I) $\quad u_1 + u_4 = 54$

(II) $\quad u_2 + u_3 = 36.$

Mit Hilfe der Formel $u_n = u_1 q^{n-1}$ kann man das Gleichungssystem umformen in

(Ia) $\quad u_1 + u_1 q^3 = 54,$

(IIa) $\quad u_1 q + u_1 q^2 = 36$

oder in

(Ib) $\quad u_1(1 + q)(1 - q + q^2) = 54,$

(IIb) $\quad u_1 q(1 + q) = 36.$

Man dividiert die Gleichung (Ib) durch die Gleichung (IIb) und erhält:

$$\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{3}{2}.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind: $q_1 = 2$ und $q_2 = \frac{1}{2}$.

Brauchbar ist nur q_2, da $q_2 = \frac{1}{2} < 1$ ist.

Man setzt den Wert q_2 in die Gleichung (IIb) ein und erhält: $u_1 = 48.$

Lösung: $S = 96$

345. *Erstes Verfahren:*

Nach Voraussetzung gilt das System:

(I) $\quad u_1 + u_3 + u_5 + \cdots = 36,$

(II) $\quad u_2 + u_4 + u_6 + \cdots = 12.$

Das sind zwei unendliche konvergente geometrische Reihen (ihre Quotienten sind gleich, nämlich q^2). Das erste Glied der ersten Reihe ist u_1, das erste Glied der zweiten Reihe ist u_2, d. h.

$$u_2 = u_1 q.$$

Mit Hilfe der Summenformel für unendliche konvergente geometrische Reihen nehmen die beiden Gleichungen (I) und (II) folgende Form an: (Dabei werden in der zweiten Gleichung q durch q^2 und u_1 durch $u_1 q$ ersetzt.)

(Ia) $\quad \dfrac{u_1}{1 - q^2} = 36,$

(IIa) $\quad \dfrac{u_1 q}{1 - q^2} = 12.$

Dividiert man (IIa) durch (Ia), so erhält man $q = \frac{1}{3}$.

Man erhält für u_1 den Wert 32.

Zweites Verfahren:

Es gilt: $u_2 = u_1 q$, $u_4 = u_3 q$, ...
Ferner gilt: $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots = 12$
Man erhält: $u_1 q + u_3 q + u_5 q + \cdots = 12$
oder:

(III) $\quad q(u_1 + u_3 + u_5 + \cdots) = 12.$

Nun dividiert man die Gleichung (III) durch die Gleichung (I) des ersten Verfahrens und erhält $q = \frac{1}{3}$; also ist $u_1 = 32$.

Die Summe der Reihe, die alle gegebenen Glieder enthält, errechnet sich also zu $12 + 36 = 48$. Unter Anwendung der Formel (4) erhält man folgende Gleichung:

$$48 = \frac{u_1}{1 - \frac{1}{3}}; \quad u_1 = 32.$$

Lösung: $32, \frac{32}{3}, \frac{32}{9}, \cdots$

346. Nach Voraussetzung gelten:

(I) $\quad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 56,$

(II) $\quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots = 448.$

Die Summanden der zweiten Summe bilden eine unendliche konvergente geometrische Folge mit dem ersten Glied u_1^2 und dem Quotienten q^2.
Summiert man die Glieder dieser Folge, so erhält man:

(Ia) $\quad \frac{u_1}{1 - q} = 56,$

(IIa) $\quad \frac{u_1^2}{1 - q^2} = 448$

oder

(Ib) $\quad u_1 = 56(1 - q),$

(IIb) $\quad u_1^2 = 448(1 - q^2).$

Nun wird die Gleichung (IIb) durch (Ib) dividiert, wobei sich die Gleichung

(III) $\quad u_1 = 8(1 + q)$

ergibt.

Man eliminiert u_1 aus den Gleichungen (I) und (III) und erhält:

$$8(1 + q) = 56(1 - q),$$

$$q = \frac{3}{4}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung (I) kann man dann auch u_1 ermitteln:

$$u_1 = 14.$$

Lösung: $u_1 = 14; \quad q = \frac{3}{4}$

347. Die Lösung der Aufgabe erfolgt analog zur Lösung der Aufgabe 346. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

(I) $$\frac{u_1}{1 - q} = 3,$$

(II) $$\frac{u_1^3}{1 - q^3} = \frac{108}{13}.$$

Man eliminiert wieder u_1 und erhält folgende Gleichung:

$$3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung ist nur eine brauchbar, nämlich $q = \frac{1}{3}$.

(Die Wurzel $q' = 3$ ist nicht brauchbar, da sie größer als 1 ist.) Aus der Gleichung (I) erhält man $u_1 = 2$.

Lösung: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

348. Die Aufgabe wird analog zu den Aufgaben 346 und 347 gelöst. Das Gleichungssystem lautet:

(I) $$u_1 q = 6,$$

(II) $$\frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1^2}{1 - q^2}.$$

Die Gleichung (II) läßt sich umformen in

(IIa) $$u_1 = 8(1 + q).$$

Man klammert u_1 aus den Gleichungen (I) und (IIa) aus und erhält die Gleichung $4q^2 + 4q - 3 = 0$.

Von den beiden Wurzeln dieser Gleichung

$$q_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

ist nur die zweite brauchbar, da der Absolutbetrag der ersten größer als 1 ist. Der Wert q_2 wird in die Gleichung (I) eingesetzt, und es ergibt sich $u_1 = 12$.

Lösung: 12, 6, 3, ...

Verknüpfungen zwischen arithmetischen und geometrischen Folgen

349. Es gelten folgende Beziehungen:

$$d = 16 - 14 = 2; \quad a_1 = 14 - d = 12,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 + 14 + 16 = 42.$$

Für die gesuchte geometrische Folge muß gelten:

$$1)\ q = 2$$

und

$$2)\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 42.$$

Folglich ist u_1 gleich 6.

Lösung: 6, 12, 24, ...

350. Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge seien 3, $3q$ und $3q^2$. Es muß gelten: $a_1 = 3$ und $a_2 = 3q + 6$.
Ferner folgt aus $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ die Gleichung: $a_3 = 2a_2 - a_1$.
In diese Gleichung setzt man nun die bekannten Werte ein:

$$a_3 = 6q + 9.$$

Entsprechend der Aufgabenstellung soll nun das dritte Glied der arithmetischen Folge dem dritten Glied der geometrischen Folge gleich sein:

$$6q + 9 = 3q^2.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen:

$$q_1 = 3; \quad q_2 = -1.$$

Im ersten Falle erhält man für die geometrische Folge: 3, 9, 27, ..., für die arithmetische Folge: 3, 15, 27, ... Im zweiten Falle erhält man zwei Folgen:

3, −3, 3, −3, ... und 3, 3, 3, ... Die erste hiervon kann man als geometrische Folge mit dem Quotienten $q = -1$, die zweite als arithmetische Folge mit der Differenz $d = 0$ betrachten.

Lösungen:

1) arithmetische Folge: 3, 15, 27, 39, 51, ...
   geometrische Folge: 3, 9, 27, 51, ...

2) arithmetische Folge: 3, 3, 3, ...
   geometrische Folge: 3, −3, 3, −3, ...

351. Die Aufgabe wird wie die Aufgabe 350 gelöst. Man bezeichnet die Glieder der arithmetischen Folge mit a_n, die Glieder der geometrischen Folge mit u_n. Laut Voraussetzung der Aufgabe gilt:

$$a_1 = u_1 = 5.$$

Daraus entwickelt man die weiteren Glieder der geometrischen Folge in folgender Weise:

$$u_3 = u_1q^2 = 5q^2,$$
$$u_5 = u_1q^4 = 5q^4.$$

Die Aufgabe sieht weiterhin vor, daß gelten soll:

$$a_4 = u_3 = 5q^2,$$
$$a_{16} = u_5 = 5q^4.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgen:

$$5q^2 = 5 + 3d,$$
$$5q^4 = 5 + 15d.$$

Man eliminiert d und erhält aus diesem Gleichungssystem für q die Gleichung

$$q^4 - 5q^2 + 4 = 0.$$

Ihre Lösungen sind $q_1^2 = 4$ und $q_2^2 = 1$.
Da $a_4 = 5q^2$ ist, ist das vierte Glied der arithmetischen Folge im ersten Falle gleich 20, im zweiten Falle gleich 5.

Bemerkung: Für jeden Fall erhält man zwei geometrische Folgen, aber nur eine arithmetische Folge. Diese geometrischen Folgen sind:

5, 10, 20, ... und

5, −10, 20, ...

Für die arithmetische Folge ergeben sich, da $d = \dfrac{5q^2 - 5}{3} = 5$ ist, folgende

Glieder: 5, 10, 15, 20, ... Im zweiten Fall erhält man als geometrische Folgen:

$$5, -5, 5, -5, \ldots$$

und

$$5, 5, 5, 5, \ldots$$

Als Glieder der arithmetischen Folge findet man: 5, 5, 5, ...

Lösung: 20 oder 5

352. Man bezeichnet die Glieder wie in der Aufgabe 351.
Es gilt: $a_1 = u_1$, $a_2 = u_1 q$, $a_7 = u_1 q^2$.
Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$d = a_2 - a_1 = u_1(q - 1),$$

$$6d = a_7 - a_1 = u_1(q^2 - 1).$$

Man eliminiert durch Gleichsetzen:

$$u_1(q^2 - 1) = 6u_1(q - 1).$$

Da $u_1 \neq 0$ ist, kann man durch u_1 dividieren:

$$q^2 - 1 = 6(q - 1).$$

Man erhält als Lösungen dieser Gleichung:

$$q_1 = 5 \quad \text{und} \quad q_2 = 1.$$

Aus der Beziehung $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 93$ ergeben sich dann zwei Werte für u_1:

$$u_{1_1} = 3, \quad u_{1_2} = 31.$$

Lösungen:

1) 3, 15, 75

2) 31, 31, 31

353. Man bezeichnet die Glieder wie in Aufgabe 351. Man setzt in die Formel (2) der Vorbemerkungen zu diesem Kapitel ein und erhält:

$$a_7 = 729.$$

Für die geometrische Folge gilt demnach: $u_1 = a_1 = 1$ und $u_7 = a_7 = 729$. Das vierte Glied ist also das gesuchte Glied. Es muß folgender Beziehung genügen:

$$u_1 : u_4 = u_4 : u_7$$

$$(u_4)^2 = u_1 u_7$$

$$(u_4)^2 = 729.$$

Lösung: $u_4 = \pm 27$

354. Nach Voraussetzung gilt: $a_1 + a_2 + a_3 = 15$.
Aus

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

folgt

$$2a_2 = a_1 + a_3$$

und aus der Voraussetzung

$$2a_2 + a_2 = 15,$$

$$a_2 = 5.$$

Es ist also $a_1 = 5 - d$; $a_2 = 5$; $a_3 = 5 + d$.
Für die geometrische Folge gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$u_1 = a_1 + 1 = 6 - d,$$

$$u_2 = a_2 + 4 = 9,$$

$$u_3 = a_3 + 19 = 24 + d.$$

Es muß aber auch $(u_2)^2 = u_1 \cdot u_3$ gelten, also kann man schreiben:

$$9^2 = (6 - d)(24 + d).$$

Diese Gleichung liefert d, so daß mit dem jeweiligen a_1 nunmehr die Folgen mit $d = 3$; $a_1 = 2$ bzw. mit $d = -21$, $a_1 = 26$ entwickelt werden können.

Lösungen: 1) 2, 5, 8 2) 26, 5, −16

355. Nach Voraussetzung gilt:

$$a_1 = u_1 + 1; \quad a_2 = u_2 + 6; \quad a_3 = u_3 + 3.$$

Daraus folgt

$$a_1 + a_2 + a_3 = (u_1 + u_2 + u_3) + (1 + 6 + 3),$$

und wegen $u_1 + u_2 + u_3 = 26$ erhält man weiter

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 + 10 = 36.$$

Der weitere Lösungsweg gleicht dem in Aufgabe 354.

Lösungen: 1) 2, 6, 18 2) 18, 6, 2

356. Die gesuchten Werte sind u_1, u_1q und u_1q^2.
Die Werte u_1, u_1q und $(u_1q^2 - 64)$ stellen Glieder einer arithmetischen Folge dar.

Es gilt also:

(I) $\quad u_1 q - u_1 = (u_1 q^2 - 64) - u_1 q.$

Die Werte u_1, $(u_1 q - 8)$ und $(u_1 q - 64)$ stellen aber auch eine geometrische Folge dar.
Es gilt also auch:

(II) $\quad (u_1 q - 8) : u_1 = (u_1 q^2 - 64) : (u_1 q - 8).$

Die Gleichungen (I) und (II) vereinfacht man und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$u_1(q^2 - 2q + 1) = 64,$$

$$u_1(q - 4) = 4.$$

Die Lösungen dieses Systems sind:

1) $q_1 = 13$ und $u_{1_1} = \frac{4}{9}$ sowie

2) $q_2 = 5$ und $u_{1_2} = 4.$

Lösungen: 1) $\frac{4}{9}, \frac{52}{9}, \frac{676}{9}$, $\qquad$ 2) 4, 20, 100

357. Die gesuchten Werte sind u_1, u_2 und u_3. Diese Zahlen sind Glieder einer geometrischen Folge. Es gilt also

(I) $\quad (u_2)^2 = u_1 u_3.$

Sie sind aber auch Glieder einer arithmetischen Folge. Es gilt also auch:

(II) $\quad 2u_2 = u_1 + u_3.$

Man isoliert u_2 aus der Gleichung (II) und setzt in die Gleichung (I) ein:

$$(u_1 + u_3)^2 = 4u_1 u_3$$

oder

$$(u_1 - u_3)^2 = 0.$$

Also ist

$$u_1 = u_3.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (II) ein, so erhält man

$$u_2 = u_1.$$

Lösung: Die geforderten Bedingungen sind erfüllt, wenn die drei Glieder der Folge gleich groß sind (stationäre Folge).

6. Kombinatorik und binomischer Satz

Bezeichnungen:

P_n – Anzahl der Permutationen von n Elementen

$K_n^{(k)}$ – Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse (ohne Wiederholung)

$V_n^{(k)}$ – Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse (ohne Wiederholung)

$$K_n^{(k)} \cdot a^k \cdot x^{n-k} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

ist das $(k + 1)$-te Glied der binomischen Entwicklung von $(x + a)^n$.

358. $\dfrac{P_n}{P_{n+2}} = \dfrac{0{,}1}{3}$ oder $\dfrac{1}{30} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n + 1)(n + 2)}$

Also gilt: $(n + 1) \cdot (n + 2) = 30$.
Man erhält $n_1 = 4$ und $n_2 = -7$.
Der zweite Wert ist unbrauchbar.

Lösung: $n = 4$

359. Es gilt $5K_n^{(3)} = K_{n+2}^{(4)}$.

Das heißt $\dfrac{5n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{(n + 2)(n + 1)n(n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Folglich ist $5(n - 2) = \dfrac{(n + 2)(n + 1)}{4}$.

Lösungen:

$n_1 = 14; \quad n_2 = 3$

360. Das gesuchte Glied ist gleich

$$a_9 = (-1)^8 \cdot K_{16}^{(8)} \left(\frac{a}{x}\right)^8 \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8$$

$$= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{a^8}{x^4}.$$

Lösung: $12870 \dfrac{a^8}{x^4}$

361. $a_{n+1} = K_{12}^{(n)} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^n \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-n}$

Hier erhält a den Exponenten

$$\frac{n}{2} + \frac{2(12-n)}{3}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{n}{2} + \frac{2(12-n)}{3} = 7,$$

d. h. $n = 6$.
Also ist $n + 1 = 7$.

Lösung: Siebentes Glied

362. $a_{n+1} = K_{21}^{(n)} \left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^n \left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-n}$

$$= K_{21}^{(n)}\, a^{\frac{21-n}{3}-\frac{n}{6}}\, b^{\frac{n}{2}-\frac{21-n}{6}}.$$

Nach Voraussetzung gilt: $\dfrac{n}{2} - \dfrac{21-n}{6} = \dfrac{21-n}{3} - \dfrac{n}{6}$,

also folgt: $n = 9$.

Lösung: Neuntes Glied

363. Nach einer Umformung erhält man:

$$\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}.$$

Es gilt:

$$a_{n+1} = (-1)^n K_{10}^{(n)} \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^n \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{10-n}$$

$$= (-1)^n K_{10}^{(n)}\, a^{\frac{10-n}{3}-\frac{n}{2}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\frac{10-n}{3} - \frac{n}{2} = 0$, woraus $n = 4$ folgt.

Lösung: $a_5 = 210$

364. Man bezeichnet mit x den Exponenten des ersten Binoms. Die Summe der Binomialkoeffizienten ist dann gleich 2^x. Die Summe der Binomialkoeffizienten des zweiten Binoms ist gleich 2^{x+3}.
Man kann die folgende Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+3} &= 144 \\ 2^x(1+8) &= 144 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Lösung: 4 und 7

365. Aus $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 105$ folgt $n = 15$.

Folglich ist

$$a_{13} = (-1)^{12} K_{15}^{(12)} \left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} (9x)^3,$$

$$a_{13} = \frac{455}{x^3}.$$

Lösung: $\frac{455}{x^3}$

366. Nach Voraussetzung ist $K_n^{(3)} = K_n^{(12)}$.
Man findet $n = 15$.
Also muß

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= K_{15}^{(k)} \left(\frac{a}{x}\right)^k \cdot (x^2)^{15-k} \\ &= \binom{15}{k} a^k \cdot x^{30-3k} \text{ gelten.} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist aber $30 - 3k = 0$, also gilt $k = 10$.

Lösung: $a_{11} = 3003a^{10}$

367. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{K_n^{(4)}}{K_n^{(2)}} = \frac{14}{3},$$

d. h. $n^2 - 5n - 50 = 0$.
Man erhält $n = 10$ (die Lösung $n = -5$ ist nicht brauchbar).
Das mittlere Glied hat die Form:

$$a_6 = K_{10}^{(5)}(-1)^5 \left(\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^5 (a^{-2}\sqrt[3]{a})^5 = -252.$$

Lösung: Das mittlere Glied (das sechste) ist gleich -252.

368. Gegeben ist die Bedingung

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 46.$$

Die weitere Rechnung verläuft analog zu der in Aufgabe 367.

Lösung: Das gesuchte Glied a_7 ist gleich 84.

369. Nach Voraussetzung gilt: $2^m = 128$, also $m = 7$.

Man erhält: $a_{n+1} = K_7^{(n)} x^{-\frac{n}{3}} x^{\frac{3}{2}(7-n)}$.

Nach Voraussetzung ist $-\frac{n}{3} + \frac{3}{2}(7 - n) = 5$, woraus man $n = 3$ ermittelt.

Lösung: Das gesuchte Glied a_4 ist gleich $35x^5$.

370. Man erhält $a_6 = a_1 \cdot q^5 = \frac{1}{i}(1 + i)^5$.

Der Faktor $\frac{1}{i}$ läßt sich umformen:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Den zweiten Faktor berechnet man nach dem binomischen Satz:

$$1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5.$$

Folglich ist

$$a_6 = -i - 5i^2 - 10i^3 - 10i^4 - 5i^5 - i^6.$$

Bekanntlich gelten die folgenden Gleichungen:

$$i^2 = -1 \qquad\qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad\qquad i^6 = -1$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -ii = +1$$

Bemerkung:

Den gegebenen Ausdruck kann man, wenn die Basis $1 + i$ (oder allgemein ein Binom der Form $(a \pm ai)$ ist), schneller berechnen.
Man erhält: $(1 + i)^2 = 2i$.
Zur Berechnung von $(1 + i)^5$ ist nur folgende Rechnung nötig:

$$(1 + i)^5 = (1 + i)^4 (1 + i) = (2i)^2 \cdot (1 + i) = -4(1 + i)$$

Lösung: $a_6 = -4 + 4i$

371. Man erhält $a_7 = i\left(1 + \frac{1}{i}\right)^6$. Weil $\frac{1}{i} = -i$ ist, gilt also für a_7:

$$a_7 = i(1 - i)^6.$$

Die weitere Lösung erfolgt wie in der Aufgabe 370.
Man kann für jeden der sechs Faktoren $(1 - i)$ den absoluten Betrag und das Argument φ bestimmen:

$$r = \sqrt{2}, \quad \varphi = -45°.$$

Der absolute Betrag des Produkts ist gleich $\sqrt{2}^6 = 8$, das Argument ist gleich $6(-45°) = -270°$.
Also gilt

$$(1 - i)^6 = 8[\cos(-270°) + i \sin(-270°)]$$

$$(1 - i)^6 = 8 \cdot i.$$

Lösung: $a_7 = -8$

372. Die Zahlen $K_n^{(1)}$, $K_n^{(2)}$, $K_n^{(3)}$ stellen nach Voraussetzung Glieder einer arithmetischen Folge dar.

Es gilt $K_n^{(1)} + K_n^{(3)} = 2K_n^{(2)}$, d. h. $n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2\,\frac{n(n-1)}{2}$. Da hierbei $n \neq 0$ ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch n dividieren. Man erhält nach Umformung die Gleichung:

$$n^2 - 9n + 14 = 0.$$

Die Wurzeln sind $n_1 = 7$ und $n_2 = 2$, wobei die zweite nicht brauchbar ist, weil für $n_2 = 2$ die binomische Entwicklung nur drei Glieder besitzt, nach Voraussetzung aber vier Glieder enthalten soll.

Lösung: $n = 7$

373. Man löst diese Aufgabe wie die Aufgabe 372. Nach dem Kürzen mit

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

(diese Zahl ist verschieden von Null, da nach Voraussetzung $n \geqq 6$ sein soll) erhält man $n^2 - 21n + 98 = 0$.

Lösungen: $n_1 = 14;\quad n_2 = 7$

374. Den ersten Summanden in der Klammer schreibt man in der Form

$$a^{\frac{4}{5}-\frac{x-1}{x}} = a^{\frac{5-x}{5x}},$$

den zweiten Summanden in der Form

$$a \cdot a^{\frac{x-1}{x+1}} = a^{\frac{2x}{x+1}}.$$

Das vierte Glied der Entwicklung ist gleich

$$56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}} = 56a^{5,5}.$$

Folglich ist $\dfrac{5-x}{x} + \dfrac{6x}{x+1} = 5{,}5.$

Lösungen: $x_1 = 2;\quad x_2 = -5$

375. Den gegebenen Ausdruck schreibt man in der Form

$$\left[2^{\frac{x-1}{x}} + 2^{\frac{2(3-x)}{4-x}}\right]^6$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$15 \cdot 2^{\frac{4(x-1)}{x}} \cdot 2^{\frac{4(3-x)}{4-x}} = 240$$

$$2^{\frac{4(x-1)}{x}+\frac{4(3-x)}{4-x}} = 2^4.$$

Folglich ist $\dfrac{4(x-1)}{x} + \dfrac{4(3-x)}{4-x} = 4.$

Lösung: $x = 2$

376. Das siebente Glied der binomischen Entwicklung von $\left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}\right)^x$ ist gleich: $a_7 = K_x^{(6)} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x-6} \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^6$. Das $(x-7)$-te Glied muß gleich dem folgenden Ausdruck sein: $a_{x-7} = K_x^{(6)} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{x-6}$.

Folglich ist $\dfrac{a_7}{a_{x-7}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{(x-6)-6} \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{6-(x-6)} = 2^{\frac{x-12}{3}} \cdot 3^{\frac{x-12}{3}} = 6^{\frac{x-12}{3}}.$

Nach Voraussetzung gilt aber:

$$6^{\frac{x-12}{3}} = \frac{1}{6} = 6^{-1}.$$

Folglich ist $\dfrac{x-12}{3} = -1.$

Lösung: $x = 9$

377. Nach Voraussetzung gilt: $K_5^{(2)} x^3 (x^{\lg x})^2 = 10^6$.
Also gilt: $10x^{3+2\lg x} = 10^6$ oder $x^{3+2\lg x} = 10^5$.

Man logarithmiert nun beide Seiten dieser Gleichung:

$$(3 + 2\lg x)\lg x = 5$$

und erhält dann

$$\lg x_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Lösungen: $x_1 = 10;\quad x_2 = 10^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{100\sqrt{10}}.$

378. Nach Voraussetzung ist

$$K_6^{(3)}(\sqrt{x})^{\frac{3}{\lg x+1}}(\sqrt[12]{x})^3 = 200,$$

d. h. $20x^{\frac{\lg x+7}{4(\lg x+1)}} = 200.$

Man dividiert diese Gleichung durch 20, logarithmiert auf beiden Seiten und erhält folgende Gleichung:

$$(\lg x)^2 + 3\lg x - 4 = 0.$$

Die Lösungen lauten:

$$\lg x_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = -4.$$

Lösungen: $x_1 = 10; \quad x_2 = 0{,}0001$

379. Man löst diese Aufgabe wie die Aufgabe 378 und erhält die Gleichung:

$$x^{\lg x - 2} = 1000.$$

Nach dem Logarithmieren findet man als Lösungen:

$$\lg x_1 = 3 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = -1.$$

Lösungen: $x_1 = 1000; \quad x_2 = 0{,}1$

380. Man löst diese Aufgabe in der gleichen Weise wie die Aufgaben 378 und 379.

Lösungen: $x_1 = 10; \quad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{10}}$

381. *Lösungen:* $x_1 = 100; \quad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{100}}$

382. *Lösungen:* $x_1 = 1000; \quad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

383. Nach Voraussetzung gilt:

(1) $\qquad a_{n+2} - a_{n+1} = 30,$

wobei $a_{n+1} = K_{12}^{(n)}x^{-\frac{n}{2}}x^{\frac{12-n}{6}} = K_{12}^{(n)}x^{\frac{6-2n}{3}}$ und $a_{n+2} = K_{12}^{(n+1)}x^{\frac{4-2n}{3}}$ sind.

Nach Voraussetzung ist der Exponent $\dfrac{6-2n}{3}$ doppelt so groß wie der Exponent $\dfrac{4-2n}{3}$.

Es kann also die Bestimmungsgleichung

$$\frac{6 - 2n}{3} = 2 \cdot \frac{4 - 2n}{3}$$

aufgestellt werden, die den Wert $n = 1$ liefert.
Die Gleichung (1) erhält nach einer Umformung die Form:

$$2x^{\frac{4}{3}} - 11x^{\frac{2}{3}} + 5 = 0.$$

Man ersetzt $x^{\frac{2}{3}}$ durch y und löst die quadratische Gleichung.

Lösungen: $x_1 = 5\sqrt{5}$; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

384. Nach Voraussetzung gilt: $5K_n^{(1)} = K_n^{(3)}$.

Man erhält folgende Gleichung:

$$5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Da $n \neq 0$ ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch n dividieren. Von den Wurzeln der quadratischen Gleichung, die sich dann ergibt, $n_1 = 7$ und $n_2 = -4$, ist nur die Wurzel n_1 brauchbar, weil n eine positive Zahl sein muß. Da nach Voraussetzung $a_4 = 7 \cdot 20$ ist, gilt

$$K_7^{(3)} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 = 140.$$

Lösung: $x = 4$

385. Nach Voraussetzung gilt: $K_n^{(2)} - n = 20$.

Also ist $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n = 20$.

Von den beiden Wurzeln $n_1 = 8$ und $n_2 = -5$ ist nur die erste brauchbar, weil vorausgesetzt wird, daß der Exponent des Binoms eine positive ganze Zahl ist. Man schreibt das Binom in folgender Form:

$$\left(2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{16}} + 2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^8.$$

Nach Voraussetzung gilt: $a_4 - a_6 = 56$ oder

$$K_8^{(3)} 2^{3\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)} 2^{5\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)} - K_8^{(5)} 2^{5\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)} 2^{3\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)} = 56.$$

Nach dem Umformen erhält man dann:

$$56 \cdot 2^x - 56 \frac{2}{2^x} = 56.$$

Wenn man nun $2^x = y$ setzt, so kann man die Gleichung auf die Form $y^2 - y - 2 = 0$ bringen und die Wurzeln $y_1 = 2$ und $y_2 = -1$ ermitteln. Da $2^x = y$ ist, kann y nur positiv sein.
Also gilt: $2^x = 2$,
d. h. $x = 1$.

Lösung: $x = 1$

386. Da die Binomialkoeffizienten der Glieder, die an der gleichen Stelle, vom Anfang und vom Ende der Entwicklung gerechnet, stehen, gleich sind, kann man die Summe der drei letzten Glieder durch die Summe der drei ersten Glieder ersetzen, d. h.

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 22,$$

woraus $n = 6$ folgt. (Vergleichen Sie auch mit der Lösung der Aufgabe 385!)
Folglich hat das Binom die Form $\left(2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{1-x}{2}}\right)^6$.
Nach Voraussetzung gilt $a_3 + a_5 = 135$
oder

$$K_6^{(2)}\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^2 \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^4 + K_6^{(4)}\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^4 \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 135.$$

Nach dem Umformen erhält man

$$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot 2^x + \frac{2^2}{2^x} = 9.$$

Wie in der Aufgabe 385 ermittelt man die Wurzeln:

$$1)\ 2^x = 4 \quad \text{und} \quad 2)\ 2^x = \frac{1}{2}.$$

Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1$$

387. Die Zahlen a_1, a_3, a_5 sind das erste, dritte bzw. fünfte Glied einer arithmetischen Folge.
Also gilt: $2a_3 = a_1 + a_5$.

Weil nach Voraussetzung

$$a_1 = K_n^{(1)}, \quad a_3 = K_n^{(3)}, \quad a_5 = K_n^{(5)} \quad \text{ist,}$$

gilt auch:

$$\frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Dabei muß n ungleich Null sein. Man kann also durch n kürzen und erhält folgende Gleichung:

$$n^2 - 9n + 14 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung lauten:

$$n_1 = 7, \quad n_2 = 2.$$

Weil nach Voraussetzung die Entwicklung des Binoms wenigstens sechs Glieder enthalten muß, gilt $n \geqq 5$. Brauchbar ist also nur $n_1 = 7$.
Das Binom erhält die Form:

$$\left[2^{\frac{1}{2}\lg(10-3^x)} + 2^{\frac{x-2}{5}\lg 3}\right]^7.$$

Nach Voraussetzung ist $a_6 = 21$
oder:

$$K_7^{(5)}\, 2^{(x-2)\lg 3}\, 2^{\lg(10-3^x)} = 21.$$

Es ergibt sich dann

$$2^{(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x)} = 1 = 2^0.$$

Folglich gilt: $(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x) = 0$.
Nach dem Potenzieren erhält man $3^{x-2}(10-3^x) = 1$
oder

$$\frac{3^x}{3^2}(10-3^x) = 1.$$

Die weitere Lösung erfolgt wie in Aufgabe 385.

Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 0$$

388. Die folgenden Ausdrücke sollen die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge darstellen:

$$\frac{14}{9} K_n^{(2)}, K_n^{(3)}, K_n^{(4)}.$$

Folglich gilt: $\frac{14}{9} K_n^{(2)} K_n^{(4)} = [K_n^{(3)}]^2$.

Beide Seiten können durch $n^2(n-1)^2 (n-2)$ dividiert werden, weil n, $n-1$ und $n-2$ immer ungleich Null sind, denn nach Voraussetzung muß $n \geqq 3$ gelten.
Man erhält $n = 9$.
Nach Voraussetzung ist $a_4 = 16{,}8$. Also kann man schreiben:

$$K_9^{(3)} 5^{3\left[\frac{1}{6}\lg(x-1) - \frac{1}{3}\lg 5\right]} \cdot 5^{6\left[-\frac{1}{6}\lg(6-\sqrt{8x})\right]} = 16{,}8.$$

Es ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}\lg(x-1) - \lg 5 - \lg(6-\sqrt{8x}) = -1.$$

Nach dem Potenzieren erhält man

$$10\sqrt{x-1} = 5(6-\sqrt{8x}),$$

mit den Lösungen: $x_1 = 50$ und $x_2 = 2$.
Die erste Wurzel ist nicht brauchbar, da für $x = 50$ die Zahl $6 - \sqrt{8x}$ negativ ist. Dafür existiert aber kein Logarithmus.

Lösung: $x = 2$

389. Es gilt nach Voraussetzung

$$\lg(3 \cdot K_n^{(3)}) - \lg K_n^{(1)} = 1$$

oder

$$\lg \frac{3K_n^{(3)}}{K_n^{(1)}} = \lg 10.$$

Also gilt:

$$\frac{3K_n^{(3)}}{K_n^{(1)}} = 10.$$

Formt man diese Gleichung um, so erhält man

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

mit den Wurzeln $n_1 = 6$ und $n_2 = -3$.
Folglich ist der Exponent des Binoms $n = 6$.

Nach Voraussetzung ist $9a_3 - a_5 = 240$.
Man stellt die Gleichung

$$9K_6^{(2)}2^{2\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)} \cdot 2^{4\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} - K_6^{(4)}2^{4\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)} \cdot 2^{2\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = 240$$

auf und findet

$$9 \cdot 2^{3x-2} - 2^{3x+1} = 16$$

oder

$$\frac{9 \cdot 2^{3x}}{2^2} - 2^{3x} \cdot 2 = 16.$$

Folglich gilt:

$$2^{3x} = 2^6$$

und damit

$$x = 2.$$

Lösung: $x = 2$

7. Algebraische und arithmetische Aufgaben

390. Die Masse einer Granatpatrone setzt sich aus der Masse des Geschosses, der Ladung und der Hülse zusammen.
Die Masse von Geschoß und Hülse kann man in Bruchteilen der Gesamtmasse der Patrone folgendermaßen ausrechnen:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}, \text{ so daß die Masse der Ladung}$$

$$1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \text{ der Gesamtmasse ausmacht.}$$

Diese Masse soll aber 0,8 kg betragen.

Folglich wiegt die Patrone $0{,}8\ \text{kg} : \frac{1}{12} = 9{,}6\ \text{kg}$.

Lösung: Die Patrone wiegt 9,6 kg.

391. Die Männer stellen $100\% - 35\% = 65\%$ der Gesamtanzahl der Arbeiter dar. Es sind $65\% - 35\% = 30\%$ mehr Männer als Frauen beschäftigt, das sind 252 Personen. Die Gesamtanzahl der Arbeiter berechnet sich folgendermaßen:

$$\frac{252 \cdot 100}{30} = 840.$$

Lösung: 840 Arbeiter sind im Werk beschäftigt.

392. Der Prozentsatz des Gewinns steht in einem bestimmten Verhältnis zu den Selbstkosten, die man mit 100% annimmt. Man weiß, daß der Verkaufspreis (1386 Rubel) sich zusammensetzt aus $100\% + 10\% = 110\%$ der Selbstkosten. Die Selbstkosten betragen demzufolge $\frac{1386 \cdot 100}{110}$ Rubel = 1260 Rubel.

Lösung: Die Selbstkosten betragen 1260 Rubel.

393. Der Verlust läßt sich in Prozenten durch seine Beziehung zu den Selbstkosten ausdrücken, die man mit 100% annimmt. Man weiß, daß die 3348 Rubel

$100\% - 4\% = 96\%$ der Selbstkosten darstellen. Folglich betragen die Selbstkosten für die Herstellung $\frac{3348 \cdot 100}{96}$ Rubel $= 3487{,}5$ Rubel.

Lösung: Die Selbstkosten betragen 3487 Rubel und 50 Kopeken.

394. Der prozentuale Gehalt an Kupfer im Erz beträgt

$$\frac{34{,}2 \cdot 100}{225}\%.$$

Lösung: 15,2% Kupfer sind im Erz enthalten.

395. Die Preissenkung beträgt 30 Kopeken (290 Kopeken minus 260 Kopeken). Diese Differenz stellt $\frac{30 \cdot 100}{290}\%$ des alten Preises dar.

Die Zahl $\frac{30 \cdot 100}{290} = 10\frac{10}{29}$ ergibt, als Dezimalzahl geschrieben, 10,34.

Lösung: Der Preis wurde um 10,34% gesenkt.

396. Diese Aufgabe wird wie die Aufgabe 395 gelöst.

Lösung: Der Preis wurde um 10,94% gesenkt.

397. Zwei Kilogramm stellen 32% der Masse der Weintrauben dar. Die Masse der Trauben berechnet sich also folgendermaßen:

$$\frac{2 \cdot 100}{32} = 6{,}25.$$

Lösung: Es werden 6,25 kg Weintrauben benötigt.

398. Man bezeichnet die Anzahl der Teilnehmer mit x. Im ersten Fall erhält man als Summe $75x$ Kopeken. Die Summe, die aufgebracht werden muß, beträgt also $(75x + 440)$ Kopeken. Im zweiten Fall erhält man $80x$ Kopeken. Die entsprechende Summe beträgt in diesem Falle $(80x - 440)$ Kopeken. Folglich muß gelten:

$$75x + 440 = 80x - 440.$$

Lösung: Es nahmen 176 Schüler an der Exkursion teil.

399. Die Anzahl der Personen bezeichnet man mit x. Jeder muß $\frac{72}{x}$ Rubel geben. Nach Voraussetzung gilt

$$(x - 3)\left(\frac{72}{x} + 4\right) = 72.$$

Lösung: Es waren neun Personen anwesend.

400. Der Preis des ersten Bandes dieses Werkes wird mit x Rubel bezeichnet, der des zweiten Bandes mit y Rubel. Man erhält nach der ersten Angabe folgende Gleichung:

$$60x + 75y = 405.$$

Da für jedes Exemplar des ersten Bandes 15% Rabatt gewährt werden sollen, kostet ein Exemplar des ersten Bandes nur noch $0{,}85x$ Rubel. 10% Rabatt erhält man für jedes Exemplar des zweiten Bandes; es kostet also nur noch $0{,}9y$ Rubel. Es gilt folgende Beziehung:

$$60 \cdot 0{,}85x + 75 \cdot 0{,}9y = 355\frac{1}{2}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems mit zwei Unbekannten lautet: $x = 3$; $y = 3$.

Lösung: Der Preis des ersten Bandes beträgt 3 Rubel, der des zweiten Bandes ebenfalls 3 Rubel.

401. Der Kaufpreis des ersten Gegenstandes beträgt x Rubel, der des zweiten demzufolge $(225 - x)$ Rubel. Beim Verkauf des ersten Gegenstandes erhält man 25% Gewinn, d. h., der Gegenstand kostet beim Verkauf $1{,}25x$ Rubel. Den zweiten Gegenstand verkauft man mit 50% Gewinn. Er kostet also $1{,}5(225 - x)$ Rubel. Der Verkauf beider ergibt 40% Gewinn (in bezug auf den Einkaufspreis 225 Rubel).
Die gesamte Verkaufssumme kann man also folgendermaßen errechnen:

$$1{,}40 \cdot 225 \text{ Rubel} = 315 \text{ Rubel}.$$

Man erhält die folgende Gleichung:

$$1\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}(225 - x) = 315.$$

Lösung: Der erste Gegenstand wurde für 90, der zweite für 135 Rubel gekauft.

402. In 40 kg Meerwasser sind $40 \cdot 0{,}05$ kg $= 2$ kg Salz enthalten. Wenn diese 2 kg Salz 2% der gesamten Masse darstellen sollen, muß man 100 kg Wasser haben. Man muß also 60 kg Süßwasser hinzufügen.

Lösung: 60 kg Süßwasser muß man hinzufügen.

403. Man bezeichnet die Längen der Katheten (in m) mit x bzw. y. Es gilt:

$$x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2.$$

Verlängert man die eine Kathete um $133\frac{1}{3}$ %, d. h. um $\frac{133\frac{1}{3}}{100} = 1\frac{1}{3}$ ihrer ursprünglichen Länge, dann ist sie $2\frac{1}{3}x$ lang. Verlängert man die zweite um $16\frac{2}{3}$ %, so ist sie $1\frac{1}{6}y$ lang.

Es gilt folgende Beziehung:

$$2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14.$$

Lösung: Die Länge der Katheten betrug 3,00 m bzw. 6,00 m.

404. Wenn man dem ersten Sack 12,5% Mehl entnimmt, dann sind noch 87,5% darin. Das soll aber die Hälfte des gesamten Mehls (140 kg : 2 = 70 kg) sein. Folglich befanden sich im ersten Sack $\frac{70 \cdot 100}{87,5}$ kg Mehl.

Lösung: Im ersten Sack befanden sich 80 kg, im zweiten 60 kg Mehl.

405. Die beiden Werke erfüllen an einem Tag $\frac{1}{12}$ des Auftrages. Das Werk B hat nur $66\frac{2}{3}$ % oder $\frac{2}{3}$ der Produktivität des Werkes A. Folglich stellt die Produktivität beider Werke $1\frac{2}{3}$ der des Werkes A dar. Das Werk A kann an einem Tag $\frac{1}{12} : 1\frac{2}{3} = \frac{1}{20}$ des Auftrags erfüllen. Das Werk B erfüllt demzufolge $\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}$ des Auftrags an einem Tag.

Bis zum Stillstand des Werkes A waren $2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ des Auftrags erfüllt.

Für die Erfüllung des noch übrigbleibenden Teils des Auftrages benötigt das Werk B 25 Tage $\left(\frac{5}{6} : \frac{1}{30} = 25\right)$.

Lösung: Es werden 27 (= 25 + 2) Tage zur Fertigstellung des Auftrags benötigt.

406. Vierzehn Schüler lösten die Aufgaben richtig. Das sind

$$100\,\% - (12\,\% + 32\,\%) = 56\,\%$$

aller Schüler der Klasse. Die Gesamtzahl läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\frac{14 \cdot 100}{56} = 25.$$

Lösung: In dieser Klasse waren 25 Schüler.

407. Die Masse des abgetrennten Teils stellt 72% der Masse der gesamten Schiene dar. Die Masse des übrigbleibenden Teils (45,2 kg) stellt

$$100\% - 72\% = 28\%$$

der Masse der gesamten Schiene dar.

$$1\% \text{ dieser Masse sind } \frac{45{,}2}{28}\,\text{kg}$$

$$72\% \text{ sind } \frac{45{,}2}{28}\,\text{kg} \cdot 72 = 116\frac{8}{35}\,\text{kg} \approx 116{,}23\,\text{kg}.$$

Anstatt 1% der Masse auszurechnen, kann man auch nachfolgende Proportion benutzen:

$$x : 45{,}2 = 72 : 28.$$

Lösung: Der abgeschnittene Teil hat die Masse 116,2 kg.

408. Die Masse der ganzen Legierung (2 kg) stellt $100\% + 14\frac{2}{7}\% = 114\frac{2}{7}\%$ der Masse des Kupfers dar. 1% der Masse des Kupfers stellt also $\frac{4}{114\frac{2}{7}}$ kg dar. Folglich ist die Masse des Silbers, die $14\frac{2}{7}\%$ der Kupfermasse darstellt, gleich

$$\frac{2}{114\frac{2}{7}}\,\text{kg} \cdot 14\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\text{kg}.$$

Anstatt 1% der Masse des Silbers zu berechnen, kann man auch folgende Proportion benutzen:

$$x : 2 = 14\frac{2}{7} : 114\frac{2}{7}.$$

Lösung: Die Masse des Silbers beträgt $\frac{1}{4}$ kg.

409. Der Verdienst des zweiten Arbeiters stellt $1\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} = \frac{7}{30}$ des Verdienstes des ersten dar. In Prozenten ausgedrückt: $\frac{7}{30} \cdot 100\% = 23\frac{1}{3}\%$. Der gemeinsame

Verdienst der drei Arbeiter (4080 Rubel) stellt

$$100\,\% + 23\frac{1}{3}\,\% + 43\frac{1}{3}\,\% = 166\frac{2}{3}\,\%$$

des Verdienstes des ersten Arbeiters dar.
Ein Prozent des Verdienstes des ersten Arbeiters beträgt also $\dfrac{4080}{166\frac{2}{3}}$ Rubel.

Der erste Arbeiter verdient $\dfrac{4080}{166\frac{2}{3}} \cdot 100$ Rubel $= 2448$ Rubel, der zweite Arbeiter erhält $23\frac{1}{3}\,\%$ der vorgenannten Summe, d. h. $\dfrac{2448 \cdot 23\frac{1}{3}}{100}$ Rubel $= 571{,}2$ Rubel, der dritte erhält $\dfrac{2448 \cdot 43\frac{1}{3}}{100}$ Rubel $= 1060{,}8$ Rubel.

Lösung: Die Arbeiter erhalten 2448 Rubel; 571 Rubel 20 Kopeken und 1060 Rubel 80 Kopeken.[1]

410. Die Masse des Zuckers im ersten Kasten beträgt x kg, die im zweiten $\frac{4}{5}x$ kg, im dritten Kasten $\frac{4}{5}x \cdot \dfrac{42\frac{1}{2}}{100}$ kg $= \frac{17}{50}x$ kg.

Es gilt die Beziehung: $x + \frac{4}{5}x + \frac{17}{50}x = 64{,}2, \quad x = 30$ (in kg).

Man berechnet von den erhaltenen 30 kg

$$\frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \frac{17}{50}.$$

Lösung: In den einzelnen Kästen sind 30 kg, 24 kg und 10,2 kg enthalten.

411. Man verwendet zur Herstellung x t der ersten Stahlsorte, sie enthält $0{,}05x$ t Nickel. Von der zweiten Sorte verwendet man also $(140 - x)$ t mit einem Nickelgehalt von $0{,}40 \cdot (140 - x)$ t. In den 140 t Stahl müssen nach dem Schmelzen $0{,}30 \cdot 140$ t Nickel enthalten sein. Es muß also folgende Beziehung gelten:

$$0{,}05x + 0{,}40\,(140 - x) = 0{,}30 \cdot 140.$$

[1] Dieser Aufgabe liegt noch die alte Rubelwährung zugrunde. (*Anm. d. Red.*)

Man erhält $x = 40$.

Lösung: Es werden 40 t der ersten Stahlsorte und 100 t der zweiten Sorte verwendet.

412. Die Legierung enthält $12\ \text{kg} \cdot 0{,}45 = 5{,}4\ \text{kg}$ Kupfer. In der neu herzustellenden Legierung sollen diese 5,4 kg nur 40% des Ganzen darstellen. Die neue Legierung muß also eine Masse von $5{,}4\ \text{kg} : 0{,}40 = 13{,}5\ \text{kg}$ haben. Folglich muß man $13{,}5\ \text{kg} - 12\ \text{kg} = 1{,}5\ \text{kg}$ der zweiten hinzufügen.

Lösung: Es sind 1,5 kg der zweiten Legierung notwendig.

413. Die Aufgabe wird wie die Aufgabe 412 gelöst:

1) $735\ \text{g} \cdot 0{,}16 = 117{,}6\ \text{g}$

2) $117{,}6\ \text{g} : 0{,}10 = 1176\ \text{g}$

3) $1176\ \text{g} - 735\ \text{g} = 441\ \text{g}$

Lösung: Es werden 441 g Alkohol hinzugefügt.

414. Das Gewicht des Kupfers betrage x kp. Dann ist $(24 - x)$ kp das Gewicht des Zinks. Der Gewichtsverlust im Wasser beträgt $\frac{1}{9}x$ kp (für Kupfer) und $\frac{1}{7}(24 - x)$ kp (für Zink).

Folglich gilt $\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(24 - x) = 2\frac{8}{9}$.

Man erhält $x = 17$.

Lösung: In der Legierung sind 17 kp Kupfer und 7 kp Zink enthalten.

415. Die Anzahl der 25 m langen Schienen sei x, die der 12,5 m langen y. Auf dem Gleisabschnitt von 20 km = 20000 m Länge muß man 40000 m Schienen verlegen.

Es gelten folgende Beziehungen:

$$25x + 0{,}50 \cdot 12{,}5y = 40000$$

und

$$12{,}5y + \frac{66\frac{2}{3}}{100} \cdot 25x = 40000.$$

Lösung: Es waren 1200 Schienen von 25 m und 1600 Schienen von 12,5 m Länge vorhanden.

416. Die Anzahl der Schüler sei x. Jeder einzelne Schüler erhält $x - 1$ Fotografien. Alle Schüler erhalten also dann $x(x - 1)$ Fotografien. Es gilt die folgende Gleichung:

$$x(x - 1) = 870.$$

Lösung: Es wurden 30 Schüler entlassen.

417. Von den beiden Zahlen sei x die kleinere und y die größere ($x < y$).
Die erste Beziehung lautet $\sqrt{xy} = x + 12$, die zweite Beziehung

$$\frac{x + y}{2} = y - 24 \quad \text{oder} \quad y - x = 48.$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$x = 6, \quad y = 54.$$

Da $6 < 54$ ist, ist diese Lösung brauchbar.

Lösung: Die gesuchten Zahlen sind 6 und 54.

418. Die kleinste Zahl sei x, die folgende y und die größte z. Es gelten folgende Beziehungen:

(I) $\quad y - x = z - y,$

(II) $\quad xy = 85,$

(III) $\quad yz = 115.$

Die Gleichung (I) ergibt $z = 2y - x$.
Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (III) ein, so erhält man

(IV) $\quad 2y^2 - xy = 115.$

Setzt man hierin für xy den Wert aus (II) ein, so erhält man $2y^2 = 200$.
Von den beiden Lösungen

$$x_1 = 8{,}5, \quad y_1 = 10, \quad z_1 = 11{,}5$$

und

$$x_2 = -8{,}5, \quad y_2 = -10, \quad z_2 = -11{,}5$$

ist nur die erste brauchbar (da $x_1 < y_1 < z_1$ ist), die zweite ist unbrauchbar (da $x_2 > y_2 > z_2$).

Lösung: Die Zahlen lauten 8,5; 10; 11,5.

419. Folgende Beziehungen sind gegeben:

$$\frac{x + y + z}{3} = a \quad \text{und} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = b.$$

Gesucht wird der Ausdruck $\dfrac{xy + yz + zx}{3}$.

Durch Quadrieren erhält man aus der ersten Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9a^2.$$

Die zweite der obengenannten Gleichungen ergibt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3b.$$

Folglich gilt: $3b + 2(xy + yz + zx) = 9a^2$.

Lösung: Der gesuchte Ausdruck lautet $\dfrac{xy + yz + zx}{3} = \dfrac{3a^2 - b}{2}$.

420. Wenn die Länge des Bleches x cm beträgt und seine Breite y cm, dann hat der Kasten eine Länge von $(x - 8)$ cm und eine Breite von $(y - 8)$ cm. Seine Höhe beträgt 4 cm.

Es gilt $4(x - 8)(y - 8) = 768$ und $2x + 2y = 96$.

Lösung: Die Abmessungen des Bleches betrug 32 cm · 16 cm.

421. Bezeichnet man die erste Ziffer der gesuchten Zahl mit x (Zehner) und die zweite Ziffer mit y (Einer) (x und y sind nichtnegative ganze Zahlen kleiner als 10), so erhält man folgendes Gleichungssystem:

(I) $$\frac{10x + y}{xy} = 2\frac{2}{3},$$

(II) $$(10x + y) - (10y + x) = 18.$$

Dieses System hat zwei Lösungen: $x = 6$, $y = 4$ und $x = \frac{1}{8}$, $y = -\frac{15}{8}$, von denen nur die erste Lösung brauchbar ist.

Lösung: Die gesuchte Zahl ist 64.

422. Wenn die Ziffer mit dem Stellenwert zehn gleich x ist, dann ist die Ziffer mit dem Stellenwert eins gleich $(x + 2)$. Man erhält die Gleichung

$$[10x + (x + 2)][x + (x + 2)] = 144$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -3\frac{2}{11}.$$

Die zweite Lösung ist unbrauchbar.

Lösung: Die gesuchte Zahl ist 24.

423. Die gesuchte Zahl sei x. Wenn man rechts 5 addiert, erhält man $10x + 5$. Es gilt folgende Beziehung: $10x + 5 = (x + 3)(x - 13)$.

Lösung: Die gesuchte Zahl ist 22.

424. Die größere Zahl sei x, die kleinere y. Hängt man an die größere Zahl drei Ziffern an (die Null und die beiden Ziffern der kleineren Zahl), dann wird die Zahl, die aus den ursprünglichen Ziffern gebildet wird, eintausendmal so groß und man erhält schließlich $1000x + y$. Die kleinere ergibt nach dem Anhängen

$$1000y + 10x.$$

Es gilt:

$$1000x + y = 2(1000y + 10x) + 590$$

$$2x + 3y = 72.$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man $x = 21$; $y = 10$.

Lösung: Die Zahlen 21 und 10 sind die gesuchten zweistelligen Zahlen.

425. Die Ziffer des zweiten Faktors mit dem Stellenwert eins sei x (x ist eine nichtnegative ganze Zahl kleiner als 10). Dann ist die Ziffer mit dem Stellenwert zehn gleich $3x$. Der zweite Faktor ist also gleich $3 \cdot 10x + x = 31x$.
Der falsch aufgeschriebene zweite Faktor ist gleich

$$10x + 3x = 13x.$$

Das gesuchte Produkt ist gleich $78 \cdot 31x$, das falsch aufgeschriebene gleich $78 \cdot 13x$.
Es gilt die Beziehung $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$. Man erhält $x = 2$.
Lösung: Das gesuchte Produkt ist gleich 4836.

426. Die Geschwindigkeit des ersten Zuges beträgt $x\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, die Geschwindigkeit des zweiten $(x - 12)\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Es gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{96}{x - 12} - \frac{96}{x} = \frac{2}{3}.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Zuges beträgt $48\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des zweiten $36\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

427. Die Geschwindigkeit des ersten Zuges sei v km $\cdot$ h^{-1}. Die Geschwindigkeit des zweiten Zuges ist dann gleich $(v-2)$ km $\cdot$ h^{-1}. Der erste benötigt $\frac{24}{v}$ Stunden, der zweite $\frac{24}{v-2}$ Stunden. Es gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{24}{v-2} - \frac{24}{v} = 1.$$

Lösung: Die Geschwindigkeiten betragen 8 km $\cdot$ h^{-1} und 6 km $\cdot$ h^{-1}.

428. Die Geschwindigkeit des Zuges sei x km $\cdot$ h^{-1}, dann ist die Geschwindigkeit des Dampfers $(x-30)$ km $\cdot$ h^{-1}. Der Zug benötigt $\frac{66}{x}$ Stunden, der Dampfer $\frac{80{,}5}{x-30}$ Stunden. Es gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{80{,}5}{x-30} - \frac{66}{x} = 4 + \frac{15}{60}.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt 44 km $\cdot$ h^{-1}, die des Dampfers 14 km $\cdot$ h^{-1}.

429. Die erste Näherei schneidert am Tage x Kostüme; dann schneidert die zweite $x+4$ Kostüme. Die erste benötigt zur Ausführung des Auftrags $\frac{810}{x}$ Tage. Laut Aufgabenstellung wurde der Termin um drei Tage unterboten. Es wurden also $\left(\frac{810}{x}+3\right)$ Tage benötigt. Der Termin, der der zweiten Werkstatt gesetzt wurde, ist gleich dem der ersten.
Folglich gilt:

$$\frac{810}{x} + 3 = \frac{900}{x+4} + 6.$$

Lösung: Die erste Werkstatt fertigte je Tag 20 Kostüme, die zweite 24 Kostüme.

430. Die Geschwindigkeit des Schiffes, das nach Süden fährt, sei x km $\cdot$ h^{-1}; die des Schiffes, das nach Westen fährt, gleich $(x+6)$ km $\cdot$ h^{-1}.
Da die Fahrtrichtungen beider Schiffe rechtwinklig zueinander sind, gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$(2x)^2 + [2(x+6)]^2 = 60^2.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Schiffes beträgt 18 km $\cdot$ h^{-1}, die des zweiten 24 km $\cdot$ h^{-1}.

431. Der Hund legt mit zwei Sprüngen 4 m, der Fuchs mit drei Sprüngen 3 m zurück. Folglich verringert sich die Entfernung zwischen Hund und Fuchs, wenn der Hund 4 m zurückgelegt hat, um

$$4\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}.$$

Ursprünglich war die Entfernung zwischen ihnen 30mal so groß, d. h., der Hund holt den Fuchs ein, wenn der erstere $4\,\mathrm{m} \cdot 30 = 120\,\mathrm{m}$ zurückgelegt hat.

Lösung: Nach 120 m holt der Hund den Fuchs ein.

432. In einer Minute überstreicht der Minutenzeiger 6°, der Stundenzeiger $\frac{1°}{2}$.

Wenn vier Stunden vergangen sind, beträgt der Winkel zwischen Stunden- und Minutenzeiger 120°. In x Minuten erfolgt eine Zeigerbewegung um $6x$ und $\frac{1}{2}x$ Grad.

Nach Voraussetzung gilt:

$$6x - \frac{1}{2}x = 120.$$

Lösung: Nach $21\frac{9}{11}$ min stehen die Zeiger übereinander.

433. Die Fahrzeit des Zuges von A nach C sei t (in h) und die vorgeschriebene Geschwindigkeit v (in $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$).

Für die Entfernung $\overline{AB}$ benötigt der Zug die Zeit $\frac{t}{2}$ bei der Geschwindigkeit v, für den Weg $\overline{BC}$ die Zeit $\frac{t}{2}$ bei einer Geschwindigkeit von $0{,}75v$. Es ist bekannt, daß $\overline{AB} = v \cdot \frac{t}{2}$ und $\overline{BC} = 0{,}75v \cdot \frac{t}{2}$ gilt.

Auf dem Rückweg wird die Entfernung $\overline{BC}$ mit einer Geschwindigkeit v durchfahren, die Entfernung $\overline{AB}$ aber nur mit einer Geschwindigkeit von $0{,}75v$.

Es ist bekannt, daß die Entfernung $\overline{BC}$ in der Zeit $\frac{0{,}75vt}{2} : v$, d. h. in $\frac{0{,}75t}{2}$ durchfahren wird.

Die Strecke $\overline{AB}$ wird in $\frac{vt}{2} : 0{,}75v$, d. h. in $\frac{t}{2 \cdot 0{,}75}$ durchfahren.

Es gilt nach Voraussetzung folgende Beziehung:

$$\frac{t}{2 \cdot 0{,}75} + \frac{0{,}75t}{2} = \frac{5}{12} + t.$$

Lösung: Der Zug braucht für die Entfernung $\overline{AC}$ 10 Stunden.

434. Der Radfahrer sei mit der Geschwindigkeit v (in $km \cdot h^{-1}$) gefahren. Dann betrug die Geschwindigkeit, die für die Strecke vorgesehen war, $v - 1$ (in $km \cdot h^{-1}$). Tatsächlich benötigte der Radfahrer die Zeit $\frac{30}{v}$ (in Stunden), während die vorgesehene Zeit aber $\frac{30}{v-1}$ (in Stunden) betrug. Es gilt nach Voraussetzung die Beziehung:

$$\frac{30}{v-1} - \frac{30}{v} = \frac{3}{60}.$$

Der negative Wert $v = -24$ ist nicht brauchbar.

Lösung: Der Radfahrer fuhr mit einer Geschwindigkeit von $25\ km \cdot h^{-1}$.

435. Die fahrplanmäßige Geschwindigkeit des Zuges sei $x\ km \cdot h^{-1}$. Die tatsächlich gefahrene Geschwindigkeit betrug also $(x + 10)\ km \cdot h^{-1}$. Bei den Fahrzeiten betrug die planmäßige Zeit $\frac{80}{x}$ Stunden, während die tatsächlich erreichte $\frac{80}{x+10}$ Stunden war.
Es gilt nach Voraussetzung folgende Beziehung:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+10} = \frac{16}{60}.$$

Lösung: Die fahrplanmäßige Geschwindigkeit betrug $50\ km \cdot h^{-1}$.

436. Die erste Hälfte der Strecke legte der Zug in x Stunden zurück. Dann mußte er, um ohne Verspätung anzukommen, die zweite Hälfte in $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ Stunden zurücklegen.
Auf der ersten Hälfte der Strecke beträgt seine Geschwindigkeit $\frac{420}{x}\ km \cdot h^{-1}$, auf der zweiten Hälfte $\frac{420}{x - \frac{1}{2}}\ km \cdot h^{-1}$.

Es gilt nach Voraussetzung die Beziehung:

$$\frac{420}{x - \frac{1}{2}} - \frac{420}{x} = 2.$$

Diese Gleichung hat eine positive Wurzel.

Lösung: Die Fahrzeit beträgt 21 Stunden.

437. Die Geschwindigkeit des ersten Zuges sei x km $\cdot$ h^{-1}, die Geschwindigkeit des zweiten y km $\cdot$ h^{-1}. Im ersten Fall fährt der erste Zug bis zur Begegnung $10x$ km, der zweite $10y$ km.
Folglich gilt: $10x + 10y = 650$.
Im zweiten Falle fährt der erste Zug $8x$ km, der zweite Zug $12\frac{1}{3}y$ km $\left(\text{denn er fährt } 8\text{ h} + 4\text{ h } 20\text{ min} = 12\frac{1}{3}\text{ h}\right)$.
Folglich gilt:

$$8x + 12\frac{1}{3}y = 650.$$

Lösung: Die mittlere Geschwindigkeit des ersten Zuges beträgt 35 km $\cdot$ h^{-1}, die des zweiten 30 km $\cdot$ h^{-1}.

438. Die Geschwindigkeit des ersten Zuges sei x km $\cdot$ h^{-1}, die des zweiten y km $\cdot$ h^{-1}.
Die Entfernung von 600 km legt der erste Zug in $\frac{600}{x}$ Stunden zurück, der zweite in $\frac{600}{y}$ Stunden.
Es gelten folgende Beziehungen (nach Voraussetzung):

$$\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y} \quad \text{und} \quad \frac{250}{x} = \frac{200}{y}.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Zuges beträgt 50 km $\cdot$ h^{-1}, die des zweiten 40 km $\cdot$ h^{-1}.

439. Wenn die Entfernung x km beträgt, dann benötigt der Urlauber bei einer Geschwindigkeit von 3,5 km $\cdot$ h^{-1} die Zeit von $\frac{x}{3{,}5}$ Stunden. Da er den Zug um eine Stunde verpaßt hätte, beträgt die Zeit zwischen dem Moment des Abmarsches zum Bahnhof und der Abfahrt des Zuges $\left(\frac{x}{3{,}5} - 1\right)$ Stunden. Nachdem der Urlauber eine Stunde unterwegs ist, stehen ihm bis zur Abfahrt des Zuges noch $\left(\frac{x}{3{,}5} - 2\right)$ Stunden zur Verfügung, in denen er noch $(x - 3{,}5)$ km zurücklegen muß.
Bei einer Geschwindigkeit von 5 km $\cdot$ h^{-1} bewältigt er diese Entfernung in $\frac{x - 3{,}5}{5}$ Stunden. Da er noch eine halbe Stunde vor Abfahrt des Zuges auf dem

Bahnhof ist, gilt:

$$\frac{x}{3{,}5} - 2 - \frac{x - 3{,}5}{5} = \frac{1}{2}.$$

Lösung: Der Urlauber hatte 21 km zurückzulegen.

440. Die Geschwindigkeit des Radfahrers sei $x \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des Autos $y \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Das Auto benötigt bis zum ersten Treffpunkt 10 min, der Radfahrer 10 min + 15 min = 25 min. Im Moment des Überholens haben beide die gleiche Strecke zurückgelegt.
Folglich gilt: $25x = 10y$.
Bis zur Begegnung auf dem Rückweg ist das Auto $50y$ km, der Radfahrer $65x$ km gefahren. Die Summe dieser Entfernungen ergibt die doppelte Entfernung von Moskau nach Mytisch. Deshalb gilt:

$$65x + 50y = 38.$$

Als Lösung des Gleichungssystems erhält man

$$x = 0{,}2; \quad y = 0{,}5.$$

Lösung: Geschwindigkeit des Radfahrers: $0{,}2 \text{ km} \cdot \text{min}^{-1} = 12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
Geschwindigkeit des Autos: $0{,}5 \text{ km} \cdot \text{min}^{-1} = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

441. Die beiden Züge begegnen sich nach x Stunden (gerechnet vom Zeitpunkt der Abfahrt des Schnellzuges). Der Postzug ist dann im Moment der Begegnung $(x + 3)$ Stunden unterwegs.
Bis zum Treffpunkt fährt jeder Zug $1080 : 2 = 540$ (in km).
Die Geschwindigkeit des ersten Zuges beträgt $\frac{540}{x} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des zweiten $\frac{540}{x + 3} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
Man erhält nach Voraussetzung die Beziehung $\frac{540}{x} - \frac{540}{x + 3} = 15$. Brauchbar ist nur eine Wurzel, nämlich $x = 9$.

Lösung: Neun Stunden nach der Abfahrt des Schnellzuges begegnen sich beide Züge.

442. Der erste Radfahrer fuhr x Stunden. Man führt die Überlegungen wie in der Aufgabe 441 durch und erhält die Gleichung:

$$\frac{36}{x - 1} - \frac{42}{x} = 4.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Radfahrers betrug $14 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des zweiten $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Der erste fuhr bis zur Begegnung 3 Stunden, der zweite 2 Stunden.

443. Der Wanderweg, auf dem sich beide Wanderer einander nähern, sei $\overline{AB}$, die Entfernung von A nach B betrage x km. Der erste Fußgänger braucht für diese Strecke y Stunden, der zweite bewältigt diese Entfernung in $(y - 5)$ Stunden. Es ist bekannt, daß der erste in einer Stunde $\frac{x}{y}$ km zurücklegt, der zweite $\frac{x}{y-5}$ km.

In einer Stunde verkürzt sich der Abstand, der beide Wanderer noch trennt, um $\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y-5}\right)$ km, in $\frac{10}{3}$ Stunden um $\frac{10}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y-5}\right)$ km. Weil sie sich nach $3\frac{1}{3}$ Stunden begegnen, gilt:

$$\frac{10}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y-5}\right) = x.$$

Da $x \neq 0$ ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch x dividieren. Man erhält:

$$\frac{10}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-5}\right) = 1, \quad \text{woraus man } y \text{ berechnen kann.}$$

Die Größe x bleibt dabei unbestimmt.

Lösung: Der erste Fußgänger legt die Strecke in 10 Stunden, der zweite in 5 Stunden zurück.

444. Der Treffpunkt der Touristen sei C. Die Strecke $\overline{AC}$ betrage x km. Nach Voraussetzung ist dann $\overline{BC} = (x + 12)$ km.

Weiterhin legt der erste Tourist den Weg $\overline{BC}$ in acht Stunden zurück. Es ist bekannt, daß seine Geschwindigkeit $\frac{x+12}{8}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ beträgt. Ebenso findet man, daß die Geschwindigkeit des zweiten Touristen $\frac{x}{9}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ beträgt.

Folglich bewältigt der erste Tourist den Weg $\overline{AC}$ in

$$\left(x : \frac{x+12}{8}\right) \text{ Stunden} = \frac{8x}{x+12} \text{ Stunden;}$$

der zweite Tourist bewältigt den Weg $\overline{BC}$ in $\frac{9(x+12)}{x}$ Stunden.

Weil der zweite Tourist aber sechs Stunden länger braucht als der erste, gilt:

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6.$$

Zur Lösung dieser Gleichung kann man eine Hilfsgröße $\frac{x+12}{x} = z$ einführen.
Man erhält

$$9z - \frac{8}{z} = 6.$$

Von den beiden Wurzeln $\left(z_1 = \frac{4}{3} \text{ und } z_2 = -\frac{2}{3}\right)$ ist die zweite unbrauchbar, da die beiden Ausdrücke $x = \overline{AC}$ und $x + 12 = \overline{BC}$ positiv sein müssen. Aus der Gleichung $\frac{x+12}{x} = \frac{4}{3}$ erhält man $x = 36$.
Man weiß also:

$$\overline{AC} = 36 \text{ km}, \quad \overline{BC} = 48 \text{ km}.$$

Lösung: Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt 84 km, die Geschwindigkeit des ersten Touristen $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des zweiten $4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

445. Die Aufgabe kann wie die Aufgabe 444 gelöst werden. Das Luftschiff fliegt bis zur Begegnung x km, also fliegt das Flugzeug bis zur Begegnung $(x + 100)$ km. Die Geschwindigkeit des Luftschiffs beträgt $\frac{x+100}{3} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des Flugzeugs $\frac{x}{1\frac{1}{3}} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Vom Startplatz bis zur Begegnung fliegt das Luftschiff

$$\left(x : \frac{x+100}{3}\right) \text{ Stunden} = \frac{3x}{x+100} \text{ Stunden}.$$

Das Flugzeug fliegt von seinem Startplatz bis zur Begegnung

$$\frac{\frac{4}{3}(x+100)}{x} \text{ Stunden.}$$

Man erhält folgende Gleichung

$$\frac{3x}{x+100} = \frac{\frac{4}{3}(x+100)}{x}, \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{x}{x+100}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Folglich gilt $\frac{x}{x+100} = \pm\frac{2}{3}$. Man erhält $x = 200$.
Die zweite Wurzel ist unbrauchbar.

Lösung: Die Entfernung zwischen den Flugplätzen beträgt 500 km, die Geschwindigkeit des Luftschiffs $100\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, die des Flugzeugs $150\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

446. *Erstes Verfahren:*

Man kann diese Aufgabe wie die Aufgabe 445 lösen. Man erhält folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{x-a}\right)^2 = \frac{n}{m}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{x}{x-a} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}.$$

Folglich gilt:

$$x = \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{m}}.$$

Danach erhält man folgende Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{x-a}{m} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{x}{n}.$$

Zweites Verfahren:

Der Treffpunkt sei C.

Da der erste Wanderer die Entfernung $\overline{CB}$ in m Stunden zurücklegt, ist

$$\overline{CB} = v_1 \cdot m\ \text{km}.$$

Analog erhält man $\overline{CA} = v_2 \cdot n$ km.

Es gilt nach Voraussetzung die Beziehung:

$$\overline{CA} - \overline{CB} = a.$$

Unter Verwendung der Ausdrücke für $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ entsteht die Gleichung:

$$n \cdot v_2 - m \cdot v_1 = a.$$

Für die Strecke $\overline{AC}$ benötigt der erste Wanderer $\frac{\overline{AC}}{v_1}$ Stunden. Es ist bekannt, daß er vom Zeitpunkt seines Abmarsches bis zur Begegnung $\frac{v_2 \cdot n}{v_1}$ Stunden benötigte. Analog benötigte der zweite vom Zeitpunkt seines Abmarsches bis zur Begegnung $\frac{v_1 \cdot m}{v_2}$ Stunden. Weil beide gleichzeitig losgehen, gilt:

$$n \cdot \frac{v_2}{v_1} = m \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung erhält man: $v_1 : v_2 = \sqrt{n} : \sqrt{m}$.

Diese Gleichung löst man nun gemeinsam mit der ersten. Wegen der Symmetrie kann man eine Hilfsveränderliche einführen:

$$t = \frac{v_1}{\sqrt{n}} = \frac{v_2}{\sqrt{m}}.$$

Man setzt in die erste Gleichung die Ausdrücke $v_1 = \sqrt{n}t$ und $v_2 = \sqrt{m}t$ ein und erhält:

$$(n\sqrt{m} - m\sqrt{n})\,t = a,$$

woraus sich $t = \dfrac{a}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}$ ergibt.

Schließlich ergeben sich die Geschwindigkeiten der Wanderer zu

$$v_1 = \frac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad v_2 = \frac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}.$$

Bemerkung: Die Aufgabe ist nur lösbar für den Fall, daß $n\sqrt{m} > m\sqrt{n}$ ist. Nachdem man beide Seiten dieser Ungleichung mit der positiven Zahl $\sqrt{m}\sqrt{n}$ multipliziert hat, erhält man $\sqrt{n} > \sqrt{m}$, d. h. $n > m$. Diese Ungleichung kann man unmittelbar aus der Aufgabenstellung entnehmen: Weil der erste Fußgänger bis zur Begegnung eine größere Entfernung zurücklegt als der zweite, muß seine Geschwindigkeit größer sein als die Geschwindigkeit des zweiten. Mit anderen Worten, der erste Fußgänger hat bis zum Ende des Weges weniger zurückzulegen als der zweite. Folglich ist der erste schneller in *B* als der zweite in *A*.

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Fußgängers beträgt

$\dfrac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, die Geschwindigkeit des zweiten

$\dfrac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m} - m\sqrt{n}}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

447. Der erste Körper legt in einer Sekunde x Grad (denjenigen Kreisbogen, dessen Zentriwinkel $x°$ beträgt) zurück, der andere y Grad.

Aus beiden Beziehungen erhält man: $\dfrac{360}{y} - \dfrac{360}{x} = 5.$

In jeder Sekunde vergrößert sich die Entfernung der beiden Körper (auf dem Bogen) um $(x - y)$ Grad.

In der Zeit, die zwischen einer Begegnung und der folgenden vergeht (das sind 100 s), muß sich der Abstand um 360° vergrößern. Deshalb gilt:

$$100(x - y) = 360.$$

Das erhaltene Gleichungssystem hat zwei Lösungen:

$$x_1 = 18,\ y_1 = 14{,}4;\quad x_2 = -14{,}4,\ y_2 = -18.$$

Beide Lösungen sind brauchbar, aber physikalische Bedeutung hat nur eine von ihnen. (Bei der anderen ist die Bezeichnung der Körper und die Bewegungsrichtung verändert.)

Lösung: 18°; 14°24′

448. Die Geschwindigkeit des ersten Körpers sei $x\ \mathrm{m \cdot min^{-1}}$, die Geschwindigkeit des zweiten $y\ \mathrm{m \cdot min^{-1}}$. Man nimmt an, daß $x > y$ ist.
Wenn sich die Körper in der gleichen Richtung bewegen, überholt der Körper mit der Geschwindigkeit $x\ \mathrm{m \cdot min^{-1}}$ den anderen jeweils nach 56 min. Der erste Überholpunkt sei A, der zweite B und so weiter. (Im voraus wird nicht ausgeschlossen, daß der Punkt B mit dem Punkt A zusammenfällt. Das wird z. B. dann der Fall sein, wenn die Geschwindigkeit des ersten Körpers doppelt so groß ist wie die Geschwindigkeit des zweiten. In diesem Falle führt der erste Körper zwei volle Umdrehungen aus, der zweite aber nur eine.)
Auf dem Weg von A nach B (dieser Weg kann für einen Körper oder für beide mehrere Umdrehungen betragen) bleibt der zweite Körper vor dem ersten, aber im Moment des nächsten Zusammentreffens stellt der Weg, den der eine Körper zurückgeblieben ist, einen ganzen Kreisumfang dar. Da zwischen zwei aufeinander folgenden Begegnungen der Körper 56 min vergehen, legt der erste Körper in dieser Zeit $56x$ m, der zweite $56y$ m zurück. Die Differenz beider Wege $56x - 56y$ ist gleich dem Kreisumfang.
Die Körper sollen sich jetzt in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Die Summe der Wege, die sie in der Zeit zurücklegen, die zwischen zwei aufeinander folgenden Begegnungen vergeht, also 8 min, ist gleich dem Kreisumfang. Folglich ist die Länge des Kreisumfanges gleich $8x + 8y$. Man erhält die Gleichung

$$56x - 56y = 8x + 8y.$$

In der Aufgabenstellung war weiter gesagt, daß in 24 s die Entfernung zwischen ihnen um $40\ \mathrm{m} - 26\ \mathrm{m} = 14\ \mathrm{m}$ abnimmt. In diesen 24 s begegnen sich die Körper nicht, deshalb ist die Verringerung der Entfernung gleich der Summe der Wege, die von den Körpern in $24\ \mathrm{s} = \frac{2}{5}\ \mathrm{min}$ zurückgelegt werden.
Man erhält so eine zweite Gleichung:

$$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14.$$

Lösung: Die Geschwindigkeiten betragen $20\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ bzw. $15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. Der Umfang beträgt 280 m.

449. Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten beider Punkte seien x und y, die Maßzahl des bekannten Kreisumfangs sei u. (Wenn der Umfang des Kreises u m ist, dann ist die Geschwindigkeit $1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Entsprechendes würde für eine andere Längeneinheit gelten. In der Aufgabe wird hierüber jedoch nichts ausgesagt.) Setzt man voraus, daß $x > y$ ist, so gilt das Gleichungssystem:

(I) $\quad tx - ty = u,$

(II) $\quad \dfrac{u}{y} - \dfrac{u}{x} = n.$

[Die Gleichung (I) wird analog zur ersten Gleichung in der Aufgabe 448 aufgestellt.]
Isoliert man im Gleichungssystem x und formt um, so erhält man die quadratische Gleichung

$$nty^2 + nuy - u^2 = 0.$$

Nur eine Wurzel dieser Gleichung, nämlich

$$y = \frac{u(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}$$

ist brauchbar, denn die zweite Wurzel ist negativ.
Lösung: Die größere Geschwindigkeit ist zahlenmäßig gleich

$$\frac{u(\sqrt{n^2 + 4nt} + n)}{2nt}, \quad \text{die kleinere} \quad \frac{u(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}.$$

450. Die Geschwindigkeit des Schiffes in stehendem Gewässer beträgt $x\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Man erhält die Gleichung $\dfrac{80}{x+4} + \dfrac{80}{x-4} = 8\dfrac{1}{3}$.

Lösung: Die Geschwindigkeit des Schiffes in stehendem Gewässer beträgt $20\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

451. *Lösung:* Die Geschwindigkeit in stehendem Gewässer beträgt $9\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

452. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses betrage $x\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, die Geschwindigkeit des Bootes im stehenden Wasser sei $y\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Der erste Teil der Aufgabenstellung ergibt die Gleichung $\dfrac{20}{y+x} + \dfrac{20}{y-x} = 10$, der zweite die Gleichung

$$\frac{2}{y-x} = \frac{3}{y+x}.$$

Für die Lösung dieses Systems ist die Substitution $\frac{1}{y+x} = u$ und $\frac{1}{y-x} = v$ günstig.

Als Lösung des Systems

$$20u + 20v = 10$$
$$2v = 3u$$

erhält man $u = \frac{1}{5}$ und $v = \frac{3}{10}$, d. h. $y + x = 5$, $y - x = \frac{10}{3}$, woraus $x = \frac{5}{6}$ folgt.

Lösung: Die Geschwindigkeit beträgt $\frac{5}{6}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

453. Ein Floß braucht für die a km betragende Entfernung von Kiew nach Dnepropetrowsk x Stunden. Seine Geschwindigkeit, die gleich der Strömungsgeschwindigkeit des Dnepr ist, beträgt $\frac{a}{x}\,\mathrm{km \cdot d^{-1}}$ (Kilometer je Tag).

Nach Voraussetzung beträgt die Geschwindigkeit des Schiffes $\frac{a}{2}\,\mathrm{km \cdot d^{-1}}$, wenn es mit der Strömung fährt. Folglich beträgt die Geschwindigkeit des Schiffes in stehendem Gewässer $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{x}\right)\mathrm{km \cdot d^{-1}}$.

Da die Geschwindigkeit des Schiffes, wenn es gegen die Strömung fährt, $\frac{a}{3}\,\mathrm{km \cdot d^{-1}}$ beträgt, ist seine Geschwindigkeit in stehendem Gewässer gleich $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{x}\right)\mathrm{km \cdot d^{-1}}$.

Man erhält die Gleichung $\frac{a}{2} - \frac{a}{x} = \frac{a}{3} + \frac{a}{x}$.

Lösung: Das Floß braucht zwölf Tage für diese Strecke.

454. Die Geschwindigkeit des Körpers M_1 betrage $x\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, die des zweiten Körpers $y\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Im Moment der ersten Begegnung bewegt sich der Körper M_1 schon 21 s, der zweite 21 s − 15 s = 6 s.

Man erhält die Gleichung $21x + 6y = 60$.

Im Moment der zweiten Begegnung hat sich der Körper M_1 45 s bewegt, der Körper M_2 45 s − 15 s = 30 s.

Der Punkt, an dem die zweite Begegnung stattfindet, sei C, d. h., der Körper M_1 hat bis zum Zeitpunkt der zweiten Begegnung den Weg $\overline{AB} + \overline{BC}$ zurückgelegt, der Körper M_2 den Weg $\overline{AB} + \overline{AC}$. Die Summe dieser Wege ist gleich $3\overline{AB}$, d. h. 180 m.

Man erhält eine zweite Gleichung: $45x + 30y = 180$.

Lösung: Die Geschwindigkeit des Körpers M_1 beträgt $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, die des Körpers M_2 $3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

455. Die Geschwindigkeit bei der Bewegung bergan sei x $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, die auf der Strecke ohne Höhenunterschiede y $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, die bergab z $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Der Bote kehrte auf halbem Wege um, legte also $14\,\text{km} : 2 = 7\,\text{km}$ zurück. 3 km ging er bergan, 4 km in gleicher Höhe. Später (auf dem Rückweg) ging er 4 km auf nicht geneigter Strecke und dann 3 km bergab.

Nach Voraussetzung gilt folgende Beziehung:

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}.$$

Die anderen Beziehungen ergeben:

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 3\frac{9}{20}; \quad \frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{17}{20}.$$

Man erhält die Werte für $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ und daraus die für x, y und z.

Lösung: Die Geschwindigkeit betrug bergan $3\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, auf nicht geneigter Strecke $4\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ und bergab $5\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

456. Die Norm sei x Blatt am Tage, und die vorgesehene Zeit betrage y Tage. Nach Voraussetzung gelten folgende Beziehungen:

$$(x + 2)(y - 3) = xy \quad \text{und} \quad (x + 4)(y - 5) = xy.$$

Lösung: Die Stenotypistin hatte 120 Blatt zu schreiben und 15 Tage Zeit.

457. Der Arbeiter schafft x Einzelteile in y Tagen. Er fertigt also täglich $\frac{x}{y}$ Teile.

Nach Voraussetzung wird er, wenn er täglich $\frac{x}{y} + 10$ Teile fertigt, mit der Arbeit nach $\left(y - 4\frac{1}{2}\right)$ Tagen fertig.

Es ist bekannt, daß $\left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(y - \frac{9}{2}\right) = x$ gilt.

Die andere Beziehung ergibt die Gleichung

$$\left(\frac{x}{y} - 5\right)(y + 3) = x.$$

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$10y - \frac{9}{2}\frac{x}{y} = 45,$$

$$-5y + 3\frac{x}{y} = 15.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2 und addiert sie zur ersten, so ergibt sich $\frac{x}{y} = 50$.

Setzt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung ein, so erhält man $y = 27$.
Folglich gilt: $x = 50 \cdot y = 1350$.

Bemerkung: Diese Aufgabe kann wie die Aufgabe 456 gelöst werden, wenn man zusammen mit der Unbekannten x die Größe z (Anzahl der Einzelteile je Tag) einführt.

Man erhält ein Gleichungssystem, in dem $\frac{x}{y}$ durch z ersetzt ist.

Lösung: Der Arbeiter fertigt 1350 Teile in 27 Tagen.

458. Die tägliche Norm der Stenotypistin betrage x Seiten, die Zeit, die sie für die Arbeit benötigt, sei y Tage. Die Arbeit umfaßt also $x \cdot y$ Seiten. Nach Voraussetzung verrichtet sie bei einer Tagesleistung von $x + 2$ Seiten die Arbeit in $y - 2$ Tagen.
Die Arbeit umfaßt also $(x + 2)(y - 2)$ Seiten.
Folglich gilt: $(x + 2)(y - 2) = x \cdot y$.
Auf die gleiche Art und Weise erhält man die andere Gleichung:

$$(x + 0{,}60x)(y - 4) = xy + 8.$$

Lösung: Die Norm beträgt 10 Seiten am Tage, die Zeit für die Fertigstellung 12 Tage.

459. Der erste Arbeiter erledigt den Auftrag in x Stunden. Man erhält die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 12} = \frac{1}{8}.$$

Lösung: Der erste Arbeiter kann die Arbeit in 12 Stunden bewältigen, der zweite in 24 Stunden.

460. Die erste Pumpe füllt das Bassin in x Stunden; dann benötigt die zweite Pumpe $x + 5$ Stunden.
Auf Grund der Aufgabenstellung erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}.$$

Lösung: Die erste Pumpe füllt das Bassin in 10 Stunden, die zweite in 15 Stunden.

461. Der erste Arbeiter kann die Arbeit allein in x Stunden ausführen, der zweite in y Stunden.
In einer Stunde bewältigt der erste $\frac{1}{x}$ der gesamten Arbeit, der zweite $\frac{1}{y}$.
Nach Voraussetzung gilt: $7 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{5}{9}$.
Wenn beide Arbeiter dann noch vier Stunden zusammenarbeiten, so schaffen sie $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y}\right)$ der gesamten Arbeit.
Dieser Anteil ist gleich $1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{7}{18}$.
Man erhält folgende Gleichung $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18}$.
Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten, so erhält man $\frac{3}{x} = \frac{3}{18}$, woraus $x = 18$ folgt. Ferner erhält man $\frac{1}{y} = \frac{1}{24}$, also $y = 24$.

Lösung: Der erste kann die Arbeit in 18, der zweite in 24 Stunden ausführen.

462. Man bezeichnet die gesuchten Zahlen mit x und y. Die vier Kräne mit der großen Leistung arbeiten 2 Stunden + 3 Stunden = 5 Stunden. Die zwei Kräne mit der kleinen Leistung arbeiten drei Stunden.
Deshalb gilt (siehe Lösung der Aufgabe 461)

$$4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{y} = 1.$$

Die zweite Beziehung ergibt $4 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{1}{y} = 1.$

Lösung: Mit einem Kran benötigt man 24 bzw. 36 Stunden.

463. Die Lastkraftwagen mit einer Ladefähigkeit von 3 t können die Verladearbeit in x Stunden bewältigen, die Lastkraftwagen mit 5 t Ladefähigkeit in y Stunden. Nach Voraussetzung gelten die Beziehungen (siehe Lösungen der Aufgaben 461 und 462):

$$30 \cdot 8 \cdot \frac{1}{x} + 9 \cdot 6 \cdot \frac{1}{y} = 1 \quad \text{und} \quad 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{y} + 30 \cdot 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{13}{15}.$$

Also ist $x = 300$; $y = 270$.

Lösung: Ein Dreitonner braucht 300 Stunden, ein Fünftonner 270 Stunden. Dreißig Fünftonner würden die Arbeit in 270 Stunden : 30 = 9 Stunden bewältigen.

464. Die erste Stenotypistin benötigt für die Erledigung des gesamten Auftrags x Stunden, die zweite y Stunden. Nachdem die erste 3 Stunden gearbeitet hatte, arbeitete die zweite erst 2 Stunden. Beide erfüllten $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ ihres Auftrages.

Man erhält die Gleichung $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20}$.

Jede Stenotypistin hat die Hälfte der Arbeit, und zwar die erste in $\frac{x}{2}$, die zweite in $\frac{y}{2}$ Stunden verrichtet. Da aber die erste eine Stunde länger arbeitete als die zweite, gilt $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$.

Das System hat zwei Lösungen. Eine Lösung ist nicht brauchbar, da sich für y ein negativer Wert ergibt.

Lösung: Die erste Stenotypistin braucht 10 Stunden, die zweite 8 Stunden.

465. Diese Aufgabe löst man wie die Aufgabe 464. Man erhält die Gleichungen $\frac{2}{x} + \frac{1{,}5}{y} = \frac{11}{30}$ und $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$, wobei x und y die Fahrzeiten der Züge (in Stunden) sind.

Von den beiden Lösungen des Systems ist nur eine brauchbar.

Lösung: Die Fahrzeiten betragen 10 bzw. 9 Stunden.

466. In einer Minute fließen durch den ersten Hahn x l, durch den zweiten y l. Nach Voraussetzung faßt die Wanne $(2 \cdot 9 \cdot 2{,}5)\ l = 45\ l$. Sind beide Hähne offen, dann ist die Wanne in einer Stunde leer.

Es ist bekannt, daß sich in einer Minute die Wassermenge um $\frac{45}{60}\,l = \frac{3}{4}\,l$ vermindert.

Folglich gilt: $y - x = \frac{3}{4}$.

Mit anderen Worten, durch den ersten Hahn wird die Wanne in $\frac{45}{x}$ min gefüllt, durch den anderen in $\frac{45}{y}$ min entleert.

Nach Voraussetzung gilt $\frac{45}{x} - \frac{45}{y} = 5$.

Das System

$$y - x = \frac{3}{4},$$

$$\frac{45}{x} - \frac{45}{y} = 5$$

hat zwei Lösungen:

$$x_1 = 2\frac{1}{4};\ y_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = -3;\ y_2 = -2\frac{1}{4}.$$

Die zweite Lösung ist unbrauchbar, denn x und y müssen positive Zahlen sein.

Lösung: Durch den ersten Hahn fließen $2\frac{1}{4}\,l \cdot \text{min}^{-1}$, durch den zweiten $3\,l \cdot \text{min}^{-1}$.

467. Für diese Arbeit waren x Tage vorgesehen. Der Tagesplan sah demnach

$$\frac{8000}{x}\ \text{m}^3 \text{ vor.}$$

Die Brigade arbeitete $x - 8$ Tage, d. h. sie schaffte täglich $\frac{8000}{x-8}\ \text{m}^3$.

Nach Voraussetzung gilt die Beziehung $\frac{8000}{x-8} - \frac{8000}{x} = 50$.

Von den beiden Wurzeln dieser Gleichung ($x_1 = 40$ und $x_2 = -32$) ist nur die positive $x = 40$ brauchbar. Es ist bekannt, daß im Tagesplan $\frac{8000}{x}\ \text{m}^3 = 200\ \text{m}^3$ festgelegt waren.

Der Plan konnte um 50 m^3, d. h. um $\dfrac{50 \cdot 100}{200}\,\% = 25\,\%$ übererfüllt werden.

Lösung: Die Arbeit sollte im Zeitraum von 40 Tagen ausgeführt werden. Die Norm wurde um 25% übererfüllt.

468. Die erste Brigade besserte je Tag x km aus. Dann besserte die zweite $(4{,}5 - x)$ km je Tag aus.

Die erste Brigade arbeitete $\dfrac{10}{x}$ Tage, die zweite $\dfrac{10}{4{,}5 - x}$ Tage. Nach Voraussetzung gilt: $\dfrac{10}{x} - \dfrac{10}{4{,}5 - x} = 1$. Diese Gleichung hat zwei Wurzeln: $x_1 = 2$, $x_2 = 22{,}5$. Die zweite Wurzel ist nicht brauchbar, da in dieser Aufgabe $4{,}5 - x$ positiv sein muß.

Lösung: Die erste Brigade besserte 2 km, die zweite 2,5 km Straße je Tag aus.

469. Der erste Arbeiter kann die Arbeit in x Stunden bewältigen, der zweite in y Stunden.

Es ist bekannt, daß die Hälfte der Arbeit vom ersten in $\dfrac{x}{2}$ Stunden, der noch übrigbleibende Teil (d. h. auch die Hälfte) vom zweiten in $\dfrac{y}{2}$ Stunden erledigt wird.
Nach Voraussetzung gilt die Beziehung $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 25$.

Die andere Beziehung (siehe Lösung der Aufgabe 461) lautet

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$$

Lösung: Ein Arbeiter (entweder der erste oder der zweite) kann die Arbeit in 20 Stunden ausführen, der andere in 30 Stunden.

470. Ein Traktor pflügt das Feld in x Tagen, der andere in y Tagen. Man erhält (siehe Aufgabe 469) folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{t}; \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = k.$$

Man kann dieses Gleichungssystem auch durch das folgende ersetzen:

$$x + y = 2k; \quad xy = 2kt.$$

Lösung: Einer der Traktoren benötigte $(k + \sqrt{k^2 - 2kt})$ Tage, der andere $(k - \sqrt{k^2 - 2kt})$ Tage.

Die Aufgabe ist nur lösbar für $\frac{k}{2} > t$.

471. Wenn alle drei Bagger zusammenarbeiten, kann die Arbeit in x Tagen bewältigt werden. Der erste allein kann die Arbeit in $x + 10$ Tagen fertigstellen, der zweite allein in $x + 20$ Tagen und der dritte in $6x$ Tagen.

Am ersten Tag führt der erste Bagger $\frac{1}{x + 10}$ der Arbeit aus, der zweite allein $\frac{1}{x + 20}$, der dritte $\frac{1}{6x}$; zusammen erreichen sie $\frac{1}{x}$ der Arbeit.
Man erhält die Gleichung

$$\frac{1}{x + 10} + \frac{1}{x + 20} + \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}.$$

Lösung: Die Arbeit kann vom ersten Bagger in 20 Tagen, vom zweiten in 30 Tagen, vom dritten in 60 Tagen ausgeführt werden.

472. Wenn der zweite Arbeiter die Arbeit in x Tagen ausführt, dann braucht der erste $x + 3$ Tage. Der erste arbeitet sieben Tage und schafft $\frac{7}{x + 3}$ der gesamten Arbeit. Der zweite arbeitet 7 Tage $- 1\frac{1}{2}$ Tage $= 5\frac{1}{2}$ Tage und schafft $\frac{\frac{11}{2}}{x}$ der gesamten Arbeit.

Man erhält die Gleichung $\frac{7}{x + 3} + \frac{\frac{11}{2}}{x} = 1.$

Lösung: Der erste Arbeiter schafft die gesamte Arbeit in 14 Tagen, der zweite in 11 Tagen.

473. Der erste Traktor kann das gesamte Feld in x Tagen pflügen, der zweite in y Tagen.
Die erste Beziehung lautet nach Voraussetzung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}.$$

Die Hälfte des Feldes kann der erste Traktor in $\frac{x}{2}$ Tagen pflügen. An der zweiten Hälfte arbeiten beide Traktoren vier Tage. (Das ganze Feld pflügen sie in acht Tagen.)

Man erhält eine zweite Gleichung $\frac{x}{2} + 4 = 10$, woraus $x = 12$ (in Tagen) folgt.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich: $y = 24$ (in Tagen).

Lösung: Der erste Traktor pflügt das Feld allein in 12, der zweite in 24 Tagen.

474. Weil die Arbeiter nach jeweils gleichen Zeitabständen begannen und der erste fünfmal so lange arbeitete wie der letzte, ist die Anzahl der Arbeiter gleich 5. Wenn der letzte x Stunden arbeitet, dann ist die Gesamtzahl der von allen gearbeiteten Stunden gleich

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x.$$

Voraussetzung: Wenn sie gemeinsam beginnen, können sie die Arbeit in 6 Stunden ausführen.
Folglich gilt: $15x = 5 \cdot 6$, d. h. $x = 2$.
Die Arbeit für das Ausheben des Grabens dauert zweimal so lange wie der erste Teilnehmer arbeitet, d. h. $5x$ Stunden.

Lösung: Die Arbeiter brauchen 10 Stunden.

475. Der erste Arbeiter kann den Auftrag in x Stunden ausführen. Man erhält folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{t}.$$

Lösung: $x = \frac{1}{4}(5t - 2 + \sqrt{25t^2 + 4t + 4})$

476. Die erste Pumpe füllt das Bassin in x Stunden, die zweite in y Stunden. In einer Stunde füllt die erste Pumpe $\frac{1}{x}$ des Bassins, sie war nach Voraussetzung $\frac{1}{3}y$ Stunden in Betrieb. Es ist bekannt, daß die erste Pumpe $\frac{\frac{1}{3}y}{x}$ des Bassins füllt. Analog findet man, daß die zweite Pumpe $\frac{\frac{1}{3}x}{y}$ des Bassins füllt.

Weil danach $\frac{13}{18}$ des Bassins gefüllt sind, gilt:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x}+\frac{1}{3}\frac{x}{y}=\frac{13}{18}.$$

Die zweite Beziehung ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}.$$

Dieses System kann man auf folgende Art und Weise lösen: Wenn man $\frac{y}{x}=z$ setzt, dann erhält die erste Gleichung die Form $\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}=\frac{13}{18}$, woraus $z_1=\frac{3}{2}$ und $z_2=\frac{2}{3}$ folgt.

Die zweite Gleichung erhält die Form

$$\frac{y}{x}+1=\frac{5}{18}y.$$

Also gilt $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, woraus $y=9$ berechnet wird.

Es ist bekannt, daß $x=\frac{2}{3}\cdot y=6$ gilt.

Ist aber $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, dann findet man $y=6$ und $x=9$.

Lösung: Eine der Pumpen füllt das Bassin in sechs Stunden, die andere in neun Stunden.

477. Wenn die tägliche Norm beim Vermauern x (in Tausend) Stück beträgt, aber in Wirklichkeit y (in Tausend) Stück am Tage vermauert wurden, dann erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{y}=4,$$

$$3y-4x=5.$$

Lösung: Die Norm betrug 10000 Stück, in Wirklichkeit wurden 15000 Stück je Tag vermauert.

478. In den drei Spalten der folgenden Tabelle sind die Wassermengen (in Litern), die in den drei Gefäßen (I, II, III) nacheinander enthalten sind, aufgeführt.

I	x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right] + \frac{2}{3}x$
II	y	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right)$	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right)$
III	z	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z$	$\frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right]$

Jeder der Ausdrücke in der letzten Spalte ist entsprechend der Aufgabenstellung gleich 9.

Ein weiteres Lösungsverfahren[1]

Man bezeichnet mit u die Menge des Wassers, das sich im Gefäß II nach dem ersten Umgießen befindet.
Nach der gegebenen Bedingung vermindert sich durch das zweite Umgießen die Menge um $\frac{1}{4}u$. Im Gefäß II sind danach noch 9 Liter enthalten.
Folglich gilt: $\frac{3}{4}u = 9$, d. h. $u = 12$.

Jetzt bezeichnet man mit z die ursprüngliche Menge des Wassers im Gefäß III. Das erste Umgießen läßt diese Menge unverändert, das zweite Umgießen vergrößert sie um $\frac{1}{4}u = 3\ l$.

Im Gefäß III befinden sich also $(z + 3)\ l$.

Das dritte Umgießen vermindert diese Menge um $\frac{1}{10}(z + 3)$.

Folglich gilt $\frac{9}{10}(z + 3) = 9$, d. h. $z = 7$.

Man bestimmt nun die Menge x des Wassers im Gefäß I. Nach dem ersten Umgießen befanden sich in ihm $\frac{2}{3}x\ l$, nach dem zweiten Umgießen hatte sich die Menge nicht verändert; nach dem dritten Umgießen vergrößerte sie sich um $\frac{1}{10}(z + 3) = 1$. Folglich gilt $\frac{2}{3}x + 1 = 9$, d. h. $x = 12$.

[1] Mitteilung von K. A. Getaschewym (Lesken, Bezirk Lesken, Karbadino-Balkarische ASSR).

Schließlich bestimmt man die ursprüngliche Menge y des Wassers im Gefäß II.

Nach dem ersten Umgießen vergrößerte sie sich um $\frac{1}{3}x = 4$.

Das Ergebnis ist gleich dem schon gefundenen: 12 l.
Folglich gilt: $y = 12 - 4 = 8$.

Lösung: 12 l, 8 l, 7 l

479. Wenn das erste Mal $x\,l$ Alkohol herauslaufen, dann sind noch $(64 - x)\,l$ enthalten.
Das zweite Mal laufen $\frac{64 - x}{64}x\,l$ Alkohol heraus.

Es gilt also, daß $\left[64 - x - \frac{64 - x}{64}x\right]l = \left[\frac{1}{64}(64 - x)^2\right]l$ reinen Alkohols enthalten sind.
Man erhält die Gleichung $\frac{1}{64}(64 - x)^2 = 49$.

Lösung: Das erste Mal liefen 8 l Alkohol, das zweite Mal 7 l heraus.

480. Es werden $x\,l$ Alkohol in das zweite Gefäß hineingegossen, dann sind in jedem Liter Gemisch $\frac{x}{20}\,l$ Alkohol enthalten. Aus dem zweiten Gefäß werden dann $x\,l$ Gemisch in das erste Gefäß gegossen. In ihm befinden sich dann $\frac{x}{20}\cdot x\,l = \frac{x^2}{20}\,l$ Alkohol.
Nach dem letztgenannten Umgießen beträgt die Menge des Alkohols im ersten Gefäß $\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)l$.
Jetzt werden aus dem ersten Gefäß $6\frac{2}{3}\,l$ Gemisch herausgegossen, d. h. $\frac{6\frac{2}{3}}{20}$ betragen $\frac{1}{3}$ der gesamten Menge des Gemisches.
Damit vermindert sich auch die Menge des Alkohols um $\frac{1}{3}$, d. h. im ersten Gefäß befinden sich $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)l$ Alkohol.
Da aber die Menge des Alkohols in beiden Gefäßen 20 l betragen soll, sich andererseits nach Voraussetzung in beiden Gefäßen die gleiche Menge Alkohol befindet (d. h. 10 l), gilt:

$$\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right) = 10.$$

Lösung: 10 l.

481. Aus dem Gefäß seien $x\,l$ Luft entwichen, und die gleiche Menge Stickstoff sei hinzugegeben worden. In der übrigbleibenden Menge Luft $(8-x)\,l$ sind $(8-x)\,0{,}16\,l$ Sauerstoff enthalten. Diese Menge verteilt sich auf $8\,l$ Gemisch, so daß in jedem Liter $\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}\,l$ Sauerstoff enthalten sind.

Folglich kann, da beim zweiten Male $x\,l$ Gemisch austreten und $x\,l$ Stickstoff hinzukommen, die übrigbleibende Menge $(8-x)\,l$ nur noch

$$\frac{(8-x)\,0{,}16}{8}(8-x)\,l = (8-x)^2 \cdot 0{,}02\,l$$

Sauerstoff enthalten.

Es ist bekannt, daß sich der Anteil des Sauerstoffs an der Gesamtmenge des Gemisches ($8\,l$) folgendermaßen darstellen läßt:

$$\frac{(8-x)^2 \cdot 0{,}02}{8} \cdot 100 = \frac{(8-x)^2}{4}.$$

Nach Voraussetzung gilt die Beziehung $\frac{(8-x)^2}{4} = 9.$

Von ihren beiden Wurzeln ($x_1 = 2$; $x_2 = 14$) ist nur die erste brauchbar, da nicht mehr als $8\,l$ vorhanden sein können.

Lösung: Zwei Liter entweichen jeweils.

482. Die erste Kolchosbäuerin habe x Eier, die zweite y.

Wenn die erste y Eier verkauft, dann erhält sie nach Voraussetzung 72 Rubel. Folglich verkauft sie ein Ei für $\frac{72}{y}$ Rubel und erhält $\frac{72}{y} \cdot x$ Rubel.

Ebenso findet man, daß die zweite $\frac{32}{x} \cdot y$ Rubel einnimmt.

Man erhält zwei Gleichungen:

$$\frac{32}{x} \cdot y = \frac{72}{y} \cdot x; \quad x + y = 100.$$

Aus der ersten ergibt sich $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{72}{32}$ und daraus $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$. (Der negative Wert $\frac{y}{x} = -\frac{3}{2}$ ist nicht brauchbar.)

Lösung: Die erste Bäuerin hatte 40 Eier, die zweite 60 Eier.

483. Diese Aufgabe kann man wie die Aufgabe 482 lösen.
Man erhält das Gleichungssystem

$$m\frac{x}{y} = n\frac{y}{x}; \quad x + y = a.$$

Die erste Gleichung wird umgeformt in $x : y = \sqrt{n} : \sqrt{m}$.
Man teilt danach a in Teile, die sich wie $\sqrt{n} : \sqrt{m}$ verhalten.

Lösung: Die erste hatte $\dfrac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\,l$,

die zweite $\dfrac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\,l$ Milch.

484. Der erste Motor verbraucht in einer Stunde x g Benzin, der zweite y g. Der erste verbraucht 600 g in $\dfrac{600}{x}$ Stunden, der zweite 384 g in $\dfrac{384}{y}$ Stunden.
Nach Voraussetzung gilt die Beziehung

$$\frac{600}{x} - \frac{384}{y} = 2.$$

Wenn der erste in einer Stunde y g Benzin verbraucht, dann braucht er für $\dfrac{600}{x}$ Stunden $\dfrac{600}{x}y$ g.

Wenn der zweite in einer Stunde x g Benzin verbraucht, dann braucht er für $\dfrac{384}{y}$ Stunden $\dfrac{384}{y}x$ g.

Es gilt nach Voraussetzung $\dfrac{600y}{x} = \dfrac{384x}{y}$.

Lösung: Der erste Motor verbraucht $60\ \mathrm{g \cdot h^{-1}}$, der zweite $48\ \mathrm{g \cdot h^{-1}}$.

485. Von der ersten Legierung muß man x kg nehmen. In x kg sind $\dfrac{2}{5}x$ kg Gold enthalten; in $(8 - x)$ kg der zweiten Legierung sind $\dfrac{3}{10}(8 - x)$ kg Gold enthalten.

Nach der Aufgabenstellung sollen in 8 kg der neuen Legierung $\frac{5}{16} \cdot 8$ kg = 2,5 kg Gold enthalten sein. Es muß also gelten:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 2{,}5.$$

Man erhält $x = 1$ (in kg) und $8 - x = 7$ (in kg).

Lösung: 1 kg der ersten Legierung und 7 kg der zweiten sind erforderlich.

486. Vergleichen Sie mit der Lösung der Aufgabe 485!

Lösung: 9 Eimer aus dem ersten und 3 Eimer aus dem zweiten müssen verwendet werden.

487. Die dritte Legierung enthält x Teile der ersten und y Teile der zweiten Legierung, d. h. x kg der ersten Legierung entsprechen y kg der zweiten. $(x + y)$ kg der dritten Legierung sollen $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\right)$ kg des ersten Metalls und $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right)$ kg des zweiten Metalls enthalten.
Nach Voraussetzung gilt folgende Beziehung:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right) = 17 : 27.$$

Bringt man den Dividenden und den Divisor auf den Hauptnenner (15) und dividiert durch y, so erhält man

$$\left(5\frac{x}{y} + 6\right) : \left(10\frac{x}{y} + 9\right) = 17 : 27.$$

Es folgt daraus:

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{35}.$$

Lösung: Man muß 9 Teile der ersten und 35 Teile der zweiten Legierung verwenden.

488. In einer Minute führte die große Rolle x Umdrehungen aus, die kleine y, wobei $y > x$ ist.
Wir erhalten folgende Gleichungen:

$$y - x = 400, \quad \frac{5}{x} - \frac{5}{y} = \frac{1}{60}.$$

Die zweite Gleichung kann in der Form $x \cdot y = 300(y - x)$ geschrieben werden, d. h. $xy = 120000$.

Lösung: Die größere Rolle führt 200 Umdrehungen je Minute aus, die kleinere 600 Umdrehungen je Minute.

489. Der Umfang des Vorderrades betrage x dm, der des Hinterrades y dm. Man erhält zwei Gleichungen:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10,$$

$$\frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4.$$

Die erste Gleichung schreibt man in der Form

$$18(y - x) = xy,$$

die zweite in der Form

$$39(y - x) = xy + 504.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man

$$y - x = 24,$$

$$x \cdot y = 432.$$

Lösung: Der Umfang des Vorderrades beträgt 12 dm, der des Hinterrades 36 dm.

490. Am ersten und am dritten Tag wurden $600\,\mathrm{t} \cdot \frac{2}{3} = 400\,\mathrm{t}$, am zweiten Tag $600\,\mathrm{t} - 400\,\mathrm{t} = 200\,\mathrm{t}$ ausgeladen.
Wenn am ersten Tag x t ausgeladen wurden, dann wurden am dritten Tag $(400 - x)$ t ausgeladen.
Die Verminderung des Ausladens am zweiten Tage im Vergleich zum ersten Tag beträgt $(x - 200)$ t, so daß sie $\frac{(x-200)\,100}{x}\,\%$ des ausgeladenen Materials des ersten Tages ausmacht.
Die Verminderung des Ausladens am dritten Tag gegenüber dem zweiten Tag betrug

$$200 - (400 - x) = x - 200.$$

Das sind aber $\frac{(x-200)\,100}{200}\,\%$ oder $\frac{x-200}{2}\,\%$ des ausgeladenen Materials des zweiten Tages.

Nach Voraussetzung gilt die Beziehung

$$\frac{x - 200}{2} - \frac{(x - 200) \cdot 100}{x} = 5.$$

Man erhält zwei Wurzeln $x_1 = 250$ und $x_2 = 160$. Die zweite Wurzel ist nicht brauchbar, da nach Aufgabenstellung die Menge der verladenen Güter abnehmen soll.
Für $x = 160$ sähe das aber folgendermaßen aus:
Am ersten Tag 160 t, am zweiten 200 t, am dritten 240 t.

Lösung: Am ersten Tag wurden 250 t, am zweiten Tag 200 t und am dritten Tag 150 t ausgeladen.

491. Man verwendet von der ersten Lösung x kg, dann braucht man von der zweiten $(10 - x)$ kg.
Der Prozentgehalt an wasserfreier Schwefelsäure in der ersten Lösung beträgt $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$, in der zweiten $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$. Nach der Aufgabenstellung gilt die Beziehung

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10 - x} = 10.$$

Diese Gleichung hat zwei positive Wurzeln $x_1 = 20$ und $x_2 = 4$. Da nach Voraussetzung $x < 10$ gelten muß, ist die erste Wurzel nicht brauchbar.

Lösung: Es mußten 4 kg der ersten und 6 kg der zweiten Lösung gemischt werden.

492. Wenn in der ersten Legierung x% Kupfer enthalten sind, dann sind in der zweiten $(x + 40)$ % Kupfer enthalten.
Die erste Legierung enthält $\frac{6 \cdot 100}{x}$ kg, die zweite $\frac{12 \cdot 100}{x + 40}$ kg.

Man erhält die Gleichung $\frac{600}{x} + \frac{1200}{x + 40} = 50.$

Lösung: Der Prozentgehalt betrug 20% und 60%.

493. Die Geschwindigkeit des Güterzuges betrage $x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, die des Personenzuges $y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
In 28 s legt der Güterzug $28x$ m, der Personenzug $28y$ m zurück.
Man erhält die Gleichung: $28x + 28y = 700$.

Der Güterzug fährt in $\frac{490}{x}$ s am Signal vorbei, der Personenzug in $\frac{210}{y}$ s.
Man erhält als zweite Gleichung $\frac{490}{x} - \frac{210}{y} = 35$.

Lösung: Die Geschwindigkeit des Güterzuges beträgt

$10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, d. h. $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;

die Geschwindigkeit des Personenzuges

$15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, d. h. $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

494. Die Anzahl der vierachsigen Kesselwagen sei x, dann ist die Anzahl der zweiachsigen gleich $(x + 5)$.
Wenn ein zweiachsiger Kesselwagen y t Masse hat, dann hat ein vierachsiger Kesselwagen $3y$ t.
Die Masse des Erdöls in den Zweiachsern ist gleich $(40 \cdot 0{,}3)$ t $= 12$ t.
Ein Vierachser, der mit Erdöl gefüllt ist, hat die Masse $(3y + 40)$ t, ein Zweiachser, der mit Erdöl gefüllt ist, die Masse $(y + 12)$ t.
Man erhält als erste Gleichung

$$x(3y + 40) + (x + 5)(y + 12) = 940.$$

Die Masse des Erdöls in allen Vierachsern beträgt $40x$ t, die Masse aller Zweiachser $(x + 5)(y + 12)$ t. Daraus folgt als zweite Gleichung:

$$40x - (x + 5)(y + 12) = 100.$$

Lösung: Es waren 10 Vierachser mit einer Masse von jeweils 24 t und 15 Zweiachser mit einer Masse von jeweils 8 t.

495. Die erste Maschine soll am Tage x m schaffen, die zweite y m. Im ersten Falle erfüllt die erste Maschine 30% ihrer Arbeit, d. h., sie schafft $\frac{60x \cdot 30}{100} = 18x$.
Die zweite bewältigt $\frac{60y \cdot 80}{300} = 16y$.
Man erhält als erste Gleichung $18x + 16y = 60$.
Im zweiten Falle bewältigt die erste Maschine $\frac{2}{3} \cdot 60y$, braucht aber dafür $\frac{2}{3} \cdot 60 \cdot \frac{y}{x}$ Tage. Die zweite Maschine braucht $\frac{3}{10} \cdot 60 \cdot \frac{x}{y}$ Tage. Daraus folgt die zweite Gleichung: $\frac{40y}{x} - \frac{18x}{y} = 6$. Das Gleichungssystem läßt sich leicht lösen, wenn man $\frac{y}{x} = z$ setzt.

Für die Aufgabe ist nur der positive Wert $z = \frac{3}{4}$ sinnvoll.

Lösung: Die erste Maschine bewältigt am Tage 2 m Tunnelvortrieb, die zweite 1,5 m.

496. Die erste Brigade kann das Wegstück in x Tagen ausbessern, die zweite in y Tagen.
Nach der Aufgabenstellung erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{40x}{100} - \frac{40y}{300} = 2.$$

Lösung: Die erste Brigade kann das Wegstück in 10 Tagen, die zweite in 15 Tagen ausbessern.

497. Der erste Teil des Transports $\left(\text{der } \frac{25}{46} \cdot 690\,\text{t} = 375\,\text{t} \text{ ausmacht}\right)$ wurde in x Stunden bewältigt. Wenn jeder Lastkraftwagen mit 3 Tonnen Ladefähigkeit y Fahrten in einer Stunde durchführt, dann führt jeder Lastkraftwagen mit 1,5 t Ladefähigkeit $(y + 1)$ Fahrten je Stunde durch.
Nach Voraussetzung mußte der zweite Teil des Transports (d. h. $690\,\text{t} - 375\,\text{t} = 315\,\text{t}$) in $(x - 2)$ Stunden geschafft werden. Die Dreitonner führten $y + 1$, die Lastkraftwagen mit 1,5 t Ladefähigkeit $(y + 1) + 1 = y + 2$ Fahrten je Stunde durch.
Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$5 \cdot 3xy + 10 \cdot \frac{3}{2} x(y + 1) = 375,$$

$$5 \cdot 3(x - 2)(y + 1) + 10 \cdot \frac{3}{2}(x - 2)(y + 2) = 315.$$

Nach einigen Umformungen erhalten diese Gleichungen die Form

$$2xy + x = 25,$$

$$2xy + 3x - 4y = 27.$$

Man subtrahiert die erste Gleichung von der zweiten und erhält $2x - 4y = 2$ oder $2y = x - 1$. Nun setzt man in die erste Gleichung ein und erhält $x^2 = 25$, d. h. $x = 5$.
Der erste Teil des Transports wurde in fünf Stunden, der zweite in $(5 - 2)$ Stunden $= 3$ Stunden bewältigt.

Lösung: Der gesamte Transport wurde in acht Stunden bewältigt. Die Dreitonner führten anfangs zwei Fahrten je Stunde durch, die Lastkraftwagen mit 1,5 t Ladefähigkeit drei Fahrten je Stunde.

498. Die Breite der Aschenbahn betrage x m. Dann ist die Summe der Flächeninhalte des Sportplatzes und der Bahn gleich $(a + 2x)(b + 2x)$ m².
Man erhält die Gleichung $(a + 2x)(b + 2x) = 2ab$.

Lösung: Die Breite der Aschenbahn beträgt

$$\frac{1}{4}\left[\sqrt{(a+b)^2 + 4ab} - (a+b)\right] \text{ m}.$$

499. Die Anzahl der Sitzplätze in jeder Reihe beträgt x, dann ist die Anzahl der Reihen gleich $\frac{a}{x}$.
Man erhält die Gleichung $(x + b)\left(\frac{a}{x} - c\right) = 1{,}1a$.
Die Gleichung wird folgendermaßen umgeformt

$$10cx^2 + (a + 10bc)x - 10ab = 0,$$

woraus

$$x = \frac{-(a + 10bc) \pm \sqrt{(a + 10bc)^2 + 400abc}}{20c}$$

folgt.
Wenn man das negative Vorzeichen verwendet, so wird $x < 0$; verwendet man dagegen das positive, so wird $x > 0$.

Lösung: Die Anzahl der Sitzplätze in jeder Reihe beträgt

$$\frac{\sqrt{(a + 10bc)^2 + 400abc} - (a + 10bc)}{20c}.$$

500. Man bezeichnet die Geschwindigkeiten der Körper (in $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) mit v_1 bzw. v_2, wobei $v_1 > v_2$ gelten soll.
Die erste Beziehung ergibt die Gleichung $av_1 + av_2 = d$, die zweite die Gleichung $bv_1 - bv_2 = d$.

Lösung: Die Geschwindigkeiten betragen

$$v_1 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

und

$$v_2 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Aufgabe hat nur für $a < b$ eine Lösung.

501. Man bezeichnet die Geschwindigkeit des Motorradfahrers (in $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$) mit x, die des Radfahrers mit y. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$2x + 2y = d,$$

$$\frac{d}{y} - \frac{d}{x} = t.$$

Lösung: Die Geschwindigkeit des Motorradfahrers beträgt

$$d\,\frac{t - 4 + \sqrt{16 + t^2}}{4t}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}},$$

die des Radfahrers

$$d\,\frac{t + 4 - \sqrt{16 + t^2}}{4t}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

502. Wenn der Radfahrer x Stunden benötigt, dann benötigt der Fußgänger $(x + c)$ Stunden.
Man bezeichnet die Entfernung $\overline{AB}$ mit y (in km). Bis zum Ort der Begegnung hat der Fußgänger

$$\frac{y(a + b)}{x + c}\ \mathrm{km}$$

zurückgelegt, der Radfahrer $\frac{by}{x}$ km.

Man erhält die Gleichung $\frac{(a + b)\,y}{x + c} + \frac{by}{x} = y$; da $y \neq 0$ ist, gilt

$$\frac{a + b}{x + c} + \frac{b}{x} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 - (a + 2b - c)\,x - bc = 0.$$

Diese Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel (da das Produkt der Wurzeln gleich der negativen Zahl $-bc$ ist). Brauchbar ist nur die positive Lösung.

$$x = \frac{a + 2b - c + \sqrt{(a + 2b - c)^2 + 4bc}}{2}$$

Die Entfernung y bleibt unbestimmt.

Den Wert $x + c$ kann man entweder aus dem oben angeführten Ausdruck oder aus der Gleichung

$$\frac{a+b}{x+c} + \frac{b}{x} = 1$$

berechnen. Man ersetzt $x + c$ durch z und erhält

$$\frac{a+b}{z} + \frac{b}{z-c} = 1.$$

Nur die positive Lösung ist brauchbar.

Lösung: Der Radfahrer braucht

$$\frac{a + 2b - c + \sqrt{(a+2b-c)^2 + 4bc}}{2} \text{ Stunden,}$$

der Fußgänger

$$\frac{a + 2b + c + \sqrt{(a+2b-c)^2 + 4bc}}{2} \text{ Stunden} =$$

$$= \frac{(a + 2b + c) + \sqrt{(a+2b+c)^2 - 4(a+b)\,c}}{2} \text{ Stunden.}$$

503. Man bezeichnet die Entfernung mit x (in km). Dann muß nach Voraussetzung der Zug A den Zug B $\frac{x}{v}$ Stunden nach seiner Abfahrt einholen. Tatsächlich holt er den Zug aber nach $(x - a)$ km ein, d. h. nach $\frac{x-a}{v}$ Stunden.

Folglich fuhren beide Züge bis zur Begegnung $\frac{a}{v}$ Stunden weniger als die tatsächlich vorgesehene Zeit.

Der Zug B mußte bis zur Begegnung $\frac{x}{v_1}$ Stunden fahren.

Tatsächlich legte er die Entfernung $\frac{2}{3}x$ mit einer Geschwindigkeit von v_1 und die Entfernung $\frac{1}{3}x - a$ mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}v_1$ zurück.

Er benötigte für den Weg

$$\left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - a}{\frac{1}{2}v_1}\right) \text{ Stunden.}$$

Folglich gilt:

$$\frac{x}{v_1} - \left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - a}{\frac{1}{2}v_1}\right) = \frac{a}{v}.$$

Lösung: Die Länge des Weges betrug $\frac{3a(2v - v_1)}{v}$ km. Die Aufgabe hat nur für $v_1 < 2v$ eine Lösung.

504. Er erhält x% Zinsen. Die ursprüngliche Summe betrug $\frac{1500}{x}$ Rubel. Zu Anfang des zweiten Jahres betrug sein Guthaben $\left(\frac{1500}{x} + 15 + 85\right)$ Rubel, d. h. $\left(\frac{1500}{x} + 100\right)$ Rubel.

Am Ende des zweiten Jahres besitzt er $\left(\frac{1500}{x} + 100\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ Rubel.

Man erhält die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 420.$$

Lösung: Die ursprüngliche Summe betrug 300 Rubel; das Guthaben wurde mit 5% verzinst.

505. Man bezeichnet die Produktivitäten der Drehmaschinen A, B und C mit x, y und z. Nach Voraussetzung gilt:

$$x = \frac{m}{100}(y + z),$$

$$y = \frac{n}{100}(x + z).$$

Man löst die beiden Gleichungen nach x und y auf und drückt diese damit durch z aus.

Man addiert sie und erhält:

$$x + y = \frac{100(m + n) + 2mn}{10000 - mn} \cdot z.$$

Die gesuchte Prozentzahl ist gleich $\frac{z}{x + y} \cdot 100.$

Lösung:
Die Produktivität der Drehmaschine C beträgt $100 \cdot \dfrac{10000 - mn}{100(m + n) + 2mn}\,\%$ im Verhältnis zur Summe der Produktivitäten der Drehmaschinen A und B.

506. Als Einheit für die Jahresproduktion wird die Produktion des Jahres gewählt, das den betrachteten Jahren voranging.

Dann ist $1 + \dfrac{p}{100}$ die Produktion des ersten Jahres.

Vom ersten zum zweiten Jahr steigt die Produktion um $q\,\%$, d. h. um

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100},$$

und man kann für die gesamte Produktion schreiben:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{q}{100}\right).$$

Wenn die Produktion im dritten Jahr um $x\,\%$ steigt, dann vergrößert sie sich um

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}.$$

Nach Voraussetzung gilt die Beziehung

$$\frac{1}{3}\left[\frac{p}{100} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}\right] = \frac{r}{100}.$$

Lösung: Die Steigerung muß

$$\frac{3r - p - q - \dfrac{pq}{100}}{\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)\left(1 + \dfrac{q}{100}\right)}\,\%$$

betragen.

507. Die Selbstkosten der ganzen Ware betragen m Rubel, die des zuerst verkauften Teiles $a\,\%$ von m, d. h. $\dfrac{ma}{100}$ Rubel.

Nach der Aufgabenstellung erhält man beim Verkauf der Ware als Gewinn $p\,\%$ dieser Summe, d. h. $\dfrac{ma}{100} \cdot \dfrac{p}{100}$ Rubel.

Die Selbstkosten der Ware, die nach dem Verkauf des ersten Teiles übrigbleiben, sind gleich

$$m - \frac{ma}{100} = m\left(1 - \frac{a}{100}\right) \text{ Rubel.}$$

Die Selbstkosten des zweiten Teiles der verkauften Ware sind $b\,\%$ dieser Summe, d. h. $m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}$ Rubel.

Für den Verkauf des zweiten Teiles der Ware erhält man $q\,\%$ Gewinn; folglich beträgt dieser Gewinn

$$m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} \text{ Rubel.}$$

Die Selbstkosten der nach dem zweiten Verkauf übrigbleibenden Ware kann man wie folgt berechnen:

$$\left[m - \frac{ma}{100} - m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\right] \text{ Rubel}$$

$$= \left[m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\right] \text{ Rubel.}$$

Der noch übrigbleibende Teil wird mit einem Gewinn von $x\,\%$ verkauft. Der Gewinn läßt sich durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100} \text{ Rubel.}$$

Der gesamte Gewinn ist gleich folgendem Ausdruck:

$$m\left[\frac{a}{100} \cdot \frac{p}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right].$$

Nach der Aufgabenstellung soll der gesamte Gewinn $r\,\%$ von m Rubel, d. h. $\frac{mr}{100}$ Rubel betragen, d. h.

$$m \cdot \left[\frac{a}{100} \cdot \frac{p}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right] = \frac{mr}{100}.$$

Den Wert m kann man kürzen.

Lösung: Der Gesamtprozentsatz des Gewinns beträgt

$$\frac{r - \frac{ap}{100} - \frac{bq}{100}\left(1 - \frac{a}{100}\right)}{\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)}\,\%.$$

508. *Erstes Verfahren:*

Jedes der abgeschnittenen Stücke hat die Masse x kg. Der Kürze halber nennt man die erste Legierung (die m kg Masse hat) „Legierung A", die zweite „Legierung B". Von den beiden neu erhaltenen Barren enthält der erste $(m - x)$ kg der Legierung A und x kg der Legierung B, die zweite aber x kg der Legierung A und $(n - x)$ kg der Legierung B.

Nach Voraussetzung gilt, daß der prozentuale Anteil des Kupfers in beiden Barren gleich groß sein soll.

Das ist in diesem Falle nur möglich, wenn in beiden Barren die Mengen der Legierungen A und B einander proportional sind.

Man erhält die Gleichung $\frac{m - x}{x} = \frac{x}{n - x}$, woraus $x = \frac{mn}{m + n}$ folgt.

Zweites Verfahren:

Die Masse des Kupfers in einem Kilogramm der Legierung A sei u kg, und die Masse des Kupfers in einem Kilogramm der Legierung B sei v kg.

Dann sind im ersten Barren $[(m - x)\,u + xv]$ kg Kupfer, d. h. in einem Kilogramm des ersten Barrens befinden sich $\frac{(m - x)\,u + xv}{m}$ kg Kupfer.

Analog läßt sich die Masse des Kupfers bestimmen, die sich in einem Kilogramm des zweiten Barrens befindet.

Man setzt die beiden gefundenen Ausdrücke einander gleich und erhält folgende Gleichung:

$$n[(m - x)\,u + xv] = m[(n - x)\,v + xu].$$

Die Gleichung enthält drei Unbekannten: x, u und v.

Die obige Gleichung kann man in der Form

$$(u - v)\,(mx + nx - mn) = 0$$

schreiben.

Nach der Aufgabenstellung haben die Legierungen A und B einen verschiedenen prozentualen Kupfergehalt, d. h. $u - v$ kann nicht gleich Null sein.

Folglich gilt: $mx + nx - mn = 0$.

Lösung: Jeder Barren hat eine Masse von $\frac{mn}{m + n}$ kg.

509. Im ersten Anteil sollen ursprünglich x_1 Rubel, im zweiten x_2 Rubel usw. liegen. Im letzten (n-ten) Anteil liegen x_n Rubel. Auf den ersten Anteil wird offensichtlich anfangs kein Geld gelegt und nur der n-te Teil weggenommen. Erst am Ende des Prozesses wird vom n-ten Anteil der n-te Teil auf den ersten Teil gelegt.

Das Geld in dem n-ten Teil ist entstanden, indem von Anfang an auf jeden Anteil der n-te Teil des Geldes gelegt wurde, das sich nach dem bis dahin erfolgten Umlegen in dem vorhergehenden Anteil befand.

Man betrachtet irgendeinen Anteil, außer den ersten, seine Nummer sei k.

Ursprünglich waren in ihm x_k Rubel enthalten, dann werden y Rubel hinzugefügt, die aus dem $(k - 1)$-ten Anteil entnommen wurden. Von der gesamten Summe $(y + x_k)$ Rubel wird wieder der n-te Teil auf den nächstfolgenden Anteil gelegt.

Es bleiben $(y + x_k)\dfrac{n-1}{n}$ Rubel.

Nach Voraussetzung erhält man die folgende Gleichung:

$$(1) \qquad (y + x_k)\frac{n-1}{n} = A.$$

Im vorhergehenden Anteil, wenn man nicht gerade den ersten betrachtet (d. h. $k > 2$), müssen ebenfalls A Rubel übrigbleiben. (Im ersten Anteil sind die A Rubel erst enthalten, wenn aus dem n-ten Anteil die Auffüllung erfolgt ist.)

Es ist bekannt, daß bis zum Wegnehmen der y Rubel in jedem Anteil $(A + y)$ Rubel vorhanden waren.

Nach Voraussetzung stellt die zu beseitigende Summe (y Rubel) den n-ten Teil von $(A + y)$ Rubel dar, d. h.

$$(2) \qquad y = \frac{1}{n}(A + y).$$

Daraus erhält man $y = \dfrac{1}{n-1} \cdot A$.

Man setzt diesen Ausdruck in (1) ein und erhält

$$x_k = A.$$

Das Verfahren kann man mit allen Anteilen durchführen, ausgenommen sind der zweite und der erste (die schon vorher aus der Betrachtung ausgeschlossen wurden).

Man erhält für den Anteil von Anfang an:

$$(3) \qquad x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_n = A.$$

Die Unbekannte x_1 kann man folgendermaßen finden: Nach der Aufgabenstellung nimmt man von der Summe x_1 Rubel den n-ten Teil weg, und es bleiben $\left(x_1 \cdot \frac{n-1}{n}\right)$ Rubel übrig. Am Ende des Prozesses wird dem ersten Anteil irgendeine Summe y vom letzten Anteil zugefügt.
Man erhält die Gleichung

$$y + x_1 \cdot \frac{n-1}{n} = A. \tag{4}$$

Man überlegt so wie eben (z. B. beim k-ten Anteil) und erhält

$$y = \frac{1}{n-1} A.$$

Durch Einsetzen in (4) gewinnt man:

$$x_1 = \frac{(n-2)\,n}{(n-1)^2} A. \tag{5}$$

Für die Berechnung von x_2 wird die Gleichung

$$\left(\frac{1}{n} x_1 + x_2\right) \frac{n-1}{n} = A \tag{6}$$

herangezogen, wobei x_1 durch (5) bestimmt ist.
Diese Gleichung ergibt

$$x_2 = \frac{n(n-1) - (n-2)}{(n-1)^2} A.$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{n^2 - 2n}{(n-1)^2} A; \quad x_2 = \frac{n^2 - 2n + 2}{(n-1)^2} A;$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_n = A.$$