Włodzimierz Krysicki

Zählen und Rechnen einst und jetzt

Übersetzung von Doris Eidner
1968 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 39
Abschrift und LaTex-Satz: 2020 https://mathematikalpha.de

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Das vorliegende Büchlein des bekannten polnischen Wissenschaftlers Professor Dr. Włodzimierz Krysicki ist im wesentlichen zwei Hauptabschnitten gewidmet. Einmal behandelt es in groben Zügen die Entwicklung des Zahlbegriffes und der Zahlendarstellung, zum anderen werden dem Leser verschiedene Rechenhilfsmittel vorgeführt, deren man sich im Laufe der Zeit bediente.

Gegenüber der polnischen Ausgabe erfuhren vor allem die Kapitel 4, 12, 15, 16 und 17 mit Zustimmung des Autors größere Veränderungen bzw. Ergänzungen, die sowohl der zeitlichen Entwicklung, als auch der Besonderheit des deutschen Lesers gerecht werden sollen.
Dabei, sowie bei der gesamten Übersetzung, wurde die vom Autor gewählte elementare Darstellungsweise beibehalten, um vorwiegend die Leser anzusprechen, die über keine besonderen mathematischen und historischen Vorkenntnisse verfügen.

Diesem Ziel dienen auch die jeweils am Ende der einzelnen Kapitel angeführten Übungsaufgaben. Für denjenigen, der tiefer in die angeschnittene Problematik dieses oder jenes Kapitels eindringen möchte, ist am Schluss eine Literaturzusammenstellung so ausgewählt, dass er die dort aufgeführten Bücher entweder im Buchhandel oder in einer Bücherei ohne Schwierigkeiten erhalten kann.

Wer das Büchlein aufmerksam liest, wird erkennen, wie eng die Entwicklung der Wissenschaft mit den gesellschaftlichen Veränderungen wechselseitig zusammenhängt und wie der gegenwärtige hohe Stand wissenschaftlicher Leistungen kein Zufall, sondern die Folge systematischer Weiterentwicklung ist.

So betrachtet wird das Büchlein unseren Wissenschaftlern und Technikern von morgen sicherlich ein willkommener, interessanten Lesestoff sein.
Für einige kritische Hinweise, die zur Verbesserung der vorliegenden Übersetzung führten, danke ich Herrn Dr. Hans Wußing, Leipzig, und für die Überlassung einiger Bilder den im Quellenverzeichnis genannten Institutionen.

Leipzig, Herbst 1967
Wolfgang Arnold

Inhaltsverzeichnis

1 Von den Ziffern, der Null und der indischen Multiplikation

Die Zeichen, mit deren Hilfe wir heute die Zahlen schreiben, sind die 10 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0.
Der Ausdruck Ziffer leitet sich vom arabischen Ausdruck sifr ab; dieses Wort bedeutet eigentlich Null. Die Null ist jedoch keine arabische "Erfindung", die Araber haben diese von den Indern übernommen. Es ist heute nicht mehr möglich, das genaue Datum dieses bedeutenden Ereignisses festzustellen, das uns in ausgezeichneter Weise das Aufschreiben der Zahlen und die Durchführung der Rechenoperationen erleichtert.
Sicher ist, das sich im 7. Jahrhundert n. Z. der indische Gelehrte Brahmagupta der Ziffer Null ohne Schwierigkeiten bediente.[1]

Die Null wurde anfangs als Punkt geschrieben; noch heute wird in der Türkei, in Ägypten und in den Ländern des nahen Ostens die Null in Form eines kleinen Vierecks geschrieben (linke Briefmarke auf Bild 1) und interessanter Weise die Fünf als Null (rechte Briefmarke auf Bild 1). In der späteren Zeit näherte sich die Form der Null dem heutigen ovalen Zeichen (0).

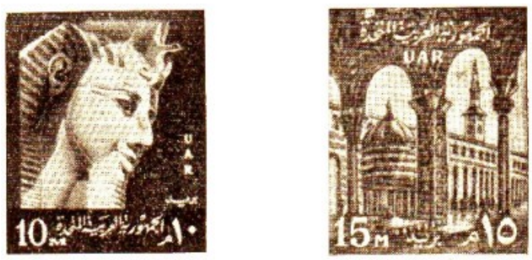


Bild 1. Die Darstellung der Ziffern 0 und 5 auf ägyptischen Briefmarken

Die ältesten Dokumente, in denen Zahlzeichen auftreten, reichen bis zum Jahre Viertausend vor unserer Zeitrechnung. Das Zeichen für die Null ist dagegen viel später entstanden.

Wie kommt es nun, dass eines der Zeichen, mit deren Hilfe wir die Zahlen aufschreiben, mehrere tausend Jahre später als die anderen entstanden ist?
Diese Tatsache erklären wir damit, dass es schwierig ist, die Null als Zahl zu erkennen; das stellen wir noch heute bei lernenden Kindern fest. Den Begriff der Zahl (z.B. fünf, dreizehn usw.) verbinden die Kinder immer mit einer Anzahl von Gegenständen, also z.B. fünf Hefte, dreizehn Bücher usw.
Die Null als Ausdruck für "Nichts" scheint dagegen etwas anderes als die "anderen" Zahlen zu sein.

Während also die Zahlen gewissermaßen eine bestimmte Anzahl vorhandener Gegenstände darstellen, gibt die Null das Fehlen, das Nichtvorhandensein bestimmter Gegenstände an. Sie scheint also ursprünglich einer ganz anderen Gattung anzugehören als die übrigen Zahlen.
Es ist bemerkenswert, dass die Kenntnis von Namen für Zahlen bedeutend eher als das Schriftbild der Zahlen existierte, wenigstens für nicht sehr große Zahlen.

Schon die Römer hatten ein Zahlensystem, das unserem in der Benennung sehr ähnlich ist. Wir zählen bis zehn - haben also 10 verschiedene Namen - eins, zwei, drei, ..., zehn.
Dann zählen wir zur zehn eins, zwei, drei, ... hinzu und sprechen abgekürzt elf, zwölf usw. (elf leitet sich von dem früheren Ausdruck "eins über zehn" ab) bis zur Zwanzig. Zwanzig ist

[1] Über noch ältere Zeichen für die Null siehe Kap. 5 und 6.

zwei mal zehn. Weiter zählen wir, indem wir den Zehnern neue Namen geben und die Namen der Einer zu den Namen der Zehner hinzufügen (wir sagen z.B. acht und vierzig, fünf und sechzig).

Einen neuen Namen geben wir erst bei zehn Zehnern - das ist die Hundert. Weiter zählen wir mit Hundertern bis tausend und sagen zweihundert, dreihundert ... bis neunhundert. Dann führen wir tausend als neuen Namen ein und zählen die Tausender wie vorher die Einer.
Wir sprechen z.B. fünfhundert sieben und zwanzig tausend siebenhundert neun und sechzig. Erst tausend Tausender erhalten den neuen Namen Million, der von den Römern angewandt wurde.

In Kap. 9 sehen wir, wie man die Namen sehr großer Zahlen bildet. Wir erkennen daraus, dass verschiedene Namen ausreichend sind, um jede beliebige Zahl bis zur Größenordnung der Millionen zu nennen.
Fügen wir noch 25 Wörter hinzu, die sich in der Aussprache etwas von den normal aneinander gestellten 13 Namen unterscheiden (elf, fünfzig, dreihundert, achthundert usw.) so erhalten wir insgesamt 38 Worte, die man beherrschen muss, um jede Zahl bis zu 999 999 999 (lies diese Zahl!) ohne Schwierigkeiten zu nennen.

Das zur Zeit angewandte Zahlensystem kam von den Arabern nach Europa (Bild 2), deshalb nennen wir die von uns verwendeten Ziffern arabische Ziffern, obwohl - wie wir bereits wissen - diese indischer Herkunft sind. Die älteste in Europa bekannte Aufzeichnung einer Zahl in dem heutigen Zahlensystem befindet sich auf einer Münze, die von dem Normannenkönig Roger II. in Sizilien herausgegeben wurde; es ist die Jahreszahl 1138.

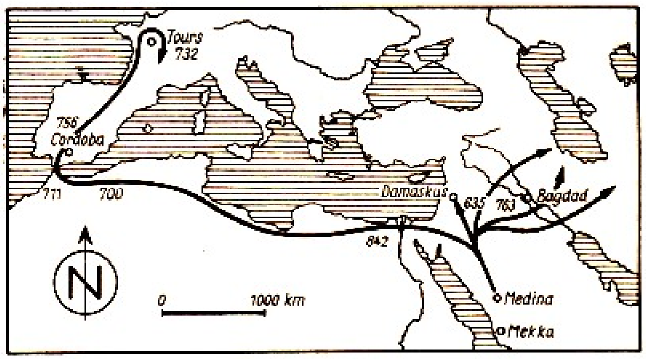


Bild 2. Karte zur Darstellung der Ausbreitung des arabischen Einflusses im 7. und 8. Jahrhundert

Einen großen Einfluss auf die Verbreitung des heute angewandten Zahlensystems hat das im Jahre 1202 herausgegebene Rechenbuch mit dem Titel "Liber abaci", "Das Buch vom Abakus" (siehe auch Kap. 7 und 14). Der Autor ist Leonardo Fibonacci, ein italienischer Kaufmann aus Pisa[2].
Das Buch ist auf die Praxis eingestellt:
Dem Autor geht es darum, zu zeigen, dass das Zahlensystem, welches durch Hinzufügen des Zeichens Null zu den anderen bekannten und schon lange angewandten Zeichen von 1 bis 9 entstanden ist, große Vorteile hat. Aus diesem Buch zitieren wir den Anfang:

"Es gibt neun hinduistische Zeichen, das sind sie 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Mit Hilfe dieser Zeichen und des Zeichens 0, das auf arabisch 'sifr' bedeutet, kann man jede beliebige Zahl aufschreiben."

[2] Leonardo Fibonacci lebte etwa von 1180 bis 1250. In der Schulmathematik ist er bekannt durch die Fibonaccischen- oder Kaninchenzahlen. S. auch Kordemski; Köpfchen, Köpfchen.

Es verging noch sehr viel Zeit, bevor sich dieses System über ganz Europa verbreitete. Es ist gewiss, dass es im 16. Jahrhundert schon im täglichen Gebrauch war.
Wir nennen es das Zehnerstellenwertsystem. Der Ausdruck "Zehner" bedeutet, dass jede Einheit der höheren Ordnung 10 Einheiten der niedrigeren enthält (die Hundert enthält 10 Zehner, die Tausend 10 Hunderter usw.). Der zweite Ausdruck "Stellenwert" erklärt uns das heutige Zahlensystem näher, indem er die Eigenschaft angibt, dass die Bedeutung der Ziffer von der Stellung (Position) abhängig ist, die sie in der Zahl einnimmt.

So enthält z.B. die Zahl 116 zwei gleiche Ziffern 1; jede hat jedoch eine andere Bedeutung: Die 1 auf dem zweiten Platz (von rechts) bedeutet die Zahl 10, während die am Anfang der Zahl (dritter Platz von rechts) stehende 1 die Zahl 100 darstellt.

Es ist klar, dass die indisch-arabischen Ziffern nicht sofort die heutige Form hatten. Wie aus Bild 3 ersichtlich ist, sahen die Ziffern in verschiedenen Zeitabschnitten sehr verschieden aus und noch im 15. Jahrhundert unterschieden sie sich von den heutigen recht erheblich.

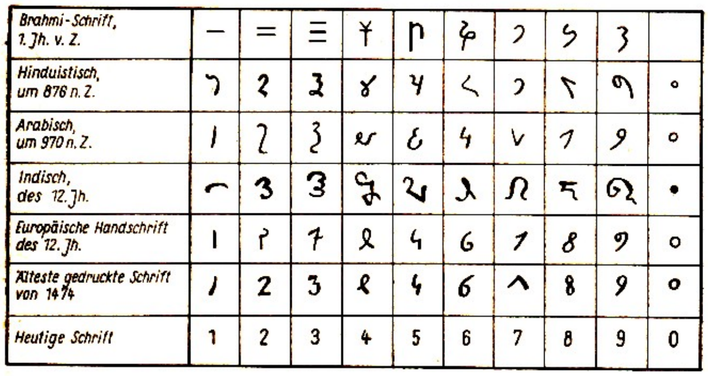
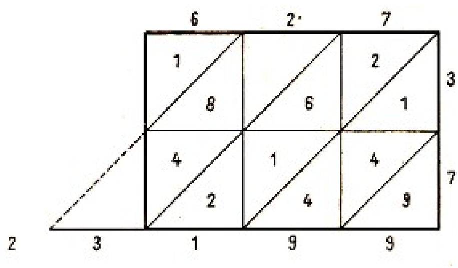


Bild 3. Die Schreibweise der Ziffern zu verschiedenen Zeiten

Interessant ist der Vergleich zwischen der Durchführung indischer Rechenoperationen, wie sie vor 1000 Jahren erfolgten, mit den heutigen.
Als Beispiel nehmen wir die Multiplikation der Zahlen, z.B. 627 mal 37. Bei der Ausführung der Multiplikation haben die Inder die Faktoren (Zahlen, die miteinander zu multiplizieren sind) an die Seiten eines Rechteckes, das aus einer bestimmten Anzahl von Quadraten bestand, wie in der Tabelle dargestellt ist, geschrieben.



Alle Quadrate wurden durch parallele Diagonalen halbiert und in jedem das Produkt eingetragen. Es ist leicht festzustellen, dass die Zahl, die wir "in Gedanken" notieren, um sie zu den Einheiten der höheren Ordnung hinzuzuzählen, von den Indem über der Diagonale eingetragen wurde (multiplizieren wir z.B. 7 mal 7, so schreiben wir 9 und zählen 4 "in Gedanken" zu dem nächsten Produkt hinzu). Dann summieren wir die Zahlen, die übereinander stehen und erhalten auf diese Weise das Ergebnis der Multiplikation - das Produkt.

Übungen

1. Multipliziere die Zahl 296 mit 74 nach der indischen Methode.

2. Multipliziere auf ähnliche Weise 234 mit 12 ohne Berücksichtigung der Linien, die das Rechteck in Quadrate unterteilen.

3. Worin unterscheidet sich die indische Ausführung der Multiplikation entsprechend der zweiten Aufgabe von der heutigen bei gleichen Zahlen?

2 Vom Zehner-, Fünfer- und Siebenersystem

Wir beschäftigen uns jetzt genauer mit dem Zehnerstellenwertsystem. Erinnern wir uns dazu an den Begriff der Potenz. Anstatt "zehn mal zehn" sagen wir "zehn zur zweiten Potenz" oder kürzer - "zehn zum Quadrat" (da wir die Fläche eines Quadrates als zweite Potenz seiner Seitenlänge berechnen) und schreiben:

$$10 \cdot 10 = 10^2$$

Zehn mal zehn mal zehn nennen wir "zehn zur dritten Potenz" oder auch "Zehnkubik" (weil bei der Berechnung des Volumens eines Würfels die dritte Potenz seiner Seitenlänge berechnet werden muss) und schreiben:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$

Mit Leichtigkeit stellen wir fest, dass gilt:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 10^4 = 10000 \\ 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 10^5 = 100000 \\ \text{und entsprechend} \qquad &= 10^6 = 1000000 \end{aligned}$$

und entsprechend Die Zahl 10, die wir in die Potenz erheben, nennen wir die Basis der Potenz; die "kleine" Zahl, die wir rechts oben an die Basis schreiben, nennen wir den Exponenten (in der letzten Gleichung ist es die 6); die Zahl 10^6 (Million) nennen wir Potenz der Zahl zehn (genauer die sechste Potenz von 10).
Es ist ersichtlich, dass der Exponent der Potenz von zehn mit der Anzahl der Nullen nach der 1 übereinstimmt; so ist z.B. eine Million (nach der 1 sechs Nullen) gleich der sechsten Potenz von 10.
Die Zahl 10 definieren wir als die erste Potenz von 10. Es ist also $10^1 = 10$.

Wir benutzen jetzt die Potenzen zum Aufschreiben der Zahlen auf eine andere Art. Die Zahl 247, die 2 Hunderter, 4 Zehner und 7 Einer enthält, können wir folgendermaßen zerlegen:

$$247 = 200 + 40 + 7 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7$$

Auf diese Weise können wir jede beliebige Zahl darstellen, z.B.

$$\begin{aligned} 69057 &= 60000 + 9000 + 50 + 7 = 6 \cdot 10000 + 9 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \\ &= 6 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, dass auch umgekehrt jede Summe, wie oben gezeigt wurde, z.B.:

$$7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$$

im Zehnerstellenwertsystem geschrieben werden kann; in unserem Beispiel erhalten wir die Zahl 7504, indem wir die Produkte nach der Größe der Exponenten der Potenz der Zahl 10 aufschreiben (kürzer gesagt: geordnet nach fallenden Potenzen von 10. Die Faktoren der Potenzen der Zahl 10 nennen wir Koeffizienten).

Man darf jedoch nicht vergessen, dass beim Fehlen einer Potenz in der Reihenfolge an dieser Stelle eine Null geschrieben werden muss. So z.B.:

$$5 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 = 509704$$

An die Stelle der fehlenden vierten und ersten Potenz haben wir eine Null gesetzt.

Bei der Betrachtung des oben erklärten Aufbaues der Zahl, die im Zehnerstellenwertsystem aufgeschrieben wurde, erhebt sich die Frage:
Welche Bedeutung hätte der Ausdruck ähnlichen Aufbaues, wenn wir die Basis 10 durch eine andere Zahl ersetzen?

Die Koeffizienten der Potenzen dieser Zahl müssten kleiner als die Zahl sein, die anstelle der 10 steht (so wie das im Zehnersystem der Fall ist).
Im Zehnersystem werden die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und die Null als Koeffizienten angewandt. Wenn also als Basis des Systems die Zahl g als ganze Zahl größer als eins benutzt wird, so werden wir in solch einem System die Ziffern 1 bis $g - 1$ anwenden und die Null für eine fehlende Potenz.

Beim Zählen im Zehnersystem sprechen wir von der Zehnernummerierung. Zehn Einer fassen wir zu einem Zehner zusammen, zehn Zehner zu einem Hunderter usw. Beim Aufschreiben zählen wir von rechts nach links und stellen dabei die Einer an die erste, die Zehner an die zweite, die Hunderter an die dritte Stelle usw., wir sprechen dabei von Einheiten ersten, zweiten, dritten Grades usw., z.B. ist die Million die Einheit siebenten Grades.

Wenn wir in einem anderen Zahlensystem zählen, z.B. im Fünfersystem, dann würden wir 5 Einer zu einer Einheit zweiten Grades zusammenfassen, das ist die Fünf, fünf Fünfer zu einer Einheit dritten Grades, das ist die Fünfundzwanzig, fünf Fünfundzwanziger in eine Einheit vierten Grades, die der Zahl 125 im Zehnersystem entspricht, usw.
An erster Stelle würden die Einer stehen, an zweiter die Fünfer, an dritter die Fünfundzwanziger usw. Die Zahl der Einheiten jedes Grades würde vier nicht überschreiten, so wie im Zehnersystem neun nicht überschritten wird. Wir erhalten dann eine Fünfernummerierung.

Betrachten wir dies am Beispiel der Zahl

$$4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3$$

näher, die wir als Zahl im Fünfersystem annehmen. In diesem System sind fünf Ziffern vorhanden: $0, 1, 2, 3, 4$. Die Zahl fünf als Einheit höheren Grades,

$$5 = 5^1$$

schreiben wir als "10"; um sie jedoch von der Zehn im Zehnersystem zu unterscheiden, setzen wir diese Zahl in Klammern und schreiben an die rechte Seite unten eine 5. Diese "Index fünf" gibt an, dass diese Zahl im Fünfersystem aufgeschrieben ist:

$$5 = (10)_5$$

Die Zahl $6 = 1 \cdot 5 + 1$ schreiben wir als $(11)_5$; die Zahl $10 = 2 \cdot 5 + 0$ als $(20)_5$ und die Zahl $25 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5_+ 0$ natürlich als $(100)_5$. Das ist vollkommen verständlich, wenn man davon ausgeht, dass $100 = 10^2$ und $25 = 5^2$ ist, und dass im Fünfersystem die 5 die gleiche Rolle spielt wie im Zehnersystem die 10.

Vergessen wir aber nicht unsere Zahl

$$4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 = 4 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 = 100 + 10 + 3 = 113$$

die wir im Fünfersystem natürlich in der Form schreiben:

$$(423)_5 = 113$$

Das Fünfersystem finden wir bereits bei den Ureinwohnern verschiedener Länder, wie z.B. beim indianischen Stamm der Schoschonen[3] in Nordamerika; es begegnet uns auch in der Sprache Wedau in Neuguinea (Insel westlich von Australien). Zitieren wir einige Namen von Zahlen in dieser Sprache:

1 tagogi
2 ruag'a
3 tonug'a
4 ruag'a-ma-ruag'a
5 ura-i-ga
6 ura-g'ela-tagogi (5+1)
7 ura-g'ela-ruag'a (5+2)
8 ura-g'ela-tonug'a (5+3)
9 ura-g'ela-ruag'a-ma-ruag'a (5+4)
10 ura-ruag'a-i-ga (2·)
11 ura-ruag'a-i-ga-au-ae-tagogi (2·5+1)

Die Wahl der Zahl fünf als Basis des Zahlensystems lässt sich sicherlich daraus erklären, dass die Hand fünf Finger hat. Die Finger haben den Menschen früherer Zeiten ähnlich wie heute noch den Kindern beim Zählen geholfen.

Die Spuren des Fünfersystems erkennt man beim Aufschreiben von Zahlen mit Hilfe von römischen Ziffern (häufig noch heute angewandt bei Baudaten an Gebäuden, der Bezeichnung des Monats, der Bezifferung der Uhr). Die Römer haben die fünf als V geschrieben und 6, 7, 8 als VI, VII, VIII - also deutlich als 5 + 1, 5 + 2, 5 + 3.
Zehn haben sie als X geschrieben; dieses Zeichen stellt die Vereinigung von zwei Fünfen $\overset{\vee}{\wedge}$ zu einem X dar, sie betrachteten also 10 als 2 · 5 (römisches Zahlensystem siehe Kap. 7).

Zur Kontrolle, ob wir uns schon an die neue Denkweise gewöhnt haben, befassen wir uns noch mit dem Siebenersystem. In diesem System werden 7 Ziffern auftreten: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Die Zahl 7, bereits Einheit höheren Grades, schreiben wir in Form einer "10":

$$7 = (10)_7$$

Die Zahl $8 = 1 \cdot 7 + 1$ schreiben wir als $(11)_7$; die Zahl $13 = 1 \cdot 7 + 6$ als $(16)_7$, aber $14 = 2 \cdot 7 + 0$ schon als $(20)_7$.
Zur Veranschaulichung schreiben wir unter eine Zahlenfolge des Zehnersystems die dem Wert nach gleichen Zahlen des Siebenersystems:

[3] Schlangenindianer, die heute nur noch in sogenannten Reservationen leben.

Zehnersystem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Siebenersystem	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15	16	20	
Zehnersystem	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	...
Siebenersystem	21	22	23	24	25	26	30	31	32	33	34	35	36	40	...

Die nächste Einheit höheren Grades im Siebenersystem enthält 7 Einheiten, von denen jede aus 7 Einern besteht, das heißt $7^2 = 49$ (Einer). Wir schreiben also:

$$(100)_7 = 49$$

Es gilt somit $(251)_7 = 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 1 = 2 \cdot 49 + 35 + 1 = 134.$
Auf diese Weise können wir jede Zahl, die im Siebenersystem aufgeschrieben wurde, auch in das Zehnersystem übertragen. Wir geben zwei Beispiele an:

$$(2034)_7 = 2 \cdot 7^3 + 07^2 + 3 \cdot 7^1 + 4 = 2 \cdot 343 + 21 + 4 = 711$$
$$(10246)_7 = 1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 6 = 2401 + 98 + 28 + 6 = 2533$$

Nunmehr kehren wir die Frage um: Wie übertragen wir z.B. die Zahl 654 aus dem Zehnersystem ins Siebenersystem?
Zuerst müssen wir berechnen, wieviel Einheiten höheren Grades, das heißt Siebener, in der 854 enthalten sind; wir teilen also die 654 durch sieben:

$$\begin{array}{rrrl}
6 & 5 & 4 & : \; 7 = 9\;3 \text{ (erste Teilung)} \\
6 & 3 & & \\ \hline
& 2 & 4 & \\
& 2 & 1 & \\ \hline
& & 3 &
\end{array}$$

Der Rest 3 bedeutet, dass die Zahl 654, im Siebenersystem aufgeschrieben, anstelle der Einer die Ziffer 3 enthalten wird. Danach formen wir die erhaltenen 93 Siebener in Einheiten der nächsthöheren Stufe um. Jede von ihnen enthält sieben Siebener. Wir teilen 93 durch 7:

$$\begin{array}{rrl}
9 & 3 & : \; 7 = 1\;3 \text{ (zweite Teilung)} \\
7 & & \\ \hline
2 & 3 & \\
2 & 1 & \\ \hline
& 2 &
\end{array}$$

Der neue Rest 2 bedeutet, dass die Zahl 654 im Siebenersystem aufgeschrieben an der zweiten Stelle von rechts die Ziffer 2 enthält. Danach werden die 13 Einheiten, von denen jede sieben Siebener enthält, in Einheiten noch höheren Grades umgeformt. Wir teilen 13 durch 7:

$$\begin{array}{rrl}
1 & 3 & : \; 7 = 1 \text{ (dritte Teilung)} \\
& 7 & \\ \hline
& 6 &
\end{array}$$

Wir erhalten also eine Einheit, die siebenmal sieben Siebener und einen Rest von 6 Einheiten zu sieben Siebenern enthält.
Stellen wir das so erhaltene Ergebnis zusammen: Die Zahl 654 enthält

3 Einer (Rest der ersten Teilung);
2 Siebener (Rest der zweiten Teilung);
6 mal sieben Siebener (Rest der dritten Teilung);

1 mal sieben mal sieben Siebener (der letzte Quotient).

Somit gilt:

$$654 = 1 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 3$$

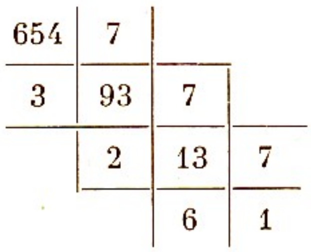
Wir schreiben also die Zahl 654 im Siebenersystem als 1623:

$$654 = (1623)_7$$

Vergleichen wir noch das erhaltene Ergebnis

$$\begin{array}{r} 1 \cdot 7^3 = 343 \\ 6 \cdot 7^2 = 294 \\ 2 \cdot 7 = 14 \\ 3 = 3 \\ \hline (1623)_7 = 654 \end{array}$$

und alles ist in Ordnung.
Alle oben durchgeführten Teilungen kann man in einem Schema unterbringen, wobei wir in diesem der Reihe nach nur die Quotienten und die Reste angeben:



Wenn wir die letzten Zahlen der Spalten in umgekehrter Reihenfolge aufschreiben, das heißt, von der rechten Seite anfangen, erhalten wir wieder das Ergebnis 1623.
Versuchen wir nun, die im Siebenersystem aufgeschriebenen Zahlen $(5362)_7$ und $(3106)_7$ zu addieren. Dazu schreiben wir sie untereinander:

$$\begin{array}{r} (5362)_7 \\ + \ (3106)_7 \\ \hline (11501)_7 \end{array}$$

Beim Addieren von Einheiten einer beliebigen Stufe, müssen wir stets darauf achten, dass die einzelnen Summen, z.B. 2 + 6, die wir im Zehnersystem zu bilden gewöhnt sind, sofort in das Siebenersystem überführt werden müssen.
Beim Addieren der Einer beider Zahlen rechnen wir folgendermaßen: $2 + 6 = 8 = 1 - 7 + 1 = (11)_7$; eine Eins schreiben wir unter die Einer und die zweite addieren wir zur nächsten Spalte $6 + 0 + 1 = 7 = (10)_7$ usw.

Um die Gewöhnung an das Zehnersystem zu überwinden, legen wir uns eine sogenannte Additionstafel an (im Siebenersystem):

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

Wir benutzen diese Tafel in sehr einfacher Weise: Um zwei Zahlen im Siebenersystem zu addieren, z.B. 5 und 4, müssen wir die 5 in der ersten Zeile und die 4 in der ersten Spalte suchen, an der Kreuzung finden wir ihre Summe:

$$(12)_7 = 1 \cdot 7 + 2 = 9 = 5 + 4$$

Eine ähnlich aufgebaute Multiplikationstafel für Zahlen im Siebenersystem hat folgende Form:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	11	13	15
3	6	12	15	21	24
4	11	15	22	26	33
5	13	21	26	34	42
6	15	24	33	42	51

Wir wenden diese Tafel in der gleichen Weise wie die vorhergehende an. Um das Produkt der Zahlen 4 und 6 zu erhalten, verfahren wir wie oben und an der Kreuzung finden wir die Zahl 33.

Die Richtigkeit können wir mit Hilfe der für uns leichter verständlichen Multiplikationstafel im Zehnersystem überprüfen:

$$(33)_7 = 3 \cdot 7 + 3 = 24 = 4 \cdot 6$$

Bei einer entsprechenden Anwendung können wir mit der Additionstafel auch subtrahieren und mit der Multiplikationstafel teilen.

Wir haben uns längere Zeit bei der Zahl 7 aufgehalten. Sie unterscheidet sich von den anderen Zahlen dadurch, dass man ihr früher eine geheimnisvolle Bedeutung zugeschrieben hat. Wir kennen sieben Wochentage, den siebenten Himmel, den Siebenschläfer, die sieben Weltwunder der Antike usw.

Die alten Babylonier haben als erste sieben Planeten gekannt, nämlich Merkur, Venus, Mond, Sonne, Mars, Jupiter und Saturn, wahrscheinlich wurde deshalb die Siebentage-Woche eingeführt. Der Mond und die Sonne wurden bis zur Zeit des Kopernikus als Planeten angesehen und die Erde als unbewegliches Zentrum der Welt.

Dieselben Babylonier bezeichneten die Sieben öfter als "kissatu" - voll, Bindung.

Mit der Sieben ist eine bekannte Überlieferung verbunden. Zum ersten Mal treffen wir sie in einem der ältesten mathematischen Werke an. Es ist ein ägyptischer Papyrus, der vor fast 4000 Jahren von Ahmes geschrieben wurde.[4]

Die Aufstellung lautet sinngemäß folgendermaßen: 7 Menschen hatten je 7 Katzen, jede Katze frisst 7 Mäuse, jede Maus sieben Weizenähren; aus jeder Ähre können 7 Maß Getreide wachsen. Wieviel waren insgesamt Menschen, Katzen, Mäuse, Ähren und Maß Getreide vorhanden?

Natürlich erhalten wir im Siebenersystem

$$1 \cdot 7 + 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^5 = (1111110)_7$$

bzw. im Zehnersystem

$$7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$$

[4] Ahmes gibt darin an, dass er sich auf bereits vorliegende Texte bezieht.

Ähnliche Aufstellungen treffen wir noch heute in verschiedenen Formen bei vielen Völkern Europas an, unter anderem auch in England und der Sowjetunion. Es ändern sich die Gegenstände, aber der Sinn der Aufgaben bleibt der gleiche.

Übungen

1. Schreibe die Zahl 4681 im Achtersystem.

5. Schreibe 1562 im Fünfersystem.

6. Schreibe die Zahl 999 im Neunersystem.

7. Schreibe die Zahl 2181 im Dreiersystem.

8. In welchem System gilt die Bezeichnung 5 · 4 = 24?

9. Multipliziere $(24)_6$ mit $(15)_6$, rechne diese Zahlen ins Zehnersystem um, multipliziere sie und vergleiche die Ergebnisse beider Multiplikationen.

10. Schreibe 7777 im Siebenersystem.

11. Schreibe die Zahl $(10101)_7$ im Zehnersystem.

3 Das Zwölfer- und Zweiersystem

Wenn wir Zahlen z.B. im Zwölfersystem aufschreiben wollten, so müssten wir für die 10 und 11 zusätzliche Ziffern einführen. Wir wollen als neue Ziffern die Buchstaben D und J nehmen, das heißt, für 10 schreiben wir das Zeichen D und für 11 das Zeichen J.

Beispiel:

$$(4J)_{12} = 4 \cdot 12 + 11 = 59 \qquad , \qquad 131 = 10 \cdot 12 + 11 = (DJ)_{12}$$

Die Zahl zwölf ist durch 1, 2, 3, 4, 6, 12 teilbar, während die 10 nur durch 1, 2, 5, 10 teilbar ist. Außerdem hat der Fuß 12 Zoll, das Jahr 12 Monate und Tag und Nacht werden im Durchschnitt mit je 12 Stunden angenommen.
Im Handel werden noch heute gewisse Gegenstände (Knöpfe, Federn) in Dutzenden und Gros (ein Gros = 12 Dutzend, ein Dutzend = 12 Stück) gezählt. Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass es Enthusiasten gab, (z.B. Karl XII. König von Schweden; Auguste Comte, französischer Philosoph des 19. Jahrhunderts), die den Übergang vom Zehner- zum Zwölfersystem vorgeschlagen haben.

Es ist jedoch nicht damit zu rechnen, dass eine solche Veränderung jemals eintreten könnte. Das würde ungeheure Schwierigkeiten geben, und große Verluste bringen. Wir müssten alle ein neues Einmaleins lernen und uns an die Verwendung von zwölf Ziffern gewöhnen; die Bücher der Arithmetik und viele andere müssten neu bearbeitet werden, die bisher angewandten Rechenmaschinen würden unbrauchbar werden, um nur einiges zu nennen.

Das Stellenwertsystem mit niedrigster Anzahl von Ziffern ist das Zweiersystem. Alle Zahlen werden in diesem System mit Hilfe der Ziffer 0 und 1 geschrieben. Zum Beispiel:

$$\begin{array}{rrr} (10)_2 = 2 & (10000)_2 = 16 & (10000000)_2 = 128 \\ (100)_2 = 4 & (100000)_2 = 32 & (100000000)_2 = 256 \\ (1000)_2 = 8 & (1000000)_2 = 64 & (1000000000)_2 = 512 \end{array}$$

Die Jahreszahl 1967, im Zweiersystem geschrieben, hat folgende Form: 1111010111.

Es gilt also:

$$\begin{aligned}1967 &= 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 8 + 4 + 2 + 1\end{aligned}$$

Spuren des Zweiersystems sind deutlich bei einem Stamm der Mikronesier[5] feststellbar. Davon zeugen die Namen für 1 - ke-yap, 2 - pullet, 3 - ke-yap-pullet, 4 - pullet-pullet.
Hier endet die Ähnlichkeit, da für die Bezeichnung größerer Zahlen als 4 ein Ausdruck, der die Bedeutung "viele" hat, angewandt wird.

Mit dem Zweiersystem befassten sich viele ausgezeichnete Mathematiker: z.B. Leibniz[6] in Deutschland, der Franzose Legendre[7] (gelesen Leschandr) und andere, da es vom theoretischen Standpunkt aus sehr interessant ist; in der neuesten Zeit ist es für elektronische Rechenmaschinen von besonderer Bedeutung, wie wir in Kapitel 17 noch sehen werden.

Wir haben schon bemerkt, dass das Aufschreiben von Zahlen im Zweiersystem wegen der großen Länge der Zahlen unbequem ist.
Eine Zahl im Zweiersystem dargestellt, nimmt bedeutend mehr Stellen ein als im Zehnersystem. Beschäftigen wir uns jetzt mit der Addition von Zahlen im Zweiersystem:

$$\begin{array}{r} 1\\ +\ 1\\ \hline 1\,0\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\\ 1\\ +\ 1\\ \hline 1\,1\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\\ 1\\ 1\\ +\ 1\\ \hline 1\,0\,0\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,0\\ +\,1\,1\\ \hline 1\,0\,1\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,1\,1\\ +\ \ 1\,1\\ \hline 1\,1\,0\,1\end{array}$$

Beim Addieren mehrerer (drei oder mehr) mehrziffriger Summanden muss man aufpassen, da man bei der Summation der Einheiten einer beliebigen Spalte im Ergebnis z.B. 4 (oder mehr) Einheiten dieser Ordnung erhalten kann. Da die 4 des Zehnersystems im Zweiersystem durch die dreiziffrige Zahl 100 dargestellt wird, verursacht dies nicht das Hinzuzählen der Einheit zu der nächsten Spalte (links), sondern zu der übernächsten (zwei Reihen links von der Reihe, in der die 4 erhalten wurde).
Um sich vor eventuellen Fehlern zu bewahren, ist es erforderlich, bei der Addition alles systematisch aufzuschreiben, was wir sonst "in Gedanken" registrieren.

Um die Addition im Zweiersystem genauer zu erklären und mit der im Zehnersystem vergleichen zu können, addieren wir als Beispiel vier Summanden im Zehner- und im Zweiersystem:

$$\begin{array}{ccc} {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\ & 5 & 7\\ & 3 & 9\\ & 8 & 6\\ & 1 & 8\\ \hline 2 & 0 & 0\end{array}\qquad \begin{array}{cccccccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Das Addieren der Zahlen im Zweiersystem beginnen wir mit den Einem, das heißt, mit den Einheiten der ersten Spalte, wobei wir von rechts zählen; bei der Summierung erhalten wir 2

[5] Bewohner von rund 1500 Inseln im westlichen Stillen Ozean.
[6] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), einer der Begründer der Diffferential- und Integralrechnung.
[7] Adrien Marie Legendre (1752-1833) u.a. bekannt durch sein Werk über elementare Geometrie.

Einheiten, das heißt, eine Einheit der zweiten Spalte, die wir ganz oben in der zweiten Spalte von rechts aufschreiben.
Wenn wir diese zu den drei Einheiten dieser Spalte, die im zweiten, dritten und vierten Summanden auftreten, addieren, erhalten wir vier Einheiten der zweiten Spalte, das heißt, zwei Einheiten der dritten Spalte, die wir oben in der dritten Spalte von rechts notieren. So verfahren wir weiter, bis wir das endgültige Ergebnis 11001000 erhalten; der Vergleich

$$(11001000)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 = 128 + 64 + 8 = 200$$

stimmt mit dem im Zehnersystem erhaltenen Ergebnis überein.

Im angegebenen Algorithmus der Addition werden die zu übertragenden Einheiten zur Erleichterung notiert; dabei kann es allerdings vorkommen, dass man bei der Addition mehrerer Summanden die "Hilfszahlen" in mehreren Zeilen anordnen muss.

Die Multiplikation von Zahlen im Zweiersystem ist besonders einfach, da die Multiplikationstafel in diesem System folgende Form hat:

	0	1
0	0	0
1	0	1

Als Beispiel führen wir die Multiplikation der Zahlen 43 · 13 im Zehner- und Zweiersystem aus:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & \cdot & 1 & 3 \\ \cline{3-5} 1 & 2 & 9 & & \\ \hline 5 & 5 & 9 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{7-12} & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \end{array}$$

Wie wir erkennen, beruht die Multiplikation im Zweiersystem auf der Addition des ersten Faktors, der um eine bestimmte Anzahl von Stellen nach rechts (oder auch links) gerückt wird. Diese Eigenschaft wird bei den neuzeitlichen Rechenmaschinen ausgenutzt.

Nach der Untersuchung mehreren verschiedener Stellenwertsysteme entsteht die Frage: Worin unterscheidet sich die Zahl 10 von den anderen Zahlen, dass man gerade sie als Basis des Zahlensystems ausgewählt hat?
Die Antwort lautet, wie vorauszusehen ist: Vom theoretischen Standpunkt aus unterscheidet sich die Zahl 10 durch nichts Besonderes von den anderen Zahlen und jede andere ganze Zahl größer als 1 könnte genau so gut als Einheit höheren Grades angenommen werden.

Über die Wahl der Zahl 10 entschieden sicherlich vor allem praktische Gesichtspunkte. wie die Gesamtzahl der Finger an beiden Händen (und das erfolgte bei einigen Völkern vor mehr als 5000 Jahren).

Übungen

12. Schreibe die Zahl 1728 im Zwölfersystem.
13. Schreibe die Zahl 341 im Zweiersystem.
14. Multipliziere $(10101)_2$ mit $(11001)_2$, schreibe das Ergebnis im Zehnersystem, überführe danach die Faktoren ins Zehnersystem, multipliziere sie und vergleiche beide Ergebnisse.
15. Weise nach, dass die Gleichung: 10 · 11 = 110 nicht nur im Zehner-, sondern auch im Zweiersystem gilt. Gibt es noch andere Zahlenpaare mit der gleichen Eigenschaft? Gilt die angegebene Gleichung nur in diesen beiden Systemen?
16. Vervollständige die Multiplikationstafel im Zweiersystem:

	10	11	100
10	.	.	.
11	.	.	.
100	.	.	.

und stelle danach eine gleichwertige Multiplikationstafel im Zehnersystem auf.
17. Schreibe die Zahl $(11011)_2$ im Dreiersystem.
18. Schreibe die Zahl $(32210)_4$ im Zweiersystem.

Die Anwendung des Zweiersystems zum Entschlüsseln von Zahlen

Man gibt jemandem fünf nummerierte Tafeln, auf denen Zahlen zwischen 1 und 31 stehen und schlägt vor, dass er eine dieser Zahlen wählt, wobei er nur die Nummern der Tafeln angibt, auf der sich die ausgewählte Zahl befindet.

1	2	3	4	5
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	25	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Derjenige, der die Zahl erraten soll, summiert in Gedanken die ersten Zahlen der angegebenen Tafeln und zum Erstaunen des Mitspielers gibt er die gewählte Zahl an.

Das Geheimnis der Entschlüsselung beruht auf der Ausnutzung des Zweiersystems.
Wir stellen fest, dass die Zahlen, die auf den ersten Plätzen der Tafeln stehen:

$$1 = 2^0 \qquad 2 = 2^1 \qquad 4 = 2^2 \qquad 8 = 2^3 \qquad 16 = 2^4$$

im Zweiersystem folgendermaßen geschrieben werden:

$$1 \qquad 10 \qquad 100 \qquad 1000 \qquad 10000$$

Die Zahlen sind so ausgewählt, dass sie im Zweiersystem an erster, zweiter, dritter, vierter oder fünfter Stelle (von rechts gerechnet) eine Eins haben und an allen weiteren Stellen eine Null.
Alle übrigen Zahlen auf der angegebenen Tafel Enthalten, im Zweiersystem geschrieben, die Eins an, gleicher Stelle wie die an erster Stelle stehende Zahl. So haben zum Beispiel alle Zahlen auf der dritten Tafel im Zweiersystem an dritter Stelle von rechts eine Eins.

$$\begin{aligned}
\text{Tatsächlich:}\quad & (5)_{10} = (101)_2 \\
& (6)_{10} = (110)_2 \\
& (7)_{10} = (111)_2, \\
& \vdots \\
& (12)_{10} = (1100)_2, \\
& \vdots \\
\text{schließlich:}\quad & (31)_{10} = (11111)_2.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Zahl 12, die die Eins an dritter und vierter Stelle hat, auf der dritten und vierten Tafel stehen müsste und die Zahl 31, die die Eins an fünf Stellen hat, auf allen fünf Tafeln stehen muss. So ist es tatsächlich, wie man aus den oben angeführten fünf Tafeln ersehen kann.

Um den zu enträtselnden Zahlenbereich zu erhöhen, muss man die Anzahl der Tafeln entsprechend erhöhen, und zwar benötigt man für die Zahlen 1 bis 63 sechs Tafeln, denn es gilt: $(63)_{10} = (111111)_2$. Für die Zahlen 1 bis 127 muss man 7 Tafeln anwenden, da diese Zahlen die Eins an den Stellen 1 bis 7 haben können und die höchste von ihnen $(127)_{10} = (11111111)_2$ hat die Eins an allen sieben Stellen.

Wenn der Spieler erklärt, dass sich die von ihm ausgewählte Zahl auf der zweiten, vierten und fünften Tafel befindet, dann muss der Ratende in Gedanken die ersten Zahlen dieser Tafel summieren; das sind die Zahlen 2, 8, 16 und er nennt schnell die Zahl 26 (= 2 + 8 + 16).

Die Erklärung des Geheimnisses der Zaubertafeln ist einfach. Die Zahlen, die auf den ersten Plätzen der Tafel stehen, haben im Zweiersystem geschrieben an der ersten Stelle von links eine Eins und an allen weiteren Stellen ein Null; das Summieren mehrerer solcher verschiedener Zahlen, zum Beispiel

$$10 + 1000 + 10000 = 11010$$

ergibt eine Summe, die die Eins an derselben Stelle hat, wie jeder der Summanden. Wir erhalten als Summe:

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = 16 + 8 + 2 = 20$$

Also eine Zahl die im Zweiersystem aufgeschrieben 11010 lautet und sich auf den Tafeln zwei, vier und fünf befindet.

4 Das Dreiersystem als rationellstes Gewichtssystem

Auf Grund der Beziehungen

$$\begin{array}{lcl}
(1)_{10} = (3^0)_{10} = (1)_3 & , & (3)_{10} = (3^1)_{10} = (10)_3 \\
(9)_{10} = (3^2)_{10} = (100)_3 & , & (27)_{10} = (3^3)_{10} = (1000)_3
\end{array}$$

kann man durch Bilden der Summe oder Differenz dieser Zahlen jede Zahl, die im Dreiersystem den Wert von 1 bis 1111 hat, oder im Zehnersystem jede Zahl von 1 bis zu der Zahl, die gleich der Summe von 1 + 3 + 9 + 27 also 40 ist, aufschreiben.

Das erlaubt, wie wir der folgenden Aufstellung entnehmen können, das Wägen von Gegenständen mit einer Masse von 1 g bis 40 g (aber ohne Bruchteile des Gramms) unter Anwendung von höchstens nur 11 Gewichtsstücken, und zwar solchen zu 1 g, 3 g, 9 g, 27 g.

Beispiele:

Gegenstand G mit einer Masse m	Wir legen auf die 1. Schale	Wir legen auf die 2. Schale
m = 1 g	G	1 g
m = 2 g	G + 1 g	3 g
m = 3 g	G	3 g
m = 4 g	G	3 g + 1 g
m = 5 g	G + 1 g + 3 g	9 g
m = 6 g	G + 3 g	9 g
m = 7 g	G + 3 g	9 g + 1 g
m = 8 g	G + 1 g	9 g
m = 9 g	G	9 g
m = 10 g	G	9 g + 1 g
m = 11 g	G + 1 g	9 g + 3 g
m = 12 g	G	9 g + 3 g
m = 13 g	G	9 g + 3 g + 1 g
m = 14 g	G + 1 g + 3 g + 9 g	27 g
m = 15 g	G + 3 g + 9 g	27 g
m = 16 g	G + 3 g + 9 g	27 g + 1 g
m = 17 g	G + 1 g + 9 g	27 g
m = 18 g	G + 9 g	27 g
m = 19 g	G + 9 g	27 g + 1 g
m = 20 g	G + 9 g + 1 g	27 g + 3 g
m = 21 g	G + 9 g	27 g + 3 g
m = 22 g	G + 9 g	27 g + 3 g + 1 g
m = 23 g	G + 3 g	27 g
m = 24 g	G + 3 g	27 g
m = 25 g	G + 3 g	27 g + 1 g
m = 26 g	G + 1 g	27 g
m = 27 g	G	27 g
m = 28 g	G	27 g + 1 g
m = 29 g	G + 1 g	27 g + 3 g
m = 30 g	G	27 g + 3 g
m = 31 g	G	27 g + 3 g + 1 g
m = 32 g	G + 3 g + 1 g	27 g + 9 g
m = 33 g	G + 3 g	27 g + 9 g
m = 34 g	G + 3 g	27 g + 9 g + 1 g
m = 35 g	G + 1 g	27 g + 9 g
m = 36 g	G	27 g + 9 g
m = 37 g	G	27 g + 9 g + 1 g
m = 38 g	G + 1 g	27 g + 9 g + 3 g
m = 39 g	G	27 g + 9 g + 3 g
m = 40 g	G	27 g + 9 g + 3 g + 1 g

Natürlich genügt in vier Fällen zum Wägen des Gegenstandes G die Anwendung nur eines der vier Gewichtsstücke. In den übrigen . 36 Fällen benötigen wir 12 mal nur 2 Gewichtsstücke, 16 mal nur 3 Gewichtsstücke und 8 mal alle 4 Gewichtsstücke.

Anmerkung der deutschen Redaktion: In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, dass der Leser die Begriffe "Masse" und "Gewicht" eines Gegenstandes kennt. Dabei werden ihm zwei Unkorrektheiten auffallen, die des besseren Verständnisses halber begangen wurden:

1. wird "gewogen", wobei das Vergleichen der beiden Massen auf den Waagschalen gemeint ist;
2. müssten wir statt von "Gewichtsstücken" eigentlich von "Massennormalen" sprechen, denn der als "Gewichtssatz" bezeichnete Satz von Körpern - meist zylindrischer Form - heißt richtig "Massensatz".

Analog dazu können wir durch Hinzufügen von 2 Gewichtstücken zu den oben genannten 4 Gewichtsstücken, deren Masse (in Gramm) gleich $(81)_{10} = (3^4)_{10} = (10000)_3$ und $(243)_{10} = (3^5)_{10} = (100000)_3$ ist, jeden Gegenstand, dessen Masse (in ganzen Gramm) 1 bis 111111 im Dreiersystem beträgt, wägen; das ist bis zu einer Masse von

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364 \text{ g}$$

Aber wie ist das durchzuführen? Welche Gewichtsstücke sind auf welche Schale zu legen, und welche Gewichtsstücke sind überflüssig?

Nehmen wir an, wir wollen dies für einen Gegenstand mit einer Masse von 104 g festlegen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Zahl im Dreiersystem und erhalten $(10212)_3$.
Da wir von jeder Gewichtsstückart nur ein Exemplar besitzen und beim Aufschreiben der Zahl zwei auftreten, müssen wir die Gewichtsstücke auf den Schalen so verteilen, dass der Gegenstand trotzdem gewogen werden kann.
Lassen wir also aus dem Schriftbild der Zahl $(10212)_3$ die Zweien "verschwinden"! Zu diesem Zweck wird zu den Ziffern der Einheiten (hier 2) die 1 addiert und subtrahiert und wir erhalten: $(2+1-1)_3 = (10-1)_3$. Auf diese Weise erhalten wir anstelle der Einheiten -1 oder 1. Die entstandene "Zehn" zählen wir zu den Ziffern der "Zehner" hinzu und erhalten $(1022\overline{1})$.

Der Reihenfolge nach zählen wir zu der Ziffer (jetzt 2) der "Zehner" eine "Zehn" hinzu und subtrahieren eine "Zehn" (2 Zehner + 1 Zehner - 1 Zehner) $= (100-10)_3$, also einen "Hunderter" und 1 "Zehner".
Den erhaltenen einen "Hunderter" addieren wir zu den 2 "Hunderten" und erhalten Null "Hunderter" und einen "Tausender". Die Umformung der Zahl ohne Änderung ihres Wertes verläuft folgendermaßen:

$$\begin{aligned}(10212)_3 &= \{1021[(2+1)-1]\}_3\\ &= (1022\overline{1})_3 = \{102[(2+1)-1]\overline{1}\}_3\\ &= [10(2+1)\overline{1}\overline{1}]_3 = (110\overline{1}\overline{1})_3\end{aligned}$$

Diese Darstellung $(110\overline{1}\overline{1})_3$ der Zahl $(10212)_3$ bedeutet, dass es genügt, wenn von jeder Gewichtseinheit ein Gewichtsstück vorhanden ist, wobei das Gewichtsstück "1" auf eine Schale gelegt wird und das Gewichtsstück "$\overline{1}$" auf die andere, das heißt, auf die Schale, auf der sich der zu wägende Gegenstand befindet.
Aus den Beziehungen: $(10000)_3 = (81)_{10}$, $(1000)_3 = (27)_{10}$ und die durch Minus gekennzeichneten Einheiten $(10)_3 = (3)_{10}$ und $(1)_3 = (1)_{10}$ geht hervor, dass wir auf die eine Schule die Gewichtsstücke zu 81 g und 27 g und auf die andere den Gegenstand mit einer Masse von 104 g und die Gewichtsstücke zu 3 g und 1 g legen.
Das Gewichtsstück zu 9 g wenden wir in diesem Fall überhaupt nicht an, weil sich in der Zahl $(110\overline{1}\overline{1})_3$, die wir aus der Zahl $(10212)_3$ erhielten, an der Stelle der "Hunderter" im Dreiersystem, das heißt der Neun im Zehnersystem eine Null befindet.

Wenn wir durch Uniformen einer gewissen Zahl im Dreiersystem nur positive Einer und Nullen

erhalten, so bedeutet dies, dass wir auf die eine Schale nur die Gewichtsstücke und auf die andere den zu wägenden Gegenstand legen müssen.
Z.B. bedeutet $(10011)_3 = (85)_{10}$, dass zum Wägen des Gegenstandes mit einer Masse von 85 g auf die zweite Schale die Gewichtsstücke 1 g + 3 g + 81 g gelegt werden müssen, weil 1 + 31 + 34 = 85. Die übrigen Gewichtsstücke werden hier nicht benötigt.

Übungen
19. Welche Masse hat der Gegenstand G, wenn die Aufschrift der Gewichtsverteilung im Dreiersystem gleich $(10\bar{1}01)_3$, $(1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}1)_3$, $(100\bar{1}0\bar{1})_3$, $(1\bar{1}1\bar{1}1\bar{1})_3$ ist.

20. Schreibe die Zahl $(120210)_3$ im Zehnersystem.
21. Schreibe die Zahl $(2200112)_3$ im Zehnersystem.

5 Das älteste Zehner- und das „Schock“-System

Im vierten Jahrtausend v.Z. wurde der untere Euphrat (das Gebiet des heutigen Irak) von den Sumerern bewohnt, die sich durch eine hohe Kultur auszeichneten. Sie schrieben mit, einem halbrunden und später dreieckigen Spatel auf Holz, Steinfließen, hauptsächlich aber auf Lehm, der später getrocknet und gebrannt wurde und so bis zur heutigen Zeit erhalten blieb.
Unter diesen Umständen war es am einfachsten. Zeichen in Form von Keilen zu schreiben. Dabei bedienten sich die Sumerer der ältesten Schreibweise der Zahlen mit der 10 als Basis. Die Zahl 1 schrieben sie in Form eines senkrechten Keiles

Mit Hilfe dieses Zeichens wurden die Zahlen von 1 bis 9 dargestellt, wobei es in Reihen nebeneinander oder übereinander angeordnet wurde. Das zweite Zeichen, das zum Aufschreiben der Zahl 10 diente, setzte sich aus 2 Keilen, die miteinander zu einem Winkel verbunden waren, zusammen.

Auf diese Weise, durch Benutzung der gleichen Zeichen und ihrer Gruppierung - abhängig von der Größe der Zahl - wurden alle Zahlen von 1 bis 99 geschrieben, wobei die Zehner links von den Einern aufgeschrieben wurden. So bedeutete z.B. die folgende Gruppe von Zeichen die Zahl 23:

Die Zahl Hundert wurde mit Hilfe von zwei Keilen, von denen einer senkrecht und einer waagerecht stand, auf folgende Weise geschrieben:

Um die Zahl 1000 aufzuschreiben, wurde das Zeichen für die 10 vor das Zeichen für die Hundert gesetzt, was soviel wie 10 mal 100 bedeutete. Die Platzierung einer weiteren 10 vor die Zahl 1000 stellte die Zahl $10 \cdot 1000$ also 10000 dar.

Zur besseren Verständlichkeit dieser Schreibweise wenden wir für unsere Betrachtungen Hilfszeichen an. Wir bezeichnen den senkrechten Keil mit a, das Zeichen für die 10 mit b und den waagerechten Keil mit c. Das Schriftbild einiger Zahlen ergibt sich dann in folgender Weise:

$1 = a$	$2 = aa$ oder $\begin{smallmatrix}a\\a\end{smallmatrix}$	$3 = aaa = \begin{smallmatrix}aa\\a\end{smallmatrix}$
$6 = \begin{smallmatrix}aaa\\aaa\end{smallmatrix}$	$12 = b^a_a$	$30 = bbb$ oder $\begin{smallmatrix}a\\a\\a\end{smallmatrix} b$
$100 = ac$	$345 = \begin{smallmatrix}a\\a\\a\end{smallmatrix} ac^{bb\ aaa}_{bb\ \ aa}$	$1000 = bac$
$5000 = {}^{aaa}_{aa} bac$	$6453 = {}^{aaa}_{aaa} bac^{aa}_{aa} ac^{bbb\ aa}_{bb\ \ a}$	

Aus dem Schriftbild der Zahlen ergibt sich die interessante Tatsache, dass die Zahlzeichen einen doppelten Sinn haben.

Neben der Bedeutung als Ziffern haben sie noch den Stellenwert. Vergleichen wir das Schriftzeichen der Zahl 30, die in der Form $3 \cdot 10$ dargestellt ist, z.B. mit dem Schriftbild der Zahl 53 (die in der 6453 enthalten ist), wobei die 53 als $50 + 3$ dargestellt ist.
Das Zeichen für die 3 hat im ersten Fall die Bedeutung "3 mal (die Zahl, die nach der 3 folgt)", im zweiten Fall dagegen "zähle 3 hinzu (zu der Zahl, die vor der 3 steht)".

Wie wir daraus erkennen, ist die Schreibweise noch nicht einheitlich. Wir können sie jedoch als eine Vorstufe des heutigen Zehnersystems betrachten.

Ungefähr 2500 Jahre v.Z. trat gleichzeitig mit der Anwendung des Zehnersystems im Gebiet des heutigen Iraks das Sechzigersystem auf, mit der Zahl 60 als Einheit höheren Grades.
Die Zahlen von 1 bis 59 wurden weiterhin wie oben angegeben geschrieben, so wie es bereits 1000 Jahre früher üblich war. Der Keil (als Zeichen für die Einheit), der vor dem Zeichen der Zahl 10 steht, nimmt die Bedeutung einer Einheit höheren Grades, der Zahl 60 (zos) an, so bedeutet z.B. das folgende Schriftbild

die Zahl $1 \cdot 60 + 1 \cdot 10 + 2 = 72$.

Wenn jetzt links das Zeichen 10 steht, so bedeutet das schon $10 \cdot 60 = 600$ (ner). So z.B.:

$4 \cdot (10 \cdot 60) + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1 = 42 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1 = 2541$

Wenn die Einheiten einer gewissen Stufe fehlten, so wurde an ihrer Stelle ein bestimmter Abstand freigelassen. Wir würden heute dafür eine Null schreiben. Wenn zwei oder mehr Einheiten einer Stufe, die nebeneinander stehen, fehlten, wurde der Abstand verdoppelt oder dementsprechend vervielfacht; das konnte wegen der Unsicherheit der Beurteilung des eingehaltenen Abstandes zu Unstimmigkeiten führen.

Deshalb wird etwa zwischen dem sechsten und dem zweiten Jahrhundert v.Z., ein spezielles Zeichen - zuerst in den astronomischen Berechnungen - in Form von zwei kleinen, schräg übereinander stehenden Winkeln, für den Abstand eingeführt.

So bedeutet z.B.:

die Zahl $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1 = 7221$.

Dieses Zeichen des doppelten Winkels, das das Fehlen der Einheit einer gewissen Stelle angibt, ist wahrscheinlich das älteste bekannte Symbol für die Null.

Interessanterweise ist das Symbol für das Fehlen der Einheiten einer gewissen Stelle im Schriftbild nie am Ende anzutreffen. Daraus geht eine originelle Eigenschaft des sumerischen Systems hervor, die man als Relativität des Stellenwertsystems bezeichnen kann; diese beruht darauf, dass die Zahl, die in diesem System aufgeschrieben wurde, mehrere Werte haben kann, die durch Multiplikation mit den Potenzen von 60 auseinander hervorgehen.
So besitzt z. B. die oben im sumerischen System aufgeschriebene Zahl außer dem Wert:

$$2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 2 \cdot 10 + 1$$

noch den Wert

$$2 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + (2 \cdot 10 + 1)60^1$$

oder auch

$$2 \cdot 60^4 + 0 \cdot 60^3 + (2 \cdot 10 + 1)60^2$$

Daraus könnten wir folgern, dass die Art der Schreibweise der Zahlen viele Unstimmigkeiten hervorgerufen hat, vergessen wir jedoch nicht, dass die Zahlen im Text auftraten, dessen Sinn den richtigen Wert des Zahlensymbols erkennen ließ; jedoch wäre für theoretische Betrachtungen eine solche Schreibweise nicht möglich.

Es ist bemerkenswert, wie konsequent das Sechzigersystem ausgebaut wurde. Mit seiner Hilfe wurden sogar 15stellige Zahlen (im Zehnersystem !) aufgeschrieben. Die größte der bis jetzt entzifferten Zahlen (auf Tafeln, die im Tempel von Nippur gefunden wurden und aus dem dritten Jahrtausend v.Z. stammen) ist die Zahl

$$60^8 + 10 \cdot 60^7$$

die im Zehnersystem folgendermaßen aussieht: 195 955 200 000 000, also einhundertfünfundneunzig Billionen neunhundertfünfundfünfzig Milliarden zweihundert Millionen.

Wie wir sehen, konnten die Menschen bereits vor mehreren tausend Jahren - mit Hilfe bedeutend schwierigerer Symbole als heute - so große Zahlen aufschreiben, wie sie vielleicht auch heute noch nicht jeder ohne weiteres lesen kann.

Das Sechzigersystem hat sich bis heute vor allem bei der Zeitmessung behauptet - die Stunde hat 60 Minuten, die Minute 60 Sekunden.
Die Einteilung des Vollwinkels in 360 Grad steht ebenfalls in einem engen Zusammenhang mit dem Sechzigersystem. Die Teilung eines Kreises in 6 gleiche Teile war schon seit langem bekannt.
Jedes dieser Teile wurde in 60 gleiche Teile unterteilt, die als Grad bezeichnet wurden. Ein Grad, die Maßeinheit für den Winkel (oder Bogen), teilen wir in 60 Winkelminuten und eine Winkelminute in 60 Winkelsekunden. Wir schreiben das auf folgende Weise:

$$1^\circ = 60' \qquad ; \qquad 1' = 60''$$

Ebenso schreiben wir: Winkel von 60°23’34” und lesen: Winkel von 60 Grad, 23 Minuten und 34 Sekunden.

Für die Entstehung des Sechzigersystems existieren mehrere Annahmen, die mehr oder weniger glaubwürdig sind. Eine der bedeutendsten Hypothesen ist folgende durch O. Neugebauer 1927 aufgestellte:
Das babylonische Reich entstand - wie wir wissen - durch die Vereinigung von zwei Völkerstämmen: der Sumerer und Akkader.
Das Gewichtsmaß der Sumerer war die Mine, die annähernd einem halben Kilopond entspricht; es wurden natürlich auch Bruchteile der Mine angewandt wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Als Geldeinheit diente die Silbermine.

Bei den Akkadern wiederum diente der Schekel als Gewichtseinheit, dieser betrug $\frac{1}{50}$ einer Mine. Nach der Vereinigung dieser Stämme zu einem Reich - die im Laufe von etwa 2 Jahrhunderten erfolgte - bediente man sich gleichzeitig beider Maße.

Auf Grund der Notwendigkeit zur Festlegung eines genauen Verhältnisses dieser unterschiedlichen Einheiten musste man ein solches Verhältnis zwischen der Mine und dem Schekel wählen, dass die einfachsten Bruchteile der Mine durch eine ganze Anzahl Schekel ausgedrückt werden konnten.
Als solche Vergleichszahl, die natürlich größer als Fünfzig sein musste wurde die Zahl 60 angenommen. So bestand dann die Mine aus 60 Schekeln. Als die Notwendigkeit für die Einführung einer noch größeren Gewichtseinheit auftrat, wurde sie 60 mal so groß wie die Mine festgelegt; das war der sogenannte Talent.
Als höhere Geldeinheit wurde ebenfalls der Silbertalent eingeführt, dieser enthielt 60 Silberminen, das heißt $60 \cdot 60 = 3600$ Silberschekel.

Übungen
22. Schreibe die Zahl 219661 im Sechzigersystem.
23. Schreibe mit Hilfe von Keilzeichen die Zahl 3601.
24. Schreibe das laufende Jahr im Vierersystem.
25. Schreibe 1958 im Fünfersystem.
26. Schreibe 9000 im Vierersystem.
27. Schreibe $(16340)_{10}$ im Siebenersystem.
28. Schreibe 1958 im Neunersystem.
29. Schreibe die Zahl $(2540)_6$ im Neunersystem.
301 Schreibe die Zahl $(562)_7$ im Fünfersystem.
31. Schreibe die Zahl 15 in den Zahlensystemen beginnend vom Zweier- bis zum Fünfzehnersystem auf.

32. Wir setzen 10 = a, 11 = b, 12 = c und 13 = d und benutzen diese Buchstaben als Ziffern in Zahlensystemen größer als das Zehnersystem, abhängig vom Bedarf.
Schreibe die Zahlen: $(ac)_{13}$ im Zehnersystem, 1212 im Zwölfersystem, $(adcd)_{20}$ im Zehnersystem.

6 Die Schreibweise der Zahlen bei den Mayas

Ein recht originelles System für die Schreibweise der Zahlen, hat der indianische Stamm der Mayas[8] geschaffen, der die Halbinsel Yukatan in Mittelamerika (Südmexiko) bewohnte. Eine große Anzahl der im 16. Jahrhundert entdeckten Zahlenaufschriften, in den Handschriften sowie auch z.B. auf Denkmälern, steht im Zusammenhang mit dem Kalender.
Die Einheiten bis einschließlich der Vier haben die Mayas mit Punkten bezeichnet, die Eins haben sie hin also "Tag" genannt und die Fünf haben sie in Form eines waagerechten Striches geschrieben: als Beispiele geben wir die Schreibweise einer Reihe von Zahlen kleiner als zwanzig an:

$\lvert\cdot\rvert$	$\lvert\cdot\cdot\rvert$	$\lvert-\rvert$	$\lvert\overset{\cdots}{-}\rvert$	$\lvert=\rvert$	$\lvert\overset{\cdots\cdot}{=}\rvert$	$\lvert\overset{\cdots}{\equiv}\rvert$
1	2	5	8	10	14	18

Eine Einheit höheren Grades war die Zahl 20 (uinal genannt), so viel Tage zählte nämlich der Monat bei den Mayas.
Da das Jahr bei ihnen in 18 volle Monate und 5 zusätzliche Tage eingeteilt war es zählte also 365 Tage) war die nächst höhere Einheit die Zahl 360 = 18 · 20, die tun genannt wurde.
Darüber hinaus stellen wir bereits ein reines Zwanzigersystem fest:

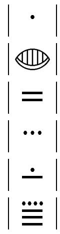
20 tun	= 1 katun	= 20 · 360	= 7 200
20 katun	= 1 baktun	= 20 · 7 200	= 144 000
20 baktun	= 1 piktun	= 20 · 144 000	= 2 880 000
20 piktun	= 1 calabtun	= 20 · 2 880 000	= 57 600 000
20 calabtun	= 1 kinchiltun	= 20 · 57 600 000	= 1 152 000 000
20 kinchiltun	= 1 alantun	= 20 · 1 152 000 000	= 23 040 000 000

Die Null wurde in Form eines Zeichens | |, das dem Gehäuse der Schnecke ähnlich war - oder wie andere behaupten - einem halb geöffneten Auge, geschrieben. Sie wurde in den Schriften das erste Mal ungefähr um das Jahr 500 (und nicht wie früher angenommen wurde am Anfang unserer Zeitrechnung) verwendet.
Es ist also unzweifelhaft das älteste Zeichen für die Null, das konsequent in einem Stellenwertsystem angewandt wurde, da es auch am Ende einer Zahl stehen konnte.

Die Zahlen wurden nicht, wie es bei der Mehrzahl der Völker üblich war, in waagerechter Richtung aufgeschrieben. sondern in senkrechter, und zwar so, dass die höheren oben und die niedrigeren darunter standen. Die folgenden Beispiele veranschaulichen diese Zahlenschreibweise der Mayas.

$$\begin{array}{cr} \lvert\cdot\cdot\rvert & 2\cdot 20 = 40 \\ \lvert\ \ \rvert & 0\cdot 1 = 0 \\ \hline & 40 \end{array} \qquad \begin{array}{cr} \lvert\overset{\cdot}{\equiv}\rvert & 16\cdot 360 = 40 \\ \lvert\overset{\cdots}{-}\rvert & 8\cdot 20 = 160 \\ \lvert\cdots\cdot\rvert & 4\cdot 1 = 4 \\ \hline & 5924 \end{array}$$

[8] S. auch das Büchlein "Schrift und Buchmalerei der Maya-Indianer", Insel Verlag, Leipzig 1965.



$$
\begin{array}{r}
1 \cdot 2880000 = 2880000 \\
0 \cdot 144000 = 0 \\
10 \cdot 7200 = 72000 \\
3 \cdot 360 = 1080 \\
6 \cdot 20 = 120 \\
19 \cdot 1 = 19 \\
\hline
2953219
\end{array}
$$

Spuren vom Zwanzigersystem können wir auch heute noch bei manchen Völkern feststellen. So hat z.B. in England ein Pfund Sterling 20 Schillinge. Das ist ein Uberbleibsel aus der Zeit Karls des Großen, das etwa 12 Jahrhunderte überdauert hat und in Frankreich zur Zeit der Revolution am Ende des 18. Jahrhunderts abgeschafft wurde.

Allerdings heißt dort die 80 auch heute noch quatre vingt (gesprochen: katr wäng), was soviel bedeutet wie vier Zwanziger, und die weiteren Zahlen bis 99 haben Namen, die dieses Überbleibsel in der Aussprache enthalten, z.B. 96 (quatre vingt seize) = 4 · 20 + 16.
Auch in Dänemark können wir den Einfluss des Zwanzigersystems noch heute deutlich feststellen. In der dänischen Sprache bedeutet der Ausdruck tyve 20.
Zum Beispiel heißt 60 tre-sinds-tyve (3mal zwanzig) oder 80 fir-sinds-tyve (4mal 20).

7 Ägyptische, griechische und römische Zahlen

Das älteste bekannte Dokument, das die Aufschrift der Zahlen in Ägypten enthält, ist ein Denkmal, das aus dem Anfang der I. Dynastie (ungefähr 3300 Jahre v.Z.) stammt und zu Ehren eines Sieges errichtet wurde. Die auf diesem stehenden Hieroglyphen (entsprechen unserer gedruckten Schrift) geben an, dass 120000 Gefangene gemacht sowie 400000 Stück Rindvieh und 422000 Ziegen erbeutet wurden.

Eines der ältesten Schriftstücke ist der bereits erwähnte Papyrus von Ahmes, der in Theben (dem heutigen Luxor) gefunden, von Rhind gekauft und im Jahre 1877 gedruckt herausgegeben wurde.
Er beginnt mit den Worten:

"Vorschrift zur Erreichung der Kenntnisse über jegliche dunkle Dinge ... jegliche Geheimnisse, die die Gegenstände beinhalten. Geschrieben wurde das Buch im Jahre 33 Mesori Tag ...
zur Zeit des Königs RA-A-US des oberen und unteren Ägyptens, der das Leben gibt, nach den Vorbildern alter Schriften, die aus der Zeit des Königs (RA-EN-MAT) stammen.
Der Schreiber Ahmes hat diese Kopie geschrieben."

Dieses ungewöhnlich kostbare Dokument enthält viele sehr interessante Informationen über die ägyptische Mathematik. Es ist mit roter und schwarzer Tusche in Form der sogenannten Hieratik geschrieben, das ist die Schrift, die im täglichen Leben auf den Papyrus, angewandt wurde.
Das frühere ägyptische System der Zahlenschreibweise beruht ebenfalls auf der Zahl 10 als Basis. Zur Bezeichnung der Potenzen der Zahl 10, der Reihe nach bis 107 einschließlich, existierten spezielle Zeichen.

Das Zeichen für die Eins entsprach einem Messstab und wurde als senkrechter Strich geschrieben; das Zeichen für die 10 ist einem Hufeisen ähnlich (ähnlich dem auf den Kopf gestellten Buchstaben U). Die genaue Bedeutung dieses Zeichens ist jedoch unbekannt.

Das Zeichen für die 100 sieht wie ein spiralförmig gedrehtes Palmenblatt oder wie ein verdrehtes Lineal oder - wie manche behaupten - wie ein Priesterstab aus. Das Zeichen für die 1000 stellt eine Lotosblume (Stempel) dar, das Symbol des Nils, dem Ägypten seine Existenz verdankt. Früher bedeutete es "sehr viel".

Das Zeichen für die 10000 ist ein Zeigefinger[9] und für 100000 ein Frosch, von denen sich sehr viele nach Überschwemmungen im Schlamm des Nils befanden. Das Zeichen für 1000000 ist höchstwahrscheinlich das Abbild des Gottes Heh, der das Himmelsgewölbe hält, als Symbol für die "Unendlichkeit".
Die Zahl 10000000 schrieb man in Form eines unterstrichenen Kreises (die Bedeutung ist bis heute noch nicht aufgeklärt.

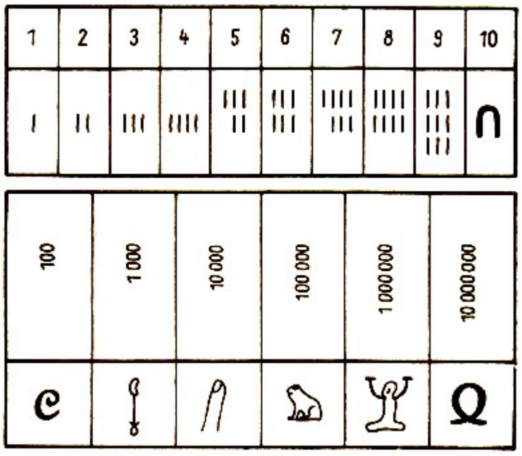


Bild 4. Ägyptische Zahlendarstellung

Die Zahlen wurden von links nach rechts geschrieben, wobei die Einheiten der gegebenen Reihe nebeneinander angeordnet wurden. So z.B.:

 $= 234$

Wie man leicht feststellen kann, wurde bei diesem System der Zahlenschreibweise, das Fehlen des Zeichens für die Null überhaupt nicht als Mangel empfunden.

Im alten Griechenland beruhte die Schreibweise der Zahlen, die aus dem 6. Jahrhundert v.Z. stammt (beschrieben durch Herodian, der um das Jahr 200 n.Z. lebte), auf dem Aufschreiben der Anfangsbuchstaben dieser Zahlen anstatt der Zahlen selbst.

So wurde z.B. die Zahl 5 (griechisch: pente) mit dem Buchstaben Π (gelesen: pi) bezeichnet. Die Zahl 10 (bekanntlich griechisch: deka) wurde als Δ (gelesen: delta) geschrieben. Ähnlich wird die Zahl 100 (griechisch: hekaton; man denke an hekto-) mit dem Buchstaben H geschrieben; 1000 (griechisch: chilioi: man denke an kilo-) wurde mit dem Buchstaben χ bezeichnet (griechisch: chi).

Die größte Zahl, die ein besonderes Zeichen hatte, war die 10000 (griechisch: myrioi ; in Polen kennt man heute noch das Myriagramm = 10 Kilogramm; auch der Ausdruck "Myriaden von ..." (etwa Mücken. Fliegen usw.) ist bekannt, womit eine Unzahl gemeint ist); geschrieben wurde die 10000 als M.

Zusätzliche Zeichen entstanden durch die Kombination des Zeichens $5 = \Pi$ mit einem der

[9] Nach Wußing ein Schilfkolben mit der ursprünglichen Bedeutung "sehr viel", "unendlich".

übrigen Zeichen, wobei meist die vereinfachte Form Γ (bei uns durch Γ dargestellt) benutzt wurde. So waren z.B. noch folgende Zeichen im Gebrauch:

𐅄 = 50, 𐅅 = 500, 𐅆 = 5000, 𐅇 = 50000,

und z.B.

MM 𐅆XXX 𐅅HH 𐅄ΔΔΔ 𐅃|
𐅇MM 𐅆XX 𐅅HHH 𐅄Δ 𐅃
𐅇MMMMH 𐅄ΔΔΔΔ

von oben nach unten bedeutet es 28786, 77865, 90190.

Die Zahl Eins wurde als senkrechter Strich geschrieben. Insgesamt gab es also 10 Zeichen: mit deren Hilfe alle Zahlen aufgeschrieben wurden. Um z.B. die Zahl 67 837 darzustellen, platzierte man der Reihe nach von der linken zur rechten Seite die Zeichen für die Zahlen: 50000, 10000, 5000, 1000, 1000, 500, 100, 100, 100, 10, 10, 10, 5, 1, 1 : also insgesamt 15 Zeichen.

Das ist natürlich keine einfache Schreibweise. In den attischen[10] Aufschriften finden wir die herodianischen Zahlzeichen eines Zeitabschnittes von über 400 Jahren bis zum 1. Jahrhundert v.Z. zu Zeiten von Perikles, der in Athen regierte (5. Jahrhundert v.Z.), sind diese in den Ämtern angewandt werden.

Eine andere Schreibweise der Zahlen, die später vorherrschte, stammt aus Milet, einer damals sehr bedeutenden griechischen Stadt in Kleinasien. Sie beruhte auf der Ausnutzung aller Buchstaben des griechischen Alphabetes und dreier nicht mehr gebräuchlicher Buchstaben als Zeichen für die Zahlen 6, 90 und 900[11]. Die ersten 9 Buchstaben bezeichneten der Reihe nach die Zahlen 1 bis 9:

alpha $\alpha = 1$	beta $\beta = 2$	gamma $\gamma = 3$
delta $\delta = 4$	epsilon $\varepsilon = 5$	digamma $\varsigma = 6$
zeta $\zeta = 7$	eta $\eta = 8$	theta $\vartheta = 9$

Die nächsten 9 Buchstaben in der Reihenfolge des Alphabetes bedeuteten die vollen Zehner:

jota $\iota = 10$	kappa $\kappa = 20$	lambda $\lambda = 30$
my $\mu = 40$	ny $\nu = 50$	xi $\xi = 60$
omikron $o = 70$	pi $\pi = 80$	koppa ϙ $= 90$

Die übrigen 9 Buchstaben dienten zur Bezeichnung der vollen Hunderter:

rho $\rho = 100$	sigma $\sigma = 200$	tau τ r $= 300$
ypsilon $\upsilon = 400$	phi $\phi = 500$	chi $\chi = 600$
psi $\psi = 700$	omega $\omega = 800$	sampi ϡ $= 900$

Zur Bezeichnung der Tausender wurde vor den entsprechenden Buchstaben ein Komma gesetzt, z.B.:

$$,\alpha = 1000 \qquad ,\beta = 2000 \qquad ,\gamma = 3000.$$

Eine Gruppe von Buchstaben, die eine Zahl bedeutete "wurde überdacht", das heißt, es wurde über ihnen ein Strich gezogen, z.B.

[10]Attika - Land in Altgriechenland. Hauptstadt Athen. jetzt Hauptstadt von Griechenland.
[11]Digamma, Koppa und Sampi

$$\overline{\lambda\varepsilon} = 35 \qquad \overline{\psi\delta} = 704 \qquad \overline{,\eta\alpha} = 8001 \qquad \overline{,\vartheta\rho\nu\zeta} = 9157$$

zur Unterscheidung von den Buchstaben der Worte.
Der Buchstabe M bedeutete 10000 (myrioi). Um die Zehntausender oder Hunderttausender aufzuschreiben, schrieb man über den Buchstaben M die Anzahl der Zehntausender dieser Zahl. Zum Beispiel

$\overset{\iota}{M}$	bedeutete 10 mal Zehntausend also	100000
$\overset{\mu\alpha}{M}$	bedeutete 41 mal Zehntausend also	410000
$\overset{\omega\kappa\vartheta}{M}\overline{,\delta\tau\pi\eta}$	bedeutete	8294388

Die älteste Schrift unter Anwendung dieser Zeichen stammt aus der Mitte des 5. Jahrhunderts v.Z., sie wurde ungefähr im Jahre 300 v.Z. popularisiert und etwa seit dem Jahre 150 v.Z. in den Ämtern angewandt.
Das war die gebräuchlichste Schreibweise der Zahlen, obwohl sich diese auch mit der Zeit geändert hat; so hat beispielsweise Diophantos (3. Jahrhundert v.Z.) die Zehntausender von den Tausendern durch Punkte getrennt:

$\overline{\sigma\lambda}.,\ \overline{\beta\phi\pi\eta}$ bedeutete 2302588,
$\overline{\phi\mu\varepsilon}.,\ \overline{\vartheta\omega}$ bedeutete 5459800

Das war ein sehr unbequemes System der Zahlenschreibweise:

$3 + 5 = 8$ schrieb man als $\gamma + \varepsilon = \eta$,
$30 + 50 = 80$ schrieb man als $\lambda + \nu = \pi$,
$300 + 500 = 800$ schrieb man als $\tau + \phi = \omega$

Die Zeichen "+" und "=" stammen natürlich aus späterer Zeit.

Im Zehnersystem beruht die zweite und dritte Addition auf dem Ergebnis der ersten Addition, mit dem Unterschied, dass bei der zweiten Addition die Zehner und bei der dritten die Hunderter addiert werden.
Bei den Griechen waren die 3 Operationen durch nichts miteinander verbunden, da sie nach jeder Operation vollkommen andere Symbole für die Zahlen angewandt haben. Darin kann man einen der Gründe für die langsame Entwicklung der griechischen Arithmetik suchen.

Anfangs haben die Römer die Zahlen mit Hilfe von senkrechten Strichen geschrieben I, II, III, IIII, ..., später benutzten sie Buchstaben. Am Ende kann das heute noch verbreitete System der "römischen Ziffern" zur Anwendung. Die Grundzeichen sind:

$$1 = I, \quad 10 = X, \quad 100 = C, \quad 1000 = M, \quad 5 = V, \quad 50 = L, \quad 500 = D$$

Die Schreibweise der Zahlen durch die Platzierung der Zeichen von der linken zur rechten Seite, so ähnlich wie es in Ägypten und Griechenland der Fall war, wurde hier in einem gewissen Grade vereinfacht.

In Ägypten und Griechenland wurden zwei verschiedene Zahlen, z.B. 500 und 100 so nebeneinander platziert, dass die kleinere rechts von der größeren stand. Solch eine Anordnung der Zahlen bedeutete, dass diese Zahlen zu addieren sind.
 bedeutete 500 + 100 = 600.

Die Römer haben bei Anwendung der gleichen Schreibweise eine Neuerung eingeführt, die darin

besteht, dass auch die kleinere Zahl vor die größere geschrieben werden kann. Eine solche Anordnung der Zahlen bedeutete dann, dass die kleinere von der darauffolgenden größeren Zahl abzuziehen war.
Dies sehen wir deutlich anhand folgender Beispiele:

$$VI = 5 + 1 = 6; \quad LX = 50 + 10 = 60; \quad DC = 500 + 100 = 600;$$
$$IV = 5 - 1 = 4; \quad XL = 50 - 10 = 40; \quad CD = 500 - 100 = 400;$$
$$XI = 10 + 1 = 11; \quad CX = 100 + 10 = 110; \quad MC = 1000 + 100 = 1100;$$
$$IX = 10 - 1 = 9; \quad XC = 100 - 10 = 90; \quad CM = 1000 - 100 = 900$$

Auf diese Weise wurde im römischen System eine Vereinfachung der Zahlenschreibweise erzielt, wenn die Einheiten einer gewissen Reihe gleich 4 oder 9 waren; in den anderen Fällen wurden die kleineren Zahlen hinter den größeren angeordnet, wobei die Zeichen so lange wiederholt wurden, wie es zur Angabe der Einheiten der gegebenen Reihe notwendig war.
So wurden zum Aufschreiben der Zahl 837 zehn Zeichen benötigt:

$$DCCCXXXVII$$

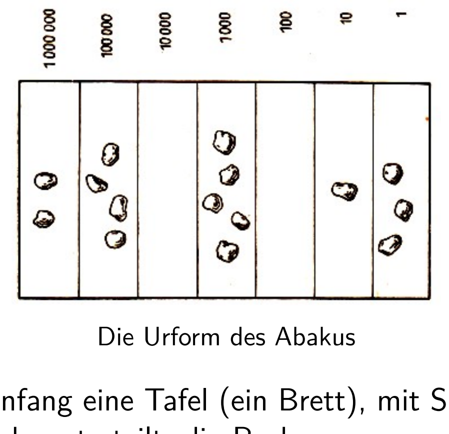
Andererseits schrieb man die Zahl 945, die größer als die oben genannte Zahl ist, unter Anwendung nur der Hälfte der Zeichen, die man für die obere Zahl benötigte:

$$CMXLV$$

Im Zehnersystem ist das nicht möglich. Hier schreiben wir entweder eine größere ganze Zahl mit der gleichen oder mit einer größeren Anzahl von Ziffern, jedoch nie mit weniger.
Eine Zahl, die überstrichen war, erhöhte ihren Wert auf das Tausendfache. Zum Beispiel: $\overline{XV}$ bedeutete 15000, $\overline{CIX}$ bedeutete 109000.

Im römischen System der Zahlenschreibweise kann man Spuren des Fünfersystems (IV, V, VI, VII, VIII) und des Zehnersystems (IX, X, XI, ...) feststellen.
Trotz der komplizierten Schreibweise der Zahlen konnten die Römer diese gut handhaben, denn sie haben die einfachen Rechenoperationen, wie die Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen meist nicht schriftlich ausgeführt.

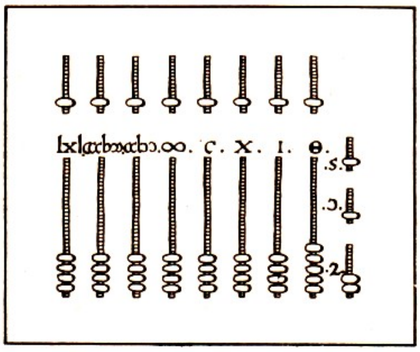
Sie rechneten vielmehr mit dem Abakus, der ersten "Rechenmaschine" der Welt, von welcher schon der griechische Historiker Herodot im 5. Jahrhundert v.Z. berichtet hat.



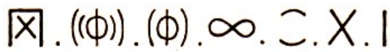
Die Urform des Abakus

Abakus (abak) das war am Anfang eine Tafel (ein Brett), mit Sand bedeckt und durch parallele Striche in gleiche Abstände unterteilt; die Rechnungen wurden mit Hilfe von Steinen im Zehnersystem durchgeführt.

Die Steine, die im ersten Feld von rechts angeordnet waren, bedeuteten die Einer, im zweiten die Zehner, im dritten die Hunderter usw.
In Bild 5 kann man ohne Schwierigkeiten die Zahl 2405013 ablesen. Später wurden diese Bretter etwas vereinfacht, wie man aus einem der vier noch heute vorhandenen, mit Rillen versehenen Abakus ersehen kann, in dem anstatt der Steine verschiebbare Kugeln vorhanden waren.



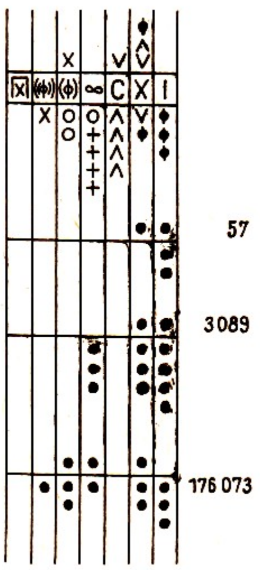
Römischer Abakus



Zeichen auf dem Abakus

Eines dieser Geräte (aus Metall) hatte sieben Rillen und war von der rechten zur linken Seite mit Zeichen versehen, welche 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 bedeuteten (s. Bild). Jede Rille bestand aus zwei ungleichen Teilen. In die größere konnte man 4 Kugeln legen und in die kleinere nur eine, diese hatte den gleichen Wert wie 5 Kugeln im größeren Teil.

Wie wurden die Operationen auf dem Abakus ausgeführt? Die Ausführung der Addition und Subtraktion kann man sich leicht vorstellen (s. auch Kap. 14). Die Multiplikation als schwierigere Rechenoperation erläutern wir an einem Beispiel.
Um z.B. die Zahl 3089 mit 57 zu multiplizieren, legen wir die Steinchen so wie es in Abbildung 8 angegeben ist.



Darstellung der Multiplikation auf dem Abakus

Reihenfolge der Produkte	Nummer des Feldes	Bezeichnung auf Bild 8
1. Multiplikation mit 3		
$3 \cdot 5 = 15$	$4 + 2 - 1 = 5$	×
$3 \cdot 7 = 21$	$4 + 1 - 1 = 4$	◯
Danach überführen wir die Steine nach unten.		
2. Multiplikation mit 0		
$0 \cdot 57 = 0$		
$0 \cdot 7 = 0$		
3. Multiplikation mit 8		
$8 \cdot 5 = 40$	$2 + 2 - 1 = 3$	+
$8 \cdot 7 = 56$	$2 + 1 - 1 = 2$	∨
Diese Steine schieben wir auch nach unten.		
4. Multiplikation mit 9		
$9 \cdot 5 = 45$	$1 + 2 - 1 = 2$	∧
$9 \cdot 7 = 63$	$1 + 1 - 1 = 1$	•

5. Insgesamt erhalten wir: 176073 (unten auf dem Bild)

Die Multiplikation begann mit den höchsten Einheiten; wir berechnen also das Produkt $3 \cdot 5 = 15$, hier entsteht gleich ein Problem:

In welches Feld platzieren wir die 15 und die anderen Teilprodukte? Das war die einzige Schwierigkeit, deren Lösung schon Archimedes kannte. Die Regel zu ihrer Überwindung ist folgende:

Das Teilprodukt platzieren wir in dem Feld, dessen Nummer wir durch Summierung der Felder, in denen sich die Faktoren befinden, erhalten und eins abziehen. Da sich die 3 im vierten Feld befindet und die 5 im zweiten, muss die 15 in das Feld, das mit der Nummer 4 + 2 - 1, also mit der 5, versehen ist, platziert werden.
Jedoch ist $15 = 5 + 10$, also platzieren wir 5 in das fünfte Feld und 10 Einheiten dieser Reihe (das heißt $10 \cdot 10000 = 100000$) platzieren wir als eine Einheit höheren Grades in das sechste Feld (siehe × und × auf Bild 8).

Weiterhin verfahren wir entsprechend. Wir geben eine genaue Reihenfolge der Operationen an und kennzeichnen zur Erleichterung der Kontrolle jeden Arbeitsgang mit einem anderen Zeichen.

Wer tiefer in die Geschichte der Mathematik des Altertums ein- dringen möchte, greife an dieser Stelle zu dem Buch von Hans Wußing, Mathematik in der Antike, in dem er viel Interessantes finden und nachlesen kann.

Übungen
33. Schreibe 21004507 mit ägyptischen Zeichen.
34. Schreibe 61409 mit herodianischen Zeichen.
35. Schreibe die gleiche Zahl im römischen Zahlensystem. In welchem System benötigt man die geringere Anzahl von Zeichen?

8 Von slawischen Zahlen und der ältesten polnischen Arithmetik

Zum Aufschreiben der Zahlen benutzte man 27 kleine Buchstaben des slawischen Alphabetes. Um die Buchstaben von den Zahlen unterscheiden zu können, wendete man ein spezielles Zeichen ҃ eine Art Tilde an, die über den ersten Buchstaben der Zahl geschrieben wurde.

Die ersten 9 Buchstaben des Alphabetes bedeuteten die Zahlen 1 bis 9, die nächsten 9 Buchstaben bedeuteten der Reihe nach die vollen Zehner, schließlich bedeuteten die übrigen 9 Buchstaben die Zahlen von 100 bis 900.
Über jeden dieser Buchstaben, die getrennt angewandt wurden, schrieb man eine Tilde. Wie man sieht, besteht eine verblüffende Ähnlichkeit mit der Schreibweise der Zahlen, die aus der Stadt Milet stammt und von den Griechen nach der herodianischen Schreibweise angewandt wurde (s. Kap. 7).

А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І҃	К҃	Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	О҃	П҃	Ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р҃	С҃	Т҃	Ѵ҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѿ҃	Ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Die slawische Nummerierung

Wir stellen fest, dass ähnlich wie bei den Römern auch hier der Begriff Ziffer in unserem Sinne nicht bekannt war, daraus ergeben sich alle Schwierigkeiten in der Zahlenbildung und bei der Durchführung der Rechenoperationen. Uns genügen die 10 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0, um eine beliebig große Zahl aufzuschreiben.
Die Slawen hingegen schrieben die Zahl so, wie sie diese ausgesprochen haben, das heißt, die Reihenfolge der Buchstaben in der Zahl entsprach dem Namen der Zahl. Zum Beispiel:

14 hieß "vier auf zehn", also schrieben sie Д҃І

19 hieß "neun auf zehn", also schrieben sie Ѳ҃І
Im Gegensatz dazu haben sie bei den Zahlen 21 bis 99 an die erste Stelle den Buchstaben für die Zehner mit der Tilde gesetzt und rechts von ihm den Buchstaben für die Einer ohne Tilde, z.B.

О҃И = 78 , Ч҃Г = 93 , Г҃І = 13 , М҃Г = 43

Es war also kein Stellenwertsystem, da die Stellung des Buchstabens in der geschriebenen Zahl nicht seinen Wert bestimmt hat.
Der Buchstabe Г hatte an erster und auch an zweiter Stelle den gleichen Wert 3.
Für die Bezeichnung der Tausender wurde vor den ersten Buchstaben das Zeichen ҂ gestellt, das aussieht wie ein um 45 Grad gedrehtes Ungleichheitszeichen. Zum Beispiel

҂Ѯ҃З Ѿ҃КД = 67824 , ҂П҃А Ѱ҃ЛЄ = 81735 , ҂П҃ Ѱ҃Є = 80705

Es ist festzustellen, dass die Tilde hier zur Unterscheidung der Zahl der vollen Tausender von der Zahl der Hunderter, Zehner und Einer zweimal angewandt wurde.
Man kannte die Zahl Null nicht, daraus resultiert das kurze Schriftbild mancher Zahlen, z.B.:

40040 = ҂М҃ М҃ , 500005 = ҂Ф҃ Є҃

Eine Million, die tausend Tausendern entspricht, kennzeichnete man zweimal mit dem Zeichen für die Tausender ҂҂, z.B.:

80813640 = ҂҂П҃ ҂Ѿ҃ГІ Х҃М , 15000018 = ҂҂Є҃І И҃І

Da zur damaligen Zeit nicht mit Milliarden (10^9), Billionen (10^{12}) und größeren Zahlen operiert wurde, genügten die besprochenen Zeichen vollkommen zum Aufschreiben der Zahlen.

Erst im 17. Jahrhundert tritt ein neues System auf, genannt "große slawische Zahl", das das Aufschreiben großer Zahlen ermöglicht. In den Handschriften, die aus diesem Jahrhundert stammen, kommen solche Begriffe vor wie t'ma (Unmenge) = Million, legion (Legion) = 10^{12} oder Billion, leodr = 10^{24}, das ist eine Quadrillion, woroń (Rabe) = 10^{48}, das ist eine Oktillion; von dieser Zahl schreibt man in einer der Handschriften, "über ihr ist es nicht mehr begreifbar".

Als größte Zahl fand man die Zahl koloda (Klotz, Block) = 10 woroń = $10 \cdot 10^{48} = 10^{49}$ = zehn Oktillionen, von der man geschrieben hat: "es gibt keine Zahl, die größer ist als diese".

Die älteste in polnischer Sprache gedruckte Arithmetik stammt aus dem Jahre 1538. Ihr Titel lautet: "Algorithmus, das ist die Lehre von der Zahl: als polnisches Werk herausgegeben durch den Pfarrer Tomasz Klos Es besteht aus drei Teilen der erste handelt von den Zahlen, der zweite von der Regula detri, der dritte von verschiedenen Rechenarten der Kaufleute. Cracovia ex Officina Ungleriana 1538".

Um den Titel, der in der damaligen Zeit immer sehr lang war, zu verstehen, erklären wir, dass Algorithmus die Lehre von den Rechenarten bedeutet. Anstatt der heutigen Million finden wir in diesem Buch milon oder auch "tausend Tausender".

In dem Werk von Zedzianowski "Kometa z przestrogi niebieskiej" aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts gibt der Autor an, dass die Zahl 20042702 folgendermaßen zu lesen ist: Zwanzig Mil Tausende Tausende, vierzig und zwei Tausende sieben hundert und zwei.

Zum Schluss zitieren wir noch, was der Autor der zweiten Arithmetik in polnischer Sprache Bernard Woiewodka (herausgegeben im Jahre 1553) über die Null schrieb: "Und die zehnte (Figur), die man Ziffer nennt, die selber nichts wiegt und nichts bedeutet, aber wenn sie den Platz bei den anderen hat, ihnen eine andere Bedeutung gibt, das ist die Null."

Eine Reihe wertvoller Informationen über die Geschichte der Zahlen des hinteren Orients (Indien, China) verdanken wir E. Sluszkiewies, Professor an der Universität Torun.
Auch in deutscher Sprache ist ein ausgezeichnetes Buch zu diesem Abschnitt erschienen, das allerdings an den Leser einige Anforderungen stellt. Es heißt "Mathematik im Mittelalter" und wurde von dem bekannten sowjetischen Wissenschaftler Professor Dr. A.P. Juschkewitsch verfasst. Demjenigen, der sich besonders für diese Periode der Mathematikgeschichte interessiert, kann es zu tieferem Eindringen sehr empfohlen werden.

9 Von großen Zahlen und ihrer Herkunft und der Geschichte über die Entstehung des Schaches

Tausend Tausender nennen wir eine Million und schreiben 1000000 oder auch 10^6.
Tausend Millionen bezeichnen wir als eine Milliarde und schreiben $1000000000 = 10^9$.
Tausend Milliarden nennen wir eine Billion und schreiben $1000000000000 = 10^{12}$. Eine Million Millionen entspricht auch einer Billion: $10^6 \cdot 10^6 = 10^{6+6} = 10^{2\cdot 6}$. Schreiben wir also der Reihe nach die Zahlen, die einen speziellen Namen haben, angefangen mit der Million auf:

Eine Million		$= 10^{1\cdot 6} = 10^6$
Billion	(eine Million Millionen)	$= 10^{2\cdot 6} = 10^{12}$
Trillion	(eine Million Billionen)	$= 10^{3\cdot 6} = 10^{18}$
Quadrillion	(eine Million Trillionen)	$= 10^{4\cdot 6} = 10^{24}$
Quintillion	(eine Million Quadrillionen)	$= 10^{5\cdot 6} = 10^{30}$
Sextillion	(eine Million Quintillionen)	$= 10^{6\cdot 6} = 10^{36}$
Septillion	(eine Million Sextillionen)	$= 10^{7\cdot 6} = 10^{42}$
Oktillion	(eine Million Septillionen)	$= 10^{8\cdot 6} = 10^{48}$
Nonillion	(eine Million Oktillionen)	$= 10^{9\cdot 6} = 10^{54}$
Dezillion	(eine Million Nonillionen)	$= 10^{10\cdot 6} = 10^{60}$

Die Namen der obigen Zahlen stammen von den lateinischen Namen der Zahlen zwei bis zehn ab (bis bedeutet zweimal, also enthält die Billion $2 \cdot 6$ Nullen, decem bedeutet 10, somit enthält die Dezillion $10 \cdot 6$ Nullen). Auf diese Weise können wir auch die Namen noch höherer Zahlen bilden, z.B.:

$$\text{Zentillion} = 10^{100 \cdot 6} = 10^{600}$$

mit dem Ausdruck centum (Hundert).
Die Namen großer Zahlen werden denjenigen, die sich in musikalischen Begriffen auskennen, nicht fremd sein; wir finden dort Namen mit ähnlichem Klang und natürlich auch von ähnlicher Bedeutung wie zum Beispiel: Terz (dritte Stufe nach dem Grundton) und Trillion, die 3 Gruppen zu je 6 Nullen enthält, ähnlich Quinte und Quintillion, Oktave und Oktillion.

Das oben angegebene System für die Bildung großer Zahlen basiert auf sechsziffrigen Gruppen (die Anzahl der Nullen in der Million) und wird in Polen, den beiden deutschen Staaten, England und einigen Ländern Nordeuropas sowie der Mathematik, Physik usw. angewandt.

Im Gegensatz dazu wird in der UdSSR, Frankreich, Amerika, in den Ländern Südeuropas und in ökonomischen Rechnungen häufiger das auf dreiziffrigen Gruppen (Anzahl der Nullen in der Tausend) basierende System verwendet.
In diesen Ländern versteht man also unter einer Billion, die auch öfter Milliarde genannt wird, tausend Millionen, das heißt 10^9, unter einer Trillion tausend Billionen, das heißt 10^{12} usw. Die Amerikaner wiederum verstehen unter einer Milliarde

$$100000000 = 10^8$$

also Hundert Millionen. Das erhöht die Anzahl der Milliardäre in den USA.

Wie wir daraus ersehen, könnten durch die Anwendung nur der Namen großer Zahlen, große Unstimmigkeiten entstehen. Deshalb ist es zu ihrer Vermeidung notwendig, dass die Zahlen in Ziffern oder in Potenzen der Zahl 10 geschrieben werden.

Die hier angeführten Namen großer Zahlen treten in mathematischen und manchmal auch in astronomischen Büchern des 15. Jahrhunderts auf; sie waren jedoch sicher schon früher bekannt, davon zeugen Angaben in den Aufzeichnungen von Marco Polo, der im Jahre 1324 gestorben ist.
Damals wurden Namen angewandt, die mit den angegebenen identisch sind oder einen ähnlichen Klang hatten, wie z. B. Bimillion, Trimillion.
So war es in Europa.

Briefmarken aus der Inflationszeit

Dagegen hatte die indische Sprache Sanskrit - die schon zu Zeiten Alexanders von Mazedonien[12] nicht mehr gesprochen wurde - schon eigene Namen für die Zahlen mindestens bis 10^{53}; das zeugt davon, dass bei den Indem große Zahlen sehr beliebt waren.

Sie treten in vielen literarischen Werken auf. So gibt z.B. der polnische Forscher auf diesem

[12] Alexander der Große (356-323 v.Z.) - König von Mazedonien, einer der größten Eroberer und Herrscher im Altertum.

Spezialgebiet Prof. A. Gawronski an, dass "der indische Epiker ... nicht deshalb mit den Jahrmillionen jongliert, weil er nicht weiß, dass seine Helden bedeutend kürzer lebten, sondern weil diese Ziffern in ihm erst ein Gefühl der Macht weckten. Es geht nicht um den realen Wert, sondern um das Gefühl. Ein nüchterner Europäer sieht darin eine widerliche Übertreibung.
Er wirft den Indern eine kindische Phantasie vor (wie auch die gleichen Inder keine ausgezeichneten Rechenmeister und Lehrer Europas sein konnten), das ist die Folge der Allmacht der damaligen Herrschaft ... In den literarischen Werken treten solche Redewendungen, Budda betreffend, auf, welcher "vierzig hundert tausend Myriaden zehn Millionen Abschnitte der Weltentstehung lebte, so viel wie Sandkörner im Fluss Ganges vorhanden sind ...", seine richtige Religion dauerte "hunderte tausende Myriaden Zehner Millionen Abschnitte des Bestehens der Welt", dass auf die Welt der Reihe nach kamen ... zwanzig hundert tausender Myriaden Zehner Millionen" solche Buddas usw."

Die indischen Einflüsse drangen bis nach China vor, wo ebenfalls der Name für die Zahl 10^{53} der Sand des Ganges (heng ho cha) war.

Es ist schwierig, das genaue Datum der Entstehung des Schaches festzustellen; der Name stammt sicher von dem Wort "czaturanga" aus dem Sanskrit ab, ein Spiel, in dem verschiedene Figuren wie König, Pferd, Fußgänger und andere auftreten.
Es steht fest, dass es in Indien im 7. Jahrhundert n.Z. existierte und sich in Europa etwa vom 14. Jahrhundert an verbreitete.

Eine Legende besagt, dass der Erfinder des Schachspieles Sessa Ebn Daher (nach anderen Angaben Sissa Nassir) den indischen Herrscher Shehrama so mit diesem neuen Spiel begeisterte, dass der Erfinder die Höhe der Belohnung selbst angehen durfte.

Wie erstaunt war der indische Herrscher, als er aus dem Munde des Erfinders den "bescheidenen Wunsch" vernahm, dass die Belohnung gleich der Summe der Weizenkörner sein sollte, die auf eine einfache Weise zu berechnen sind:
Auf dem ersten Feld des Schachbrettes ordnet man ein Weizenkorn an und auf jedem weiteren Feld des Brettes doppelt so viel Körner wie auf dem vorhergehenden.

Da das Schachbrett "nur" 64 Quadrate (Felder) hat, erschien dem Herrscher die Belohnung lächerlich klein.
Die herbeigerufenen Mathematiker haben die Berechnung mit folgender Anordnung der Körner durchgeführt:

Auf dem 1. Quadrat des Schachbrettes 1 Korn
Auf dem 2. Quadrat des Schachbrettes 2 Körner, (d.h. 2^1)
Auf dem 3. Quadrat des Schachbrettes 4 Körner, (d.h. 2^2)
Auf dem 4. Quadrat des Schachbrettes 8 Körner, (d.h. 2^3) usw.
Auf das 64. Quadrat des Schachbrettes gehören 2^{63} Körner.

Es ist leicht einzusehen, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 = 2^2-1, \\ 1+2+4 &= 7 = 2^3-1, \\ 1+2+4+8 &= 15 = 2^4-1, \\ \text{mit schließlich} \quad 1+2+...+2^{63} &= 2^{64}-1 \end{aligned}$$

Erläuterungen der nachfolgenden Tabelle:

t bedeutet Tausend, m bedeutet Million, tm bedeutet tausend Millionen (= Milliarden), b bedeutet Billion, tb bedeutet tausend Billionen (= Billiarden), tr bedeutet Trillion

Die überschlagsmäßige Berechnung der Körnerzahl ist ab Feld 12 angenähert mit jeweils wachsender Ungenauigkeit.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2t	4t	8t	16t	32t
64t	128t	256t	512t	1m	2m	4m	8m
16m	32m	64m	128m	256m	512m	1md	2md
4md	8md	16md	32md	64md	128md	256md	512md
1b	2b	4b	8b	16b	32b	64b	128b
256b	512b	1tb	2tb	4tb	8tb	16tb	32tb
64tb	128tb	256tb	512tb	1tr	2tr	4tr	8tr

Es lässt sich zeigen, dass allgemein folgende Gleichung gilt:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

In unserem Falle ist $n = 64$. Wir müssen somit $2^{64} - 1$ berechnen und erhalten die 20ziffrige Zahl

$$18446744073709551615$$

für die Anzahl der Weizenkörner; diese lesen wir: 18 Trillionen, 446744 Billionen, 73 Milliarden, 709 Millionen, 551 Tausend 615.
Zur besseren Einschätzung der Größe dieser Zahl, geben wir an, dass 1 Liter Weizen ungefähr 22000 Körner enthält. Ein m^3 enthält also 22000000 Weizenkörner. Die Belohnung sollte demzufolge 838488366966 m^3 Weizen betragen.

Um dem Erfinder des Schaches die Belohnung "aushändigen" zu können, müsste man die gesamte Fläche an fruchtbarem Boden der ganzen Erde nur mit Weizen besäen und dies nicht nur ein Jahr, sondern 8 Jahre. Und er würde alle 8 Ernten "kassieren".
Der indische Herrscher Shehrama halte sich also in seinen Möglichkeiten schwer getäuscht.

Übungen
36. Was versteht man unter einer Million Milliarden?
37. Schreibe und lies die Zahlen 10^{11} und 10^{16}.
38. Wieviel Kubikmillimeter hat ein Kubikkilometer?
39. Wieviel Kilogramm hat eine Tonne?

10 Wieviel Sandkörner passen ins Weltall?

Archimedes, der bedeutendste Mathematiker und Physiker des Altertums (3. Jahrhundert v.Z.) hat das Problem folgendermaßen dargestellt:
Berechne die Anzahl der Sandkörner, die eine Kugel vom Volumen des Weltalls ausfüllen. (Darunter verstand er eine Kugel, deren Radius der Entfernung Erde-Sonne entspricht.)

Die größte Zahl, mit eigenem Namen, war bei den Griechen die Zahl 10000 (myrioi). Die Lösung des Problems erforderte eine bedeutende Erweiterung des angewandten Zahlenbereiches, deshalb hat Archimedes ein spezielles System zur Bezeichnung von Zahlen größer als 10000 geschaffen.

Die Zahlen bis zu einer "Myriade Myriaden", das heißt bis $10000 \cdot 10000 = 100000000$, nannte er Zahlen der ersten Ordnung; sie gehörten zu der sogenannten ersten Oktade.
Diese Namensgebung zeugt davon, dass Archimedes $10000 \cdot 10000$ als achte Potenz der Zahl 10 deutete, obwohl der Begriff Potenz zur damaligen Zeit noch nicht bekannt war.

Die Zahlen, die größer waren als die Zahlen erster Ordnung bis zu $100000000 \cdot 100000000 = 10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$, nannte er Zahlen der zweiten Ordnung; sie bildeten die sogenannte zweite Oktade.
Die Zahlen, die größer als die Zahlen zweiter Ordnung, bis zu $100000000 \cdot 100000000 \cdot 100000000 = 10^8 \cdot 10^8 \cdot 10^8 = 10^{24}$ waren, nannte er Zahlen der dritten Ordnung usw. bis zu den Zahlen der myriaden-myriadsten Ordnung (der hundertmillionsten), das heißt, bis zu den Zahlen, die in dem Bereich $10^{8(10^8-1)}$ bis $10^{800000000}$ enthalten sind.

Die größte Zahl dieser Ordnung ist eine Eins mit achthundert Millionen Nullen. Das ist eine Zahl, die infolge ihrer Größe Angst erweckt, jedoch Archimedes hat bei ihr noch nicht aufgehört, er zählte alle bisher beschriebenen Zahlen zu dem sogenannten ersten Intervall, zum zweiten Intervall zählte er wiederum die Zahlen von $10^{8 \cdot 10^8}$ bis $10^{16 \cdot 10^8}$, danach bildete er immer höhere Intervalle bis zu der myriaden-myriadsten Ordnung des myriaden-myriadsten Intervalles.

Die höchste Zahl hier war $(10^{800000000})^{1000000}$, das heißt, eine Eins mit 80000 Billionen Nullen.
Genau genommen gehören zur 1. Ordnung nur die Zahlen bis 10^8-1, zur 2. Ordnung die Zahlen von 10^8 bis 10^{16}-1 usw.

Wir werden hier nicht die Methode zur Schätzung der Entfernung zwischen Erde und Sonne wiederholen, auch nicht die Berechnung des Halbmessers der Kugel von der Größe der Erde, der kleiner als 10 Billionen Kilometer geschätzt wurde (nach der Umrechnung der damaligen Einheit stai in Kilometer), wir geben nur das Ergebnis, das mit viel Mühe erhalten wurde. an.
Die Zahl der Sandkörner ergab sich als verhältnismäßig "kleine Zahl" in dem speziell geschaffenen Zahlensystem; sie gehört zur ersten Ordnung des ersten Intervalles. - Dabei ist dem Leser an dieser Stelle sicherlich klar geworden, dass es Archimedes viel weniger darauf ankam, seine Sandrechnung durchzuführen, als darauf, zu zeigen, welche Zahlenriesen man bilden kann.

Übungen
40. Schreibe die Zahl der Sandkörner, die das Weltall ausfüllen und von Archimedes als Potenz von 10 erhalten wurden, auf und lies diese Zahl.

11 Zahlenriesen aus der Astronomie

Es ist leichter, große Zahlen aufzuschreiben, als sich über ihre Bedeutung klar zu werden, was folgende Beispiele beweisen:
Seit Beginn unserer Zeitrechnung sind noch nicht 1000000 Tage vergangen; ob wir den millionsten Tag erleben können, soll der Leser errechnen. Eine Million Zentimeter entsprechen 10 Kilometern. Auf der ganzen Erdkugel leben augenblicklich fast drei Milliarden Menschen.[13]

Die Erdkugel wiegt 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kp.
Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt ungefähr 385000 km, also weniger als 0,5 Millionen km. Wenn wir diese Entfernung mit einem Schnellzug, der eine Geschwindigkeit von 100 km/h hat, zurücklegten, so würde diese Reise ungefähr 160 Tage dauern. Es wäre

[13] Die genaue Zahl ist nicht anzugeben, weil es in vielen Ländern keine exakten Statistiken gibt. Jährlich vermehren sich die Menschen auf der Erde gegenwärtig um rund 50 Millionen.

also in jedem Falle hinsichtlich der Zeit möglich, diese Reise durchzuführen.

Wenn wir jedoch eine Reise zur Sonne riskieren würden?
Die mittlere Entfernung der Erde zur Sonne beträgt fast 150000000 km. Die Reise mit einem Schnellzug würde in diesem Falle 1500000 Stunden dauern. Da das Jahr ungefähr 36524 = 8760 Stunden hat, also weniger als 10000 Stunden, würde die Reise länger als 150 Jahre dauern.
Allerdings stehen uns heute schon "Weltraumverkehrsmittel" zur Verfügung, mit denen die Hin- und Rückreise in weniger als 250 Tagen zu bewältigen ist. Wie groß ist demnach deren durchschnittliche Geschwindigkeit?

Nach diesen allein im Zusammenhang mit der "Million" aufgetretenen Überraschungen werden wir bestimmt vorsichtiger mit unseren Voraussagen sein, um so mehr, da wir einen Sprung in die Bereiche der Milliarden, Billionen und anderen ... ionen machen wollen.
Welchem Zeitabschnitt entspricht eine Milliarde Minuten?
100 Jahre oder 1000 Jahre? Die genaue Berechnung - der interessierte Leser kontrolliert den angegebenen Wert - ergibt, dass seit Beginn unserer Zeitrechnung bis zum Anfang dieses Jahrhunderts bereits eine Milliarde Minuten vergangen sind, und zwar erfolgte dies im Jahre 1902, am 29. April um 10 Uhr 40 Minuten.

Bedeutend schneller können wir das Volumen einer Milliarde Körner berechnen, von denen jedes das Volumen von einem Kubikmillimeter hat. Die einfache Berechnung ergibt die Antwort: 1 m^3.

Nun kehren wir nochmals zu unserer Reise nach der Sonne zurück.
Um schneller zur Sonne zu gelangen, lassen wir unsere Phantasie walten und erhöhen die Geschwindigkeit bis zu dem Maximum, wir nehmen also an, dass wir uns mit Lichtgeschwindigkeit bewegen: 300000 km/s (der genaue Wert ist etwas kleiner).
Unter dieser Bedingung legen wir die Entfernung Erde - Sonne in 500 Sekunden zurück, also in 8 Minuten und 20 Sekunden.

Nun - denken wir - können wir zu anderen Sternen reisen. Nach dem Verlauf einer einstündigen Reise überholen wir den Saturn mit seinem Ring und nach fünf Stunden erreichen wir den letzten Planeten unseres Sonnensystems, den Pluto.
Auf der weiteren Reise gibt es keine interessanten Sehenswürdig- keilen mehr: es vergehen Tage, Wochen, Monate, ein Jahr, zwei und drei Jahre und wir finden nichts vor, nur eine unendliche Leere.
Erst nach dem Verlauf einer vierjährigen Reise würden wir den nächsten Stern erreichen. Die Entfernungen der Sterne sind so groß, dass sich als praktischste Einheit zu ihrer Messung die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt, erwiesen hat.

Diese Einheit bezeichnen wir als "Lichtjahr". Da das Licht in der Stunde $3600 \cdot 300000$ km zurückgelegt, das heißt, über eine Milliarde Kilometer, zählt das Lichtjahr somit ungefähr 9,5 Billionen Kilometer.

Die Entfernungen anderer Sterne liegen zwischen einigen (natürlich mehr als 4) und einigen tausend Lichtjahren. Diese Entfernungen sind jedoch noch gering im Vergleich zu den Entfernungen gewisser Sterngruppen, die Sternhaufen genannt werden.
Diese sind zehntausende von Lichtjahren (der weiteste von ihnen rund 220000 Lichtjahre) von uns entfernt.

"Allein die Zahl 220000 Lichtjahre gibt uns keine Vorstellung von der Entfernung dieser Ster-

nansammlung.
Vergegenwärtigen wir uns lieber, dass das Licht, das wir heute von dieser Sterngruppe empfangen, seine lange Reise ungefähr damals angetreten hat, als der erste Urmensch auf der Erde auftrat.
Über die Zeit der Kindheit, der Jugend und des Alters unzählbarer menschlicher Generationen, über lange vorhistorische Jahrhunderte, der langsamen Entwicklung der Zivilisation und über die ganze Periode der historischen Ereignisse: Aufstieg und Verfall so vieler Reiche und Dynastien - bewegte sich dieses Licht unaufhörlich, ohne Pause und durchquerte 300000 km in jeder Sekunde und erst heute erreicht es uns!" (Nach S. J. Jeans).

Diese Länge in km würde sich annähernd als Produkt aus 220000 und etwas weniger als 10 Billionen km ergeben, das heißt

$$2,2 \cdot 10^5 \cdot 10^{13} = 2,2 \cdot 10^{18}$$

also beträgt sie ungefähr 2 Trillionen km.

Damit sind wir jedoch noch nicht an der Grenze der sichtbaren Welt. Sogar der Andromedanebel ist noch mit bloßem Auge sichtbar und befindet sich in einer Entfernung von 900 000 Lichtjahren.
Der weiteste Nebel, der durch das 100-Zoll-Teleskop auf dem Mount Wilson in Kalifornien (CSA) sichtbar ist, befindet sich - nach Angaben des Astronomen, der an diesem Teleskop arbeitet - in einer Entfernung von ungefähr 140000000 Lichtjahren.
Als das Licht, das uns heute aus diesen Bereichen des Weltalls erreicht, abgestrahlt wurde, existierten die Alpen und das Himalaja-Gebirge noch nicht auf unserer Erde. Das ist die größte Entfernung, die bisher mit dem menschlichen Auge erreicht wurde, während es Galaxien gibt, die $6{,}5 \cdot 10^9$ Lichtjahre von unserem Planeten entfernt sind.

Jetzt verstehen wir vielleicht, warum große Zahlen auch als astronomische Zahlen bezeichnet werden.

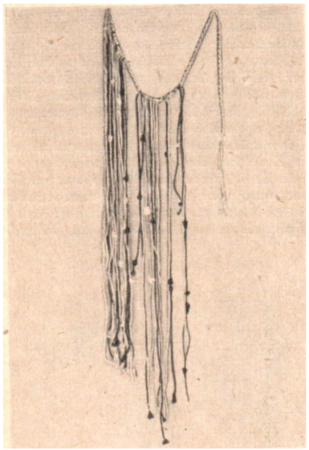
Übungen
41. Berechne annähernd die Entfernung des Pluto von der Sonne auf der Grundlage der Angaben dieses Kapitels.
42. Gib das Lichtjahr in Billionen km an.
43. Berechne die Entfernung des großen Andromeda-Nebels und der entferntesten uns augenblicklich bekannten Nebel (mit einer Genauigkeit von einer Trillion km).

12 Das Zählen in Knoten und Kerben

Als der persische König Darius auf einen seiner Kriegszüge ging, händigte er dem Oberhaupt des zurückgebliebenen Militärs eine Schnur mit 60 Knoten aus und befahl ihm, jeden Tag einen Knoten zu lösen. Er sollte so lange auf ihn warten, bis der letzte Knoten gelöst ist.
Das ist wahrscheinlich die älteste Information, die die Anwendung der Knoten einer Schnur als Zahlen betrifft.

Auch in China wurden Schnüre verwendet, deren Knoten eine spezielle Bedeutung hatten. Die ersten Angaben darüber stammen aus dem 6. Jahrhundert v.Z., aus der Zeit des Lao Tse, (soviel wie alter Meister). Ähnlich wurden in manchen Ländern Südamerikas, vor allem in Peru, Schnurrechner, die sogenannten quipu (gesprochen: kwipu), angewandt.

Es ist bekannt, dass Pizarro[14] viele solcher Knotenschnüre von seiner Reise nach Südamerika mitgebracht hat. Der Ausdruck quipu bedeutet in der Sprache der Inka Knoten.



Peruanische Knotenschnüre (quipu)

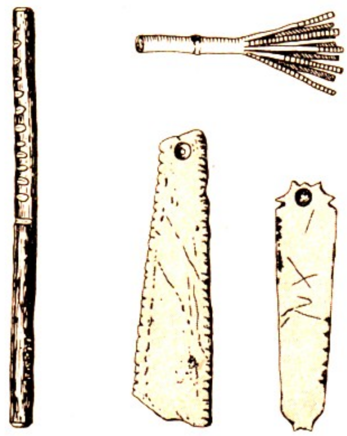
Wie aus Bild 11 ersichtlich ist, bestand ein quipu aus einer Hauptschnur, an der dünne Schnüre, die sich in der Farbe unterschieden, befestigt waren. Die Knoten bedeuteten die Zahlen, am Ende der Schnur ordnete man die Einer an, in einem gewissen Abstand von diesen die Zehner und danach die Hunderter und Tausender.
Diese Quipu wurden unter anderem in den amtlichen Registern für statistische Zwecke wie z.B. zur Angabe der Kriegerzahlen, des Vorrates an Getreide, des Goldgehaltes des Schutzes des Inkareiches usw. angewandt.

Mit Hilfe von Knoten wurden auch früher in Russland Zahlen notiert. Ja, sogar im Deutschland des 20. Jahrhunderts benutze (oder benutzt vielleicht noch heute) man noch Knotenschnüre.

Bis vor wenigen Jahren wurden sie jedenfalls in kleinen Gemeinden im Land Baden-Württemberg vorzugsweise beim "notieren" von Müllerrechnungen gesehen.
Es war sicherlich für die Beteiligten bequemer, sich eine Zählschnur umzuhängen, oder gleich die Sackschnur zu verwenden, als besonderes Schreibzeug mitzuführen, das bei den Verladearbeiten bedeutend unhandlicher gewesen wäre.
Außerdem mag dabei die "Macht der Gewöhnung" eine gewisse Rolle mitgespielt haben. - Übrigens mancher von uns verwendet ebenfalls noch eine Art Merkschnur, in die er Knoten knüpft, um sich an etwas Bestimmtes zu erinnern, nämlich das Taschentuch.

Daran mag man erkennen, wie sich volkstümliche Gebräuche, wenn sie sich auch von ihrer ursprünglichen Bedeutung entfernen, doch über Jahrhunderte fortpflanzen.

Eine andere Möglichkeit Zahlen darzustellen bestand darin, dass man bestimmte Zeichen in Holz einschnitzte. Dazu brauchte man lediglich ein Brettchen oder einen Stab und ein Messer. Ein Ordnungsgesetz konnte man sich selbst gehen, indem man für verschiedene Mengen (z.B. Gegenstände) verschiedene Schnittformen anwandte.
Diese kerbförmigen Schnitte bildeten eine Zählreihe. Derartige "Kerbhölzer" finden sich in allen Kontinenten sowohl nach - als auch lange vor unserer Zeitrechnung, ganz gleich, ob der Urbewohner einer Südseeinsel seine Kokosnüsse zählte, oder in Europa der Kaufmann des Mittelalters seine Forderungen aufkerbte.

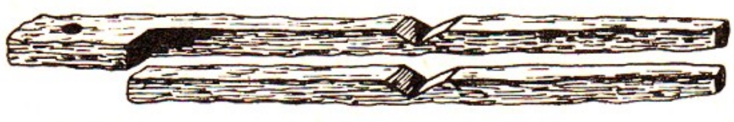


Verschiedene Kerbholzformen

Da die Kerbhölzer als Schuldbelege sogar vor Gericht amtlich anerkannt wurden, war natürlich jedermann darauf bedacht, so wenig wie möglich "auf dem Kerbholz zu haben". Noch heute kennen wir diese Redewendung, deren Ursprung uns nunmehr bekannt ist.
Eine besondere Form von Kerbhölzern wollen wir uns noch ansehen: Es handelt sich zum

[14] Franzisco Pizarro lebte von 1478 bis er 1541 von ehemaligen Freunden ermordet wurde. Er war ein typischer spanischer Konquistador, grausam, brutal und habgierig.

Unterschied zu dem reinen Zählstock um ein zweiteiliges Holz, das genau zusammenpasst. Oft ist es nur ein Holzstück, von dem ein Span abgetrennt ist.
Bei Geschäften zweier Parteien wird der Betrag in beide Hölzer gleichzeitig eingekerbt, indem der Span am Hauptstück anliegt. Danach nimmt sowohl der Gläubiger, als auch der Schuldner ein Teil in Verwahrung.

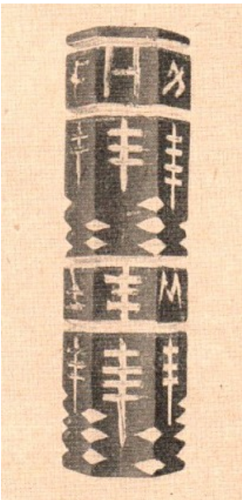


Zweiteiliges Kerbholz

Bei dieser doppelten "Buchführung"ist ein Betrug ausgeschlossen. Wenn die Rechnung bezahlt werden soll, legt man wieder beide Teile zur Kontrolle zusammen und vernichtet sie, nachdem der Betrag beglichen ist.

Einige Kerbformen

Natürlich wurden viele Kerbhölzer nicht nur in ihrer ursprünglichen Form verwendet, sondern je nach dem Geldbeutel des Besitzers mit mehr oder weniger wertvollen Verzierungen versehen. Außerdem benutzte man zunächst nur einfache Kerben, während später die Kerbform entscheidend für den aufgekerbten Betrag war.



Verziertes Alpscheit

Da gab es Kreise, waagerechte und senkrechte Striche, Schrägstriche, Kreuze und andere Zeichen.
Von verschiedenen Wissenschaftlern wird sogar vermutet, dass die römischen Zahlzeichen ihre Form daher haben, dass sie leicht in Holz, Knochen, Stein oder ähnliches Material einzukerben waren. Auf alle Fälle sind die Zeichen auf den Kerbhölzern frühe Zahlzeichen, also Vorläufer für unsere heutige Zahlschrift.

Und auch ihnen begegnen wir noch heute: Leisten und Bretter, die später zusammenzufügen sind, werden vom Zimmermann oder Tischler häufig durch Axtkerben oder Raspelstriche "nummeriert", um Verwechslungen auszuschließen.

13 Das Rechnen mit den Fingern

Von den frühesten Zeiten an benutzte man die Finger zum Rechnen; anfangs zum Bezeichnen der Zahlen von eins bis zehn durch die gleiche Anzahl der Finger, doch diese einfachste Art erwies sich sehr bald als unzureichend. Deshalb erdachte man Möglichkeiten zur Darstellung größerer Zahlen mit Hilfe der Position der Finger.

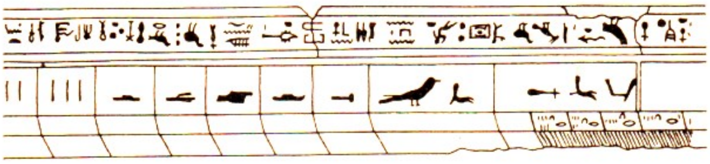


Bild 16: Alte ägyptische Elle

Das Bild 16 zeigt einen Teil des ägyptischen Längenmaßes, das die Bilder der Zahlen von 4 bis 7, die mit Hilfe der Hand dargestellt wurden, enthält; und das Bild 17, obwohl es aus der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts stammt, enthält das System zum Zählen mit den Fingern, das von einem englischen Benediktiner Mönch namens Beda, der im ersten Viertel des 8. Jahrhunderts eine große pädagogische Tätigkeit entwickelte, aufgestellt wurde.

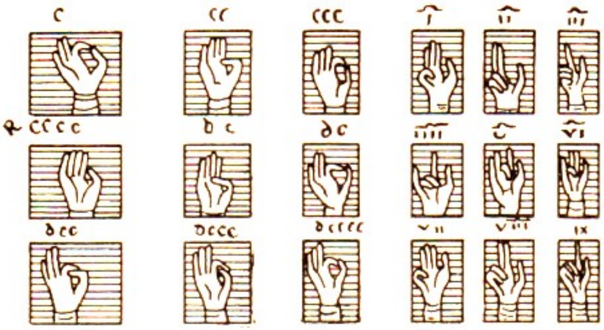


Bild 17: Zahlendarstellung mit Hilfe der Finger, Hände und Arme I

Nicht bei allen Völkern wurden die gleichen Zahlen auf die gleiche Weise dargestellt. So zeigt zum Beispiel Bild 18, das aus dem 13. Jahrhundert stammt (Spanien) und im Byzantinischen Stil ausgeführt ist, die Darstellung der Zahlen 100, 200, ... bis 900, 1000, 2000, ... bis 9000 - mit Hilfe von entsprechenden Stellungen der Handflächen.

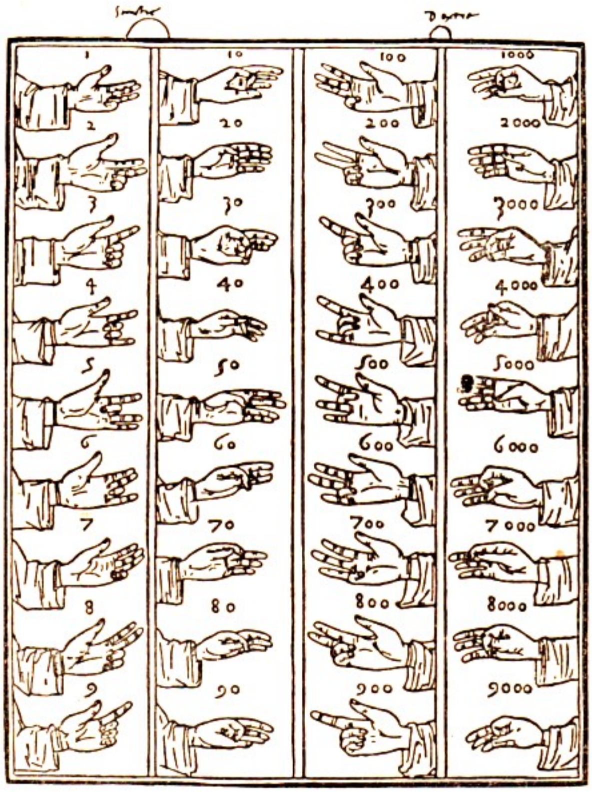
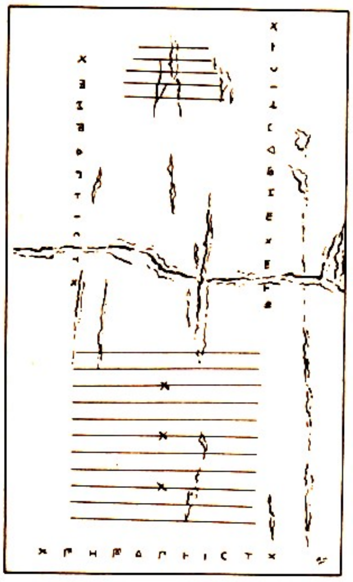



Bild 18,19: Zahlendarstellung mit Hilfe der Finger, Hände und Arme II und III

Das Zählen mit den Fingern war noch bei den Römern sehr verbreitet und überlebte eine ganze Reihe von Jahrhunderten. Noch am Ende des 15. Jahrhunderts finden wir in dem ersten größeren gedruckten mathematischen Werk mit dem Titel "Summa", dessen Autor der Italiener Luca Pacioli[15] war, eine genaue Erklärung über das Rechnen mit den Fingern. Aus diesem Werk stammt auch das Bild 19.

14 Das Rechnen auf dem Abakus

Das älteste Gerät zum Rechnen war, wie wir schon aus Kapitel 7. wissen - ein rechteckiges Brett, das lateinisch abacus oder abac genannt wurde.
Die Erfinder dieser "Maschine" zum Rechnen waren jedoch nicht die Römer. Sie wurde schon früher von den Griechen angewandt, die sie "abaks" nannten, und die Kunst des Rechnens auf diesem Gerät kam wahrscheinlich aus Ägypten, wo "das Rechnen mit Steinchen durch Verschieben von rechts nach links mit der Hand - wie der griechische Historiker Herodot (5. Jahrhundert v.Z.) berichtete - sehr verbreitet war.



Die Salaminische Rechentafel

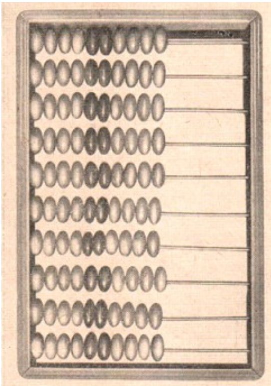
Im Gegensatz zu den Ägyptern haben die Helenen "die Hand von links nach rechts geführt". Das älteste erhaltene Gerät zum Rechnen dieser Art ist eine weiße Marmortafel, die in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts auf der Insel Salamis) ausgegraben wurde (Bild 20); es ist jedoch nicht genau bekannt, aus welchem Zeitabschnitt diese stammt.
Das Rechnen mit dem Abakus war sehr weit verbreitet und hat sich in verschiedenen Formen und Arten bis zur heutigen Zeit erhalten. Die aufgeführten Bilder zeigen verschiedene Formen von Abaks aus dem frühesten Zeiten, aus dem Mittelalter und aus der jetzigen Zeit.
In verschiedenen Ländern existieren Geräte, die auf den angegebenen Grundlagen basieren. Zum Beispiel in Japan: Soroban; in China: Swanpan; in Russland: Stschoty; in Polen: Liczydla usw. Sie entstanden in verschiedenen Perioden.

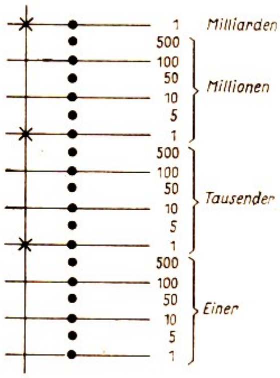
Unsere Eltern und Großeltern haben noch mit Hilfe eines kleinen Rechenbrettes in der Schule das Rechnen erlernt, und wir wissen, dass es in Deutschland vor allem Adam Ries war, der vor über 400 Jahren den Nachweis der Überlegenheit des schriftlichen Rechnens gegenüber dem "Rechnen auf Linien" erbrachte.
Dabei mag das Rechenbrett durchaus seine Vorteile haben, denn im Taschenformat kann man es zu jeder Zeit als anschauliches Hilfsmittel hervorholen. Und wer schon einmal die Sowjetunion bereiste, wird wissen, wie schnell und sicher teilweise noch heute der Kellner im Speisewagen oder der Schalterbeamte bei der Post mit seiner "Taschenstschoty" die Beträge ermittelt, ohne sich zu verrechnen.

Der Nachteil besteht eben darin, dass man mit ihr nur die einfachsten Rechenoperationen durchführen kann und bei komplizierteren Aufgaben oder beim Vorkommen großer Zahlen

[15] Luca Pacioli, auch Pacinolo, lebte etwa von 1445 bis 1514 und unterrichtete in verschiedenen Orten Italiens Mathematik.

doch das schriftliche Rechnen anwenden muss, das seinerseits den großen Vorteil nahezu unbegrenzter Erweiterungsfähigkeit hat.





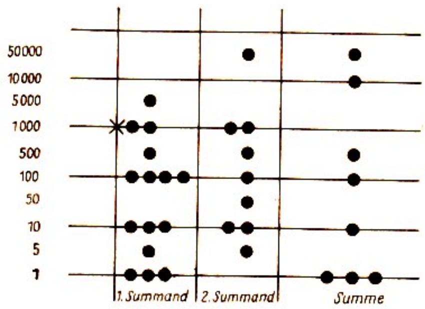
Russische Stschoty und Schema eines Abakus

Das Bild 22 zeigt die Bedeutung der einzelnen Linien auf dem Abakus sehr genau.
Zur leichteren Orientierung kennzeichnete man die Linien mit Kreuzen, die den Tausendern, den tausend Tausendern also den Millionen und den tausend Millionen also den Milliarden entsprachen. Wir gehen jetzt zur Beschreibung der Rechenmethoden über.

Das Addieren auf dem Abakus

Als Beispiel wollen wir 7938 + 52675 rechnen.
Wir legen die Steinchen, die den Summanden 7938 und 52675 entsprechen, in zwei Kolonnen auf den Abakus.
Die gesuchte Summe platzieren wir in der dritten Kolonne. Wir beginnen das Addieren mit den Einern, das heißt, wir bewegen uns von der ersten Linie an nach oben. Da auf der ersten Linie nur 3 Einer (Steinchen) sind, rücken wir diese nach rechts und platzieren sie in der Kolonne der Summe.

Zwei Steinchen über der ersten Linie bedeuten 5 und 5, also ein Steinchen (10 Einer) der zweiten Linie. Deshalb schieben wir das eine Steinchen auf die zweite Linie in eine beliebige Kolonne der Summanden, z.B. in die zweite Kolonne, und das zweite Steinchen werfen wir in eine Schachtel. Auf diese Weise haben wir auf der zweiten Linie sechs Steinchen erhalten (60 Einer = 10 Einer + 50 Einer).



Darstellung einer Addition auf dem Abakus

Ein Steinchen lassen wir auf der zweiten Linie, das ist die Linie der Zehner in der Kolonne der Summe, das zweite (50) rücken wir über die zweite Linie des Summanden, da sich dort bereits ein Steinchen befindet, haben wir zwei Steinchen über der zweiten Linie; wir wissen bereits, dass zwei Steinchen über einer beliebigen Linie den gleichen Wert haben wie ein Steinchen auf der nächsthöheren Linie.

Wir werfen also wieder ein Steinchen in die Schachtel und das zweite platzieren wir auf der dritten Linie, so dass wir auf der dritten Linie sechs Steinchen erhalten, also die Zahl 600.

Wir legen vier übrige Steinchen zur Seite, ein Steinchen, das ist 100, legen wir auf die dritte Linie in die Kolonne der Summe, das zweite (500) wiederum über die dritte Linie in die Kolonne eines Summanden. Da wir dort schon zwei Steinchen haben, rücken wir ein Steinchen (500) über die dritte Linie in die Kolonne der Summe, eines rücken wir auf die vierte Linie der Summanden (er bedeutet 1000) und das dritte legen wir beiseite.

Da wir auf der vierten Linie fünf Steinchen erhalten haben (je 1000) legen wir vier beiseite und ein Steinchen (5000) rücken wir über die vierte Linie der Summanden. Da dort bereits ein Steinchen vorhanden ist, legen wir eines beiseite und, da wir keine Steinchen auf der fünften Linie haben, platzieren wir auf dieser Linie ein Steinchen (10000) in der Kolonne der Summe. Danach rücken wir ein Steinchen, das sich über der fünften Linie befindet (50000), auf der gleichen Höhe in die Kolonne der Summe. Wir lesen die Summe:

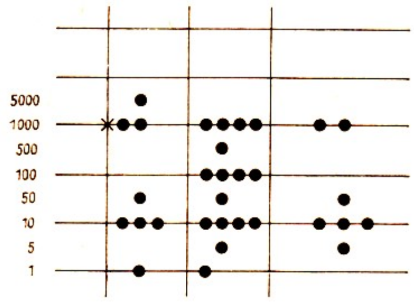
50000 und 10000, also insgesamt 60000, darunter 500 und 100, also 600, schließlich 10 und 3, also 13. Ergebnis: 60613.

Man kann natürlich auch auf ähnliche Weise mehrere Summanden addieren, wobei die Steinchen in mehreren Kolonnen der Summanden angeordnet werden.

Das Subtrahieren auf dem Abakus

Das Subtrahieren auf dem Abakus ist deshalb interessant, weil es im allgemeinen in der entgegengesetzten Richtung ausgeführt wurde, also von oben nach unten, das heißt, es wurde mit den Einheiten des höchsten Grades begonnen.

Es soll die Zahl 4996 von der Zahl 7081 abgezogen werden.
Der Minuend wird auf dem Abakus in der ersten Kolonne platziert, der Subtrahend in der zweiten und die erhaltene Differenz in der dritten Kolonne.



Darstellung einer Subtraktion auf dem Abakus

Das Subtrahieren beginnen wir mit der Einheit des höchsten Grades. Da ein Steinchen über der vierten Linie des Minuenden den Wert von fünf Steinchen der vierten Linie hat, nehmen wir das Steinchen über der vierten Linie des Minuenden weg. Nach dem Abziehen von vier Steinchen von der vierten Linie des Minuenden verbleibt ein Steinchen auf der vierten Linie des Minuenden.
Damit haben wir die Subtraktion 5000 - 4000 = 1000 ausgeführt.

Nun wird ein Steinchen der vierten Linie des Minuenden über die dritte Linie vom Minuenden gerückt, wobei das Steinchen, das sich über der dritten Linie des Subtrahenden befindet, weggelegt wird.
Wir haben die Subtraktion 1000 - 500 = 500 durchgeführt.

Da die Subtraktion der Steinchen auf der vierten Linie beendet ist, werden die zwei übrigen Steinchen von der vierten Linie des Minuenden auf die vierte Linie der Differenz überführt.
Jetzt rücken wir ein Steinchen, das sich über der dritten Linie des Minuenden befindet, auf die dritte Linie, gleichzeitig werden die vier Steinchen von der dritten Linie des Subtrahenden weggelegt.
Das Steinchen über der zweiten Linie des Minuenden und das Steinchen über der zweiten Linie des Subtrahenden heben sich gegenseitig auf und werden beiseite gelegt.

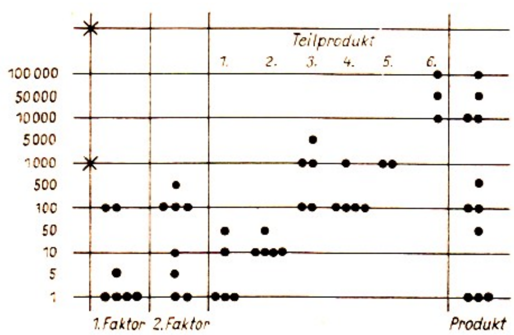
Ein Steinchen aus der dritten Linie des Minuenden rücken wir über die zweite Linie des Minuenden, wobei vier Steinchen aus der zweiten Linie des Subtrahenden entfernt werden und gleichzeitig ein Steinchen auf die zweite Linie des Minuenden gelegt wird.
Auf diese Weise haben wir die Subtraktion 100 - 40 = 60 ausgeführt.

Danach wird ein Steinchen von der zweiten Linie des Minuenden über die erste Linie des Minuenden gebracht, wobei gleichzeitig das Steinchen über der ersten Linie des Subtrahenden entfernt wird.
Da wir die Subtraktion über und auf der zweiten Linie beendet haben, rücken wir ein Steinchen, das sich über der zweiten Linie befindet, in die Kolonne der Differenz und drei Steinchen in die zweite Linie der Kolonne der Differenz.

Nun stellen wir fest, dass über der ersten Linie des Subtrahenden keine Steinchen vorhanden sind und die Zahl der Steinchen auf der ersten Linie in der Kolonne des Minuenden und des Subtrahenden übereinstimmen. Wir rücken also ein Steinchen über die erste Linie der Differenz und legen alle Steinchen der ersten Linie beiseite.
Wir lesen als Ergebnis: 2085.

Das Multiplizieren auf dem Abakus

Zum Schluss erklären wir noch die Multiplikation auf dem Abakus, die wir in ähnlicher Weise wie die Addition von unten nach oben durchführen, wobei wir uns außer der Steinchen noch eines Fingers der linken Hand bedienen.
Wenn wir z.B. die Multiplikation 209 · 817 ausführen sollen, stellen wir auf dem Abakus den ersten Faktor 209 in die erste Kolonne, den zweiten Faktor 817 in die zweite, die dritte bedeutend breitere Kolonne benutzen wir für die erhaltenen Teilprodukte, schließlich die vierte Kolonne für das Endergebnis der Multiplikation, das Produkt.



Darstellung der Multiplikation Subtraktion auf dem Abakus

Wir berühren mit dem Finger die erste Linie des Multiplikanden, auf welcher sich vier Steinchen befinden, über ihr ist 1 Steinchen, das 5 bedeutet. Wir beginnen die Multiplikation mit der 9. Da auf der ersten Linie und über ihr in der Kolonne des Multiplikators die Zahl der Einer gleich 7 ist, ergibt sich 9 · 7 = 63. Das erhaltene Teilprodukt 63 platzieren wir entsprechend in der breiteren Kolonne der Teilprodukte. Danach multiplizieren wir $9 \cdot 1$, da sich auf der zweiten Multiplikationslinie ein Steinchen befindet. Das erhaltene zweite Teilprodukt 9 ordnen wir in der Kolonne der Teilprodukte an.

Unter Beibehaltung der Berührung der ersten Linie des Multiplikanden führen wir die Multiplikation $9 \cdot 8 = 72$ aus, da sich auf der dritten Multiplikationslinie und über ihr vier Steinchen befinden, die $300 + 500 = 800$ bedeuten. Das Teilprodukt 72 ordnen wir in der Kolonne der Teilprodukte an.

Damit haben wir die Multiplikation mit den Einern beendet und können den Finger auf die zweite Linie des Multiplikanden, das ist die Linie der Zehner, setzen. Da sie keine Steinchen enthält, setzen wir den Finger auf die Linie der Hunderter, auf der sich zwei Steinchen befinden und beginnen die Multiplikation mit der 2 (zwei Hunderten).
Das erste Teilprodukt $2 \cdot 7$ überführen wir in die dritte Kolonne als viertes Teilprodukt.

Danach multiplizieren wir $2 \cdot 1$, da der Multiplikator einen Zehner enthält. Das erhaltene Produkt 2 überführen wir in die Kolonne der Teilprodukte auf die Linie der Tausenden als fünftes in der Reihe.

Nun bleibt noch die Multiplikation $2 \cdot 8$, da sich auf der dritten Multiplikationslinie drei Steinchen und über ihr ein Steinchen befinden.
Das Teilprodukt 16 überführen wir in die Hilfskolonne als letztes - sechstes - Teilprodukt auf die Linie der Zehntausender.
Jetzt entfernen wir den Finger von der Linie der Hunderter, addieren die Teilprodukte, wobei wir darauf achten müssen, dass das Verschieben der Steinchen auf der ersten unteren Linie begonnen werden muss, wenn sich dort welche befinden.

Das Ergebnis überführen wir in die vierte Kolonne es lautet: 170753.

15 Der Rechenstab

Seit langem sind Rechengeräte bekannt, deren Bau und Anwendung auf dem Zehnersystem beruht. Sie dienen zur Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen und geben vollkommen exakte Ergebnisse an. In vielen Fällen genügen schon Näherungswerte, dann wird meist der Rechenstab benutzt. Mit ihm kann man ganze Zahlen und Brüche multiplizieren, dividieren, potenzieren und radizieren.
Rechenstäbe sind meist aus Holz[16] gefertigt und haben eine Länge von 250 mm, 125 mm oder $83\frac{1}{3}$; die Kleinausgaben werden oft von den Technikern in der oberen Tasche des Kittels getragen, damit sie zu jeder Zeit für schnelle Berechnungen mit einer Genauigkeit von drei Stellen benutzt werden können.

Der Aufbau des Rechenstabes beruht auf dem Addieren und Subtrahieren von Strecken sowie auf dem Begriff der Zehnerpotenzen.

Den Exponenten der Potenz zehn bezeichnen wir als Logarithmus der entsprechenden Zahl zur Basis 10. Zum Beispiel: $10^2 = 100$ bedeutet, 2 ist der Logarithmus der Zahl 100 zur Basis 10. Ein anderes Beispiel $10^{0,48} \approx 3{,}02$, bedeutet 0,48 ist annähernd gleich dem dekadischen Logarithmus der Zahl 3,02. Die Zahl 2,94 ist der dekadische Logarithmus der Zahl 870, da $10^{2,94} \approx 870$ ist.

[16] In Japan benutzt man vorwiegend sehr gute Rechenstäbe aus Bambusholz.

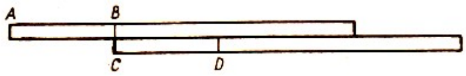


Bild 26

Zum Bau eines Rechenstabes nehmen wir zwei Leisten, die an den Rändern so miteinander verbunden sind, dass die eine in die ausgesparte Rinne der anderen hineingeschoben werden kann und darin leicht verschiebbar ist.
Wenn die Länge der Strecken $AB = a$ mm, $CD = b$ mm (Bild 26) ist, dann ist $AD = AB + CD = (a + b)$ mm.
Wenn wir die untere Leiste so stellen, dass sich der Punkt D mit dem Punkt B deckt (Bild 27), erhalten wir die Strecke $AC = AB - CD = (a - b)$ mm.

Aus den Beziehungen $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ und $10^a : 10^b = 10^{a-b}$ folgt, dass wir bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis die Exponenten der Potenzen addieren und bei der Division die Exponenten subtrahieren. Wir nutzen also die Tatsache aus, dass wir die Multiplikation auf die Addition und die Division auf die Subtraktion zurückführen können.

Bild 27

Um mit den Exponenten (der Zahl 10) operieren zu können, wurde an beiden Leisten eine entsprechende Skale in Form von Strichen angebracht. Jedem dieser Striche entspricht ein bestimmter Exponent zur Basis 10.

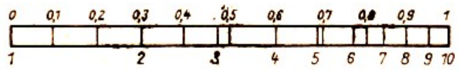


Bild 28

Auf diese Weise sind auf jeder Leiste, von dem Strich an, den wir als Anfang der Skale bestimmt haben, Strecken abgemessen, deren Länge den Exponenten der Zahl 10 entsprechen (siehe obere Skale auf Bild 28, die auf dem Rechenstab nicht angegeben ist).
Angeschrieben sind die Zahlen der Potenz (siehe untere Skale auf Bild 28). Wir erklären die Multiplikation an einem einfachen Beispiel:

Wir wollen das Produkt 2,5 · 3 berechnen. Dazu schieben wir die obere bewegliche Leiste, die Zunge genannt wird, so, dass der Anfang der Skale der Zunge über die Zahl 2,5 der unteren Leiste kommt (Bild 29).
Dann befindet sich der Strich der Zunge, der der Zahl 3 entspricht, über dem Strich der unteren Leiste, der dem gesuchten Produkt 7,5 entspricht.
Da gilt:

$$10^a = 2,5, \qquad 10^b = 3, \qquad 10^{a+b} = 2,5 \cdot 3$$

ist die Länge der Strecke der oberen Skale, gerechnet vom Anfang bis zum erhaltenen Strich, gleich $a + b$ (das ist der dekadische Logarithmus des Produktes der Zahlen 2,58) und, da auf der Skale die Zahlen aufgeschrieben sind, die den abgemessenen Logarithmen entsprechen, lesen wir auf der unteren Leiste das Ergebnis 7,5 ab.

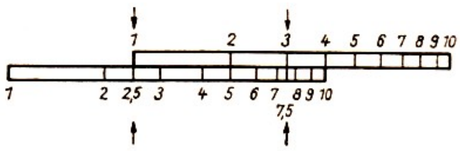


Bild 29

Dank der Skalen auf den Leisten operieren wir mit den Exponenten der Potenzen ohne sie berechnen zu müssen und ohne sie zu kennen; die ganze Technik beruht ausschließlich auf dem Verschieben der Zunge und dem Ablesen des Ergebnisses.

Da das Teilen die Umkehrung der Multiplikation ist, wird die Zunge in der entgegengesetzten Richtung verschoben.
Wir sollen z.B. 70 : 3,5 rechnen. Zu diesem Zweck wird der Strich der Zunge, der der Zahl 3,5 entspricht, über den Strich der unteren Leiste, der der Zahl 7 entspricht (Bild 30), gestellt. Der Strich auf der unteren Leiste, der dem Anfang der Zunge entspricht, gibt uns die Ziffer, die 2 bedeutet und das Ergebnis der Teilung ist, an. Der Quotient ist natürlich 20. Das ist ganz einfach die Differenz der Streckenlängen.

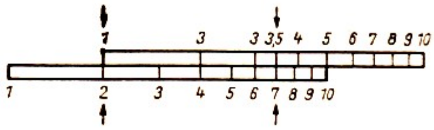


Bild 30

Daraus geht hervor, dass hier das "Ablesen der Strecken" sehr wichtig ist, die Technik ist einfach und der Nutzen bei der Bedienung des Rechenstabes groß.

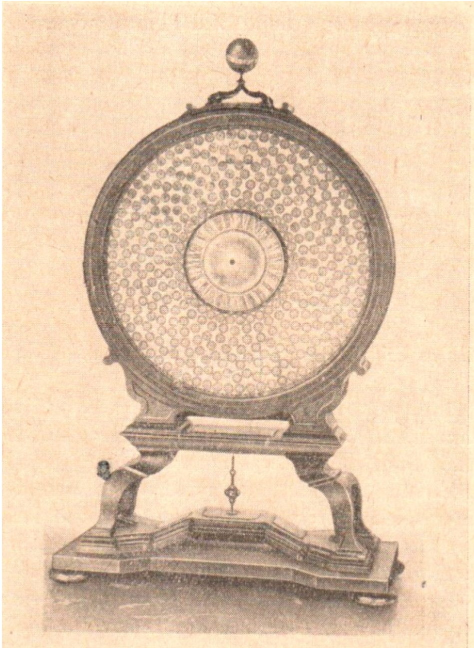
Natürlich müssen die Rechenstäbe, die nicht nur zur Berechnung von Produkten und Quotienten, sondern auch von Potenzen, Wurzeln, Logarithmen dienen auch eine entsprechende Anzahl von Skalen haben. Für spezielle Berechnungen existieren Rechenstäbe mit einer Länge bis zu einem Meter.

In der DDR werden Rechenstäbe aus Holz, Metall oder Kunststoff hergestellt. Der VEB Reiss exportiert neben seinen bekannten Zeichenmaschinen auch einen großen Teil, der dort gefertigten Rechenstäbe.
Längst ist die Rechenfertigkeit derjenigen, die sich ständig eines Rechenstabes bedienen, so weit gewachsen, dass mit seiner Hilfe ganze Tabellen leicht und schnell aufgestellt werden, Gleichungssysteme werden gelöst und trigonometrische Aufgaben berechnet.

Selbstverständlich wurden die Stäbe selbst auch immer mehr vervollständigt. Heute findet man neben den Grundskalen noch Reziprokskalen, π-versetzte Skalen usw., (so hat der Stab des Systems "Darmstadt-Record" z.B. neben der cm-Skale noch 22 Skalen auf seiner Vorder- und Rückseite) ganz abgesehen von Rechenstäben, die für spezielle Berechnungen mit speziellen Skalen versehen sind.
Trotzdem aber ist der grundsätzliche Aufbau seit über 300 Jahren so geblieben, wie ihn William Oughtred, ein englischer Landpfarrer, 1621 mit Hilfe zweier verschiebbarer logarithmischer Skalen entwickelte.

16 Maschinen zum Rechnen

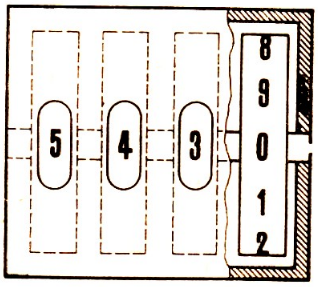
Die am meisten verbreitete "Maschine" zum Zählen ist die Uhr, die die Zeit, die vergangen ist, misst. Nehmen wir für die Betrachtung eine Uhr mit Sekundenzeiger. Nach einer vollen Umdrehung des Sekundenzeigers rückt der Zeiger für die Minuten um eine Minute weiter, d.h. um $\frac{1}{60}$ der vollen Umdrehung.
Wenn wiederum der Zeiger für die Minuten eine volle Umdrehung ausführt, dreht sich der Zeiger für die Stunden um $\frac{1}{12}$ der vollen Umdrehung. Solch eine Uhr enthält also ein System von 3 Rädern (je ein Rad für die Sekunden, Minuten und Stunden), die voneinander in der beschriebenen Weise abhängig sind.



Die "Weltzeituhr" von Baldewein und Bucher

Modernere Uhren liefern heute neben diesen Angaben auch noch die Tages- und Monatsangabe. Abbildung 32 zeigt eine berühmte Uhr aus dem 17. Jahrhundert, die sich im Mathematisch-Physikalischen Salon in Dresden befindet, sie ist so konstruiert, dass auf 360 kleinen Zifferblättern die jeweilige Ortszeit großer Städte der Erde im Vergleich zu Dresden abgelesen werden kann.

Die Maschine zum Zählen beruht auf einem ähnlichen Prinzip, das heißt, auf der Benutzung einer Reihe von Bädern, deren Bewegungen voneinander abhängig sind; der Unterschied besteht darin, dass beim Zählen das Zehnersystem angewandt wird, das nicht zum Messen der Zeit dient. Auf diesem Prinzip basiert z.B. der elektrische Zähler, in dem die Räder walzenförmig und auf einer Achse angebracht sind (Bild 33).



Schema eines elektrischen Zählers

Die mechanische Schwierigkeit beruht auf der Abstimmung der Räder derart, dass nach der vollen Umdrehung des Rades, das die Einer misst (alle Räder sind auf dem Umfang in gleichen Abständen der Reihe nach von 0, 1, 2, ..., 9 gekennzeichnet), die Drehung des Rades für die Zehner gleich 0,1 der vollen Umdrehung beträgt, das heißt, dass die Zahl der Zehner um 1 erhöht wird.

Wenn zum Beispiel die Zahl der Einer (m^3 Gas, Kilowattstunden usw.) im Zähler oder auf der Maschine zum Zählen 9 beträgt und eine Addition von 3 Einem erfolgt, so erscheint auf der Tafel nach der Umdrehung des Rades für die Einer die Ziffer 2.

Das Rad für die Zehner müsste sich gleichzeitig um 1 ($9 + 3 = 1 \cdot 10 + 2$) drehen. Zur Überwindung dieser Schwierigkeit kann man ein Vermittlungsradsystem entsprechend Bild 34 anwenden.

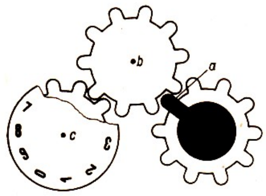


Bild 34. Das Prinzip des Vermittlungsradsystems (schematisch)

Eines der Zähne vom Rad der Einer (auf dem Bild schwarz und mit a gekennzeichnet) befindet sich nicht in der gleichen Ebene wie die anderen Zähne; es ist etwas nach oben gebogen.
Wenn zehn Einer überschritten werden, dass heißt, wenn sich der schwarze Zahn in einer solchen Stellung, wie auf dem Bild befindet, dann verschiebt er das Verbindungsrad b, dessen Zähne sich alle in der Ebene des schwarzen Zahnes befinden, also höher als der Ebene des Bildes der Einer.
Das Verbindungsrad b, das sich um einen Zahn dreht, verschiebt gleichzeitig das Rad c für die Zehner um einen Zahn - also um eine Ziffer - weiter. Auf diese Weise wird diese Schwierigkeit überwunden.

Die Rechenmaschinen sind natürlich sehr komplizierte Geräte und es sind viele Jahre vergangen. bevor sie die heutige Vollkommenheit erreicht haben.

Eine der ersten Maschinen. eine 2-Spezies-Maschine, wurde von Blaise Pascal entwickelt und 1641 gebaut. Diese Sprossenradmaschine (Bild 35) nannte er "Pascaline".

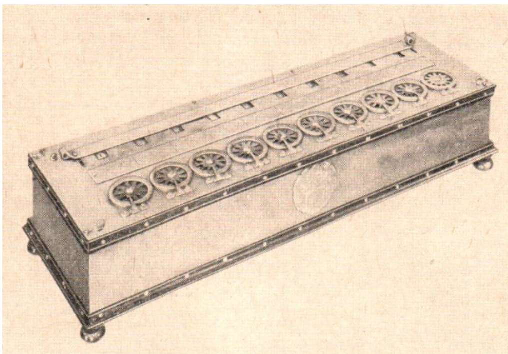


Bild 35. Die von Blaise Pascal gebaute Rechenmaschine

Sie sollte seinem Vater Etienne, der als königlicher Rat die Steuern einzutreiben hatte, die dazu nötigen Berechnungen erleichtern. Insgesamt baute er acht solche Maschinen.
Die einzige,die sich heute außerhalb Frankreichs befindet, kann im Mathematisch-Physikalischen Salon des Dresdener Zwingers besichtigt werden.

Allerdings lieferten diese Maschinen noch keinesfalls genaue Ergebnisse, ebenso wie die von Gottfried Wilhelm Leibniz erfundene, die von ihm 1673 in London vor der Royal Society vorgeführt wurde und ihm die Mitgliedschaft der englischen Akademie der Wissenschaften eintrug.

Dabei hatte Leibniz an seine 4-Spezies-Maschine[17] bereits eine besondere Kurbel angebaut, mit deren Hilfe alle Zahlenräder in Bewegung gebracht werden konnten, auf denen sich auf Grund einer Rechenoperation die Zahlen änderten.

[17] Also eine Maschine, die vier Rechenoperationen ausführen kann. Sie wurde ab 1820 fabrikmäßig hergestellt.

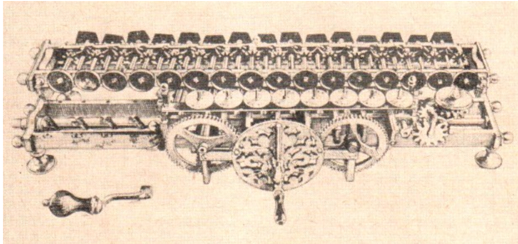


Bild 36. Die Maschine von G.W. Leibniz

Beiden Maschinen mangelte es an Präzisionsteilen, die mit dem damals bekannten Material und den mangelhaften Werkzeugen noch nicht hergestellt werden konnten.

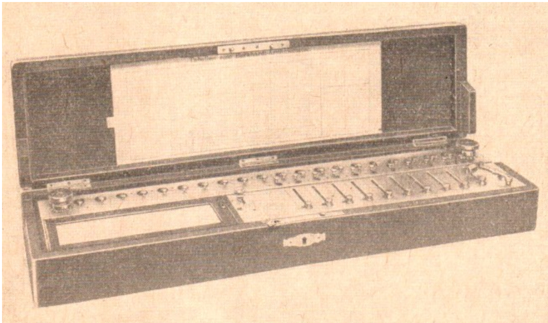


Bild 37. Das Arithmometer von Burkhardt

Auch die für derartig komplizierte Geräte nötigen theoretischen Kenntnisse bildeten sich erst in den folgenden Jahrzehnten heraus. So findet Desargues die einwandfrei funktionierende Zykloidenverzahnung und Leibniz den Staffelwalzenmechanismus, um nur zwei Dinge zu nennen.

Die Zeit der ersten Industrialisierung erfüllte einerseits zum Teil diese Bedingungen und forderte andererseits neue Maschinen, mit denen man sicherer und schneller Ergebnisse erhalten konnte. So entstanden eine Reihe von Verbesserungen, die in der ersten fabrikmäßig hergestellten Maschine in Colmar auf der Grundlage der Leibnizschen Konstruktion berücksichtigt wurden.

Bekannt sind die Maschinen von der Firma Burkhardt oder Brunsvig nach deren Prinzip noch heute solche Maschinen gebaut werden.

Bild 38. Tischrechenmaschine "Supermetall" Modell KEL II c RS

Die neuzeitlichen Rechenmaschinen lassen sich grob entsprechend ihrer Anwendung in zwei Kategorien einteilen.

Eine Maschinenart dient im Prinzip zum Addieren: Auf einer Papierrolle schreibt sie die Zahlen in einer Kolonne und nach dem Drücken des entsprechenden Knöpfchens berechnet sie die Summe. So arbeiten z.B. die italienischen Additionsgeräte von Olivietti und Totalia.

Die zweite Art ist eine vielseitigere Kalkulationsmaschine; sie führt alle Operationen der ersten Art und außerdem das Multiplizieren und Dividieren mehrziffriger Zahlen bis zu 17 Ziffern aus! Maschinen dieser Art können mit der Hand wie z.B. die. Arithmometer von Brunsvig oder elektrisch (mit Werten bis zu 13 bzw. 17 Ziffern) angetrieben werden.

Bei der Maschine (Bild 38) lenken wir die Aufmerksamkeit auf die breite Tastatur, in der die zwei rechten Randkolonnen (beide schwarz) z.B. bei Geldrechnungen die Pfennige notieren, die folgenden drei Kolonnen (weiß) - nach links - notieren die Einer, Zehner und Hunderter der Mark, die folgenden drei (schwarz) - die Tausender, Zehntausender und Hunderttausender, und die letzte linke Randkolonne (weiß) notiert die Millionen Mark.

Auf der rechten Seite unten befinden sich die Tasten mit den Operationszeichen für die Subtraktion, Addition und Division. Die Multiplikation wird bei diesem Typ durch fortgesetzte Addition ausgeführt und durch ein Umdrehungszählwerk kontrolliert.

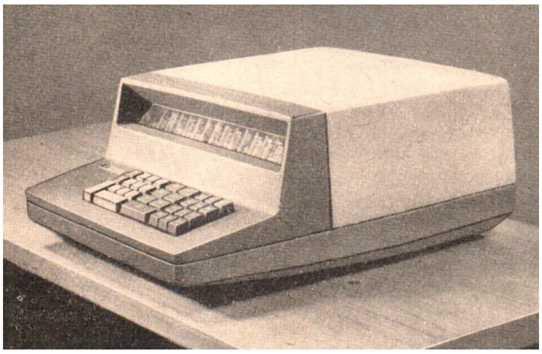


Bild 39. Elektronischer Tischrechner "Soemtron 221"

Diese Entwicklung führt hin bis zu den modernsten Fakturierautomaten des Typs "Soemtron", die in dem weltbekannten VEB Büromaschinenwerke Sömmerda hergestellt werden. Sie leisten bei großer Geräuscharmut das Beste an Schnelligkeit.
Mit ihnen können neben umfangreichen Additions- und Subtraktionsproblemen auch kompliziertere Buchungs- und Planungsaufgaben, die in einem Betrieb anfallen, schnell und zuverlässig gelöst werden. Die volltransistorisierten Rechen- und Speicherwerke besitzen keine mechanischen- oder relaisgesteuerten Elemente mehr (Bild 39).

17 Relais- und Röhrenrechner

Mit dem Beginn der Elektromechanik werden die Maschinen gegen Ende des 19. Jahrhunderts so konstruiert, dass einen immer größeren Teil der bisher mit der Hand ausgeführten Tätigkeiten nunmehr der elektrische Strom verrichtet.
Nicht nur, dass elektromagnetische Relais und später Elektronenröhren, Transistoren und Magnetkerne an die Stelle der mechanischen Bauteile rücken; auch bei den Vorbereitungsarbeiten leistet die Elektrizität vortreffliche Dienste, indem eine Art Rechenvorschrift (Programm) in Form von Lochkarten oder Lochbändern (sog. Datenträgern) vorher vorbereitet und in die Maschinen eingegeben und elektrisch "abgegriffen" wird.

Das erste Mal werden Lochkartenmaschinen im Jahre 1890 in Österreich und in den Vereinigten Staaten anlässlich von Volkszählungen verwendet. Bei der weiteren Entwicklung haben

sich in Deutschland vor allem Hamann (er baute 1905 die erste vollautomatische Vierspezies-Maschine Mercedes Euklid) und Tauschek (Rheinmetall) Verdienste erworben.
Der Fähigste aber war der Ingenieur Zuse, der bereits 1934 mit dem Bau programmgesteuerter Rechenmaschinen auf der Grundlage des dualen Zahlensystems begonnen hat und seine Maschinen, angefangen vom Typ Z 1, immer besser entwickelte.

Noch während des Krieges, im Jahre 1944 entstand in Amerika der ENIAC (Elektronic Numerical Integrator and Computer), der 1946 fertig wurde; er enthielt ungefähr 500000 Teile (davon etwa 19000 Elektronenröhren, und 70000 Widerstände) und nahm einen Raum von mehreren Zimmern ein: der Bedarf an Energie betrug ungefähr 150 kW.

Die Entwicklung der heutigen Technik erfolgt sehr schnell, deshalb enthielt bereits der nächste Typ (EDVAC) nur noch ungefähr 3000 Röhren und war bequemer hinsichtlich der Bedienung.
Die Zeit für die Ausführung einer einzelnen Operation, zum Beispiel für die Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen in den elektronischen Rechenmaschinen, betrug 1944 ungefähr 5 Sekunden, bereits 10 Jahre später verringerte sie sich auf den 150000sten Teil und beträgt heute erneut nur noch einen Bruchteil davon.

Es ist selbstverständlich, dass die Benutzung dieser Maschinen eine gute Arbeitsorganisation erfordert, die man mit der Organisation von Rechenbüros vergleichen kann.
Die Rechenbüros besitzen ein spezielles Personal, zu dem einige oder mehrere Rechner gehören, die die Berechnungen auf mechanischen- und elektromechanischen Rechenmaschinen ausführen (z.B. Arithmometer, Additionsmaschinen). Die Organisation eines solchen Rechenbüros beruht darauf, dass jeder Rechner genaue Anweisungen erhält, welche Rechenoperationen mit welchen Zahlen und in welcher Reihenfolge auszuführen sind; danach werden die nummerischen Ergebnisse einiger Rechner anderen übergeben, die nach Beendigung der ersten Etappe der eigenen Berechnungen diese für die weiteren Berechnungen benutzen.
Man muss natürlich auch darauf achten, dass die einzelnen Hilfsrechnungen zur richtigen Zeit ausgeführt werden, um unnötige Verzögerungen in der weiteren Arbeit zu vermeiden.

Die Tätigkeit der elektronischen Rechenmaschine ist der beschriebenen Arbeitsweise des Rechenbüros vollkommen analog. Sehr viel Zeit wird für das "Verteilen der Aufgaben an die Rechner" benötigt, das heißt, für die Einstellung (Programmierung) der einzelnen Teile der Maschine zur Ausführung der ihnen aufgegebenen Berechnungen.

Deshalb ist das eine schwierige und verantwortungsvolle Arbeit, von der einer der hervorragendsten Schöpfer von elektronischen Rechenmaschinen J.v. Neumann sagte, dass "die Festlegung eines Arbeitsprogrammes für eine solche Rechenmaschine gleichwertig ist mit dem Aufschreiben der einzelnen Anweisungen für zwanzig Rechner, die mit mechanischen Rechenmaschinen arbeiten, und dies für die Beschäftigung dieser Rechner für zwei Jahre bei vierzigstündiger Arbeitswoche."

Die genaue Beschreibung der Arbeitsweise der elektronischen Rechenmaschinen überschreitet bedeutend das Niveau dieses Buches, deshalb beschränken wir uns auf die Erklärung einiger charakteristischen Merkmale. Es entsteht die Frage, ob die Rechenoperationen unter Benutzung der Zahlen des Zehnersystems ausgeführt werden.

Im allgemeinen nicht; die Erklärung ist einfach: durch eine Elektronenröhre kann der Strom fließen oder auch nicht, es bestehen also nur zwei Möglichkeiten. Dem Durchfließen des Stromes durch die Elektronenröhre ordnen wir die Ziffer 1 zu, und dem Fehlen des Durchflusses die 0.

Jede Zahl des Zehnersystems wird also vorher in das Zweiersystem überführt. Dies führt, wie wir aus Kapitel 3 wissen, zu einer bedeutenden Erhöhung der Anzahl der Ziffern.
So zum Beispiel:

$$2^{20} = 1048576 = (100000000000000000000)_2$$

Daraus ersehen wir, dass zur Einstellung nur dieser Zahl bereits über 20 Röhren benötigt werden, wir führen aber oft Berechnungen mit viel größeren Zahlen aus. Aus dieser Tatsache erklärt sich die große Anzahl an Elektronenröhren in den elektronischen Rechenmaschinen, die mit dem Zweiersystem arbeiten.

Ein anderer Entwicklungszweig führt über W. Thompson, dessen anderer Name Lord Kelvin vielleicht geläufiger ist, und dem Deutschen Udo Knorr zu besonderen Universalgeräten zum Lösen von Differentialgleichungen, die als Analogrechner[18] bezeichnet werden.
Aus der Sowjetunion kennen wir das MM-Gerät und in der DDR entstand in Zusammenarbeit der Wissenschaftler der Technischen Hochschule Ilmenau und der Technischen Universität Dresden der in Glashütte hergestellte Endim 2000.

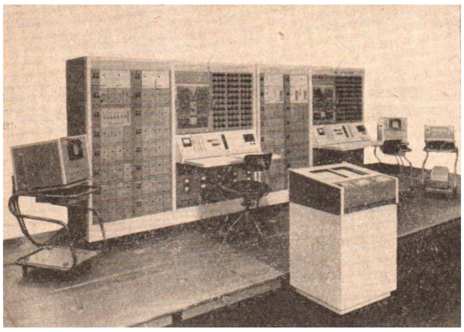


Bild 40. Analogrechner ENDIM 2000

Im Rahmen der Abstimmungen innerhalb der Länder des RGW ist es heute die CSSR, die sich vorwiegend mit der Produktion von Analogrechnern beschäftigt.
Beim Einsatz solcher Rechner in der Physik untersucht man z.B. die Struktur der Kristalle, die Lage des magnetischen Feldes im Erdinnern und viele weitere komplizierte Probleme. Auch in der Statistik werden diese Maschinen angewandt, und es wurden sogar schon erfolgreiche Versuche zur Übersetzung von Texten aus einer Sprache in eine andere durchgeführt.

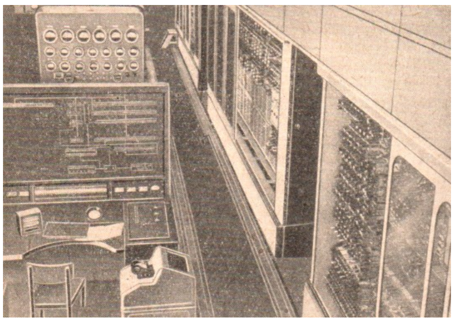


Bild 41. Sowjetischer Digitalrechner sehr hoher Leistungsfähigkeit (BESM)

Das hauptsächlichste Wesensmerkmal einer elektronischen Rechenmaschine besteht darin, dass nach der Eingabe der Anweisungen in die Maschine, das heißt, nach der Eingabe aller Zahlen, die für die Berechnungen benötigt werden und der Rechenoperationen, sowie der Reihenfolge ihrer Ausführung, die Maschine automatisch rechnet.

[18] Funktionenrechner, die zur Darstellung mathematischer Zusammenhänge analoge physikalische Vorgänge heranziehen.

Sie bedarf also keines weiteren menschlichen Eingriffes mehr.

Zwei Beispiele sollen zeigen, wie vorteilhaft umfangreiche Probleme durch den Einsatz elektronischer Rechenautomaten gelöst werden können:
Mit Hilfe der Maschine UNIVAC löste man ein Problem, das die Auflösung eines Systems von 300 linearen Gleichungen mit 300 Unbekannten erforderte. Die Rechnung dauerte, vom Zeitpunkt der Eingabe der Zahlen in die elektronische Rechenmaschine an gerechnet, kaum eine halbe Stunde. Zum Vergleich geben wir an, dass für die Lösung eines Systems von 25 linearen Gleichungen mit 25 Unbekannten von einem Rechner ungefähr eine Woche benötigt wird, und bei Anwendung eines speziellen Verfahrens, dessen Schöpfer der vor kurzem verstorbene polnische Wissenschaftler Professor Banachiewicz ist, wird die Zeit auf ungefähr einen Tag verkürzt.

Mit Hilfe einer anderen Maschine zeigte man, dass die Zahl $2^{216} + 1$ (von der man eine Zeit lang annahm, dass sie prim ist) keine Primzahl ist, die größte bis jetzt bekannte Primzahl ist 2^{2281} - 1, das ist eine 687stellige Zahl.

Auch die Sowjetunion begann im Rahmen des Fünfjahrplanes mit der Produktion von elektronischen Rechenanlagen. So entstanden 1953 die Maschinen des Typs BESM, von denen bis heute noch eine ganze Reihe hergestellt wurden, die den ständig wachsenden Anforderungen, die an sie gestellt werden, genügen (Bild 41).
Auch noch andere Typen wie URAL, STRELA usw. sind bekannt, und immer bessere Automaten tragen zur Lösung der ungeheuren Aufgaben bei, die sich die sowjetischen Wissenschaftler gestellt haben.

So ist es heute u.a. der Automat "URAL 11", der im Baukastensystem hergestellt wird, was zur Folge hat, dass er noch variabler für die unterschiedlichsten Probleme eingesetzt werden kann, als seine Vorgänger. Das geschieht durch die Kopplung mit speziellen Ergänzungsgeräten, mit deren Hilfe auch kompliziierteste Aufgaben aus dem Ingenieurbereich sowie Probleme der Planung und Statistik gelöst werden können.

Eine weitere elektronische Datenverarbeitungsanlage, die in den letzten Jahren entwickelt wurde, trägt den Namen "MINSK 22".
Sie wird vor allem zur Lösung umfassender ökonomischer und wissenschaftlich-technischer Aufgaben eingesetzt und ist ein auf Transistorbasis aufgebauter Digitalrechner, dessen Rechnerzellen gedruckte Schaltungen haben.

Auf der "Interorgtechnika 66" in Moskau[19] fand außerdem vor allem der "ONEGA" große Beachtung der internationalen Besucher.
Dieser Digitalrechner, der sich hervorragend für die komplexe Rationalisierung eignet, weil zu dem System sowohl Maschinen für die Primärdatenerfassung als auch solche zur Sekundärdatenbearbeitung gehören, die sinnvoll miteinander verbunden, den gesamten Aufgabenkomplex für die Bewältigung eines Vorganges bearbeiten.

Diese drei Beispiele sollen genügen, den ungeheuren Leistungsstand der sowjetischen Wissenschaft auch auf diesem Gebiet zu zeigen. Dabei werden neben diesen zentralen Entwicklungen auch in den einzelnen Sowjetrepubliken laufend neue, verbesserte Automaten hergestellt. wie z.B. in Armenien der digitale Universalrechner "RAZDAN 3".

Überhaupt wird in den Ländern mit hochentwickelter Industrie immer dringender nach elek-

[19] Internationale Ausstellung Mechanisierungsmittel für die Ingenieurtechnischen- und Verwaltungsarbeiten.

tronischen Datenverarbeitungsanlagen verlangt. So entstehen ständig bessere Maschinen, das heißt, Anlagen, die kleiner und schneller sind, größere Speicherkapazität besitzen, störungsfreier arbeiten und variabler einsatzfähig sind.

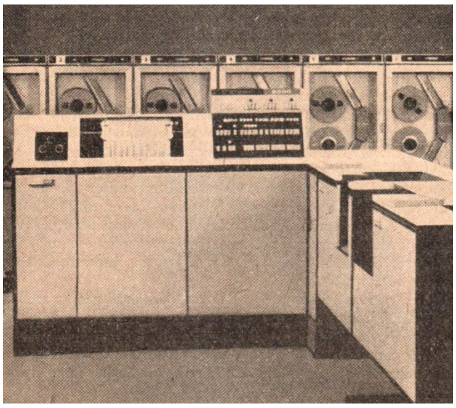


Bild 42. Amerikanische elektronische Maschine vom Typ UNIVAC 9300

Neben der Sowjetunion und den sozialistischen Ländern wird vor allem in den USA, in England, Japan, Frankreich und Schweden nach einem umfangreichen Forschungs- und Entwicklungsprogramm gearbeitet.

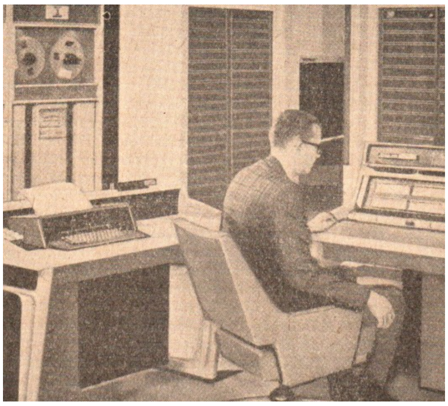


Bild 43. CONTROL DATA 2100

Die dabei vorhandenen Verflechtungen und unterschiedlichen Bedingungen machen es heute unmöglich, genau festzustellen, in welcher Reihenfolge die verschiedenen Typen der verschiedenen Länder entwickelt wurden.
In den USA sind vor allem die Automaten IBM und UNIVAC ständig weiter ausgebaut werden. Die letzten Typen dieser Serien besitzen eine sehr hohe Speicherkapazität, während sich die sogenannte "Zugriffszeit" auf nur einige Millisekunden reduziert.
Erst im Jahre 1957 entstand in Amerika die Control Data Corporation, deren Mitarbeiterzahl innerhalb von 10 Jahren von sieben auf 12000 gestiegen ist und die gegenwärtig allein in den USA über einen jährlichen Absatz in Höhe von 64 Mill. Dollar verfügt.[20]

Ein Beweis für die stürmische Entwicklung und Zukunftsträchtigkeit dieses Industriezweiges, dessen Bedeutung für die DDR u.a. durch verschiedene Beschlüsse unserer Regierung unterstrichen wird, ist ferner, dass gegenwärtig dieser Industriezweig in unserer Republik über 50000 Beschäftigte zählt.
In der Deutschen Demokratischen Republik wurde ebenfalls vor rund 20 Jahren mit dem Bau elektronischer Rechenautomaten begonnen. Zunächst entstand in Jena die OPREMA. Der

[20] Eine Maschine aus dieser Produktion befindet sich u.a. in den volkseigenen Leunawerken "Walter Ulbricht".

Name verrät, dass es sich bei ihr um eine (elektromechanische) 0Ptische REIais MAschine handelte.

Ihr folgte im VEB Carl Zeiss der ZRA 1, von dem heute etwa 30 in den verschiedensten Rechenzentren unserer Republik vorhanden sind. Außerdem entwickelte der VEB Elektronische Rechenmaschinen Karl-Marx-Stadt u.a. den Kleinstrechner Cellatron SEB 2, der in verschiedenen Varianten vorhanden ist[21], sowie im Auftrage des VEB Büromaschinenwerke Sömmerda den Robotron 100, der, seiner Bedeutung entsprechend, ein volltransistorisierter programmgesteuerter Lochkartenrechner ist.

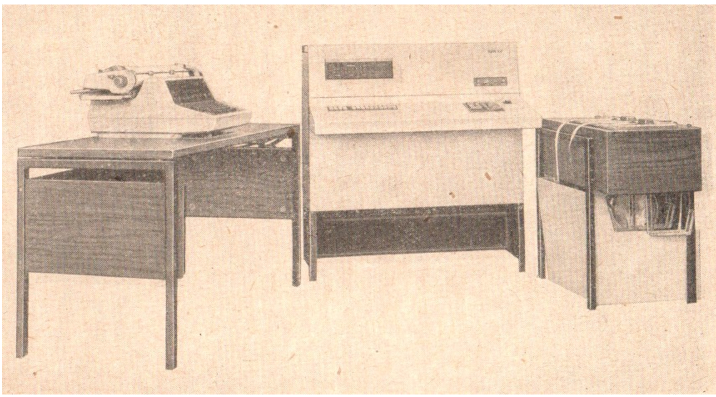


Bild 44. Programmgesteuerter, digitaler, elektronischer Kleincomputer Cellatron SER 2c

Die Rechengeschwindigkeit beträgt im Mittel 23,4 Millisekunden je Operation. Mit Hilfe des R 100 können auch kompliziertere Programme mit verhältnismäßig wenig Befehlen bewältigt werden.

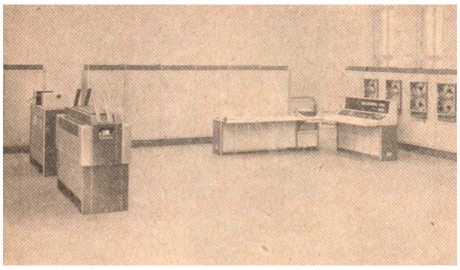


Bild 45. Der Robotron 300

Der Robotron 300 (Bild 45) mit seinen zahlreichen Ergänzungsteilen ermöglicht Einsatzfähigkeit auf nahezu allen Gebieten der Wirtschaft, vor allem als Tabelliermaschine für alle anfallenden Abrechnungs- und statistischen Arbeiten, durch seine hohe Speicherkapazität für wissenschaftlich-technische Probleme, als Sortiermaschine wegen seiner Schnelligkeit und der Möglichkeit sowohl Lochkarten als auch Loch- und Magnetbänder als Datenträger zu verwenden.
Deshalb wird dieser Automat in Serie gebaut und in den nächsten Jahren in vielen Rechenzentren und Volkseigenen Betrieben zum Einsatz kommen.

Sehr fruchtbar wirkte sich die Zusammenarbeit der Wissenschaftler vor allem der Technischen Universität Dresden mit den Ingenieuren und Technikern der elektronischen Industrie aus, die dazu führte, dass u.a. ein moderner sehr wandlungsfähiger Kleinrechner D 4a entstand, der ebenfalls seit 1966 in Serie gebaut wird.
Dazu kommen eine Reihe spezieller Entwicklungen und Ergänzungsteile, deren Aufzählung wir uns ersparen wollen.

[21] Bild 44 zeigt die relativ einfach zu programmierende Variante 2 c.

Bemerkenswert ist, dass auch die Volksrepublik Polen auf diesem Gebiet eigene interessante Ergebnisse vorweisen kann. So entstand z.B. am Mathematischen Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften bereits 1954 ein Analysator für Differentialgleichungen - ABB genannt, der vor allem die Lösung komplizierter Konstruktionsprobleme ermöglicht.
Das ist gleichzeitig ein weiteres Beispiel für die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten der modernen Rechenautomaten.

Es begann mit den einfachen Handrechenmaschinen, darauf folgten Maschinen, bei denen die elektrische und elektromagnetische Energie ausgenutzt wurde. Die Wissenschaftler und Ingenieure erkannten, dass die mechanischen und Relaismaschinen in bezug auf Schnelligkeit, Speicherkapazität und Selbsttätigkeit zu langsam bzw. zu schwerfällig sind.
Die Entwicklung der Elektronik gab ihnen die Mittel in die Hand, schnelle und zuverlässige Maschinen aus Röhrenbausätzen zusammenzustellen. Aus Röhren wurden Transistoren, aus den vielen Drähten mit ihren Lötstellen wurden gedruckte Schaltungen.

Neben Universalmaschinen entstehen immer mehr spezielle Kleinrechner, die nur einen geringen Raum beanspruchen und einen sehr niedrigen Leistungsbedarf an elektrischer Energie haben.
Gleichzeitig bringt diese Entwicklung eine gewisse Verwischung zwischen den rein mechanischen 4-Spezies-Automaten und den reinen Elektronenrechnern mit sich.

Der fließende Übergang von den eigentlichen "Rechenanlagen" zu den sogenannten "Datenverarbeitungsanlagen", bei denen es weniger auf die Lösung komplizierter Rechenprogramme als auf schnelle Ein- und Ausgabe einschließlich notwendiger Umordnungen der Daten und der Bewältigung großer Informationsmengen ankommt, zeigt sich heute deutlicher als je zuvor.
Ohne den Einsatz derartiger Geräte wäre die Lösung der Riesenaufgaben, die an unsere Arbeiter, Techniker, Ingenieure, Ökonomen und Wissenschaftler beim umfassenden Aufbau des Sozialismus gestellt werden, gar nicht denkbar.

Deshalb sollten wir uns daran erinnern, wenn wir ein Rendezvous im Weltall verfolgen, Raketen- oder Atomtriebwerke bewundern oder überhaupt von hochkomplizierten technischen Problemen und ihrer Lösung hören, dass ein solcher Stand der Wissenschaft ohne die Mathematik und die durch sie bereitgestellten Hilfsmittel nicht möglich wäre.

Allein die Entwicklung der Rechenmaschinen von der ersten mechanischen 2-Spezies-Maschine bis zum heutigen Stand elektronischer Automaten dauerte immerhin über 300 Jahre, die Zeit, die für die Herausbildung der dazu nötigen mathematischen und technischen Voraussetzungen vorher vergehen musste, gar nicht mit gerechnet.

18 Lösungen der Übungsaufgaben

1. - -

2. Da bei der Multiplikation 234 · 12 keines der Teilprodukte die 10 überschreitet, bleiben alle Hälften der Quadrate über den Diagonalen leer. In diesem Falle erübrigt sich die Teilung der Quadrate durch die Diagonalen. Nach dem Aufschreiben der einzelnen Produkte in die ganzen Quadrate muss man die Zahlen in den schräg übereinander liegenden Quadraten addieren.

3. Bei beiden Multiplikationsarten (das heißt, bei der indischen und der heutigen) der Zahlen 234 · 12 sind die Teilprodukte (2 · 234 = 468 und 1 · 234 = 234) die gleichen.
In der heutigen Schreibweise werden sie folgendermaßen platziert:

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

das Ergebnis erhalten wir durch das Zusammenzählen der Zahlen in senkrechter Richtung.
Im Gegensatz dazu sind die Teilprodukte bei der indischen Schreibweise der Multiplikation folgendermaßen platziert:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}$$

(Zur Vereinfachung sind hier die Quadrate und Diagonalen, die bei dieser Multiplikation überflüssig sind, weggelassen worden), das Ergebnis erhalten wir durch die Addition der Ziffern in schräger Richtung von rechts oben nach links unten: 8, dann 4 + 6, 3 + 4, 2.

4. $(11111)_8$
5. $(22222)_5$
6. $(1330)_7$
7. $(10000000)_3$
8. Im Achtersystem
9. $(452)_6 = (176)_{10}$
10. $(31450)_7$
11. 2451
12. $(1000)_{12}$
13. $(101010101)_2$
14.

$$\begin{array}{lr} (10101)_2 \cdot (11001)_2 = & 21 \cdot 25 \\ \hline 10101 & 42 \\ 10101000 & 105 \\ 10101 & \\ \hline (1000001101)_2 = & 525 \end{array}$$

15. Ja, zum Beispiel Produkte, die in der nächsten Übung auftreten.
Nein, die Gleichung 10 · 11 = 110 ist in jedem System gültig, da $g(g+1) = g^2 + g = (110)_g$

16.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 10 & 11 & 100 \\ 10 & 100 & 110 & 1000 \\ 11 & 110 & 1001 & 1100 \\ 100 & 1000 & 1100 & 10000 \end{array} \quad \text{entspricht im Zehnersystem} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{array}$$

17. $(1000)_3$
18. $(1110100100)_2$
19. 73 g, 41 g, 233 g, 182 g
20. 426
21. 1958
22. $(1111)_{60}$
23. 
24. $(132233)_4$ (= 1967)
25. $(30313)_5$
26. $(2030220)_4$
27. $(65432)_7$
28. $(2615)_9$
29. $(776)_9$
30. $(2124)_5$
31. $(1111)_2$, $(120)_3$, $(33)_4$, $(30)_5$, $(23)_6$, $(21)_7$, $(17)_8$, $(16)_9$, $(15)_{10}$, $(14)_{11}$, $(13)_{12}$, $(12)_{13}$, $(11)_{14}$, $(10)_{15}$
32. a) 142, b) $(850)_{12}$, c) 84653
33. 
34. 
35. $\overline{LXI}CDIX$
36. Tausend Billionen (10^{15}) oder eine Billiarde
37. Hundert Milliarden und zehntausend Billionen bzw. zehn Billiarden
38. Eine Trillion (10^{18})
39. Eine Milliarde (10^9)
40. 10^{63} = eintausend Dezillionen = eine Dezilliarde
41. Über $5,4 \cdot 10^9$ km
42. 9,4608 Billionen km (in 365 Tagen)
43. Ungefähr $9 \cdot 10^{18}$ km (9 Trillionen km) sowie etwa 1400 Trillionen km ($14 \cdot 10^{20}$ km)

Literatur

1. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Teil 1, Sammlung Göschen, Bd. 226, De Gruyter, West-Berlin, 1953

2. Juschkewitsch, Mathematik im Mittelalter, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964

3. Kollektiv, Von Adam Ries bis Max Planck, Enzyklopädie, Leipzig, 1965

4. Kordemski, Köpfchen, Köpfchen, URANIA-Verlag, Leipzig, 1968 .

5. Kollektiv, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968

6. Kollektiv, Kleine Enzyklopädie Mathematik, Bibliographisches Institut, Leipzig, 1967

7. Kollektiv, Streifzüge durch die Mathematik, Bd. 1 u. 2, MSB Nr. 3 u. Nr. 24 URANIA-Verlag Leipzig, 1965/66

8. Krbek, Über Zahlen und Überzahlen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964

9. Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich, MSB Nr. 13 B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1966

10. Miller, Rechenvorteile, MSB Nr. 14 B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968

11. Murphy, Elektronische Ziffernrechner, Verlag Technik, Berlin, 1965

12. Panow, Der Rechenstab, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965

13. Struik, Abriss der Geschichte der Mathematik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965

14. Trachtenbrodt, Wieso können Automaten rechnen? Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968

15. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1-4, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Berlin-Leipzig, 1930-1940

16. Wußing, Mathematik in der Antike, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965

Bildquellenverzeichnis

Archiv der Karl-Marx-Universität, Leipzig (Bild 40)

Archiv des Mathematisch-Physikalischen Salons, Dresden (Bild 11, 15, 35, 36, 37)

Archiv der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (Bild 38, 41)

Foto Brüggemann, Leipzig (Bild 44, 45)

Werksfotos (Bild 31, 39, 42,13)

Alle anderen Bilder wurden dem polnischen Original entnommen.