I.M. Jaglom

Ungewöhnliche Algebra

Übersetzung: W. Hintzsche
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976
MSB: Nr. 83
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das vorliegende Buch gibt nahezu genau den Inhalt eines Vortrages wieder, den der Autor am 20. April 1966 für Schüler der 8. Klassen Moskauer Schulen, Teilnehmer der XXIX. Moskauer Mathematikolympiade, gehalten hat.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesem Buch und dem Vortrag besteht darin, dass hier jeder Abschnitt durch (nicht sehr zahlreiche) Übungen abgeschlossen wird, von denen die schwierigeren mit einem Sternchen gekennzeichnet sind; am Ende des Buches sind Antworten und Hinweise für einige der Übungen angegeben.

Ich empfehle dem Leser sehr, wenn nicht alle, dann auf jeden Fall die meisten dieser Übungen zu lösen, da man erst dann sicher sein kann, dass man sich den Inhalt des Buches wirklich angeeignet hat.
Abschnitt 6 verdient es meiner Meinung nach, dass ihn jeder Leser, wenn nicht bei der ersten, dann bei der wiederholten Lektüre des Buches durcharbeitet.

Am Ende des Buches wird auf Literatur hingewiesen, die sich für den Leser, der die Boolesche Algebra näher kennenlernen möchte, als nützlich erweisen kann.

Für nützliche Hinweise dankt der Autor S. G. Gindikin, für die sorgfältige und initiativreiche Redaktion F. I. Kizner.

Moskau, Oktober 1966

I. M. Jaglom

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra der Zahlen und Algebra der Mengen

Im Mathematikunterricht der Schule untersucht man Zahlen verschiedenster Natur. Die Kinder begegnen in der ersten Klasse ganzen Zahlen, die ihnen keine Schwierigkeiten bereiten. Die Mehrheit der Schüler weiß schon einiges über diese Zahlen, wenn sie in die Schule kommen.

Aber dann erscheinen immer neue und neue "Zahlen". Wir sind heute schon an sie gewöhnt, und sie verwundern uns nicht, trotzdem mussten wir uns in jedem Stadium der Erweiterung unseres Zahlbegriffs von der einen oder anderen liebgewordenen Vorstellung trennen.
Die ganze Zahl beantwortet die Frage, wieviel Dinge diese oder jene Gesamtheit enthält: Wieviel Apfel in einem Korb sind, wieviel Seiten ein Buch hat oder wieviel Jungen eine Klasse hat. Aber was ist mit den Brüchen? Es können doch nicht $33\frac{1}{3}$ Schüler in der Klasse sitzen oder $3\frac{1}{4}$ Teller auf dem Tisch stehen.

Nein, das geht tatsächlich nicht! Aber auf dem Tisch können $4\frac{1}{2}$ Äpfel liegen, die Kinovorstellung kann $1\frac{3}{4}$ Stunden dauern, es können sogar $6\frac{1}{2}$ Bücher im Schrank stehen (das zeugt natürlich nicht gerade von der Ordnungsliebe des Besitzers dieser Bücher, widerspricht aber auch nicht dem gesunden Menschenverstand!).
Kaum ist es gelungen, uns daran zu gewöhnen, dass die Anzahl von Dingen auch gebrochen sein kann, treten auch schon die negativen Zahlen auf. Nun können -3 Bücher keinesfalls im Schrank stehen - das wäre völlig widernatürlich!
Aber das Thermometer kann -5°C anzeigen, oder dein Geld kann -50 Pfennig betragen; letzteres ist natürlich bedauerlich, aber nur für dich, nicht für die Mathematik.

Indessen erscheinen in den höheren Klassen ganz "schreckliche" Zahlen: zuerst die irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ (die Bezeichnung dieser Zahlen leitet sich vom lateinischen Wort irrationalis ab, was übersetzt "unvernünftig", "sinnlos" bedeutet), später die imaginären Zahlen wie $1 + 2i$[1].

Diese Bezeichnungen zeigen noch, wie sich die Menschen gegenüber solchen Zahlen verhielten, solange sie sich noch nicht an sie gewöhnt hatten. Es ist möglich, dass du diese Zahlen noch nicht kennst und dass dir die Bekanntschaft mit ihnen noch bevorsteht.[2] Das soll dich aber nicht daran hindern, das vorliegende Buch zu lesen.

Von der ursprünglichen Idee der Zahl als Charakteristik einer Menge von Dingen haben sich die irrationalen und die imaginären Zahlen sehr, sehr weit entfernt, obwohl man sie auch als "Zahlen" bezeichnet. Was ist also das Gemeinsame, das alle diese Zahlbegriffe besitzen, was veranlasst uns, sie mit ein und demselben Namen "Zahl" zu bezeichnen?

Die grundlegende Ähnlichkeit zwischen all diesen Zahlentypen besteht darin, dass man sie alle addieren und multiplizieren kann.[3] Allerdings besteht diese Ähnlichkeit nur unter Vorbehalt:
Obwohl wir Zahlen aller Arten addieren und multiplizieren können, besitzen diese Operationen in den verschiedenen Fällen völlig unterschiedliche Bedeutungen. Zwei ganze positive Zahlen a und b zu addieren bedeutet, die Anzahl der Dinge in der Vereinigung zweier Gesamtheiten zu finden, von denen die erste a Dinge und die zweite b Dinge enthält:

[1] Heute nennt man solche Zahlen wie $1 + 2$i komplexe Zahlen, die Bezeichnung imaginäre (oder rein imaginäre) Zahlen bleibt solchen Zahlen wie 2 i oder -$\frac{1}{5}$ i vorbehalten. Im Gegensatz dazu nennt man Zahlen wie 1, -$\frac{3}{2}$ oder $\sqrt{2}$ reell.

[2] Die unterschiedlichen Zahlenarten werden z.B. in [9] ausführlich erläutert.

[3] Aber nicht subtrahieren oder dividieren: Wenn wir nur die positiven Zahlen kennen, können wir die Zahl 5 nicht von der Zahl 3 subtrahieren, wenn wir aber nur die ganzen Zahlen kennen, dann können wir die Zahl 7 nicht durch die Zahl 4 dividieren.

Wenn in der Klasse 7a 35 Schüler sind und in der Klasse 7b 39, dann befinden sich in beiden 7. Klassen 35 + 39 = 74 Schüler (siehe auch Abb. 1).

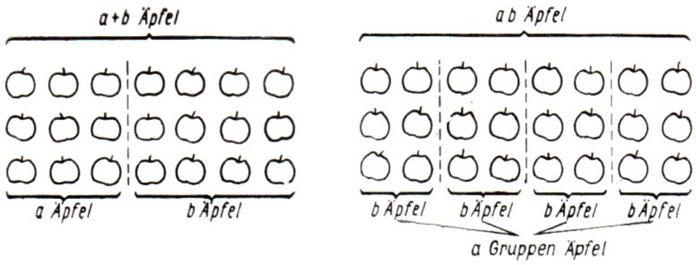


Abb. 1 und 2

Die ganzen positiven Zahlen a und b zu multiplizieren bedeutet dementsprechend, die Anzahl der Dinge zu finden, die der Zusammenfassung von a Gesamtheiten mit je b Dingen angehören.
Wenn es in der Schule drei siebente Klassen gibt und in jeder 36 Schüler lernen, dann besuchen insgesamt $3 \cdot 36 = 108$ Schüler der 7. Klasse die Schule (siehe auch Abb. 2).
Man kann jedoch eine solche Definition der Addition und der Multiplikation weder auf die Grundrechenoperationen mit Brüchen noch auf die Grundrechenoperationen mit negativen Zahlen ausdehnen (von den irrationalen und den imaginären Zahlen soll hier nicht gesprochen werden).

Es scheint so, als würden wir zu folgender Schlussfolgerung gelangen:
Die verschiedenen Zahlenarten nennen wir deshalb übereinstimmend "Zahlen", weil man sie alle addieren und multiplizieren kann. Aber dieselben Operationen der Addition und Multiplikation sind für verschiedene Zahlentypen völlig unterschiedlich.

Doch wir waren hier zu voreilig: In Wirklichkeit sind die Addition ganzer Zahlen und die Addition von Brüchen keineswegs so unterschiedliche Operationen.
Genauer, die Definitionen dieser Operationen sind tatsächlich unterschiedlich, aber ihre Eigenschaften sind völlig gleichartig. So gelten für beliebige Zahlen

$$a + b = b + a \qquad \text{(Kommutativgesetz der Addition)}$$
$$ab = ba \qquad \text{(Kommutativgesetz der Multiplikation)}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{(Assoziativgesetz der Addition)}$$
$$(ab)c = a(bc) \qquad \text{(Assoziativgesetz der Multiplikation)}$$

In allen Fällen existieren auch zwei "ausgezeichnete" Zahlen 0 und 1, dass

$$a + 0 = a \qquad \text{und} \qquad a \cdot 1 = a$$

für jede Zahl a gelten.

Für die moderne Algebra ist folgende Auffassung für den Inhalt dieses Sachverhaltes kennzeichnend:
Die Algebra untersucht einige (allerdings verschiedenartige) Zahlensysteme, für die die Grundrechenarten Addition und Multiplikation definiert sind und die den oben dargelegten Gesetzen und einigen anderen genügen, wie zum Beispiel

$$(a + b)c = ac + bc$$

(Distributivgesetz der Multiplikation im Verhältnis zur Addition), wobei a, b und c Zahlen beliebigen Typs sein können.

Das Vorhandensein zweier Operationen in Zahlensystemen - Addition und Multiplikation - schafft einen Parallelismus, der insofern um so bedeutender ist, als die Eigenschaften der Addition in vielem an die Eigenschaften der Multiplikation erinnern. Dieser Parallelismus spiegelt sich zum Beispiel darin wider, dass in der unüblichen "Proportion"

$$\frac{\text{Addition}}{\text{Subtraktion}} = \frac{\text{Multiplikation}}{?}$$

jeder Befragte an Stelle des Fragezeichens "Division" einsetzt, ohne lange darüber nachzudenken, was diese "Proportion" bedeutet.
Er zeigt sich auch darin, dass nicht nur Schüler, sondern manchmal sogar deren Eltern häufig die Begriffe "entgegengesetzte Zahl" (das ist eine Zahl $-a$, deren Summe mit einer gegebenen Zahl a Null ergibt) und "Kehrwert" (das ist eine Zahl $\frac{1}{a}$, deren Produkt mit einer gegebenen Zahl a gleich Eins ist.) verwechseln, und drückt sich auch in der Ähnlichkeit der Eigenschaften der arithmetischen Folge (einer solchen Zahlenreihe, bei der die Differenz von je zwei benachbarten Zahlen gleich ist) und der geometrischen Folge (einer solchen Zahlenreihe, bei der der Quotient von je zwei benachbarten Zahlen den gleichen Wert hat) aus.

Jedoch findet man diese Ähnlichkeit, diesen Parallelismus, nicht überall. So spielt zum Beispiel die Zahl 0 nicht nur im Verhältnis zur Addition, sondern auch im Verhältnis zur Multiplikation eine besondere Rolle.
Dies drückt sich darin aus, dass für jede Zahl a

$$a \cdot 0 = 0$$

gilt. Daraus folgt insbesondere, dass man eine von 0 verschiedene Zahl niemals durch 0 teilen darf.
Wenn wir jedoch in der letzten Gleichung die Multiplikation durch die Addition und die Null durch die Eins ersetzen, kommen wir zur unsinnigen "Gleichung"

$$a + 1 = 1$$

die nur für $a = 0$ gilt.[4] Weiter erhalten wir, wenn wir im Distributivgesetz

$$(a + b)c = ac + bc$$

die Addition durch die Multiplikation und die Multiplikation durch die Addition ersetzen, die "Gleichung"

$$ab + c = (a + c)(b + c)$$

mit der natürlich niemand einverstanden ist. (Weil offensichtlich

$$(a + c)(b + c) = ab + ac + bc + c^2 = ab + c(a + b + c)$$

ist, gilt

$$(a + c)(b + c) = ab + c$$

nur in dem Fall, dass $c = 0$ oder dass $a + b + c = 1$ ist.)

Aber die Algebra kennt auch andere Systeme, Nicht-Zahlensysteme, in denen man die Grundrechenarten Addition und Multiplikation ebenfalls erklären kann, wobei diese einander ähnlicher

[4] Wenn die Gleichung $a + 1 = 1$ für jedes a gelten würde, wäre es unmöglich, von jeder von 1 verschiedenen Zahl 1 abzuziehen. Tatsächlich ist das natürlich unrichtig, denn es gilt $3 - 1 = 2$.

sind als die Addition und Multiplikation der Zahlen.

Sehen wir uns zum Beispiel die sehr wichtige "Algebra der Mengen" an.
Unter einer Menge versteht man eine beliebige Zusammenfassung irgendwelcher Dinge, die als Elemente der Menge bezeichnet werden. Man kann von der "Menge der Schüler der Klasse 7a" sprechen, von der "Menge der Punkte eines Kreises", von der "Menge der Punkte eines Quadrates", von der "Menge der Elemente des Mendelejewschen Periodensystems", von der "Menge der geraden Zahlen", von der "Menge der Zensuren im Klassenbuch", von der "Menge der Elefanten in Indien", von der "Menge der grammatischen Fehler in deinem Klassenaufsatz" usw.

Es ist ziemlich klar, wie man die "Addition zweier Mengen" definieren kann:
Unter der Summe $A+B$ der Menge A und der Menge B werden wir einfach die Vereinigung dieser beiden Mengen verstehen.[5]

So ist zum Beispiel, wenn A die Menge der Jungen deiner Klasse ist und B die Menge der Mädchen, $A+B$ die Menge aller Schüler der Klasse. Wenn A die Menge aller geraden ganzen positiven Zahlen ist und B die Menge der Zahlen, die durch 3 teilbar sind, dann besteht die Menge $A+B$

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, ...\}$$

aus diesen und den ersteren Zahlen.
Wenn die Menge A aus den Punkten der Figur besteht, die in Abb. 3 horizontal schraffiert ist, und die Menge B aus den Punkten der Figur, die schräg schraffiert ist, dann bildet die Menge $A+B$ die gesamte in Abb. 3 schraffierte Figur.

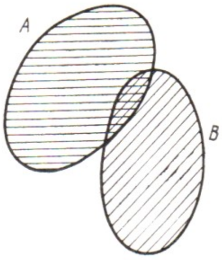


Abb. 3

Dabei ist es klar (siehe zum Beispiel Abb. 3), dass immer für je zwei Mengen A und B

$$A+B=B+A$$

gilt, d.h., für die Addition von Mengen ist das Kommutativgesetz erfüllt.
Weiter ergibt sich für beliebige Mengen A, B und C immer

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

d.h., es gilt das Assoziativgesetz für die Addition von Mengen. Die Menge $(A+B)+C$ (oder $A+(B+C)$) kann man einfach als $A+B+C$ ohne Klammern schreiben.

[5] In der Mengentheorie bezeichnet man die Vereinigung zweier Mengen A und B mit $A \cup B$, den Durchschnitt dieser Mengen mit $A \cap B$. Da die Algebra der Mengen nur ein Beispiel für eine Algebra ist, benutzt der Autor hier und im folgenden die Symbole der allgemeinen Theorie der Algebren, die auch die Verbindung zu der dem Leser bekannten Algebra der (reellen) Zahlen deutlicher machen. Wenn dem Leser die mengentheoretische Schreibweise geläufiger ist, dann empfehlen wir ihm, sich die Formeln in dieser Schreibweise nochmals zu notieren.

Sie stellt die Vereinigung der drei Mengen A, B und C dar (so fällt in Abb. 4 die Menge $A + B + C$ mit der ganzen in dieser Abbildung schraffierten Figur zusammen).

Als das Produkt AB der Mengen A und B vereinbaren wir nun den gemeinsamen Teil oder den Durchschnitt dieser Mengen.

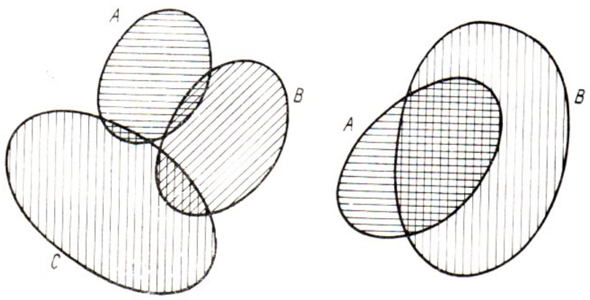


Abb. 4 und 5

So ist, wenn A die Menge der Schachspieler deiner Klasse ist und B die Menge aller Schwimmer, AB die Menge der Schachspieler, die schwimmen können.
Wenn A die Menge der geraden positiven Zahlen ist und B die Menge der Zahlen, die durch 3 teilbar sind, dann besteht die Menge AB

$$\{6, 12, 18, 24, ...\}$$

aus allen Zahlen, die durch 6 teilbar sind. Wenn die Menge A aus den Punkten der Figur besteht, die in Abb. 5 durch horizontale Linien schraffiert ist, und die Menge B aus den Punkten der Figur, die durch vertikale Linien schraffiert ist, dann wird die Menge (Figur) AB auf dieser Abbildung durch ein "Gitter" horizontaler und vertikaler Linien bedeckt.

Es ist klar, dass auch für die Multiplikation der Menge das Kommutativgesetz erfüllt ist, d.h., für zwei beliebige Mengen A und B gilt

$$AB = BA$$

(siehe Abb. 5; es ist auch verständlich, dass die "Menge AB der Schachspieler, die schwimmen können" und die "Menge BA der Schwimmer, die Schach spielen können" ein und dieselbe Menge ist). Weiter ist klar, dass für die Multiplikation von Mengen auch das Assoziativgesetz richtig ist, d.h., für drei beliebige Mengen A, B und C gilt

$$(AB)C = A(BC)$$

Die Menge $(AB)C$ oder $A(BC)$ kann man einfach durch ABC ohne Klammern kennzeichnen; sie stellt den gemeinsamen Teil oder den Durchschnitt der drei Mengen A, B und C dar (in der Abb. 6 ist die Menge ABC durch dreifache Schraffierung bedeckt)[6]). Es ist bemerkenswert, dass für drei beliebige Mengen A, B und C auch das Distributivgesetz erfüllt wird :

$$(A + B)C = AC + BC$$

[6] Hier noch ein Beispiel, welches das Assoziativgesetz für die Multiplikation von Mengen illustriert. Es möge A die Menge der ganzen Zahlen sein, die durch 2 teilbar sind, B die Menge der Zahlen, die durch 3 teilbar sind, und C die Menge der Zahlen, die durch 5 teilbar sind; dann ist AB die Menge der Zahlen, die durch 6 teilbar sind, und $(AB)C$ die Menge der Zahlen, die sowohl durch 6, als auch durch 5 teilbar sind, d.h., die durch 30 teilbar sind. Andererseits ist BC die Menge der Zahlen, die durch 15 teilbar sind, und $A(BC)$ ist die Menge der geraden Zahlen, die durch 15 teilbar sind, d.h. wiederum die Menge der ganzen Zahlen, die durch 30 teilbar sind.

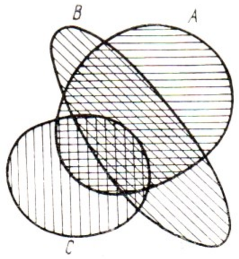


Abb. 6

Wenn, sagen wir, A die Menge der Schachspieler aus deiner Klasse, B die Menge der Schüler, die Dame spielen können, und C die Menge der Schwimmer ist, dann stellt die Menge $A+B$ die Vereinigung der Mengen der Schachspieler und der Damespieler dar, d.h. die Menge der Schüler, die wenigstens ein Spiel spielen: Schach oder Dame (möglicherweise sowohl Schach als auch Dame). Die Menge $(A+B)C$ erhält man aus der Menge $A+B$, wenn man von den in die Vereinigung $A+B$ eingehenden Schülern nur die zurückbehält, die auch schwimmen können.
Es ist klar, dass wir genau die Menge erhalten, die die Vereinigung $AB+BC$ der Menge AC der Schachspieler, die schwimmen können, und BC der Damespieler, die schwimmen können, bildet.

Möglicherweise empfindest du diese Erklärung des Distributivgesetzes in Worten umständlich. In einem solchen Fall ist es nützlich, von der graphischen Darstellung Gebrauch zu machen.

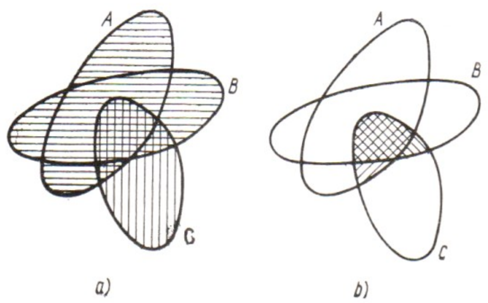


Abb. 7a und b

In der Abb. 7a ist die Menge $A+B$ durch horizontale Linien und die Menge C durch vertikale Linien schraffiert, so dass die Menge $(A+B)C$ wie durch ein "Gitter" bedeckt erscheint.
In der Abb. 7b sind die Mengen AC und BC durch Linien entsprechender Neigung nach rechts oder links schraffiert. Dabei stimmt die Menge $AC+BC$ mit der ganzen in der Abbildung schraffierten Figur überein. Man sieht leicht, dass sich die in der Abb. 7b schraffierte Figur $AC+BC$ nicht von der Figur $(A+B)C$ unterscheidet, die in der Abb. 7a durch zweifache Schraffierung bedeckt ist.

Man kann erkennen, welche "Menge" in unserer "Algebra der Mengen" die Rolle der Null spielt. Durch das Hinzufügen einer solchen Menge $\varnothing$ (wir werden entsprechend der Schreibweise für die Zahl 0 die "Nullmenge" durch $\varnothing$ kennzeichnen) wird keine einzige Menge verändert, d.h., dass die Menge $\varnothing$ überhaupt kein Element enthält, dass sie "leer" ist.

Vielleicht möchtest du eine solche leere Menge aus der Betrachtung völlig ausschließen. Wenn die Menge $\varnothing$ keine Elemente enthält, dann ist sie folglich überhaupt keine Menge, sondern Unsinn, also nichts, worüber man sprechen sollte.

Wir haben jedoch ebenso wenig Berechtigung so zu verfahren, als wir Berechtigung besitzen, 0 aus der Gesamtheit der Zahlen auszuschließen. Es ist doch auch eine "Gesamtheit" von null Dingen eine "leere" Gesamtheit. Von einer "Zahl" darin enthaltener Dinge zu sprechen, scheint unsinnig. Aber tatsächlich ist dies nicht unsinnig, sondern im Gegenteil sehr sinnvoll.

Wenn wir die Zahl 0 nicht besäßen, könnten wir nicht zwei beliebige Zahlen voneinander abziehen, weil in einem solchen Fall z.B. der Differenz 3 - 3 nichts gleichzusetzen wäre.
Es würde uns schwerfallen, im Dezimalsystem, sagen wir, die Zahl 108 (ein Hunderter, acht Einer und überhaupt keine Zehner!) zu schreiben.

Noch vieles andere könnten wir nicht tun: Nicht ohne Grund hält man die Entstehung des Begriffs der Null für eines der bemerkenswertesten Ereignisse in der Geschichte der Arithmetik.
Ebenso wenig könnten wir, zählten wir die leere Menge $\varnothing$ nicht zu den Mengen, das Produkt (oder den Durchschnitt) von zwei beliebigen Mengen aufzeigen.

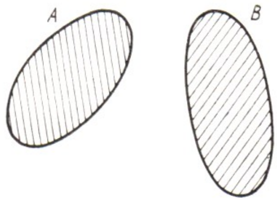


Abb. 8

So ist der Durchschnitt der in Abb. 8 dargestellten Mengen A und B leer, wie auch der Durchschnitt der Menge der ausgezeichneten Schüler deiner Klasse und der Menge der Elefanten leer ist. Würden wir überhaupt auf den Begriff "leere Menge" verzichten, dann wären wir oft gezwungen, mit großer Vorsicht über Mengen zu sprechen:
Plötzlich ist die "Menge der Müller aus den 5. Klassen der 6. Greifswalder POS" leer. Heißt das, eine solche Menge kann es überhaupt nicht geben?

Es ist klar: Wenn $\varnothing$ die leere Menge ist, dann gilt für jede Menge A

$$A + \varnothing = A$$

Ebenso klar ist es, dass für jede Menge A immer

$$A\varnothing = \varnothing$$

gilt, da doch der Durchschnitt einer beliebigen Menge A und der (nicht ein einziges Element enthaltenden) Menge $\varnothing$ (sagen wir der Durchschnitt der Menge der Mädchen deiner Klasse und der Menge aller jener Schüler, deren Größe 2,50 m überschreitet) unbedingt leer ist!

Etwas komplizierter verhält es sich mit der "Eins-Menge".
Diese Menge I (wir werden sie ähnlich der Schreibweise der Zahl 1 mit dem Buchstaben I bezeichnen) muss so beschaffen sein, dass das Produkt (d.h. der Durchschnitt) von ihr und jeder Menge A mit A übereinstimmt.
Hieraus folgt aber, dass unsere Menge I alle überhaupt vorhandenen Elemente aller Mengen A enthalten muss! Es ist klar, dass eine solche Menge nur in dem Falle existieren kann, wenn wir uns auf Mengen A beschränken, deren Elemente aus irgendeinem bestimmten Vorrat an "Dingen" geschöpft werden:
auf Mengen von Schülern einer bestimmten Schule oder einer Klasse (z.B. kann A die Menge der ausgezeichneten Schüler sein, während B die Menge der Schachspieler ist), auf Mengen von ganzen positiven Zahlen (A kann die Menge der geraden Zahlen sein, während B die Menge der Primzahlen ist, die keinen anderen Teiler als sich selbst und Eins besitzen), auf Mengen von Punkten, die durch die in einem bestimmten Quadrat gelegenen Figuren dargestellt werden, ähnlich denen, die in Abb. 3 bis Abb. 8 dargestellt wurden.

In solch einem Fall werden wir unter I die "größte Menge" verstehen, die alle von uns betrachteten "Dinge" enthält, die Menge aller Schüler der betrachteten Schule oder Klasse, die Menge aller ganzen positiven Zahlen oder die Menge aller Punkte eines Quadrates (Abb. 9).

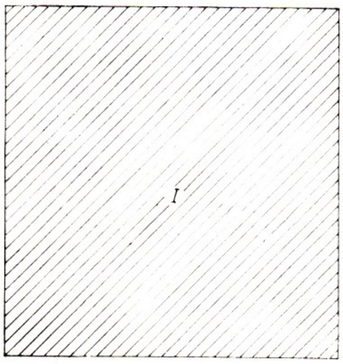


Abb. 9

Diese Menge I bezeichnet man in der "Algebra der Mengen" als Eins- oder Universalmenge. Für eine beliebige "kleinere" Menge A (und für die Menge A, die I übereinstimmt) gilt offensichtlich und in voller Übereinstimmung mit der Voraussetzung, unter der die Eins-Menge gebildet wurde,

$$AI = A$$

So sehen wir, dass die Gesetze der Grundrechenarten in der von uns aufgebauten "Algebra der Mengen", in vielem den uns aus dem Mathematikunterricht der Schule her bekannten Gesetzen der Algebra, die sich auf die Zahlen beziehen, ähnlich sind.

Sie gleichen aber den Zahlengesetzen nicht völlig. Zwar gelten, wie wir uns überzeugt haben, in der Algebra der Mengen fast alle Grundgesetze, die für Zahlen wahr sind, aber in ihr sind auch völlig andere Gesetze erfüllt, die dir wahrscheinlich merkwürdig vorkommen werden.
So bemerkten wir schon, dass die Regel, die aus der Gleichung $a \cdot 0 = 0$ durch Ersetzen der Multiplikation durch die Addition und der Null durch die Eins erhalten wurde, für Zahlen im allgemeinen nicht gilt: Für fast alle Zahlen a gilt $a+1 \neq 1$. In der Algebra der Mengen verhält es sich aber nicht so. Hier gilt immer

$$A + I = I$$

Tatsächlich ist die Menge I ihrer Bestimmung nach "die größte", und deshalb ist es nicht möglich, sie noch zu vergrößern:
Welche Menge A (aus den von uns betrachteten Mengen) wir auch zur Eins-Menge hinzufügen, wir werden immer dieselbe Menge I erhalten.

Weiter erhalten wir, indem wir im Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ die Addition durch die Multiplikation und umgekehrt ersetzen, die sinnlose "Gleichung" $ab + c = (a + c)(b + c)$, die sich für Zahlen fast immer als unrichtig erweist. Anders verhält es sich in der Algebra der Mengen:
Hier gilt immer (d.h. bei beliebigen Mengen A, B und C) die Gleichung

$$AB + C = (A + C)(B + C)$$

die das zweite Distributivgesetz (Distributivgesetz für die Addition im Verhältnis zur Multiplikation) der Algebra der Mengen ausdrückt.
Es möge wieder A die Menge der Schachspieler, B die Menge der Damespieler und C die Menge der Schwimmer aus deiner Klasse sein. In einem solchen Fall ist es offensichtlich, dass

der Durchschnitt AB der Mengen A und B aus allen Schülern besteht, die sowohl Schach als auch Dame spielen können, während die Vereinigung $AB + +C$ der Mengen AB und C aus allen Schülern besteht, die entweder sowohl Schach als auch Dame spielen können oder aber schwimmen können (es kann aber auch sein, dass sie Schach spielen können, Dame spielen können und schwimmen können).

Andererseits bestehen die Vereinigungen $A + C$ bzw. $B + C$ der Mengen A und C bzw. B und C aus den Schülern, die entweder Schach spielen oder schwimmen (es kann aber sein, dass sie schwimmen und Schach spielen) bzw. aus den Schülern, die entweder Dame spielen oder schwimmen. Es ist klar, dass in den Durchschnitt $(A + C)(B + C)$ dieser zwei letzteren Mengen alle Schüler eingehen, die schwimmen können, von den Nichtschwimmern aber nur die, die sowohl Schach als auch Dame spielen, d.h., dieser Durchschnitt stimmt mit der Menge $AB + C$ überein.

Weil eine solche Erklärung in Worten verwirren kann, führen wir noch eine graphische Illustration des zweiten Distributivgesetzes an.
In der Abb. 10a bedeckt die Schraffierung mit Neigung nach rechts den Durchschnitt AB der Mengen A und B, die mit Neigung nach links die Menge C; dabei stellt die ganze in dieser Abbildung schraffierte Figur die Menge $AB + C$ dar.

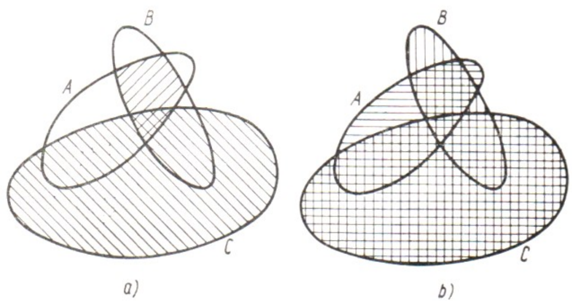


Abb. 10 a und b

In der Abb. 10b wurde die Vereinigung $A + C$ der Mengen A und C durch horizontale Linien schraffiert, die Vereinigung $B + C$ der Mengen B und C aber durch vertikale Linien; der Durchschnitt.
$(A + C)(B + C)$ dieser zwei Vereinigungen ist in dieser Abbildung "netzartig" bedeckt.
Man sieht leicht, dass die Figur, die in Abb. 10b netzartig durch horizontale und vertikale Linien bedeckt ist, genau mit der in Abb. 10a schraffierten Figur übereinstimmt, was auch das zweite Distributivgesetz bestätigt.

Zum Abschluss geben wir noch zwei Gesetze der Algebra der Mengen an, die den in der Schule erworbenen Vorstellungen von der Algebra widersprechen. Man sieht für jede Menge A leicht ein, dass die Vereinigung dieser Menge mit sich selbst und der Durchschnitt mit sich selbst mit der Ausgangsmenge A übereinstimmt:

$$A + A = A \qquad \text{und} \qquad AA = A$$

Diese zwei Gleichungen werden manchmal Idempotenzgesetze genannt.

Der Umstand, dass man für alle Zahlenarten die Grundgesetze der Algebra in ein und derselben Form erhält, ist höchst vorteilhaft. Aus diesem Grund können wir beim Übergang von den ganzen Zahlen zu den gebrochenen oder vorzeichenbehafteten (mit dem Vorzeichen "plus" oder "minus") die früher erworbenen Fertigkeiten vollständig verwerten.

Wir brauchen nur dazuzulernen (in Übereinstimmung mit dem größeren Vorrat der betrachteten Zahlen), jedoch nicht umzulernen. Beim Übergang von den Zahlen zu den Mengen begegnen wir einem völlig anderen Sachverhalt.
Hier müssen wir zum Teil auch umlernen, insofern eine Reihe von Gesetzen der Algebra der Mengen für Zahlen nicht gelten.

Gerade dieser Unterschied der Gesetze der Algebra der Mengen zu den Zahlengesetzen ist ein Grund dafür, dass in vielen Büchern die Addition und Multiplikation von Mengen (d.h. ihre Vereinigung und ihr Durchschnitt) nicht mit den gewöhnlichen Zeichen + und -, sondern völlig anders bezeichnet wird: Die Vereinigung der Mengen A und B wird gekennzeichnet durch $A \cup B$, der Durchschnitt dieser Mengen aber durch $A \cap B$.

Da wir im vorliegenden Buch auch von anderen algebraischen Systemen sprechen, in denen die "Addition" und die "Multiplikation" den gleichen Gesetzen wie in der Algebra der Mengen unterworfen sind, verzichten wir naturgemäß auf die gerade für die Theorie der Mengen spezifischen Symbole $\cup$ und $\cap$. Andererseits schreibt uns der Wunsch, die Nähe der betrachteten Algebren zur Schulalgebra zu betonen, die Verwendung der gewöhnlichen Zeichen der Addition und der Multiplikation vor. Dennoch ist es vermutlich angebracht, hier die Grundgesetze der Algebra der Mengen auch in den mengentheoretischen Standardbezeichnungen niederzuschreiben:

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A \qquad \text{(Kommutativgesetze)}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$A \cup \varnothing A, \quad A \cap I = A, \quad A \cup I = I, \quad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad \text{(Eigenschaften der leeren Menge und der Eins-Menge)}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad , \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad \text{(Distributivgesetze)}$$

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A \qquad \text{(Idempotenzgesetze)}$$

Wir zählen diese neuen Gesetze auf. Zu ihnen gehört die Beziehung

$$A + I = I$$

die den Hauptunterschied zwischen der Eins-Menge I und der Zahl 1 bildet. Eine sehr überraschende Möglichkeit einer "Auflösung von Klammern" in der Algebra der Mengen ist durch das zweite Distributivgesetz

$$(A + C)(B + C) = AB + C$$

gegeben, so dass hier z.B. gilt

$$\begin{aligned}(A + D)(B + D)(C + D) &= [(A + D)(B + D)](C + D)\\ &= (AB + D)(C + D) = (AB)C + D = ABC + D\end{aligned}$$

Zum Schluss nun die für uns völlig neuen Idempotenzgesetze

$$A + A = A \qquad \text{und} \qquad AA = A$$

die in Formeln etwa ausdrücken, dass es in der Algebra der Mengen weder eine Potenzierung noch Koeffizienten gibt. Tatsächlich ist hier

$$\underbrace{A + A + ... + A}_{n-\text{mal}} = A \qquad \text{und} \qquad \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n-\text{mal}} = A$$

wie auch A und n beschaffen sei. Deshalb gilt z.B.

$$\begin{aligned}(A+B)(B+C)(C+A) &= ABC + AAB + ACC + AAC + BBC + ABB + BCC + ABC \\ &= (ABC + ABC) + (AB + AB) + (AC + AC) + (BC + BC) \\ &= ABC + AB + AC + BC\end{aligned}$$

(vergleiche mit der weiter unten angeführten Übung 6).

Übungen
Beweise folgende Gleichungen, in denen die Mengen durch große Buchstaben gekennzeichnet sind (wobei das Zeichen $\varnothing$ immer die leere Menge bezeichnet und der Buchstabe I die Eins-Menge):

1. $(A+B)(A+C)(B+D)(C+D) = AD + BC$
2. $A(A+B) = A$
3. $AB + A = A$
4. $A(A+C)(B+C) = AB + AC$
5. $A(A+I)(B+\varnothing) = AB$
6. $(A+B)(B+C)(C+A) = AB + BC + CA$
7. $(A+B)(B+C)(C+D) = AC + BC + BD$
8. $(A+B)(A+I) + (A+B)(B+\varnothing) = A + B$
9. $(A+B)(B+I)(A+\varnothing) = A$
10. $(A+B+C)(B+C+D)(C+D+A) = AB + AD + BD + C$

Beispiel:

$$\begin{aligned}A(A+C)(B+C) &\underset{\text{Assoziativität}}{=} A[(A+C)(B+C)] \underset{\text{2.Distributivgesetz}}{=} A(AB+C) \\ &\underset{\text{Kommutativität}}{=} (AB+C)A \underset{\text{1. Distributivgesetz}}{=} (AB)A + CA \\ &\underset{\text{Kommutativität, Assoziativität}}{=} (AA)B + AC \underset{\text{Idempotenz}}{=} AB + AC\end{aligned}$$

2 Boolesche Algebra

Wir fassen alle uns bis jetzt bekannten Gesetze der Algebra der Mengen zusammen:

$$\begin{aligned} A+B &= B+A \quad , \quad AB = BA && \text{(Kommutativgesetze)} \\ (A+B)+C &= A+(B+C) \quad , \quad (AB)C = A(BC) && \text{(Assoziativgesetze)} \\ (A+B)C &= AC+BC \quad , \quad AB+C = (A+C)(B+C) && \text{(Distributivgesetze)} \\ A+A &= A \quad , \quad AA = A && \text{(Idempotenzgesetze)} \end{aligned}$$

Die Algebra der Mengen besitzt außerdem zwei "ausgezeichnete" Elemente (Mengen) $\varnothing$ und I von der Beschaffenheit,

$$A+\varnothing = A, \qquad AI = A, \qquad A+I = I, \qquad A\varnothing = \varnothing$$

gelten. Diese Gesetze (Regeln der Grundrechenarten) sind den dir vertrauten Gesetzen der Algebra der Zahlen verwandt, sie stimmen aber nicht mit diesen Gesetzen überein. Algebra der Mengen ist verständlicherweise auch "Algebra", aber nicht die Algebra, die du von früher her kennst, sondern eine neue, ungewöhnliche.

Doch auch die übliche Algebra der Zahlen existiert nicht als eine einzige, sondern es gibt viele "Algebren". Man kann von der "Algebra der positiven ganzen Zahlen", von der "Algebra der rationalen (d. h. ganzen und gebrochenen) Zahlen" und von der "Algebra der vorzeichenbehafteten (d.h. positiven und nichtpositiven) Zahlen" sprechen, es existiert sogar eine "Algebra der reellen (d.h. rationalen und irrationalen) Zahlen" und eine "Algebra der komplexen (reellen und imaginären) Zahlen" usw.

Alle diese "Algebren" unterscheiden sich untereinander nur durch die Zahlenbereiche, über denen die Grundrechenarten durchführbar sind, und durch die Definitionen dieser Grundrechenarten (d.h. Addition und Multiplikation). Die Haupteigenschaften der Grundrechenarten bleiben aber in allen Fällen ein und dieselben.

In Verbindung damit drängt sich eine natürliche Frage auf: Wie verhält es sich denn in der eigentümlichen Algebra der Mengen? Kann sie sich nur in einer einzigen Weise darstellen, oder gibt es auch hier eine ganze Reihe ähnlicher "Algebren" , die sich voneinander durch die Elemente, für die die Grundrechenarten erklärt sind, oder durch die Definitionen der Grundrechenarten (wir nennen sie wie vorher Addition und Multiplikation) unterscheiden?
Sind diese "Algebren" in den Eigenschaften der Grundrechenarten gleichartig?

Du ahnst wahrscheinlich schon, dass viele Algebren existieren, die der Algebra der Mengen ähnlich sind (d.h. Algebren, in denen die gleichen Regeln gelten wie in der Algebra der Mengen). Dies ist tatsächlich so.
Zunächst können selbst die Algebren der Mengen sehr verschiedenartig sein. Man kann von der "Algebra der Mengen der Schüler deiner Klasse" sprechen, von der "Algebra der Mengen der Tiere im Leipziger Zoo" (natürlich handelt es sich hier schon um eine ganz andere Algebra), von der "Algebra der Mengen (dieser oder jener) Zahlen", von der "Algebra der Mengen der Punkte eines Quadrates" (siehe Abb. 3-10), von der "Algebra der Mengen der Bücher in der Schulbibliothek" oder von der "Algebra der Mengen der Sterne am Himmel".

Es existieren aber auch ganz andere Beispiele von Algebren mit ähnlichen Eigenschaften, und wir werden sogleich einige von ihnen zeigen. Bevor wir zu diesen Beispielen übergehen, müssen wir noch etwas beachten.

Zu Beginn einer Untersuchung der unten angeführten Beispiele musst du dir fest ein prägen, dass in irgendeiner Menge von Dingen (Elementen) a, b, ... die Operationen Addition und Multiplikation zu definieren heißt, die Regeln zu zeigen, nach denen je zwei Dingen a und b noch zwei Dinge c und d gegenübergestellt werden, die die Summe und das Produkt von a und b genannt werden:

$$c = a + b \qquad , \qquad d = ab$$

Wir werden diese Regeln so wählen, dass alle Gesetze der Grundrechenarten, die charakteristisch für die Algebra der Mengen sind, erfüllt werden. Dabei hast du kein Recht zu fragen: Warum ist denn die Summe von a und b gleich c?

Wir definieren doch die Summe $a + b$ gerade als c, und bekanntlich streitet man nicht über Definitionen. Es kann sein, dass dich in einigen Fällen unsere Definitionen merkwürdig anmuten.
Das ist natürlich, weil diese Definitionen neu für dich sein werden, und alles Neue, Ungewohnte erscheint immer merkwürdig. Im Leben verwundern dich selbst solche erstaunlichen Sachen wie ein Fernsehgerät oder ein Telefon nicht.

Das liegt aber nur daran, dass du an sie gewöhnt bist. Wenn man einem Schüler der 2. oder 3. Klasse, der sicher weiß, dass die Summe zweier Zahlen a und b die Zahl der Dinge bei der Vereinigung einer Gesamtheit von a Dingen und einer Gesamtheit von b Dingen (siehe Abb. 1) ist und das Produkt ab die Zahl der Dinge bei der Vereinigung von a Gesamtheiten zu je b Elementen ist (Abb. 2), erklären soll, was Brüche sind, und ihm sagt, dass die Summe und das Produkt der Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ folgendermaßen definiert werden:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

werden ihm diese Regeln (die dir ganz natürlich vorkommen!) sicher sehr merkwürdig vorkommen.

Nun also unsere Beispiele.

Beispiel 1. Algebra zweier Zahlen.
Wir nehmen an, dass es in unserer Algebra im ganzen nur zwei Elemente gibt, die wir der Bequemlichkeit halber Zahlen nennen und mit den bekannten Symbolen 0 und 1 bezeichnen wollen. Diese Symbole haben hier jedoch eine ganz neue Bedeutung.
Die Multiplikation unserer Zahlen definieren wir wie in der gewöhnlichen Arithmetik, d.h. mit Hilfe folgender "Multiplikationstafel":

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

die Addition hingegen "fast wie die gewöhnliche", d.h. nur mit dem Unterschied zur gewöhnlichen Arithmetik, dass die Summe $1 + 1$ jetzt nicht gleich 2 wird (da es diese Zahl in unserer "Algebra zweier Zahlen" gar nicht gibt), sondern wieder 1.
Auf diese Weise erhält die "Additionstafel" für unsere Algebra folgendes Aussehen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

In der auf diese Weise definierten Algebra gelten offensichtlich die beiden Kommutativgesetze:

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

für jedes a und b. Es ist auch nicht schwer zu überprüfen, dass in ihr auch die Assoziativgesetze

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

für jedes a, b und c erfüllt sind, zumal wir das Assoziativgesetz für die Multiplikation gar nicht zu überprüfen brauchen, da doch unsere neue Multiplikation vollständig mit der Multiplikation der Zahlen übereinstimmt, für die das Assoziativgesetz richtig ist. Es ist leicht zu sehen, dass auch die Idempotenzgesetze hier gelten:

$$a + a = a \quad , \quad aa = a$$

für jedes a, d.h. für $a = 0$ und $a = 1$ (deshalb setzen wir 1 + 1 = 1). Etwas schwieriger ist es, die Distributivgesetze zu überprüfen:

$$(a + b)c = ac + bc \quad , \quad ab + c = (a + c)(b + c)$$

für jedes a, b, c. So gilt zum Beispiel in unserer Algebra:

$$\begin{aligned}
(1 + 1) \cdot 1 &= 1 \cdot 1 = 1 \\
(1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) &= 1 + 1 = 1 \\
(1 \cdot 1) + 1 &= 1 + 1 = 1 \\
(1 + 1) \cdot (1 + 1) &= 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Wenn man schließlich vereinbart, die Rolle des Elementes ∅ unserer Algebra der Zahl 0 und die Rolle des Elementes I der Zahl 1 zuzuordnen, gelten auch die Regeln, die sich auf die "ausgezeichneten" Elemente ∅ und I beziehen (d.h. bei $a = 0$ und bei $a = 1$):

$$a + 0 = a \quad , \quad a \cdot 1 = a \quad , \quad a + 1 = 1 \quad , \quad a \cdot 0 = 0$$

Beispiel 2. Algebra von vier Zahlen.
Hier handelt es sich um ein etwas komplizierteres Beispiel der gleichen Art. Wir nehmen an, dass die Elemente der Algebra vier "Zahlen" sind, die wir durch die Ziffern 0 und 1 und durch die Buchstaben p und q kennzeichnen.
Die Addition und die Multiplikation in der betrachteten Algebra geben wir durch die folgenden Tafeln an:

+	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

·	0	p	q	1
0	0	0	0	0
p	0	p	0	p
q	0	0	q	q
1	0	p	q	1

Auch hier gilt, wovon man sich durch unmittelbares Überprüfen leicht überzeugen kann,

$$\begin{aligned}
a + b &= b + a \quad , \quad ab = ba \quad \text{für jedes } a, b \\
(a + b) + c &= a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc) \quad \text{für jedes } a, b, c \\
(a + b)c &= ac + bc \quad , \quad ab + c = (a + c)(b + c) \quad \text{für jedes } a, b, c \\
a + a &= a \quad , \quad aa = a \quad \text{für jedes } a
\end{aligned}$$

Außerdem spielen die Zählen 0 und 1 hier die Rolle der Elemente $\varnothing$ und I der Algebra der Mengen, denn für jedes a gilt:

$$a + 0 = a \quad , \quad a \cdot 1 = a \quad , \quad a + 1 = 1 \quad , \quad a \cdot 0 = 0$$

Beispiel 3. Algebra der Maxima und Minima.
Wir nehmen als Elemente unserer Algebra irgendeine beschränkte Menge Zahlen. Zum Beispiel vereinbaren wir, dass die Elemente der Algebra irgendwelche (möglicherweise auch alle) Zahlen x sind, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt, d.h. Zahlen, die zwischen 0 und 1 eingeschlossen sind, einschließlich der Zahlen 0 und 1 selbst.

Die Operationen Addition und Multiplikation definieren wir auf völlig neue Weise. Um diese Operationen nicht mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation für Zahlen zu verwechseln, werden wir sie durch die neuen Zeichen $\oplus$ (Addition) und $\otimes$ (Multiplikation) kennzeichnen.
Und zwar vereinbaren wir, dass die Summe $x \oplus y$ zweier Zahlen x und y der größten dieser Zahlen (einer beliebigen von ihnen, wenn $x = y$) gleich ist; als Produkt $x \otimes y$ vereinbaren wir die kleinste dieser Zahlen (eine beliebige von ihnen, wenn $x = y$).

So sehen, wenn die Elemente unserer Algebra die Zahlen 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und 1 sind, die "Additionstafel" und die "Multiplikationstafel" unserer Zahlen folgendermaßen aus:

$\oplus$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
1	1	1	1	1	1

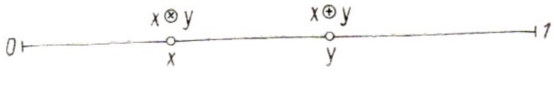
$\oplus$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

In der Mathematik wird die größte von zwei oder mehreren Zahlen u, v, ..., z oft so bezeichnet: $\max[u, v, ..., z]$ (vom lateinischen Wort maximum - das Größte), die kleinste dieser Zahlen kennzeichnet man durch das Symbol $\min[u, v, ..., z]$ (vom lateinischen Wort minimum - das Kleinste).[7] So gilt in unserer "Algebra der Maxima und Minima" nach Definition:

$$x \oplus y = \max[x, y] \qquad \text{und} \qquad x \otimes y = \min[x, y]$$

Man kann auch vereinbaren, die Zahlen als Punkte der Zahlengeraden aufzufassen. Dabei werden die Zahlen x, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt, als Punkte eines horizontalen Abschnittes der Länge 1 dargestellt. Die Summe $x \oplus y$ zweier Zahlen x und y stellt der weiter rechts gelegene der beiden Punkte x, y, ihr Produkt $x \otimes y$ der links Punkt dar (Abb. 11).

Abb. 11



Es ist einleuchtend, dass unsere Operationen Addition und Multiplikation den Kommutativgesetzen genügen:

$$x \oplus y = y \oplus x \qquad \text{und} \qquad x \otimes y = y \otimes x$$

[7] $\max[u, v, ..., z]$ und $\min[u, v, ..., z]$ kann man entsprechend als "Maximum von $u, v, ..., z$" bzw. "Minimum von $u, v, ..., z$" lesen.

Erfüllt sind offensichtlich auch die Assoziativgesetze:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \qquad \text{und} \qquad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

so dass die Zahl $(x \oplus y) \oplus z$ oder $x \oplus (y \oplus z)$ (man kann sie auch einfach $x \oplus y \oplus z$ ohne Klammern schreiben) gleich $\max[x, y, z]$ und die Zahl $(x \otimes y) \otimes z$ oder $x \otimes (y \otimes z)$ (oder einfach $x \otimes y \otimes z$ ohne Klammern) gleich $\min[x, y, z]$ ist (siehe Abb. 12).

Abb. 12 

Es ist ebenso klar, dass auch hier die Idempotenzgesetze gelten:

$$x \oplus x = \max[x, x] = x \qquad \text{und} \qquad x \otimes x = \min[x, x] = x$$

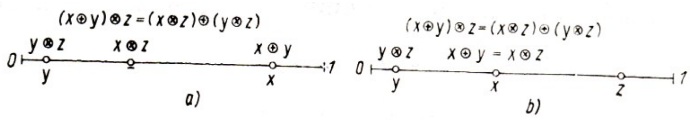
Überprüfen wir schließlich noch die Richtigkeit der Distributivgesetze:

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \qquad \text{und} \qquad (x \otimes y) \oplus z = (x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$$

Es ist klar, dass die Zahl

$$(x \oplus y) \otimes z = \min\{\max[x, y], z\}$$

gleich z ist, wenn mindestens eine der Zahlen x, y größer als z ist, und gleich der größten dieser Zahlen, wenn beide kleiner als z sind (Abb. 13a, b).

Abb. 13a und b 

Aber genau diesem ist auch die Zahl

$$(x \otimes z) \oplus (y \otimes z) = \max\{\min[x, z], \min[y, z]\}$$

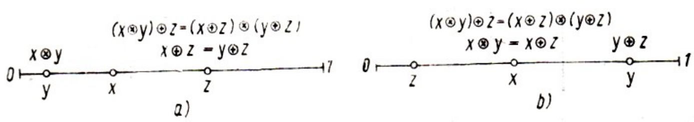
gleich (siehe auch Abb. 13). Analog dazu ist die Zahl

$$(x \otimes y) \oplus z = \max\{\min[x, y], z\}$$

gleich z, wenn nur eine der Zahlen x, y kleiner ist als z, und gleich der kleinsten der Zahlen x, y, wenn beide größer als z sind (Abb. 14a, b). Diesem ist auch die Zahl

$$(x \oplus z) \otimes (y \oplus z) = \min\{\max[x, z], \max[y, z]\}$$

gleich (siehe auch Abb. 14).

Abb. 14a und b 

Um uns von dem Erfülltsein aller Gesetze der Algebra der Mengen in unserer eigenartigen Algebra zu überzeugen, brauchen wir jetzt nur noch zu bemerken, dass die Rolle der Elemente $\varnothing$ und I der Algebra der Mengen hier die kleinste aller betrachteten Zahlen, die Zahl 0, und die größte aller Zahlen, die Zahl 1, spielen. Tatsächlich gilt für jede Zahl x, die die Bedingung $0 \leq x \leq 1$ erfüllt,

$$x \oplus 0 = \max[x, 0] = x \quad , \quad x \otimes 1 = \min[x, 1] = x$$
$$x \oplus 1 = \max[x, 1] = 1 \quad , \quad x \otimes 0 = \min[x, 0] = 0$$

Beispiel 4. Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teller.

Es möge N irgendeine ganze positive Zahl sein. Als Elemente unserer neuen Algebra nehmen wir alle möglichen Teiler der Zahl N. So sind zum Beispiel, wenn $N = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist, die Elemente der betrachteten Algebra die Zahlen

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 \text{ und } 210$$

Addition und Multiplikation unserer Zahlen werden wir auf ganz neue Art definieren. Unter der Summe $m \oplus n$ werden wir deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache (k.g.V.) - die kleinste ganze (positive) Zahl, die durch beide Zahlen m und n teilbar ist - verstehen; als Produkt $m \otimes n$ der Zahlen m und n wählen wir den größten gemeinschaftlichen Teiler dieser Zahlen (g.g.T.) - die größte ganze Zahl, durch die sowohl m als auch n geteilt werden kann.

So wird, wenn $N = 6$ ist und unsere Algebra aus den vier Zahlen 1, 2, 3 und 6 besteht, die Addition und die Multiplikation der Zahlen durch folgende Tafeln wiedergegeben:

$\oplus$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$\otimes$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

In der "höheren Arithmetik" (der Zahlentheorie) wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen $m, n, ..., s$ oft durch $[m, n, ..., s]$ und der größte gemeinschaftliche Teiler derselben Zahlen durch $(m, n, ..., s)$ bezeichnet. So gelten in unserer Algebra nach Definition

$$m \oplus n = [m, n] \quad \text{und} \quad m \otimes n = (m, n)$$

Wenn zum Beispiel die Algebra die Zahlen 10 und 15 enthält, dann gelten

$$10 \oplus 15 = [10, 15] = 30 \quad \text{und} \quad 10 \otimes 15 = (10, 15) = 5$$

Es ist offensichtlich, dass in unserer Algebra immer

$$m \oplus n = n \oplus m \quad \text{und} \quad m \otimes n = n \otimes m$$

gelten. Weiter gelten hier:

$$(m \oplus n) \oplus p = m \oplus (n \oplus p) \quad (= [m, n, p])$$

(man kann vereinbaren, diese Zahl einfach $m \oplus n \oplus p$ ohne Klammern zu schreiben) und

$$(m \otimes n) \otimes p = m \otimes (n \otimes p) \quad (= (m, n, p))$$

(diese Zahl kann man einfach $m \otimes n \otimes p$ schreiben). Ebenso klar sind auch die Idempotenzgesetze:

$$m \oplus m = [m, m] = m \quad , \quad m \otimes m = (m, m) = m$$

Etwas komplizierter (wie immer) lassen sich die Distributivgesetze überprüfen. Die Zahl

$$(m \oplus n) \otimes pP = ([m, n], p)$$

ist nichts anderes als der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahl p und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen m und n (wenn man sich in diesen Ausdruck nur richtig hineindenkt); sie besteht aus den und nur den Primfaktoren, die in p und gleichzeitig in wenigstens einer der Zahlen m oder n enthalten sind. Es ist aber klar, dass diese (und nur diese) Primfaktoren auch in der Zahl

$$(m \otimes 10) \oplus (n \otimes p) = [(m, p), (n, p)]$$

enthalten sind. Deshalb gilt immer

$$(m \oplus n) \otimes p = (m \otimes p) \oplus (n \otimes p)$$

Nehmen wir zum Beispiel unseren Zahlenvorrat aus der Menge der Teiler von 210, so haben wir:

$$(10 \oplus 14) \otimes 105 = ([10, 14], 105) = (70, 105) = 35 \qquad \text{und}$$

$$(10 \otimes 105) \oplus (14 \otimes 105) = [(10, 105), (14, 105)] = [5, 7] = 35$$

Analog dazu enthält die Zahl

$$(m \otimes n) \oplus p = [(m, n), p]$$

- das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahl p und des größten gemeinschaftlichen Teilers der Zahlen m und n - die und nur die Primfaktoren, die entweder in p oder in beiden Zahlen m und n (oder aber sowohl in p, als auch in den beiden Zahlen m und n) enthalten sind. Aber genau diese Faktoren enthält auch die Zahl

$$(m \oplus p) \otimes (n \oplus p) = ([m, p], [n, p])$$

Deshalb gilt immer

$$(m \otimes n) \oplus p = (m \oplus p) \otimes (n \oplus p)$$

So ist zum Beispiel

$$(10 \otimes 14) \oplus 105 = [(10, 14), 105] = [2, 105] = 210 \qquad \text{und}$$

$$(10 \oplus 105) \otimes (14 \oplus 105) = ([10, 105], [14, 105]) = (210, 210) = 210$$

Schließlich spielen die Rolle der Elemente $\varnothing$ und I der Algebra der Mengen hier die kleinste aus der betrachteten Zahlenmenge, die Zahl 1, und die größte, die Zahl N. In der Tat ist offensichtlich (wenn man nicht vergisst, dass in unsere Algebra, nur die Teiler der Zahl N eingehen), dass

$$\begin{aligned} m \oplus 1 = [m, 1] = m \qquad &, \qquad m \otimes N = (m, N) = m \\ m \oplus N = [m, N] = Nm \qquad &, \qquad m \otimes 1 = (m, 1) = 1 \end{aligned}$$

gilt. So werden auch hier alle Gesetze der Algebra der Mengen erfüllt.

Wir sehen, dass recht viele verschiedenartige Systeme von "Dingen" (Elementen der betrachteten Algebra) existieren, für die man die Grundrechenarten Addition und Multiplikation definieren kann. Sie erfüllen alle uns bekannten Regeln der Algebra der Mengen:

die zwei Kommutativgesetze, die zwei Assoziativgesetze, die zwei Distributivgesetze, die zwei Idempotenzgesetze und die vier Regeln, die die Eigenschaften der "ausgezeichneten" Elemente definieren, welche in unserer Algebra die Rollen spielen, die den Rollen der Null und der Eins nahekommen.
Weiter unten begegnen wir noch zwei besonders wichtigen Beispielen solcher Algebren.

Wenn wir jetzt zur Untersuchung der gemeinsamen Eigenschaften aller solcher Algebren übergeben, müssen wir ihnen vor allem irgendeinen gemeinsamen Namen geben. Da Algebren mit so merkwürdigen Eigenschaften zum ersten Mal der bedeutende englische Mathematiker des 19. Jahrhunderts George Boole[8] betrachtet hat, ist man übereingekommen, solche Algebren heute Boolesche Algebren zu nennen. [9] [10]

Für die Grundoperationen einer Booleschen Algebra behalten wir nach dem Vorhergegangenen die Bezeichnungen "Addition" und "Multiplikation" bei (man muss aber daran denken, dass es sich hier durchaus nicht um eine gewöhnliche Addition und Multiplikation von Zahlen handelt); jedoch werden wir hin und wieder diese Operationen auch Boolesche Addition und Boolesche Multiplikation nennen.

Die Schrift G. Booles, in der er jene ungewöhnliche Algebra, der dieses Buch gewidmet ist, gründlich untersuchte, erschien zum ersten Mal im Jahre 1854, d.h. vor mehr als hundert Jahren. Der Titel dieser Schrift lautete : "Untersuchung der Gesetze des Denkens" ("Investigation of the laws of thought").

Obwohl dir dieser Titel merkwürdig vorkommen wird, wirst du jedoch beim Lesen des vorliegenden Buches verstehen, welche Beziehungen zwischen den hier betrachteten erstaunlichen Algebren und den Gesetzen unseres Denkvermögens bestehen. Wir bemerken nur, dass gerade die Verbindung der Booleschen Algebren mit den "Gesetzen des Denkens" erklärt, warum die Schrift Booles, die ursprünglich von den Mathematikern wenig beachtet wurde, heute ein solch großes Interesse hervorruft.

In den letzten Jahren wurde diese Schrift vielmals herausgegeben und in verschiedene Sprachen übersetzt, und der Begriff der Booleschen Algebra ist in der einen oder anderen Form in vielen Ländern bereits in den Mathematikunterricht der Schule aufgenommen werden, in den übrigen Ländern, darunter auch in der Sowjetunion, wird die Aufnahme dieses Begriffes in den Lehrplan der Mittelschulen gegenwärtig lebhaft erörtert und findet eifrige Anhänger unter Mathematikern und Pädagogen.

[8] Der Vater der bekannten englischen Schriftstellerin Ethel Lilian Boole (bekannter unter dem Familiennamen Voynich - ihr Mann war der polnische Revolutionär M. Voynich), Autorin des Romans "Die Bremse".

[9] Die genaue Definition der Booleschen Algebren wird im Anhang von uns angeführt.

[10] Inzwischen sind solche Algebren sehr intensiv und in vielen Varianten untersucht worden. Um diese Varianten besser unterscheiden zu können, hat man ihnen besondere Namen gegeben, die sich auch international durchzusetzen scheinen. Von einer "Booleschen Algebra" in solchem engeren Sinn wird neben den oben genannten Eigenschaften noch eine weitere gefordert: Zu jedem ihrer Elemente muss es ein (und nur ein) "Komplement" geben, d.h. ein weiteres Element, das mit dem ursprünglichen das "Produkt" $\varnothing$ und die "Summe" I besitzt.

Solche Boolesche Algebren ähneln sehr den "Algebren von Mengen"; falls eine Boolesche Algebra nur endlich viele Elemente besitzt, lässt sie sich sogar stets auf eine "Algebra von Mengen" zurückführen. Eine "Algebra der Maxima und Minima" mit mehr als 2 Elementen ist hingegen keine solche Boolesche Algebra im engeren Sinne.

Übungen

1. Überprüfe unmittelbar, dass für drei beliebige Elemente der "Booleschen Algebra mit zwei Zahlen" (Beispiel 1) beide Distributivgesetze gelten.

2. Überprüfe beide Distributivgesetze für je drei Elemente der "Booleschen Algebra mit vier Zahlen" (Beispiel 2).

3. a) Wenn in deiner Wohnung außer dir keine Schüler sind, dann sind alle "Mengen von Schülern in deiner Wohnung" die folgenden: die Menge I von einem Schüler und die Menge $\varnothing$, die überhaupt keinen Schüler enthält (leere Menge).
Stelle für die "Algebra der Mengen von Schülern, die in deiner Wohnung leben" (diese Algebra besitzt im ganzen zwei Elemente: $\varnothing$ und I), eine "Additionstafel" und eine "Multiplikationstafel" auf und vergleiche sie mit den schon genannten Tafeln. Leite daraus ab, dass für die im Beispiel 1 dieses Abschnitts betrachtete "Algebra zweier Zahlen" tatsächlich alle Gesetze der Booleschen Algebra erfüllt werden.

b) Es mögen in einer Wohnung zwei Schüler leben - Klaus und Helga.
Dann enthält die "Algebra der Mengen von in dieser Wohnung lebenden Schülern" vier Elemente: die Menge I von zwei Schülern, zwei Mengen K (Klaus) und H (Helga), von denen jede aus einem Schüler besteht, und die leere Menge $\varnothing$. Stelle für diese Algebra der Mengen eine "Additionstafel" und eine "Multiplikationstafel" auf und vergleiche sie mit den Tafeln auf Seite 27. Schließe daraus, dass für die im Beispiel 2 dieses Abschnitts betrachtete "Algebra von vier Zahlen" alle Gesetze der Booleschen Algebra gelten.

4. Überprüfe die Gleichungen:
a)
$$\min\left\{\max\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right],\frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\min\left[\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right],\min\left[\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right]\right\}$$
und
$$\max\left\{\min\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right],\frac{1}{4}\right\} = \min\left\{\max\left[\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right],\max\left[\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right]\right\}$$
b)
$$([12,30],8) = [(12,8),(30,8)] \qquad \text{und} \qquad [(12,30),8] = ([12,8],[30,8])$$

5. a) Stelle eine "Additionstafel" und eine "Multiplikationstafel" für die Boolesche Algebra der drei Zahlen 0, $\frac{1}{2}$ und 1 auf, wobei
$$x \oplus y = \max[x,y] \qquad \text{und} \qquad x \otimes y = \min[x,y]$$
ist. Überprüfe für diese Algebra die Gültigkeit der Gesetze der Booleschen Algebra.

b) Stelle eine "Additionstafel" und eine "Multiplikationstafel" für die Algebra der Teiler der Zahl 12 auf, wobei
$$m \oplus n = [m,n] \qquad \text{und} \qquad m \otimes n = (m,n)$$
ist. Überprüfe für diese Algebra die Gültigkeit von Gesetzen der Booleschen Algebra.

6. Die Zerlegung der (ganzen, positiven) Zahl N in Primfaktoren möge folgendermaßen aussehen:
$$N = p_1^{A_1} p_2^{A_2} ... p_n^{A_n}$$
Dann kann man beliebige zwei Teiler m und n dieser Zahl in der Form
$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$$

schreiben, wobei $0 \leq a_1 \leq A_1$, $0 \leq a_2 \leq A_2$, ..., $0 \leq a_k \leq A_k$ gelten muss, und

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_k^{b_k}$$

schreiben, wobei $0 \leq b_1 \leq A_1$, $0 \leq b_2 \leq A_2$, ..., $0 \leq b_k \leq A_k$ gelten muss (einige der Zahlen a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k können gleich 0 sein).
Wie sieht in diesem Fall die Zerlegung der Zahlen $[m, n]$ (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m und n) und (m, n) (der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen m und n) in Primfaktoren aus?
Verwende diese Zerlegungen dazu, zu beweisen, dass die Menge aller Teiler der Zahl N mit den Operationen

$$m \oplus n = [m, n] \qquad \text{und} \qquad m \otimes n = (m, n)$$

eine Boolesche Algebra bildet.

3 Dualitätsprinzip, Boolesche Gleichungen und Ungleichungen

Wir fahren mit der Untersuchung der ungewöhnlichen Algebra, die wir Boolesche Algebra genannt haben, fort. Vor allem fällt die völlige Entsprechung der Eigenschaften der Booleschen Addition und der Booleschen Multiplikation ins Auge:
Diese Operationen sind einander so ähnlich, dass man in jeder (natürlich richtigen) Formel der Booleschen Algebra die Addition durch die Multiplikation und umgekehrt ersetzen kann, und die Gleichung bleibt richtig.

So ist zum Beispiel in der Booleschen Algebra die Gleichung

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

erfüllt, die oben bewiesen wurde (siehe das Beispiel, das am Ende der Übungen zu Abschnitt 1 untersucht wurde).
Wenn wir in dieser Gleichung die Addition durch die Multiplikation und umgekehrt ersetzen, erhalten wir

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

auch diese Gleichung ist richtig (siehe weiter unten).

Man muss nur in Betracht ziehen, dass wir in irgendeiner Gleichung der Booleschen Algebra, in der die "ausgezeichneten" Elemente $\varnothing$ und I vorkommen, beim Ersetzen der Booleschen Addition durch die Boolesche Multiplikation und umgekehrt das Element $\varnothing$ durch I und I durch $\varnothing$ ersetzen müssen.
So folgt zum Beispiel aus der Richtigkeit der Gleichung

$$(A + B)(A + I) + (A + B)(B + \varnothing) = A + B$$

(siehe Übung 8), dass auch die Gleichung

$$(AB + A\varnothing)(AB + BI) = AB$$

gilt.
Die eben formulierte Eigenschaft der Booleschen Algebra, die es erlaubt, aus jeder Gleichung "gratis" (d.h. ohne Beweis) eine neue zu gewinnen [11], wird Dualitätsprinzip genannt.

[11] Eine "neue" Gleichung, die man aus irgendeiner Formel der Booleschen Algebra durch Ersetzen der Addition durch die Multiplikation und umgekehrt erhält, kann manchmal mit der ursprünglichen übereinstimmen, in diesem Fall bringt uns unser Verfahren keinerlei Nutzen. So geht zum Beispiel die richtige Gleichung (Übung 6)

$$(A + B)(B + C)(C + A) = AB + BC + CA$$

beim Ersetzen der Addition durch die Multiplikation und umgekehrt in die Gleichung

$$AB + BC + CA = (A + B)(B + C)(C + A)$$

über, die mit der Ausgangsgleichung übereinstimmt, und die Gleichung (Übung 7)

$$(A + B)(B + C)(C + D) = AC + BC + BD$$

geht beim Ersetzen der Multiplikation durch die Addition und umgekehrt in die Gleichung

$$AB + BC + CD = (A + C)(B + C)(B + D)$$

Die Gleichungen, die mit Hilfe dieses Prinzips auseinander hervorgehen, nennt man zueinander dual.

Das Dualitätsprinzip folgt daraus, dass die Liste der Grundgesetze der Booleschen Algebra, mit denen es uns nur erlaubt ist zu operieren, um irgendeine Boolesche Formel zu beweisen, vollständig "symmetrisch" ist.
Denn gleichzeitig mit jedem Gesetz gehört auch noch ein weiteres dazu, das dual zum ursprünglichen ist, d.h., aus dem ersten durch Ersetzen der Addition durch die Multiplikation und umgekehrt und des Elementes $\varnothing$ durch 1 und umgekehrt hervorgeht.

So ist dem Kommutativgesetz der Addition das Kommutativgesetz der Multiplikation dual, dem Assoziativgesetz der Addition ist das Assoziativgesetz der Multiplikation dual, dem Idempotenzgesetz der Addition ist das Idempotenzgesetz der Multiplikation dual, dem ersten Distributivgesetz ist das zweite Distributivgesetz dual, und schließlich sind den Gleichungen

$$A + \varnothing = A \qquad \text{und} \qquad A + I = I$$

entsprechend die Gleichungen

$$AI = A \qquad \text{und} \qquad A\varnothing = \varnothing$$

dual.
Deshalb können wir, wenn wir beim Beweis irgendeiner Gleichung diese oder jene Grundgesetze der Booleschen Algebra anwenden, durch das Anwenden der ihnen dualen Gesetze ebenso auch die Gleichung beweisen, die der ursprünglichen dual ist.

Beispiel: Wir beweisen die Gleichung

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

die der Gleichung

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

dual ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} A + AC + BC &\underset{\text{Assoziativität}}{=} A + (AC + BC) \underset{\text{1. Distributivgesetz}}{=} A + (A + B)C \\ &\underset{\text{Kommutativität}}{=} (A + B)C + A \underset{\text{2. Distributivgesetz}}{=} [(A + B) + A](C + A) \\ &\underset{\text{Kommutativität, Assoziativität}}{=} [(A + A) + B](A + C) \underset{\text{Idempotenz}}{=} (A + B)(A + C) \end{aligned}$$

(vergleiche mit dem Beweis der Gleichung $A(A + C)(B + C) = AB + AC$).

Ein anderer Beweis des Dualitätsprinzips hängt mit der Existenz einer speziellen Operation in der Booleschen Algebra zusammen, die jedes Element A dieser Algebra in ein neues Element A überführt und dabei die Addition durch die Multiplikation und umgekehrt ersetzt. Mit anderen Worten:
Diese Operation (wir werden sie Operation "Strich" nennen) ist von der Art, dass

$$\overline{A + B} = \overline{AB} \qquad \text{und} \qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

über, die sich nur unwesentlich von der Ausgangsgleichung unterscheidet (sie geht beim Ersetzen des Buchstaben B durch den Buchstaben C und des Buchstaben C durch den Buchstaben B in die Ausgangsgleichung über) gilt. Weiter ist

$$\overline{\varnothing} = I \qquad \text{und} \qquad \overline{I} = \varnothing$$

Schließlich überführt die Operation "Strich" das Element $\overline{A}$ in das ursprüngliche Element A, d.h., für jedes Element A der Booleschen Algebra gilt

$$\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})} = A$$

Diese eigenartige Operation erlaubt es, ein neues Element der Booleschen Algebra nicht aus zwei bekannten Elementen darzustellen, wie im Falle der Addition und der Multiplikation, sondern aus einem einzigen!

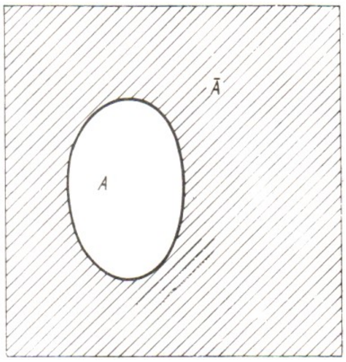


Abb. 15

In der Algebra der Mengen besitzt die Operation "Strich" folgende Bedeutung:
Unter $\overline{A}$ verstehen wir das Komplement der Menge A, d.h. die Menge, die genau aus den Elementen der Universalmenge I besteht, die nicht zur Menge A gehören (Abb. 15).

Wenn zum Beispiel als Universalmenge die Menge aller Schüler deiner Klasse auftritt und A die Menge der Schüler ist, die im ersten Vierteljahr unbefriedigende Zensuren erhalten haben (die Menge der schlecht lernenden Schüler), so ist $\overline{A}$ die Menge der Schüler, die in allen Fächern Zensuren haben, die nicht schlechter als "befriedigend" sind. (die Menge der gut lernenden Schüler).

Aus der Definition des Komplements $\overline{A}$ der Menge A folgt, dass

$$\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})} = A \qquad \text{und dass} \qquad A + \overline{A} = I \qquad \text{sowie} \qquad A\overline{A} = \varnothing$$

gelten (siehe auch Abb. 15). Die letzten beiden Gleichungen können sogar als Definition der Menge $\overline{A}$ genommen werden. Auch gilt

$$\overline{\varnothing} = I \qquad \text{und} \qquad \overline{I} = \varnothing$$

Wir beweisen schließlich noch, dass in der Algebra der Mengen die folgenden wichtigsten Eigenschaften der Operation "Strich" erfüllt sind:

$$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B} \qquad \text{und} \qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Diese Regeln werden nach dem Zeitgenossen und Mitkämpfer Booles, dem englischen Mathematiker Augustus de Morgan (1806-1871), de Morgansche Regeln genannt.

In der Abb. 16a ist die Figur (Menge) A durch Linien mit Neigung nach links schraffiert, ihr Komplement $\overline{A}$ zum vollständigen Quadrat I aber in der Abb. 16b durch Linien mit Neigung nach rechts; die Figur (Menge) B ist in der Abb. 16a durch horizontale Linien schraffiert, ihr Komplement $\overline{B}$ in der Abb. 16b durch vertikale Linien.

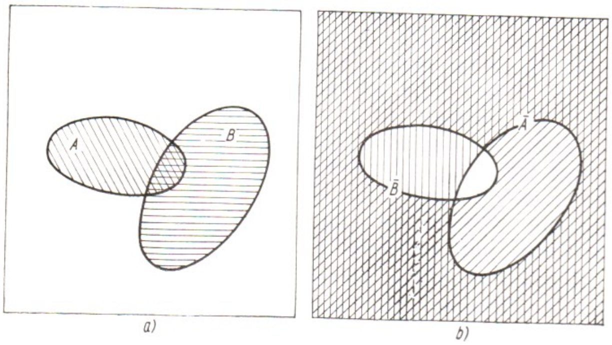


Abb. 16a und b

Dabei ist in der Abb. 16a die Figur $A + B$ schraffiert und in der Abb. 16b die Figur $\overline{A}\overline{B}$ zweifach schraffiert.
Aus dem Vergleich der Abb. 16a und 16b ist ersichtlich, dass die in Abb. 16b zweifach schraffierte Figur zu der in Abb. 16a schraffierten Figur komplementär ist, wodurch auch die erste Regel de Morgans bewiesen wird:

$$\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}$$

Andererseits ist in Abb. 16a die Figur AB durch zweifache Schraffierung bedeckt; die in der Abb. 16b schraffierte Figur ist $\overline{A} + \overline{B}$. Diese zwei Figuren (Mengen) sind offensichtlich auch zueinander komplementär, d.h., es gilt

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Wir deuten jetzt die Operation "Strich" für andere, oben betrachtete Beispiele Boolescher Algebren.
So gilt in der Algebra zweier Zahlen (Beispiel 1)

$$\overline{0} = 1 \qquad , \qquad \overline{1} = 0$$

Dabei ist offensichtlich für ein beliebiges Element a dieser Algebra (d.h. für $a = 0$ und für $a = 1$) $\overline{\overline{a}} = a$. Weiter folgt aus dem Vergleich der "Additionstafel" mit der "Multiplikationstafel", die für die Zahlen $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$ aufgestellt wurden

+	0	1
0	0	1
1	1	1

und

+	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
$\overline{0} = 1$	1	0
$\overline{1} = 0$	0	0

dass in allen Fällen

$$\overline{a+b} = \overline{a}\overline{b}$$

ist. Analog wird auch die zweite Regel de Morgens überprüft:

$$\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

In der Algebra von vier Zahlen (Beispiel 2) ist

$$\overline{0} = 1, \qquad \overline{p} = q, \qquad \overline{q} = p, \qquad \overline{1} = 0$$

Dabei ist wieder offensichtlich, dass $\overline{\overline{a}} = a$ für ein beliebiges Element a unserer Algebra gilt. Zur Überprüfung der Beziehung

$$\overline{a+b} = \overline{a}\overline{b}$$

genügt es, dem vorhergehenden entsprechend, die zwei Tafeln zu vergleichen:

$+$	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

$+$	$\overline{0}=1$	$\overline{p}=q$	$\overline{q}=p$	$\overline{1}=0$
$\overline{0}=1$	1	q	p	0
$\overline{p}=q$	q	q	0	0
$\overline{q}=p$	p	0	p	0
$\overline{1}=0$	0	0	0	0

Analog wird auch die Beziehung

$$\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

überprüft.

Wir wenden uns jetzt der Algebra der Maxima und Minima zu, als deren Elemente solche Zahlen x auftreten, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt, und in der die Boolesche Addition $\oplus$ und die Boolesche Multiplikation $\otimes$ durch

$$x \oplus y = \max[x, y] \qquad \text{und} \qquad x \otimes y = \min[x, y]$$

definiert werden. Damit in dieser Algebra die Regeln de Morgans

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \otimes \overline{y} \qquad \text{und} \qquad \overline{x \otimes y} = \overline{x} \oplus \overline{y}$$

gelten, d.h., damit

$$\overline{\max[x, y]} = \min[\overline{x}, \overline{y}] \qquad \text{und} \qquad \overline{\min[x, y]} = \max[\overline{x}, \overline{y}]$$

erfüllt werden, ist nur erforderlich, dass die Operation "Strich" die Ordnung der Elemente umwandelt, d.h., dass aus der Bedingung $x \geq y$ folgen würde $\overline{x} \geq \overline{y}$ (warum?).

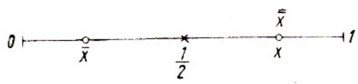


Abb. 17

Deshalb kann man, wenn als Elemente der Algebra alle Zahlen zu mit der Eigenschaft $0 \leq x \leq 1$ dienen, zum Beispiel

$$\overline{x} = 1 - x$$

setzen. Mit anderen Worten, der Punkt $\overline{x}$ kann als der zu dem Punkt x symmetrisch liegende bezüglich der Mitte $\frac{1}{2}$ des Intervalls $[0, 1]$ aufgefasst werden (Abb. 17). In diesem Fall gilt offensichtlich

$$\overline{0} = 1, \qquad \overline{1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \overline{\overline{x}} = x$$

Es versteht sich, dass auch die Regeln de Morgans:

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \otimes \overline{y} \qquad , \qquad \overline{x \otimes y} = \overline{x} \oplus \overline{y}$$

gelten (siehe Abb. 18a, b).[12]

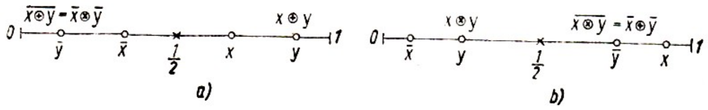


Abb. 18

[12] $\overline{x}$ ist jedoch nicht "Komplement" zu x, denn es gilt im allgemeinen weder

$$x \otimes \overline{x} = 0 \qquad \text{noch} \qquad x \oplus \overline{x} = 1$$

vergleiche auch Übung 7 dieses Abschnitts.

Betrachten wir schließlich die Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler, als deren Elemente alle möglichen Teiler der ganzen positiven Zahl N auftreten. Die Boolesche Addition $\oplus$ und die Boolesche Multiplikation $\otimes$ werden folgendermaßen definiert:

$$m \oplus n = [m, n] \qquad , \qquad m \otimes n = (m, n)$$

wobei $[m, n]$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m und n und (m, n) ihr größter gemeinschaftlicher Teiler ist. Wir setzen hier

$$\overline{m} = \frac{N}{m}$$

Zum Beispiel ist im oben untersuchten Fall $N = 210$:

$$\overline{1} = 210, \overline{2} = 105, \overline{3} = 70, \overline{5} = 42, \overline{6} = 35, \overline{7} = 30, \overline{10} = 21, \overline{14} = 15,$$
$$\overline{15} = 14, \overline{21} = 10, \overline{30} = 7, \overline{35} = 6, \overline{42} = 5, \overline{70} = 3, \overline{105} = 2, \overline{210} = 1$$

Es ist klar, dass dabei

$$\overline{1} = N \qquad \text{und} \qquad \overline{N} = 1$$

gelten. Außerdem ist offensichtlich

$$\overline{\overline{m}} = \frac{N}{N/m} = m$$

Hier gelten auch die Regeln de Morgens:

$$\overline{m \oplus n} = \overline{m} \otimes \overline{n} \qquad , \qquad \overline{m \otimes n} = \overline{m} \oplus \overline{n}$$

So gilt zum Beispiel

$$6 \oplus 21 = [6, 21] = 42 \quad \text{und} \quad \overline{6} \otimes \overline{21} = 35 \otimes 10 = (35, 10) = 5 \quad \text{aber ebenso} \quad \overline{42} = 5$$

es ist

$$6 \otimes 21 = (6, 21) = 3 \quad \text{und} \quad \overline{6} \oplus \overline{21} = 35 \oplus 10 = [35, 10] = 70 \quad \text{und auch} \quad \overline{3} = 70$$

Wir überlassen es dem Leser, den vollständigen Beweis der Regeln de Morgans selbständig zu erbringen (siehe Übung 6).

Wir mögen jetzt irgendeine beliebige Gleichung haben, die in jeder Booleschen Algebra erfüllt wird, zum Beispiel die uns bekannte Gleichung

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

Wenn wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Operation "Strich" anwenden, erhalten wir

$$\overline{A(A + C)(B + C)} = \overline{AB + AC}$$

Auf Grund der Regeln de Morgans gilt

$$\overline{A(A + C)(B + C)} = \overline{[A(A + C)](B + C)} = \overline{A(A + C)} + \overline{B + C}$$
$$= \overline{A} + \overline{A + C} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{AC} + \overline{BC}$$

und

$$\overline{AB+AC} = \overline{AB}\,\overline{AC} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$$

So gilt schließlich

$$\overline{A} + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$$

Weil aber diese Gleichung für jedes $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ erfüllt wird, bleibt sie richtig, wenn wir die Elemente $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ unserer Booleschen Algebra durch die Buchstaben A , B und C bezeichnen.[13] Dabei erhalten wir aber gerade die Gleichung

$$A + AC + BC = (A+B)(A+C)$$

die zur ursprünglichen Gleichung dual ist. Man sieht, wie aus den Eigenschaften der Operation "Strich" (in erster Linie aus den Regeln de Morgans) das Dualitätsprinzip folgt!

Wenn die Ausgangsgleichung die "ausgezeichneten" Elemente $\varnothing$ oder I enthält, darf man dabei aber nicht vergessen, dass auf Grund der Gleichungen

$$\overline{\varnothing} = 1 \qquad \text{und} \qquad \overline{1} = \varnothing$$

in der umgeformten (dualen) Gleichung I an Stelle von $\varnothing$ und $\varnothing$ an Stelle von I stehen wird. So erhalten wir zum Beispiel, wenn wir die Operation "Strich" auf beide Seiten der Gleichung

$$A(A+I)(B+\varnothing) = AB$$

anwenden (siehe Übung 5)

$$\overline{A(A+I)(B+\varnothing)} = \overline{AB}$$

oder, weil

$$\begin{aligned}\overline{A(A+I)(B+\varnothing)} &= \overline{A(A+I)} + \overline{B+\varnothing} = \overline{A} + \overline{A+I} + \overline{B+\varnothing}\\ &= \overline{A} + \overline{A}\overline{I} + \overline{B}\overline{\varnothing} = \overline{A} + \overline{A}\varnothing + \overline{B}I\end{aligned}$$

und $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ gilt, erhalten wir die Gleichung

$$\overline{A} + \overline{A}\varnothing + \overline{B}I = \overline{A} + \overline{B}$$

Die letzte Gleichung aber (in welcher $\overline{A}$ und $\overline{B}$ willkürlich sind) ist der folgenden gleichwertig:

$$A + A\varnothing + BI = A + B$$

Diese erhält man aus der ursprünglichen Gleichung durch Ersetzen der Summe durch das Produkt und umgekehrt sowie durch Ersetzen von $\varnothing$ durch I und umgekehrt.

Es ist bemerkenswert, dass das Dualitätsprinzip sogar noch einen breiteren Anwendungsbereich als den von uns aufgezeigten besitzt. Wie auf Boolesche Gleichungen kann es auch auf "Boolesche Ungleichungen" angewandt werden.

Um dies zu erklären, müssen wir uns jedoch vorher mit einem anderen Begriff vertraut machen, der in der Theorie der Booleschen Algebra eine sehr große Rolle spielt. In jeder Booleschen

[13] Jedes Element X dieser Algebra lässt sich aus einem geeigneten Element Y dadurch gewinnen, dass man auf Y die Operation "Strich" anwendet: $X = \overline{Y}$. Eine Formel, die richtig ist für jedes Element der Form A, B, C, ..., muss daher auch für alle Elemente dieser Algebra richtig sein.

Algebra existiert außer dem Begriff der Gleichheit der Elemente dieser Algebra (wobei die Gleichung $A = B$ bedeutet, dass A und B ein und dasselbe Element der Booleschen Algebra ist!) noch eine wichtige Beziehung zwischen den Elementen, der etwa die Rolle zukommt, die in der Algebra der Zahlen die Beziehung "größer" (oder "kleiner") spielt. Diese Beziehung wird durch das Symbol $\supset$ (oder $\subset$) bezeichnet, und man schreibt

$$A \supset B \qquad \text{oder} \qquad B \subset A$$

Die letzten zwei Beziehungen haben dieselbe Bedeutung.
Man wird bemerken, dass sie in der Schreibweise den Beziehungen $a > b$ oder $b < a$ ähnlich sind.
In der Algebra der Mengen bezeichnet $A \supset B$, dass die Menge A die Menge B als Teil enthält (Abb. 19).

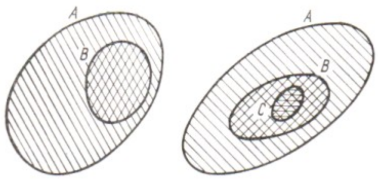


Abb. 19 und 20

Zum Beispiel gilt offensichtlich $A_2 \supset A_6$, wenn A_2 die Menge der geraden Zahlen ist und A_6 die Menge der ganzen Zahlen, die durch 6 teilbar sind.
Genauso verständlich ist, dass, wenn A die Menge der gut lernenden Schüler deiner Klasse und B die Menge der ausgezeichneten Schüler ist, $A \supset B$ ist.
In dem Fall, wenn die Mengen A und B übereinstimmen, werden wir auch $A \supset B$ schreiben. Auch in diesem Fall ist die Menge B vollständig in der Menge A enthalten! So entspricht die Beziehung $\supset$ für die Elemente der Booleschen Algebra eher der Beziehung $\geq$ für Zahlen ("größer oder gleich") als der Beziehung $>$ ("größer").

Es ist klar, dass aus der Gültigkeit von

$$A \supset B \qquad \text{und} \qquad B \supset C$$

auch die Gültigkeit von

$$A \supset C$$

folgt (Abb. 20). Diesem analog folgt für reelle Zahlen aus den Beziehungen $a \geq b$ und $b \geq c$, dass $a \geq c$ gilt. Weiter folgt aus

$$A \supset B \qquad \text{und} B \supset A$$

dass $A = B$ ist, ähnlich wie für Zahlen aus der Beziehung $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt, dass $a = b$ ist. Schließlich (und dies ist für uns besonders wichtig!) erhalten wir aus

$$A \supset B \qquad \overline{A} \subset \overline{B}$$

(Abb. 21). So folgt aus der Tatsache, dass die Menge der gut lernenden Schüler größer als die Menge der ausgezeichneten Schüler ist, die Tatsache, dass die Menge der schlecht lernenden Schüler in der Menge jener Schüler enthalten ist, die nicht ausgezeichnet sind.

Bis jetzt haben wir die Ähnlichkeit der Beziehung $\supset$ für Mengen und der Beziehung $\geq$ für Zahlen betont.

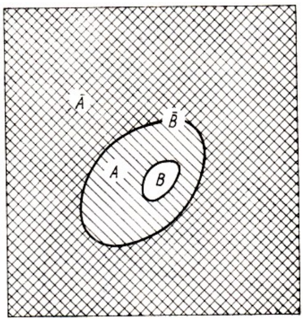


Abb. 21

Wir zeigen jetzt einen wesentlichen Unterschied dieser Beziehungen. Man kann zwei beliebige (reelle) Zahlen a und b miteinander vergleichen, d.h., es gilt unbedingt wenigstens eine der Beziehungen[14]

$$a \geq b \qquad \text{oder} \qquad b \geq a$$

Im Gegensatz dazu wird in der Regel für zwei Mengen A und B keine der Beziehungen

$$A \supset B \qquad \text{oder} \qquad B \supset A$$

(Abb. 22) erfüllt.

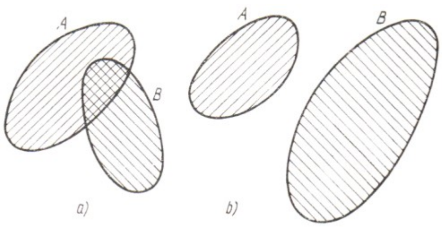


Abb. 22

Wir bemerken noch, dass für jedes Element A der Algebra der Mengen

$$I \supset A \qquad \text{und} \qquad A \supset \varnothing$$

gilt und dass immer (für jedes A und B)

$$A + B \supset A \qquad \text{und} \qquad AB \subset a$$

(Abb. 23) gilt.

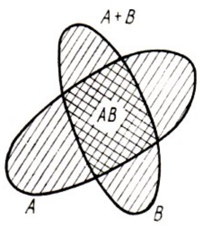


Abb. 23

Wir zeigen die Bedeutung der Beziehung $\supset$ für andere uns bekannte Boolesche Algebren.
Für die "Algebra zweier Zahlen" (Beispiel) wurde diese Beziehung durch die Bedingung $1 \supset 0$ bestimmt, für die "Algebra von vier Zahlen" (Beispiel 2) aber durch die Beziehungen

$$1 \supset 0, \quad 1 \supset p, \quad 1 \supset q, \quad p \supset 0, \quad q \supset 0$$

[14]Wenn beide Beziehungen zugleich gelten, dann sind die Zahlen a und b gleich.

Die Elemente p und q dieser Algebra sind unvergleichbar, d.h., es gilt keine der Beziehungen $p \supset q$ oder $q \supset p$.

Für die "Algebra der Maxima und Minima" (Beispiel 3) stimmt die Beziehung $\supset$ mit der Beziehung $\geq$ überein:
Wir nehmen an, dass die Elemente x und y dieser Algebra durch die Beziehung $x \supset y$ verknüpft sind, wenn die Zahl x nicht kleiner als die Zahl y ist (so ist zum Beispiel hier $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{3}$ und $1 \supset 1$).[15]

Schließlich gibt die Beziehung $m \supset n$ in der Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler" (Beispiel 4) an, dass die Zahl n Teiler der Zahl m ist.
So gilt hier zum Beispiel 42 $\supset$ 6, während die Zahlen 42 und 35 in dieser Algebra unvergleichbar sind (d.h., es gilt keine der Beziehungen 42 $\supset$ 35 oder 42 $\subset$ 35).

Wir überlassen es dem Leser, selbst zu überprüfen, dass die auf solche Weise definierte Beziehung 3 in jeder der aufgezählten Booleschen Algebren alle uns bekannten Eigenschaften der Beziehung $\supset$ aus der Algebra der Mengen besitzt.

Es ist üblich, eine Formel, deren linke und rechte Seite durch die Beziehung $\supset$ (oder $\subset$) verknüpft sind, Boolesche Ungleichung zu nennen. Wir werden aber nur von den Ungleichungen sprechen, die bei jeder Wahl der in dieser Ungleichung eingehenden Elemente A, B, C, ... der Booleschen Algebra richtig sind, wie zum Beispiel bei den oben angegebenen Ungleichungen

$$I \supset A, \quad A \supset \varnothing, \quad A + B \supset A, \quad A \supset AB$$

Das Dualitätsprinzip besagt:
Wenn wir in einer solchen Ungleichung die Addition durch die Multiplikation und umgekehrt, das Element $\varnothing$ (wenn es in unserer Ungleichung vorhanden ist) durch das Element I und umgekehrt ersetzen und das Zeichen der Ungleichheit durch das entgegengesetzte austauschen (d.h. wenn wir das Zeichen $\supset$ durch das Zeichen $\subset$ ersetzen), dann erhalten wir erneut eine richtige Ungleichung (d.h., die sich bei allen Bedeutungen der in sie eingehenden Elemente der Booleschen Algebra erfüllt).

So folgt zum Beispiel aus $(A+B)(A+C)(A+I) \supset ABC$ (siehe Übung 8b), dass immer

$$AB + AC + A\varnothing \subset A + B + C$$

gilt. Zum Beweis genügt es, auf beide Seiten der Ausgangsungleichung die Operation "Strich" anzuwenden. So folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung

$$(A+B)(A+C)(A+I) \supset ABC$$

und aus der Regel "Wenn $A \supset B$, dann ist $\overline{A} \subset \overline{B}$, dass auch die Ungleichung

$$\overline{(A+B)(A+C)(A+I)} \subset \overline{ABC}$$

richtig ist. Durch die Regeln de Morgans aber erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass $\overline{I} = \varnothing$ ist,

$$\begin{aligned}\overline{(A+B)(A+C)(A+I)} &= \overline{(A+B)(A+C)} + \overline{A+I} \\ &= \overline{A+B} + \overline{A+C} + \overline{A}\overline{I} = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}\varnothing\end{aligned}$$

[15] In dieser Booleschen Algebra gilt für zwei beliebige Elemente x und y der Algebra immer wenigstens eine der Beziehungen $x \supset y$ oder $y \supset x$.

Analog gilt

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

Auf solche Weise folgern wir, dass für jedes A, B und C die Ungleichung

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{A}\varnothing \subset \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{A}\varnothing$$

gilt. Da $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ hier willkürlich sind, kann man sie einfach als A, B und C bezeichnen. Auf solchem Wege kommen wir gerade zur Ungleichung

$$AB + AC + A\varnothing \subset A + B + C$$

die gegenüber der ursprünglichen Ungleichung im oben beschriebenen Sinn dual ist.

Übungen
1. Zu den in den Übungen 1-10 auf zu beweisenden Gleichungen bilde man die zugehörigen dualen.

2. Beweise die folgenden Identitäten der Algebra der Mengen:

a) $(A + B)(A + \overline{B}) = A$ b) $AB + (A + B)(\overline{A} + \overline{B} = A + B$
c) $\overline{\overline{AB}C\overline{A}B}\,\overline{A}C = \varnothing$[16] d) $A + \overline{A}B = A + B$.

3. Beweise, wenn in irgendeiner Gleichung der Booleschen Algebra die Operation "Strich" auftritt, ist auch diejenige Gleichung richtig, in welcher jede Boolesche Addition durch die Boolesche Multiplikation und umgekehrt und jedes Element $\varnothing$ (wenn es in unserer Gleichung vorkommt) durch das Element I und umgekehrt ersetzt werden ist, jedoch die Operation "Strich" überall dort bleibt, wo sie in der ersten Gleichung auftrat
(Beispiel: aus der Identität der Übung 20 folgt, dass

$$\overline{\overline{A} + \overline{B} + C} + \overline{\overline{A} + B} + \overline{A} + C = I$$

gilt, wie auch die Elemente A, B und C der Booleschen Algebra gewählt sind).

4. Welche Gleichungen erhält man mit Hilfe des in Übung 3 beschriebenen Dualitätsprinzips aus den Gleichungen der Übungen 2a, b und d?

5. Überprüfe, dass in der "Algebra von vier Zahlen" (Beispiel 2) die zweite Regel de Morgans:

$$\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

erfüllt wird.

6*. a) Es sei $N = p_1 p_2 ... p_k$, wobei alle Primzahlen p_1, p_2, ..., p_k verschieden sind.
Beweise, dass sich in diesem Fall die "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler", deren Elemente die Teiler der Zahl N sind (siehe Beispiel 4), auf die "Algebra der Untermengen der Universalmenge

$$I = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$$

zurückführen lässt. Leite hieraus ab, dass in einer solchen "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler" alle Gesetze der Booleschen Algebra, einschließlich der Regeln de Morgans, erfüllt werden.

b) Es möge $N = p^A$ sein, wobei p eine Primzahl und A eine ganze positive Zahl sei.

Beweise, dass sich in diesem Fall die "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler", deren Elemente die Teiler der Zahl N sind, auf die "Algebra der Maxima und Minima", die über der Menge der Zahlen 0, 1, 2, ..., A definiert wurde, zurückführen lässt.
Leite daraus ab, dass für eine solche "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler" alle Gesetze der Booleschen Algebra, einschließlich der Regeln de Morgans, richtig sind.

c) Es möge $N = p_1^{A_1} p_2^{A_2} ... p_k^{A_k}$ sein und $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$, wobei $0 \leq a_1 \leq A_1$, $0 \leq a_2 \leq A_2$, ..., $0 \leq a_k \leq A_k$ ist (siehe Übung 6).
Wie sieht die Zerlegung der Zahl $\overline{m} = \frac{N}{m}$ in Primfaktoren aus?
Verwende die Formel, die sich im Beweis der Regeln de Morgans für die allgemeine "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler"ergab.

7*. In welchen dir bekannten Booleschen Algebren gelten die Gleichungen

$$A + \overline{A} = I \qquad \text{und} \qquad A\overline{A} = \varnothing$$

und in welcher nicht?

8. Beweise die folgenden Ungleichungen der Algebra der Mengen:
a) $A + B + C \supset (A + B)(A + C)$
b) $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$
c) $(A + B)(B + C)(C + A) \supset ABC$
d) $A + B \supset \overline{A}B + A\overline{B}$

9. Schreibe die Ungleichungen auf, die man aus den Ungleichungen der Übungen 8a-c nach dem Dualitätsprinzip erhält.
Beweise diese Ungleichungen unmittelbar, ohne das Dualitätsprinzip zu verwenden.

10. Beweise, wenn eine Boolesche Ungleichung die Operation "Strich" enthält, ist auch die Ungleichung richtig, die aus der ursprünglichen durch Ersetzen der Booleschen Addition durch die Boolesche Multiplikation und umgekehrt sowie des Elementes $\varnothing$ durch das Element I und umgekehrt hervorgeht, die aber die Operation "Strich" überall dort, wo sie in der Ausgangsungleichung stand, enthält, wobei das Ungleichheitszeichen umgekehrt wird.

Wende dieses Prinzip zur Bildung einer neuen Ungleichung aus der Ungleichung der Übung 8d an,

11. Überprüfe alle Eigenschaften der Beziehung $\supset$ für
a) die "Algebra der Maxima und Minima";
b) die "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler".

12*. Die Mengen A und B mögen so beschaffen sein, dass $A \supset B$ gilt. Vereinfache die Ausdrücke:
a) $A + B$
b) AB
c) $A + \overline{B}$
d) $\overline{A}B$.

4 Mengen und Aussagen; Algebra der Aussagen

Kommen wir wieder auf die für das vorliegende Buch wesentliche Boolesche Algebra zurück. Wir stellen die Frage, wie man die Mengen, welche die Elemente dieser Algebra sind, darstellen kann.

Es ist klar, dass die einfachste Art der Darstellung einer Menge die sogenannte direkte oder Abzählmethode ist, bei der alle Elemente der betrachteten Menge aufgezeigt werden.
So kann man von der "Menge der Schüler: Peter, Klaus, Horst und Monika" sprechen, von der "Menge der Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5" oder von der "Menge der vier Grundrechenarten der Arithmetik: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division".

In der Mathematik ist es üblich beider Angabe aller Elemente irgendeiner Menge, diese in geschweifte Klammern einzuschließen. So kann man schreiben

$$\text{A} = \{\text{Peter, Klaus, Horst, Monika}\};$$
$$\text{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oder}$$
$$\text{C} = \{+, -, \cdot, :\}$$

(in der letzten Schreibweise symbolisieren die Zeichen der Grundrechenarten diese selbst).

Eine solche Methode der Darstellung einer Menge erweist sich jedoch in dem Falle als sehr unbequem, wenn die Elemente der Menge sehr zahlreich sind. Sie ist völlig unbrauchbar für die Darstellung unendlicher Mengen (wir können eben nicht unendlich viele Elemente der Menge aufzählen).
Außerdem ist es so, dass selbst in den Fällen, in denen die direkte Darstellung der Menge möglich und leicht ist, diese gerade den Sinn der betrachteten Menge verdeckt, den Grund, der uns veranlasst hat, gerade diese und keine anderen Elemente in einer Menge zu vereinigen.

Weit verbreiteter ist eine andere, indirekte oder beschreibende Methode der Darstellung von Mengen, bei der wir diejenige Eigenschaft angeben, die alle Elemente der betrachteten Menge charakterisiert.
So kann man von der "Menge der ausgezeichneten Schüler" sprechen (es ist möglich, dass dies gleichfalls die oben direkt dargestellte Menge A ist) oder von der "Menge aller ganzen Zahlen x der Art, dass $0 < x \leq 5$ ist" (dies ist die Menge B) oder von der "Menge aller Tiere im Leipziger Zoo".
Dabei ist die beschreibende Methode der Darstellung einer Menge auch zur Kennzeichnung unendlicher Mengen von der Art der "Menge aller ganzen Zahlen" oder der "Menge aller Dreiecke mit dem Flächeninhalt 1" geeignet; mehr noch, wie wir schon oben bemerkten, kann man unendliche Mengen nur durch die beschreibende Methode darstellen.

Die indirekte (beschreibende) Methode der Darstellung von Mengen verbindet die Mengen mit den Aussagen, die in der mathematischen Logik untersucht werden.
Diese Methode der Darstellung von Mengen besteht darin, dass wir eine gewisse Menge von Dingen (Objekten) fixieren, die uns ausschließlich interessieren (zum Beispiel die Menge der Schüler deiner Klasse oder die Menge der ganzen Zahlen), und danach gewisse Aussagen formulieren, welchen alle Elemente aus irgendeiner betrachteten Menge und nur sie genügen.

Wenn uns nur die Menge der Schüler deiner Klasse interessiert, dann können es solche Aussagen sein: "er ist ein ausgezeichneter Schüler", "er kann Schach spielen", "er sitzt in der ersten Reihe", "er heißt Manfred" usw.

Die Menge A aller solchen Elemente der betrachteten Universalmenge I (die Menge der Schüler, die Menge der Zahlen usw.), die die Eigenschaft besitzen, die den Inhalt einer gegebenen Aussage a bildet, nennt man die Wahrheitsmenge der gegebenen Aussage (siehe zum Beispiel Abb. 24).[17]

Auf solche Weise stellen wir eine "zweiseitige Beziehung" zwischen Mengen und Aussagen her: jede Menge wird durch eine gewisse Aussage beschrieben (diese Aussage kann einfach in der Aufzählung der Elemente der Menge bestehen: "es ist Peter oder Klaus oder Horst oder Monika") und jeder Aussage entspricht eine bestimmte Wahrheitsmenge. Zu diesem Zweck kann man zu einer beliebigen Menge von Aussagen - auch zu Aussagen, die die verschiedenartigsten Dinge betreffen, - immer eine ihnen allen entsprechende Universalmenge I angeben, die alle Dinge enthält, von denen in den betrachteten Aussagen die Rede ist.

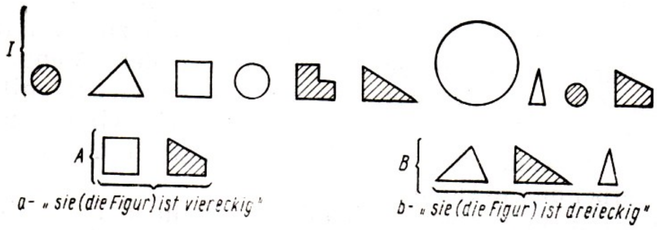


Abb. 24

Jedoch - und diese Bedingung ist sehr wichtig - werden wir unter einer Aussage nur eine solche Behauptung verstehen, von der man beurteilen kann, ob sie wahr (in Anwendung auf ein bestimmtes Element der Universalmenge) oder falsch ist.
Auf solche Weise stellen die Sätze "er besitzt zwei Köpfe und sechzehn Arme" oder "2 x 3 = 6" Aussagen dar (die zweite hängt außerdem im allgemeinen nicht von der Wahl der Universalmenge I ab), während die Losung "Es lebe der Erste Mai!" oder die Interjektion "Ach!" selbstverständlich keine Aussagen darstellen.

Insofern Aussagen uns nur unter dem Gesichtspunkt der durch sie beschriebenen Mengen interessieren, werden wir zwei Aussagen a und b, denen ein und dieselbe Wahrheitsmenge entspricht, nicht unterscheiden, sondern als die gleichen ansehen.
Wenn sich die Aussagen a und b (zum Beispiel "er ist ein ausgezeichneter Schüler" und "er hat nur sehr gute Zensuren" oder "die Zahl 3 ist ungerade" und "die Zahl 3 ergibt bei der Division durch 2 den Rest 1" gleichwertig darstellen, werden wir schreiben

$$a = b$$

Dabei werden als gleichwertig alle identisch wahren (oder inhaltlosen) Aussagen angesehen, d h. Aussagen, die immer wahr sind, unabhängig davon, welches Element der Menge I wir betrachten:
So sind die Aussagen "2 x 3 = 6", "er (der Schüler deiner Klasse) ist ein Junge oder ein Mädchen", "seine (des Schülers) Größe übersteigt 3 m nicht" usw. identisch wahr. Wir vereinbaren, alle wahren Aussagen mit dem Buchstaben i zu bezeichnen.

Als gleichartig werden wir auch alle identisch unwahren (oder widersprüchlichen) Aussagen betrachten, die niemals gelten, d.h. Aussagen, deren Wahrheitsmenge leer ist. Als Beispiele solcher Aussagen, die wir mit dem Buchstaben o bezeichnen werden, mögen folgende Aussagen dienen: "2 x 2 = 6", "er (der Schüler deiner Klasse) kann fliegen", "seine Größe übersteigt 4

[17] Aussagen werden wir immer mit kleinen Buchstaben kennzeichnen, die ihnen entsprechenden Wahrheitsmengen aber mit den gleichen großen Buchstaben.

m", "sie (die Zahl) ist größer als 3 und kleiner als 2".

Dieser Zusammenhang zwischen Mengen und Aussagen erlaubt es, für Aussagen besondere algebraische Operationen zu definieren, die den oben eingeführten Operationen der Algebra der Mengen verwandt sind.
So bezeichnen wir als die Summe zweier Aussagen a und b diejenige Aussage, deren Wahrheitsmenge mit der Summe der Wahrheitsmenge A der Aussage a und der Wahrheitsmenge B der Aussage b übereinstimmt; wir vereinbaren, diese Aussage mit dem Symbol $a + b$ zu bezeichnen.[18]

Nun ist aber die Summe zweier Mengen die Vereinigung aller in beiden Mengen eingehenden Elemente; deshalb ist die Summe der Aussagen a und b die Aussage "a oder b", wobei das Wort "oder" bedeutet, dass entweder die Aussage a oder die Aussage b richtig ist oder diese beiden Aussagen zusammen gelten.

So ist zum Beispiel, wenn die Aussage a lautet: "der Schüler kann Schach spielen" und in deiner Klasse dieser Aussage die Wahrheitsmenge

$$A = \{\text{Peter, Wolfgang, Klaus, Rainer, Helga, Doris,Martina}\}$$

entspricht, die Aussage b aber "der Schüler kann Dame spielen" lautet und die Wahrheitsmenge

$$B = \{\text{Peter, Klaus, Werner, Lothar, Helga, Karin}\}$$

besitzt, $a + b$ die Aussage "der Schüler kann Schach spielen oder der Schüler kann Dame spielen" (kürzer "der Schüler kann Schach oder Dame spielen") entspricht und dieser Aussage die Wahrheitsmenge

$$A + B = \{\text{Peter, Wolfgang, Klaus, Rainer, Werner, Lothar, Helga, Doris, Martina, Karin}\}$$

zukommt.
Wenn die Universalmenge die Menge der in Abb. 24 dargestellten Figuren ist und die Aussagen c und d folgende Bedeutungen besitzen: "sie (die Figur) ist kreisförmig" und "sie ist schraffiert", lautet die Aussage $c + d$: "sie (die Figur) ist kreisförmig oder schraffiert" (Abb. 25).

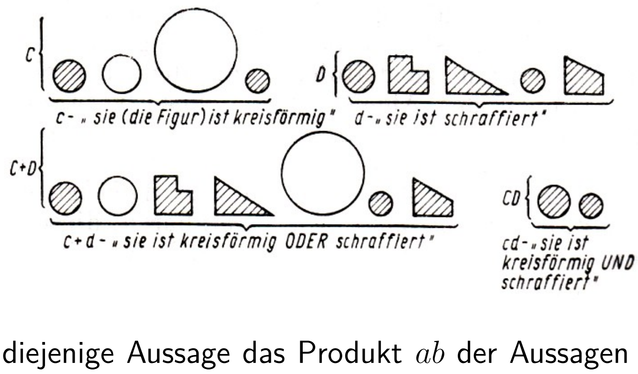


Abb. 25

Diesem analog werden wir diejenige Aussage das Produkt ab der Aussagen a und b mit den zugehörigen Wahrheitsmengen A und B nennen, deren Wahrheitsmenge mit dem Produkt AB der Mengen A und B übereinstimmt.[19]

[18] In der mathematischen Logik wird die Summe zweier Aussagen a und b gewöhnlich Disjunktion dieser Aussagen genannt und durch das Symbol $a \vee b$ bezeichnet (vergleiche mit der Bezeichnung $A \cup B$ für die Summe der Mengen A oder B).

[19] In der mathematischen Logik nennt man das Produkt der Aussagen a und b meist Konjunktion dieser Aussagen und bezeichnet diese durch das Symbol $a \wedge b$ (vergleiche mit der Bezeichnung $A \cap B$ für das Produkt der Mengen A und B).

Das Produkt zweier Mengen A und B ist aber ihr Durchschnitt oder gemeinsamer Teil, der nur die Elemente enthält, die in beide Mengen A und B eingehen. Deshalb ist das Produkt ab der Aussagen a und b die Aussage "a und b", wobei das Wort "und", wie immer, bedeutet, dass beide Aussagen wahr sein sollen: sowohl a als auch b.

Wenn die Aussagen a und b, die die Schüler deiner Klasse betreffen, die gleiche Bedeutung wie oben besitzen, ergibt sich zum Beispiel für die Aussage ab: "der Schüler kann Schach spielen und der Schüler kann Dame spielen" (kürzer "der Schüler kann Schach und Dame spielen") - und dieser Aussage entspricht die Wahrheitsmenge

$$AB = \{\text{Peter, Klaus, Helga}\}$$

Wenn die zu der in Abb. 24 dargestellten Menge der Figuren gehörenden Aussagen c und d die folgende Bedeutung besitzen "sie (die Figur) ist kreisförmig" und "sie ist schraffiert", dann bedeutet die Aussage cd, "sie (die Figur) ist kreisförmig und schraffiert" (Abb. 25).

Der Zusammenhang zwischen Mengen und Aussagen erlaubt es, alle Regeln der Algebra der Mengen auf die Algebra der Aussagen zu übertragen:

$$\begin{aligned}
a+b &= b+a \quad , \quad ab = ba && \text{(Kommutativgesetze)}\\
(a+b)+c &= a+(b+c) \quad , \quad (ab)c = a(bc) && \text{(Assoziativgesetze)}\\
(a+b)c &= ac+bc \quad , \quad ab+c = (a+c)(b+c) && \text{(Distributivgesetze)}\\
a+a &= a \quad , \quad aa = a && \text{(Idempotenzgesetze)}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt, wenn i eine identisch wahre Aussage und o eine identisch unwahre Aussage ist, immer (d.h. bei jeder Aussage a)

$$a+o=a, \quad ai=a, \quad a+i=i, \quad ao=o$$

So ist zum Beispiel die Aussage "er ist ein ausgezeichneter Schüler oder er besitzt zwei Köpfe" gleichbedeutend mit der Aussage "er ist ein ausgezeichneter Schüler", und die Aussage "er kann schwimmen und er ist jünger als 200 Jahre" ist mit der Aussage "er kann schwimmen" gleichbedeutend.[20]

Um zu verstehen, auf welche Weise sich die Regeln der Algebra der Aussagen von den Regeln der Algebra der Mengen ableiten lassen, betrachten wir als Beispiel das zweite Distributivgesetz. Weil die Wahrheitsmenge der Summe zweier Aussagen die Summe der Wahrheitsmengen dieser Aussagen darstellt, die Wahrheitsmenge des Produkts der Aussagen aber das Produkt ihrer Wahrheitsmengen, ist $AB+C$ die Wahrheitsmenge der zusammengesetzten Aussage $ab+c$, d.h. der Aussage "es gilt 'a und b' oder c", wobei A, B und C entsprechend die Wahrheitsmengen

[20] Die oben aufgezählten Regeln schreiben wir noch in der Form nieder, in der sie in den Büchern über mathematische Logik eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
a \vee b = b \vee a \quad &, \quad a \wedge b = b \wedge a\\
(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad &, \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)\\
(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \quad &, \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)\\
a \vee = a \quad &, \quad a \wedge a = a\\
a \vee o = a \quad &, \quad a \wedge i = a\\
a \vee i = i \quad &, \quad a \wedge o = o
\end{aligned}$$

der Aussagen a, b und c sind.

Analog dazu ist die Wahrheitsmenge der (zusammengesetzten) Aussage $(a + c)(b + c)$ die Menge $(A + C)(B + C)$. Auf Grund des zweiten Distributivgesetzes der Algebra der Mengen gilt aber

$$AB + C = (A + C)(B + C)$$

Somit stimmen die Wahrheitsmengen der Aussagen $ab + c$ und $(a + c)(b + c)$ überein, was gerade bedeutet, dass die Aussagen $ab + c$ und $(a + c)(b + c)$ gleichartig sind!

(Wir zeigten schon, dass die Aussagen "er kann Schach und Dame spielen oder kann schwimmen" und "er kann Schach spielen oder schwimmen und kann auch Dame spielen oder schwimmen" genau die gleiche Bedeutung haben, d.h., dass

$$ab + c = (a + c)(b + c)$$

gilt, wobei die Aussagen a, b und c die folgende Bedeutung besitzen: "er kann Schach spielen", "er kann Dame spielen" und "er kann schwimmen".)

Abb. 26

Ebenso wie die Operationen Addition und Multiplikation von Mengen kann man auch die Operation "Strich" auf die Algebra der Aussagen übertragen. Dabei ist unter $\overline{a}$ die Aussage zu verstehen, deren Wahrheitsmenge die Menge $\overline{A}$ ist, wobei A die Wahrheitsmenge der Aussage a ist.

Mit anderen Worten müssen der Bedingung $\overline{a}$ die und nur die Elemente der Universalmenge I genügen, die nicht in die Menge A eingehen, d.h. die, welche der Bedingung a nicht genügen. Wenn zum Beispiel die Aussage a lautet: "er hat ungenügende Zensuren", dann bedeutet die Aussage $\overline{a}$ "er hat keine ungenügenden Zensuren" ("er lernt in allen Fächern gut"); wenn die Universalmenge I aus den in Abb. 24 dargestellten Figuren besteht und die Aussage b lautet: "sie (die Figur) ist dreieckig", dann besitzt die Aussage $\overline{b}$ die Bedeutung "sie ist nicht dreieckig" (Abb. 26).

Im allgemeinen besitzt die Aussage $\overline{a}$ die Bedeutung "nicht a". Deshalb wird die Operation "Strich" der Algebra der Aussagen Bildung der Verneinung oder einfach Verneinung genannt.

Wir zählen jetzt die Regeln der Algebra der Aussagen auf, die mit der Operation der Verneinung verbunden sind:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

$$a + \overline{a} = i \quad , \quad a\overline{a} = o$$

$$\overline{o} = i \quad , \quad \overline{i} = o$$

$$\overline{a + b} = \overline{a}\,\overline{b} \quad , \quad \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

Tatsächlich wird die Verneinung einer identisch unwahren Aussage immer zu einer identisch wahren Aussage (zum Beispiel "2 x 2 ist nicht gleich 5" oder "dieser Schüler besitzt nicht zwei Köpfe"), die Verneinung einer identisch wahren Aussage zu einer identisch unwahren ("dieser Schüler ist nicht jünger als 120 Jahre").

Es ist nicht schwierig, auch alle anderen Gesetze zu überprüfen. Notwendig ist für sie jedoch eine spezielle Überprüfung nicht, weil sie aus den entsprechenden Regeln der Algebra der Mengen folgen.[21]

Übungen

1. Nenne drei Beispiele für identisch wahre Aussagen und zwei Beispiele für identisch unwahre Aussagen.

2. Die Aussage a möge folgende Bedeutung besitzen:

a) "2 x 2 = 4"; b) "er ist ein Junge";
c) "der Elefant ist ein Insekt"; d) "er kann fliegen".

Welche Bedeutung besitzt in diesen Fällen die Aussage a? Ist diese Aussage identisch wahr oder identisch unwahr?

3. Die Aussage a möge die Bedeutung "er kann Schach spielen", die Aussage b hingegen "er kann Dame spielen" haben. Welche Bedeutung besitzen die Aussagen

a) $a + b$, b) ab, c) $\overline{a} + b$, d) $a + \overline{b}$,
e) $\overline{a} + \overline{b}$, f) $\overline{a}b$, g) $a\overline{b}$, h) $\overline{a}\overline{b}$

4. Die Aussage a möge bedeuten "er ist ein ausgezeichneter Schüler", die Aussage b "er hat braunes Haar" und die Aussage c "er kann schwimmen". Welche Bedeutung besitzen die Aussagen

a) $(a + b)c$, $ac + bc$ b) $ab + c$, $(a + c)(b + c)$

5. Die Aussagen a und b mögen die Bedeutungen besitzen "sie (die ganze positive Zahl) ist gerade" und "sie ist eine Primzahl". Welche Bedeutungen besitzen die Aussagen

a) ab, b) $\overline{a} + b$, c) $\overline{a}b$,
d) $a\overline{b}$, e) $\overline{a} + \overline{b}$

Welche sind die Wahrheitsmengen dieser Aussagen?

6. Die Aussagen a und b mögen folgende Bedeutungen besitzen: "er (der Schüler) arbeitet im Mathematikzirkel mit" und "er singt im Chor". Welche Bedeutungen besitzen die Aussagen

a) $\overline{a + b}$, $\overline{a}\overline{b}$ b) $\overline{ab}$, $\overline{a} + \overline{b}$

[21] So ist zum Beispiel, da die Wahrheitsmengen der Aussagen $\overline{a + b}$ und $\overline{a}\overline{b}$ gleich $\overline{A + B}$ und $\overline{A}\overline{B}$ sind, wobei A und B die Wahrheitsmengen der Aussagen a und b sind, und $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$ ist, entsprechend der Definition der Gleichheit (Übereinstimmung) von Aussagen: $\overline{a + b} = \overline{a}\overline{b}$.

5 „Gesetze des Denkens“ und Regeln des Schließens

Wir können jetzt die Frage beantworten, warum G. Boole seine Schrift, in der er die im vorliegenden Buch betrachtete "ungewöhnliche Algebra" aufbaute, "Untersuchung der Gesetze des Denkens" nannte.

Tatsächlich besitzt die Algebra der Aussagen eine sehr unmittelbare Beziehung zu den Regeln, nach denen sich der Mensch beim Denkprozess richtet, da die oben definierte Summe und das Produkt von Aussagen nichts anderes bedeuten als die logischen Verknüpfungen "oder" und "und", die Operation "Strich" besitzt die Bedeutung der Verneinung, und die Gesetze der Algebra der Aussagen beschreiben die Grundeigenschaften dieser logischen Operationen, nach denen sich die Menschen richten.

Natürlich fassen nur sehr wenige Menschen diese Eigenschaften als mathematische Gesetze des Denkens auf, aber schon kleinen Kindern ist ihre Anwendung geläufig. In der Tat ist es doch so, dass niemand daran zweifelt, dass "er läuft schnell und springt hoch" identisch ist mit "er springt hoch und läuft schnell", mit anderen Worten, alle wissen (obwohl dies nicht jedem bewusst ist), dass die Aussagen ab und ba die gleiche Bedeutung besitzen, einander "gleich" sind.

Jetzt können wir auch die Gründe für das in unserer Zeit wiederauflebende Interesse an den Untersuchungen G. Booles, an der mathematischen Deutung der Gesetze der Logik als eigenartige "Regeln einer Algebra" erklären.
Solange der Bereich des Denkens ein absolutes Vorrecht menschlichen Verstandes bildete, konnte man sich nicht um eine formalisierte Beschreibung der "Gesetze des Denkens" kümmern. Es richten sich doch selbst die Menschen immer nach diesen Gesetzen, sogar ohne sich genaue Rechenschaft über deren Inhalt abzulegen.

Die Lage hat sich in den letzten Jahrzehnten stark verändert, und wir streben heute danach, unseren "elektronischen Helfern", den elektronischen Rechenmaschinen, jene Funktionen zu übertragen, die früher nur durch denkende Menschen ausgeführt wurden: die Leitung der Produktion, die Aufstellung von Ablaufplänen, die Lösung mathematischer Aufgaben und die Übersetzung von Büchern aus einer Sprache in eine andere, Wirtschaftsplanung, das Auffinden uns interessierender Angaben in der umfangreichen wissenschaftlichen Literatur. Elektronische Maschinen können jetzt sogar Schach spielen!

Um aber die Maschinen darin zu "unterrichten", ist es für uns natürlich erforderlich, jene "Spielregeln" bzw. "Gesetze des Denkens" exakt zu formulieren, die die durch den Menschen geschaffenen "klugen Maschinen" befolgen müssen.

Wenn der Mensch auch die Regeln der Logik instinktiv befolgt, muss man doch für die Maschine diese Regeln exakt formulieren. Außerdem müssen wir sie in der einzigen "Sprache" formulieren, die eine mathematische Maschine "verstehen" kann, nämlich in der Sprache der Mathematik.[22]

Kehren wir aber zu den "Gesetzen des Denkens" zurück.
Am interessantesten sind davon die Regeln, die mit der logischen Operation der Verneinung verbunden sind. Viele von ihnen besitzen in der Logik eine spezielle Bezeichnung. Zum Beispiel

[22] Wir möchten aber nicht, dass der Leser aus dem Gesagten die Schlussfolgerung zieht, die elementare Algebra der Aussagen, der allein dieses Buch gewidmet ist, stelle schon den Apparat dar, der es erlaubt, komplizierte Rechenmaschinen zu konstruieren oder Aufgaben in der Form zu stellen, in der man ihre Lösung elektronischen Maschinen "überlassen" kann.

drückt die Regel

$$a + \overline{a} = i$$

den sogenannten Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus:
Entweder gilt die Aussage a oder die Aussage $\overline{a}$ - ein Drittes gibt es nicht. Deshalb ist die Aussage $a + \overline{a}$, d.h. "a oder nicht a", immer wahr.
So können wir, ohne etwas von dem "größten Schüler der Klasse 7a der 12. POS Berlins" zu wissen, mit Gewissheit behaupten, dass dieser Schüler "entweder ein ausgezeichneter Schüler ist oder nicht" und dass er "entweder Schach spielen kann oder nicht Schach spielen kann".
Die Regel

$$a\overline{a} = 0$$

trägt die Bezeichnung Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch. Dieser Satz behauptet, dass die Aussagen a und $\overline{a}$, d.h. a und "nicht a", niemals gleichzeitig gelten können, d.h., das Produkt dieser Aussagen ist immer unwahr.
So ist, wenn irgendein Schüler ausgezeichnet ist, die Aussage "er ist kein ausgezeichneter Schüler"für ihn verständlicherweise unrichtig. Wenn eine (ganze) Zahl n gerade ist, ist für sie die Aussage "sie ist ungerade" unrichtig. Die Regel

$$\overline{\overline{a}} = a$$

wird Gesetz der doppelten Verneinung genannt; es behauptet, dass die doppelte Verneinung irgendeiner Behauptung gleichbedeutend mit der Ausgangsbehauptung ist.
So ist (bezogen auf eine ganze Zahl) die Verneinung der Aussage "sie ist gerade" die Aussage "sie ist ungerade". Die Verneinung dieser Aussage "sie ist nicht ungerade" bringt uns zur ursprünglichen Behauptung über die Geradheit der Zahl zurück.
Diesem analog stellt die doppelte Verneinung "er ist kein schlecht lernender Schüler" die Behauptung dar, dass der Schüler gut lernt, die mit der ursprünglichen Aussage "er lernt gut" gleichbedeutend ist.

Keine geringere Bedeutung besitzen auch die Regeln de Morgans

$$\overline{a+b} = \overline{a}\overline{b} \qquad \text{und} \qquad \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

für Aussagen, deren wörtliche Formulierung um einiges komplizierter ist (siehe weiter unten Übung 1). Auch alle anderen Regeln der Algebra der Aussagen, die Distributivgesetze

$$(a+b)c = ab + bc \qquad \text{und} \qquad ab + c = (a+c)(b+c)$$

oder die Idempotenzgesetze

$$a + a = a \qquad \text{und} \qquad aa = a$$

sind formulierte "Gesetze des Denkens" , Regeln der Logik, Richtschnur der Ableitung neuer Schlussfolgerungen aus den schon bekannten.

Einen besonderen Platz nehmen die Regeln ein, die mit der logischen Beziehung $\supset$ verbunden sind. Wir haben diese Beziehung bis jetzt nicht betrachtet; jedoch erlaubt es die oben aufgestellte "zweiseitige Beziehung" zwischen Mengen und Aussagen, die Beziehung $\supset$ der Algebra der Mengen (Beziehung des Umfassens) mühelos auf das Gebiet der Algebra der Aussagen zu übertragen. Wir werden schreiben

$$a \supset b$$

und sagen, dass die Aussage a aus der Aussage b folgt (oder a eine Folge von b ist), wenn die Wahrheitsmenge A der Aussage a die Wahrheitsmenge B der Aussage b enthält, d.h., wenn $A \supset B$ gilt.
So ist zum Beispiel, weil die Menge B der ausgezeichneten Schüler deiner Klasse offensichtlich in der Menge A aller gut lernenden Schüler enthalten ist, die Aussage a: "er (der Schüler deiner Klasse) lernt in allen Fächern gut" eine Folge der Aussage b "er ist ein ausgezeichneter Schüler". In Analogie dazu ist die Menge

$$A_6 = \{6, 12, 18, ...\}$$

der durch 6 teilbaren (ganzen positiven) Zahlen in der Menge

$$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$$

der geraden Zahlen enthalten. Deshalb ist die Aussage "sie (die Zahl) ist gerade" eine Folge der Aussage "sie ist durch 6 teilbar". [23]

Das Feststellen, dass zwei Aussagen a und b durch die Beziehung $a \supset b$ verbunden sind, nennt man auch Schließen[24]; dabei wird die Aussage b Bedingung, die Aussage a aber, die aus dieser Bedingung folgt, Schluss genannt.
Solchem Schließen begegnen wir sehr oft in der Wissenschaft und im Alltagsleben: so haben zum Beispiel die Beweise mathematischer Sätze in der Regel den Charakter eines Schließens.

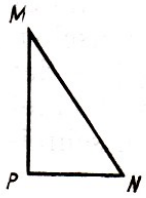


Abb. 27

Man muss nachweisen, dass aus der Bedingung b des Satzes (zum Beispiel "der Winkel P des Dreiecks MNP ist ein rechter Winkel", Abb. 27) der Schluss a folgt ("$MP^2 + NP^2 = MN^2$"; in diesem Fall ist die Beziehung $a \supset b$ mit dem Satz des Pythagoras gleichbedeutend).

Bei solchem Schließen (zum Beispiel beim Beweis von Sätzen) machen wir (manchmal ohne uns darüber Rechenschaft abzulegen) systematisch von den folgenden Grundeigenschaften der Beziehung $\supset$ Gebrauch:[25] $a \supset a$ wenn

$$a \supset b \qquad \text{und} \qquad b \supset a \qquad \text{dann gilt} \qquad a = b$$

wenn

$$a \supset b \qquad \text{und} \qquad b \supset c, \qquad \text{dann gilt} \qquad a \supset b, i \supset a, a \supset o$$

gelten für jedes a;

$$a + b \supset a \qquad \text{und} \qquad a \supset ab$$

gelten für jedes a, b; wenn

$$a \supset b \qquad \text{ist, dann gilt} \qquad \bar{b} \supset \bar{a}$$

[23]Wenn $a \supset b$ gilt, dann sagt man auch, dass die Aussage b eine hinreichende Bedingung für a darstellt (um in allen Fächern erfolgreich zu sein, ist es verständlicherweise hinreichend, dass der Schüler ausgezeichnet ist). Die Aussage a wird eine notwendige Bedingung für b genannt (um ein ausgezeichneter Schüler zu sein, ist es natürlich notwendig, dass man in allen Fächern erfolgreich ist).

[24]Oft wird in der Umgangssprache diese Feststellung selbst schon "Schluss" genannt. Unter der Voraussetzung, dass b wahr ist, bedeutet richtiges "Schließen von b auf a", dass eben der "Schluss" a richtig ist. Im allgemeinen setzt jedoch die Möglichkeit, von einer Aussage auf eine andere zu schließen, nicht voraus, dass die erstere wahr ist!

[25]Man formuliert die Regel: Wenn $a \supset b$ und $b \supset a$ er gilt, dann ist $a = b$, manchmal so: Wenn b eine notwendige und hinreichende Bedingung für a ist, dann sind die Aussagen a und b gleichwertig (aus der hier dargestellten Sicht: gleichartig, gleich).

So wissen wir zum Beispiel, wenn sich in einem Viereck die Diagonalen im Schnittpunkt halbieren (Aussage b), dann ist dieses Viereck ein Parallelogramm (Aussage a).[26]
Andererseits sind beim Parallelogramm die gegenüberliegenden Winkel gleich (Aussage c). Auf solche Weise erhalten wir

$$a \supset b \qquad \text{und} \qquad c \supset a$$

Deshalb ist $c \supset b$.
Mit anderen Worten: Wenn die Diagonalen eines Vierecks sich im Schnittpunkt halbieren, dann sind ihre gegenüberliegenden Winkel gleich.
Wir wollen noch auf die Anwendung der Regel: Wenn

$$a \supset b \qquad \text{dann gilt} \qquad \overline{b} \supset \overline{a}$$

eingehen. Diese Regel liegt dem sogenannten indirekten Beweis zugrunde. Es sei zu beweisen, dass die Beziehung "aus der Aussage b folgt die Aussage a" bzw. $a \supset b$ gilt.

Oft ist es leichter zu beweisen, wenn a nicht gilt, dann kann auch b nicht erfüllt sein, d.h., dass aus der Aussage "nicht a" (der Aussage $\overline{a}$) die Aussage "nicht b" (Aussage $\overline{b}$) folgt. Hier ein Beispiel dafür:

Wir wollen beweisen, wenn die (ganze) Zahl $n > 3$ eine Primzahl ist (Aussage b), dann besitzt n die Darstellung $6k \pm 1$ (wobei k eine ganze Zahl ist), d.h., n gibt bei der Division durch 6 den Rest $+1$ oder -1 (Aussage a). Ohne sich auf die Regel

$$\text{wenn} \qquad a \supset b \qquad \text{gilt, dann folgt} \qquad \overline{b} \supset \overline{a}$$

zu stützen, ist es ziemlich schwierig, dies direkt zu beweisen. Wir versuchen deshalb, den indirekten Beweis anzuwenden.

Wir setzen voraus, dass die Aussage a gilt, d.h., dass die Zahl n (sie ist ganz und größer als 3) nicht die Form $6k \pm 1$ besitzt.

Da jede ganze Zahl n bei der Division durch 6 entweder den Rest 0 (die Zahl n ist durch 6 teilbar), 1, 2, 3, 4 oder 5 (oder, was das gleiche ist, den Rest -1) ergibt, bedeutet die Annahme a, dass die Zahl n bei der Division durch 6 entweder den Rest 0 (d.h. sie ist durch 6 teilbar) oder den Rest 2 oder den Rest 3 oder den Rest 4 ergibt. Eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist aber sicher keine Primzahl.

Wenn eine ganze Zahl $n > 3$ bei der Division durch 6 die Reste 2 oder 4 ergibt, dann ist sie gerade, und das heißt, dass sie keine Primzahl sein kann. Wenn n bei der Division durch 6 den Rest 3 ergibt, dann kann man sie durch 3 teilen und sie kann auch keine Primzahl sein.
Also folgt b aus a (in symbolischer Schreibweise $\overline{b} \supset \overline{a}$). Daraus geht aber hervor, dass $a \supset b$ gilt, was zu beweisen war.[27]

Übungen

1. Formuliere in Worten die de Morganschen Regeln der Algebra der Aussagen:

$$\overline{a+b} = \overline{a}\overline{b} \qquad \text{und} \qquad \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

[26] Im gegebenen Fall haben wir sogar $a \supset b$ und $b \supset a$, d.h. $a = b$.

[27] Genauer ist das folgende Schließen: Aus der bewiesenen Beziehung $\overline{b} \supset \overline{a}$ folgt $\overline{\overline{a}} \supset \overline{\overline{b}}$; weil aber auf Grund des Gesetzes der doppelten Verneinung $\overline{\overline{a}} = a$ und $\overline{\overline{b}} = b$ ist, gilt $a \supset b$.

2. Denke dir ein Beispiel aus, das
a) den Satz vom ausgeschlossenen Dritten,
b) den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch,
c) das Gesetz der doppelten Verneinung
verdeutlicht.

3. Denke dir je ein Beispiel aus zur Beschreibung für jede der aufgezählten Eigenschaften der Beziehung $\supset$ (Beziehung der Folgerung) zwischen Aussagen.

4. Erinnere dich an ein dir bekanntes Beispiel für den indirekten Beweis und schreibe ihn in symbolischer Form auf.

5. Es möge $a \supset b$ sein. Vereinfache die Summe $a + b$ der Aussagen a und b und das Produkt ab dieser Aussagen.

6 Aussagen und Kontaktschaltungen

Zum Abschluss des vorliegenden Buches zeigen wir noch ein Beispiel einer Booleschen Algebra, das dich wahrscheinlich ziemlich überraschen wird.
Als Elemente unserer Algebra werden wir alle möglichen Kontaktschaltungen ansehen, d.h. elektrische Stromkreise, die durch eine Reihe Schalter unterbrochen sind. Die einzelnen Teilabschnitte eines solchen Stromkreises, wie sie in Abb. 28 dargestellt sind, werden wir durch große Buchstaben kennzeichnen.

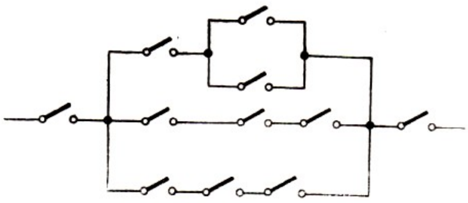


Abb. 28

Sie stellen auch Elemente der betrachteten, eigenartigen Algebra dar.
Da die einzige Funktion eines Abschnittes des elektrischen Stromkreises darin besteht, den elektrischen Strom zu leiten, werden wir zwei Abschnitte, die in dieser Beziehung gleichartig sind, also Abschnitte, die die gleichen Schalter enthalten und gleichzeitig den Strom bei dem gleichen Zustand ("geschlossen", "geöffnet") aller Schalter leiten oder nicht leiten, nicht unterscheiden, sondern als "gleich" ansehen.

Weiter vereinbaren wir, als Summe $A + B$ der Abschnitte A und B des Stromkreises das Resultat ihrer Parallelschaltung und als Produkt AB das Resultat ihrer Reihenschaltung (siehe Abb. 29a, b, in der die Abschnitte A und B des Stromkreises je einen Kontakt enthalten).
Es ist klar, dass die auf solche Weise erklärte Addition und Multiplikation der Abschnitte eines elektrischen Stromkreises kommutativ

$$A + B = B + A \qquad , \qquad AB = BA$$

und assoziativ

$$(A + B) + E = A + (B + E)(= A + B + E) \qquad , \qquad (AB)E = A(BE)(= ABE)$$

sind (siehe Abb. 30a, b, in denen ihre "Dreiersumme" $A + B + E$ und ihr "Dreierprodukt" ABE dargestellt sind).

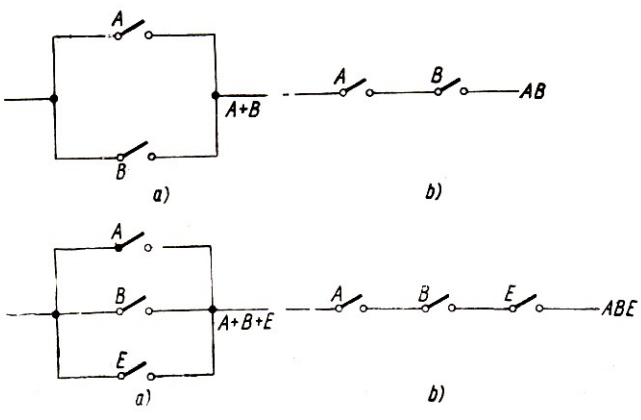


Abb. 29 und 30

Sie genügen auch den Idempotenzgesetzen $A + A = A$, $AA = A$, da die Reihen- oder Parallelschaltung zweier gleichartiger (d.h. gleichzeitig geschlossener oder geöffneter) Kontakte das gleiche Resultat wie ein einziger Kontakt ergibt.

Etwas schwieriger lässt sich in unserer "Algebra der Kontaktschaltungen" die Gültigkeit der zwei Distributivgesetze überprüfen:

$$(A+B)E = AE + BE \qquad \text{und} \qquad AB + E = (A+E)(B+E)$$

Diese Gesetze gelten jedoch auch hier, wie man aus Abb. 31 und Abb. 32 ersehen kann.

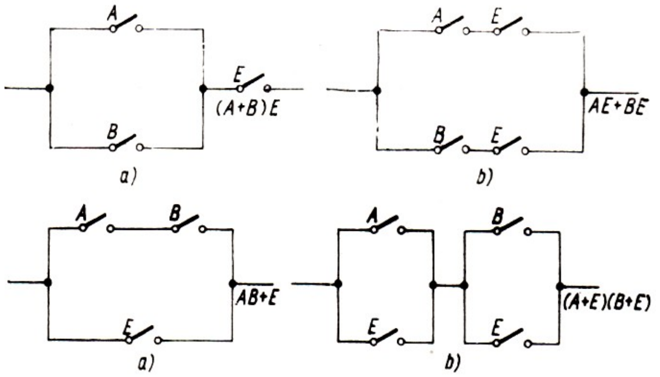


Abb. 31 und 32

Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass die in Abb. 31a dargestellte Schaltung in unserem Sinn "gleich" der Schaltung der Abb. 31b und die Schaltung der Abb. 32a "gleich" der Schaltung der Abb. 32b ist.

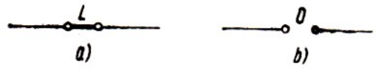


Abb. 33a und b

Wir vereinbaren, mit L einen immer geschlossenen (verlöteten) Kontakt (Abb. 33a) und durch 0 einen ständig geöffneten Kontakt (Unterbrechung des Netzes; Abb. 33b) zu bezeichnen. Dabei gilt offensichtlich

$$A + 0 = A \qquad \text{und} \qquad AL = A$$

(Abb. 34) sowie (Abb. 35)

$$A + L = L \qquad \text{und} \qquad A0 = 0$$

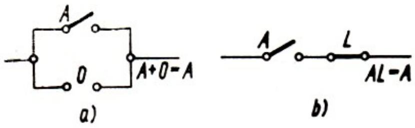


Abb. 34

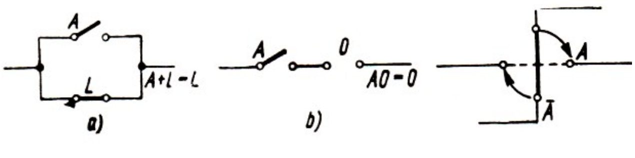


Abb. 35 und 36

Also übernehmen die Kontakte L und 0 die Rolle der "ausgezeichneten" Elemente I und $\varnothing$ unserer Booleschen Algebra. Vereinbaren wir schließlich, durch A und $\overline{A}$ ein solches Kontaktpaar zu bezeichnen, für das der Kontakt $\overline{A}$ unbedingt geöffnet ist, wenn der Kontakt A geschlossen ist.

Es ist sehr leicht, ein solches Kontaktpaar technisch zu verwirklichen (Abb. 36). Offensichtlich gilt

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{L} = 0, \quad \overline{0} = L$$

aber auch $A + \overline{A} = L$, $A\overline{A} = 0$ gelten (Abb. 37a, b).

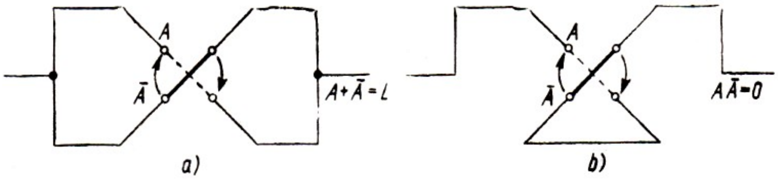


Abb. 37

Komplizierter ist es, die Regeln de Morgans:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \qquad \text{und} \qquad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

zu beweisen, doch sie gelten auch hier (siehe Abb. 38a, b, wo, sagen wir, die Abschnitte des Stromkreises $A+B$ und $\overline{A+B}$ durch die Bedingung bestimmt werden: Wenn der Stromkreis $A+B$ den Strom leitet, dann soll der Stromkreis $\overline{A+B}$ ihn nicht leiten und umgekehrt.)

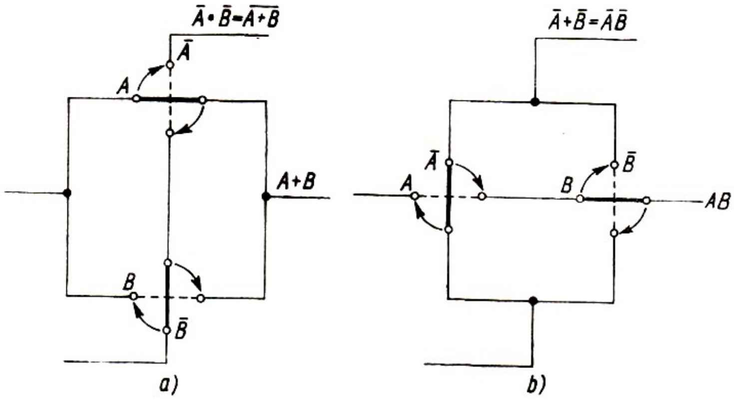


Abb. 38

Die Ähnlichkeit der "Schaltalgebra" mit der "Algebra der Aussagen" ist in zwei Beziehungen sehr wertvoll. Zum ersten erlaubt es diese Ähnlichkeit, komplizierte Aussagen mit Hilfe elektrischer Stromkreise zu modellieren. Betrachten wir zum Beispiel die komplizierte Aussage

$$d=a\bar{b}c+ab\bar{c}$$

wobei a, b und c irgendwelche "einfachen" Aussagen sind und die Addition und die Multiplikation der Aussagen sowie die Operation "Strich", wie üblich, die logischen Verknüpfungen "oder", "und" und Verneinung bedeuten.

Wir ordnen den Aussagen a, b und c die Kontakte A, B und C zu; in einem solchen Fall wird unsere komplizierte Aussage d durch die Schaltung der Abb. 39, die der Kombination

$$D=A\overline{B}C+AB\overline{C}$$

der Kontakte A, B und C entspricht, dargestellt.

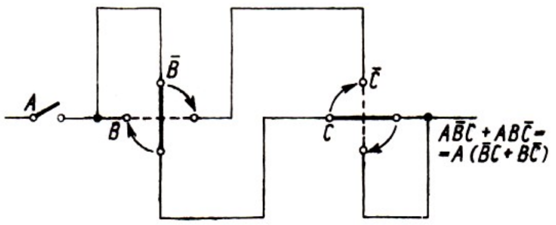


Abb. 39

Um zu überprüfen, ob die Aussage d wahr ist, wenn die Aussagen a und b wahr und die Aussage c unwahr sind, brauchen wir nur die Kontakte A und B der Schaltung D zu schließen und den Kontakt C zu öffnen (Abb. 40).

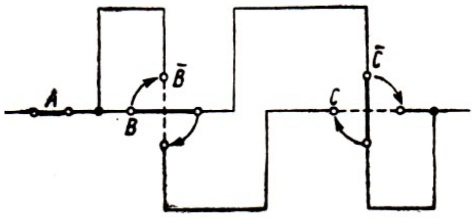


Abb. 40

Wenn dabei die Schaltung D den Strom leitet, bedeutet dies, dass sie der wahren Aussage i entspricht (d.h. der Schaltung L, die den Strom leitet). Mit anderen Worten, in diesem Falle ist die Aussage d wahr. Wenn die gleiche Schaltung D unter unseren Bedingungen den Strom nicht leitet (sie ist "gleich" der Schaltung 0), ist die Aussage d unter unseren Bedingungen mit der Aussage o gleichbedeutend, d.h. unwahr.

Ein zweiter Nutzen der Entsprechung der Schaltalgebra und der Algebra der Aussagen besteht darin, dass es diese Beziehung erlaubt, mit Hilfe der Regeln der Logik Kontaktschaltungen zu konstruieren, die vorgegebenen Bedingungen (die auch ziemlich kompliziert sein können) genügen.
Wir demonstrieren dies an zwei Beispielen.

Beispiel 1.
Es ist erforderlich, einen elektrischen Stromkreis für ein Schlafzimmer mit einer elektrischen Lampe zu entwerfen, die zwei Schalter besitzen soll: Einer soll sich an der Tür und der andere über dem Bett befinden.
Dabei soll die Drehung jedes Schalters unabhängig vom Zustand des anderen Schalters den Stromkreis öffnen, wenn er vorher geschlossen war, und schließen, wenn er vorher geöffnet war.

Lösung:
Wir bezeichnen die zwei den Schaltern entsprechenden Kontakte mit den Buchstaben A und B. In solch einem Fall besteht die Aufgabe im Aufstellen einer solchen (dem elektrischen Stromkreis im Schlafzimmer entsprechenden) Kombination C der Kontakte A und B (möglich sind aber auch $\overline{A}$ und $\overline{B}$), dass die Änderung des Zustandes eines dieser zwei Kontakte auch den Zustand des ganzen Stromkreises C verändert (d.h. den den Strom leitenden Stromkreis in einen geöffneten und umgekehrt verwandelt).

Anders ausgedrückt besteht unsere Aufgabe in der Aufstellung einer solchen Verknüpfung c irgendwelcher Aussagen a und b, dass das Ersetzen der wahren Aussage a durch eine unwahre oder umgekehrt den Charakter ("Wahr", "unwahr") der gesamten Aussage c verändert, mit der Aussage b soll es sich ebenso verhalten.
Unter dieser Bedingung ist die Aussage c wahr, wenn beide Aussagen a und b wahr oder beide unwahr sind, und in den übrigen Fällen unwahr (wenn eine der zwei Aussagen a und b wahr ist, die andere aber unwahr).

Die Verwendung des Wortes "oder" in dieser Beschreibung legt den Gedanken nahe, dass die Aussage c Summe zweier Aussagen ist, von denen eine wahr ist, wenn a und b wahr sind, und die andere, wenn a und b wahr sind (d.h. wenn $\overline{a}$ und $\overline{b}$ unwahr sind). Wenn wir jetzt unsere Aufmerksamkeit dem Wort "und" bei der Beschreibung zweier gesuchter Summen zuwenden, kommen wir zur Schlussfolgerung, dass diese folgendermaßen aussehen:

$$ab \qquad \text{und} \qquad \overline{a}\overline{b}$$

So erhalten wir schließlich

$$c = ab + \overline{a}\overline{b}$$

und es ist nicht schwierig zu sehen, dass diese Aussage c den oben aufgezählten Bedingungen genügt.

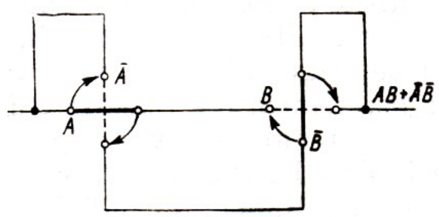


Abb. 41

Wenn wir uns jetzt von den Aussagen zu den Kontaktschaltungen zurückwenden, schließen wir, dass der uns interessierende elektrische Stromkreis C durch die Formel

$$C = AB + \overline{AB}$$

ausgedrückt wird; es ist klar, dass die technische Realisierung einer ähnlichen Schaltung (Abb. 41) keine Schwierigkeiten bereitet.

Beispiel 2.[28]
Es soll ein elektrischer Stromkreis zur Leitung eines Fahrstuhls entworfen werden, wobei wir der Einfachheit halber als Zahl der Etagen zwei nehmen wollen.
Der Stromkreis muss zwei Kontakte enthalten. Deren Betätigung wird durch Druck der Knöpfe erreicht, die sich in der Kabine des Fahrstuhls (Abfahrtknopf) und an der Tür des Fahrstuhls in der ersten Etage (Rufknopf) befinden.

Zusätzliche Kontakte sind verbunden mit den Türen des Fahrstuhls in der ersten und in der zweiten Etage, mit der Innentür der Kabine und mit dem Boden des Fahrstuhls, auf den der Druck der Fahrgäste in der Kabine wirkt. Der elektrische Stromkreis, der die Bewegung des Fahrstuhls nach unten leitet [29], darf sich nur einschalten, wenn sich die Kabine in der zweiten Etage befindet und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. beide Türen des Fahrstuhls und die Kabinentür sind geschlossen; ein Fahrgast befindet sich im Fahrstuhl und betätigt den Abfahrtknopf oder

2. beide Fahrstuhltüren sind geschlossen (die Kabinentür ist geschlossen oder geöffnet); es ist kein Fahrgast in der Kabine; jemand betätigt unten den Rufknopf.

Lösung:
Wir bezeichnen die Schalter, die das Einschalten des Stromkreises regulieren wie folgt:
Z ist der Schalter, der sich nur in dem Falle schließt, wenn sich die Kabine in der zweiten Etage befindet; T_1 und T_2 sind die Schalter, die sich schließen, wenn die Türen des Fahrstuhls in der ersten und zweiten Etage geschlossen werden; T_K ist ein entsprechender Schalter, der mit der Kabinentür verbunden ist; F ist der Schalter, der mit dem Boden der Kabine verbunden ist und sich durch die Schwere eines Fahrgastes schließt; K_A und K_B sind die Schalter, die mit dem Abfahrtknopf in der Kabine des Fahrstuhls und mit dem Rufknopf an der Tür der ersten Etage verbunden sind.

Übereinstimmend mit der Aufgabenstellung darf sich der gesuchte Stromkreis S_A der Leitung

[28]Dieses Beispiel ist dem folgenden Buch entnommen: I. A. Poletajew, Das Signal, "Bowj. Radio", 1958, S. 214, (dt. Übersetzung: Kybernetik, Berlin 1962).
[29]Wir betrachten hier nur den Aufbau eines Stromkreises, der die Bewegung des Fahrstuhls nach unten leitet; völlig analog kann auch der Aufbau des Stromkreises untersucht werden, der den Fahrstuhl nach oben bewegt (Siehe Übung 6.

der Abfahrt des Fahrstuhls erst in dem Fall einschalten (Strom leiten), wenn

1. der Kontakt Z und der Kontakt T_1 und der Kontakt T_2 und der Kontakt T_K und der Kontakt F und der Kontakt K_A geschlossen sind oder

2. der Kontakt Z und der Kontakt T_1 und der Kontakt T_2 geschlossen sind und der Kontakt T_K geschlossen oder geöffnet ist und der Kontakt K_R geschlossen und der Kontakt F geöffnet ist.

Wenn wir berücksichtigen, dass die logische Operation "und" dem Produkt der Aussagen (Kontakte) entspricht, die logische Operation "oder" aber ihrer Summe, erhalten wir mühelos

$$S_A = ZT_1T_2T_KFK_A + ZT_1T_2(T_K + \overline{T_K})K_R\overline{F}$$

Unter Verwendung der Gleichung

$$T_K + \overline{T_K} = L$$

und der Eigenschaft des Kontaktes L ($AL = A$ für einen beliebigen Kontakt A) sowie des Kommutativgesetzes für die Multiplikation und des Distributivgesetzes, kann man den erhaltenen Ausdruck so vereinfachen:

$$S_A = ZT_1T_2(FT_KK_A + \overline{F}K_R)$$

Es ist leicht einzusehen, wie man technisch eine solche Schaltung verwirklicht (Abb. 42).

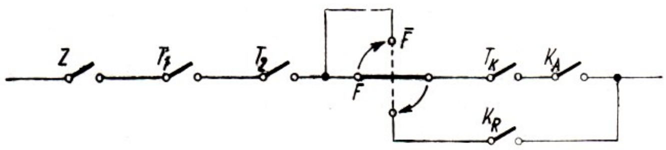


Abb. 42

Übungen
1. Stelle Kontaktschaltungen dar, die den folgenden komplizierten Aussagen entsprechen
a) $(a+b)(c+d)$,
b) $abc + a\overline{b} + \overline{a}$
c) $ab\overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a}bc$,
d) $(a+b)(\overline{a}+\overline{b}) + ab + \overline{a}\overline{b}$.

2. Stelle Kontaktschaltungen dar, die den Aussagen

$$(a+b)(b+c)(a+d)(b+d) \qquad \text{und} \qquad ab+cd$$

entsprechen. Überprüfe die "Gleichheit" dieser Schaltungen.

3*. Baue einen elektrischen Stromkreis C durch die Kontakte A, B, E und G (und möglicherweise durch die Kontakte $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{E}$ und $\overline{G}$) folgender Art auf, dass

a) der Stromkreis c nur in dem Fall geschlossen wird, wenn alle Kontakte A, B, E und G geschlossen sind oder keiner dieser Kontakte.

b) der Stromkreis C nur in dem Fall geschlossen wird, wenn einige, aber nicht alle der Kontakte A, B, E und G geschlossen sind.

4. a) Ein Gremium besteht aus drei Mitgliedern. Entwirf eine elektrische Schaltung, die die Resultate einer Abstimmung anzeigt. Jedes Mitglied des Gremiums betätigt bei der Abstimmung einen Knopf.

Eine Lampe leuchtet nur in dem Fall auf, wenn der Vorschlag die Mehrheit der Stimmen findet.

b) Baue eine analoge Schaltung für ein Gremium auf, das aus einem Vorsitzenden und fünf Mitgliedern besteht. Hier darf die Lampe nur in dem Fall aufleuchten, wenn der Vorschlag die Mehrheit der Stimmen findet oder die Stimmen gleich verteilt sind, aber die Stimme des Vorsitzenden für den Vorschlag abgegeben wurde.

5*. Entwirf einen elektrischen Stromkreis, der es erlaubt, eine Lampe leuchten zu lassen oder auszulöschen mit Hilfe von a) drei unabhängigen Schaltern (vergl. mit Beispiel 1);

b) n unabhängigen Schaltern.

6. Entwirf unter den Bedingungen des Beispiels 2 einen Stromkreis, der die Bewegung eines Fahrstuhls nach oben leitet.

7 Anhang. Definition der Booleschen Algebra

Als Boolesche Algebra wird eine willkürliche Menge von Elementen α, β, γ, ... bezeichnet, über der zwei Operationen, Addition und Multiplikation, definiert sind, die je zwei Elementen α und β ihre Summe $\alpha + \beta$ und ihr Produkt $\alpha\beta$ zuordnen.
Über ihr ist eine Operation "Strich" definiert, die jedem Element α ein neues Element $\overline{\alpha}$ zuordnet [30]; sie besitzt zwei "ausgezeichnete" Elemente o und ι, und es gelten folgende Regeln:

Regeln, die sich auf die Operation der Addition beziehen

$$\begin{aligned} &1) && \alpha + \beta = \beta + \alpha && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &2) && (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &3) && \alpha + \alpha = \alpha && \text{(Idempotenzgesetz)} \end{aligned}$$

Regeln, die sich auf die Operation der Multiplikation beziehen

$$\begin{aligned} &1a) && \alpha\beta = \beta\alpha && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &2a) && (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &3a) && \alpha\alpha = \alpha && \text{(Idempotenzgesetz)} \end{aligned}$$

Regeln, die die Addition und die Multiplikation miteinander verbinden

$$\begin{aligned} &4) && (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma && \text{(Distributivgesetze)} \\ &4a) && \alpha\beta + \gamma = (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) && \text{(Distributivgesetze)} \end{aligned}$$

Regeln, die sich auf die Elemente o und ι beziehen

$$\begin{aligned} 5)&\quad \alpha + o = \alpha \\ 5a)&\quad \alpha\iota = \alpha \\ 6)&\quad \alpha + \iota = \iota \\ 6a)&\quad \alpha o = o \end{aligned}$$

Regeln, die sich auf die Operation "Strich" beziehen

$$\begin{aligned} 7)&\quad \overline{\overline{\alpha}} = \alpha \\ 8)&\quad \overline{o} = \iota \\ 8a)&\quad \overline{\iota} = o \end{aligned}$$

Regeln, die die Operation "Strich" mit der Addition und der Multiplikation verbinden

$$\begin{aligned} &9) && \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta} && \text{(Regeln de Morgans)} \\ &9a) && \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta} && \end{aligned}$$

In der Definition der Booleschen Algebra ist die Verwendung der Beziehung $\supset$ nicht erforderlich, denn die Enthaltenseinsbeziehung $\alpha \supset \beta$ kann man mit Hilfe jeder der beiden Bedingungen

[30] Die Mathematiker sprechen in diesem Zusammenhang davon, dass es in der Booleschen Algebra zwei binäre Operationen (Addition und Multiplikation) gibt, bei denen je zwei Elementen α und β der Booleschen Algebra ein neues Element $\alpha+\beta$, sowie entsprechend $\alpha\beta$, zugeordnet wird, und es gibt eine unäre Operation, die einem Element α der Booleschen Algebra ein neues Element $\overline{\alpha}$ zuordnet.

$\alpha + \beta = \alpha$ oder $\alpha\beta = \beta$ definieren. Hieraus kann man alle Eigenschaften der Beziehung $\supset$ ableiten:

$\alpha \supset \alpha$;
wenn $\alpha \supset \beta$ und $\beta \supset \alpha$ ist, dann gilt $\alpha = \beta$;
wenn $\alpha \supset \beta$ und $\beta \supset \gamma$ ist, dann gilt $\alpha \supset \gamma$;
$\iota \supset \alpha$ und $\alpha \supset o$; $\alpha + \beta \supset \alpha$ und $\alpha \supset \alpha\beta$;
wenn $\alpha \supset \beta$ ist, dann gilt $\overline{\beta} \supset \overline{\alpha}$
(Leite sie ab!).

Darüber hinaus ist für die Definition der Booleschen Algebra eine der Operationen Addition oder Multiplikation entbehrlich, erforderlich sind nur die andere und die Operation "Strich". So können wir zum Beispiel mit den Operationen "Addition" und "Strich" die Multiplikation mit Hilfe der Regeln de Morgens definieren:

$$\alpha\beta = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$$

Jedoch allein das Vorhandensein der Operationen Addition und Multiplikation (ohne die Operation "Strich") ergibt noch keine Boolesche Algebra.

Die oben eingeführte Definition der Booleschen Algebra ist sehr "unökonomisch": Viele der aufgezählten Eigenschaften können aus anderen abgeleitet werden, so dass ihre Erfüllung nicht notwendig ist.
Diese Definition der Booleschen Algebra ist keineswegs die einzige in der mathematischen Literatur vorkommende Definition. In einer Reihe von Büchern und Artikeln kommen zu den Hauptregeln der Grundrechenarten, die für die Elemente der Booleschen Algebra erklärt sind (d.h. zu den eine Boolesche Algebra ergebenden Axiomen), noch die folgenden hinzu:

Regeln, die die Operation "Strich" mit den Elementen o und ι verbinden

$$10) a + \overline{a} = \iota \qquad , \qquad 10a) a\overline{a} = o$$

Bei einer solchen erweiterten Definition der Booleschen Algebra tritt die "Algebra der Maxima und Minima" (siehe Beispiel 3) nur als Spezialfall einer Booleschen Algebra auf, wenn nämlich die Ausgangsmenge der Zahlen nur aus den zwei Zahlen 0 und 1 besteht, was verständlicherweise ein völlig uninteressanter Fall ist.
Die "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinsamen Teiler" (siehe Beispiel 4) ist nur dann Boolesche Algebra im erweiterten Sinn, wenn die Zahl N quadratenfrei ist, d.h., wenn N sich in ein Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, p_2, ..., p_k zerlegen lässt.
Das ist bei der im Text vorkommenden Zahl $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ der Fall, hingegen ist bei $N = 360 == 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ die "Algebra der Teiler der Zahl N" keine Boolesche Algebra im erweiterten Sinn (d.h. die Menge der Elemente der Algebra erfüllt zwar die Regeln 1) bis 9 a), jedoch nicht die Regeln 10) und 10a)).

Dem Leser, der sich für die Frage der Einführung Boolescher Algebren aus der einen oder anderen Auswahl "grundsätzlicher Eigenschaften" der Elemente dieser Algebren interessiert und auch seine Kenntnisse der von uns betrachteten ungewöhnlichen Algebren erweitern möchte, kann man empfehlen, sich an die Bücher des weiter unten angegebenen Literaturverzeichnisses zu wenden.

8 Antworten und Hinweise zu den Übungen

1.

$$1. \quad (A+B)(A+C)(B+D)(C+D) = [(B+A)(C+A)][(B+D)(C+D)]$$
$$= (BC+A)(BC+D) = (A+BC)(D+BC) = AD+BC$$

Hier wird das zweite Distributivgesetz verwendet.

$$2. \quad A(A+B) = AA+AB = A+AB = AI+AB = A(I+B) = AI = A$$

$$5. \quad A(A+I)(B+\varnothing) = A\cdot I\cdot B = AB$$

$$6. \quad (A+B)(B+C)(C+A) = ABC+AB+AC+BC = ABC+ABI+AC+BC$$
$$= AB(C+I)+AC+BC = ABI+AC+BC = AB+BC+CA$$

$$7. \quad [(A+B)(B+C)](C+D) = (AC+B)(C+D) = AC+ACD+BC+BD = AC+BC+BD$$

$$10. \quad [(A+B+C)(B+C+D)](C+D+A) = [AD+(B+C)](C+D+A)$$
$$= [(AD+B)+C][(A+D)+C] = (AD+B)(A+D)+C$$
$$= AD+AD+AB+BD+C = AB+AD+BD+C$$

2.

3a)

$+$	$\varnothing$	I
$\varnothing$	$\varnothing$	I
I	I	I

und

$\cdot$	$\varnothing$	I
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
I	$\varnothing$	I

3b)

$+$	$\varnothing$	K	H	I
$\varnothing$	$\varnothing$	K	H	I
K	K	K	I	I
H	H	I	H	I
I	I	I	I	I

und

$\cdot$	$\varnothing$	K	H	I
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
K	$\varnothing$	K	$\varnothing$	K
H	$\varnothing$	$\varnothing$	H	H
I	$\varnothing$	K	H	I

$$6. \quad [m,n] = p_1^{\max[a_1,b_1]} p_2^{\max[a_2,b_2]} ... p_k^{\max[a_k,b_k]}$$
$$(m,n) = p_1^{\min[a_1,b_1]} p_2^{\min[a_2,b_2]} ... p_k^{\min[a_k,b_k]}$$

3.

$1. AB+AC+BD+CD = (A+D)(B+C)$ (siehe 1, Übung 1)

$A+AB = A$ (siehe 1, Übung 2)

$AB+B\varnothing+AI = A$ (siehe 1, Übung 9)

$ABC+BCD+CDA = (A+B)(A+D)(B+D)C$ (siehe 1, Übung 10)

$$2.a) \quad (A+B)(A+\overline{B}) = AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B} = A+A\overline{B}+BA+\varnothing =$$
$$A+BA+\overline{B}A == A+(B+\overline{B})A = A+IA = A+A = A$$
$$b) \quad AB+(A+B)(\overline{A}+\overline{B}) = AB+A\overline{A}+A\overline{B}+\overline{B}A+B\overline{B}$$
$$= AB+\varnothing+A\overline{B}+B\overline{A}+\varnothing = AB+A\overline{B}+\overline{B}A = (AB+A\overline{B})+(AB+\overline{A}B)$$
$$= A(B+\overline{B})+(A+\overline{A})B = AI+IB = A+B$$

$$
\begin{aligned}
c) \qquad & \overline{\overline{AB}C\overline{AB}}\,\overline{A}C = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{C})(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})\overline{A}C = [(A+B) + \overline{C}](A+\overline{B})\overline{A}C \\
& = A(A+\overline{B})\overline{A}C + B(A+\overline{B})\overline{A}C + (A+\overline{B})\overline{A}(C\overline{C}) \\
& = (A\overline{A})(A+\overline{B})C + [B(A\overline{A})C + (B\overline{B})\overline{A}C] + (A+\overline{B})\overline{A}\varnothing \\
& = \varnothing(A+\overline{B})C + [B\varnothing C + \varnothing\overline{A}C] + \varnothing = \varnothing \\
d) \qquad & A + B = A + IB = A + (A+\overline{A})B = \\
& A + AB + \overline{A}B == (AI + AB) + \overline{A}B = A(I+B) + \overline{A}B = AI + \overline{A}B = A + \overline{A}B
\end{aligned}
$$

3. Wende auf beide Seiten der betrachteten Gleichungen die Operation "Strich" an; verwende dabei, dass $\overline{\overline{A}} = A$ gilt.

4. $AB + A\overline{B} = A$ (siehe Übung 2a);
$(A+B)(AB+\overline{AB}) = AB$ (siehe Übung 2b);
$A(\overline{A}+B) = AB$ (siehe Übung 2d).

6. a) Jedem Teiler m der Zahl N entspricht eine gewisse Untermenge der Menge $I = p_1, p_2, ..., p_k$ der Primfaktoren der Zahl N, die Menge der Teiler, die gleichzeitig auch als Teiler von m erscheinen.
Wenn dabei den Zahlen m und n die Untermengen A und B der Menge I entsprechen, dann entsprechen den Zahlen $m \oplus n = [m,n]$, $m \otimes n = (m-n)$ und $\overline{m} = \frac{N}{m}$ die Mengen $A+B$, AB und $\overline{A}$.

b) wenn $m = p^a$, $n = p^b$ ist, dann gilt

$$m \oplus n = [m,n] = p^{\max[a,b]} \qquad , \qquad m \otimes n = (m,n) = p^{\min[a,b]}$$

und $\overline{m} = \frac{N}{b} p^{A-a}$

c)

$$\overline{m} = \frac{N}{m} = p_1^{A_1-a_1} p_2^{A_2-a_2} ... p_k^{A_k-a_k}$$

7. Diese Gleichungen gelten nicht in der "Algebra der Maxima und Minima" (außer in dem Fall, dass die Algebra im ganzen zwei Zahlen besitzt) und in der "Algebra der kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und der größten gemeinschaftlichen Teiler" (mit Ausnahme des Falles, dass alle Primfaktoren $p_1, p_2, ..., p_k$ der Zahl N paarweise verschieden sind, vergl. mit Übung 6a).

$$
\begin{aligned}
8a) \qquad & (A+B)(A+C) = A + AC + AB + BC \\
& = AI + AC + AB + BC = A(I + C + B) + BC \\
& = AI + BC = A + BC \subset A + B \subset A + B + C \\
b) \qquad & (A+B)(A+C)(A+I) = (A+B)(A+C)I = (A+B)(A+C) = \\
& A + BC \supset A \supset ABC \quad \text{(vergl. mit Übung a)} \\
c) \qquad & (A+B)(B+C)(C+A) = AB + BC + CA \supset AB \supset ABC \quad \text{(siehe 1, Übung 6)} \\
d) \qquad & \text{Aus } A \supset A\overline{B} \text{ und } B \supset \overline{A}B \text{ folg } A + B \supset \overline{A} + \overline{B}
\end{aligned}
$$

9. $ABC \subset AB + AC$ (siehe Übung 8a);
$AB + AC + A\varnothing \subset A + B + C$ (siehe Übung 8b);
$AB + BC + CA \subset A + B + C$ (siehe Übung 8c).

10. $AB \subset (\overline{A} + B)(A + \overline{B})$

12. a) A; b) B; c) I; d) $\varnothing$.

4.

5. a) "Sie ist gerade und eine Primzahl" ; die Wahrheitsmenge ist $\{2\}$;
b) "Sie ist ungerade oder sie ist eine Primzahl" ; die Wahrheitsmenge $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...\}$ unterscheidet sich von der Menge der ungeraden Zahlen durch Hinzufügen der Zahl 2;
c) "Sie ist ungerade und sie ist eine Primzahl"; die Wahrheitsmenge $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$ unterscheidet sich von der Menge aller Primzahlen, dass die Zahl 2 ausgeschlossen ist;
d) "Sie ist gerade und keine Primzahl"; die Wahrheitsmenge $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$ unterscheidet sich von der Menge aller geraden Zahlen, dass die Zahl 2 ausgeschlossen ist;
e) "Sie ist ungerade oder keine Primzahl"; die Wahrheitsmenge $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$ ist die Menge aller ganzen positiven Zahlen außer der Zahl 2.

5.

5. $a + b = a$; $ab = b$.

6.

1. a) siehe Abb. 43; b) siehe Abb. 44; 3. a) siehe Abb. 45a; b) siehe Abb. 45b.

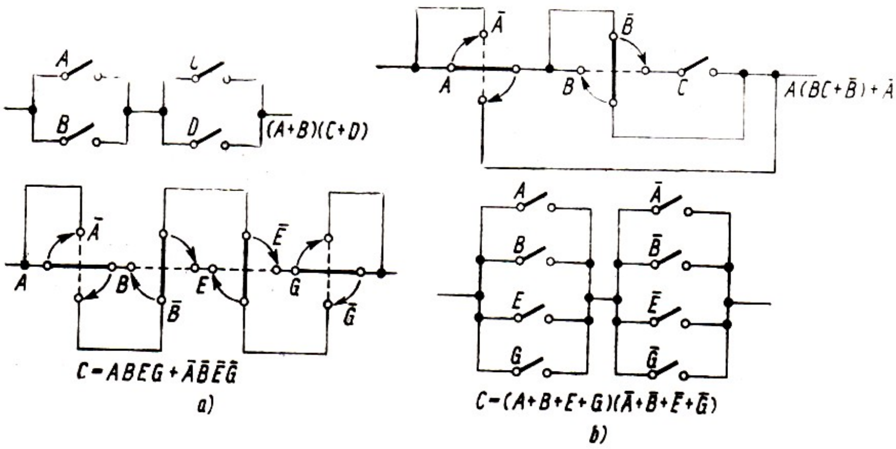


Abb. 43-45

4. a) $C = AB + AE + BE$;
d) $C = A(BE + BG + BD + BF + EG + ED + EF + GD + GF + DF) + BEGD + BEGF + BEDF + BGDF + EGDF$.
Der Vorsitzende des Gremiums betätigt den Knopf A.

5. a) $C = ABE + A\overline{BE} + \overline{A}B\overline{E} + \overline{AB}$.

9 Literatur

[1] Asser, G., Grundbegriffe der Mathematik, Band 1 Mathematik für Lehrer, Band 1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

[2] Back, H./ Gottwald, S./ Mühlig, R., Zum Sprachgebrauch in der Mathematik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1972.

[3] Hasse, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, Math. Schülerbücherei, Band 2, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974.

[4] Kurosch, A. G., Vorlesungen über allgemeine Algebra, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964.

[5] Krysicki, W., Zählen und Rechnen einst und jetzt, Math. Schülerbücherei, Band 39, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968.

[6] Strombach W. / Emde H. / Reyersbach W., Mathematische Logik, Beck, München 1972

[7] Trachtenbrot, B. A., Wieso können Automaten rechnen?, Math. Schülerbücherei. Band 60, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

[8] Varga, T., Mathematische Logik für Anfänger, Band 1 und 2, Math. Schülerbücherei. Band 7 und 62, Verlag Volk und Wissen, Berlin 1970 und 1973.

[9] Wisliceny, J., Grundbegriffe der Mathematik, Band 2, Mathematik für Lehrer, Band 2, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

[10] Zich, O. / Kolman, A., Unterhaltsame Logik, Math. Schülerbücherei, Band 51, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1973.