Otokar Zich / Arnost Kolman

Unterhaltsame Logik

Bearbeitet von Dieter Ilse und Werner Tietz
1970 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 51
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Aus dem Vorwort

Der Leser wird sicherlich auch der Meinung sein, dass jedermann - der Physiker wie der Dichter, der Traktorist wie der Chemikerin der Lage sein muss, folgerichtig zu denken, beweiskräftig zu urteilen und falsche Schlussfolgerungen zu widerlegen. Das ist besonders in unserer Zeit notwendig, die ständig eine Vielzahl von ungewöhnlichen und erstaunlichen Entdeckungen und Erfindungen in den verschiedensten Bereichen hervorbringt.

Wer sich wirklich in all dieser Vielfalt auskennen, eine eigene Meinung haben und diese auch verteidigen will, wer aktiv am Leben teilhaben, forschen, Verbesserungsvorschläge entwickeln will, mit anderen Worten, wer tatkräftig am Aufbau des Sozialismus mitwirken will, der muss logisch denken können.
Diese Fähigkeit erfordert zu ihrer Weiterentwicklung Übung, ähnlich wie zur Vervollkommnung von Fähigkeiten im Skilaufen die Teilnahme an Skiwettkämpfen unumgänglich ist.
Wer dem nicht zustimmt, der versuche doch, irgendeine Aufgabe aus dem Gebiet der Logik zu lösen, vielleicht eine so einfache wie die folgende:

Ein Tourist wanderte zu einem See. Er kam bis zu einer Weggabelung. Dort saßen zwei Jungen, von denen der eine immer die Wahrheit sagte und der andere immer log. Jeder antwortete auf jede beliebige Frage entweder mit "ja" oder "nein" .
Dies alles war dem Wanderer bekannt, jedoch wusste er noch nicht, wer von ihnen die Wahrheit sagt und wer lügt. Er wusste auch nicht, welcher der beiden Wege zum See führt. Da stellte er beiden Jungen eine einzige Frage, und jeder gab darauf seine Antwort.

Was war das nun für eine Frage, wenn der Wanderer auf Grund der erhaltenen Antworten fehlerfrei entscheiden konnte, welcher der beiden Wege zum See führt?
(Diese Aufgabe, ihre Varianten und Lösungen wird der Leser in diesem Büchlein finden.)

Stellen Sie fest, wieviel Zeit Sie benötigen, um die richtige Lösung zu finden. Schlagen Sie Ihren Freunden vor, diese Aufgabe zu lösen, und vergleichen Sie, ob diese mehr oder weniger Zeit zur richtigen Lösung benötigen; auf diese Weise erhalten Sie einige Fakten, mit denen Sie Ihre Fähigkeit, rasch etwas aufzufassen, mit der Ihrer Freunde vergleichen können.
Sie werden sich davon überzeugen können, dass derjenige, der schon früher einmal Aufgaben aus dem Bereich der Logik lösen musste, und noch mehr derjenige, der auch nur ein wenig die moderne Logik kennt, in der Regel weitaus schneller mit der Aufgabe fertig wird als ein Anfänger.

Die moderne formale Logik, die auch mathematische Logik genannt wird, übt einen ständig steigenden Einfluss auf die Methoden des Denkens in unserer Zeit aus. Sie hat im Unterschied zur traditionellen formalen Logik, die in der Schule als Wissenschaft vom richtigen Denken gelehrt wurde, nicht nur eine theoretische, sondern eine sehr große praktische Bedeutung.
Ohne die mathematische Logik könnten all die kybernetischen Einrichtungen nicht arbeiten, diese "denkenden" Automaten, die selbständig Produktionsprozesse steuern, Transportabläufe regulieren, schwierige Berechnungen vornehmen, Statistiken auswerten, Diagnosen von Krankheiten stellen, von einer Sprache in eine andere übersetzen, Schriften längst ausgestorbener Völker entziffern und chiffrierte Aufzeichnungen enträtseln, die Schach spielen usw.

All das und vieles andere vollbringen diese schnell arbeitenden elektronischen Einrichtungen natürlich nicht deshalb, weil sie denken können, sondern weil Menschen, die eine entsprechende Ausbildung erhalten haben, ihnen jeweils ein bestimmtes Programm eingeben, das in einer den Maschinen "verständlichen" Sprache, das heißt, in der Sprache der mathematischen Logik geschrieben ist.

Da die weitestgehende Automatisierung der körperlichen und geistigen Arbeit einer der wichtigsten Hebel zum Aufbau des Sozialismus ist, muss bei uns in der nächsten Zeit nicht nur die Zahl der Elektronikingenieure, Konstrukteure und Einrichter kybernetischer Anlagen um das Vielfache wachsen, sondern auch die Zahl der Programmierer, die einige Gebiete der mathematischen Logik umfassend beherrschen.

Was ist Unterhaltsames an der Lösung von Aufgaben aus dem Bereich der Logik?

Es sei uns folgende Analogie erlaubt. Ein Liebhaber von Kreuzworträtseln beschäftigt sich mit ihnen nicht nur deswegen, weil er nichts zu tun hat, und schon gar nicht, um auf diese Weise seinen geistigen Horizont zu erweitern, sondern weil der Lösungsvorgang selbst ihm eine Empfindung von Freude und Erfolg verleiht, hervorgerufen durch den Wunsch, Hindernisse zu überwinden.

Dasselbe gilt auch für Mathematik- und Schachaufgaben, und ganz genau so ist es mit den Aufgaben aus dem Bereich der Logik, die wir in dieses Buch aufgenommen haben.
Einige von ihnen sind ganz leicht, über anderen, schwierigeren dagegen, die einige Anstrengungen erfordern, muss man gehörig brüten.

Wir entnahmen diese verschiedenen Quellen: Wir fanden sie bei Bekannten und in unseren Notizbüchern und dachten uns selbst einige aus. Bei der Auswahl der Aufgaben ließen wir uns von zwei Prinzipien leiten: erstens, dass die Lösung fast keine mathematischen Kenntnisse erfordert und dass es zweitens für die Lösung ausreicht, einiges aus der Aussagenlogik und der Mengenlehre zu kennen. Eine elementare Darlegung dieser beiden Zweige wird hier gegeben.

Die Idee zu diesem Buch hatte Arnost Kolman, der sich wegen Mitarbeit an Otokar Zich wandte. Eine Durchsicht der Aufgaben und ihrer Lösungen nahm P. Materna vor, der aufgetretene Fehler korrigierte.

Im Anschluss an jede Aufgabe wird der Leser eine ausführliche Lösung finden. Die Lösungen werden dem Leser helfen, wenngleich die Autoren hoffen, dass er sie erst dann zu Hilfe nehmen wird, wenn es ihm auch nach vielfältigen Versuchen nicht gelingt, die Aufgabe selbständig zu lösen.
Dabei sind die Autoren durchaus nicht der Ansicht, dass die eine oder andere Aufgabe nicht auch auf eine andere, vielleicht noch scharfsinnigere Weise gelöst werden kann als auf die hier angeführte, aber sie waren bestrebt, einen Weg zu zeigen, der nicht nur in der angegebenen Aufgabe, sondern auch in allen anderen dazu ähnlichen Aufgaben zum Erfolg führt.

Die Autoren bitten die Leser, die andere, eigene Lösungswege finden oder andere interessante Aufgaben aus der Logik kennen, das freundlicherweise dem Verlag mitzuteilen, da es im Falle einer Neuauflage dann möglicherweise mit berücksichtigt werden kann.

Die Tatsache, dass wir den Aufgaben aus der Logik eine unterhaltsame, zuweilen sogar humorvolle Form gegeben haben, mindert natürlich nicht ihren Erkenntniswert. Wir hoffen, dass die in diesem Rahmen notwendige Unvollständigkeit und die mäßige Strenge der theoretischen Darlegungen nicht dem Interesse an der modernen Logik hinderlich sind, vor allem bei der Jugend. Wir wären sehr glücklich, wenn es uns gelungen sein sollte, mit unserem Buch, sei es auch nur in geringem Maße, das Interesse an der Mathematik und insbesondere an der Logik zu fördern.

Die Verfasser

Bemerkungen der Redaktion zur deutschen Ausgabe

Bei der Zusammenstellung der Hilfsmittel für die Lösung der Aufgaben bestand nicht die Absicht, eine Einführung in die mathematische Logik oder in die Mengenlehre zu geben.
Auf einen präzisen Kalkülaufbau wurde daher verzichtet, und es wurde unter häufiger Benutzung der Anschauung nur das bereitgestellt, was zur Lösung der Aufgaben notwendig ist.

Leser, die sich durch das hier vorgelegte Bändchen angeregt fühlen, tiefer in dieses Gebiet einzudringen, verweisen wir auf die am Ende des Buches angegebene Literatur ...

Die Bearbeiter

Inhaltsverzeichnis

1 Einiges aus der Aussagenlogik

1.1 Aussagen

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfasst.
Das können sowohl Aussagen aus der Mathematik, der Philosophie oder anderen Wissenschaften als auch aus der Praxis des täglichen Lebens sein. Um die hier benötigten Hilfsmittel aus der Logik anwenden zu können, betrachten wir nur solche Aussagen, für die es nur zwei eindeutig bestimmte Möglichkeiten des Wahrheitsgehaltes gibt, nämlich wahr oder falsch zu sein.
Das ist keineswegs bei allen sprachlichen Äußerungen der Fall, wie folgende Beispiele zeigen.

1. Jede durch 4 teilbare Zahl ist auch durch 2 teilbar.
2. Die Lösung einer bestimmten mathematischen Aufgabe ist ein schwieriges Problem.
3. Verhütet Waldbrände!
4. Ein Kaninchen, falls indessen.

Nur im Fall 1. kann man in eindeutiger Weise von Wahrheit oder Falschheit sprechen. Hier handelt es sich um eine wahre Aussage.
Dagegen ist der Wahrheitsgehalt der Aussage im Fall 2. nicht eindeutig bestimmt. Er ist nämlich von den Kenntnissen und Fähigkeiten desjenigen abhängig, der an die Lösung der betreffenden Aufgabe herangeht.

Im Fall 3. ist es sinnlos, überhaupt von Wahrheitsgehalt zu sprechen, denn hier wird kein bestimmter Sachverhalt beschrieben, es liegt also gar keine Aussage vor.
Im Fall 4. schließlich handelt es sich um eine sinnlose Aneinanderreihung von Wörtern.

Wir haben uns also hier auf solche Aussagen beschränkt, für die es außer "wahr" und "falsch" keine weitere Möglichkeiten des Wahrheitsgehalts gibt.
Weiterhin kann eine solche Aussage auch nur einen dieser beiden Wahrheitswerte annehmen, da wir natürlich den Widerspruch, dass eine Aussage gleichzeitig wahr und falsch ist, ausschließen müssen.

Die Feststellung, dass einer jeden Aussage genau einer der beiden Wahrheitswerte "wahr" bzw. "falsch" zukommt, bedeutet jedoch nicht, dass man von einer beliebig vorgegebenen Aussage unmittelbar sagen, welchen von beiden Wahrheitswerten sie besitzt.
Diese Frage lässt sich i. a. erst nach einer Beweisführung beantworten. Es gibt Aussagen, für die das bis heute noch nicht gelungen ist, so z.B. die folgende als Goldbachsche Vermutung bekannte mathematische Aussage:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

Beispiel:

$$4 = 2 + 2; \quad 6 = 3 + 3; \quad 8 = 5 + 3; \quad 30 = 11 + 19; \quad 100 = 87 + 13$$

Es scheint so, als ob diese Art der Zerlegung immer möglich wäre. Man darf sich jedoch durch diesen Anschein nicht zu der Überzeugung verleiten lassen, dass dies wirklich für alle geraden Zahlen gilt. Das lässt sich hier wegen der unendlich vielen Fälle durch Probieren nicht beweisen; dazu müssen andere Beweisverfahren gefunden werden, was bis heute nicht gelungen ist.
Trotzdem kann man mit Sicherheit sagen, dass die Goldbachsche Vermutung genau einen der beiden Wahrheitswerte besitzt.

1.2 Zusammengesetzte Aussagen

Durch Bindewörter wie "und", "oder", "wenn, so", bzw. durch die Verneinung "nicht" lassen sich aus einfachen Aussagen wie "Die Spree ist ein Fluss" oder "2 ist eine gerade Zahl" zusammengesetzte Aussagen bilden.
So ist z.B. die Aussage "Die Sonne scheint, und der Wind weht" zusammengesetzt aus den beiden Einzelaussagen
a) "Die Sonne scheint" und b) "Der Wind weht".

Die Verbindung der beiden Einzelaussagen wird durch das Wort "und" hergestellt. Wir wollen hier konkrete Aussagen abkürzend durch lateinische Buchstaben bezeichnen.

A:	Die Sonne scheint.
B:	Der Wind weht.
A und B:	Die Sonne scheint, und der Wind weht.

Derartige Zusammensetzungen von Einzelaussagen sind wegen ihrer sprachlichen Formulierung nicht immer deutlich zu erkennen. So zeigt sich der Aufbau der Aussage

"Die Zahl 2 ist eine gerade Primzahl"

aus zwei anderen Aussagen erst deutlich, wenn man sie in die Form

"Die Zahl 2 ist gerade, und die Zahl 2 ist eine Primzahl"

bringt.
Mit Hilfe von Bindewörtern wie den obengenannten lassen sich aus vorgegebenen Aussagen neue Aussagen zusammensetzen, die, abgesehen von unwesentlichen Unterschieden in der sprachlichen Formulierung, in eindeutiger Weise den Teilaussagen zugeordnet sind.

Wegen dieser Zuordnungen nennt man die durch die jeweiligen Bindewörter gegebenen Zusammensetzungen auch Aussagenfunktionen. Diese Aussagenfunktionen werden nun so festgelegt, dass der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage nur von den Wahrheitswerten der in der Zusammensetzung auftretenden Einzelaussagen abhängt und nicht von ihrem Inhalt, d.h. nicht von dem von ihnen beschriebenen Sachverhalt.

Wie man den Wahrheitswert der zugeordneten Aussage aus den Wahrheitswerten der in die Zusammensetzung eingehenden Aussagen bei der jeweiligen Aussagenfunktion bestimmt, wird durch die Wertetabellen in folgendem Abschnitt festgelegt.

In diesen Tabellen benutzen wir die Buchstaben "X", "Y" und "Z" als Variable für Einzelaussagen. Die Wahrheitswerte werden mit "1" (wahr) und "0" (falsch) bezeichnet.

1.3 Die klassischen Aussagenfunktionen

Die Negation. Durch Vorsetzen des Wortes "nicht" vor eine beliebige Aussage X erhalten wir die neue Aussage "nicht X".
Wir nennen sie die Negation von X und schreiben kürzer "$\overline{X}$". Folgende Tabelle gibt an, wie der Wahrheitswert von $\overline{X}$ vom Wahrheitswert von X abhängt.

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

Die Negation ist eine einstellige Aussagenfunktion, d.h., sie ordnet einer Aussage eine andere Aussage zu.
Die folgenden Funktionen sind dagegen zweistellige Aussagenfunktionen, d.h., sie ordnen immer einem Paar von Aussagen eine Aussage zu.

Die Konjunktion. Verbindet man zwei Aussagen X, Y durch das Wort "und", so erhält man eine neue Aussage "X und Y", die als Konjunktion der Aussagen X, Y bezeichnet wird. Statt "X und Y" schreibt man kürzer "$X \wedge Y$".
Wie der Wahrheitswert einer Konjunktion von den Wahrheitswerten der verknüpften Einzelaussagen abhängt, gibt die folgende Tabelle an, in der alle möglichen Kombinationen der beiden Wahrheitswerte von X bzw. Y enthalten sind:

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese Festlegung der Wahrheitswerte entspricht gerade dem üblichen Gebrauch des Bindewortes "und"; denn eine mit Hilfe dieses Wortes zusammengesetzte Aussage ist wahr, wenn beide Komponenten wahr sind, und in allen anderen Fällen falsch.

Die Disjunktion. Als Disjunktion bezeichnet man die Verbindung zweier Aussagen X, Y mit Hilfe des Bindewortes "oder". Statt "X oder Y" schreibt man kürzer "$X \vee Y$".
Wie die Wahrheitswerte einer Disjunktion von den Wahrheitswerten ihrer Komponenten abhängen, zeigt folgende Tabelle:

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiel:

Aussage A:	Es regnet.
Aussage B:	Es ist windig.
Aussage $A \vee B$:	Es regnet, oder es ist windig.

Nach den Festlegungen in der Tabelle ist hier Aussage "$A \vee B$" nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Bei der durch diese Tabelle festgelegten Aussagenfunktion handelt es sich um das sogenannte nicht ausschließende "oder", d.h., die zusammengesetzte Aussage ist auch dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Im alltäglichen Sprachgebrauch wird dagegen das Bindewort "oder" im allgemeinen im Sinne von "entweder - oder" benutzt; dabei ist dann die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr, wenn eine der Teilaussagen wahr und die andere falsch ist. Im Falle der Wahrheit der Gesamtaussage schließt also die Wahrheit der einen Teilaussage die Wahrheit der anderen Teilaussage aus.

Die Bezeichnung dieser beiden Aussagenfunktionen ist nicht einheitlich. Die hier als Disjunktion bezeichnete Aussagenfunktion wird oft auch Alternative genannt. Da die letztere Bezeichnung im täglichen Sprachgebrauch gerade für das ausschließende "entweder - oder" verwendet wird, haben wir hier für das nicht ausschließende "oder" die Bezeichnung Disjunktion gewählt.

Die Implikation. Werden Aussagen Y und X zu der Aussage "wenn X, so Y" verbunden, so wird diese als Implikation bezeichnet, man schreibt kürzer "$X \to Y$".
Die Wahrheitswerte einer Implikation kann man aus folgender Tabelle ablesen:

X	Y	$X \to Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

In einer Implikation „$X \to Y$“ heißt X Voraussetzung und Y Behauptung. Man sagt auch: "Aus X folgt Y".
Die in der Tabelle getroffene Festlegung der Wahrheitswerte besagt dann, dass aus einer wahren Voraussetzung nur etwas Wahres folgen kann (Zeilen 1 und 2) und dass aus einer falschen Voraussetzung sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgen kann.

Die Äquivalenz. Häufig tritt die Verbindung "X genau dann, wenn Y" der beiden Aussagen X und Y auf. Man schreibt kürzer "$X \leftrightarrow Y$".
Die folgende Tabelle gibt wieder die Wahrheitswertverteilung dieser Aussagenfunktion an:

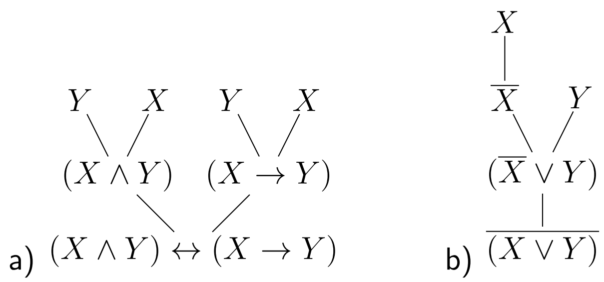
X	Y	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Wie man an der Tabelle erkennt, ist diese Aussagenverbindung wahr, wenn beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Sie ist falsch, wenn die Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Aussagenfunktion als Äquivalenz.

1.4 Zusammengesetzte Aussagen

Die Aussagen, die wir durch die Aussagenfunktion aus Abschnitt 3 aus Einzelaussagen erhalten haben, können wir nun ihrerseits zu komplizierten Aussagen verbinden.

Beispiele



Sind die Aussagen, die zusammengesetzt werden sollen, ihrerseits bereits zusammengesetzt, so werden sie wie im Beispiel in Klammern gesetzt. Die Wahrheitswerte mehrfach zusammengesetzter Aussagen kann man aus den Wahrheitswerten ihrer Komponenten unter Benutzung der Tabellen der klassischen Aussagenfunktionen ausrechnen.
Dazu zerlegt man sie schrittweise in die nicht mehr zerlegbaren Einzelaussagen, aus denen sie zusammengesetzt sind.

Beispiele:
a) $[(X \to Y) \wedge (\overline{X} \to Y)] \to X$

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$\overline{X} \to Y$	$(X \to Y) \wedge (\overline{X} \to Y)$	$[(X \to Y) \wedge (\overline{X} \to Y)] \to X$
1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1

b) $\overline{[(X \to Y) \to) \to X] \to X}$

X	Y	$X \to Y$	$(X \to Y) \to) \to X$	$[(X \to Y) \to) \to X] \to X$	$\overline{[(X \to Y) \to) \to X] \to X}$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

c) $\overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})} \leftrightarrow (X \vee Y)$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y}$	$\overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$	$(X \vee Y)$	$\overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})} \leftrightarrow (X \vee Y)$
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1

d) $(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (Z \to Y)$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y}$	$Z \to Y$	$(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (Z \to Y)$
1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

e) $(X \to Y) \to [(Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)]$

X	Y	$X \to Y$	$Y \to X$	$X \leftrightarrow Y$	$(Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)$	$(X \to Y) \to [(Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)]$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Wie man an den Beispielen c) und e) erkennt, gibt es Aussagenverbindungen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Teilaussagen stets wahr sind, die also immer den Wahrheitswert 1 haben. Solche Aussagenverbindungen heißen Tautologien oder Identitäten.

Die im Beispiel c) auftretenden Aussagen $\overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$ und $X \vee Y$, die beide aus den Teilaussagen X und Y zusammengesetzt sind, sind keine Tautologien.
Sie haben aber unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen X und Y stets denselben Wahrheitswert. Solche Aussagenverbindungen heißen zueinander äquivalent; verbindet man sie nämlich durch das Zeichen "$\leftrightarrow$" zu einer Äquivalenz, so ist diese Aussagenverbindung eine Tautologie.

Wenn umgekehrt eine Äquivalenz eine Tautologie ist, so haben die beiden in dieser Äquivalenz verknüpften Aussagen stets denselben Wahrheitswert, unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen auftretenden Teilaussagen.

Beispiel: Die Aussagen "$X \rightarrow Y$" und "$\overline{X \wedge \overline{Y}}$" sind äquivalent.

X	Y	$X \rightarrow Y$	$\overline{Y}$	$X \wedge \overline{Y}$	$\overline{X \wedge \overline{Y}}$	$(X \rightarrow Y) \leftrightarrow \overline{X \wedge \overline{Y}}$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Äquivalente Aussagenverbindungen können überall dort, wo sie als Teilaussagen in einer umfassenden Aussage auftreten, gegenseitig ersetzt werden, ohne dass sich der Wahrheitswert der gesamten Aussagenverbindung ändert. Insbesondere gehen Tautologien bei solchen Ersetzungen wieder in Tautologien über.

Bei der Lösung der Aufgaben in der nachfolgenden Aufgabensammlung können derartige Ersetzungen verwendet werden, um vorgegebene Aussagenverbindungen zu vereinfachen. Die dafür notwendigen Tautologien werden im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

1.5 Tautologien

Die folgenden Aussagenverbindungen sind Tautologien, d.h. also, dass sie unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen stets den Wahrheitswert 1 annehmen. Dem Leser wird empfohlen, den Beweis dieser Behauptung durch Ausrechnen der Wahrheitswerte einiger Aussageverbindungen selbst zu führen.

1. $(X \vee X) \leftrightarrow X$
2. $(X \vee Y) \leftrightarrow (Y \vee X)$
3. $(X \vee (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \vee Y) \vee Z)$
4. $(X \wedge X) \leftrightarrow X$
5. $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Y \wedge X)$
6. $(X \wedge (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \wedge Z)$
7. $\overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$
8. $(X \wedge (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$
9. $(X \vee (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$
10. $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$
11. $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$
12. $(X \wedge (Y \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X$
13. $(X \vee (Y \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X$
14. $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \vee Y)$
15. $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow \overline{X \wedge \overline{Y}}$
16. $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \rightarrow \overline{X})$
17. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \rightarrow Z)$
18. $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow ((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X))$
19. $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y}))$
20. $X \vee \overline{X}$
21. $\overline{X \wedge \overline{X}}$
22. $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z)$

Beispiele: 10. $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Man kann also die Verneinung einer Konjunktion und die Disjunktion der verneinten Teilaussagen gegenseitig ersetzen (de Morgansche Regel).

16. $(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to \overline{X}$	$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Man nennt $\overline{Y} \to \overline{X}$ die Kontraposition von $X \to Y$. Die Tautologie 16. besagt also, dass man eine Implikation durch ihre Kontraposition ersetzen kann.

20. $X \vee \overline{X}$

X	$\overline{X}$	$X \vee \overline{X}$
1	0	1
0	1	1

Die Tautologie 20. heißt auch Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

21. $\overline{X \wedge \overline{X}}$

X	$\overline{X}$	$X \wedge \overline{X}$	$\overline{X \wedge \overline{X}}$
1	0	0	1
0	1	0	1

Die Tautologie 21. nennt man den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

1.6 Schlussregeln

In diesem Abschnitt lernen wir zwei Regeln kennen, nach denen man, von Tautologien bzw. wahren Aussagen ausgehend, auf andere Tautologien bzw. wahre Aussagen schließen kann. Diese Regeln heißen aussagenlogische Schlussregeln.

a) Die Einsetzungsregel. Setzt man in einer Tautologie für eine Einzelaussage an jeder Stelle, an der sie in dieser Tautologie vorkommt, eine beliebige andere Einzelaussage oder auch eine beliebige Aussagenverbindung ein, so erhält man wieder eine Tautologie.

Beispiel: Wir setzen in der Tautologie 14. für "X" die Aussagenverbindung "$X \wedge Z$" ein. Das Ergebnis ist wieder eine Tautologie: $((X \wedge Z) \to Y) \leftrightarrow (\overline{(X \wedge Z)} \vee Y)$

X	Y	Z	$X \wedge Z$	$(X \wedge Z) \to Y$	$\overline{(X \wedge Z)}$	$\overline{(X \wedge Z)} \vee Y$	$((X \wedge Z) \to Y) \leftrightarrow (\overline{(X \wedge Z)} \vee Y)$
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

b) Die Abtrennungsregel.
Wenn eine wahre Aussage die Form einer Implikation hat und wenn außerdem die Voraussetzung in dieser Implikation ebenfalls den Wahrheitswert 1 hat, dann ist auch die Behauptung wahr. Das erkennt man an der Festlegung der Implikation in der Wahrheitswerttabelle.
Im Falle der Wahrheit der ganzen Implikation kann man also von der Wahrheit der Voraussetzung auf die Wahrheit der Behauptung schließen.

Beispiel: Wie wir wissen, ist die Implikation "Wenn eine natürliche Zahl a durch 4 teilbar ist, so ist diese Zahl a auch durch 2 teilbar" für alle natürlichen Zahlen a wahr. Für $a = 5136$ heißt die Voraussetzung

"die Zahl 5136 ist durch 4 teilbar".

Das ist eine wahre Aussage. Wir können also nach der Abtrennungsregel schließen, dass auch die Behauptung

"die Zahl 5136 ist durch 2 teilbar"

wahr ist.
Für $a = 5134$ ist die Voraussetzung falsch und die Behauptung wahr, für $a = 5133$ ist sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung falsch, obwohl in beiden Fällen die ganze Implikation wahr ist.

Wir erkennen also, dass bei einer wahren Implikation nur im Falle einer wahren Voraussetzung mit Sicherheit auf die Wahrheit der Behauptung geschlossen werden kann. Man kann also die Voraussetzung weglassen, abtrennen, und erhält dann die Behauptung als wahre Aussage.

2 Einiges aus der Mengenlehre

2.1 Mengen

Oft interessiert man sich bei Untersuchungen von gewissen Objekten für bestimmte Eigenschaften dieser Objekte. So kann man konkrete Gegenstände abhängig von der jeweiligen Fragestellung etwa nur nach ihrer Farbe einteilen, ohne eventuell noch vorhandene andere Merkmale zu beachten. Man kann natürlich bei Einteilungen dieser Gegenstände auch andere Merkmale zugrundelegen.

Auch an mathematischen Objekten, wie z.B. an den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., interessieren uns je nach der Problemstellung die verschiedensten Eigenschaften, wie etwa Teilbarkeit durch bestimmte andere Zahlen, Größe oder Stellenzahl.

Um für weitere Betrachtungen einen besseren Überblick zu bekommen und damit eine Vereinfachung zu erreichen, ist es oft zweckmäßig, gewisse Objekte zu einer Gesamtheit zusammenzufassen.
Eine solche Gesamtheit heißt Menge. Die in einer Menge enthaltenen Objekte nennt man Elemente dieser Menge.

Um auszudrücken, dass das Element n zur Menge P gehört, schreibt man

$$n \in P$$

(gelesen: n ist Element von P; kürzer: n Element P).

Es ist zu beachten, dass in der Umgangssprache das Wort "Menge" meist im Sinne von "viel" benutzt wird. Das ist in der Mathematik nicht der Fall.
Eine Menge braucht keineswegs viele Elemente zu enthalten, es hat sich nämlich als zweckmäßig erwiesen, auch Mengen mit nur einem Element (sog. Einermengen) zu betrachten und sogar den Begriff der leeren Menge einzuführen, das ist die Menge, die kein Element enthält (vgl. 2.2.). Sie wird mit "$\varnothing$" bezeichnet.
Ein Beispiel für eine Einermenge ist die Menge der geraden Primzahlen, sie enthält nämlich nur die Zahl 2.

Häufig wird das Wort "Menge" auch folgendermaßen benutzt: Wassermenge, Buttermenge, Wärmemenge.
Auf diese Weise bezeichnet man Quantitäten, wobei man jedoch nicht danach fragt, ob diese Quantitäten Zusammenlassungen einzelner Objekte, z.B. Wassermoleküle, sind. In diesem Sinne wollen wir das Wort Menge nicht gebrauchen.

Bevor man Mengen bildet, legt man fest, welche Objekte für die Mengenbildung überhaupt in Frage kommen. Betrachtet man z.B. Mengen von geometrischen Figuren einer Ebene, so wird man vernünftigerweise z.B. nicht auch noch die Häuser der Stadt Rostock zugrunde legen, sondern sich von vornherein auf die Figuren der Ebene beschränken.

Die der Mengenbildung jeweils zugrunde gelegten Objekte bilden den sogenannten Grundbereich.
Über einem gegebenen Grundbereich kann man nun auf verschiedene Weisen Mengen bilden. Fasst man insbesondere alle Objekte des jeweiligen Grundbereiches zu einer Menge zusammen, so erhält man die Allmenge über diesem Grundbereich. Wir bezeichnen sie mit "E".
Mengen A und B heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Wir schreiben. dann "$A = B$".

Beispiel: Als Grundbereich wählen wir die natürlichen Zahlen.
A: Menge aller Primzahlen zwischen 40 und 45;
B: Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 40 und 45.
Es gilt $A = B$, da A und B dieselben Elemente enthalten, nämlich die Zahlen 41 und 43.

2.2 Operationen mit Mengen

Komplement einer Menge.
Die Objekte eines Grundbereichs, die nicht zu einer gegebenen Menge A gehören, bilden ihrerseits eine Menge, die man als Komplementmenge der Menge A bezüglich des gegebenen Grundbereichs bezeichnet.
Das Komplement der Allmenge ist die leere Menge.

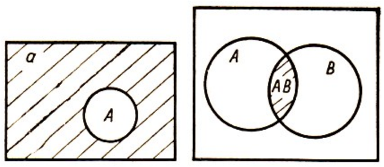


Bild 1 und 2

In unseren Aufgaben werden wegen der besseren Übersichtlichkeit die Komplemente der mit großen Buchstaben bezeichneten Mengen mit den zugehörigen Kleinbuchstaben bezeichnet. So wird z.B. das Komplement der Menge A mit "a" bezeichnet.[1]

[1]Häufig wird das Komplement einer Menge A mit "$\overline{A}$" bezeichnet. Es gilt: $\overline{\overline{A}} = A$.

Im Bild 1 besteht der Grundbereich aus allen Punkten innerhalb des Rechtecks. Die Menge A besteht aus allen Punkten des Kreisinneren und des Kreisrandes.
Die schraffierte Fläche stellt dann das Komplement a von A dar.

Auch im folgenden werden wir Mengen durch entsprechende Diagramme veranschaulichen.
Statt durch Figuren in einer Ebene kann man Mengen auch durch Intervalle auf einer Geraden veranschaulichen. Da man jeder reellen Zahl umkehrbar eindeutig einen Punkt auf einer Zahlengeraden zuordnen kann, stellt jedes Intervall dieser Zahlengeraden die Veranschaulichung einer Menge reeller Zahlen dar.
In unseren Aufgaben werden wir uns mit Zeitspannen beschäftigen, in denen bestimmte Ereignisse ablaufen. Diese Zeitspannen können als Intervalle auf einer Zeitachse dargestellt und damit als Mengen aufgefasst werden.

Durchschnitt von Mengen.
Gegeben sind Mengen A und B. Der Durchschnitt der Mengen A und B ist diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die sowohl zu A als auch zu B gehören (Bild 2).
Wir bezeichnen ihn mit "$A \cap B$" (gelesen: A geschnitten mit B). Es ist auch üblich, das Zeichen "$\cap$" wegzulassen. Statt "$A \cap B$" wird dann "AB" geschrieben. Im folgenden wird die zweite Schreibweise gewählt, um die Lesbarkeit zu verbessern.

Haben die Mengen A und B kein gemeinsames Element, so ist ihr Durchschnitt die leere Menge, wir sagen kürzer: ihr Durchschnitt ist leer (Bild 3). Dann gilt also

$$AB = \varnothing$$

In diesem Fall heißen die Mengen A und B disjunkt.

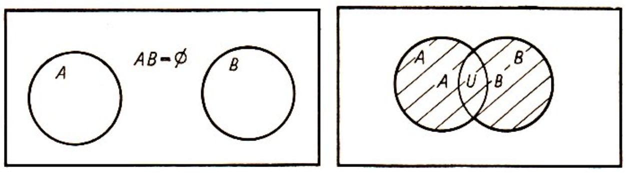


Bild 3 und 4

Für die Durchschnittsbildung von Mengen gelten die folgenden Regeln:

$$AA = A \tag{1}$$
$$AB = BA \qquad \text{(Kommutativität)} \tag{2}$$
$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(Assoziativität)} \tag{3}$$

Auf Grund von (2) und (3) können wir in Durchschnitten von mehr als zwei Mengen die Klammern weglassen und die einzelnen Mengen in beliebiger Reihenfolge schreiben.
Es gilt z.B.: $ABCD = BADC$

$$AE = EA = A \tag{4}$$
$$A\varnothing = \varnothing A = \varnothing \tag{5}$$
$$Aa = \varnothing \tag{6}$$

Vereinigung von Mengen.
Die Vereinigung der Mengen A und B ist diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die zu A oder zu B gehören.
Dabei ist das in dieser Erklärung benutzte Wort "oder" das nicht ausschließende "oder" (vgl. 1.3.). Zur Vereinigung der Mengen A und B gehören also die Elemente, die in A oder in B

oder auch in AB liegen.

Wir bezeichnen die Vereinigung von A und B mit "$A \cup B$" (gelesen: A vereinigt mit B) (Bild 4).
Für die Vereinigungsbildung gelten folgende Regeln, deren Beweise wieder sehr leicht aus der oben angegebenen Erklärung

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{(Kommutativität)} \qquad (8)$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \text{(Assoziativität)} \qquad (9)$$

Wie beim Durchschnitt können wir auch hier auf Grund von (8) und (9) in Vereinigungen von mehr als zwei Mengen die Klammern weglassen und die einzelnen Mengen in beliebiger Reihenfolge schreiben.

$$A \cup E = E \cup A = E \qquad (10)$$
$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \qquad (11)$$
$$A \cup a = E \qquad (12)$$

Die Eigenschaften der Kommutativität und der Assoziativität kennen wir bereits von der Addition und Multiplikation reeller Zahlen her. Dort gilt analog zur Durchschnitts- und Vereinigungsbildung für reelle Zahlen a, b, c:

$$a + b = b + a \quad ; \quad a \cdot b = b \cdot a$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad ; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Dem für das Rechnen mit reellen Zahlen gültigen Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

entsprechen in der Mengenalgebra zwei Distributivgesetze:

$$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \quad ; \quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

Ähnlich wie beim Rechnen mit reellen Zahlen Klammern um Produkte weggelassen werden dürfen, verabreden wir hier, dass Klammern um Durchschnitte weggelassen werden dürfen, d.h., dass die Durchschnittsbildung vor der Vereinigungsbildung auszuführen ist, falls keine Klammern gesetzt sind.
Die Distributivgesetze können wir dann kürzer folgendermaßen schreiben:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC \qquad (13)$$
$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C) \qquad (14)$$

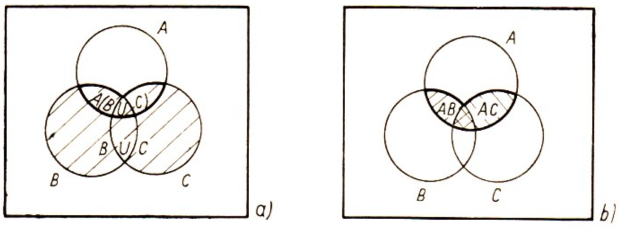


Bild 5

Die Bilder 5 und 6 veranschaulichen die Aussage dieser beiden Gesetze.

In der Mengenalgebra gibt es noch weitere Analogien zum Rechnen mit reellen Zahlen.

Auf Grund von (5) ist ein Durchschnitt auch von mehr als zwei Mengen genau dann gleich der leeren Menge, wenn mindestens eine der im Durchschnitt auftretenden Mengen gleich der leeren Menge ist. Dies entspricht der Tatsache, dass ein Produkt reeller Zahlen genau dann gleich 0 ist, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.

Beispiel: $AB\varnothing CD = \varnothing$

$$\begin{aligned}
AB\varnothing CD &= A(B\varnothing)CD && \text{nach } (3),\\
&= A\varnothing CD && \text{nach } (5),\\
&= (A\varnothing)CD && \text{nach } (3),\\
&= \varnothing CD && \text{nach } (5),\\
&= (\varnothing C)D && \text{nach } (3),\\
&= \varnothing D && \text{nach } (5),\\
&= \varnothing && \text{nach } (5).
\end{aligned}$$

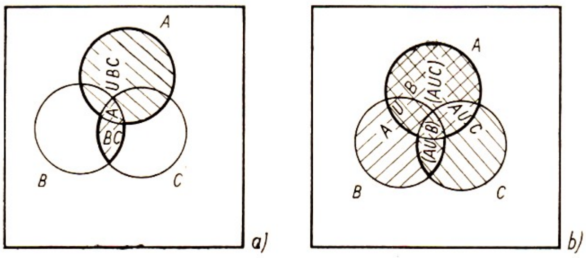
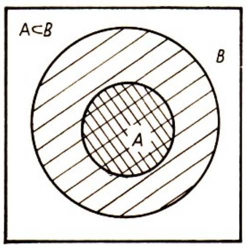


Bild 6

Weiterhin findet sich in der Mengenalgebra ein Analogon zur Eigenschaft der Zahl 0 als neutrales Element der Addition.
Ebenso wie man auf Grund von $a + 0 = a$ in einer Summe einen Summanden, der gleich 0 ist, weglassen kann, kann man wegen (11) in einer Vereinigung auch von mehr als zwei Mengen eine Komponente dieser Vereinigung, die gleich der leeren Menge ist, weglassen.
Beispiel: $A \cup \varnothing \cup B \cup C = A \cup B \cup C$

2.3 Die Teilmengenbeziehung

Wenn eine Menge B dieselben Elemente wie eine Menge A enthält, darüber hinaus aber wenigstens ein weiteres Element, welches nicht zu A gehört, so heißt A (echte) Teilmenge von B, in Zeichen "$A \subset B$" (Bild 7).



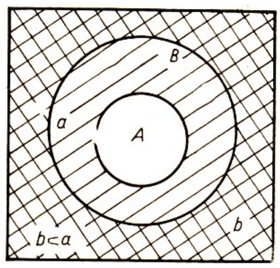


Bild 7 und 8

Wie wir am Bild 7 erkennen, gilt folgendes

$$A \subset B \quad \text{bedeutet} \quad A = AB \tag{15}$$

Die Gleichung $A = AB$ gilt aber nicht nur, falls $A \subset B$ ist, sondern auch im Falle $A = B$. Dann geht sie nämlich über die in Gleichung (1) $A = AA$.
Wie aus Bild 8 hervorgeht, ist $A \subset B$ gleichbedeutend mit $b \subset a$, d.h. mit $b = ab$.

2.4 Zerlegung von Mengen

Sind Mengen A und B gegeben, so kann man beispielsweise die Menge A in zwei Teilmengen (Komponenten) zerlegen, von denen die eine nur aus solchen Elementen von A besteht, die zugleich auch in B liegen, und die andere nur aus solchen, die zugleich in b liegen.
Da B und b disjunkt sind, sind die so erhaltenen Teilmengen von A ebenfalls disjunkt (Bild 9).

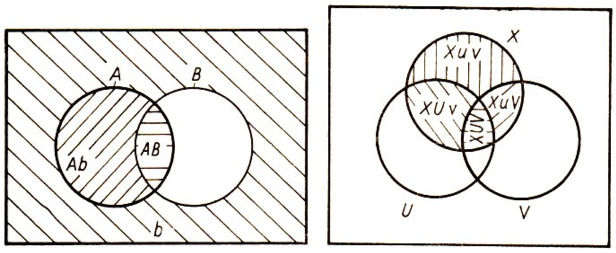


Bild 9 und 10

Die beiden Komponenten von A sind die Mengen AB und Ab. Es gilt also

$$A = AB \cup Ab$$

Diese Gleichung gilt auch in den folgenden drei Sonderfällen, wie man sich leicht an Darstellungen dieser Fälle klarmachen kann, die Bild 9 entsprechen:

$$A \subset B; \qquad A = B; \qquad A \subset b$$

Bildet man zu gegebenen Mengen A, B die Gleichung $A = AB \cup Ab$, so sagt man auch, dass die Menge A nach der Menge B zerlegt wird.
Die Zerlegung der Menge B nach der Menge A ergibt folgende Gleichung:

$$B = BA \cup Ba$$

Man kann nun eine Menge auch nach mehreren Mengen zerlegen. Als Beispiel zerlegen wir die Menge X nach den Mengen U und V (Bild 10).

$$X = XUV \cup XUv \cup XuV \cup Xuv$$

Als Sonderfall des geschilderten Zerlegungsverfahrens zerlegen wir nun die Allmenge. Dabei stellen wir die Allmenge als Vereinigung einer beliebigen Menge A mit ihrem Komplement a dar:

$$E = A \cup a$$

Wir zerlegen E nach B:

$$E = EB \cup Eb$$

Durch Einsetzen für E ergibt sich

$$E = (A \cup a)B \cup (A \cup a)b$$

und nach (13):

$$E = AB \cup aB \cup Ab \cup ab$$

Nach (8) und (9) können wir umordnen und erhalten übersichtlicher:

$$E = AB \cup Ab \cup aB \cup ab$$

Zerlegen wir die Allmenge $E = A \cup a$ nach B und C, so ergibt sich entsprechend eine Vereinigung von 8 Komponenten:

$$E = ABC \cup ABc \cup AbC \cup Abc \cup aBC \cup aBc \cup abC \cup abc$$

Zerlegt man die Allmenge nach 3 bzw. nach n Mengen, so erhält man Zerlegungen mit $2^4 = 16$ bzw. 2^{n+1} Komponenten.
Wir gehen noch die Zerlegung von $E = A \cup a$ nach B, C und D an:

$$\begin{aligned} E = ABCD \cup ABCd \cup ABcD \cup ABcd \cup AbCD \cup AbCd \cup AbcD \cup Abcd \\ \cup aBCD \cup aBCd \cup aBcD \cup aBcd \cup abCD \cup abCd \cup abcD \cup abcd \end{aligned}$$

Die nach unserem Verfahren zu zerlegende Menge kann natürlich ihrerseits schon aus anderen Mengen gebildet sein. So ist es z.B. bei der Lösung einiger unserer Aufgaben notwendig, Durchschnitte von Mengen zu zerlegen.
Als Beispiel zerlegen wir den Durchschnitt XY nach den Mengen R und S:

$$XY = XYRS \cup XYRs \cup XYrS \cup XYrs$$

In der Zerlegung einer Menge können gewisse Komponenten gleich der leeren Menge sein und daher nach (11) fortgelassen werden. Als Beispiel betrachten wir folgende Zerlegung von A nach B und C:

$$A = ABC \cup ABc \cup AbC \cup Abc$$

Gilt nun außerdem noch die Gleichung $B = BC$, d.h. nach (15), dass B Teilmenge von C oder gleich C ist, so ergibt sich durch Einsetzen für B:

$$\begin{aligned} A &= ABCC \cup ABCc \cup AbC \cup Abc \\ &= ABC \cup ABCc \cup AbC \cup Abc && \text{(nach (1))} \\ &= ABC \cup AB\varnothing \cup AbC \cup && \text{(nach (6))} \\ &= ABC \cup \varnothing \cup AbC \cup Abc && \text{(nach (5))} \\ &= ABC \cup AbC \cup Abc && \text{(nach (11)).} \end{aligned}$$

Da für jede Menge X gilt: $Xx = \varnothing$, fallen also stets diejenigen Komponenten aus einer Zerlegung heraus, in denen derselbe Buchstabe sowohl groß- als auch kleingeschrieben auftritt.

2.5 Mengenvereinigung und Addition von Zahlen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Mengen mit einer endlichen Anzahl von Elementen, kurz endliche Mengen.
Die Anzahl der Elemente einer Menge A bezeichnen wir mit "(A)".
Die im Abschnitt 2 erwähnten Ähnlichkeiten der Mengenvereinigung mit der Addition von Zahlen legen den Gedanken nahe, dass man immer von der Vereinigung von Mengen zur Summe der Elementeanzahlen der Komponenten übergeben kann, also von $A \cup B$ zu $(A) + (B)$. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist das nicht der Fall:

Die Menge A sei die Menge aller Studenten des 1. Studienjahres an einer Hochschule. Es sei $(A) = 450$.
Die Menge B sei die Menge aller Mathematik-Studenten dieser Hochschule. Es sei $(B) = 320$.
Die Anzahl der Mathematikstudenten im 1. Studienjahr sei 80. Die Anzahl der Elemente von $A \cup B$ ist gleich 690.
Dagegen gilt $(A) + (B) = 770$. In dieser Summe ist die Anzahl der Mathematikstudenten des 1. Studienjahres, also die Anzahl von AB zweimal gezählt.

Ist jedoch der Durchschnitt zweier Mengen leer, d.h., sind sie disjunkt, so ergibt sich die Anzahl der Elemente in ihrer Vereinigung als Summe der Elementeanzahlen dieser Mengen. Da nun je zwei der bei der Zerlegung einer Menge entstehenden Komponenten disjunkt sind, folgt z.B. aus

$$A = ABC \cup ABc \cup AbC \cup Abc$$

die Gleichung

$$(A) = (ABC) + (ABc) + (AbC) + (Abc).$$

3 Aufgaben, zu deren Lösung keine Hilfsmittel aus der mathematischen Logik benutzt werden

3.1 Bücher und Berufe

Von fünf Freunden hat jeder je einen Sohn. Jeder Sohn hat sich ein Buch bei einem der Freunde seines Vaters entliehen. Die Freunde haben alle Familiennamen, die einen Beruf bezeichnen. Es bestehen dabei folgende Bedingungen:

1. Bei keinem stimmt der Familienname mit seinem Beruf überein.
2. Entsprechend einer alten Familientradition erlernt der Sohn den Beruf seines Vaters.
3. Der Sohn des Schneiders hat ein Buch von Herrn Schneider.
4. Der Familienname des Sohnes des Schneiders ist die Berufsbezeichnung des Sohnes von Herrn Schneider.
5. Der Sohn von Herrn Schneider hat ein Buch vom Schneider entliehen.
6. Der Zimmermann heißt nicht Schuster.
7. Der Zimmermann hat ein Buch von Herrn Sattler entliehen.

Wie heißt der Gärtner?

Die Lösung lässt sich mit Hilfe einer Tabelle finden.
Wir tragen zunächst den Beruf "Schneider" in eine beliebige Spalte ein. Nach Bedingung 1. muss dann der Name von Herrn Schneider in eine andere Spalte eingetragen werden:

Name		Schneider			
Beruf	Schneider				

Das Entleihen eines Buches deuten wir durch einen Pfeil an, der vom Verleiher zum Entleiher weist. Unsere Tabelle erhält dann nach Bedingung 2., 3. und 5. zunächst folgendes Aussehen:

Name		Schneider			
Beruf	Schneider				

Nach Bedingung 2. und 4. ist der Familienname der Schneider gleich der Berufsbezeichnung von Herrn Schneider und Sohn. Wir deuten dies in der Tabelle durch gleiche Zeichen in den entsprechenden Feldern an:

Name	$\oplus$	Schneider			
Beruf	Schneider	$\oplus$			

Nach Bedingung 7. muss der Beruf "Zimmermann" in eine noch freie Spalte eingetragen werden. Würden nämlich die mit dem Kreuz gekennzeichneten Felder mit "Zimmermann" ausgefüllt werden, dann hätte der Zimmermann ein Buch von Herrn Zimmermann im Widerspruch zu Bedingung 7.

Name	$\oplus$	Schneider			
Beruf	Schneider	$\oplus$	Zimmermann		

Der Name von Herrn Sattler muss in eine der noch freien Spalten eingetragen werden. Denn einmal kann nach Bedingung 7. der Zimmermann nicht Sattler heißen, zum anderen kann aber auch der Schneider nicht Sattler heißen, da sonst der Sattler ein Buch von Herrn Sattler entliehen hätte im Widerspruch zu Bedingung 7.
Der Zimmermann kann also weder Zimmermann (Bed. 1) noch Schneider (s. Tabelle) noch Schuster (Bed. 6) noch Sattler heißen. Er heißt also Gärtner:

Name	$\oplus$	Schneider	Gärtner	Sattler	
Beruf	Schneider	$\oplus$	Zimmermann		

Wegen Bedingung 7. kann an Stelle der Kreuze nicht "Zimmermann" stehen. Für diese Felder bleibt also nur "Schuster" übrig. Daher muss in die letzte Spalte der Name "Zimmermann" eingetragen werden. Da Herr Sattler nach Bedingung 1. nicht Sattler ist, ergibt sich schließlich folgende Aufteilung:

Name	Schuster	Schneider	Gärtner	Sattler	Zimmermann
Beruf	Schneider	Schuster	Zimmermann	Gärtner	Sattler

3.2 Professor Kuckuck

Professor Kuckuck versandte an seine Kollegen in sieben Ländern seine wissenschaftlichen Arbeiten und vertauschte dabei aus Versehen die Umschläge.

Der Tscheche Kukačka, der sich für die Adler interessiert, bekam einen Brief in dänischer Sprache und dazu einen Artikel über den Flamingo, der eigentlich für den Franzosen Coucou bestimmt war.

Letzterer erhielt dafür den italienischen Brief und einen Artikel über den Kreuzschnabel, der für den Holländer Koekoek bestimmt war.

Dieser wiederum bekam den spanischen Brief und eine Arbeit über die Blaumeise, für die sich eigentlich der Däne Kukken interessierte, der aber einen Artikel über die Adler erhielt.

Der Italiener Cuculo, der sich für den Neuntöter interessiert, bekam den russischen Brief, und der Russe Kukuschka, dessen Interesse den Schwalben gilt, erhielt den französischen Brief.
Wer bekam den Artikel, der für den Spanier Cuchillo bestimmt war, und in welcher Sprache war der Brief abgefasst, den Cuchillo erhielt?

Lösung:
Wir wollen folgende Abkürzungen einführen: F: Franzose, R: Russe, I: Italiener, S: Spanier, H: Holländer, D: Däne, T: Tscheche. Die Sprache, in der die Brieftexte abgefasst sind, bezeichnen wir entsprechend mit f, r, i, s, h, d, t, während die wissenschaftlichen Arbeiten, die ihnen zugedacht waren, mit f', r', i', s', h', d', t', bezeichnet werden. Es entsteht so folgende Tabelle:

	F	R	I	S	H	D	T	
f		b					W	f'
r			b	W				r'
i	b	W						i'
s			W		b			s'
h	w					B		h'
d					w		b	d'
t				B		w		t'

In die Tabelle wurde alles aufgenommen, was schon bekannt war, wobei der Buchstabe "b" den erhaltenen Brief und "w" die erhaltene wissenschaftliche Arbeit bedeutet.
Offensichtlich muss jede Zeile und jede Spalte je ein "b" und je ein "w" enthalten; außerdem können "b" und "w" nicht gleichzeitig in einem Kästchen sein.

Die fehlenden "b" müssen sich also in den Feldern (D, h) und (S, t) befinden. Wir tragen sie in die Tabelle ein, bezeichnen sie aber, da sie nicht gegeben waren, mit "B". Was die fehlenden "w" betrifft, so muss man diese in den für "R", "I", "S" und r', i', s', bestimmten Feldern suchen. Alle diese Felder befinden sich in einem größerem Feld, das in der Zeichnung entsprechend hervorgehoben ist.

Da aber B nicht zusammen mit r' auftreten kann und das Feld (I, r') schon besetzt ist, muss ein "w" (hier mit "W" bezeichnet, da es nicht gegeben war) im Feld (S, r') liegen, woraus folgt, dass I mit s' und H mit i' verbunden ist, wie auch die Zeichen "W" in den jeweiligen Feldern zeigen.

Das heißt also, dass der Italiener Cuculo die für den Spanier Cuchillo bestimmte wissenschaftliche Arbeit erhielt. Letzterer wiederum bekam den tschechischen Brief.

3.3 Die Legierung

In einem metallurgischen Betrieb werden Legierungen hergestellt. Von einer dieser Legierungen, die zu ungleichen Teilen aus Gold, Silber und Kupfer besteht, ist folgendes bekannt:

1. Eines der verwendeten Metalle wird im Labor dieses Betriebes nicht untersucht.
2. Von den Metallen, die im Labor untersucht werden, hat in der Legierung keines einen größeren Anteil als Gold.
3. Wenn das Gold einen der kleineren Gewichtsanteile in der betreffenden Legierung haben sollte, dann ist es das Metall, das nicht im Labor untersucht wird.
4. Im Labor wird das Metall nicht untersucht, dessen Gewichtsanteil in der Legierung durch die bisher angeführten Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

5. Wenn Silber oder Kupfer den mittleren Gewichtsanteil in der Legierung haben, dann ist der Anteil von Kupfer größer als derjenige des Metalls, das in Topongu gewonnen wird.

Es ist zu ermitteln, welchen Anteil - den größeren, mittleren oder kleineren - jedes der Metalle in der Legierung hat, welches Metall im Labor nicht untersucht wird und welches in Topongu gewonnen wird!

Lösung:
Wir stellen eine Tabelle mit drei Zeilen auf, die wir mit den Buchstaben M_1, M_2 und M_3 - jeweils für den größten, den mittleren und den kleinsten Anteil in der Legierung - bezeichnen. Unter Berücksichtigung der Bedingung 1. ergeben sich die folgenden 18 Möglichkeiten (durch den Index 0 sind die Metalle gekennzeichnet, die nicht im Labor untersucht werden):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_1	G_0	G	G	G_0	G	G	S_0	S	S
M_2	S	S_0	S	K	K_0	K	G	G_0	G
M_3	K	K	K_0	S	S	S_0	K	K	K_0
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
M_1	S_0	S	S	K_0	K	K	K_0	K	K
M_2	K	K_0	K	G	G_0	G	S	S_0	S
M_3	G	G	G_0	S	S	S_0	G	G	G_0

Auf Grund von Bedingung 2. scheiden folgende Möglichkeiten aus: 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 17; 18.
Auf Grund von Bedingung 3. scheiden die Möglichkeiten 7 und 13 aus.

Aus den übrigbleibenden Möglichkeiten 1 bis 6 liest man ab, dass Gold das einzige Metall ist, dessen Gewichtsanteil in der gesuchten Legierung auf Grund der bisher benutzten Bedingungen schon feststeht. Es hat nämlich auf jeden Fall den größten Gewichtsanteil. Damit wird es nach Bedingung 4. nicht im Labor untersucht.
Es bleiben also nur noch die Möglichkeiten 1 und 4. Jetzt folgt aus Bedingung 5., dass die Möglichkeit 4 die gesuchte Legierung angibt.

Wir erhalten also folgende Lösung:
Gold wird nicht im Labor untersucht, Silber wird in Topongu gewonnen, die Gewichtsanteile der einzelnen Metalle liest man aus Möglichkeit 4 ab.

3.4 Drei Freunde

In einem Café trafen sich drei Freunde: der Bildhauer Weiß, der Pianist Schwarz und der Maler Braun.
"Es ist merkwürdig, dass einer von uns weiße, einer schwarze und einer braune Haare hat, dass jedoch keiner von uns die Haarfarbe hat, die seinem Namen entspricht", bemerkte der Schwarzhaarige.
"Du hast recht", meinte Weiß. Was für eine Haarfarbe hat der Maler?

Lösung: 4
Wir stellen wieder eine Tabelle auf :

	Bildhauer Weiß	Pianist Schwarz	Maler Braun
Kombinationsmöglichkeiten	s	b	w
der Haarfarben	b	w	s

Jeder der Freunde kann nur eine Haarfarbe haben, die seinem Namen nicht entspricht. Daher kann der Bildhauer Weiß zunächst einmal nicht weißhaarig sein.
Er kann aber auch nicht der Schwarzhaarige sein, weil er doch dem Schwarzhaarigen antwortet. Folglich hat Herr Weiß braune Haare. Damit bleibt für den Pianisten Schwarz nur die weiße Haarfarbe. Daraus ergibt sich schließlich, dass der Maler Braun schwarzhaarig ist.

3.5 Zwei Stämme

Auf einer Insel wohnen zwei Stämme: die Ehrlichen, die immer die Wahrheit sagen, und die Lügner, die immer lügen.
Ein Reisender begegnete einem Eingeborenen, fragte ihn, zu welchem Stamm er gehöre. Der Diener antwortete, dass er aus dem Stamm der Ehrlichen sei. Daraufhin nahm der Reisende ihn in Dienst.

Sie gingen weiter und erblickten in der Ferne einen anderen Eingeborenen. Der Reisende schickte seinen Diener, um jenen zu fragen, zu welchem Stamm er gehöre. Der Diener kehrte zurück und sagte, jener habe erklärt, er sei aus dem Stamm der Ehrlichen.
Die Frage ist nun, war der Diener ein Ehrlicher oder ein Lügner?

Lösung:
1. Wir nehmen zunächst an, dass der Diener zu den Ehrlichen gehört.

a) Wenn der zweite Eingeborene auch zu ihnen gehört, wird er von sich sagen, dass er ein Ehrlicher ist, und der Diener das wahrheitsgemäß dem Reisenden berichten.

b) Wenn der zweite Eingeborene ein Lügner ist, wird er von sich sagen, dass er ein Ehrlicher ist, was der Diener wiederum dem Reisenden genau so berichten wird.

2. Nehmen wir jetzt an, dass der Diener ein Lügner ist.

a) Wenn der zweite Eingeborene ein Ehrlicher ist, dann wird seine Aussage vom Diener falsch übermittelt, das heißt, der Diener wird sagen, dass jener ein Lügner ist.

b) Wenn der zweite Eingeborene ein Lügner ist, wird er sagen, dass er zu den Ehrlichen gehört, und der Diener wird diese Aussage umdrehen und sagen, dass jener ein Lügner ist.

Der Diener muss also aus dem Stamm der Ehrlichen sein, da die Fälle 2a und 2b der Bedingung der Aufgabe widersprechen.
Dasselbe kann man kürzer ausdrücken:
Analog wie in Aufgabe 4.3 schließen wir, dass jeder Inselbewohner auf die gestellte Frage nichts anderes antworten kann, als dass er zum Stamm der Ehrlichen gehört, ganz gleich, zu welchem Stamm er wirklich gehört.
Da der Diener diese einzig mögliche Antwort richtig wiedergab, ist klar, dass er ein Ehrlicher ist. Der Leser möge diese ganze Überlegung mit Hilfe der Aussagenlogik anstellen.

4 Aufgaben, die mit Hilfsmitteln aus der Aussagenlogik gelöst werden können

4.1 Die Eingeborenen und die Fremden

Drei Personen stehen vor Gericht, von denen jeder entweder ein Eingeborener oder ein Fremder sein kann.
Der Richter weiß, dass die Eingeborenen immer wahrheitsgemäß auf Fragen antworten, während die Fremden immer lügen.
Allerdings weiß der Richter nicht, wer von ihnen Eingeborener ist und wer Fremder.

Er fragt den ersten Mann danach, aber versteht dessen Antwort nicht. Deshalb fragt er erst den zweiten, dann den dritten danach, was der erste geantwortet hat.
Der zweite antwortet, dass der erste gesagt habe, er sei Eingeborener. Der dritte sagt, der erste habe sich als Fremder ausgegeben.
Wer waren der zweite und der dritte Angeklagte?

Lösung:
Wir bezeichnen die erste befragte Person mit A und führen weiterhin folgende Bezeichnungen ein:
XF bedeutet X sagt, dass er ein Fremder ist,
XF' bedeutet "X ist ein Fremder",
XE bedeutet X sagt, dass er ein Eingeborener ist,
XE' bedeutet "X ist ein Eingeborener".

Wenn wir den Fall ausschließen, dass die befragte Person geschwiegen hat, dann gilt offensichtlich

$$\overline{AF} \to AE \tag{1}$$

Aus der Voraussetzung über die Fremden folgt weiter

$$AF' \to \overline{AF} \tag{2}$$

Aus (2) und (1) erhält man gemäß Formel (22)

$$AF' \to AE \tag{3}$$

Analog kann man leicht schließen, dass

$$\overline{AF'} \to AE' \qquad , \qquad AE' \to AE \tag{4,5}$$

und folglich auch

$$\overleftarrow{AF'} \to AE \tag{6}$$

gilt. Aus (3) und (6) folgt aber, dass AE gilt, das heißt, die erste befragte Person konnte nichts anderes gesagt haben als "Ich bin ein Eingeborener".

Der weitere Lösungsweg ist einfach, und wir wollen hier nun mit wenigen Worten darauf eingehen. Wenn der zweite Befragte ein Fremder gewesen wäre, dann hätte er erklärt, dass der erste von sich gesagt habe, er sei ein Fremder. Aber da der zweite das Gegenteil sagte, ist klar, dass er ein Eingeborener ist.
Analog schließen wir, dass der dritte Befragte ein Fremder ist.

4.2 Die Besprechung eines neuen Projekts

In einem Betrieb gibt es drei Abteilungen: A, B und C. Über die Teilnahme an der Besprechung eines neuen Projekts ist folgendes vereinbart worden:

1. Wenn die Abteilung B nicht an der Besprechung teilnimmt, dann nimmt auch die Abteilung A nicht daran teil.
2. Wenn die Abteilung B an der Besprechung teilnimmt, dann nehmen auch die Abteilungen A und C teil.

Die Frage lautet, ob unter diesen Bedingungen die Abteilung C zur Teilnahme an der Besprechung verpflichtet ist, wenn an ihr Abteilung A teilnimmt.

Lösung:
Wir bezeichnen die Aussage "Abteilung A nimmt an der Besprechung teil"mit a und analog dazu die gleiche Aussage für die Abteilungen B und C mit den Buchstaben b und c. Die in der Aufgabe genannten Bedingungen kann man dann so schreiben:

$$\overline{b} \to \overline{a} \qquad , \qquad b \to (a \land c) \tag{1,2}$$

Aus (1) ergibt sich durch Kontraposition $a \to b$. Aus der Tautologie 22.

$$\{(X \to Y) \land (Y \to Z)\} \to (X \to Z)$$

erhält man durch Einsetzen von $(X \land Z)$ für Z

$$\{(X \to Y) \land [Y \to (X \land Z)]\} \to [X \to (X \land Z)]$$

Setzen wir a für X, b für Y und c für Z ein, so erhalten wir:

$$\{(a \to b) \land [b \to (a \land c)]\} \to [a \to (a \land c)] \tag{3}$$

Auf Grund der in der Aufgabe angegebenen Verhältnisse ist den Ausdrücken (1) und (2) der Wahrheitswert 1 zugeordnet. Folglich ist auch die linke Seite von (3) wahr.
Aber auch die ganze Formel (3) muss den Wahrheitswert 1 haben, da diese Formel aus einer Tautologie entstanden ist. Deshalb kann man auf sie die Abtrennungsregel anwenden und erhält, dass der Ausdruck

$$a \to (a \land c) \tag{4}$$

ebenfalls wahr ist. Folglich muss Abteilung C an der Besprechung eines neuen Projekts teilnehmen, wenn Abteilung A daran teilnimmt.

4.3 Die zerbrochene Fensterscheibe. Erste Variante

In der Pause waren 15 Schüler in der Klasse geblieben. In dieser Zeit wurde dort eine Fensterscheibe zerbrochen, und zwar von genau einem dieser Schiller. Der Lehrer schrieb die Aussagen der einzelnen Schüler auf:

Angelika: "Ich war es nicht. Bernd hat das getan."
Bernd: "Ja, ich habe die Scheibe zerbrochen."
Wolfgang: "Er lügt, Frank hat das gemacht."
Dagmar: "Nein, das stimmt nicht, aber ich war es auch nicht."
Eva: "Das war entweder Karin oder Angelika, aber ich nicht."

Frank: "Eins von den Mädchen hat die Scheibe zerbrochen."
Christa: "Keineswegs, die Jungen haben die Scheibe zerbrochen."
Sonja: "Angelika und ich waren es."
Irene: "Ich habe gesehen, wie einer von den Jungen die Scheibe zerbrochen hat, aber ich weiß nicht mehr wer."
Jürgen: "Bernd sagt nicht die Wahrheit, ich habe die Scheibe zerbrochen."
Karin: "Ich habe nicht mitgemacht, Angelika war es allein."
Lutz: "Jürgen hat die Wahrheit gesagt."
Manuela: "Lutz lügt, das Fenster ist von allein durch den Luftzug zerbrochen."
Helga: "Ich habe ein Buch gelesen und weiß von nichts."
Renate: "Angelika hat es getan."

Außerdem ist bekannt, dass ein und nur ein Schüler die Wahrheit gesagt hat. Wer hat das Fenster zerbrochen?

Lösung:
Wir bezeichnen Aussagen der Form "... hat die Fensterscheibe zerbrochen", "... hat das getan" mit dem Anfangsbuchstaben vom Vornamen desjenigen, der nach dieser Aussage der Schuldige ist.
So drücken wir Renates Aussage zum Beispiel mit A aus, Dagmars Aussage mit $F \wedge D$ usw.

Gesondert müssen noch die Zusätze in einigen Aussagen bezeichnet werden: In Irenes Aussage "Ich weiß nicht wer" als P, in Manuelas Aussage "Das Fenster ist allein durch den Luftzug zerbrochen" als V.
Dann kann man alle Aussagen in folgender Form schreiben:

1. Angelika: B
2. Bernd: B
3. Wolfgang: F
4. Dagmar: $\overline{F} \wedge \overline{D}$
5. Eva: $(K \wedge \overline{A} \vee (\overline{K} \wedge A)$
6. Frank: $A \vee D \vee ... \vee R$
7. Christa: $\overline{A} \wedge \overline{D} \wedge ... \wedge \overline{R}$
8. Sonja: $A \wedge S$
9. Irene: $(B \vee W \vee F \vee J \vee L) \wedge P$
10. Jürgen: J
11. Karin: A
12. Lutz: J
13. Manuela: $\overline{J} \wedge V$
14. Renate: A

Da Christas Aussage die Verneinung von Franks Aussage ist, muss genau eine von ihnen wahr sein.

I. Wir nehmen an, Franks Aussage sei wahr. In diesem Falle sind nach den Bedingungen der Aufgabe alle anderen Aussagen falsch, ihre Verneinungen also wahr:

1'. $\overline{B}$ (Bernd war nicht der Täter)
2'. $\overline{B}$ (Bernd war nicht der Täter)
3'. $\overline{F}$ (Frank war nicht der Täter)
4'. $\overline{\overline{F} \wedge \overline{D}}$ äquivalent mit $F \vee D$ (Frank oder Dagmar war der Täter)

Also ist Dagmar die Täterin, da nach Aussage 3'. Frank als Täter ausscheidet.
Mit diesem Ergebnis finden wir nun, dass alle folgenden Aussagen bis auf Franks Aussage tatsächlich falsch sind.

Beispiel (Aussage 5.):
Da Dagmar die Täterin war, sind die Aussagen K und A falsch, $\overline{K}$ und $\overline{A}$ demzufolge wahr. Daraus ergibt sich

K	A	$\overline{K}$	$\overline{A}$	$K \wedge \overline{A}$	$\overline{K} \wedge A$	$(K \wedge \overline{A}) \vee (\overline{K} \wedge A)$
0	0	1	1	0	0	0

Evas Aussage ist also falsch.

II. Jetzt nehmen wir an, Christas Aussage sei wahr. Auch dann müssen nach Voraussetzung alle anderen Aussagen falsch, folgende Aussagen also wahr sein:

1'. $\overline{B}$ (Bernd war nicht der Täter)
2'. $\overline{B}$ (Bernd war nicht der Täter)
3'. $\overline{F}$ (Bernd war nicht der Täter)
4'. $\overline{\overline{F} \wedge \overline{D}}$ äquivalent mit $F \vee D$

Da nach der Aussage 3' und der Annahme, Christas Aussage sei wahr, weder Frank noch Dagmar für die Tat in Frage kommen, ist die Aussage 4'. falsch. Damit erhalten wir, dass die zwei Aussagen 4. und 7. wahr sind im Widerspruch zu den Bedingungen, dass genau eine Aussage der Schüler wahr sein soll.

Die Annahme, dass irgendeine andere Aussage wahr ist, führt sofort zu demselben Widerspruch. Wie wir uns schon überlegt haben, ist ja von den Aussagen 6. und 7. genau eine wahr. Also kann keine zweite wahr sein.

4.4 Die zerbrochene Fensterscheibe. Zweite Variante

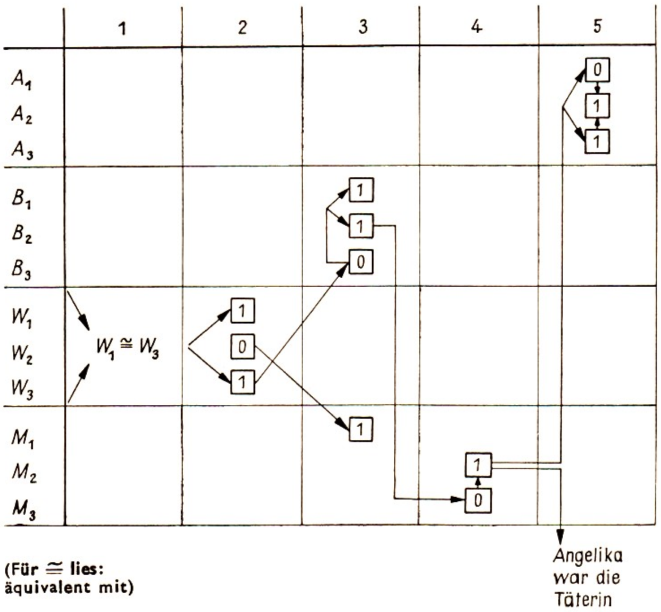
Während der Pause waren Angelika, Bernd, Wolfgang und Manuela in der Klasse. Einer von ihnen zerbrach die Scheibe. Der Lehrer fragte sie und erhielt von jedem von ihnen drei Antworten.

Angelika:	1. Ich habe sie nicht zerbrochen.
	2. Ich saß in der Klasse und habe gelesen.
	3. Manuela weiß, wer es war.
Bernd:	1. Ich habe es nicht getan.
	2. Mit Manuela spreche ich schon lange nicht mehr.
	3. Wolfgang hat es getan.
Wolfgang:	1. Ich bin unschuldig.
	2. Manuela war es.
	3. Bernd lügt, wenn er sagt, dass ich es war.
Manuela:	1. Ich habe die Scheibe nicht zerbrochen.
	2. Angelika hat die Scheibe zerbrochen.
	3. Bernd weiß, dass ich unschuldig bin,
	weil ich mich in der Pause mit ihm unterhalten habe.

Schließlich gab jeder von ihnen zu, dass von den drei Antworten, die er gegeben hatte, zwei richtig sind und eine falsch ist. Wer hat die Scheibe zerbrochen?

Lösung:
Wir bezeichnen drei zusammengehörige Aussagen jeweils mit dem Anfangsbuchstaben des Vornamens und den Indizes 1, 2 und 3 entsprechend der Reihenfolge im Aufgabentext: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, W_1, W_2, W_3, M_1, M_2, M_3.
Wir werden von Wolfgangs Aussagen ausgehen. W_1 und W_2 besagen dasselbe und sind daher entweder beide wahr oder beide falsch. Nach der Schlussbedingung der Aufgabe können sie aber nicht beide falsch sein.
Folglich sind beide wahr, und W_2 ist falsch. Dann ist aber auch M_1 wahr.

Da W_3 wahr ist, ist weiterhin B_3 falsch, was bedeutet, dass B_1 und B_2 wahr sind. Dann ist natürlich M_3 falsch und also M_2 wahr. Folglich ist A_1 falsch.
Angelika hat die Scheibe zerbrochen.
Wir stellen den Lösungsgang noch einmal übersichtlich in einer Tabelle dar:



4.5 Die zerbrochene Fensterscheibe. Dritte Variante

In der Pause blieben neun Schüler in der Klasse. Genau einer von ihnen hat eine Fensterscheibe zerbrochen. Auf die Fragen des Lehrers werden folgende Antworten gegeben:

Jürgen: Ulf hat das gemacht.
Bernd: Das stimmt nicht.
Manuela: Ich habe die Scheibe zerbrochen.
Wolfgang: Entweder Manuela oder Angelika haben es getan.
Ulf: Bernd lügt.
Stephan: Manuela hat es getan.
Lisa: Nein, Manuela hat die Scheibe nicht zerbrochen.
Angelika: Weder Manuela noch ich haben es getan.
Renate: Angelika hat recht, aber Ulf war es auch nicht.

Außerdem ist bekannt, dass von diesen neun Aussagen nur drei wahr sind. Wer hat die Scheibe zerbrochen?

Lösung:

Wir wollen Aussagen der Form "das hat ... getan" mit dem Anfangsbuchstaben des jeweiligen Vornamens bezeichnen. Dann kann man die Aussagen kurz in folgender Form schreiben:

Jürgen:	U
Bernd:	$\overline{U}$
Manuela:	M
Wolfgang:	$(M \vee A) \wedge \overline{M \wedge A}$ (d.h. "Manuela oder Angelika, aber nicht beide", also "entweder Manuela oder Angelika")
Ulf:	$\overline{\overline{U}}$
Stephan:	M
Lisa:	$\overline{M}$
Angelika:	$\overline{M} \wedge \overline{A}$
Renate:	$\overline{M} \wedge \overline{A} \wedge \overline{U}$

Zunächst nehmen wir an, dass z.B. Renates Aussage wahr ist. Da eine Konjunktion genau dann wahr ist, wenn jedes Konjunktionsglied wahr ist, liest man ab, dass auch die Aussage von Angelika, Lisa und Bernd wahr sind. Das sind aber vier wahre Aussagen.
Wir erhalten also einen Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Wir müssen also eine andere Aussage als wahr annehmen.

Wir wollen als zweiten Fall annehmen, dass Wolfgangs Aussage wahr ist. Das heißt aber, dass entweder Manuela oder Angelika die Täterin ist, also kein anderer dafür in Frage kommt. Damit sind Jürgens und Ulfs Aussagen falsch und Bernds Aussage wahr.
Weiterhin folgt, dass Angelikas und Renates Aussagen falsch sind, da nach Wolfgangs Aussage wenigstens eine von beiden Mädchen Angelika und Manuela als Täterin in Frage kommt.

Nehmen wir nun an, Manuela sei die Täterin, so sind auch Stephans und Manuelas Aussagen wahr. Damit erhalten wir wieder vier wahre Aussagen (Widerspruch). Also kann Manuela nicht die Täterin sein.

Daraus ergibt sich, dass Angelika die Täterin ist und dass Manuelas und Stephans Aussagen falsch und Lisas Aussage wahr ist.
Insgesamt erhalten wir in Übereinstimmung mit den Bedingungen der Aufgabe folgende Verteilung der Wahrheitswerte und das Ergebnis, dass Angelika die Täterin ist.

Jürgen:	0	Bernd:	1	Manuela:	0
Wolfgang:	1	Ulf:	0	Stephan:	0
Lisa:	1	Angelika:	0	Renate:	0

Damit ist die Aufgabe aber noch nicht gelöst.
Bei der Annahme, eine der anderen Aussagen sei wahr, könnte sich ja ein anderer Täter ergeben. Wir müssen also alle noch möglichen Fälle untersuchen. Der Leser zeige zur Übung selbst, dass sich dabei entweder ein Widerspruch oder die bereits erhaltene Lösung ergibt.

4.6 Der zerstreute Professor

Professor XYZ war genau so gelehrt wie zerstreut. Er hatte eine große Bibliothek, die sich in drei Räumen befand. Im ersten waren Nachschlagewerke, im zweiten wissenschaftliche Arbeiten auf seinem Spezialgebiet, im dritten wissenschaftliche Zeitschriften.
Als er seine berühmte Arbeit "Über die Unsterblichkeit der Maikäfer" schrieb, herrschte auf seinem Schreibtisch eine unbeschreibliche Unordnung, und er konnte drei Sachen nicht finden:

ein Wörterbuch der Eskimosprache, ein Lehrbuch der Nasenheilkunde und ein Pamphlet seines erbitterten Widersachers, des Doktor Schwätzer.

Der Professor war furchtbar aufgeregt und beschuldigte seinen Laboranten, dass dieser das Wörterbuch wahrscheinlich irgendwo zwischen die wissenschaftlichen Arbeiten gestellt habe und das Lehrbuch sowie das Pamphlet zwischen die Zeitschriften.
Der Laborant verneinte das und sagte, dass der Professor wie immer diese drei Sachen in ein Regal im ersten Zimmer geworfen habe.

Die Frau des Professors drückte die Vermutung aus, dass sich das Wörterbuch wahrscheinlich zwischen den Zeitschriften befinde, das Lehrbuch und das Pamphlet dagegen zwischen wissenschaftlichen Arbeiten.
Jeder bestand auf seiner Meinung, und es entstand ein heftiger Wortwechsel.
Die Tochter des Professors, die das alles mit angehört hatte, sagte: "Alles, was ihr behauptet, ist falsch."

Sie hatte recht. Wo befanden sich die vermissten Sachen, in den Bibliotheksregalen oder auf dem Schreibtisch?

Lösung:
Wir bezeichnen das Zimmer für die Nachschlagewerke mit N, das Zimmer für die wissenschaftlichen Arbeiten mit W, das Zimmer für die Zeitschriften mit Z und den Schreibtisch des Professors mit S.

Die Behauptung, dass sich "der Gegenstand x in (auf) Y befindet", schreiben wir als $x \in Y$, das Wörterbuch der Eskimosprache bezeichnen wir mit e, das Lehrbuch der Nasenheilkunde mit n und das Pamphlet des Doktor Schwätzer mit b.
Dann kann man schreiben:

1. Behauptung des Professors: $e \in W$, $n \in Z$, $b \in Z$.
2. Behauptung des Laboranten: $e \in K$, $n \in L$, $b \in N$.
3. Behauptung der Frau des Professors: $e \in Z$, $n \in W$, $b \in W$.

Wenn alle Behauptungen in i., 2. und 3. falsch sind, wie die Tochter des Professors aussagt, dann ist folgende Behauptung wahr:

$$(\overline{e \in W} \wedge \overline{n \in Z} \wedge \overline{b \in Z}) \wedge (\overline{e \in N} \wedge \overline{n \in N} \wedge \overline{b \in N}) \wedge (\overline{e \in Z} \wedge \overline{n \in W} \wedge \overline{b \in W})$$

Auf Grund von Kommutativität und Assoziativität können wir die Reihenfolge der Konjunktionsglieder und die Klammerung folgendermaßen abändern und erhalten folgenden äquivalenten Ausdruck:

$$(\overline{e \in W} \wedge \overline{e \in N} \wedge \overline{e \in Z}) \wedge (\overline{n \in Z} \wedge \overline{n \in N} \wedge \overline{n \in W}) \wedge (\overline{b \in Z} \wedge \overline{b \in N} \wedge \overline{b \in W})$$

Da diese Konjunktion wahr ist, folgt

$$e \in S, \qquad n \in S, \qquad b \in S$$

Die drei gesuchten Bücher lagen also auf dem Schreibtisch des Professors.

4.7 Der Wanderer. Erste Variante

Ein Mann wanderte zu einem See. Er gelangte zu einer Weggabelung, von der aus ein Weg nach rechts und ein Weg nach links führte. Dort saßen zwei Jungen, von denen einer immer die Wahrheit sagte und der andere immer log. Beide antworteten auf Fragen nur mit "ja" oder mit "nein".

Das alles war dem Wanderer bekannt, er wusste allerdings nicht, welcher von beiden die Wahrheit sagt und wer log. Er wusste auch nicht, welcher Weg zum See führte. Er stellte nun beiden eine Frage, und jeder der Jungen gab darauf seine Antwort.

Was war das für eine Frage, wenn der Wanderer nach den Antworten untrüglich entscheiden konnte, welcher der beiden Wege zum See führte?

Lösung:
Der Wanderer zeigte auf einen der beiden Wege und fragte:
"Stimmt es, dass dieser Weg zum See führt und dass zweimal zwei fünf ist?"
Beide Jungen antworteten "Nein", woraus er schließen konnte, dass dieser Weg zum See führte.
Der Wanderer stellte folgende Überlegungen an: Es gibt zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Der Weg, auf den ich gezeigt habe, führt zum See. Der Junge, der immer die Wahrheit sagt (W), würde auf die Frage, ob der Weg zum See führt, "ja" antworten, dagegen auf die Frage, ob zweimal zwei gleich fünf ist, "nein" und wird deshalb meine Frage im ganzen mit "nein" beantworten.
Der Lügner (L) würde auf die Frage, ob der Weg zum See führt, "nein" und auf die Frage, ob zweimal zwei gleich fünf ist, "ja" antworten, er wird folglich meine Frage im ganzen mit "nein" beantworten.

2. Möglichkeit: Der Weg, auf den ich gezeigt habe, führt nicht zum See. In diesem Falle würde W auf die Frage, ob der Weg zum See führt, "nein" und auf die Frage, ob zweimal zwei gleich fünf ist, ebenfalls "nein" antworten und wird deshalb die Frage insgesamt mit "nein" beantworten. Der Lügner würde auf die Frage, ob der Weg zum See führt, "ja" und auf die Frage, ob zweimal zwei gleich fünf ist, ebenfalls "ja" antworten und wird folglich meine Frage im ganzen mit "ja" beantworten.

So werden im 1. Fall beide Antworten "nein" lauten, im 2. Fall ist eine Antwort "ja", die andere "nein". Deshalb führt der Weg, auf den ich gezeigt habe, nur dann zum See, wenn beide Antworten auf meine Frage "nein" lauten.

Die Aussagenlogik gibt uns die Möglichkeit, diese Überlegungen kurz und übersichtlich darzustellen.
Wir bezeichnen die Aussage "Dieser Weg führt zum See" mit p und die Aussage "Zweimal zwei ist fünf" mit q.

Für beliebige Aussagen X und Y gilt, dass die Aussage $X \wedge Y$ genau dann wahr ist, wenn sowohl X als auch Y wahr sind. Wir stellen folgende Wahrheitswerttabelle auf:

		p	q	$p \wedge q$
1. Möglichkeit:	W	$\boxed{1}$	0	0
	L	0	1	0
2. Möglichkeit:	W	0	0	0
	L	1	1	1

Der Wanderer hätte auch andere Fragen stellen können, zum Beispiel "Stimmt es, dass dieser Weg zum See führt und dass die Wolga in den Stillen Ozean mündet?" (mit dergleichen Tabelle.) Oder: "Stimmt es, dass dieser Weg zum See führt und dass Kupfer ein Metall ist?" Bei dieser Frage ergibt sich folgende Tabelle:

		p	q	$p \wedge q$
1. Möglichkeit:	W	$\boxed{1}$	1	1
	L	0	0	0
2. Möglichkeit:	W	0	1	0
	L	1	0	0

Daraus lesen wir ab, dass der Weg, auf den der Wanderer gezeigt hat, nur dann zum See führt, wenn einer der Jungen mit "ja" und der andere mit "nein" antwortet.

Der Wanderer hätte aber auch eine andere Aussagenverbindung anwenden können, zum Beispiel "oder" und auch "wenn ... dann ...". Dann wären die Tabellen der Wahrheitswerte natürlich auch andere. Zum Beispiel entspricht der Frage "Stimmt es, dass dieser Weg zum See führt oder dass Kupfer ein Metall ist?" folgende Tabelle der Wahrheitswerte:

		p	q	$p \vee q$
1. Möglichkeit:	W	$\boxed{1}$	1	1
	L	0	0	0
2. Möglichkeit:	W	0	1	1
	L	1	0	1

In diesem Fall handelt es sich um den falschen Weg, wenn beide Jungen mit "ja"antworten.
Allerdings darf er nicht eine Frage stellen, die etwa der folgenden ähnlich ist: "Stimmt es, dass dieser Weg zum See führt und du die Wahrheit sagst?". In diesem Falle erlaubt die Tabelle nicht, zu entscheiden, welche der beiden Möglichkeiten gilt; denn bei beiden Möglichkeiten antwortet ein Junge mit "ja", der andere mit "nein".

		p	q	$p \wedge q$
1. Möglichkeit:	W	$\boxed{1}$	1	1
	L	0	1	0
2. Möglichkeit:	W	0	1	0
	L	1	1	1

4.8 Der Wanderer. Zweite Variante

Der Wanderer stellte nur einem der Jungen zwei Fragen, die er einzeln mit "ja" oder "nein" beantworten muss.
Wie müssen die Fragen gestellt werden, wenn er durch die Antworten erfahren will, welcher Weg zum See führt?
Der Leser finde selbst die Lösung.

4.9 Der Wanderer. Dritte Variante

Der Wanderer richtet nur eine Frage an einen der beiden Jungen. Was war das für eine Frage, wenn er durch die Antwort erfuhr, welcher Weg zum See führt?

Lösung:
Der Wanderer muss fragen: "Würde der andere Junge sagen, dass dieser Weg zum See führt?"
Wir wollen eine Tabelle der möglichen Antworten zusammenstellen.

	Antwort	Was wäre der zweite Junge?	Führt der Weg zum See?
W	Ja	L	Nein
	Nein	L	Ja
L	Ja	W	Nein
	Nein	W	Ja

Wie man sieht, führt bei der Antwort "Ja" der Weg nicht zum See, während bei der Antwort "Nein" der Weg zum See führt, wobei das nicht davon abhängt, an welchen der beiden Jungen der Wanderer seine Frage stellte (die Wahrheitswerte in der letzten Spalte hängen nur von den Wahrheitswerten in der ersten Spalte ab).

4.10 Der Tyrann

Ein tyrannischer Beherrscher einer Insel wollte verhindern, dass sich auf der Insel Fremde ansiedeln. Deswegen ordnete er an, alle Einwanderer durch Erschießen oder Erhängen hinzurichten. Um dem Delinquenten scheinbar eine Gnade zu erweisen, ließ er ihn die vorher beschlossene Art der Hinrichtung raten, so dass der Fremde glauben konnte, mit dem Leben davonzukommen, falls er richtig raten würde.

Tatsächlich gab er jedoch die Anordnung, den Fremden zu erschießen, falls er richtig raten würde, und ihn im anderen Falle zu erhängen. Der Tyrann darf weder von dieser Anordnung abgeben noch das einmal verhängte Urteil ändern.

Hat der Einwanderer unter diesen Bedingungen eine Möglichkeit, mit dem Leben davonzukommen?

Lösung:
Die Aussagen des Fremden bzw. die Urteile des Tyrannen kürzen wir folgendermaßen ab:
A: Ich werde aufgehängt (bzw. er wird aufgehängt)
E: Ich werde erschossen (bzw. er wird erschossen)

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich folgende Tabelle:

	Urteil des Tyrannen	Aussage des Fremden	Wahrheitswert der Aussage des Fremden	Nach dem Wahrheitswert festgesetzte Todesart
1	A	A	1	E
2	A	E	0	A
3	E	A	0	A
4	E	E	1	E

Im ersten und dritten Fall gerät der Tyrann in eine ausweglose Situation; denn die nach dem Wahrheitswert festgesetzte Todesart widerspricht jedesmal dem Urteil.
Wenn der Fremde also sagt: "Ich werde aufgehängt", kann keins der Urteile vollstreckt werden.

5 Aufgaben, die mit Hilfsmitteln aus der Mengenalgebra gelöst werden können

5.1 Das Attentat

Fünf Männer standen im Verdacht, ein Sprengstoffattentat auf eine Eisenbahnbrücke vorbereitet zu haben. Die Zeitzündermaschine, die einer von ihnen an den Gleisen angebracht hatte,

wurde noch rechtzeitig entdeckt, und alle fünf Männer wurden verhaftet.
Die Polizei ermittelte zunächst, welche der fünf Männer unmittelbar an der Aufstellung der Zeitzündermaschine auf den Gleisen beteiligt waren. Die Untersuchungen ergaben folgendes:

A wurde entweder nur mit B oder nur mit C zusammen und nie allein gesehen. D wurde einige Male zusammen mit B und C gesehen. In den Fällen, in denen B und C nicht mit D zusammentrafen, befand sich E mit D an den Gleisen.
Sachverständige untersuchten den Zeitmechanismus der Bombe und stellten fest, dass A dabei gewesen sein musste, als sie an den Gleisen angebracht wurde. Das konnte von der Polizei durch Vergleich der Uhrzeiten nachgewiesen werden, zu denen die Zusammenkünfte stattgefunden hatten.

Wer von diesen Fünf kann beweisen, dass er beim Anbringen der Bombe nicht dabei war?

Lösung:
Jede der Personen A, B, C, D und E befand sich während eines gewissen, evtl. auch leeren, Zeitintervalls an den Gleisen. Dieses Intervall bezeichnen wir jeweils - mit demselben Buchstaben. Die in der Aufgabe gegebenen Bedingungen kann man dann so schreiben:
Da A nur mit B oder C gesehen wurde, zerlegen wir die Menge A nach B und C:

$$A = ABC \cup ABc \cup AbC \cup Abc$$

Es gilt $Abc = \varnothing$, da A nie allein gesehen wurde, und $ABC = \varnothing$, da A entweder nur mit B oder nur mit C gesehen wurde. Es ergibt sich also

$$1. \qquad A = ABc \cup AbC$$

Entsprechend erhält man

$$2. \qquad D = DeBC \cup DEbc$$

Wenn man die rechte Seite von 1. nach D und E zerlegt, erhält man:

$$A = ABcDE \cup ABcDe \cup ABcdE \cup ABcde \cup AbCDE \cup AbCDe \cup AbCdE \cup AbCde$$

Wenn man hier D aus 2. einsetzt, verschwinden die erste, zweite, fünfte und sechste Komponente, und übrig bleibt:

$$A = ABcdE \cup ABcde \cup AbCdE \cup AbCde$$

Antwort: Nur D konnte beweisen, dass er beim Anbringen der Bombe an den Gleisen nicht dabei war.

5.2 Zwei Mitteilungen

In einem von mehreren Dörfern besiedelten Gebiet soll ein Staudamm gebaut werden. Ein großer Teil der Gebäude dieser Dörfer liegt auf dem Gebiet des künftigen Stausees. Diese Häuser müssen daher von den Bewohnern verlassen und von der Stromzuleitung getrennt werden.
Außerdem müssen weitere Gebäude von der alten Lichtleitung abgetrennt werden, da der Bau des Staudamms eine teilweise Neuverlegung der betreffenden Leitung erforderlich macht.

Um die Bewohner von den geplanten Maßnahmen in Kenntnis zu setzen, wurde folgende Mitteilung veröffentlicht:

"Häuser, die von den Bewohnern verlassen werden müssen, liegen auf dem Gebiet des Stausees."

Viele Bewohner empfanden die Mitteilung als unzureichend. Daher wurde eine zweite mit folgendem Wortlaut herausgegeben:

"Häuser, die nicht von den Bewohnern verlassen werden müssen, liegen nicht auf dem Gebiet des Stausees. Häuser, die an die alte Lichtleitung angeschlossen bleiben, brauchen von den Bewohnern nicht verlassen zu werden."

Ist die zweite Mitteilung eine Erläuterung der ersten, d.h., sagen beide Mitteilungen dasselbe aus?

Lösung:
Innerhalb der Menge H aller Häuser des betreffenden Gebietes bezeichnen wir mit
$A =$ die Menge aller Häuser auf dem Gebiet des Stausees;
$B =$ die Menge der zu räumenden Häuser;
$C =$ die Menge der Häuser, die von der Stromzuleitung abgetrennt werden müssen.

Dann gilt für $H = A \cup a$ als Allmenge:

$$H = ABC \cup ABc \cup AbC \cup Abc \cup aBC \cup aBc \cup abC \cup abc$$

Aus der zweiten Mitteilung folgt:

$$b = ba \qquad \text{und} \qquad c = cb$$

Setzen wir dies für b bzw. c in die Zerlegung von H ein, so ergibt sich, dass die zweite, dritte, vierte und sechste Komponente leer ist.
Das bedeutet z.B. (siehe zweite Komponente), dass es der ersten Mitteilung zufolge kein Haus gibt, das auf dem Gebiet des Stausees steht, das geräumt wird und das an die Lichtleitung angeschlossen bleibt.

Die erste Mitteilung besagte $B = BA$. Auf Grund dieser Beziehung ergibt sich, dass nur die fünfte und sechste Komponente leer ist. Da dann die zweite Komponente nicht leer ist, gibt es nach dieser Mitteilung z.B. im Unterschied zur zweiten Mitteilung solche Häuser, die auf dem Gebiet des Staudamms stehen, geräumt werden und an die Lichtleitung angeschlossen bleiben.
Die beiden Mitteilungen sagen also nicht dasselbe aus.

5.3 Die Photographie des alten Schlosses

Die Ruinen eines alten Schlosses sind schwer zu photographieren. Gleich in der Nähe befindet sich eine Gruppe mächtiger Bäume und ein modernes Hotel.
Man hatte uns schon im voraus darauf aufmerksam gemacht, dass wir die Ruinen nicht von den Stellen aus sehen können, von denen man die Bäume und das Hotel sehen kann, aber auch nicht von den Stellen, von denen aus die Bäume und das nicht weit vom Schloss gelegene eingefallene Tor der Befestigung zu sehen sind.
Außerdem überzeugten wir uns selbst davon, dass von den Stellen aus, von denen weder das Hotel noch die Bäume zu sehen waren, auch das alte Tor nicht sichtbar war, und das Schloss selbst durch einen nahe gelegenen Hügel verdeckt war.

Nehmen wir einmal an, dass es nicht möglich war, eine weitere Information zu erhalten.

Wieviel verschiedenartige Photos von dem Schloss gibt es? Kann man Photos erhalten, auf denen das Schloss und das alte Tor zusammen zu sehen sind?

Lösung:
Wir führen folgende Bezeichnungen für die Mengen von Stellen ein, von denen aus sichtbar sind:
Ruinen des Schlosses $= R$
Bäume $= B$
Hotel $= H$
Tor $= T$
Hügel, Anhöhe $= A$

Die Bedingungen der Aufgabe sind:

1. $BH = BHr$ (wenn die Bäume und das Hotel zu sehen sind, sind die Ruinen des Schlosses nicht sichtbar);
2. $BT = BTr$ (wenn die Bäume und das Tor zu sehen sind, sind die Ruinen des Schlosses nicht sichtbar);
3. $hb = hbtrA$ (wenn Hotel und Bäume nicht zu sehen sind, dann kann man auch das Tor nicht sehen, sondern nur den Hügel, ebenso nicht die Ruinen, die vom Hügel verdeckt sind).

Da in der Aufgabe nach solchen Photos gefragt wird, auf denen die Ruinen des Schlosses zu sehen sind, genügt es, die Zerlegung der Menge B anzugeben und zu untersuchen, welche Komponenten bei den angeführten drei Bedingungen erhalten bleiben.
Es gilt:

$$\begin{aligned} R = &RBHTA \cup RBTHa \cup RBHtA \cup RBHta \cup RBhTA \cup RBhTa \cup RBhtA \\ &\cup RBhta \cup RbHTA \cup RbHTa \cup RbHtA \cup RbHta \cup RbhTA \cup RbhTa \\ &\cup RbhtA \cup Rbhta \end{aligned}$$

Wenn man die rechten Seiten der Gleichungen 1., 2. und 3. einsetzt, so ergibt sich, dass die erste bis einschließlich sechste und die 13. bis 16. Komponente leer ist. Es bleiben folgende Komponenten übrig:

$$RBhtA, RBhta, RbHTA, RbhTa, RbHtA, RbHta$$

Folglich gibt es sechs verschiedene Ansichten, auf denen die Ruinen des alten Schlosses zu sehen sind. Unter ihnen gibt es zwei, auf denen das Schloss und das verfallene Tor zu sehen sind, aber auch das den Gesamteindruck störende Hotel.

5.4 Die Hunde des Försters

Ein Förster dressiert sechs Jagdhunde verschiedener Rasse. Eines Tages hatte er eine Stunde Zeit für die Dressur. Zuerst dressiert er alle, das heißt Arko, Pluto, Cäsar, Hasso, Rex und Treff. Dann ließ er Rex und Treff frei und beschäftigte sich nur mit den übrigen.

Da aber Arko, Pluto und Cäsar keine großen Fortschritte machten, nahm er bald darauf noch Treff zu ihnen hinzu und übte mit diesen vier Hunden.
Danach beschäftigte er sich eine Zeitlang nur mit seinem Lieblingshund Treff, während die anderen Hunde im Garten des Försters herumjagten.

Nach der Beschäftigung mit Treff begann er eine spezielle Dressur mit Arko, Pluto und Hasso.

Diese besondere Dressur wollte er auch noch mit Rex erproben. Damit Rex ihnen nacheifern konnte, nahm er Pluto und Hasso mit hinzu.
Aber Rex beherrschte die Übung schnell und durfte sich schon früher entfernen, während Pluto und Hasso noch weiter übten.

Während der Dressur dieser noch jungen Hunde verschwand aus dem Keller das Fleisch für das Abendessen. Es war klar, dass nur die Hunde das Fleisch entwendet haben konnten.
Die Frau des Försters hatte bei der Dressur mit Interesse zugesehen und versicherte, dass das Fleisch nur in der Zeit entwendet werden konnte, in der Treff bei den Hunden war, die dressiert wurden.

Nur in dieser Zeit war ihre Aufmerksamkeit von den anderen Hunden abgelenkt, da sie ihn besonders interessiert beobachtet hatte. Rex hatte sie gesehen, als er weit vom Haus entfernt einer Katze nachjagte.
Das Seltsame an der ganzen Geschichte war, dass die Hunde fast ständig unter Aufsicht waren und ein Hund doch eine gewisse Zeit braucht, um das Fleisch aufzufressen. Weiterhin war klar, dass es nicht mehrere Hunde zugleich getan haben konnten, weil sie dann eine Rauferei angefangen und damit die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätten.

Der Förster beschloss, unbedingt herauszufinden, welcher von den Hunden das Fleisch gefressen hatte, um bei ihrer Dressur nichts durchgehen zu lassen. Nach dem Abendessen dachte er darüber nach.
Am nächsten Morgen sagte er, dass er nur Hasso auf seinem Rundgang mitnehmen werde, um ihm einen gehörigen Denkzettel zu erteilen, und versprach seiner verwunderten Frau, dass er ihr nach seiner Rückkehr erklären werde, wie er die Wahrheit herausgefunden habe.

Lösung:
Wir bezeichnen die Zeit der Dressur jedes Hundes mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens, also mit A, P, C, H, R und T.
Dann kann man die aufeinanderfolgenden Zeitabschnitte der Anwesenheit und Abwesenheit der Hunde so schreiben:

$$APCHRT, APCHrt, APChrT, apchrT, APcHrt, aPcHRt, aPcHrt$$

Für das Verschwinden des Fleisches kommen nur die Zeitabschnitte in Frage, in denen Treff bei den übenden Hunden war, d.h. die folgenden:

$$APCHRT, APChrT, apchrT$$

Offensichtlich gilt also:

$$T = APCHRT \cup APChrT \cup apchrT$$

Das Fleisch konnte also nur in dem folgenden Zeitabschnitt gestohlen werden:

$$Tr = APChrT \cup apchrT$$

Wie man sieht, war Hasso außer Rex der einzige Hund, der während der Dressur von Treff etwas länger (zwei Dressurabschnitte) abwesend war und damit der Schuldige sein konnte.
Da die Frau des Försters aber Rex bei seiner Abwesenheit gesehen hatte, wie er gerade hinter einer Katze herjagte, konnte Rex nicht der Schuldige sein.

5.5 Die gewissenhaften Arbeiter

Zwei Freunde trafen sich. Der erste sagte zum zweiten:
"Auf Grund meiner langjährigen Erfahrung weiß ich, dass alle, die in diesem Werk tätig sind, gewissenhaft arbeiten".
Der andere entgegnete darauf:
"Das ist dasselbe, als wenn du gesagt hättest, dass alle, die nicht gewissenhaft arbeiten, in anderen Werken beschäftigt sind."
Der erste versichert, dass das nicht dasselbe sei und er etwas anderes gesagt habe als sein Freund. Entscheiden Sie, wer recht hatte!

Lösung:
Wir bezeichnen die Mengen der
Werksangehörigen mit W
verantwortungsbewussten Menschen mit V

Die Aussagen bedeuten dann

1. $W = WV$, 2. $v = vw$.
Die Menge M aller Menschen lässt sich folgendermaßen erlegen:

$$M = WV \cup Wv \cup wV \cup wv$$

Durch Einsetzen aus den Gleichungen 1. und 2. ergibt sich jedesmal, dass die zweite Komponente leer ist. Folglich sind beide Aussagen gleichwertig.

Wenn man die beiden Aussagen wie folgt als Implikationen formuliert, erkennt man sofort, dass die eine die Kontraposition der anderen ist.
Wenn ein Mensch dem Werk angehört, so arbeitet er gewissenhaft. Wenn ein Mensch nicht gewissenhaft arbeitet, so gehört er nicht dem Werk an. Eine Implikation und ihre Kontraposition sind aber gleichwertig.

5.6 Am Fernsehgerät

Eine Familie besteht aus dem Vater Alfred, der Mutter Vera und drei Kindern: Günther, Dagmar und Jürgen. Beim Fernsehen treten folgende Situationen auf:

1. Wenn Alfred fernsieht, dann auch seine Frau.
2. Entweder Dagmar oder Jürgen oder beide zusammen sehen fern.
3. Entweder sieht Vera oder Günther, aber niemals sehen sie beide zusammen.
4. Dagmar und Günther sehen entweder zusammen fern oder überhaupt nicht.
5. Wenn Jürgen sieht, dann sehen sowohl Alfred wie Dagmar.

Wer sieht sich unter diesen Bedingungen denn nun eine Fernsehsendung an?

Lösung:
Die Zeitabschnitte, in denen die im Text genannten Personen fernsehen, bezeichnen wir mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vornamen: A, V, G, D, J. Die Bedingungen der Aufgabe sind folgende:

1. $A = AV$, 2. $dj = \varnothing$, 3. $VG \cup vg = \varnothing$, 4. $Gd \cup gD = \varnothing$, 5. $J = JAD$.

Die Schreibweise der Bedingungen 2., 3. und 4. mag dem Leser ungewöhnlich vorkommen.

Aber 2. z.B. besagt, dass es keinen Zeitabschnitt gibt, in dem weder Dagmar noch Jürgen fernsehen, d.h. der Durchschnitt der betreffenden Zeitabschnitte ist leer.
Bedingung 4. scheidet den Fall aus, dass entweder Günther oder Dagmar jeweils allein fernsehen.
Die Sendezeit T als Allmenge lässt sich also folgendermaßen in Komponenten zerlegen:

$$\begin{aligned} T = {} & \overset{3}{AVGDJ} \cup \overset{3}{AVGDj} \cup \overset{3,4,5}{AVGdJ} \cup \overset{2,3,4}{AVGdj} \cup \overset{4}{AVgDJ} \cup \overset{4}{AVgDj} \cup \overset{5}{AVgdJ} \\ & \cup \overset{2}{AVgdj} \cup \overset{1}{AvGDJ} \cup \overset{1}{AvGDj} \cup \overset{1,4,5}{AvGdJ} \cup \overset{1,2,4}{AvGdj} \cup \overset{1,4}{AvgDJ} \cup \overset{1,4}{AvgDj} \cup \overset{1,5}{AvgdJ} \\ & \cup \overset{1,2}{Avgdj} \cup \overset{3,5}{aVGDJ} \cup \overset{3}{aVGDj} \cup \overset{4,5}{aVGdJ} \cup \overset{2,4}{aVGdj} \cup \overset{4,5}{aVgDJ} \cup \overset{4}{aVgDj} \cup \overset{5}{aVgdJ} \\ & \cup \overset{2}{aVgdj} \cup \overset{5}{avGDJ} \cup avGDj \cup \overset{4,5}{avGdJ} \cup \overset{2,4}{avGdj} \cup \overset{4,5}{avgDJ} \cup \overset{4}{avgDj} \cup \overset{5}{avgdJ} \cup \overset{2}{avgdj} \cup \end{aligned}$$

Über jeder Komponente sind die Nummern der Gleichungen angegeben, die sie als leere Mengen kennzeichnen. Die einzige Komponente, die auf Grund der Bedingungen 1. bis 5. nicht leer ist, ist folglich $avGDj$.
Die Lösung ist also, dass Günther und Dagmar immer fernsehen und die anderen nicht.

5.7 Die Säuglinge (Scherzaufgabe)

Folgende Behauptungen sind gegeben:
1. Säuglinge sind unlogisch.
2. Wir verachten niemanden, der mit einem Krokodil fertig werden kann.
3. Wir verachten die, die unlogisch sind.

Weisen Sie nach, dass aus diesen Behauptungen die Aussage folgt: "Säuglinge können nicht mit einem Krokodil fertig werden."

Lösung:
Bezeichnungen :
S = Menge der Säuglinge;
L = Menge der logisch denkenden Menschen;
V = Menge der Menschen, die von uns verachtet werden;
K = Menge der Menschen, die mit einem Krokodil fertig werden können.

Die Bedingungen der Aufgabe: 1. $S = Sl$, 2. $K = Kv$, 3. $l = lV$.
Setzt man aus 3. in 1. ein, erhält man 4. $S = SlV$.
Aus 2. folgt 2'. $V = Vk$.
(Beweis: $V = VK \cup Vk$; wenn wir jedoch hier aus 2. einsetzen, erhalten wir: $V = VKv \cup Vk = \varnothing \cup Vk = Vk$.)
Aus 2'. setzen wir in 4. ein; das ergibt 5. $S = SlVk$.
Für lV setzen wir nach 3. l ein und erhalten 6. $S = Slk$.
Schließlich setzen wir für Sl nach 1. S ein und erhalten 7. $S = Sk$, was zu beweisen war.

5.8 Die Fische (Scherzaufgabe)

1. Kein einziger Haifisch zweifelt daran, dass er gut bewaffnet ist.
2. Ein Fisch, der nicht Walzer tanzen kann, verdient Mitleid.
3. Kein einziger Fisch fühlt sich sicher bewaffnet, wenn er nicht zumindest drei Reihen von Zähnen hat.

4. Alle Fische mit Ausnahme der Haifische sind freundlich zu Kindern.
5. Schwere Fische können nicht Walzer tanzen.
6. Fische mit mindestens drei Reihen von Zähnen verdienen kein Mitleid.

Beurteilen Sie die Richtigkeit der Aussage: "Alle schweren Fische sind freundlich zu Kindern"!

Lösung:
Bezeichnungen:
H = Menge der Haifische;
B = Menge der Fische, die nicht daran zweifeln, dass sie gut bewaffnet sind;
F = Menge aller Fische;
W = Menge der Fische, die Walzer tanzen können;
M = Menge der Fische, die Mitleid verdienen;
Z = Menge der Fische, die mindestens drei Reihen von Zähnen haben;
K = Menge der Fische, die freundlich zu Kindern sind;
S = Menge der Fische, die schwer sind.

Die Bedingungen der Aufgabe:

1. $H = HB$,
2. $Fw = FwM$,
3. $Fz = Fzb$,
4. $Fh = FhK$,
5. $FS = FSw$,
6. $FZ = FZm$

Wie im vorigen Beispiel könnten wir auch hier die Behauptung $FS = FSK$ durch fortwährendes Einsetzen aus den Bedingungen 1. bis 6. beweisen. Wir schlagen dem Leser vor, das einmal zu versuchen.
Hier wollen wir jedoch die Menge FS, von der in der Behauptung die Rede ist, nach H, B, W, M, Z und K zerlegen. Wir erhalten dabei 64 Komponenten von FS:

$$\begin{aligned}
FS = {} & FSH\overset{5,6}{BW}MZK \cup FSH\overset{5,6}{BW}MZk \cup FSH\overset{3,5}{BW}MzK \cup FSH\overset{3,5}{BW}Mzk \cup FSH\overset{5}{BW}mZK \\
& \cup FSH\overset{5}{BW}mZk \cup FSH\overset{3,5}{BW}mzK \cup FSH\overset{3,5}{BW}mzk \cup FSH\overset{6}{Bw}MZK \cup FSH\overset{6}{Bw}MZk \\
& \cup FSH\overset{3}{Bw}MzK \cup FSH\overset{3}{Bw}Mzk \cup FSH\overset{2}{Bw}mZK \cup FSH\overset{2}{Bw}mZk \cup FSH\overset{2,3}{Bw}mzK \\
& \cup FSH\overset{2,3}{Bw}mzk \cup FSH\overset{1,5,6}{bW}MZK \cup FSH\overset{1,5,6}{bW}MZk \cup FSH\overset{1,5}{bW}MzK \cup FSH\overset{1,5}{bW}Mzk \\
& \cup FSH\overset{1,5}{bW}mZK \cup FSH\overset{1,5}{bW}mZk \cup FSH\overset{1,5}{bW}mzK \cup FSH\overset{1,5}{bW}mzk \cup FSH\overset{1,6}{bw}MZK \\
& \cup FSH\overset{1,6}{bw}MZk \cup FSH\overset{1}{bw}MzK \cup FSH\overset{1}{bw}Mzk \cup FSH\overset{1,2}{bw}mZK \cup FSH\overset{1,2}{bw}mZk \\
& \cup FSH\overset{1,2}{bw}mzK \cup FSH\overset{1,2}{bw}mzk \cup FSh\overset{5,6}{BW}MZK \cup FSh\overset{4,5,6}{BW}MZk \cup FSh\overset{3,5}{BW}MzK \\
& \cup FSh\overset{3,4,5}{BW}Mzk \cup FSh\overset{5}{BW}mZK \cup FSh\overset{4,5}{BW}mZk \cup FSh\overset{3,5}{BW}mzK \cup FSh\overset{3,4,5}{BW}mzk \\
& \cup FSh\overset{6}{Bw}MZK \cup FSh\overset{4,6}{Bw}MZk \cup FSh\overset{3}{Bw}MzK \cup FSh\overset{3,4}{Bw}Mzk \cup FSh\overset{2}{Bw}mZK \\
& \cup FSh\overset{2,4}{Bw}mZk \cup FSh\overset{3}{Bw}mzK \cup FSh\overset{3,4}{Bw}mzk \cup FSh\overset{5,6}{bW}MZK \cup FSh\overset{4,5,6}{bW}MZk \\
& \cup FSh\overset{5}{bW}MzK \cup FSh\overset{4,5}{bW}Mzk \cup FSh\overset{5}{bW}mZK \cup FSh\overset{4,5}{bW}MZk \cup FSh\overset{5}{bW}MzK \\
& \cup FSh\overset{4,5}{bW}Mzk \cup FSh\overset{6}{bw}MZK \cup FSh\overset{4,6}{bw}MZk \cup FShbwMzK \cup FSh\overset{4}{bw}Mzk \\
& \cup FSh\overset{2}{bw}mZK \cup FSh\overset{2,4}{bw}mZk \cup FSh\overset{2}{bw}mzK \cup FSh\overset{2,4}{bw}mzk
\end{aligned}$$

Über jeder Komponente sind die Nummern der Gleichungen 1. bis 6. angegeben, durch die sie jeweils ausgeschlossen wird.
Die einzige Komponente, die nicht durch eine dieser Gleichungen ausgeschlossen wird, ist $FShbwMzK$, also gilt:

$$FS = FShbwMzK$$

Diese Gleichung bedeutet aber, dass schwere Fische freundlich zu Kindern sind. Außerdem zeigt die Gleichung, dass solche Fische folgende Eigenschaften besitzen:
Es sind keine Haifische, sie zweifeln daran, dass sie gut bewaffnet sind, sie können nicht Walzer tanzen, verdienen unser Mitleid und haben weniger als drei Reihen von Zähnen.
Da es aber keine schweren Fische gibt, die diese Eigenschaften nicht besitzen, stimmt unser Schluss mit dem überein, der in der Aufgabe behauptet wurde.

5.9 Die bunten Fähnchen

Zwei Freunde gingen auf einem kreisförmigen Parkweg spazieren. Im Innern dieses Kreises standen vier Stangen von gleicher Höhe mit gleich großen, aber verschiedenfarbigen Fähnchen. Der Radius des Kreises war so groß, dass die Freunde nicht sehen konnten, was für eine geometrische Figur die Fähnchen bildeten. Nachdem die Freunde den Kreis einmal durchlaufen hatten, stellten sie folgendes fest:
"Wenn das rote Fähnchen zu sehen ist, sieht man gleichzeitig auch das gelbe und das grüne, oder aber das grüne ist nicht sichtbar, dafür aber das blaue.
Wenn das rote Fähnchen nicht zu sehen ist, dann ist auch das gelbe nicht sichtbar, dafür sieht man dann aber gleichzeitig das grüne und das blaue".

Dabei werden die Fähnchen nur dadurch unsichtbar, dass sie sich gegenseitig verdecken. In welcher Anordnung waren die Fähnchen in den Boden gesteckt?

Lösung:
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
$A =$ Menge der Kreispunkte, von denen aus das rote Fähnchen zu sehen ist;
$B =$ Menge der Kreispunkte, von denen aus das gelbe Fähnchen zu sehen ist;
$C =$ Menge der Kreispunkte, von denen aus das grüne Fähnchen zu sehen ist;
$D =$ Menge der Kreispunkte, von denen aus das blaue Fähnchen zu sehen ist.

Da hier keine Verwechslungen auftreten können, bezeichnen wir mit den gleichen Buchstaben auch die Fähnchen selbst. Die Bedingungen der Aufgabe sind:

$$1. \quad A = ABC \cup AcD, \qquad 2. \quad a = abCD$$

Die Menge K aller Kreispunkte zerlegen wir in folgende Komponenten:

$$K = ABCD \cup ABCd \cup ABcD \cup ABcd \cup AbCD \cup AbCd \cup AbcD \cup Abcd$$
$$\cup\, aBCD \cup aBCd \cup aBcD \cup aBcd \cup abCD \cup abCd \cup abcD \cup abcd$$

Gleichung 1. schließt die vierte, fünfte, sechste und achte Kombination aus, Gleichung 2. die neunte, zehnte, elfte, zwölfte, vierzehnte, fünfzehnte und sechzehnte. Folglich bleiben nur übrig:

$$a)ABCD, \quad b)ABCd, \quad c)ABcD, \quad d)AbcD, \quad e)abCD$$

Die Fähnchen können ein Viereck oder ein Dreieck bilden, oder sie können auf einer Geraden (Sehne des Kreises) liegen. Der letzte Fall scheidet aber aus, da es sonst zwei Punkte P_1 und P_2 des Weges geben würde, von denen aus man nur ein Fähnchen sehen könnte (Bild 11).

Unter den übriggebliebenen 5 Komponenten tritt dieser Fall aber nicht mehr auf. Die Fähnchen können aber auch kein Viereck bilden; denn dann müsste es vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 des Weges geben, von denen aus genau ein Fähnchen nicht sichtbar wäre (Bild 12).

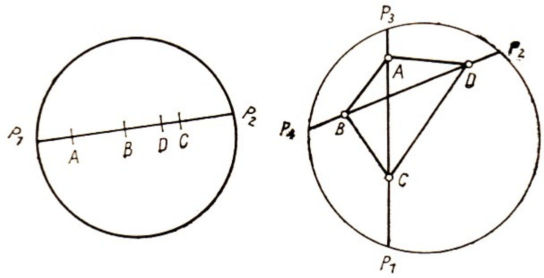


Bild 11 und 12

Notwendigerweise müssen die Fähnchen also ein Dreieck bilden, d.h.; drei von ihnen müssen auf einer Geraden liegen.
Zusätzlich können wir den restlichen Komponenten a) bis e) noch entnehmen, in welcher Anordnung die Fähnchen in den Boden gesteckt worden sind.
Aus der Komponente (1) folgt, dass es einen Punkt des Weges gibt, von dem aus die Fähnchen B und C von A verdeckt werden, d.h.; dass A, B und C in einer Geraden liegen.

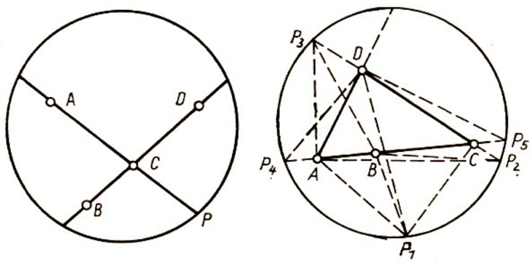


Bild 13 und 14

Gäbe es nämlich eine Blickrichtung, in der B und C vom Fähnchen C verdeckt wären, so gäbe es einen Punkt P des Weges, von dem aus die Fähnchen B, C und D aber nicht A zu sehen wären (Bild 13).

Die Komponente $aBCD$ ist aber durch die Bedingung 2. ausgeschlossen worden.
Schließlich können wir aus den Komponenten (1) und e) noch entnehmen, dass B zwischen A und C steckt; denn es gibt einen Punkt, von dem aus man zwar A sieht, aber B und C nicht, und einen Punkt, von dem aus C, man aber nicht A und B sieht. Die Fähnchen sind also etwa wie im Bild 14 angeordnet.

5.10 Hebel und Knopf

An einer Gruppe gleichartiger Maschinen, von denen jede einen Steuerungshebel und einen Sicherungsknopf hat, sind zwei verschiedene Störungen zu beobachten: die Maschinen können vibrieren, und sie können Kurzschluss haben.

Das Verhalten der Maschinen nach einem bestimmten Zeitpunkt hängt von ihrem Zustand vor diesem Zeitpunkt ab, und zwar folgendermaßen:

Wenn vor diesem Zeitpunkt der Hebel einer dieser Maschinen nicht eingeschaltet war und die Maschine keinen Kurzschluss hatte, dann wird sie nach diesem Zeitpunkt vibrieren, falls sie auch vor ihm vibriert hat, und sie wird nach diesem Zeitpunkt nicht vibrieren, falls sie nicht vor ihm vibriert hat.

Wenn aber der Hebel vorher eingeschaltet war, so wird die Maschine zu vibrieren aufhören, falls sie vorher vibrierte, und sie wird zu vibrieren beginnen, falls sie vorher nicht vibrierte.

Wenn vor einem bestimmten Zeitpunkt der Sicherungsknopf gedrückt war, so wird die Maschine Kurzschluss haben oder nicht, je nachdem, ob sie vorher vibrierte oder nicht.
Wenn vorher der Sicherungsknopf nicht gedrückt war, so wird die Maschine Kurzschluss haben, falls sie vorher nicht vibrierte, und sie wird keinen Kurzschluss haben, falls sie vorher vibrierte.

Wie muss man Knopf und Hebel einer Maschine, die vibriert und Kurzschluss hat, stellen, damit beide Störungen beseitigt werden?

Lösung:
Bezeichnungen:
K_1 = Menge der Maschinen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt Kurzschluss haben;
K_2 = Menge der Maschinen, die nach diesem Zeitpunkt Kurzschluss haben;
V_1 = Menge der Maschinen, die zu diesem Zeitpunkt vibrieren;
V_2 = Menge der Maschinen, die nach diesem Zeitpunkt vibrieren;
H = Menge der Maschinen, deren Hebel eingeschaltet ist;
S = Menge der Maschinen, deren Sicherungsknopf gedrückt ist.

Die entsprechenden Kleinbuchstaben k_1, k_2, v_1, v_2, h und s bedeuten die Mengen der Maschinen, die sich nicht in den zu den jeweiligen Großbuchstaben gehörenden Zuständen befinden.
Bedingungen der Aufgabe:

1. $k_1 h = V_1 V_2 \cup v_1 v_2$
2. $HV_1 = v_2$
3. $Hv_l = V_2$
4. $S = K_2 V_1 \cup k_2 v_1$
5. $s = K_2 v_1 \cup k_2 V_1$

Menge der Maschinen mit dem geforderten Zustand: $V_1 K_1 v_2 k_2$.

Diese Menge zerlegen wir nach S und H:

$$V_1 K_1 v_2 k_2 = V_1 K_1 v_2 k_2 HS \cup V_1 K_1 v_2 k_2 Hs \cup V_1 K_1 v_2 k_2 hS \cup V_1 K_1 v_2 k_2 hs$$

Die Bedingungen 1. und 3. kann man zum Einsetzen nicht verwenden, da weder die linken noch die rechten Seiten dieser Gleichungen in unseren Komponenten enthalten sind.
Durch Einsetzen von 2. fallen die dritte und vierte Komponente weg, durch Einsetzen von 4. fällt die erste weg, beim Einsetzen von 5. erhalten wir aus der einzigen nicht leeren Komponente:

$$\begin{aligned} V_1 K_l v_2 k_2 &= V_1 K_2 v_2 k_2 H(K_2 v_1 \cup k_2 V_1) \\ &= V_1 K_2 v_2 k_2 H K_2 v_1 \cup V_1 K_2 v_2 k_2 H k_2 V_1 && \text{(nach 13)} \\ &= V_1 K_2 v_2 k_2 H \end{aligned}$$

Der Hebel muss also zur Beseitigung der genannten Störungen unbedingt eingeschaltet werden. Dagegen ist es gleichgültig, ob der Sicherungsknopf gedrückt wird oder nicht.

5.11 Die Signalanlage

Eine Signalanlage hat drei Lämpchen: ein rotes, ein grünes und ein gelbes. Wir können beobachten, wie diese Lämpchen aufleuchten und verlöschen, aber über den Zusammenhang zwischen diesen Leuchtsignalen ist uns nichts bekannt. Eine Beobachtung der Signalanlage während eines bestimmten Zeitraumes ergab lediglich folgende Kombinationen:

1. Das rote, grüne und gelbe Lämpchen brennen gleichzeitig.
2. Das rote und das gelbe Lämpchen brennen.
3. Das grüne und das gelbe Lämpchen brennen.
4. Nur das grüne Lämpchen brennt.
5. Nur das gelbe Lämpchen brennt.

Kann man nach diesen Angaben eine Aussage über den inneren Aufbau der Signalanlage, über das Zusammenwirken der einzelnen Leuchtsignale machen? Wenn das möglich ist, was kann man dann über die Art der elektrischen Schaltung im Inneren der Signalanlage sagen?

Lösung:
Bezeichnungen:
$A =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn das rote Licht brennt;
$B =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn das grüne Licht brennt;
$C =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn das gelbe Licht brennt;
Aus den Beobachtungen 1. bis 5. folgt:

$$\begin{aligned}
A &= ABC \cup AbC && \text{d.h. (nach (13)): } A = AC(B \cup b) = AC\\
a &= aBC \cup aBc \cup abC, && \text{(nach (12) und (4))}\\
&= a(BC \cup Be \cup bC), && \text{(nach (13))}\\
&= a[B(C \cup c) \cup bC], && (13)\\
&= a(B \cup bC), && \text{((12) und (4))}\\
&= a[(B \cup b)(B \cup C)], && (14)\\
&= a(B \cup C). && \text{((12) und (4))}
\end{aligned}$$

Die elektrische Schaltung in der Signalanlage muss also folgende zwei Eigenschaften haben:
Der Kontakt, der das rote Licht einschaltet, schaltet gleichzeitig auch das gelbe Licht ein, wobei das grüne Licht brennen kann, aber nicht unbedingt brennen muss. Der Kontakt, der das rote Licht ausschaltet, schaltet gleichzeitig das gelbe oder das grüne Licht ein, falls diese noch nicht brennen.

Aus den gegebenen Kombinationen kann man die Gesetzmäßigkeiten der Anlage auch für die anderen Leuchtsignale ableiten.
So gilt zum Beispiel für B:

$$B = BAC \cup BaC \cup Bac, \quad ; \quad \text{also } B = BC \cup Bac = B(C \cup a),$$
$$b = bAC \cup baC \quad ; \quad b = bC.$$

Für C: $C = CAB \cup CAb \cup CaB \cup Cab \quad ; \quad c = caB.$

Die Deutung dieser Gleichungen erfolgt wie bei A. So zeigen zum Beispiel die letzten beiden Gleichungen, dass das gelbe Licht entweder mit den beiden anderen zusammen oder mit je einem anderen oder auch allein brennen kann. Wenn das gelbe Licht nicht brennt, muss das grüne brennen.

5.12 Signale und Weichen

Von der Hauptstrecke A, auf der Züge in beiden Richtungen verkehren, geht (wie auf Bild 15 gezeigt) eine Abzweigung B ab, auf der die Züge ebenfalls in beiden Richtungen verkehren.

Die normale Stellung der Weichen W_1 und W_2 ist so, dass der Verkehr auf der Strecke A möglich ist.

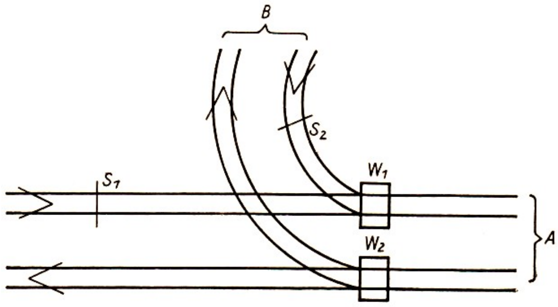


Bild 15

In dem Falle, wenn von W_2 aus ein Zug auf die Strecke B abzweigt, oder auch in dem Fall, wenn von Strecke B ein Zug an W_1 herankommt, wird die Weiche gestellt. Die Signale S_1 und S_2 haben nur zwei Stellungen: "Halt!" oder "Die Strecke ist frei!"
Welcher Art sind die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Stellung der Weichen und der Signale, damit die Verkehrssicherheit auf dem gegebenen Streckenabschnitt gewährleistet ist? Geben Sie diese Bedingungen an!

Lösung:
Erörterung der möglichen Situationen:
Signal S_1 darf nicht "Frei" zeigen, wenn die Weiche W_2 auf Einfahrt in Strecke B gestellt ist.
Es darf aber auch nicht "Frei" zeigen, wenn W_1 auf Einfahrt aus B gestellt ist.
Die Signale S_1 und S_2 dürfen nicht gleichzeitig "Frei" anzeigen, wie man von selbst sieht.
Signal S_2 darf nicht "Frei" zeigen, wenn Weiche W_1 so gestellt ist, dass die Züge auf Strecke A verkehren können.

Bezeichnungen :
$M =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn S_1 auf "Halt" steht.
$N =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn S_2 auf "Halt" steht.
$P =$ Menge der Zeitabschnitte, wenn W_1 auf "Geradeaus" steht.
$R =$ Klasse der Zeitabschnitte, wenn W_2 auf "Geradeaus" steht.

Die Bedingungen der Aufgabe werden durch folgende Gleichungen ausgedrückt:
(1) $mn = \varnothing$, (2) $nP = \varnothing$, (3) $mr = \varnothing$, (4) $mp = \varnothing$.
Für S_1 erhalten wir durch Zerlegung die Bedingung für die Stellungen "Frei" und "Halt":

$$m = nNPR \cup m\overset{3}{N}Pr \cup m\overset{4}{N}pR \cup m\overset{4}{N}pr \cup m\overset{1}{n}PR \cup m\overset{1}{n}Pr \cup m\overset{1}{n}pR \cup m\overset{1}{n}pr$$

Über den entsprechenden Komponenten sind die Gleichungen angegeben, die diese Komponenten jeweils ausschließen. Es gilt also folglich: $m = mNPR$.
Analog erhalten wir für M:

$$M = MNPR \cup MNPr \cup MNpR \cup MNpr \cup M\overset{2}{n}PR \cup M\overset{2}{n}Pr \cup MnpR \cup Mnpr$$

und nach Vereinfachung $M = MN \cup Mnp$.
Für S_2 erhalten wir analog

$$S_2 = n\overset{2}{M}PR \cup n\overset{2}{M}Pr \cup nMpR \cup nMpr \cup n\overset{1}{m}PR \cup n\overset{1}{m}Pr \cup n\overset{1}{m}pR \cup n\overset{1}{m}pr$$

und daraus

$$n = nMpR \cup nMpr = nMp$$

$$N = NMPR \cup NMpr \cup NMpR \cup NMpr \cup NmPR \cup N\overset{3}{m}Pr \cup Nm\overset{4}{p}R \cup N\overset{3}{m}pr$$

und folglich $N = NM \cup NmPR$.

5.13 Drei Maschinen. Erste Variante

Für ein aus den drei Maschinen A, B und C bestehendes Aggregat bestehen folgende Funktionsbedingungen:

1. Immer, wenn Maschine A in Betrieb ist, läuft auch Maschine B.
2. Immer, wenn Maschine B in Betrieb ist, läuft auch Maschine C.
a) Nach den Sicherheitsvorschriften ist es unbedingt notwendig, dass, wenn Maschine A ausfällt, auch Maschine C nicht läuft. Kann Maschine B allein laufen?

b) Unter den gleichen Bedingungen 1. und 2. wie unter a) soll Maschine C Ersatzmaschine für A sein. Sie muss also auch dann in Betrieb sein, wenn Maschine A nicht läuft.
Was kann man über Maschine C aussagen? Kann Maschine B auch allein in Betrieb sein?

Lösung:
a) 1. Die Menge der Zeitintervalle, in denen Maschine A läuft, bezeichnen wir mit A, und in gleicher Weise verfahren wir bei B und C. Die Bedingungen können dann in folgender geschrieben werden:
$A = AB$, (1) $\qquad B = BC$. (2)
Für a gilt:

$$a = aBC \cup aBc \cup abC \cup abc$$

Die zweite Komponente wird durch Bedingung (2) ausgeschlossen. Aus den Sicherheitsvorschriften folgt außerdem, dass $aC = \varnothing$, wodurch auch die erste und dritte Komponente wegfallen und $a = abc$ übrigbleibt.
Durch Einsetzen von (2) in (1) erhält man weiterhin $A = ABC$. Also laufen entweder alle drei Maschinen gleichzeitig, oder es läuft keine von ihnen, insbesondere kann also Maschine B nicht allein laufen.

2. Wir geben zu dieser Aufgabe noch eine Lösung mit Hilfe der Aussagenlogik an. Die Aussage "Maschine A ist (jetzt) in Betrieb" bezeichnen wir mit A, und Entsprechendes bedeuten B und C. Bedingung (1) kann man dann schreiben (1') $A \wedge \overline{B}$, Bedingung (2) als (2') $B \wedge \overleftarrow{C}$.
Wir stellen eine Tabelle aller möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten der Aussagen A, B und C zusammen:

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Da die Aussagen (1') und (2') wahr sein sollen, kommen nur die Kombinationen in Frage, für die die Aussagen $A \wedge \overline{B}$ und $B \wedge \overline{C}$ falsch werden. Das sind nur die erste, fünfte, siebente und letzte Kombination.
Die fünfte und siebente fallen weg wegen der Sicherheitsvorschrift a).
Die obige Tabelle ist auf diese Weise auf zwei Zeilen zurückgeführt:

A	B	C
1	1	1
0	0	0

Wir erhalten also dasselbe Resultat wie unter a) 1.

b) Hier ist, wie auch bei a)

$$a = aBC \cup aBc \cup abC \cup abc$$

wobei die zweite Komponente durch Bedingung (2) ausgeschlossen wird. Damit Maschine C auch dann in Betrieb sein kann, wenn Maschine A nicht läuft, muss gelten $abc = \varnothing$. Dann ist

$$abc \cup abC = abC \qquad , \qquad ab = abC$$

Immer dann, wenn die beiden Maschinen A und B gleichzeitig außer Betrieb sind, läuft Maschine C. Maschine C kann zusammen mit B laufen, Maschine B jedoch kann nicht allein in Betrieb sein.
Zum gleichen Ergebnis kann man wieder mit Hilfe der Aussagenlogik kommen, wie auch unter a) 2. gezeigt.

5.14 Drei Maschinen. Zweite Variante

In einer Werkabteilung gibt es drei Motoren, die unter folgenden Bedingungen in Betrieb sind: Entweder laufen der erste und der zweite Motor oder der zweite und der dritte oder der erste und der dritte.
Da aber für die Produktion vor allem der erste und der zweite Motor benötigt werden, läuft der dritte Motor nur dann, wenn der erste oder der zweite in Reparatur ist oder wenn sie gereinigt werden, das heißt, er läuft immer nur kurze Zeit.

Welcher Art sind die Bedingungen, unter denen der dritte Motor läuft bzw. außer Betrieb ist? Kann einer der Motoren einzeln laufen, und können alle drei gleichzeitig in Betrieb sein?

Lösung:
Bezeichnungen: $A =$ Motor A läuft, $B =$ Motor B läuft, $C =$ Motor C läuft.
Bedingungen der Aufgabe: ABc, aBC, AbC.

Aus der Aufgabe folgt als Bedingung dafür, dass Motor A läuft:
(1) $A = ABc \cup AbC$
und dafür, dass er nicht läuft:
(2) $a = aBC$.

Zerlegt man die Klasse C nach A und B, erhält man

$$C = ABC \cup AbC \cup aBC \cup abC$$

wobei Bedingung (1) die erste und Bedingung (2) die letzte Komponente ausschließt. Es bleibt also übrig

$$C = AbC \cup aBC$$

Analog ist

$$c = ABc \cup Abc \cup aBC \cup abc$$

Hier schließt Bedingung (1) die zweite und Bedingung (2) die dritte und vierte Komponente aus. Übrig bleibt $c = ABc$. Schließlich ist

$$B = ABC \cup ABc \cup aBC \cup aBc$$

Bedingung (1) schließt die erste und (2) die vierte Komponente aus

$$b = AbC \cup Abc \cup abC \cup abc$$

Hier schließt (1) die zweite und (2) die dritte und vierte Komponente aus.

Meter C ist folglich immer nur mit einem der anderen beiden Motoren zusammen in Betrieb und läuft nicht, wenn A und B beide in Betrieb sind. Die Möglichkeit ABC scheidet aus, auch läuft keiner der drei Motoren allein.

5.15 Produktion und Gütekontrolle

Eine vollautomatisierte Maschine stellt ohne Unterbrechung Schrauben her, die vor dem Verpacken einer doppelten Kontrolle unterzogen werden.
Die eine Kontrolle betrifft die Qualität des Materials und die zweite (die unabhängig von der ersten arbeitet) die Genauigkeit der Bearbeitung.

Was könnte man über die Arbeit des Automaten sagen, wenn die Gütekontrolle weder einwandfrei bearbeitete Schrauben aus schlechtem Material noch schlecht gearbeitete Schrauben aus gutem Material herausfände?
Und was könnte man über den gleichen Automaten aussagen, wenn die Gütekontrolle feststellte, dass gut gearbeitete Schrauben aus schlechtem Material im allgemeinen nicht vorkommen?

Lösung:
Bezeichnungen :
A = Menge der gut bearbeiteten Schrauben,
B = Menge der Schrauben aus gutem Material.
Menge aller Schrauben: $S = AB \cup Ab \cup aB \cup ab$.

Im ersten, in der Aufgabe angeführten Fall ist

$$Ab = \varnothing \qquad \text{und} \qquad aB = \varnothing$$

Dann ist

$$Ab \cup AB = \varnothing \cup AB, \qquad \text{das heißt: } A = AB \tag{1}$$

$$aB \cup AB = \varnothing \cup AB, \qquad \text{das heißt: } B = AB \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) zusammen gewinnen wir: $A = B$ und ebenso $a = b$.

Die Menge der gut gearbeiteten Schrauben ist identisch mit der Menge von Schrauben, die aus gutem Material hergestellt sind. Der Automat lässt also zwar auch die Produktion von Schrauben aus schlechtem Material zu, aber diese sind dann schlecht gearbeitet.

Ein solcher Automat wäre recht gut eingerichtet, da er auch das Material sortierte: Ausschuss gibt es nur aus schlechtem Material.

Im zweiten Fall haben wir $Ab = \varnothing$, und deshalb gilt ebenfalls $A = AB$.
In diesem Fall wären alle gut gearbeiteten Schrauben aus gutem Material, aber der Automat ließe auch die Herstellung von schlecht gearbeiteten Schrauben aus gutem Material zu, er würde also Material verschwenden.

5.16 Die Herstellungsgruppe

Fünf Maschinen in einer Herstellungsgruppe werden von einem Automaten kontrolliert, der dann in den Produktionsprozess eingreift, wenn eine der Maschinen ausfällt.
Die Maschinen sind so miteinander gekoppelt, dass, wenn die erste gut läuft, auch die zweite gut läuft. Genau so verhält es sich mit der zweiten und der dritten, mit der dritten und der vierten und mit der vierten und der fünften. Was geschieht, wenn

1. die vierte Maschine ausfällt,
2. die letzte Maschine ausfällt,
3. die zweite Maschine ausfällt,
4. die erste Maschine ausfällt?

Lösung:
Die Zeit des einwandfreien Funktionierens der Maschinen (als Mengen entsprechender Zeitabschnitte) bezeichnen wir jeweils mit A, B, C, D und E. Die Bedingungen der Aufgabe lauten:

$$A = AB, \quad B = BC, \quad C = CD, \quad D = DE.$$

Vorher wollen wir einen Hilfssatz darüber beweisen, dass $y = yx$ aus $X = XY$ folgt.

Beweis:
Es gilt $y = yX \cup yx$. Setzen wir für X jetzt XY ein, erhalten wir

$$y = yXY \cup yx = \varnothing \cup yx$$

das heißt: $y = yx$.

Betrachten wir jetzt als Fall 1 die Zeit des Ausfalls der Maschine D, also d. Hier gilt, wenn $C = CD$, gemäß Hilfssatz auch $d = dc$, das Ausfallen der vierten Maschine zieht das Ausfallen der dritten Maschine nach sich.
Da weiterhin aber $B = BC$, gilt auch $c = cb$. Genau so erhalten wir $b = ba$. Setzen wir $c = cb$ für c (in $d = dc$) ein, erhalten wir $d = dcb$. Setzen wir für b hier ba ein, erhalten wir schließlich $d = dcba$.

Anders ausgedrückt: Wenn die vierte Maschine ausfällt, fallen auch die dritte, zweite und erste aus.

Genau so zeigt die Untersuchung von Fall 2, dass beim Ausfall der letzten Maschine alle übrigen ausfallen; die Untersuchung von Fall 3 zeigt, dass beim Ausfallen der zweiten Maschine auch die erste ausfällt.

In Fall 4, wenn also die erste Maschine ausfällt, kann jede folgende Maschine weiterarbeiten. Schon für die zweite Maschine gilt: $B = BA \cup Ba$, sie kann also arbeiten, unabhängig davon, ob die erste Maschine in Betrieb ist oder nicht.

5.17 Abgeordnete und Armeeangehörige

Wenn man von der Zahl der Parlamentsabgeordneten die Zahl derjenigen Abgeordneten subtrahiert, die nicht Angehörige der Armee sind, erhält man das gleiche Ergebnis, als wenn man von der Zahl aller Armeeangehörigen die Zahl derjenigen subtrahiert, die nicht Parlamentsabgeordnete sind.
Beweisen Sie das!

Lösung:
Bezeichnungen: $P =$ Parlamentsabgeordneter, $A =$ Armeeangehöriger.
Dann ist

$$P = PA \cup Pa \qquad \text{und} \qquad A = PA \cup pA \tag{1,2}$$

Aus diesen Mengenbezeichnungen erhalten wir die folgenden Gleichungen für die Anzahlen der Elemente:

$$(P) = (PA) + (PA) \qquad , \qquad (A) = (PA) + (PA) \tag{1',2'}$$

Die gliedweise Subtraktion der Gleichung (2') von (1') ergibt:

$$(P) = (A) = (Pa) - (pA) \tag{3}$$

woraus folgt: $(P) - (Pa) = (A) - (pA)$, was zu beweisen war.

5.18 Die internationale Konferenz

Jeder der Teilnehmer einer internationalen Konferenz beherrschte mindestens eine der folgenden Sprachen: Englisch, Französisch, Russisch; allerdings war keiner darunter, der sowohl Englisch als auch Französisch sprach.
Wir bezeichnen die Menge der Teilnehmer, die Englisch sprechen, mit A, die Französisch sprechen, mit B, die Russisch sprechen, mit C.
Unter den Teilnehmern der Konferenz gab es auch solche, die nur eine der angeführten Sprachen beherrschten; diese Menge bezeichnen wir mit D.

Es stellte sich heraus, dass die Summe $(A) + (B)$ zufällig gleich der Summe $(C) + (D)$ war.
Es wird nun gefragt, wieviel Teilnehmer der Konferenz nur Russisch sprachen und wieviel Teilnehmer gezwungen waren, sich die in russischer Sprache gehaltenen Vorträge übersetzen zu lassen.

Lösung:
Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, dass in der folgenden Zerlegung der Menge K aller Teilnehmer

$$K = \underline{ABC} \cup \underline{ABC} \cup AbC \cup Abc \cup aBC \cup aBc \cup abC \cup \underline{abc}$$

die unterstrichenen Komponenten leer sind. Weiterhin gelten folgende Gleichungen:

$$(AbC) + (Abc) = (A), \tag{1}$$
$$(aBC) + (aBc) = (B), \tag{2}$$
$$(AbC) + (aBC) + (abC) = (C), \tag{3}$$
$$(Abc) + (aBc) + (abC) = (D), \tag{4}$$
$$(AbC) + (Abc) + (aBC) + (aBc) + (abC) = (K) \tag{5}$$

Durch Addition der Gleichungen (1), (2) und (3) erhält man:

$$2(AbC) + 2(aBC) + (Abc) + (aBc) + (abC) = (A) + (B) + (C) \qquad (6)$$

Wenn man von dieser Gleichung die Gleichung (4) subtrahiert, erhält man:

$$2(AbC) + 2(aBC) = (A) + (B) + (C) - (D)$$

folglich also

$$(AbC) + (aBC) = \frac{1}{2}[(A) + (B) + (C) - (D)] \qquad (7)$$

Wenn man die rechte Seite von (7) in die linke Seite von (3) einsetzt, erhält man:

$$\frac{1}{2}[(A) + (B) + (C) - (D)] + (abC) = (C)$$

folglich

$$(abC) = \frac{1}{2}[(C) + (D) - (A) - (B)] \qquad (8)$$

Das bedeutet aber unter Berücksichtigung der Bedingung $(A) + (B) = (C) + (D)$, dass $(abC) = 0$.

Unter Benutzung dieses Ergebnisses und der Gleichung (7) erhält man durch Einsetzen in (5):

$$\frac{1}{2}[(A) + (B) + (C) - (D)] + (Abc) + (aBC) = (K)$$

und schließlich

$$(Abc) + (aBc) = \frac{1}{2}[2(K) + (D) + (B) - (C) - (A)] \qquad (9)$$

Die Antworten auf die in der Aufgabe gestellten Fragen sind durch die Gleichungen (8) und (9) gegeben.

5.19 Dienstleistungsbetriebe

In einem Stadtbezirk gibt es zwei Wäschereien. In einer bestimmten Woche wurde die erste von 562 Kunden und die zweite von 474 Kunden in Anspruch genommen.
Eine Überprüfung der Dienstleistungsbetriebe ergab, dass 435 Kunden ihre Wäsche ausschließlich in die zweite Wäscherei gaben.
Kann man aufgrund dieser Angaben feststellen, wieviel Kunden in der betreffenden Woche nur zur ersten Wäscherei gingen?

Lösung: Bezeichnungen :
$A =$ Menge der Kunden, die ihre Wäsche in die erste Wäscherei bringen.
$B =$ Menge der Kunden, die ihre Wäsche in die zweite Wäscherei bringen.
Mengenbeziehungen: $A = AB \cup Ab$; $B = BA \cup Ba$.

Damit gelten für die Anzahlen der Elemente:

$$(A) = (AB) + (Ab) \qquad , \qquad (B) = (BA) + (Ba)$$

Gegeben ist: $(A) = 562$, $(B) = 474$, $(aB) = 435$, also gilt

$$562 = (AB) + (Ab) \qquad , \qquad 474 = (AB) + 435 \qquad (1,2)$$

Wenn man (2) von (1) subtrahiert, erhält man: $88 = (Ab) - 435$, woraus folgt: $(Ab) = 523$.
523 Personen gaben also ihre Wäsche nur in die erste Wäscherei.

5.20 Die Dolmetscher

Während eines Musikfestivals kamen auch einige spanisch sprechende ausländische Gäste, mit denen man nicht gerechnet hatte. Die Organisationsleitung des Festivals wandte sich an das Dolmetscherbüro mit der Bitte, Dolmetscher zu schicken.
Auf eine entsprechende telefonische Anfrage erfuhr man, dass Dolmetscher zur Verfügung stehen, die romanische Sprachen beherrschen, dass aber unglücklicherweise ein Mitarbeiter des Büros erkrankt sei.
Gerade er sei aber allein im Besitz des Schlüssels zur Kartei dieser Dolmetscher.

Es stellte sich jedoch heraus, dass der Leiter des Dolmetscherbüros außerdem eine Liste derjenigen Dolmetscher besaß, die zumindest Französisch oder Spanisch beherrschten.
Das waren insgesamt 20 Personen: 8 sprachen Französisch, und 15 beherrschten nur eine dieser beiden Sprachen.

Die Organisationsleitung des Festivals musste möglichst schnell wissen, wieviel Spanischdolmetscher das Büro zur Verfügung stellen konnte. Schon nach wenigen Minuten teilte der Leiter des Dolmetscherbüros die entsprechende Zahl mit.

Wieviel waren es, und auf welche Weise hatte er das festgestellt, wenn sich die Kartei immer noch im verschlossenen Schreibtisch befand?

Lösung:
Bezeichnungen für die entsprechenden Mengen:
$D =$ Dolmetscher der genannten Sprachen
$F =$ Dolmetscher, die Französisch beherrschen
$S =$ Dolmetscher, die Spanisch beherrschen.
Beziehungen zwischen diesen Mengen:

$$DF = DFS \cup DFs \qquad , \qquad D = DFS \cup DFs \cup DfS$$

Anzahlen: $(D) = 20$, $(DF) = 8$, $(BFS) + (DfS) = 15$.
Es gilt:

$$(D) = (DFS) + (DFs) + (DfS) \qquad , \qquad (DF) = (DFS) + (DFs)$$

also gilt:

$$(DFS) + (DFs) + (DfS) = 20, \tag{1}$$
$$(DFs) + (DfS) = 15, \tag{2}$$
$$(DFS) + (DFs) = 8 \tag{3}$$

Durch Subtraktion der Gleichung (2) von (1) erhalten wir $(DFS) = 5$, durch gliedweise Subtraktion der Gleichung (3) von (1) $(DfS) = 12$. Folglich ist

$$(DS) = (DFS) + (DfS) = 5 + 12 = 17$$

Es standen also 17 Spanischdolmetscher zur Verfügung.

5.21 Die Lebensmittelvorräte

Die Lebensmittelvorräte einer geographischen Expedition bestehen aus einer Menge von Einzelpackungen. Zwei Drittel dieser Packungen sind Konservendosen. Eine Kontrolle ergab, dass nach einer gewissen Zeit zwei Drittel aller Packungen verdorben waren.

Kann man aufgrund dieser Informationen etwas darüber aussagen, wieviel von den Konservendosen mit Sicherheit verdorben waren?

Lösung:
Bezeichnungen: $P =$ Menge aller Lebensmittelpackungen, $K =$ Menge aller Konservendosen, $V =$ Menge aller verdorbenen Konservendosen.

Es gilt: $P = KV \cup Kv \cup kV \cup kv$.
Anzahlen:

$$(K) = \frac{2}{3}(P) \qquad , \qquad (V) = \frac{2}{3}(P)$$

Aus der Zerlegung von P erhalten wir folgende Gleichung:

$$(P) = (KV) + (Kv) + (kV) + (kv)$$

Ebenso gilt:

$$(P) = \underline{(KV)} + \underline{(Kv)} + \underline{\underline{(kV)}} + (kv) + \underline{\underline{(KV)}} - (KV)$$

Wenn man einmal die unterstrichenen Summanden zusammenfasst, erhält man (K), die zweifach unterstrichenen Summanden ergeben (V). Folglich ist

$$(P) = (K) + (V) + (kv) - (KV)$$

und nach Einsetzen

$$(P) = \frac{2}{3}(P) + \frac{2}{3}(P) + (kv) - (KV) \qquad \text{und schließlich} \qquad (KV) = \frac{1}{3}(P) + (kv)$$

(KV) ist am kleinsten, wenn $(kv) = 0$. Daher ist $\min(KV) = \frac{1}{3}(P)$.
Mindestens die Hälfte aller Konservendosen ist also verdorben. Es ist genau die Hälfte, wenn alle Lebensmittel, die keine Konserven sind, verdorben sind.

5.22 Die Anzahl der unbekannten Gegenstände

Wir untersuchen eine Menge von Gegenständen auf Eigenschaften X, Y und Z.
Einige Gegenstände mit der Eigenschaft X besitzen auch die Eigenschaft Y. Es gibt wenigstens so viele Gegenstände ohne die Eigenschaften Y und Z, wie es Gegenstände mit der Eigenschaft X gibt.

Beweisen Sie, dass es mindestens einen Gegenstand gibt, der weder die Eigenschaft X noch die Eigenschaft Z hat.

Lösung :
Die Menge der Gegenstände mit der Eigenschaft X bezeichnen wir ebenfalls mit X, genauso bei Y und Z. Da die Zahl von Gegenständen, die weder Y noch Z haben, nicht kleiner sein darf als als die Anzahl der Gegenstände mit der Eigenschaft X, gibt es eine Zahl b mit $b \geq 0$, so dass gilt:

$$(yz) = (X) + b \tag{1}$$

Aus der Zerlegung von XY nach Z folgt:

$$(XY) = (XYZ) + (XYz) \tag{2}$$

Aus (1) gewinnen wir durch Zerlegung beider Seiten

$$(Xyz) + (xyz) = (XYZ) + (XYz) + (XyZ) + (Xyz) + b \tag{1'}$$

und durch Einsetzen von (2) in die rechte Seite von (1'):

$$(Xyz) + (xyz) = (XY) + (Xyz) + (XyZ) + b \qquad \text{und} \qquad (yxz) = (XY) + (XyZ) + b$$

Folglich gibt es also Gegenstände ohne die Eigenschaften X und Z, nämlich die, die keine der drei Eigenschaften haben.
Ihre Anzahl ist mindestens gleich (XY). Sie ist größer als (XY) in folgenden Fällen:

a) Es gibt mehr Gegenstände ohne Y und Z als Gegenstände mit X, d.h. $b > 0$.
b) Es gibt mindestens einen Gegenstand, der X und Z aber nicht Y besitzt.

6 Literatur

Asser, G., Einführung in die mathematische Logik, Teil I, 3. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig 1967

Görke, L., Mengen, Relationen, Funktionen, 2. Aufl. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1967

Hasse, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, 5. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig 1970

Haupt, D., Mengenlehre - leicht verständlich, 3. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig 1967

Ilse, D., und W. Tietz, Übungsaufgaben zur Mengenlehre, Mathematik in der Schule 2 (1964); Teil I S. 14, Teil II S. 98 ,

Klaus, G., Moderne Logik, 4. Aufl. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

Segeth, W., Elementare Logik, 5. Aufl. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

Varga, T., Mathematische Logik für Anfänger. Aussagenlogik, 3. Aufl. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1967