W. Lietzmann

Altes und Neues vom Kreis

Ergänzt von Dr. E. Hameister
1966 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 12
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Ein Buch über den Kreis, noch dazu über die elementare Kreislehre, die doch in ihrer Lehrsatz- und Beweisfolge seit Euklids Elementen, 300 Jahre v. d. Ztr., zumindest aber in der Darstellung unzähliger geometrischer Lehrbücher aller Zeiten und Länder so festgelegt ist, dass wirklich kein Wort mehr darüber zu verlieren ist - ist das nicht ein höchst überflüssiges Unterfangen?

Um es gleich zu sagen: Es ist ein Irrtum anzunehmen, dass die Kreislehre seit Euklid unverändert geblieben ist, und ebenso, dass sich in ihrer Darstellung alle Lehrbücher von heute gleichen.
Im Gegenteil, zu allen Zeiten und bis in die letzten Jahre hinein ist an ihr gearbeitet worden!

Die Lehrbücher aber pflegen nur zu gern immer nur einen Weg zu gehen, Lehrsatz an Lehrsatz und Beweis an Beweis als Glieder einer Kette aneinanderzufügen und so beim Leser den Eindruck zu erwecken, das müsste so sein.
Geometrie treiben heißt aber mehr, heißt mit den verschiedensten Begriffen an die geometrischen Gebilde herangehen und sie meistern. Sagt doch der Geometer Clebsch:

"Es ist die Freude an der Gestalt in einem höheren Sinne, die den Geometer ausmacht."

Gerade die elementare Kreislehre und die mit ihr verknüpften elementaren Eigenschaften konvexer, in sich geschlossener Linien sind hierfür in höchstem Maße geeignet. Einiges hiervon wird in den nachfolgenden Kapiteln behandelt und ist für einen größeren Kreis von Freunden der Geometrie gedacht.

Auf kräftige Mitarbeit des Lesers sollte freilich auch in diesem Büchlein nicht verzichtet werden; sie wird in zahlreichen Aufgaben herausgefordert, und auch die Darstellung selbst gibt reichlich Anregungen zu eigener Beschäftigung mit den Dingen.

Die 4. Auflage ist genauestens durchgesehen und an vielen Stellen ergänzt werden.

Als Büchlein wendet es sich an alle Freunde der Mathematik, die das siebente Schuljahr hinter sich haben. Es will Schüler und Lehrer bei außerunterrichtlicher Betätigung unterstützen und darüber hinaus jeden Leser zu tiefergehender Beschäftigung unter Hinzuziehung der Spezialliteratur anregen. Ist doch die Geometrie des Kreises wie kaum ein anderes Teilgebiet geeignet, in das moderne, durch allgemeine Grundlagen fest begründete anschauliche geometrische Denken im Sinne David Hilberts einzuführen.

Göttingen, im Sommer 1951

W. Lietzmann

Magdeburg, 1965

E. Hameister

Inhaltsverzeichnis

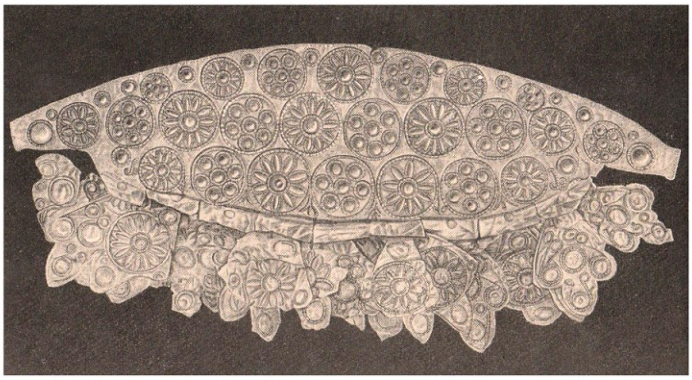
1 Einleitung

Die ersten systematischen Darstellungen der Kreislehre finden wir in Euklids Elementen und in der Schrift von Archimedes über die Kreismessung. Aber was in diesen Büchern steht, ist damals durchaus nicht alles neu gewesen.

So hat Thales von Milet ($\sim$ 600 v.u.Z.) bereits einen großen Teil der Kreissätze durch das Studium der babylonischen Mathematik gekannt. Dabei gebührt ihm vor allem das Verdienst, für die damals bereits bekannten Sätze exakte Beweise gegeben zu haben. Außerdem gehört Thales der Ruhm für die logische Gliederung der zu seiner Zeit vorliegenden Geometrie.

Das ist aber das Charakteristische der griechischen Mathematik überhaupt und der Leistung der alten Griechen in der Mathematik schlechthin.
Auch Pythagoras von Samos kannte schon vor Euklid mehrere Kreiseigenschaften. Überhaupt hat die Frage nach der Quadratur des Kreises viele Mathematiker voreuklidischer Zeit aufs stärkste bewegt.

Mit dem Kreis und seinen Eigenschaften haben sich die Menschen seit je beschäftigt. Hütten und Gefäße, um nur einige Gegenstände des täglichen Umgangs zu nennen, hatten in den Anfängen vielfach einen kreisförmigen Grundriss, auch die Gefäße lange bevor die Töpferscheibe erfunden wurde.



Der Übergang von der annähernd kreisförmigen Scheibe des Baumstammes, die als Rad diente, zum Speichenrad ist bei Babyloniern, Ägyptern und auch bei den alten germanischen Völkern sehr früh vor sich gegangen. Das lehren Räder, die als Bodenfunde zutage treten, oder aber bildliche Darstellungen von Wagen; zum Beispiel die Reliefbilder der Babylonier, die einen exakten Aufriss des sechsspeichigen Rades geben, oder die zahlreichen, skizzenhaften, Grundriss und Aufriss vermischenden Zeichnungen auf Urnen der Stein- und Bronzezeit, bei denen meist vier oder acht Speichen flüchtig, aber doch in aller Deutlichkeit eingetragen sind.

Noch häufiger tritt uns die regelmäßige Kreisteilung im Ornament entgegen. Man kann dabei zwei Arten von regelmäßigen Sternornamenten unterscheiden, je nachdem die in gleichen Winkelabständen aneinandergefügten Elemente eine axiale Symmetrie haben oder nicht. Sterne der ersten Art kommen mit der 3-Zahl seltener, mit der 4-, 6-, 8-Zahl sehr häufig vor; die 5-Zahl ist wieder selten, erst recht aus begreiflichen Gründen die 7- und die 9-Zahl.

Wenn man beachtet, dass der Zirkel in der heutigen Gestalt schon sehr früh bekannt war, darf man wie der Mathematiker Andreas Speiser durchaus annehmen, diese vom Kreis ausgehenden Zier-(Ornamente) und Zweckformen (Rad u.a.) beweisen die Kenntnis und Anwendbarkeit tiefer mathematischer Eigenschaften.

So ist wohl kaum noch zu bezweifeln, dass die rein künstlerisch schaffende Ornamentik ebenso wie die Feldmesskunst vor allem nach dem Bericht von Herodot als Ursprung der Geometrie anzusehen ist. Einige Beispiele mögen es erläutern:

Im ältesten ausführlichen ägyptischen Mathematikwerk, dem Papyrus Rhind des Schreibers Ahmes, findet sich ein Wert für π, ein recht genauer Näherungswert:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1605$$

der nicht theoretisch, sondern irgendwie praktisch gefunden ist.
Und als Ausfluss der Beschäftigung mit dem Kreis als Ornament:
Aus der mykenischen, in das zweite Jahrtausend vor der Zeitrechnung anzusetzenden Kultur sind uns Goldplättchen erhalten, die Kreisfiguren zeigen, welche von sechs gleich großen, sie und jeweils die beiden Nachbarn berührenden Kreisen umgeben sind (vorhergehende Seite).

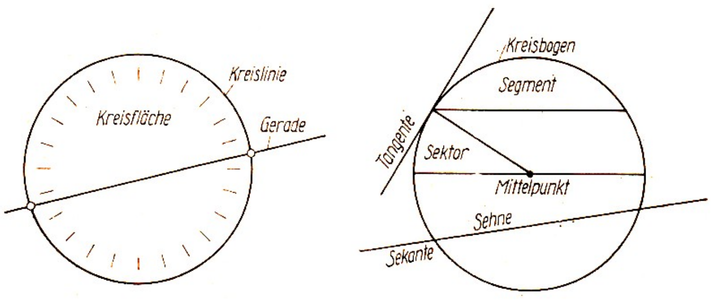
2 Die Definition des Kreises

1. Die übliche Definition der Kreises - und dabei wird unter "Kreis" nur die "Begrenzungslinie" oder "Hülle" der Kreisfläche verstanden - heißt in der Fassung Euklids:
Der Kreis ist eine ebene Figur, bei der alle von einem im Innern der Figur gelegenen Punkt zu Punkten der Linie gezogenen Strecken gleich lang sind.

Als das Entscheidende wird also die Gleichheit der Radien oder Halbmesser angesehen, eben jener Strecken, die vom Mittelpunkt zum Kreisumfang gehen. Es ist übrigens merkwürdig, dass ein besonderer Name für diese entscheidenden Strecken erst sehr spät auftritt. Euklid und viele nach ihm haben dafür noch keinen festen Ausdruck.
Eines ist an dieser Definition noch wesentlich:

Man hat die Kreisfläche von ihrem Rand, der von dem Kreisumfang oder der Peripherie gebildet wird, klar zu unterscheiden. Deutlich kommt der Unterschied zwischen der Kreislinie (Kreis) und der Kreisfläche in der Erklärung durch die Menge aller Punkte, die dieser Fläche angehören, zum Ausdruck:

Die Menge aller Punkte, welche von einem festen Punkt M gleiche Entfernung haben, nennt man die Kreislinie. Durch sie werden alle von ihr verschiedenen Punkte der Ebene in zwei Klassen geteilt, die also "innerhalb" und "außerhalb" dieser Linie oder "Hülle" in der Ebene liegen.
Die Menge der inneren Punkte stellt die Kreisfläche (Fig. 1) dar, d.h. ihren Inhalt.



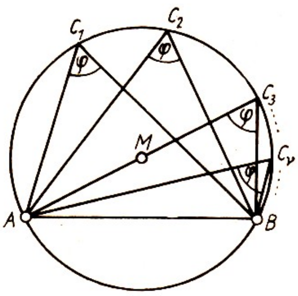
Figur 1 und 2:

So ist weiter der Schnitt zwischen einer Geraden und dem Kreis (zwei Punkte der Kreislinie) durch den Durchschnitt der beiden Punktmengen "Gerade" und "Hülle" bestimmt.

Was Kreisbogen und Kreisabschnitt (Segment) bedeuten, erläutert Fig. 2. Einen Kreisauschnitt (Sektor) begrenzen zwei Halbmesser und der eine der dadurch bestimmten Kreisbögen.

Beschreibe diese Teilflächen und ihre Begrenzungen durch Punktmengen!

2. Die in **1** angegebene Definition für die Kreislinie kann durch einen Satz ersetzt werden, der gerade für die gesamte Kreislehre charakteristisch ist. Es handelt sich dabei um die Eigenschaft der Winkel, die über einer Sehne auf der Peripherie liegen.
Sie heißen bekanntlich die "Umfangs"- oder "Peripheriewinkel" über der gleichen Sehne oder auch zum gleichen von dieser Sehne bestimmten Bogen. Der Satz lautet:



Figur 3

Alle Peripheriewinkel im Kreis über derselben Sehne sind gleich groß (Fig. 3).

Doch der Inhalt dieses Satzes allein ist für die Kreislehre nicht die Hauptsache. Der Umfangswinkelsatz kann zu Beginn einer Darstellung über den Kreis gleich an den Anfang gesetzt werden, weil auch seine Umkehrung existiert und für den Kreis charakteristisch ist.
Sie lautet:

Die Menge aller Punkte, von der aus eine Strecke AB unter dem gleichen Winkel erscheint, ist die "Kreislinie".
Will man aber diesen Satz als Definition für den Kreis verwenden, so kommt das am besten zum Ausdruck, wenn die hier vorliegende Äquivalenz durch die hiermit ausgesprochene notwendige und hinreichende Bedingung für die Kreislinie etwa in der Form "wenn die Menge aller Punkte gegeben ist, von der aus eine vorgegebene Strecke AB stets unter gleichen Winkeln erscheint, so ist es eine Kreislinie und umgekehrt"vorliegt.

Es ist also durchaus nicht abwegig, diesen Satz an die Stelle der Erklärung **1** zu setzen. Er definiert eigentlich erst "vollständig" die Kreislinie.
Überschaut man hier schon einmal die Sätze der Kreislehre, so wird man dabei gewahr, dass sie fast alle erst dann bewiesen werden können, wenn der Umfangswinkelsatz vorliegt. Die Beweise anderer Sätze bauen sich sogar fast nur auf diesem auf; kaum aber auf die oben genannte klassische Definition Euklids.

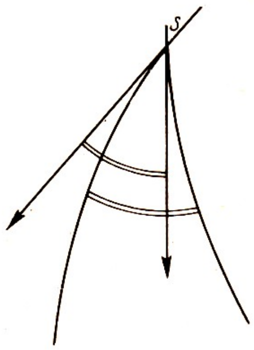
Es liegt hier gewissermaßen etwas Ähnliches wie bei der bekannten Definition des Punktes von Euklid vor. Wie Euklid seine "Punktdefinition" später überhaupt nicht benutzt, so trifft dies auch nahezu für seine Definition des Kreises zu.
Schließlich kann man auch noch die Aussage machen: Durch die Eigenschaft des Umfangswinkels eines Kreises ist dieser eine Erzeugende des Kreises.

3. Der Kreis als Figur mit Mittelpunkt

Man versteht unter dem Mittelpunkt einer Figur einen "Punkt" mit der Eigenschaft, dass er alle durch ihn gehende Sehnen der Figur halbiert. Solche Sehnen nennt man dann Durchmesser, die Figur selbst heißt zentralsymmetrisch in bezug auf diesen Punkt.
Der Kreis hat nach seiner Definition einen Mittelpunkt; andererseits sind nicht alle geschlossenen konvexen Figuren mit Mittelpunkt Kreise; das zeigt die Ellipse. Bei ihr haben allerdings, im Gegensatz zum Kreis, die Durchmesser nicht,die gleiche Länge.

3 Der Kreis, eine konvexe Figur

1. Vorbemerkung über Winkel



Figur 4

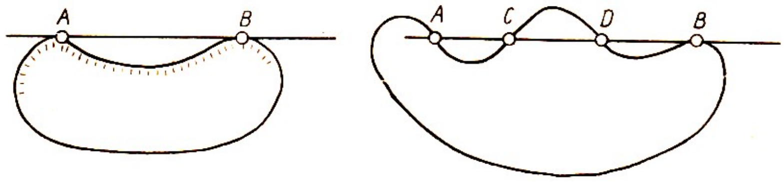
Von der Schule her ist man daran gewöhnt, unter "Winkeln" stets die Neigung zweier gerader Linien zu verstehen.
Doch es steht nichts im Wege, auch die Neigung von krummen Linien zu betrachten. Es liegt weiterhin kein Grund vor, die "Neigung zweier krummer Linien"durch den Winkel zu erklären, den die Tangenten im Scheitel S (Fig. 4) an den beiden krummen Linien (Kurven) miteinander bilden.
So ist der Begriff des Winkels für diesen allgemeinen Fall auf den speziellen des geradlinigen Winkels zurückgeführt.

2. Der Kreis ist eine konvexe Figur

Durch den Umfangswinkelsatz wird eindeutig der Kreis erklärt.
Ginge man von der Tatsache einer in sich geschlossenen Linie aus, so reichte das nicht im mindesten zur Definition der Kreislinie. Man muss noch fordern, dass die Figur "konvex" ist.

Unter "konvex" versteht der Mathematiker eine wohldefinierte Eigenschaft, die von der des täglichen Sprachgebrauches bezüglich der Worte "konvex" und "konkav" abweicht. Anschaulich lässt sich die "Konvexität"als geometrische Figureneigenschaft so erklären:

Eine Figur heißt konvex, wenn sie keine Einbuchtungen hat, (d.h., wenn man sie nach der Art eines Rades so auf einer Geraden abrollen kann, dass nacheinander jeder Punkt ihres Randes einmal wirklich auf der Geraden auf liegt.
Nun heißt eine Punktmenge, die eine Strecke darstellt und bei der Anfangs- und Endpunkt auf einer gekrümmten Linie gelegen sind, eine Sehne. Danach gibt es bei einer nichtkonvexen Figur mindestens zwei Randpunkte A und B so, dass die diese Punkte verbindende Sehne entweder ganz (Fig. 5) oder auch nur teilweise (Fig. 6) außerhalb, d.h. im Äußeren der durch die Kurve begrenzten Punktmenge gelegen ist.



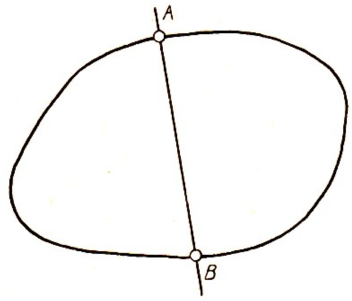
Figur 5 und 6

Anders bei einer konvexen Figur; hier gilt der Satz: Jede Sehne einer konvexen Figur liegt ganz in ihrem Innern (Fig. 7).

Auf diesen anschaulichen Satz werden wir an späterer Stelle noch einmal zurückkommen. Als erste Folgerung soll aus ihm der Begriff des Durchmessers gezogen werden.
Sei A ein beliebiger Punkt einer konvexen Figur, dann kann auf der Hülle oder dem Rande von ihr ein zweiter Punkt B nach Steiner stets eindeutig so angegeben werden, dass die beiden durch die Punkte A und B entstandenen Stücke der Hülle gleich lang sind.

Das Punktepaar A, B halbiert also die Hülle oder Umfangslinie.

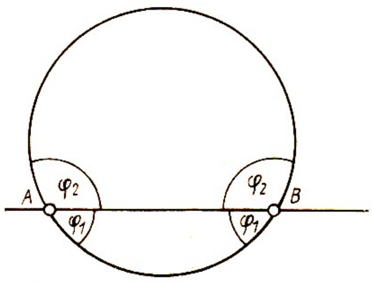
Jede derartige Sehne heißt Durchmesser der konvexen Figur; sein Mittelpunkt ist zugleich auch der von der betreffenden konvexen Figur. Diese als Durchmesser bezeichnete Sehne hat zwar die Eigenschaft, die Hülle der konvexen Figur zu halbieren, doch wird durch den Durchmesser im allgemeinen der Flächeninhalt nicht halbiert.
Nur bei einigen Mittelpunktskurven (Kreis, Ellipse) tritt dieser Sonderfall ein.



Figur 7

3. Eine bemerkenswerte Kreiseigenschaft

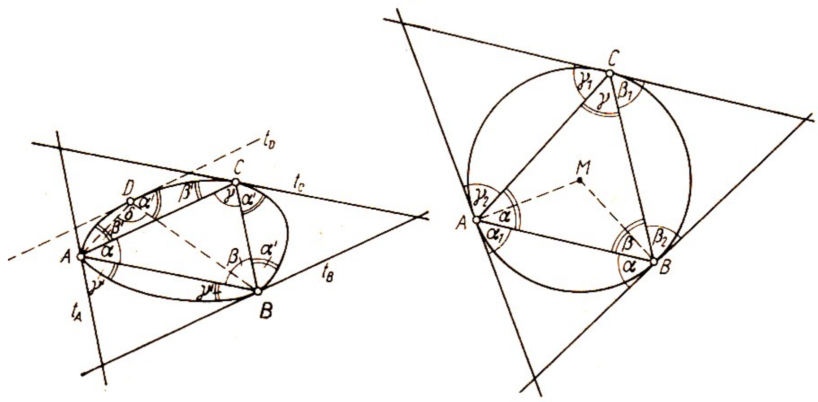
Der Kreis hat die Eigenschaft, von jeder Sehne, die zwei seiner Hüllenpunkte verbindet, unter vier paarweise gleichen Winkeln getroffen zu werden. Natürlich handelt es sich hier um krummlinige Winkel.



Figur 8

Jetzt soll der Satz umgekehrt werden. Dabei entsteht die Frage:
Ist eine Kurve stets ein Kreis, wenn sie von jeder Sehne, die irgend zwei Punkte ihrer Hülle verbindet, in diesen beiden Punkten unter paarweise gleichen Winkeln getroffen wird?
Gibt es noch andere Kurven mit dieser Eigenschaft?
Es lässt sich beweisen: Durch diese in dem Satz in eindeutiger Weise ausgesprochene Eigenschaft wird genau der Kreis aus der Vielzahl aller konvexen Figuren charakterisiert.

Sei eine beliebige konvexe geschlossene Kurve gegeben (Fig. 9).
Diese werde von jeder ihrer Sehnen unter gleichen Winkeln getroffen, die je zwei Punkte ihrer Hülle verbinden. A, B, C seien drei beliebige Punkte der Kurve. t_A, t_B, t_C sind die drei Tangenten in diesen Punkten an die Kurve. Dann bestehen die in Fig. 9a dargestellten Winkelgleichheiten.



Figur 9a und 9b

Nun bilden aber die drei um A liegenden Winkel, ebenfalls in den Punkten B und C zusammen einen gestreckten Winkel (π). Es ist also

$$\alpha + \beta' + \gamma' = 2R, \qquad \alpha' + \beta + \gamma' = 2R, \qquad \alpha' + \beta' + \gamma = 2R$$

woraus durch Addition

$$(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha' + \beta' + \gamma') = 6R$$

folgt. Wendet man auf das Dreieck ABC den Satz von der Winkel- summe im Dreieck an, so ist $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ und daraus

$$2(\alpha' + \beta' + \gamma') = 4R \qquad \text{oder} \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' = 2R$$

Durch Vergleich dieser Gleichungen mit den entsprechenden im Ansatz findet man dann aus

$$\alpha + \beta' + \gamma' = 2R, \quad \text{und} \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 2R \qquad \text{also} \qquad \alpha = \alpha'$$

Entsprechend erhält man

$$\beta = \beta' \qquad , \qquad \gamma = \gamma'$$

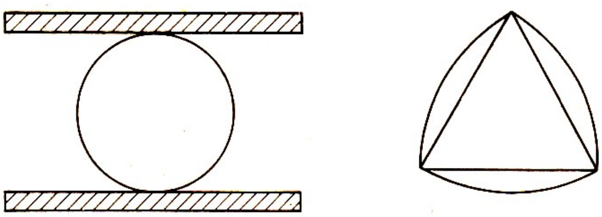
Das waren für den eigentlichen Beweis erforderliche Vorbemerkungen.
Hält man nun $\gamma = \gamma'$ fest und sei D irgendein weiterer beliebiger Punkt auf der Kurve, dann lassen sich bezüglich $\triangle ABD$ genau die gleichen Schlüsse wie für $\triangle ABC$ durchführen.
Die Punkte A und B bleiben im $\triangle ABD$ die gleichen wie im $\triangle ABC$; folglich sind auch die Tangenten in A und B die alten geblieben.

Das trifft ebenfalls für den Winkel $\gamma = \gamma'$ zu. Der Winkel δ bei D wird also auch gleich γ' sein, mithin $\delta = \gamma$.
Damit erscheint die Sehne AB vom Punkt D aus unter dem gleichen Winkel wie von C aus. Man wende die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes an, d.h. D liegt auf der durch die Punkte A, B und C bestimmten Kurve und demzufolge auch jeder weitere Punkt. Sie stellt also einen Kreis dar (Fig.9b).

Weitere Eigenschaften über konvexe Kurven und Figuren, die nicht nur in der euklidischen Geometrie, sondern auch in anderen Geometrien, besonders in der von H. Minkowski gelten, findet der Leser in den im Schrifttum angegebenen Werken von W. Blaschke, L. Fejes-Tòth, Rademacher-Toeplitz, Jaglom-Boltjanski und Coxeter.

4. Der Kreis als Figur konstanter Breite

Wenn man eine Kreisplatte aus Holz von einiger Dicke ausschneidet und sie zwischen zwei Leisten legt, die parallel zueinander in einem Abstand festgelegt sind, der das Doppelte des Radius ist (Fig. 10), dann berührt die Kreisplatte stets beide Leisten, und zwar eine jede in einem Punkt, ganz gleich, wie sie dazwischen bewegt wird; man sagt, der Kreis hat konstante Breite.

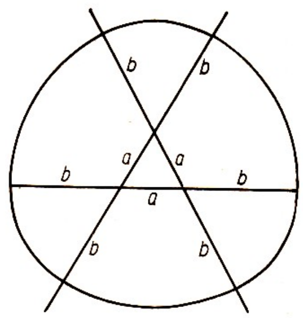


Figur 10 und 11

Wir fragen nun: Gibt es noch andere Figuren konstanter Breite außer dem Kreis?
Natürlich werden sie geschlossen und konvex sein müssen. Eine vorschnelle Antwort "Nein" wäre falsch.

Figur 11 zeigt ein sehr einfaches Gegenbeispiel: Man geht von einem gleichseitigen Dreieck aus und ersetzt die Seiten durch Kreisbögen, die ihren Mittelpunkt in der gegenüberliegenden Ecke haben. Man überzeugt sich leicht, dass diese zuerst von Reuleaux 1875 angegebene Figur konstante Breite hat.

Aufgabe 1. Welche Kreisausschnitte sind hiernach konvexe Figuren?



Figur 12

Aufgabe 2.
a) Die Entstehung der Figur 12 ist aus der Zeichnung abzulesen. Zeige, dass sie gleichfalls konstante Breite hat! Welche Breite hat sie?
b) Wie kann man den Kreis als Grenzfall der Figur 12 ansehen?
c) Gehe statt von einem gleichseitigen Dreieck (Figur 11) von einem regelmäßigen Fünfeck aus und erzeuge eine Figur konstanter Breite, indem du die Seiten durch Kreisbögen ersetzt (Radius?)!

Aufgabe 3. Untersuche, ob die Reuleauxschen Figuren 11 und 12 einen Mittelpunkt haben!
Aufgabe 4.
a) Welche Vierecke,
b) welche regelmäßigen Vielecke
haben einen Mittelpunkt, sind also zentralsymmetrisch?

4 Axialsymmetrie am Kreis

Kann man in einer ebenen Figur eine Gerade so zeichnen, dass die Figur nach einer Umklappung um diese Gerade mit sich selbst zur Deckung kommt, dann heißt die Figur axialsymmetrisch. Die Gerade nennen wir die Achse der Symmetrie. So ist der Kreis axialsymmetrisch in Bezug auf jeden seiner Durchmesser als Achse.

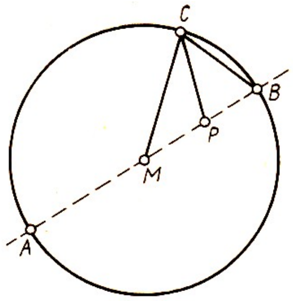
In der folgenden Übersicht ist eine Reihe von axialsymmetrischen Figuren genannt, die aus einem Kreis und einem anderen geometrischen Element bestehen, für die in der zweiten Spalte die Lage der Symmetrieachse angegeben ist. Dabei werden stets folgende Bezeichnungen verwendet:
Eine Gerade, die den Kreis schneidet, heißt Sekante; die Sekante durch die Kreismitte heißt Zentrale; eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, ihn also nur berührt, heißt Tangente.

Figur: Kreis und	Symmetrieachse: Zentrale
1. Punkt	durch den Punkt
2. Sehne	senkrecht zur Sehne
3. Tangente	durch den Berührungspunkt
4. zwei Tangenten	durch den Schnitt der Tangenten
5. ein zweiter, nicht schneidender Kreis	durch die Mitte des zweiten Kreises
6. ein zweiter berührender Kreis	durch die Mitte des zweiten Kreises
7. ein zweiter schneidender Kreis	durch die Mitte des zweiten Kreises

Mit Hilfe der Axialsymmetrie können ohne Schwierigkeiten die folgenden planimetrischen Eigenschaften eingesehen werden:

1. Es seien A und B die Schnittpunkte des Kreises mit der durch einen Punkt P und die Kreismitte M bestimmten Zentrale, dann sind A und B diejenigen Punkte des Kreises, die von P den größten und den kleinsten Abstand haben.

Diese einleuchtende Tatsache lässt sich auf folgende Eigenschaft zurückführen:



Figur 13

Ist in Figur 13 C ein Punkt des Kreises, dann ist, wie im Abschnitt 4./2. erwähnt werden wird, $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$ und deshalb $\sphericalangle BCP < \sphericalangle MCE = \sphericalangle MBC$, wenn P zwischen M und B liegt.
Da aber in jedem Dreieck dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, besteht im $\triangle BCP$ die Ungleichung $CP > PB$.

Aufgabe 5. Beweise in ähnlicher Weise die andere der beiden oben ausgesprochenen Behauptungen!

2. Aus der Figur 14 liest man ohne weiteres ab: Die Symmetrieachse ist Mittelsenkrechte der Sehne, sie halbiert die Sehne, die beiden zu der Sehne gehörigen Kreisbögen und die zugehörigen Zentriwinkel (Mittenwinkel), die von den nach den Sehnenenden gezogenen Radien gebildet werden (von den beiden Zentriwinkeln ist einer überstumpf, sofern nicht die Sehne durch die Mitte geht; denn dann sind beide gestreckte Winkel).

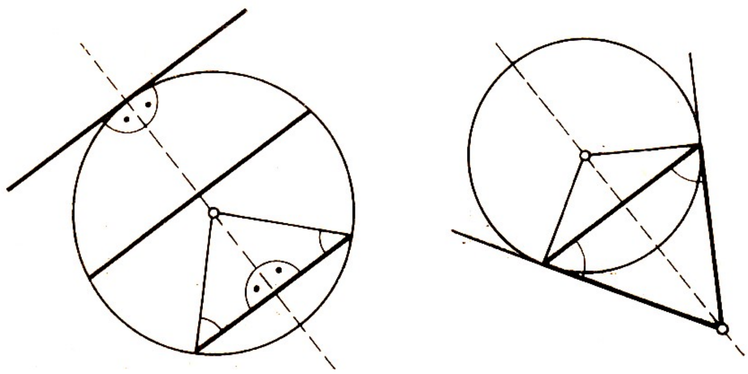
Die Winkel, die diese Radien mit der Sehne bilden, sind gleich.
Hat man zwei parallele Sehnen in einem Kreise, so sind die zwischen ihnen liegenden Kreisbögen gleich. Sind umgekehrt die zwischen zwei Sehnen liegenden Kreisbögen gleich, dann sind die Sehnen parallel, vorausgesetzt, dass die Sehnen nicht Durchmesser sind.

Aufgabe 6. Was geschieht, wenn die eine der beiden Sehnen zur Tangente wird?

Aus der Symmetrie der Sehne in Bezug auf den zu ihr senkrechten Durchmesser folgt:
Spiegelt man einen Punkt des Kreisumfanges an einem Durchmesser, so liegt der Spiegelpunkt gleichfalls auf dem Kreisumfang. Daraus folgt eine weitere Definition des Kreises:

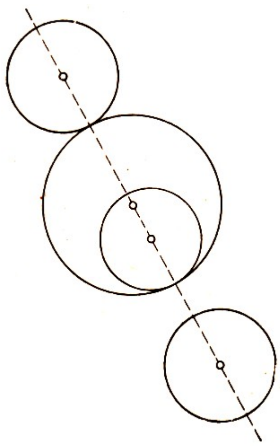
Die Menge aller Punkte, die man erhält, wenn man einen Punkt an den Geraden eines Geradenbüschels spiegelt, ist ein Kreis.

Aufgabe 7. Gib Mittelpunkt und Radius dieses Kreises an!
Diese Definition hat den Vorzug, dass sie auch die Ausartung des Kreises zur Geraden erfasst, die Bedenken erregen könnte, wenn man von einem Kreise spricht, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt. An die Stelle des Strahlenbüschels tritt dann eine Schar paralleler Geraden.



Figur 14 und 15

3. Aus der Figur 14 liest man weiter ab: Tangente und Radius zum Berührungspunkt stehen senkrecht aufeinander; die im Berührungspunkt auf der Tangente errichtete Senkrechte geht also durch den Mittelpunkt.



Figur 16

4. Ferner zeigt Fig. 15: Die vom Schnittpunkt der Tangenten bis zu den Berührungspunkten gemessenen Strecken sind gleich.

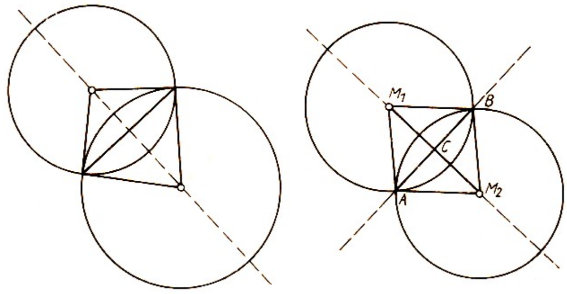
Die Symmetrieachse halbiert die Berührungssehne, den Winkel zwischen den Tangenten und den Winkel zwischen den nach den Berührungspunkten gezogenen Radien; sie steht senkrecht auf der Berührungssehne. Die Sehnen-Tangenten-Winkel, d.h. die von der Sehne mit den Tangenten gebildeten Winkel, sind gleich.

5. Wenn zwei Kreise keinen Punkt gemeinsam haben, ist die gemeinsame Zentrale Symmetrieachse (Fig. 16). Auf ihr liegen die Punkte geringsten Abstandes und ebenso die Punkte größten Abstandes der beiden Kreise.

6. Wenn zwei Kreise einander von außen oder von innen berühren, geht die Symmetrieachse, wieder die gemeinsame Zentrale beider Kreise, durch den Berührungspunkt (Fig; 16).

7. Wenn zwei Kreise einander schneiden, so halbiert die Symmetrieachse die gemeinsame Sehne und steht auf ihr senkrecht.
Jeder der beiden durch die Schnittpunkte bestimmten Kreisbögen des einen Kreises bildet mit jedem des anderen ein Kreiszweieck (Fig. 17).

Aufgabe 8. Wieviel Kreiszweiecke bestimmen zwei sich schneidende Kreise?



Figur 17 und 18

8. Ein Sonderfall: Haben die beiden Kreise gleichen Radius, so ist die gemeinsame Sehne eine zweite Symmetrieachse (Fig. 18). Wir nennen in diesem Falle die von gleichgroßen Kreisbögen gebildeten Kreiszweiecke gleichbogig.
Diese Zweikreisfigur liefert die vier Grundkonstruktionen: Halbieren einer Strecke, eines Winkels, Errichten einer Senkrechten und Fällen eines Lotes.

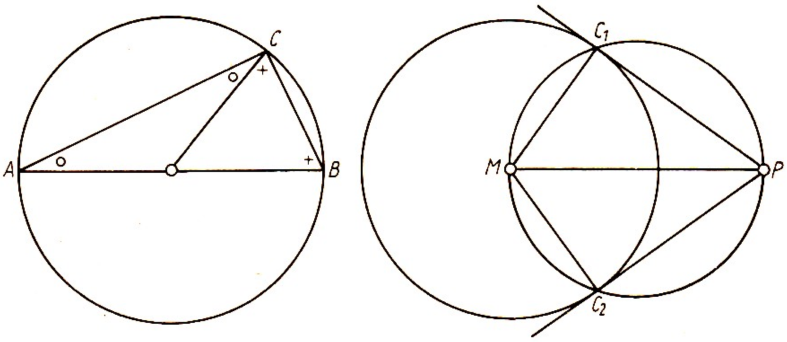
Aufgabe 9. Führe die vier Grundkonstruktionen mit Hilfe gleichbogiger Kreiszweiecke durch!

9. Zweikreisfigur und Tangentenkonstruktion.
Die Aufgabe, von einem Punkt P an einen Kreis um M die Tangenten zu konstruieren, löst man gewöhnlich mit dem sog. Thaleskreis[1]. Es handelt sich hier um einen zweiten Sonderfall der Zweikreisfigur:

[1] Der Satz vom Thaleskreis ist ein Sonderfall eines Satzes, der uns im Abschnitt 5 ausführlich beschäftigen wird. Wir können ihn aber sehr leicht an Hand der Figur 19 und der uns bereits bekannten Beziehungen auch unmittelbar beweisen:

Der Punkt C eines Kreises sei mit den Endpunkten A und B eines Durchmessers verbunden, dann ist $\sphericalangle ACB$ ein Rechter. Nach Abschnitt 4./2. sind nämlich die mit gleichem Zeichen versehenen Winkel gleich. Mithin ist $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA$. Da aber alle drei Winkel zusammen nach dem Satz von den Innenwinkeln des Dreiecks zwei Rechte zählen, ist $\sphericalangle ACE$ ein Rechter.

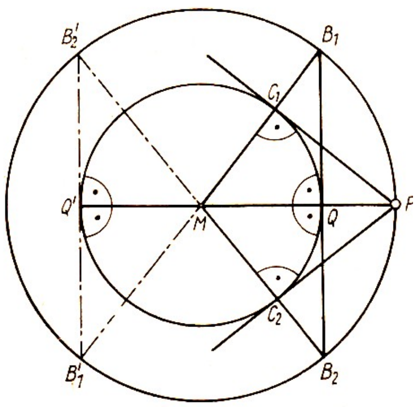
Der eine Kreis geht durch den Mittelpunkt des anderen (Fig. 20). Der Kreis, der MP zum Durchmesser hat, schneide den gegebenen Kreis in C_1 und C_2; dann sind PC_1 und PC_2 die beiden Tangenten.



Figur 19 und 20

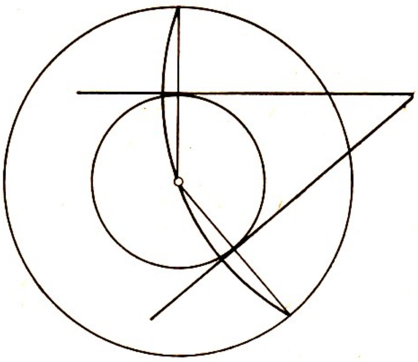
10. Konzentrische Kreise.
Kreise, die die gleiche Mitte haben, heißen konzentrisch. Wir wollen ein zweites Verfahren kennenlernen, von einem Punkte P die Tangente an einen Kreis zu konstruieren, und zwar ist dieses Verfahren etwa 2000 Jahre älter als das in Abschnitt 4./9. entwickelte. Es steht schon bei Euklid, während das vorher angegebene in Deutschland erst im 16. Jahrhundert auftaucht.

Man zeichnet (Fig. 21) um M den zu dem gegebenen konzentrischen, durch P gehenden Kreis. MP schneidet den gegebenen Kreis in Q (bzw. Q'). In Q (bzw. Q') errichtet man die Senkrechte auf MP, die den Kreis durch P in B_1 und B_2 (bzw. B_1' und B_2') schneidet.
Der Schnitt der zu diesen Punkten gehörenden Durchmesser mit dem gegebenen Kreis liefert die Berührungspunkte C_1 und C_2 der von P an den Kreis gelegten Tangenten.
Es ist gleichgültig, ob man die ausgezogenen oder die gestrichelten Hilfslinien benutzt, deren Bezeichnung in Klammern angegeben ist.



Figur 21

Aufgabe 10. Beweise die Richtigkeit der Konstruktion mit Hilfe des ersten Kongruenzsatzes, der etwa auf $\triangle MPC_1$ und $\triangle MB_1Q$ (bzw. $\triangle MB_1'Q'$) angewandt wird!

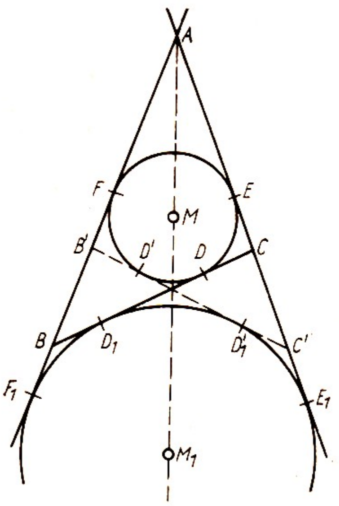


Figur 22

Aufgabe 11. Eine erst im 19. Jahrhundert gefundene Lösung der Aufgabe verwendet gleichfalls einen zum gegebenen konzentrischen Kreis, dessen Halbmesser doppelt so groß ist wie der des gegebenen, und benutzt in eigenartiger Weise eine uns bekannte Symmetrieeigenschaft. Die Figur 22 zeigt das Verfahren. Erkläre es und beweise seine Richtigkeit!

5 Tangentendreieck und Tangentenviereck

1. Kreis und Dreiseit.
An einen Kreis sind drei Tangenten gelegt, die im allgemeinen ein Dreiseit bestimmen; es heiße ABC. Die Berührungspunkte seien D, E, F. Die Seite BC berühre auch der die Verlängerungen von AB in F_1, AC in E_1 berührende Ankreis in D_1.
Die in der Figur 23 gezeichnete gestrichelte Gerade $B'C'$ mag zunächst nicht beachtet werden. Jetzt lassen sich alle auf den Seiten auftretenden Teilstrecken durch die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC ausdrücken. Wir führen noch die Abkürzung für den halben Dreiecksumfang ein $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.



Figur 23

Wir begnügen uns mit folgenden Beispielen:
a) Es ist $AF_1 = AE_1 = s$.
Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} AF_1 = AE_1 &= \frac{1}{2}(AB + BF_1 + AC + CE_1) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BD_1 + AC + CD_1) \\ &= \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = s \end{aligned}$$

b) Es ist $AF = AE = s - a$.
Beweis: Aus $AF_1 = AE_1$ und $AF = AE$ folgt $FF_1 = EE_1$.
Es ist aber

$$FF_1 + EE_1 = BF + BF_1 + CE + CE_1 = \\ BD + BD_1 + CD + CD_1 = 2a$$

Ebenso ist z.B. $BF = BD = s - b$, $CE = CD = s - c$.
c) Es ist $BD_1 = BF_1 = s - c$, denn $BF_1 = AF_1 - AB = s - c$.

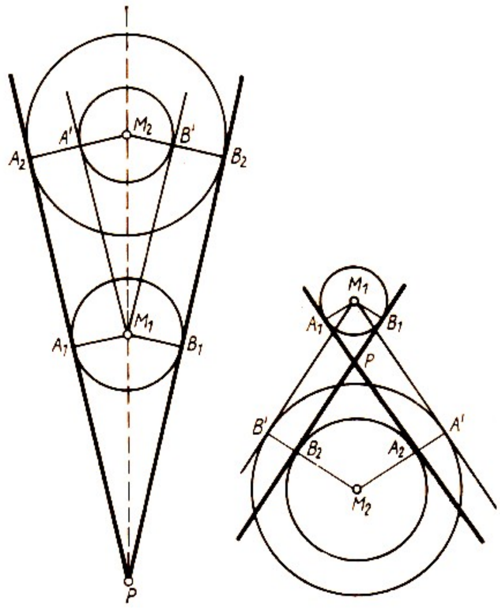
Aufgabe 12. Zeichne auch die den beiden anderen Seiten anliegenden Ankreise und drücke die dann auftretenden Teilstrecken durch die Dreiecksseiten aus!

2. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.
Die im allgemeinen unsymmetrische Ankreisfigur wird sofort symmetrisch, und zwar mit der gemeinsamen Zentrale der beiden Kreise als Symmetrieachse, wenn wir die zu BC symmetrische Gerade $B'C'$ zeichnen.
Das ist in Figur 16 bereits geschehen. Wir sehen jetzt die beiden gemeinsamen äußeren und die beiden gemeinsamen inneren Tangenten der beiden Kreise - ihre Mittelpunkte seien M und M_1 - in dieser Figur vereinigt.

Aufgabe 13. Zeige, dass $BF_1 = C'E_1 = CE = B'F$ ist!
Aufgabe 14. Zeige, dass die Punkte $MB'BM_1C'C$ auf einem Kreis liegen!

3. Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten.
Gegeben seien zwei Kreise k_1, k_2 mit den Mittelpunkten M_1, M_2. Die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten berühren die Kreise in A_1 und A_2 bzw. B_1 und B_2.

Durch M_1 den Mittelpunkt des kleineren Kreises k_1 in Figur 24, sind zu den gemeinschaftlichen äußeren Tangenten Parallelen gezogen. Diese berühren dann einen zu k_2 konzentrischen Kreis k' in A' und B'. M_2, A', A_2 und M_2, B', B_2 liegen dann jeweils auf einer Geraden.

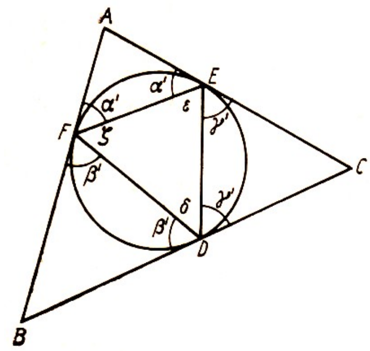


Figur 24 und 25

Diese Figur gibt uns den Lösungsweg für die Konstruktion der gemeinschaftlichen äußeren Tangenten zweier Kreise.
Mit M_1 und k' sind nämlich auch die Berührungspunkte A' und B' gegeben, und daraus lassen sich sofort A_1 und A_2, B_1 und B_2 finden.

Ähnlich wie bei den äußeren Tangenten verfährt man mit den inneren Tangenten, nur dass hier der Hilfskreis k' nicht die Differenz, sondern die Summe der Radien von k_1 und k_2 zum Radius hat. Alles Weitere ist aus der Figur 25 abzulesen.

Aufgabe 15. a) Erörtere die Konstruktion, wenn die Radien der beiden Kreise ungleich sind und sich berühren oder schneiden!
b) Wie ändert sich die Konstruktion, wenn die Kreise gleichen Radius haben?



Figur 26

4. Tangenten-Sehnen-Dreieck.
Den Teilstreckenbeziehungen im Tangentendreieck stellen wir Teilwinkelbeziehungen zur Seite. Wir ziehen zu diesem Zweck die Verbindungsstrecken der Berührungspunkte des Kreises, so dass also (Fig. 26) ein Sehnendreieck DEF entsteht.

Nach Abschnitt 4.,4. sind die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Winkel gleich.
Nun ist

$$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + \delta + \epsilon + \zeta = 6R$$

und da als Innenwinkel eines Dreiecks $\delta + \epsilon + \zeta = 2R$ gilt,folgt daraus

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2R$$

Im Zusammenhang mit

$$\beta' + \delta + \gamma' = 2R \qquad \text{folgt} \qquad \alpha' = \delta$$

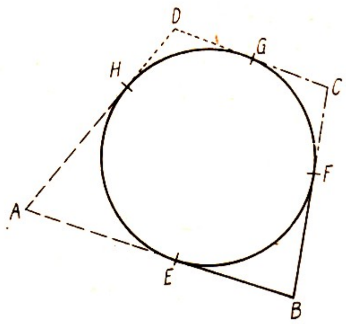
und in ähnlicher Weise $\beta' = \epsilon$ und $\gamma' = \zeta$. (Vergleiche hier die allgemeine Betrachtung im Abschnitt 3./3.)

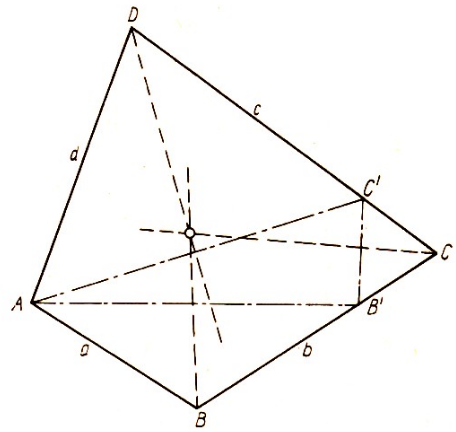
Aufgabe 16. Beweise an Hand der Figur 26 den Satz:
Wird eine konvexe Kurve von jeder Sehne unter gleichen Winkeln geschnitten, dann ist sie ein Kreis!

Aufgabe 17. Drücke alle Winkel durch die Winkel α, β, γ des Tangentendreiecks ABC aus!

5. Das Tangentenviereck.
Nach Abschnitt 4.,4. lesen wir an der Figur 27 folgende Gleichungen ab: $AH = AE$, $BF = BE$, $CF = CG$, $DH = DG$.
Daraus folgt durch Addition der Satz vom Tangentenviereck $AD + BC = AB + DC$, in Worten: Im Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich. Wir bezeichnen im folgenden die Seiten, wie üblich, mit a statt AB, b statt BC, c statt CD, d statt DA.

Aufgabe 18. Untersuche, ob der Satz vom Tangentenviereck auch gilt, wenn das Viereck eingebuchtet ist!

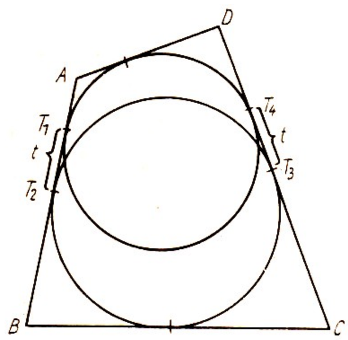




Figur 27 und 28

6. Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck.
In einem Viereck $ABCD$ sei $a + c = b + d$. Wir können dabei, falls a und b voneinander verschieden sind, ohne Einbuße an Allgemeinheit $b > a$ voraussetzen; dann ist $c > d$.
Wir tragen (Fig. 28) a auf b von B bis B' ab, d auf c von D bis C'. Wegen unserer Annahme liegt B' zwischen B und C, C' zwischen C und D.

Es sind jetzt $\triangle ABB'$, $\triangle ADC'$ und wegen $b - a = c - d$ auch $\triangle CB'C'$ gleichschenklig. Die Symmetrieachsen der gleichschenkligen Dreiecke sind gleichzeitig Mittelsenkrechten von $\triangle AB'C'$, gehen also durch einen Punkt M, der von allen vier Seiten des Vierecks gleichen Abstand hat. Das bedeutet aber, $ABCD$ ist ein Tangentenviereck.



Figur 29

Aufgabe 19. Wie ist zu verfahren, wenn $a = b$ ist?

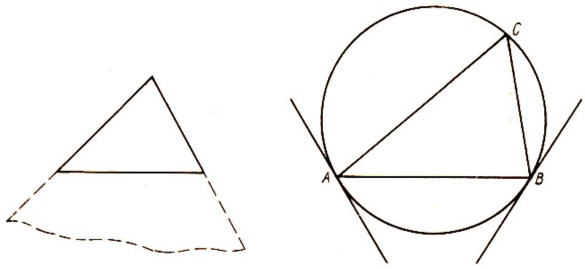
Wir wollen noch auf eine andere, näherliegende Weise einsehen, dass $a+c = b+d$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Viereck Tangentenviereck ist.
Es liege ein beliebiges Viereck vor (Fig. 29). Es ist immer möglich, den Seiten a, b, c und den Seiten a, d, c Kreise einzuschreiben; die gemeinschaftliche Zentrale dieser Zweikreisfigur geht übrigens durch den Schnittpunkt von a und c, und diese beiden Seiten sind die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten der beiden Kreise.

Sind T_1, T_2, T_3, T_4 die vier Berührungspunkte auf den Seiten a und c, so wie es Figur 29 andeutet, dann ist $T_1T_2 = T_3T_4 = t$ und $a + c - 2t = b + d$.
Dann und nur dann, wenn $t = 0$ ist, wird $a + c = b + d$, d.h. aber, statt der Zweikreisfigur liegt ein einziger Kreis vor.

Von der Wiedergabe des in den Lehrbüchern üblichen indirekten Beweises für die Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck sehen wir hier ab.

6 Die Sätze vom Umfangswinkel und Sehnenviereck

1. Man schneide in ein Stück Papier einen geradlinigen Schlitz und stecke von unten einen Winkel so durch den Schlitz, dass der Scheitel und Stücke der Schenkel heraussehen (Fig. 30).



Figur 30 und 31

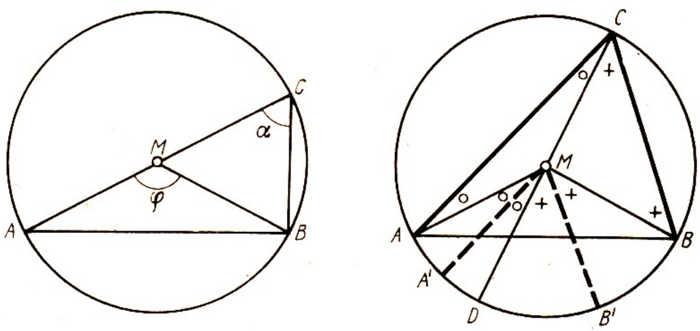
Wenn man jetzt den Winkel so bewegt, dass der Winkelraum den Schlitz immer ganz ausnützt, die Schenkel also stets durch die Endpunkte des Schlitzes gehen, so beobachtet man, dass der Scheitelpunkt bei allen Lagen auf einem festen Kreisbogen über dem Schlitz als Sehne liegt.

Wir nennen einen Winkel, dessen Scheitel auf dem Kreis liegt - und dessen beide Schenkel den Kreis ein zweites Mal schneiden, Umfangs- oder Peripheriewinkel.
Schneidet nur ein Schenkel den Kreis das zweite Mal, während der andere zur Tangente, genauer gesagt zur Halbtangente wird, dann sprechen wir von einem Sehnentangentenwinkel.
Unser Schlitzversuch legt dann folgenden Satz nahe:

In einem Kreis sind die Umfangswinkel über einem Kreisbogen gleich.

Der Beweis folgt sofort aus Abschnitt 5./4. Zeichnen wir nämlich einen Kreis (Fig. 31) und die Sehnentangentenwinkel unter der Sehne AB, so ist $\sphericalangle ACB$, wobei C auf dem Kreisbogen über AB liegt, immer gleich den Sehnentangentenwinkeln, wo immer auch der Punkt C auf dem Kreisbogen liegt.[2]

2. Der übliche Beweis des Satzes vom Umfangswinkel benutzt den Satz, dass der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks doppelt so groß ist wie jeder Basiswinkel, und unterscheidet nun mehrere Fälle.



Figur 32 und 33

[2]Der schon bewiesene Satz vom Thaleskreis ist ein Sonderfall des allgemeineren Satzes vom Umfangswinkel.

Geht der eine Schenkel des Umfangswinkels α durch die Kreismitte (Fig. 32), dann ergibt sich nach dem eben genannten Satz $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$, wobei φ der Zentriwinkel AMB ist.

Liegt M zwischen den Schenkeln CA und CB (Fig. 33), dann ziehen wir CM; der Schnitt mit dem Kreis sei D. Dadurch wird α in die Teile α_1 und α_2, φ in φ_1 und φ_2 geteilt. Da aber $\alpha_1 = \frac{1}{2}\varphi_1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\varphi_2$ ist, gilt auch hier

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi$$

Will man die Rechnung vermeiden, so kann man $MA' \parallel CA$ und $MB' \parallel CB$ ziehen. Dann ist AMA' als Wechselwinkel von CAM gleich α_1 und $A'MD$ als Gegenwinkel von ACM gleich α_1. Das Entsprechende gilt von α. So sieht man, dass der Zentriwinkel doppelt so groß ist wie α.

Liegt M außerhalb des Winkelraumes von ACB, so führt auch hier eine Hilfsgerade CM dazu, den Fall auf den zuerst behandelten zurückzuführen, nur muss man hier statt mit einer Summe mit einer Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ rechnen.

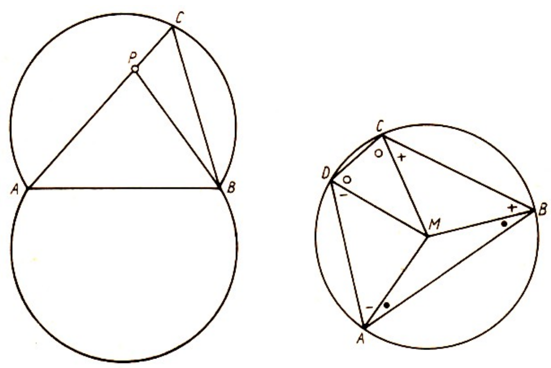
Aufgabe 20. Wie gestaltet sich hier die rechnungslose Beweisführung?

Aufgabe 21. Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass der Scheitel des Umfangswinkels auf dem größeren der beiden Kreisbögen liegt, die die Sehne AB bestimmt. Wie stehen die Dinge, wenn der Scheitel auf dem kleineren Bogen liegt?

In allen Fällen ist zunächst nur bewiesen, dass der Umfangswinkel halb so groß ist wie der dazugehörige Zentriwinkel. Da aber für alle Umfangswinkel der zugehörige Zentriwinkel der gleiche ist, folgt ohne weiteres, dass die Umfangswinkel über dem gleichen Kreisbogen gleich sind.

3. Die Umkehrung des Satzes vom Umfangswinkel.
Sind eine Strecke AB und $\sphericalangle\alpha$ gegeben, so werden wir nach dem geometrischen Ort der Scheitelpunkte von Winkeln fragen, die gleich dem vorgegebenen $\sphericalangle\alpha$ sind und deren Schenkel durch A und B gehen.

Wir können uns leicht, entweder mit Hilfe des Sehnentangentenwinkels oder des Zentriwinkels 2α, einen Kreis konstruieren, dessen einer Kreisbogen α als Umfangswinkel hat. Sind das aber alle Punkte der gewünschten Art?



Figur 34 und 35

Zunächst ist natürlich zu sagen, dass unsere Figur unzureichend ist. Wir müssen sie ergänzen zu einem Kreiszweieck, das man durch Spiegelung des gefundenen Kreisbogens an AB erhält (Fig. 34).

Jetzt ist aber unsere Lösung vollständig. Es liege nämlich ein Punkt P zunächst in diesem Kreiszweieck. Dann bringen wir AP zum Schnitt mit dem einen Kreisbogen, es sei das C. Nun ist $\sphericalangle ACB$ einer der Umfangswinkel, $\sphericalangle APB$ aber ist als Außenwinkel von $\triangle PBC$ größer als $\sphericalangle ACE$.

Aufgabe 22. Punkt P liegt außerhalb des Kreiszweiecks. Beweise, dass dann $\sphericalangle APB$ kleiner als der zum Kreiszweieck gehörige Umfangswinkel ist!

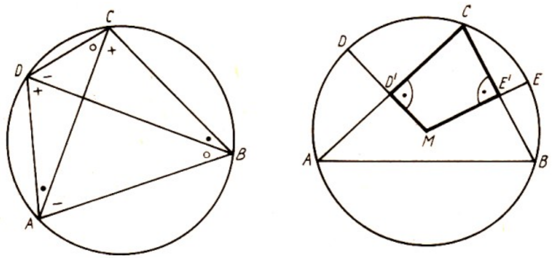
4. Satz vom Sehnenviereck.
Verbindet man die Ecken A, B, C, D eines Sehnenvierecks mit der Mitte M des Umkreises, so entstehen an den Ecken des Vierecks acht paarweise gleiche Teilwinkel; sie sind in der Figur 35 mit gleichen Zeichen versehen.
Greifen wir zwei gegenüberliegende Winkel des Vierecks heraus, so steuert zu der Summe dieser beiden Winkel jedes der vier Paare gerade einen Teilwinkel bei; folglich ist im Sehnenviereck die Summe der Gegenwinkel gleich, und zwar jeweils zwei Rechte, da ja die Summe aller Viereckswinkel vier Rechte ist.

5. Beziehung zwischen den Sätzen vom Umfangswinkel und vom Sehnenviereck.
Setzen wir den Satz vom Umfangswinkel als bewiesen voraus, dann folgt daraus der Satz vom Sehnenviereck ohne weiteres:
Zieht man nämlich (Fig. 35) die zu zwei Gegenecken B und D gehörigen Radien MB und MD, dann ist $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BMD$ und $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\sphericalangle BMD$, wobei unter $\sphericalangle BMD$ das eine Mal der überstumpfe Winkel zu verstehen ist. Da aber die beiden Zentriwinkel bei M zusammen vier Rechte sind, sind die beiden Gegenwinkel des Sehnenvierecks zusammen halb so groß, also zwei Rechte.

Bei Euklid findet sich ein anderer Beweis, der gleichfalls auf den Satz vom Umfangswinkel zurückgeht. Euklid kennt nämlich keine überstumpfen Winkel, und so steht ihm der in den Lehrbüchern übliche, eben wiedergegebene Beweis nicht offen.
Er berücksichtigt also auch den in Aufgabe 21 behandelten Fall nicht (der übrigens auch in den meisten Lehrbüchern der Gegenwart fehlt), ohne den wir aber bei diesem Beweis nicht auskommen.

Sein Beweis, der mit dem in Abschnitt 4./4. gegebenen verwandt ist, verläuft so:
Zieht man im Sehnenviereck beide Diagonalen, so liefert der Satz vom Umfangswinkel vier Paare gleichbezeichneter Teilwinkel (Fig. 36). Daraus folgt in der gleichen Schlussweise wie in Abschnitt 4./4. der Satz vom Sehnenviereck.

Man kommt mit einer Diagonale aus, wenn man zum Satz vom Umfangswinkel auch noch den vom Sehnentangentenwinkel hinzunimmt. Zieht man in A die Tangente LN an den Kreis, so ist $\sphericalangle DAL = \sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle NAB = \sphericalangle BCA$. Daraus folgt alles Weitere.



Figur 36 und 37

Ist umgekehrt der Satz vom Sehnenviereck bekannt, so ist der Satz vom Umfangswinkel eine unmittelbare Folge:

Ist nämlich ABC ein Umfangswinkel über der Sehne AC, so nehmen wir Punkt D unter der Sehne fest an; es sei $\sphericalangle ADC = \delta$. Dann ist nach dem Satz vom Sehnenviereck $\sphericalangle ABC = 2R - \delta$, und zwar ganz gleichgültig, wo auf dem Kreisbogen B über AC liegt; alle Umfangswinkel über AC haben also gleiche Größe.

Wir haben gesehen: Man kann den Satz vom Umfangswinkel entweder unabhängig vom Sehnenviereckssatz herleiten oder als dessen Folge, und man kann ebenso den Satz vom Sehnenviereck entweder unabhängig vom Umfangswinkelsatz herleiten oder als dessen Folge.

Aufgabe 23. Untersuche die Winkelbeziehung an einem überschlagenen Sehnenviereck !

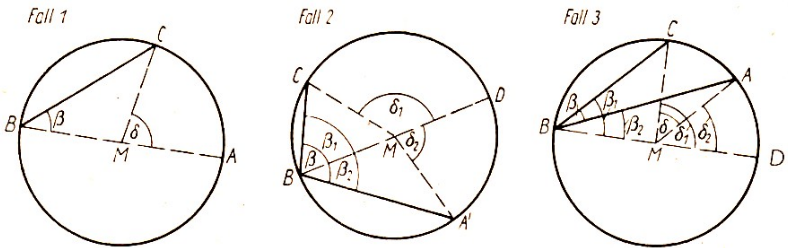
6. Ein weiterer Beweis.
Es liege die Kreismitte M zwischen den Schenkeln des Umfangswinkels ACB (Fig. 37). MD' und ME' seien die Senkrechten auf die Schenkel des Winkels, D und E die Schnitte dieser Senkrechten mit dem Kreise.
Dann ist Bogen AD = Bogen CD und Bogen CE = Bogen BE, also ist Bogen DB die Hälfte von Bogen AB, und das ist immer der Fall, gleichgültig, wo C auf dem Kreisbogen liegt. Der zu diesem Bogen gehörige Zentriwinkel DME ist also konstant.

Das Viereck $MD'CE'$ hat zwei rechte Gegenwinkel, die Summe der beiden anderen Winkel ist also 2 R; da Winkel DME konstant ist, ist deshalb auch der Umfangswinkel ACB konstant.

Aufgabe 24. Wie gestaltet sich dieser Beweis, wenn M nicht zwischen den Schenkeln des Umfangswinkels liegt?

7. Satz: Der Peripheriewinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen.

Gegeben sei der Umfangswinkel $ABC = \beta$ im Kreis mit dem Mittelpunkt M, dessen Zentriwinkel $\sphericalangle AMC$ ist.



Figur 38

Behauptung: $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$ (Fig. 38)

Fall 1 (Ein Schenkel des Peripheriewinkels geht durch M).

Beweis:

$$\begin{array}{rl}
\text{Aus 1)} & \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCM + \sphericalangle CMN = \pi \\
\text{und 2)} & \sphericalangle AMC + \sphericalangle CMB = \pi \\
\text{folgt} & \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCM = \sphericalangle AMC \\
\text{aus 3)} & \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCM \\
\text{folgt} & 2(\sphericalangle ABC) = \sphericalangle AMC \\
\text{also} & 2\beta = \delta \\
\text{oder} & \beta = \dfrac{\delta}{2}
\end{array}$$

Fall 2 (M liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels).

Zum Beweise ziehe man die Durchmessersehne BD. Diese Sehne teilt den Winkel in zwei Teile mit den Winkeln β_1 und β_2 mit $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.
Für jeden Teilbereich lässt sich dann der Beweis nach Fall 1 durchführen!

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta_1 = \delta_1 \\ 2\beta_2 = \delta_2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{2}\delta_1 \\ \beta_2 = \frac{1}{2}\delta_2 \end{array}\right\} \beta_1 + \beta_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \to \beta = \frac{\delta}{2}$$

Fall 3 (Der Mittelpunkt M liegt außerhalb des Winkels ABC)

Man zeichne die Durchmessersehne BMD und findet $\beta = \beta_1 - \beta_2$, daraus unter Anwendung von Fall 1 $\beta = \frac{\delta}{2}$.
(Führe den Beweis im einzelnen als Übung aus!)

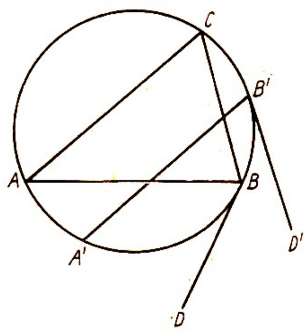
Dieser Satz lässt 3 Corallare zu

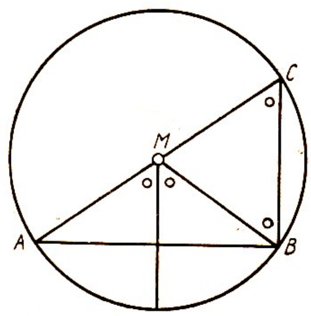
Corollar 1: Gleiche Peripheriewinkel besitzen den gleichen Bogen.

Corollar 2: Alle Umfangswinkel mit gleichem Bogen sind einander gleich.

Corollar 3: Jeder Umfangswinkel im Halbkreis beträgt $\frac{\pi}{2}$.

8. Drehung als Beweismittel.
Bisher haben wir von dem beim Kreise eigentlich nächstliegenden Beweismittel noch keinen Gebrauch gemacht, der Drehung um die Mitte. Wir fügen (Fig. 39) dem Umfangswinkel ACB den Sehnentangentenwinkel ABD an und drehen diesen Sehnentangentenwinkel um den Kreismittelpunkt, bis der Scheitelpunkt B auf die Mitte B' des Kreisbogens BC fällt.

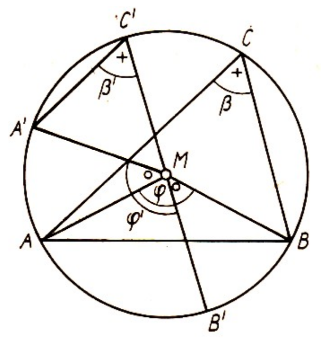




Figur 39 und 40

In der neuen Lage heiße der Winkel $A'B'D'$. Dann ist die Sehne AB in die Lage $A'B'$ gekommen und, da $AA' = BB' = CB'$, ist nach Abschnitt 4./2. $A'B' \parallel AC$.
Da $B'B = B'C$, ist der freie Schenkel des Sehnentangentenwinkels in der neuen Lage parallel CB. Die Winkel ACB und $A'B'D'$ haben also parallele und gleichgerichtete Schenkel, sind also gleich.
Aus $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'B'D'$ und $\sphericalangle A'B'D' = \sphericalangle ABD$ folgt $\sphericalangle ACB = ABD$, d.h. aber, die Größe des Umfangswinkels ist von der Lage von C auf dem Kreisbogen über AB' unabhängig.

9. Verschiebung als Beweismittel.
Für einen letzten Beweis des Satzes vom Umfangswinkel wollen wir als Hilfsmittel die Parallelverschiebung heranziehen. Auch hier hat man mehrere Fälle zu unterscheiden.
Die Kreismitte M liege auf einem Schenkel (Fig. 40), etwa auf AC, dann zieht man zu BC die Parallele durch M und liest auf Grund der Sätze vom Gegenwinkel und Wechselwinkel an Parallelen unmittelbar ab, dass der Zentriwinkel doppelt so groß ist wie der Umfangswinkel.



Figur 41

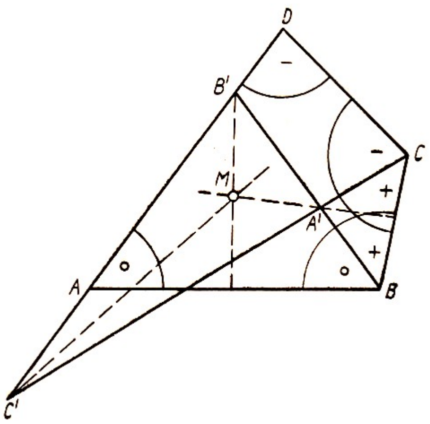
Liegt nun M zwischen den Schenkeln von ACB (Fig. 41), dann bringt man den Umfangswinkel durch parallele Verschiebung in die Lage $A'C'B'$ derart, dass M auf $B'C'$ liegt. Dann ist $\beta' = \frac{1}{2}\varphi'$; da aber Bogen CC' = Bogen BB' = Bogen AA' ist, ist $\varphi = \varphi'$, weil die zu diesen Zentriwinkeln gehörigen Kreisbögen $AB' + B'B$ und $AB' + A'A$ gleich sind.

Aufgabe 25. Wie verläuft der Beweis, wenn M nicht zwischen den Schenkeln des Umfangswinkels liegt?

Aufgabe 26. Wie verläuft der Beweis, wenn der Umfangswinkel stumpf ist?

10. Die Umkehrung der Satzes vom Sehnenviereck.
Wer den Satz vom Sehnenviereck und Tangentenviereck und gewisse Beweise miteinander vergleicht, wird einen Dualismus wahrgenommen haben.

Der Gleichheit von Winkeln hier entspricht die Gleichheit von Strecken dort und umgekehrt. Wir wollen sehen, ob sich dieser Gedanke nicht fruchtbar machen lässt für einen Beweis der Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck. Wir wollen, einem solchen Dualismus nachgehend, zunächst den ersten Beweis der Umkehrung des Tangentenvierecksatzes als Leitfaden nehmen. Dabei wird möglichst der gleiche Wortlaut wie in Abschnitt 5./6. gewählt (Fig. 42).



Figur 42

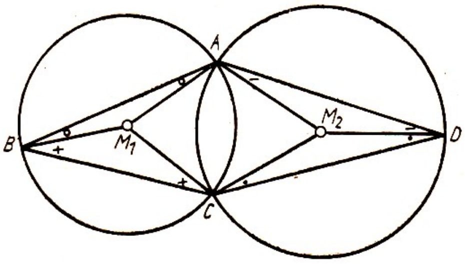
In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Wir können dabei, falls α und β voneinander verschieden sind, ohne Einbuße an Allgemeinheit $\beta > \alpha$ voraussetzen, dann ist $\gamma > \delta$.

Wir tragen α an den Schenkel AB von β an und benennen den Schnitt mit AD mit B'. Ebenso tragen wir δ an den Schenkel DC von γ an und benennen den Schnitt mit AD mit C'. Der Schnitt von CC' und BB' sei A'.

Es sind jetzt $\triangle ABB'$, $\triangle DCC'$ und wegen $\beta - \alpha = \gamma - \delta$ auch $\triangle CA'B$ gleichschenklig.
Die Symmetrieachsen der drei gleichschenkligen Dreiecke sind gleichzeitig Winkelhalbierende von $\triangle A'B'C'$, gehen also durch einen Punkt M, der von allen vier Eckpunkten des Vierecks gleichen Abstand hat. Das bedeutet aber, $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

Der Erfolg legt uns nahe, auch unseren zweiten Beweis für die Umkehrung des Tangentenvierecksatzes in gleicher Weise heranzuziehen. Es liegt ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ vor (Fig. 43).

Immer können den Dreiecken ABC und ADC Kreise umschrieben werden. AC ist gemeinsame Sehne, und die Punkte B und D legen ein bestimmtes Kreiszweieck fest. Von den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Kreise ziehen wir die Radien nach den Eckpunkten der entsprechenden Dreiecke.



Figur 43

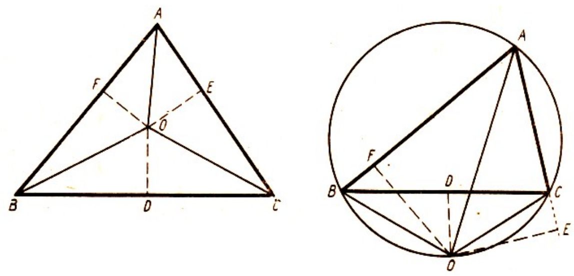
In der Figur ist angenommen, dass M_1 und M_2 im Viereck liegen. Dann ist das Viereck M_1AM_2C ein Drachenviereck oder Deltoid, und $\sphericalangle M_1AM_2 = \sphericalangle M_1CM_2 = \tau$.

Wir haben also, wenn wir die Gleichheit der mit gleichen Zeichen versehenen Winkel berücksichtigen, $\alpha + \gamma - 2\tau = \beta + \delta$. Dann und nur dann, wenn $\tau = 0$ ist, kann $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ werden, d.h. aber, statt der Zweikreisfigur $ABCD$ liegt nur ein Kreis vor, und $ABCD$ ist Sehnenviereck.
Dieser Beweis liefert also, wie der entsprechende vom Tangentenviereck, zugleich den Satz und seine Umkehrung.

Aufgabe 27. Untersuche, ob sich der Beweisgang auch aufrechterhalten lässt, wenn M_1 oder M_2 oder beide Kreismitten nicht im Viereck $ABCD$ liegen!

Aufgabe 28. Wie vereinfacht sich der letzte Beweisgang, wenn man die Beziehung zwischen Umfangswinkel und Zentriwinkel heranzieht?

11. Die Sätze vom Umfangswinkel und Sehnenviereck enthüllen einen Trugschluss.
Ein neuerdings oft vorgetragener geometrischer Trugschluss besteht darin, dass man beweist, jedes Dreieck ist gleichschenklig. Wenn nämlich in Figur 44 O der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$ und der Mittelsenkrechten von BC ist und noch die Lote OE auf AC und OF auf AB gefällt werden, dann beweist man einwandfrei die Kongruenz der Dreiecke AOF und AOE, ODB und ODC und daraus schließlich OFB und OEC.



Figur 44 und 45

Aus $AF = AE$ (Folgerung aus der ersten Dreieckskongruenz) und $BF = CE$ (Folgerung aus der dritten) ergibt sich dann $AB = AC$, womit man scheinbar bewiesen hat: Alle Dreiecke sind gleichschenklig.

Das ist natürlich falsch. Der Fehler liegt darin, dass in der Zeichnung O falsch liegt. Der Satz vom Umfangswinkel zeigt uns, und zwar in einer sehr lehrreichen Abwandlung, wo O wirklich liegt.

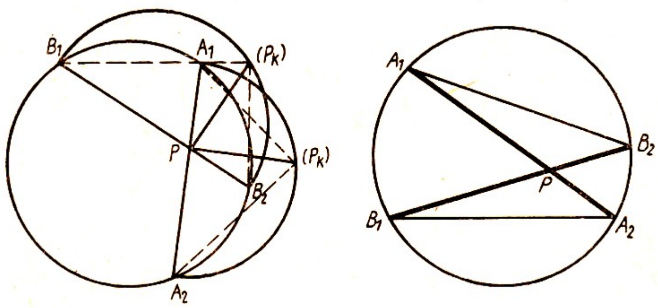
Wenn nämlich der Umkreis von ABC gezeichnet wird (Fig. 45) und O die Mitte des Kreisbogens unter der Sehne BC ist, dann geht naturgemäß die Mittelsenkrechte von BC durch O.

Weiter ist aber AO Winkelhalbierende von BAC, denn die Umfangswinkel über den gleichgroßen Kreisbögen BO und CO sind gleich.
Fasst man jetzt $ABOC$ als Sehnenviereck auf, so ist: $\sphericalangle ABO + \sphericalangle ACO = 2R$. Wenn der eine spitz ist, muss der andere stumpf sein, wenn also der Fußpunkt F des Lotes von O etwa auf AB zwischen A und B fällt, dann liegt der Fußpunkt B des Lotes von O auf AC auf der Verlängerung.
Aus $AF = AB$ und $BF = CE$ folgt also keineswegs $AB = AC$.

Aufgabe 29. Was ist zu dem Fall zu sagen, dass $\sphericalangle ABO = \sphericalangle ACO = 1R$ ist?

7 Sehnen- und Sekantensatz

1. Sehnensatz.
Die Sehnen A_1A_2 und B_1B_2 eines Kreises mögen sich im Kreise im Punkte P schneiden. Dann ist $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.



Figur 46 und 47

Passen wir nämlich die Figur 46 als Grundriss einer Halbkugel auf, P also als Projektion eines Punktes P_k auf der Kugel, dann klappen wir den Halbkreis $A_1P_kA_2$ in die Zeichenebene, wobei P_k nach (P_k) fällt. Das rechtwinklige Dreieck $A_1(P_k)A_2$ liefert

$$P(P_k)^2 = PA_1 \cdot PA_2$$

nach dem Höhensatz. In gleicher Weise liefert das rechtwinklige Dreieck $B_1(P_k)B_2$

$$P(P_k)^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 30. Führe den Beweis mit Hilfe der Ähnlichkeit der Dreiecke A_1B_2P und B_1A_2P, die aus dem Satz vom Umfangswinkel folgt (Fig. 47)!

2. Invarianten.
Der Satz vom Umfangswinkel stellt fest, dass die Größe dieses Winkels unabhängig von der Lage des Scheitels auf dem Kreise ist. Damit ist eine Invarianz ausgesprochen. Auch dass die Summe der Winkel im Dreieck zwei Rechte ist, dass die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck zwei Rechte ist, stellt eine solche Invarianz auf.
Beim Sehnensatz nun handelt es sich gleichfalls um eine Invariante, und zwar für das Produkt der Maßzahlen zweier Sehnenabschnitte oder, geometrisch gesprochen, für den Inhalt des Rechtecks, das aus diesen Sehnenabschnitten gebildet wird.

Dieses Rechteck liefert die Abschnitte auf jeder durch den festen Punkt gelegten Sehne. Man kann aber nach besonders zweckmäßigen Lagen der Sehne suchen. Da bieten sich zwei an.

Einmal kann man den durch den Punkt gehenden Kreisdurchmesser wählen, zum anderen die dazu senkrechte Sehne. Die letzte liefert zwei gleich lange Abschnitte; aus dem Rechteck wird ein Quadrat.
Beide Sehnen, der Durchmesser mit seinen Abschnitten PA_1 und PA_2 die dazu senkrechte Sehne, die in zwei gleiche Halbsehnen PB zerfällt, liefert als Sonderfall des Sehnensatzes wieder den hier bei seiner Herleitung benutzten, aber von ihm tatsächlich unabhängigen Höhensatz $PB^2 = PA_1 \cdot PA_2$ im rechtwinkligen Dreieck.

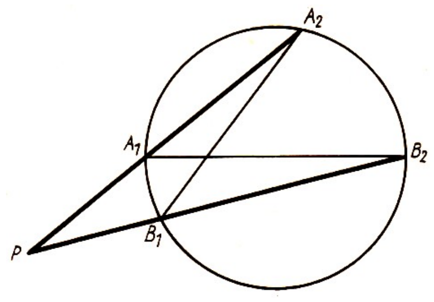
3. Sekantensatz.
Wir setzten voraus, dass der Punkt P im Innern des Kreises lag; wie aber, wenn er außerhalb des Kreises liegt?
Aus den Sehnen A_1A_2 und B_1B_2 werden also die durch P gehenden Sekanten (Fig. 48). Wir wenden jetzt das auf der Ähnlichkeitslehre beruhende Beweisverfahren an (Aufg. 30).

Die Dreiecke PA_1B_2 und PB_1A_2 sind ähnlich, mithin wird

$$PA_1 : PB_2 = PB_1 : PA_2 \qquad \text{oder}$$

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$

eine Gleichung, die mit der in Abschnitt 7./1. hergeleiteten übereinstimmt. Zu beachten ist, dass die Abschnitte, die in der Gleichung auftreten, vom Punkt P aus gerechnet werden.

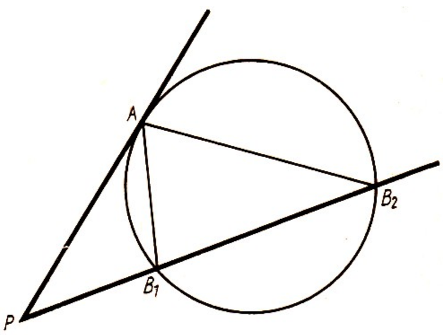


Figur 48

Da die Beziehung, die wir in Abschnitt 7./I. für einen Punkt P im Kreis, soeben für einen Punkt außerhalb des Kreises hergeleitet haben, sowohl für zwei wie auch für beliebig viele durch P gehende Geraden, die also ein Geradenbüschel bilden, gilt, können wir, wenn wir auch die Sehnen als Sekanten ansprechen, unseren Befund allgemein so ausdrücken:

Werden die Geraden eines Geradenbüschels von einem Kreis geschnitten, dann ist das Produkt der beiden vom Scheitel des Büschels aus gemessenen Teilstrecken auf jeder Sekante eine Invariante.

Man nennt diese Invariante die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis. Gibt man den Teilstrecken Vorzeichen, so haben sie, wenn P im Kreis liegt, entgegengesetzte Richtung und deswegen verschiedenes Vorzeichen; wenn P außerhalb des Kreises liegt, gleiche Richtung und deswegen gleiches Vorzeichen. Die Potenz eines Punktes im Kreis wird also negativ, eines Punktes außerhalb des Kreises positiv.



Figur 49

4. Sekanten-Tangentensatz.
Wird die eine Sekante zur Tangente, so fallen die Schnittpunkte mit dem Kreis, etwa A_1 und A_2 , in einen Punkt A zusammen (Fig. 49).
Rein formal erhalten wir also, indem wir die Tangente als Grenzfall der Sekanten auffassen, die Gleichung

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

Schreiben wir das als Proportion

$$PB_1 : PA = PA : PB_2$$

so können wir das Ergebnis auch in der Form aussprechen:

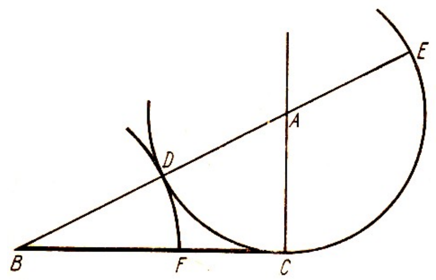
Legt man von einem Punkt an einen Kreis eine Tangente, dann ist der Tangentenabschnitt mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten jeder Sekante, die von dem gleichen Punkt durch den Kreis gezogen wird.

5. Der Goldene Schnitt.
Es sei eine Strecke BC gegeben. In ihrem einen Endpunkt C ist die Senkrechte $AC = \frac{1}{2}BC$ errichtet und mit AC als Radius um A der Kreis geschlagen. Dieser berührt also BC in C. Die Zentrale AB schneide den Kreis in D und E. Dann ist $DE = BC$ (Fig. 50). Auf diese Figur wenden wir jetzt den Sekanten-Tangentensatz an. Es wird

$$BD \cdot BE = BC^2 \qquad \text{und wegen} \qquad BC = DE$$

$$BD \cdot BE = DE^2 \qquad \text{oder} \qquad BD : DE = DE : BE$$

Wir haben also die Strecke BE so in zwei Abschnitte geteilt, dass der größere die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Abschnitt und der ganzen Strecke ist.



Figur 50

Freilich haben wir die Strecke BE erst im Laufe der Konstruktion gewonnen. Wie verfahren wir, wenn wir eine vorgegebene Strecke, etwa BC, in dieser Weise teilen wollen?
Das ist sofort möglich, wenn wir das gefundene Teilverhältnis $BD : DE$ auf unsere Ausgangsstrecke BC durch Parallelen übertragen.
Wir ziehen CE und parallel dazu durch D die Gerade, die BC in der gewünschten Weise teilt.

Üblich ist ein anderes Verfahren. Man trägt BD von B auf BC ab bis F. Dann ist F der gewünschte Teilpunkt. Um das zu beweisen, bedarf man eines Satzes aus der elementaren Algebra.
Aus unserer Proportion

$$BD : DE = DE : BE$$

folgt nämlich die Proportion

$$DE : (BE - DE) = BD : (DE - BD)$$

wovon man sich am einfachsten überzeugt, wenn man die Produktengleichung bildet,

$$DE^2 - DE \cdot BD = BE \cdot BD - DE \cdot BD$$

die mit der Produktengleichung unserer Proportion übereinstimmt. Die neue Proportion lässt sich aber in

$$BC : BF = BF : FC$$

umschreiben. F teilt also BC in gewünschter Weise.

Man spricht dann von stetiger Teilung einer Strecke oder Teilung nach dem Goldenen Schnitt. Diese Teilung einer Strecke war schon Pythagoras bekannt, sie hängt mit der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks zusammen. Die Bezeichnung "Goldener Schnitt" ist 1835 von dem Berliner Geometer M. Ohm in seinen Vorlesungen benutzt werden.

8 Kreisumfang und Kreisinhalt

1. Feststellung durch praktischen Versuch.
Um den Umfang eines Kreises festzustellen, kann man ihn längs einer Geraden abrollen lassen. Wird dieser Versuch mit einem möglichst großen, glattrandigen Geldstück oder mit dem Rade eines Fahrrades mehrfach ausgeführt, so erhält man als Ergebnis:
Das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines jeden Kreises ist etwas größer als 3. Man bezeichnet die Zahl, die dieses Verhältnis angibt, mit π.

Um den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen, kann man ihn mit einem Netz von Quadraten der Längeneinheit überdecken, die Zahl der ganz im Innern liegenden Quadrate abzählen - sie sei a -, dann die Zahl der von der Kreislinie überschrittenen Quadrate feststellen - sie sei b - und erhält dann in $a + \frac{b}{2}$ einen Näherungswert für den Flächeninhalt, indem man annimmt, dass von den von der Kreislinie durchsetzten Quadraten die Hälfte außerhalb und die Hälfte innerhalb der Kreisfläche liegen.

Zweckmäßig führt man den Versuch mit einem auf Millimeterpapier gezeichneten Kreis von 10 cm Radius aus, und zwar nur mit einem Kreisviertel oder einem Kreisachtel. Dieses Messergebnis zeigt:

Der Faktor, mit dem man das Quadrat des Radius multiplizieren muss, um den Flächeninhalt zu erhalten, scheint die gleiche Zahl π zu sein, die man bei der Umfangsbestimmung erhält.
Statt durch die Anzahl der Quadrate kann man den Flächeninhalt des Kreises auch durch die Anzahl der Punkte eines quadratischen Gitters, die in den Kreis fallen, bestimmen. Eine Auszählung dieser Art hat Gauß vorgenommen. Ist $f(r)$ die Anzahl der Gitterpunkte, die auf der Kreisfläche mit dem Radius r liegen, dann erhält man für π die Näherungsgleichung

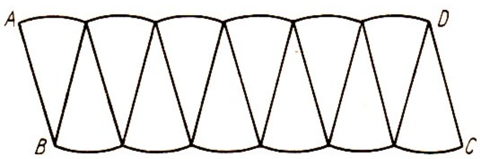
$$\pi \approx \frac{f(r)}{r^2}$$

$r =$	5	10	20	30	100	200	300
$f(r) =$	81	317	1257	2821	31417	125629	282697
$\frac{f(r)}{r^2} =$	3,24	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107

Man entnimmt dieser Wertfolge, dass sie keineswegs gleichsinnig dem tatsächlichen Wert 3,1415926... zustrebt.
Für $r = 20$ erhält man schon die richtige zweite Stelle nach dem Komma, dann aber wird der Wert wieder schlechter.

An Stelle der etwas langwierigen Auszählung der Quadrate oder Punkte kann man auch ein freilich etwas roheres Verfahren anwenden:
Man wiegt möglichst genau einen Kreis mit einem Radius von 10 cm, den man aus gleichmäßig dicker Pappe ausgeschnitten hat, und vergleicht das Gewicht mit demjenigen eines aus dem gleichen Material ausgeschnittenen Quadrates von 10 cm Seitenlänge.
Wieder ergibt sich als Verhältniszahl eine Größe, die mit der Zahl 3,1 vergleichbar ist.

2. Beziehung zwischen Umfang und Inhalt des Kreises.



Figur 51

Wir teilen den Kreis durch Radien in zwölf gleiche Kreisausschnitte, die wir so ineinander schieben wollen, wie es Figur 51 zeigt.
Wir erhalten eine dem Parallelogramm ähnliche Figur, bei der allerdings das eine Paar paralleler Seiten aus je sechs Kreisbogen zusammengestückelt ist. Was wird aus dieser Figur, wenn man statt der zwölf gleichen Kreisausschnitte deren 24 aneinanderfügt?

Einmal nähert sich dann die Kreisbogenseite der Strecke AD mehr an. Außerdem wird $\sphericalangle ABC$, der vorher 90° + 15° = 105° war, jetzt 90° + $7\frac{1}{2}^\circ$ = $97\frac{1}{2}^\circ$.
Was geschieht, wenn wir die Zahl der Kreisausschnitte noch stärker vermehren?

Bei genügend großer Anzahl werden sich die Kreisbogenseiten AD und BC praktisch nicht mehr von den Geraden AD und BC unterscheiden lassen, und $\sphericalangle ABC$ wird sich so sehr einem Rechten angenähert haben, dass er davon nicht mehr zu unterscheiden sein wird. Wir nähern uns also unbeschränkt einem Rechteck, in dem das eine Paar paralleler Seiten gleich dem halben Umfang des Kreises, das andere Paar gleich dem Radius des Kreises ist.

Andererseits stellt die Figur gerade den Flächeninhalt des Kreises dar. Wir haben also zwischen dem Umfang u, dem Flächeninhalt i und dem Radius r des Kreises die Beziehung

$$\frac{1}{2}r \cdot u = i$$

Aufgabe 31. Wie gestalten sich Figur und daran anknüpfende Überlegung wenn die Anzahl der Kreisausschnitte ungerade ist?

Aufgabe 32. Vereinfache die Überlegung dadurch, dass du einen Kreisausschnitt wegnimmst, halbierst und beiderseits eine Hälfte an die Restfigur anfügst!

Die Beziehung erleichtert uns die Berechnung vom Umfang und Inhalt des Kreises sehr wesentlich. Wir brauchen nur eine dieser beiden Größen zu bestimmen, dann liefert unsere Formel die andere.
Übrigens finden wir hier unsere Vermutung von Abschnitt 8./1. bestätigt. Dort fanden wir $u = \pi \cdot$, wobei d der Durchmesser, also $2r$ ist, und vermuteten, dass der Faktor c in $i = cr^2$ den gleichen Wert 3 hat. In der Tat ist

$$\frac{1}{2}r \cdot \pi 2r = \pi \cdot r^2$$

Noch eine weitere Vereinfachung können wir anmerken. Wir brauchen Umfang und Inhalt nicht für jeden einzelnen Kreis zu berechnen. Es kommt ja letzten Endes nur auf die Bestimmung des Faktors π in $u = \pi r$ und $i = \pi r^2$ an. Wenn wir also die Rechnung für irgendeinen Radius, etwa für r = 10 cm oder für r = 1 cm, durchgeführt haben, ist damit das allgemeine Problem erledigt.

Mit der Berechnung von Umfang und Inhalt des Kreises ergibt sich auch die Berechnung der Länge eines Kreisbogens und der Fläche eines Kreisausschnittes. Gehört zu einem Kreisbogen b der in Graden gemessene Zentriwinkel φ, dann folgt aus der Proportion $2\pi r : b = 360 : \varphi$ für den Kreisbogen

$$b = \frac{2\pi r\varphi}{360}$$

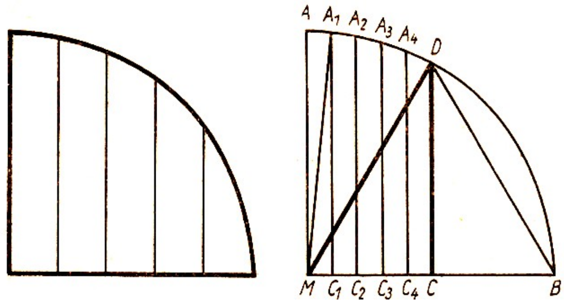
Gehört zum Kreisausschnitt a der in Graden gemessene Zentriwinkel φ, dann folgt ebenso aus der Proportion $\pi r^2 : a = 360 : \varphi$

$$a = \frac{\pi r^2\varphi}{360}$$

Führt man hier b ein, so ergibt sich als Inhalt des zum Bogen b gehörigen Kreisausschnittes auch

$$a = \frac{br}{2}$$

3. Berechnung des Kreises nach der Trapezmethode.
Wir können den Flächeninhalt des Kreises, oder einfacher nur eines Kreisviertels, in der Weise bestimmen, dass wir, ähnlich wie man das bei der praktischen Auswertung von Flächen auch sonst manchmal tut, die Figur in Streifen gleicher Breite zerlegen, jeden Streifen zum Trapez abstutzen und nun die Inhalte der einzelnen Trapeze berechnen und addieren (Fig. 52).



Figur 52 und 53

Man sieht sofort, dass das Abstutzen bei den langen Streifen verhältnismäßig geringe Fehler verursacht, bedenklicher wird die Sache aber bei den kurzen, insbesondere bei dem letzten, zu einem Dreieck ausgearteten Streifen.
Wir nehmen deshalb gleich eine Verbesserung der Methode vor (Fig. 53):
Wir ziehen durch die Mitte des einen Grenzradius unseres Kreisviertels die Parallele CD zum anderen Radius. Dann ist $\sphericalangle DMC = 60°$, $\sphericalangle MDC = 30°$.

Nach der soeben dargestellten Trapezmethode bestimmen wir den Inhalt der Fläche $AMCD$, ziehen davon $\triangle MDC$, die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, ab und behalten das Kreiszwölftel übrig; daraus lässt sich dann der ganze Kreisinhalt berechnen.

Man kann das durchführen, indem man den Kreis möglichst genau zeichnet, die Strecken ausmisst und den Inhalt der einzelnen Trapeze ausrechnet.
Wir können aber die Länge der Streifen auch rechnerisch bestimmen, brauchen dazu allerdings den pythagoreischen Lehrsatz: Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Wir wollen den Radius des Kreises zu 10 cm annehmen und MC in fünf gleiche Teile teilen. Dann haben alle Trapeze die Breite 1 cm.
Wir berechnen die Länge der parallelen Seiten. Es ist $MA = 10$ cm. C_1A_1 ergibt sich, aus dem rechtwinkligen Dreieck MC_1A_1 zu $\sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99}$, ebenso erhält man die nächste Seite C_2A_2 zu $\sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96}$, $C_3A_3 = \sqrt{91}$, $C_4A_4 = \sqrt{84}$, $CD = \sqrt{75}$.
Die Wurzeln kann man nach bekannten Regeln ausrechnen oder einer Tabelle entnehmen.

Der Inhalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a und c und der Breite b ist $\frac{1}{2}(a+c) \cdot b$. Wir haben also, da b jeweils 1 ist, für die Fläche f_1 von $ADCM$

$$f_1 = 5 + \sqrt{99} + \sqrt{96} + \sqrt{91} + \sqrt{84} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{75}$$

Der Inhalt vom $\triangle MCD$ ist $2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{75}$. Daraus kann man einen Näherungswert für den ganzen Kreisinhalt berechnen; man erhält 313,6, also $\pi \approx 3,136$; der wahre Wert auf fünf geltende Ziffern ist 3,1416.

Man kann das Verfahren beliebig verfeinern, nur muss die Anzahl der Streifen genügend vergrößert werden.

4. Berechnung mit Hilfe der regelmäßigen Vielecke.

Die Berechnung von π hat Anlass zu den mannigfaltigsten Versuchen gegeben. Man ist geometrisch in der Weise an die Aufgabe herangegangen, dass man ein Quadrat, sei es von gleichem Inhalt oder von gleichem Umfang wie ein Kreis, mit Zirkel und Lineal zu konstruieren versuchte. Das ist nicht gelungen, und der Mathematiker Lindemann hat, wenn auch erst 2000 Jahre nach den ersten Versuchen, bewiesen, dass es nicht gelingen konnte.

Man hat dann möglichst gute Näherungskonstruktionen gesucht und in großer Zahl gefunden. Andererseits wurde das Problem rechnerisch angepackt. Auch da war zunächst ein Misserfolg zu überwinden:

Wenn man das Wurzelziehen mit beliebigen Exponenten zulässt. ja wenn man das Lösen irgendwelcher Gleichungen n-ten Grades als erlaubt ansieht, ist π doch nicht genau numerisch angebbar.
Auch jetzt kann man wieder die verschiedensten Näherungswerte für π aufsuchen oder aber gesetzmäßige Zahlenfolgen angeben, die n mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit darstellen. Im folgenden werden einige elementare Verfahren erwähnt, π mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen.

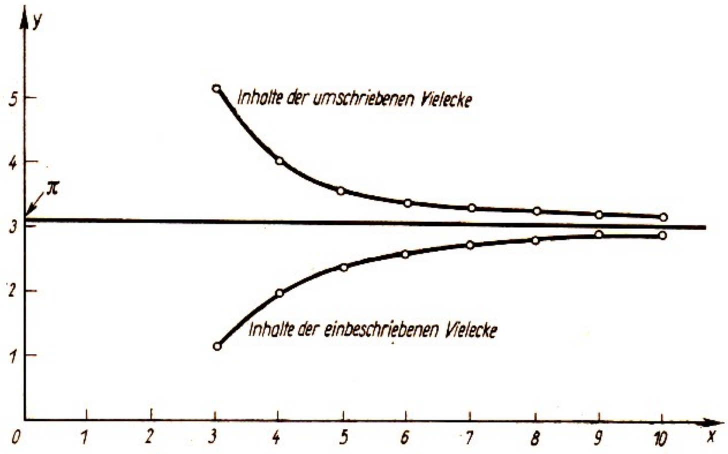
Es liegt zunächst zur Annäherung des Kreises die Heranziehung der regelmäßigen Vielecke nahe. Eingeschriebene und umgeschriebene regelmäßige Vielecke liefern in einfacher Weise sowohl für den Umfang wie für den Inhalt des Kreises untere und obere Schranken.
So ist z.B. der Umfang des regelmäßigen eingeschriebenen Sechsecks $u_6 = 6r$ eine untere, der Umfang des entsprechenden umgeschriebenen Sechsecks $U_6 = 4\sqrt{3} \cdot r$ eine obere Schranke des Kreisumfangs.
Ebenso ist z.B. der Inhalt des ein- geschriebenen Quadrates $i_4 = 2r^2$ eine untere, der Inhalt des umgeschriebenen Quadrates $I_4 = 4r^2$ eine obere Schranke des Kreisinhaltes. Das sind freilich Schranken, die einen recht großen Zwischenraum lassen.

Nach dem Ergebnis von Abschnitt 8./2. genügt es, die Rechnung einmal durchzuführen, entweder für den Umfang oder für den Inhalt. Wir haben damit also zwei Möglichkeiten.
Wie aber kann man die Schranken in dem Fall, den man wählt, nach Belieben einengen? Nun, man wird darauf ausgehen, nach irgendeinem Gesetz die Seitenzahl des Vielecks ständig zu vermehren.

Es hat sich als gangbar erwiesen, von einem regelmäßigen n-Eck jeweils zu einem $2n$-Eck überzugehen. Es gibt nun wieder zwei Wege:
Entweder lässt man Umfang oder Inhalt des Kreises fest, ändert also ständig Umfang bzw. Inhalt der Vielecke, oder man lässt Umfang bzw. Inhalt der Vielecke fest, ändert also jeweils den Radius des In- bzw. Umkreises. So stehen also zunächst insgesamt vier Verfahren offen.

Wir können dies noch an einer anschaulichen Darstellung der Folgen der ein- und umbeschriebenen Vielecke des Einheitskreises (Fig. 54) deutlich machen.

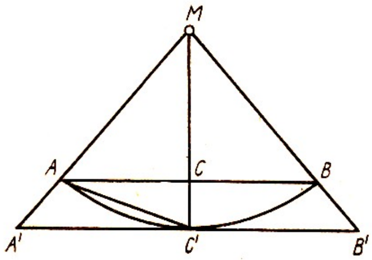
Im Schaubild sind durch je eine Kurve die Inhaltszahlen für die entsprechenden ein- oder umbeschriebenen Vielecke dargestellt. Beide Kurven nähern sich asymptotisch einer Geraden, die parallel zur x-Achse im Abstand $\sim 3,1$, genauer im Abstand der Zahl π verläuft.



Figur 54

5. Berechnung des Kreisumfangs bei konstantem Kreisradius.
Wir brauchen für unsere Überlegung eine Beziehung
1. zwischen den Seiten des eingeschriebenen und des umgeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und
2. zwischen den Seiten des eingeschriebenen n-Ecks und den Seiten des eingeschriebenen $2n$-Ecks.

Zur Herleitung dieser Beziehungen benutzen wir den pythagoreischen Lehrsatz und den Satz, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.



Figur 55

Es sei in Figur 55 AB eine n-Eckseite s_n; AC' eine $2n$-Eckseite s_{2n} des Kreises mit dem Radius 1. C sei der Schnitt von AB und MC'. Dann ist

$$MC = \sqrt{1 - \frac{1}{4}s_n^2} \quad , \quad CC' = \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{1}{4}s_n^2}$$

folglich

$$\sqrt{1 - \frac{1}{4}s_n^2} + \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{1}{4}s_n^2} = 1$$

Daraus folgt durch Quadrieren

$$s_{2n}^2 - \frac{1}{4}s_n^2 = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}s_n^2} + 1 - \frac{1}{4}s_n^2 \quad \text{also} \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Man kann also aus s_n jeweils s_{2n} berechnen. So ist z.B., da $s_6 = 1$,

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Man übersieht auch, dass man bei einem Übergang von einem gegebenen s_n zu einem s_{2n} rechnerisch immer mit dem Ausziehen von Quadratwurzeln durchkommt.

Zur Seite S_n des umgeschriebenen n-Ecks führt die Proportion[3]

$$S_n : s_n = MC' : MC$$

mithin, da $MC' = 1$,

$$MC = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2} \qquad ; \qquad S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

Dass sich Umfang des eingeschriebenen und umgeschriebenen n-Ecks mit wachsendem n unbeschränkt der gleichen Grenze, eben dem Kreisumfang, nähern, ersieht man daraus, dass auch das Verhältnis der Vielecksumfänge $u_n : U_n = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2}$ sich mit wachsendem n unbeschränkt der 1 nähert.

Aufgabe 33. Berechne die Seiten des dem Kreise mit dem Radius 1 umgeschriebenen regelmäßigen 6-Ecks!

Die Ausrechnung der Seiten und Umfänge einer Folge eingeschriebener und umgeschriebener regelmäßiger Vielecke auf Grund dieser Formel ist recht mühsam, da man aus den errechneten Quadratwurzelausdrücken immer erneut Wurzeln ziehen muss.
Die Lehrbücher pflegen eine Tabelle zu geben, die etwa vom 6-Eck schrittweise bis zum 96-Eck vorgeht.

Aufgabe 34. Drücke S_{2n} durch s_n aus! Aufgabe 35. Leite für die Umfänge die folgenden beiden Formeln her:

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}\right) \qquad ; \qquad u_{2n} = \sqrt{u_n \cdot U_{2n}}$$

Die in dieser Aufgabe angegebenen Beziehungen vereinfachen den Rechnungsgang. Man kann, ausgehend vom Umfang eines eingeschriebenen und eines umgeschriebenen n-Ecks, erst den Umfang des umgeschriebenen $2n$-Ecks, dann den Umfang des eingeschriebenen $2n$-Ecks berechnen und so fortfahren, ohne dass man sich jeweils um s_{2n} und S_{2n} kümmert.

Aufgabe 36. Gehe vom 6-Eck zum 12-Eck und von da zum 24-Eck über! Welche Schranken erreicht man so für n?

6. Berechnung des Kreisinhaltes bei konstantem Kreisradius.
Für den Inhalt f_n des zum regelmäßigen eingeschriebenen n-Eck gehörigen Teildreiecks AMB (Fig. 55) erhalten wir

$$f_n = \frac{s_n \cdot MC}{2} = \frac{s_n\sqrt{4 - s_n^2}}{4}$$

Der Inhalt des Teildreiecks, das zum entsprechenden $2n$-Eck gehört, ergibt sich aus $\triangle AMC'$:

$$f_{2n} = \frac{MC' \cdot AC}{2} = \frac{s_n}{4}$$

[3] Diese Proportion ist eine Folge des 2. Ähnlichkeitssatzes. Mit Hilfe des Satzes: Die Inhalte zweier Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte aus den anliegenden Seiten, kann man die Tatsache auch ohne Ähnlichkeitslehre einsehen. Das Verhältnis $\triangle MA'C' : \triangle MAC$ drücken wir nach diesem Satz zweimal aus und setzen beide Verhältnisse gleich:

$$MA' \cdot A'C' : MA \cdot AC = MA' \cdot MC' : MA \cdot MC$$

Daraus folgt $A'C' : AC = MC' : MC$ und deshalb auch $A'B' : AB = MC' : MC$.

F_n und F_{2n} können wir wieder auf Grund der Ähnlichkeit der Teildreiecke nach der Proportion

$$F_n : f_n = 1 : MC^2$$

bestimmen. Dann erhält man

$$F_n = \frac{s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

auf entsprechendem Wege ergibt sich

$$F_{2n} = \frac{s_n}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Die Inhalte der ganzen n-Ecke seien

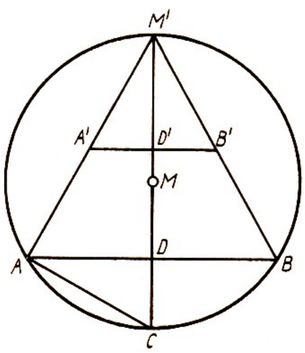
$$i_n = n \cdot f_n, \qquad i_{2n} = 2n \cdot f_{2n}, \qquad I_n = n \cdot F_n, \qquad I_{2n} = 2n \cdot F_{2n}$$

Dann bestätigt man aus unseren Ausdrücken leicht die Rekursionsformeln

$$i_{2n} = \sqrt{i_n \cdot I_n} \qquad ; \qquad \frac{1}{I_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i_{2n}} + \frac{1}{I_n}\right)$$

Man kann also, von einem bekannten Paar i_n und I_n ausgehend, erst i_{2n} und dann I_{2n} berechnen und so fortfahren.

Aufgabe 37. Gehe von einem Quadrat zum 8- und von da zum 16-Eck über! Welche Schranken erreicht man so für π?



Figur 56

7. Berechnung bei konstantem Umfang und veränderlichem Radius.

Es liege die Seite s_n eines regelmäßigen n-Ecks vor, und es sei der zugehörige Radius r_n des umgeschriebenen und ρ_n des eingeschriebenen Kreises bekannt. So ist z.B. für $n = 4$ und $s_n = 1$

$$r_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \rho_n = \frac{1}{2}$$

In Figur 56 sei $AB = s_n$. Die Schnitte des Umkreises des regelmäßigen n-Ecks mit der Sehnenmittelsenkrechten MD seien C und M', und zwar liege C auf der Verlängerung über D hinaus, M' auf der Verlängerung über M hinaus.

Durch die Mitte von DM' den Punkt D', ziehe man zu AB die Parallele, die $M'A$ in A', $M'B$ in B' trifft.

Dann ist $A'B' = \frac{1}{2}s_n = s_{2n}$, und es kommt nun alles darauf an, zu s_{2n}, die Werte der zugehörigen Radien $r_{2n} = M'A'$ und $\rho_{2n} = M'D'$ zu finden. Nun ist $M'D' = \frac{1}{2}M'D = \frac{1}{2}(M' + MD)$, also

$$\rho_{2n} = \frac{1}{2}(r_n + \rho_n)$$

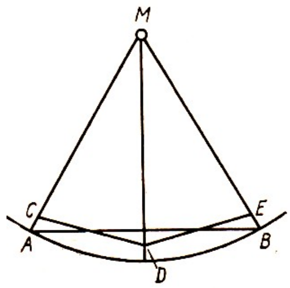
In dem rechtwinkligen Dreieck $M'AC$, ist nach dem Satz von Euklid $M'A^2 = M'C \cdot M'D$. Das liefert uns

$$(2r_n)^2 = 2r_n \cdot 2\rho_{2n} \qquad \text{woraus folgt} \qquad r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_n}$$

Man kann also ganz ähnlich wie bei den in den Abschnitten 8./5. und 6. abgeleiteten Rekursionsformeln aus gegebenen r_n und ρ_n zunächst ρ_{2n}, dann r_{2n} berechnen und so beliebig fortfahren.

Aufgabe 38. Gehe von einem regelmäßigen 6-Eck mit dem Umfang 6 aus und von da zum 12- und 24-Eck über! Welche Schranken erhält man so für π?

8. Berechnung bei konstantem Inhalt und veränderlichem Radius.
Statt des Umfangs der regelmäßigen Vielecke kann man auch ihren Flächeninhalt konstant lassen und nun durch Verdoppeln der Seitenzahl umgeschriebene und eingeschriebene Kreise einander immer näher bringen.



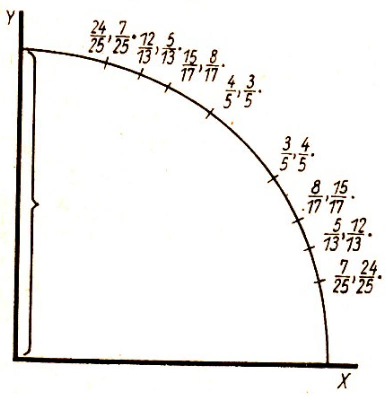
Figur 57

Ist z.B. in der Figur 57 MAB ein Teildreieck eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Flächeninhalt f_n, dann ist es in 2 Teildreiecke MCD und MED eines regelmäßigen $2n$-Ecks zu verwandeln, die zusammen den gleichen Flächeninhalt haben.
Wir wollen die Rechnung nicht auch noch für diesen Fall durchführen, geben vielmehr nur das Ergebnis an.
Zwischen den Radien ρ_n und ρ_{2n} des eingeschriebenen, sowie r_n und r_{2n} des umgeschriebenen Kreises gelten die Gleichungen

$$r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \qquad (1)$$

$$\rho_{2n}^2 = \frac{1}{2}(r_{2n}^2 + \rho_n^2) \qquad (2)$$

Für die Herleitung durch den Leser geben wir die folgenden Anweisungen:
Formel (1) folgt sofort aus der Flächengleichheit des halben Teildreiecks des n-Ecks mit dem ganzen Teildreieck des $2n$-Ecks, wenn man den Satz heranzieht: Die Inhalte von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der dem Winkel anliegenden Seiten.
Auch um die zweite Formel herzuleiten, kann man wieder aus $\triangle MAB = 2\triangle MDE$ folgern $\rho_n \cdot s_n = 2\rho_{2n} \cdot s_{2n}$. Hierin kann man etwa $\frac{1}{2}s_n$ und $\frac{1}{2}s_{2n}$ mit Hilfe des pythagoreischen durch r_n, ρ_n, r_{2n}, ρ_{2n} ausdrücken. Bei der Umformung macht man zweckmäßig von der Formel (I) Gebrauch.



Figur 58

9. Die pythagoreischen Zahlentripel und der Kreis.
Der Durchführung einer Berechnung von π steht in allen vier, in den vorangehenden Abschnitten behandelten Fällen die gleiche Schwierigkeit entgegen:
In allen diesen Rekursionsformeln stoßen wir auf Quadratwurzeln, und so schachteln sich ständig Wurzeln in Wurzeln ein und sind, wenn die Wurzeln ausgewertet werden, eine Quelle von Ungenauigkeiten.
Ist es nicht möglich, statt der irrationalen Näherungswerte, die uns die bisherigen Methoden für π lieferten, rationale, also gewöhnliche Brüche zu verwenden?

Dazu bieten sich uns die pythagoreischen Zahlentripel an. Es gibt ganze Zahlen a, b und c, die die den pythagoreischen Lehrsatz kennzeichnende Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

erfüllen, und zwar gibt es davon unendlich viele. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Wenn wir in dem Einheitskreisviertel der Figur 58 auf dem waagerechten Radius die Strecke $x = \frac{a}{c}$ vom Mittelpunkt aus abtragen und um $y = \frac{b}{c}$ senkrecht in die Höhe gehen, treffen wir einen Punkt des Einheitskreises.
Wir wollen einen solchen Punkt kurz einen rationalen Punkt des Kreises nennen. Ein erster Weg ist nun der:

Wir tragen auf dem Kreis eine genügend dicht liegende Anzahl von rationalen Punkten ein, so wie es Figur 58 andeutet, bestimmen durch je zwei Nachbarpunkte ebenso wie in Abschnitt 8./3. Trapeze, die nun freilich nicht mehr alle gleiche Breite haben, und berechnen ihren Inhalt. Jetzt wird jede Wurzelrechnung vermieden. Allerdings ist es fraglich, ob das Rechnen mit diesen Brüchen wirklich einfacher ist als dasjenige mit den Quadratwurzeln, für die überall Tafeln zur Verfügung stehen.

Um dem Leser die Durchführung zu ermöglichen, sei angegeben, wie man eine genügend dichte Menge rationaler Punkte findet. Wenn man

$$x = \frac{2k}{1+k^2} \qquad , \qquad y = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

setzt, so sind, wenn k z.B. die Zahlen 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1 durchläuft, x und y rational; andererseits aber ist

$$x^2 + y^2 = \frac{(2k)^2 + (1-k^2)^2}{(1+k^2)^2} = 1$$

Wir erhalten also in der Tat rationale Punkte auf dem Kreis.

Will man sich die Rechnung vereinfachen, so kann man sich ebenso wie in Abschnitt 8./3. mit einem Kreisstreifen statt des ganzen Kreisviertels begnügen, indem man ein gleichseitiges Dreieck zu Hilfe nimmt. Dann muss man allerdings einen irrationalen Wert, nämlich $\sqrt{3}$, in Kauf nehmen.

11. Dreiecke statt Trapeze.
Statt der Trapezinhalte kann man auch die Inhalte der Dreiecke berechnen, die man erhält, wenn man je zwei benachbarte rationale Punkte mit der Mitte des Kreises verbindet und als dritte Dreiecksseite die Sehne zwischen den beiden Punkten nimmt.

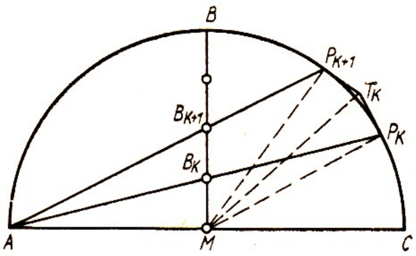
Es seien z.B. x_1, y_1 und x_2, y_2 zwei solche Punkte auf dem Kreis. Dann liest man aus der Figur für den Dreiecksinhalt $f_{1,2}$ ab

$$f_{1,2} = \frac{1}{2}(x_1y_1 + (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - x_2y_2) = \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$$

Freilich muss man neben den eingeschriebenen Sehnenvielecken noch die entsprechenden Tangentenvielecke hinzunehmen, wenn man neben der unteren Schranke noch eine obere haben will.
Man wird sich dann überzeugen, dass auch bei diesen unregelmäßigen ein- und umgeschriebenen Vielecken der Kreis als gemeinschaftliche Grenze erscheint, wenn man die Zahl der rationalen Punkte unbeschränkt vermehrt. Beides macht aber grundsätzlich keine Schwierigkeiten.

11. Ein anderes Verfahren.

Von den mannigfachen Möglichkeiten, die man hat, um unter Ausnutzung der rationalen Kreispunkte zu einer Berechnung von π zu kommen, wollen wir zum Schluss, nachdem wir von den Sehnenvielecken ausgingen, noch ein Verfahren kennenlernen, bei dem die Tangentenvielecke im Vordergrund stehen.



Figur 59

Wir teilen in Figur 59 den Radius MB in n (in der Figur sind es vier) gleiche Teile.

Zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte seien B_k und B_{k+1}. Es ist also, wenn es sich wieder um den Einheitskreis handelt, $B_kB_{k+1} = \frac{1}{n}$. AB_k schneidet den Kreis in P_k, AB_{k+1} in P_{k+1}. Die Tangenten in P_k und P_{k+1} an den Kreis schneiden sich in T_k.

P_kP_{k+1} ist eine Sehne. Wir wollen dann den Inhalt F_k eines Teilvierecks $MP_kT_kP_{k+1}$ berechnen. Da $P_kT_k = P_{k+1}T_k$ ist, setzt sich das Viereck aus den beiden flächengleichen und übrigens rechtwinkligen Dreiecken MP_kT_k und $MP_{k+1}T_k$ zusammen. Setzen wir $P_kT_k = P_{k+1}T_k = x$, so ist der Inhalt F_k des Vierecks gerade x.

Nach dem Satz vom Umfangswinkel ist $\sphericalangle P_kMT_k = \sphericalangle P_kAP_{k+1}$. Jetzt ziehe ich noch $\triangle AB_kB_{k+1}$ heran, das einen gleichen Winkel wie $\sphericalangle P_kMT_k$ besitzt. Da sich nach einem schon mehrfach benutzten Satz die Flächen von Dreiecken mit einem gleichen Winkel wie die Produkte aus den anliegenden Seiten verhalten, ergibt sich einerseits

$$\frac{\triangle MP_kT_k}{\triangle AB_kB_{k+1}} = \frac{MT_k \cdot 1}{AB_k \cdot AB_{k+1}}$$

andererseits

$$\frac{\triangle MP_kT_k}{\triangle AB_kB_{k+1}} = \frac{x}{\frac{1}{n}} = nx$$

Darin ist

$$MT_k = \sqrt{1+x^2}, \qquad AB_k = \sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}, \qquad AB_{k+1} = \sqrt{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$$

so dass wir nach einiger Umrechnung erhalten

$$\frac{\triangle MP_kT_k}{\triangle AB_kB_{k+1}} = n^2\sqrt{\frac{1+x^2}{(n^2+k^2)(n^2+(k+1))^2}}$$

Wir setzen jetzt die beiden Ausdrücke für das Dreiecksverhältnis gleich und quadrieren, um die Quadratwurzeln wegzuschaffen. Dann folgt

$$n^2x^2 = \frac{n^4(1+x^2)}{(n^2+k^2)(n^2+(k+1)^2)}$$

oder, wieder nach einiger Umrechnung,

$$x^2(n^2-k(k+1))^2 = n^2$$

Zieht man die Wurzel, so folgt

$$x = \frac{n}{n^2 + k(k+1)}$$

Wir erhalten also für den Inhalt F_k der einzelnen Teilvierecke einen rationalen Wert

$$F_k = \frac{n}{n^2 + k(k+1)}$$

Rechnet man nach dieser Formel den Inhalt des Tangentenvielecks aus, indem man etwa $n = 10$ setzt und k von 0 bis 9 laufen lässt, so erhält man $\pi \approx 3,149$.

Es macht keine Schwierigkeiten, das zugehörige Sehnenviereck zu berechnen, die Differenz zwischen umgeschriebenen und eingeschriebenen Vielecken abzuschätzen und nachzuweisen, dass beide mit zunehmender Seitenzahl unbeschränkt der gleichen Grenze zustreben.

12. Wir haben uns in diesem Abschnitt wie übrigens in dem ganzen Bändchen auf die elementaren Methoden der Geometrie und Arithmetik beschränkt, dabei aus der Flächenlehre, der Ähnlichkeitslehre und der Gleichungslehre nur ganz wenige Sätze herangezogen. Es zeigt sich aber auch hier wieder, wie eng das Band zwischen den elementarsten Methoden und denen der höher gelagerten Teile der Mathematik ist.

Wer aufmerksam die Ergebnisse unserer ersten vier Berechnungsweisen von π betrachtet, wird hinter dem ähnlichen Aufbau der Rekursionsformeln einen verbindenden Gedanken suchen. In der Tat, wenn man die Trigonometrie heranzieht, wird das deutlich.

Man wird aber weiter fragen: Kann man nicht, von der endlichen Zahl der benutzten Vielecke ausgehend, einen Grenzübergang wagen?
Man wird dann etwa auf sog. unendliche Produkte oder unendliche Reihen stoßen, d.h. auf Ausdrücke mit unbeschränkt wachsender Faktoren- oder Summandenzahl. So ist wirklich der Lösungsweg unseres Problems weiter verfolgt worden, erst ganz naiv, wie von Viéta, dann mit wachsenden Anforderungen an Strenge der Begriffsbildung und der Beweisführung.

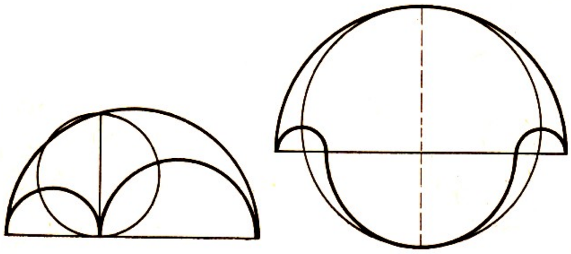
Damit haben die elementaren Verfahren ihren Reiz keineswegs verloren; im Gegenteil, wir haben gesehen, dass die Beschäftigung mit der Kreislehre in diesem Bereich einfachster mathematischer Grundbegriffe auch heute noch recht anregend ist und zu weiteren neuen Ergebnissen führen kann.

9 Kreisbogenvielecke und Möndchen

1. Die Möglichkeit, den Flächeninhalt des Kreises berechnen zu können, erlaubt es, den Inhalt geschlossener Flächen auszuwerten.
Wenn man die Dreiecksfläche mit irgendeiner Formel, etwa $f = \frac{1}{2}g \cdot h$, wobei h eine Höhe, g die zugehörige Dreiecksseite ist, beherrscht, kann man grundsätzlich von allen Vielecken den Inhalt bestimmen; man braucht sie ja nur in Dreiecke zu zerlegen.

Mit dem Hinzutreten der Kreisfläche wird nun die Berechnung aller derjenigen geschlossenen Flächen möglich, die entweder ausschließlich von Kreisbögen oder aber von Kreisbögen und Strecken begrenzt werden. Man kann ja von jedem Kreisausschnitt und deshalb auch von jedem Kreisabschnitt, der Differenz (oder Summe) eines Kreisausschnitts und eines Dreiecks, den Inhalt bestimmen.

Schon die griechischen Mathematiker des Altertums haben sich an einzelnen, durch irgendwelche Besonderheiten ausgezeichneten Kreisbogenvielecken erfreut.

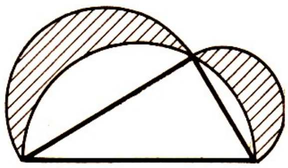


Figur 60 und 61

Als Beispiel gelten zwei Figuren von Archimedes, dem größten Mathematiker des griechischen Altertums, den Arbelos, zu deutsch Schusterkneif, und das Salinon, zu deutsch wohl Salzfass. Der Arbelos (Fig. 60) ist ein Kreisbogendreieck, das von den über einer Strecke und ihren zwei Teilstrecken gezeichneten Halbkreisen gebildet wird. Das Salinon (Fig. 61) ist ein axialsymmetrisches, aus vier Halbkreisen zusammengesetztes Kreisbogenviereck.

Aufgabe 39. In den beiden Figuren 60 und 61 sind die eben genannten Kreisbogenvielecke stark ausgezogen, außerdem ist aber in beiden Fällen noch ein Kreis eingezeichnet. Es wird behauptet, dass dieser Kreis flächengleich den betreffenden Kreisbogenvielecken ist. Beweise das!

2. Die sogenannten Möndchen des Hippokrates.



Figur 62

In Figur 62 sind über der Hypotenuse und den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks nach der gleichen Seite Halbkreise geschlagen. Dadurch sind zwei Kreisbogenzweiecke - lunulae, zu deutsch Möndchen[4] - entstanden, die in der Figur schraffiert sind.

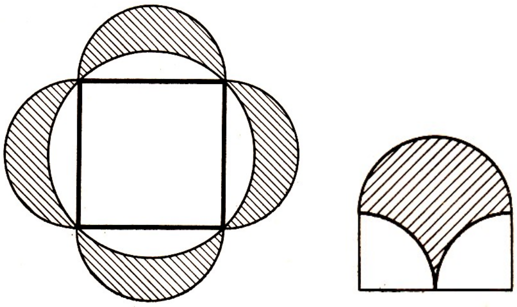
Diese Figur wird oft Hippokrates zugeschrieben, einem um 440 v.d.Ztr., also lange vor Euklid lebenden griechischen Mathematiker, der sich eingehend mit der Quadratur des Kreises beschäftigt hat.
Soweit wir z.Z. wissen, taucht der Satz aber erst um 1000 u.Ztr. bei einem arabischen Schriftsteller, im Abendlande sogar erst im 17. Jahrhundert auf.

Was Hippokrates geleistet hat, beschränkt sich, wenn wir den griechischen Berichten über diese Arbeit folgen dürfen, auf den Sonderfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit anderen Worten, auf die Bestimmung der Fläche eines Kreisbogenzweiecks, das von einem Halbkreis und einem Viertelkreis gebildet wird. Figur 63 ist nichts anderes als eine zweckmäßige Anordnung von vier dieser wirklichen Hippokrates- Möndchen.

Aufgabe 40. Beweise, dass die Summe der beiden Kreisbogenflächen in der Figur 61 gleich dem Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist!

Aufgabe 41. In welcher Beziehung stehen die Flächen der vier Möndchen von Figur 63 zu dem Quadrat, dem sie anliegen?

[4]Was wir am Himmel bei zunehmendem oder abnehmendem Mond sehen, ist demnach kein mathematisches Möndchen, denn der beleuchtete Teil der Mondscheibe wird von einem Halbkreis und einer halben Ellipse gebildet.



Figur 63 und 64

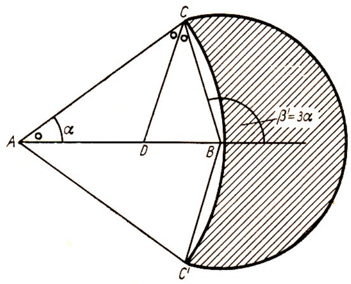
3. Wir haben in unserem letzten Beispiel den merkwürdigen Fall, dass, im Gegensatz zu der ganzen Kreisfläche, ein Kreisbogenzweieck quadrierbar ist, d.h., dass man ein Dreieck und, wenn man will, auch ein Quadrat, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, das ihm flächengleich ist.
Es ist nicht schwer, andere, von Kreisbogen begrenzte Vielecke anzugeben, die ebenfalls quadrierbar sind. Figur 64 zeigt z.B. ein Kreisbogendreieck, dessen Konstruktion aus der Zeichnung sofort abzulesen ist. Es ist quadrierbar.

Aufgabe 42. Gib eine von Strecken begrenzte Figur an, die dem Kreisbogendreieck in Figur 64 flächengleich ist!

Wir wollen nun aber die Frage aufwerfen: Welche Kreisbogenzweiecke oder, wie wir auch gesagt haben, welche Möndchen sind quadrierbar?
Die Aufgabe ist also, diejenigen Möndchen aufzusuchen, deren Flächeninhalt sich mit Zirkel und Lineal etwa als Dreieck oder als Viereck darstellen lässt.

4. Wir schicken eine Dreieckskonstruktion voraus:

$\triangle ABC$ ist zu zeichnen aus $BC = 4$, $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{1+\sqrt{3}}$, worin a eine beliebig vorgeschriebene Strecke ist. Diese Konstruktion macht keine Schwierigkeiten, da ja, sobald a gewählt ist, die anderen beiden Dreieckseiten auch durch Zeichnung mit Zirkel und Lineal bestimmbar sind, AB am einfachsten als mittlere Proportionale von BC und $AC + BC$.



Figur 65

Wenn man in diesem Dreieck (Fig. 65) die Winkelhalbierende CD des Winkels γ zieht, dann ist $\triangle CBD \sim \triangle ABC$. Um das zu beweisen, erinnern wir an den Satz von der Winkelhalbierenden, wonach

$$AD : DB = AC : BC = \sqrt{3} : 1 \qquad \text{und da} \qquad AD + DB = AB = a\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

ist, folgt

$$DB = a \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}$$

Die Dreiecke CBD und ABC stimmen aber im Winkel β überein, und es ist außerdem

$$CB : DB = a : \frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} = \sqrt{1+\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad AB : CB = a \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}} : a = \sqrt{1+\sqrt{3}}$$

Die Dreiecke stimmen also auch im Verhältnis der anliegenden Seiten überein und sind deshalb nach dem ersten Ähnlichkeitssatz ähnlich. Es ist also $\gamma = 2\alpha$, und der Satz vom Außenwinkel liefert die Tatsache, dass für den Außenwinkel β' von β die Beziehung gilt

$$\beta' = 3\alpha$$

5. Nach dieser etwas langatmigen Vorbereitung kommen wir zur Konstruktion eines quadrierbaren Möndchens.
Wir spiegeln das $\triangle ABC$ an AB und erhalten so C zugeordnet C'. Mit AC schlagen wir um A, mit BC um B Kreisbögen. Dann wird behauptet:
Das Möndchen CC' ist flächengleich dem Drachenviereck oder Deltoid $ACB'C'$, also quadrierbar.

Ist f der Inhalt des Möndchens, f_a der zu dem Kreis um A gehörige Kreisausschnitt, f_b der zu dem Kreis um B gehörige Kreisausschnitt, f_d der Inhalt des Drachenvierecks $ACBC'$, dann ist

$$f = f_a + f_b - f_d$$

Nun ist $f_a = \pi(a\sqrt{3})^2 \cdot \frac{a}{180}$, $f_b = \pi a^2 \cdot \frac{3a}{180}$, also $f_a = f_b$, folglich $f = f_d$.

6. Nach diesem erfolgreichen Versuch der Konstruktion eines quadrierbaren Möndchens wird man die Frage aufwerfen: Gibt es noch mehr solche Fälle?
Die Sache wird gehen, wenn in der Bezeichnungsweise unserer Figur 65

$$\alpha : \beta' = p : q$$

ist und gleichzeitig $AC : BC = \sqrt{q} : \sqrt{p}$. Im Falle der Abschnitte 9./4. und 5. war $p = 1$ und $q = 3$.

Die Frage ist nur: Lässt sich dann auch ein entsprechendes Dreieck ABC mit Zirkel und Lineal konstruieren?
Das ist nun in der Tat möglich in folgenden weiteren Fällen:

1. $p = 2$, $q = 3$, 2. $p = 1$, $q = 5$, 3. $p = 3$, $q = 5$.

Die Konstruktionen selbst müssen hieraus Raummangel übergangen werden. Wenn der Leser an diese Aufgabe herangehen will, versuche er es zunächst mit dem ersten dieser Fälle, der mit dem von uns behandelten eine nahe Verwandtschaft hat.

Die hier angegebenen, insgesamt fünf quadrierbaren Möndchen sind die einzigen, die man bislang kennt. Man weiß aber nicht, ob es tatsächlich die einzigen sind, die es überhaupt gibt, oder ob noch andere, heute nicht bekannte quadrierbare Möndchen existieren.

Mit dieser offenen Frage, die wieder einmal zeigt, wie auch in der Mathematik scheinbar einfache, weil leicht verständlich zu machende Probleme noch der Erledigung harren, wollen wir unsere Ausführungen über Altes und Neues vom Kreis beschließen.

10 Zur Literatur

Quellen und geschichtliche Darstellungen:

1. Euklids Elemente, übersetzt von C. Thaer, 1. Teil (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 235), Leipzig 1933 (in Betracht kommt vornehmlich das 3. Buch der Elemente)

2. Archimedes, Kugel und Zylinder. übersetzt von A. Czwalina (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 202), Leipzig 1902

3. Archimedes, Die Kreismessung, übersetzt von F. Radio, Leipzig 1892

4. J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, 4. Bd., Berlin 1940

5. Wussing, Mathematik in der Antike, Leipzig 1963

6. v. Krbek, Geometrische Plaudereien, Leipzig 1963

7. Blaschke, Griechische und anschauliche Geometrie, München 1953

Einige Lehrbücher über den Kreis und Verwandtes:

8. Lietzmann, Elementare Kugelgeometrie, Göttingen 1951

9. Blaschke, Kreis und Kugel, Berlin 1949

10. Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, MSB Nr. 3, Leipzig 1966

11. Rademacher - Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Berlin 1931

12. Hadwiger, Altes und Neues über konvexe Körper, Basel 1954

13. Fejes Toth, Reguläre Figuren, Leipzig 1965

14. Hasse, H., Proben mathematischer Forschung, Schriften zur Mathematik, Heft 1, Frankfurt/M. 1955

15. Coxeter, Unvergängliche Geometrie, Basel 1963

Aufgabensammlungen usw. :

16. Perelmann, Unterhaltsame Geometrie, Berlin 1964

17. Antonow - Wygodski - Nikitin - Sankin, Aufgabensammlung zur Elementarmathematik, Band II, Berlin 1963

18. Liman, Praktische Aufgaben aus der Geometrie, Berlin 1964

19. Polya, Mathematik und plausibles Schließen, Bd.I, Basel 1962