I.P. Natanson

Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben

Übersetzung: Ralf-Dieter Schröter, Max Heidler
1966 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 15
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

In diesem Büchlein sollen einige elementare (d. h. keine Kenntnisse der Differentialrechnung erfordernde) Methoden zur-Lösung von Maxima- und Minima-Aufgaben dargelegt werden.

Es ist für Schüler der höheren Klassen an Oberschulen[1] gedacht, die eine wenn auch allgemeine Vorstellung vom Charakter der in der höheren Mathematik betrachteten Aufgaben bekommen möchten. Der vorliegende Stoff kann aber auch bei der Arbeit mathematischer Schulzirkel verwendet werden.

Ich vermute jedoch, dass die Lektüre dieses Büchleins auch für Studenten Technischer Hochschulen, Pädagogischer Institute oder Universitäten, ja selbst für einen in die Geheimnisse der Analysis "Eingeweihten" nützlich sein dürfte.
Die mächtigen Hilfsmittel der Differentialrechnung liefern zwar allgemeine und gleichartige Methoden zur Lösung von Aufgaben verschiedensten Charakters, sofern in ihnen Extrema einer endlichen Kombination elementarer Funktionen gesucht werden. Bei der Anwendung dieser Methoden braucht man nicht einmal die individuelle Eigenart der Aufgabe zu berücksichtigen.

Häufig ist es jedoch bei Ausnutzung gerade dieser Besonderheit möglich, eine Aufgabe einfacher, schneller und schöner zu lösen als mit Hilfe allgemeiner Methoden.
Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie bei arithmetischen Aufgaben: Die Anwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen ermöglicht es, von den individuellen Besonderheiten der Aufgaben abzusehen; jedoch gelingt die rein arithmetische Lösung oft einfacher, schneller und schöner als die algebraische.

Die algebraischen Mittel, die in dieser Broschüre angewandt werden, sind nicht sehr zahlreich:
Es werden nur die einfachsten Eigenschaften des quadratischen Trinoms und eine sich auf das arithmetische und das geometrische Mittel beziehende Ungleichung benutzt. Dadurch wird die Darstellung besonders einfach.
Dem Leser, der stärkere, aber immer noch elementare Lösungsverfahren für Maxima- und Minima-Aufgaben kennenlernen will, seien folgende Bücher empfohlen: I.B. Abelson, Maximum und Minimum, 1935 und S.I. Setel, Maxima- und Minima-Aufgaben, Gostechisdat, 1948.

17. XII. 1949

I. Natanson

[1] In der Sowjetunion gehörte damals Differentialrechnung nicht zum Schulstoff.

Einführung

In der Technik und in der Naturwissenschaft, in der Produktion und im täglichen Leben stoßen wir auf eine besondere Art mathematischer Aufgaben. Es sind die sogenannten "Maxima- und Minima-Aufgaben". Hier einige Beispiele:

1. Aus einem kreisrunden Holzstamm soll ein rechteckiger Balken so ausgesägt werden, dass der Abfall möglichst gering ist.

2. Aus gegebenen Brettern kann ein 200 m langer Zaun errichtet werden. Mit diesem Zaun soll ein rechteckiges Stück Land größten Flächeninhaltes eingefriedet werden.

3. An der Wand hängt ein Bild. In welcher Entfernung von der Wand sieht man es unter dem größten Winkel?

4. Wie hoch muss man eine Lampe hängen, um die stärkste Beleuchtung (am Tischrand) zu erhalten?

Alle diese Aufgaben haben trotz ihrer Unterschiede etwas Gemeinsames:
Bei allen handelt es sich darum, wie bei verschiedenartigen Anwendungsmöglichkeiten der verfügbaren Mittel der größte Nutzen zu erzielen ist. Es braucht nicht betont zu werden, wie wichtig es ist, diese Probleme lösen zu können.
In der Mathematik sind sehr zweckmäßige und allgemeine Verfahren zur Lösung ähnlicher Aufgaben geschaffen worden; sie werden in der Differentialrechnung gelehrt.

In vielen Fällen gelingt es jedoch, solche Aufgaben zu lösen, ohne die komplizierten Hilfsmittel der Differentialrechnung heranzuziehen, wobei man nur einfache Mittel der elementaren Algebra benutzt.
In diesem Büchlein sollen gerade einige Verfahren zur Lösung von Maxima- und Minima-Aufgaben ohne Zuhilfenahme der Höheren Mathematik behandelt werden[2]. Selbstverständlich sind solche Verfahren nur in Einzelfällen anwendbar; die Vertrautheit mit ihnen gereicht jedoch auch solchen Lesern zum Nutzen, die Kenntnisse in der Differentialrechnung besitzen.

[2] Insbesondere werden die vier angeführten Aufgaben gelöst werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Fundamentalsatz der quadratischen Trinome

§ 1. Wir betrachten zwei Größen x und y, die durch die Gleichung

$$y = 2x^2 + 7 \qquad (*)$$

zusammenhängen. Wenn wir annehmen, dass $x = 3$ ist, so sehen wir, dass $y = 25$ wird. Geben wir an einen anderen Wert, beispielsweise $x = 10$, so erhalten wir $y = 207$. Allgemein können wir der Größe x jeden beliebigen Wert geben.
Wenn aber x einen von uns gewählten Wert annimmt, so erhält y seinen Wert sozusagen "automatisch", da y durch die Gleichung (*) festgelegt ist und somit nicht von unserer Willkür abhängt. Diesen Sachverhalt charakterisieren die Mathematiker mit den Worten: y ist eine Funktion von x.
Die Größe x selbst nennt man dabei die unabhängige Variable (Veränderliche).

Wir stellen uns nun folgende Frage: Gibt es unter den Werten, welche die durch die Gleichung (*) bestimmte Funktion y annimmt, einen größten ? Es ist leicht zu sehen, dass ein solcher größter Wert von y nicht existiert. Nimmt nämlich die unabhängige Veränderliche x die Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 100, \quad x_4 = 1000, ...$$

an, so ergeben sich die entsprechenden Funktionswerte y zu

$$y_1 = 9, \quad y_2 = 207, \quad y_3 = 20007, \quad y_4 = 2000007, ...$$

woraus zu ersehen ist, dass es keinen größten y-Wert gibt.

Eine völlig andere Antwort erhalten wir, wenn wir uns fragen, ob es unter den Werten der Funktion y einen kleinsten gibt.

Wie die Gleichung (*) zeigt, ist die Funktion y die Summe zweier Glieder: $2 \cdot x^2$ und 7. Der zweite Summand, d.h. 7, ist eine bestimmte feste Zahl, die nicht von x abhängt. Was den ersten Summanden $2 \cdot x^2$ anbetrifft, so kann er offensichtlich bei keinem x-Wert negativ, d.h. kleiner als Null werden. Gleich Null kann dieser erste Summand $2 \cdot x^2$ jedoch werden, und zwar für $x = 0$.

Somit nimmt der erste Summand $2 \cdot x^2$ und mit ihm die ganze Summe $2 \cdot x^2 + 7$ den kleinsten Wert für $x_0 = 0$ an. Dieser kleinste oder, wie man sagt, Minimalwert, ist offensichtlich gleich 7. Man schreibt dies so:

$$y_{\min} = 7$$

Durch solche Überlegungen ist leicht zu zeigen, dass jede der Funktionen

$$y = 5x^2 + 3, \quad y = 9x^2 + 4, \quad y = 2x^2 - 5, \quad y = 3x^2 - 11$$

ähnliche Eigenschaften besitzt: Einen größten Wert haben sie nicht, wohl aber einen kleinsten, wobei für alle vier Funktionen dieser kleinste Wert an der Stelle $x_0 = 0$ angenommen wird, und beziehungsweise

$$y_{\min} = 3, \quad y_{\min} = 4, \quad y_{\min} = -5, \quad y_{\min} = -11$$

ist.

§ 2. Die eben betrachteten Beispiele sind sehr einfach. Die Ursache dieser Einfachheit liegt darin, dass sich die Funktion y als Summe zweier Summanden darstellen lässt, von denen der eine eine feste Zahl (Konstante) und der andere ein Quadrat (mit einem bestimmten positiven Koeffizienten) ist.
Komplizierter wird die Sache in dem Beispiel

$$y = 2x^2 - 12x + 93$$

Um auch hier die gleiche Überlegung wie oben anwenden zu können, schreiben wir y in der Form

$$y = 2(x^2 - 6x) + 93$$

Jetzt ergänzen wir den Klammerausdruck so, dass er zu einem vollen Quadrat wird:

$$y = 2(x^2 - 6x + 9) + 93 - 18 \qquad \text{oder} \qquad y = 2(x-3)^2 + 75$$

Nunmehr können wir die gleiche Überlegung wie oben anstellen; denn jetzt ist die Funktion y als Summe zweier Summanden dargestellt, von denen einer - nämlich 75 - überhaupt nicht von x abhängt, während der andere, wie $2(x-3)^2$, zwar niemals negativ, aber an der Stelle $x = 3$ gleich Null werden kann. Daher hat unsere Funktion einen kleinsten Wert $y_{\min} = 75$, den sie bei $x = 3$ erreicht.

Ein größter Wert unserer Funktion existiert dagegen nicht. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man beispielsweise

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 103, \quad x_3 = 1003, \quad ...$$

annimmt. Die entsprechenden Werte der Funktion y werden

$$y_1 = 275, \quad y_2 = 20075, \quad y_3 = 2000075, \quad ...$$

Analog behandelt man das Beispiel

$$y = 3x^2 + 24x + 50$$

Wie erhalten

$$x = 3(x^2 + 8x) + 50 = 3(x^2 + 8x + 16) + 50 - 48 = 3(x+4)^2 + 2$$

wobei wir die selbstverständlichen Zwischenbemerkungen weggelassen haben. Die Funktion y nimmt demzufolge ihren kleinsten Wert bei $x_0 = -4$ an, und für diesen Minimalwert gilt

$$y_{\min} = 2$$

Es sei noch das Beispiel

$$y = 5x^2 - 50x + 39$$

gegeben. Hier ist

$$x_0 = 5 \qquad ; \qquad y_{\min} = -86$$

(mit x_0 wollen wir stets den Wert der unabhängigen Veränderlichen bezeichnen, dem der kleinste (bzw. der größte) Funktionswert entspricht).

§ 3. Es wäre falsch, anzunehmen, dass jedes quadratische Trinom (so werden Funktionen dieser Art genannt) einen kleinsten, aber keinen größten Wert besitzt.
Zum Beispiel hat die Funktion

$$y = -3x^2 + 8$$

offensichtlich einen größten oder, wie man sagt, einen Maximalwert

$$y_{\max} = 8$$

den sie bei $x_0 = 0$ annimmt. Hingegen hat sie keinen kleinsten Wert. Ebenso besitzt die Funktion

$$y = -4x^2 + 40x - 73$$

keinen Minimal-, wohl aber einen Maximalwert, wovon wir uns mit Hilfe folgender Umformungen überzeugen können:

$$y = -4(x^2 - 10x) - 73 = -4(x^2 - 10x + 25) - 73 + 100 = -4(x-5)^2 + 27$$

Es ergibt sich bei $x_0 = 5$ $y_{\max} = 27$.

§ 4. Einige quadratische Trinome besitzen somit einen kleinsten, aber keinen größten Wert, dagegen haben andere einen größten, jedoch keinen kleinsten Wert. Der aufmerksame Leser hat wahrscheinlich schon bemerkt, dass der Charakter des Trinome durch das Vorzeichen des Koeffizienten des quadratischen Gliedes bestimmt wird. Um dies in vollem Maße zu beweisen, betrachten wir das Problem in seiner allgemeinen Form.

Es sei das quadratische Trinom

$$y = ax^2 + bx + c$$

gegeben. Hier können die Koeffizienten beliebige reelle Zahlen sein: positive und negative sowie Null. Der Koeffizient des quadratischen Gliedes muss jedoch jedenfalls von Null verschieden sein, da y sonst kein Glied mit x^2 enthalten würde und folglich kein quadratisches Trinom wäre.
Wir transformieren y in der folgenden Weise:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$c - \frac{b^2}{4a} = M$$

so erhalten wir schließlich

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + M$$

Man beachte dabei, dass M eine feste Zahl ist, die durch die Koeffizienten a, b und c vollständig bestimmt und völlig unabhängig vom Wert der unabhängigen Variablen x

ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $a > 0$, so wird der erste Summand $a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ niemals negativ, verschwindet jedoch bei

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Die Funktion hat daher einen Minimalwert M: $y_{\min} = M$. Sie hat jedoch keinen Maximalwert.

2. Ist $a < 0$, so ergibt sich durch die gleichen Überlegungen, dass $y_{\max} = M$ ist, wobei die Funktion diesen Wert an der Stelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$ annimmt. Dagegen existiert kein $y_{\min}$.

Wir erwähnen, dass sowohl kleinste als auch größte Werte der Funktion Extremwerte genannt werden. Daher kann alles bisher Gesagte in Form des folgenden, für uns wesentlichen Satzes zusammengefasst werden:

Satz: Das quadratische Trinom

$$y = ax^2 + bx + c$$

besitzt einen Extremwert, den es bei

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

annimmt. Dieser Wert ist ein kleinster, wenn $a > 0$, und ein größter, wenn $a < 0$ ist. Existiert $y_{\min}$, so existiert $y_{\max}$ nicht und umgekehrt.

Wir bemerken noch, dass dieser Extremwert, wie wir früher sahen, immer gleich

$$y_{\text{Extr}} = M$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$y_{\text{Extr}} = c - \frac{b^2}{4a}$$

ist. Es ist jedoch nicht nötig, sich die letzte Gleichung einzuprägen, da ja diese Zahl der Wert unseres Trinoms bei

$$x = x_0 = -\frac{b}{2a}$$

ist. Folglich ist es hinreichend, in dem Trinom für x die Zahl

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

einzusetzen, um die Größe y_{Extr} zu erhalten.

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} y = 3x^2 - 12x + 8 & x_0 = 2 & y_{\min} = -4 \\ y = -2x^2 + 8x - 3 & x_0 = 2 & y_{\min} = 5 \\ y = 2x^2 + 20x + 17 & x_0 = -5 & y_{\min} = -33 \end{array}$$

2 Einige Anwendungen des Fundamentalsatzes

§ 5. Wir zeigen nun, dass der in § 4 bewiesene Satz die Lösung einer großen Anzahl verschiedenster konkreter Aufgaben ermöglicht.

Aufgabe 1: Man zerlege eine gegebene positive Zahl A so in zwei Summanden, dass ihr Produkt maximal wird.

Lösung: Wir bezeichnen einen der gesuchten Summanden mit x. Der zweite Summand ist dann gleich $A - x$, und ihr Produkt wird

$$y = x(A - m) \qquad \text{oder} \qquad y = -x^2 + Ax$$

Auf diese Weise ist das Problem auf die Bestimmung eines solchen x-Wertes zurückgeführt, für den dieses quadratische Trinom den Maximalwert annimmt. Nach dem Satz des § 4 ist ein solcher Wert vorhanden (da hier der Koeffizient des quadratischen Gliedes gleich -1, d.h. negativ ist) und gleich

$$x_0 = \frac{A}{2}$$

In diesem Falle ist

$$A - x_0 = \frac{A}{2}$$

d.h., die beiden Summanden müssen einander gleich sein.
Zum Beispiel gestattet die Zahl 30 unter anderen die Zerlegungen

$$\begin{array}{ll}
30 = 5 + 25 & 5 \cdot 25 = 125 \\
30 = 7 + 23 & 07 \cdot 23 = 161 \\
80 = 13 + 17 & 13 \cdot 17 = 221 \\
30 = 20 + 10 & 20 \cdot 10 = 200 \\
30 = 29 + 1 & 29 \cdot 1 = 29 \\
30 = 30 + 0 & 30 \cdot 0 = 0
\end{array}$$

Alle diese Produkte sind kleiner als $15 \cdot 15 = 225$.

§ 6 Aufgabe 2: Gegeben ist ein Draht der Länge l. Er soll so gebogen werden, dass sich ein Rechteck ergibt, das einen größtmöglichen Flächeninhalt umgrenzt.

Lösung: Wir bezeichnen eine Rechteckseite mit x (Fig. 1).

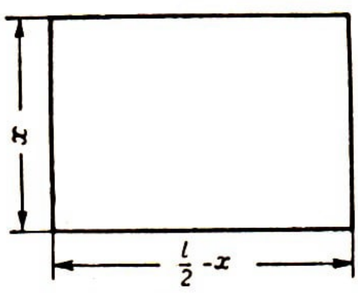

Fig. 1

Offensichtlich ist dann die andere Seite $\frac{l}{2} - x$ und der Flächeninhalt

$$F = x\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad \text{oder} \qquad F = -x^2 + \frac{l}{2}x$$

Diese Funktion nimmt ihr Maximum bei

$$x_0 = \frac{l}{4}$$

an, welches der gesuchte Wert einer der Rechteckseiten ist. Die andere Seite wird danach

$$\frac{l}{2} - x_0 = \frac{l}{4}$$

d.h., unser Rechteck erweist sich als ein Quadrat. Das gefundene Ergebnis der Aufgabe kann in folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz: Von allen Rechtecken ein und desselben Umfanges besitzt das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Bemerkung: Unsere Aufgabe ließe sich auch leicht mit Hilfe des bei der Lösung der Aufgabe 1 erhaltenen Ergebnisses lösen. Tatsächlich sehen wir, dass der uns interessierende Flächeninhalt

$$F = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

ist. Mit anderen Worten: F ist das Produkt der zwei Faktoren x und $\frac{l}{2} - x$. Die Summe dieser Faktoren ist aber

$$x + \left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{l}{2}$$

d.h. eine Zahl, die nicht von der Wahl von x abhängig ist. Somit führt die Angelegenheit auf die Zerlegung der Zahl $\frac{l}{2}$ in zwei Summanden, die so beschaffen sind, dass ihr Produkt maximal ist.
Wir wissen aber, dass dieses Produkt bei Gleichheit der Summanden, d.h. bei $x = \frac{l}{4}$ am größten ist.

§ 7. Aufgabe 3: Aus Brettern kann man einen 200 m langen Zaun errichten. Es wird verlangt, mit diesem Zaun einen rechteckigen Hof größten Flächeninhalts einzufrieden, wobei für eine Hofseite eine Fabrikmauer zu benutzen ist.

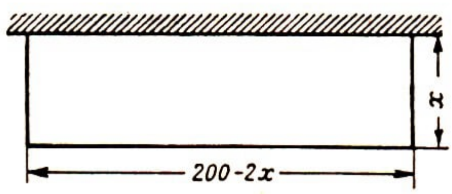

Fig. 2

Lösung: Wir bezeichnen eine der Hofseiten mit x (Fig. 2). Die andere wird dann gleich $200 - 2x$ und der Flächeninhalt

$$F = x(200 - 2x) \qquad \text{oder} \qquad F = -2x^2 + 200x$$

Gemäß dem Satz aus § 4 erreicht diese Funktion ihr Maximum bei $x_0 = 50$.
Die senkrecht zur Fabrikmauer stehende Hoffront muss somit 50 m lang sein, wodurch sich für die parallel verlaufende Front der Wert von 100 m ergibt, d.h., der Hof muss die Form eines halben Quadrates besitzen.

Bemerkung: Wollten wir auch in diesem Fall die Lösung der Aufgabe 1 benutzen, so würde uns das nicht unmittelbar gelingen, da

$$F = x(200 - 2x)$$

das Produkt zweier Faktoren ist, deren Summe gleich $200 - x$, d.h. von x abhängig ist. Mit anderen Worten: die Bedingungen der Aufgabe 1 sind nicht erfüllt. Mit Hilfe eines kleinen Kunstgriffes kann man jedoch die Sache auf Aufgabe 1 zurückführen. Untersuchen wir dazu anstatt F die Größe $z = 2F$. Wegen

$$z = 2x(200 - 2x)$$

ist diese Funktion das Produkt zweier Faktoren, deren Summe schon nicht mehr von x abhängt und ihr Maximum bei $2x = 200 - 2x$ erreicht, woraus $x = 50$ folgt.
Es bleibt noch zu erwähnen, dass die Funktionen F und $z = 2F$ ihr Maximum bei ein und demselben x-Wert annehmen.

§ 8. Aufgabe 4: Es sei das Quadrat $ABCD$ gegeben (Fig. 3). Von seinen Eckpunkten seien die gleichgroßen Abschnitte Aa, Bb, Cc, Dd abgetragen und die Punkte a, b, c, d durch Geraden verbunden.

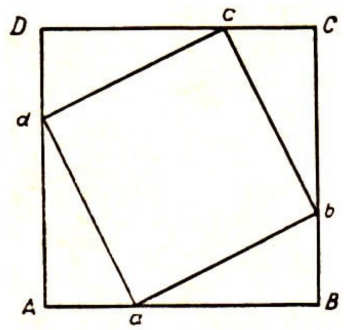

Fig. 3

Bei welchem Wert von Aa ist das Quadrat $abcd$ am kleinsten?

Lösung: Setzt man $AB = l$ und $Aa = x$, so ist offensichtlich $aB = l - x$ und demzufolge nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2$$

Der Flächeninhalt F des Quadrates $abcd$ ist aber gerade gleich $\overline{ab}^2$. Daraus folgt

$$F = 2x^2 - 2lx + l^2$$

Den Minimalwert für F erhält man daher bei

$$x_0 = \frac{l}{2}$$

Die Punkte a, b, c und d müssen also in der Mitte der Quadratseiten von $ABCD$ liegen.

§ 9. Aufgabe 5: Von den Punkten A und B (Fig. 4) fahren gemäß den Richtungspfeilen ein Dampfer und eine Yacht gleichzeitig ab. Ihre Geschwindigkeiten sind $v_D = 40$ km/st bzw. $v_Y = 16$ km/st. Nach welcher Zeit ist der Abstand zwischen ihnen am geringsten, wenn $AB = 145$ km misst?

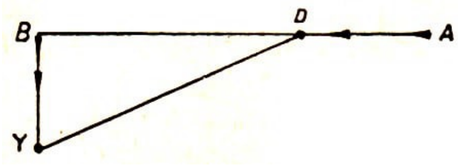

Fig. 4

Lösung: Wir bezeichnen mit den Buchstaben D und Y die Standorte des Dampfers bzw. der Yacht t Stunden nach der Abfahrt von den Punkten A und B. Es ist dann $AD = 40t$ km, $BY = 16t$km und weiter, nach dem Satz des Pythagoras,

$$DY = \sqrt{BD^2 + BY^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2}$$

woraus

$$DY = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}$$

folgt. Diese Wurzel hat ihr Minimum bei dem gleichen t, bei dem auch der Radikand

$$z = 1856t^2 - 11600t + 21025$$

am kleinsten ist, d.h. bei

$$t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8} \text{ Stunden}$$

Somit haben der Dampfer und die Yacht 3 Stunden 7 Minuten 30 Sekunden nach ihrer Abfahrt von A bzw. B den kürzesten Abstand voneinander.

§ 10. Aufgabe 6: In einen gegebenen Kreis ist ein Rechteck größten Flächeninhalts einzuzeichnen.

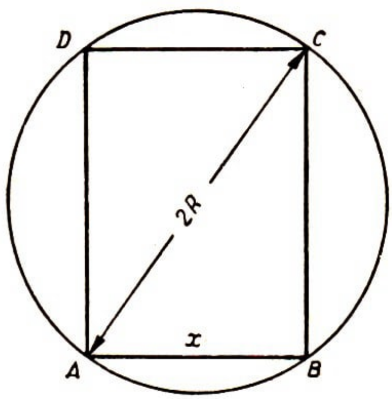

Fig. 5

Lösung: Wir bezeichnen mit R den Radius des Kreises und mit x die Seite AB des gesuchten Rechtecks (Fig. 5). Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

woraus man für den uns interessierenden Flächeninhalt F den Ausdruck

$$F = x\sqrt{4R^2 - x^2}$$

erhält. Diese Funktion nimmt ihr Maximum bei dem gleichen x an wie die Funktion $y = F^2$. Setzen wir in

$$y = x^2(4R^2 - x^2)$$

$x^2 = z$, so erhalten wir

$$y = z(4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2 z$$

Folglich wird $y_{\max}$ bei $z = 2R^2$ erreicht, d.h. bei $x = R\sqrt{2}$.
Diesen x-Wert hätte man auch ohne Einführung der Größe z finden können, wenn man benutzt hätte, dass y das Produkt zweier Faktoren mit der konstanten Summe $4R^2$ ist; hieraus folgt nach dem Resultat, das wir bei der Lösung der Aufgabe 1 erhielten,

$$x^2 = 2R^2 \qquad \text{und} \qquad x = R\sqrt{2}$$

Beachten wir, dass für $AB = x = R\sqrt{2}$ sich $BC = R\sqrt{2}$ ergibt, so sehen wir, dass das gesuchte Rechteck ein Quadrat sein muss.
Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz: Unter allen Rechtecken, die ein und demselben Kreis einbeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

§ 11. Aufgabe 7: In eine gegebene Kugel ist ein Zylinder mit größter Mantelfläche einzuzeichnen.

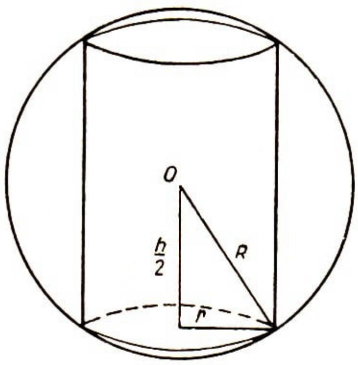

Fig. 6

Lösung: Wir bezeichnen mit R den Radius der Kugel, mit r und h Radius bzw. Höhe des gesuchten Zylinders (Fig. 6). Die Mantelfläche des Zylinders ist dann

$$F = 2\pi r h$$

Wie aus Fig. 6 zu ersehen ist, sind die Strecken R, r und $\frac{1}{2}h$ durch die Beziehung

$$\frac{1}{4}h^2 + r^2 = R^2$$

verknüpft. Hieraus folgt

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2} \qquad \text{und damit} \qquad F = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$$

Setzen wir wie in der vorhergehenden Aufgabe $y = F^2$, so erhalten wir

$$y = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2)$$

Führen wir nun als neue unabhängige Variable $x = r^2$ ein, so ergibt sich

$$y = 16\pi^2 x (R^2 - x)$$

wobei $y_{\max}$ bei $x_0 = \frac{R^2}{2}$, d.h. bei

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

erreicht wird. Ist r bekannt, so finden wir leicht $h = R\sqrt{2}$. Bemerken wir noch, dass im gesuchten Zylinder $h = 2r$ ist, so sehen wir, dass der Achsenschnitt dieses Zylinders ein Quadrat ist.

§ 12. Aufgabe 8: In einen gegebenen Kegel ist ein Zylinder mit größter Mantelfläche einzuzeichnen.

Lösung; Wir bezeichnen mit R und H Grundkreisradius bzw. Höhe des Kegels und mit r und h Radius bzw. Höhe des gesuchten Zylinders. Die Mantelfläche des Zylinders ist dann

$$F = 2\pi r h$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und O_1A_1B (Fig. 7) ergibt sich die Proportion

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \qquad \text{woraus} \qquad h = \frac{H}{r}(R-r)$$

und schließlich

$$F = 2\pi \frac{H}{R} r(R-r)$$

folgt. Diese Funktion erreicht ihr Maximum bei $r_0 = \frac{1}{2}R$. Hieraus ergibt sich die Höhe des gesuchten Zylinders zu

$$h_0 = \frac{H}{R}(R - r_0) = \frac{1}{2}H$$

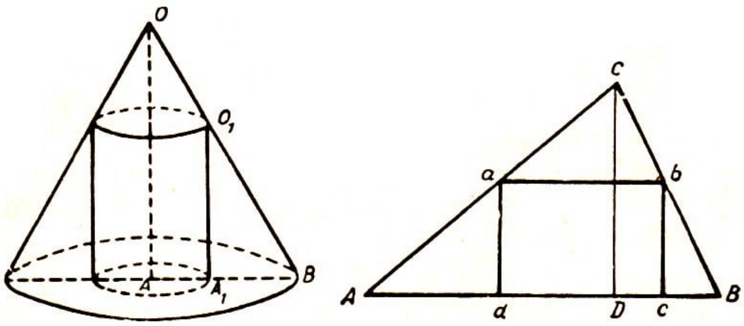

Fig. 7 und 8

§ 13. Aufgabe 9: In das Dreieck ABC (Fig. 8) ist eine Gerade ab parallel der Grundlinie AB so einzuzeichnen, dass der Inhalt des Rechtecks $abcd$ maximal wird.

Lösung: Wir setzen

$$AB = L, \qquad ab = l, \qquad bc = h$$

und bezeichnen mit H die Höhe CD des Dreiecks ABC, die auf der Seite AB senkrecht steht. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und abC ergibt sich die Proportion

$$\frac{l}{L} = \frac{H-h}{H} \qquad \text{woraus} \qquad l = \frac{L}{H}(H-h)$$

folgt. Da der Inhalt des uns interessierenden Rechtecks $abcd$

$$F = hl \qquad \text{ist, folgt} \qquad F = \frac{L}{H}h(H-h)$$

Hieraus ergibt sich, dass $F_{\max}$ bei $h_0 = \frac{1}{2}H$ erreicht wird.

3 Weitere Sätze, mit deren Hilfe Maxima- und Minimawerte von Funktionen bestimmt werden können

§ 14. Kehren wir noch einmal zu der in § 5 betrachteten Aufgabe 1 zurück. Ihre Lösung führt zu dem folgenden Satz:

Satz: Das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen ist höchstens gleich ihrem arithmetischen Mittel:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{*}$$

Es seien x und y zwei positive Zahlen. Ihre Summe werde mit A bezeichnet. Die Zahlen $\frac{1}{2}A$ und $-\frac{1}{2}A$ haben eben diese Summe. Da diese beiden Zahlen einander gleich sind, ist ihr Produkt (wie in § 5 bewiesen wurde) größer als das Produkt jedes anderen Paares von Zahlen mit derselben Summe, insbesondere der Zahlen x und y, d.h.

$$xy \leq \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

(das Gleichheitszeichen muss stehen, weil $x = y = \frac{1}{2}A$ nicht ausgeschlossen wurde). Da $A = x + y$ ist, sehen wir, dass

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

gilt. Dies ist mit der Ungleichung (*) gleichbedeutend. Der Beweis zeigt, dass das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $x = y$ ist.

Dieser Satz kann jedoch noch auf eine andere Art, ohne Bezugnahme auf das Ergebnis des § 5 bewiesen werden. Man kann nämlich die Ungleichung (*) in der äquivalenten Form

$$0 \leq x - 2\sqrt{xy} + y$$

schreiben, und in dieser Form wird sie offensichtlich, da

$$x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq x$$

Dieser Beweis zeigt ebenfalls, dass in (*) dann und nur dann Gleichheit besteht, wenn $x = y$ ist.

§ 15. Aufgabe 10: Eine gegebene positive Zahl P ist so in zwei positive Faktoren zu zerlegen, dass deren Summe minimal ist.

Lösung: Es sei P in beliebiger Weise als Produkt zweier positiver Faktoren x und y dargestellt:

$$P = xy \qquad (x > 0, y > 0)$$

Gemäß Ungleichung (*) ist dann

$$x + y \geq 2\sqrt{P}$$

Bei beliebiger Wahl der Faktoren kann somit deren Summe nicht kleiner als $2\sqrt{P}$ werden. Im Falle ihrer Gleichheit, d.h., wenn $x = \sqrt{P}$, $y = \sqrt{P}$ gilt, erhalten wir offensichtlich $2\sqrt{P}$ als Summe. Folglich ist $2\sqrt{P}$ das gesuchte Minimum, das dann und nur dann angenommen wird, wenn beide Faktoren einander gleich sind.

Beachten wir, dass $y = \frac{P}{x}$ ist, so kann die Lösung der Aufgabe in dem folgenden Satz formuliert werden:

Satz: Die Funktion

$$z = x + \frac{P}{x} \qquad (P > 0)$$

(bei der die unabhängige Variable x nur positive Werte annehmen kann) erreicht ihr Minimum zum bei $x_0 = \sqrt{P}$ und nur bei diesem Wert von x.

§ 16. Aufgabe 11: An einer vertikalen Wand hängt ein Plakat AB. In welcher Entfernung von der Wand muss ein Beobachter stehen, damit der Winkel θ, unter dem er das Plakat (von unten) sieht, am größten ist?

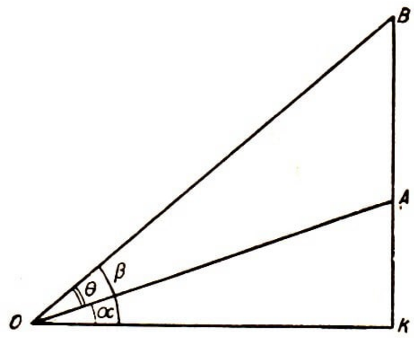

Fig. 9

Lösung: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Wand mit der Horizontalen, die durch das Auge O des Beobachters verläuft (Fig. 9), mit K.
Die gesuchte Entfernung ist dann OK. Sie werde mit x bezeichnet, und es sei $KA = a$, $KB = b$.
Bezeichnen wir die Winkel KOA und KOB mit α bzw. β, so ist offensichtlich

$$\theta = \beta - \alpha$$

Hieraus folgt

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Wegen

$$\tan\alpha = \frac{a}{x} \qquad , \qquad \tan\beta = \frac{b}{x}$$

ist aber

$$\tan\theta = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}$$

Da das Maximum des Winkels θ beim Maximum seines Tangens erreicht wird, läuft unsere Aufgabe auf die Bestimmung eines solchen x-Wertes hinaus, bei dem der Bruch

$$\frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}$$

am größten ist. Da der Zähler konstant ist, muss folglich sein Nenner

$$x + \frac{ab}{x}$$

am kleinsten sein. Nach dem Satz des vorigen Paragraphen ist der gesuchte x-Wert

$$x_0 = \sqrt{ab}$$

§ 17. Der Satz des § 14 lässt eine wichtige Verallgemeinerung zu, die von großem theoretischem Interesse ist. Mit ihrer Hilfe gelingt es uns, noch eine ganze Reihe von Maxima- und Minima-Aufgaben zu lösen. Diese Verallgemeinerung kann in folgendem Satz formuliert werden:

Satz: Das geometrische Mittel beliebig vieler positiver Zahlen ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Beweis: Wir wollen einen scharfsinnigen, obgleich nicht ganz einfachen Beweis dieses Satzes anführen, der eine überaus ungewöhnliche Variante der vollständigen Induktion darstellt. (Die Idee stammt von A. Cauchy, d. Red.)

Ist $n = 2$, so stimmt unser Satz mit dem in § 14 bewiesenen überein. Es sei also $n = 4$. Dem bewiesenen Satz gemäß ist dann

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} \leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}} \leq \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

d.h.

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

Damit ist für $n = 4$ der Satz bewiesen. Nun sei $n = 8$. Nach dem bisher Bewiesenen ist

$$\sqrt[8]{x_1 x_2 ... x_8} = \sqrt{\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \cdot \sqrt[4]{x_5 x_6 x_7 x_8}} \leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \cdot \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{4}}$$

und folglich

$$\sqrt[8]{x_1 x_2 ... x_8} \leq \frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} + \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2}$$

was den Satz für $n = 8$ beweist.
Analog beweisen wir diesen Satz für $n = 16$, $n = 32$, $n = 64$ und mit vollständiger Induktion für $n = 2^m$.

Nehmen wir jetzt an, n sei keine Zahl der Form 2^m. Dann wählen wir m so groß, dass

$$2^m > n$$

Setzen wir

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = A$$

und fügen zu unseren Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ noch $2^m - n$ Zahlen

$$x_{n+1} = A, x_{n+2} = A, ..., x_{2^m} = A$$

hinzu, so ist nach dem Bewiesenen

$$\sqrt[2^m]{x_1...x_n x_{n+1}...x_{2^m}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n + x_{n-1} + ... + x_{2^m}}{2^m}$$

woraus

$$\sqrt[2^m]{x_1...x_n A^{2^m-n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n + (2^m - n)A}{2^m}$$

folgt. Da aber

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = nA$$

so gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + (2^m - n)A}{2^m} = \frac{nA + (2^m - n)A}{2^m} = A$$

Daher nimmt die vorstehende Ungleichung die Form

$$\sqrt[2^m]{x_1 x_2 ... x_n A^{2^m-n}} \leq A$$

an, woraus durch Potenzieren

$$x_1 x_2 ... x_n A^{2^m-n} \leq A^{2^m}$$

und damit

$$x_1 x_2 ... x_n \leq A^{2m}$$

folgt. Also ist

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

und der Satz bewiesen.

§ 18. Aus dem bewiesenen Satz ergibt sich die Möglichkeit, zwei Aufgaben, die in diesem Paragraphen betrachtet werden sollen, zu lösen.

Aufgabe 12: Eine gegebene positive Zahl A ist so in n positive Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt maximal ist.

Lösung: Die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ seien positiv, und es sei

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = A$$

Nach dem Satz des § 17 ist dann

$$x_1 x_2 ... x_n \leq \left(\frac{A}{n}\right)^n$$

Das Produkt beliebig ausgewählter Summanden kann also in keinem Fall größer als $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ sein. Andererseits erhält man für

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{A}{n}$$

offensichtlich ein Produkt, das gleich $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ ist. Folglich müssen die gesuchten Summanden alle einander gleich sein.

Aufgabe 13: Eine gegebene positive Zahl P ist so in n positive Faktoren zu zerlegen, dass deren Summe minimal ist.

Die Lösung ist analog der von Aufgabe 12. Wenn nämlich

$$x_1 x_2 ... x_n = P$$

so wird nach dem Satz des § 17

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{P}$$

Folglich kann die Summe beliebig gewählter Faktoren nicht kleiner sein als $n\sqrt[n]{P}$. Da sich nun bei

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{P}$$

eine Summe ergibt, die gleich $n\sqrt[n]{P}$, müssen alle gesuchten Faktoren einander gleich sein.

§ 19. Die Ergebnisse des § 18 gestatten die Lösung einer ganzen Reihe konkreter Aufgaben. Wir führen einige Beispiele an.

Aufgabe 14: In eine gegebene Kugel ist ein Zylinder größten Volumens einzuzeichnen.

Lösung: In den Bezeichnungen des § 11 erhalten wir für das Volumen des Zylinders die Formel

$$V = \pi r^2 h$$

Wie wir in § 11 gesehen haben, ist

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Folglich ist

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r2}$$

Setzen wir $z = \frac{1}{4\pi^2} V^2$, so erhalten wir

$$z = r^4(R^2 - r^2)$$

wobei z sein Maximum für dasselbe r annimmt wie V. Wegen

$$\frac{1}{4} z = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} (R^2 - r^2)$$

ist $\frac{1}{4}z$ das Produkt dreier Faktoren, deren Summe gleich R^2 ist. Folglich wird z dann seinen größten Wert annehmen, wenn r die Bedingung

$$\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$$

erfüllt, also für

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

§ 20. Aufgabe 15: In einen Kegel ist ein Zylinder größten Volumens einzuzeichnen.

Lösung: In den Bezeichnungen des § 12 lautet die Formel für das gesuchte Volumen

$$V = \pi r^2 h$$

In § 12 hatten wir

$$h = \frac{H}{R}(R - r)$$

gefunden; hieraus folgt

$$V = \pi \frac{H}{R} r^2 (R - r)$$

V erreicht sein Maximum bei dem gleichen r wie die Funktion

$$z = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}(R - r)$$

die das Produkt dreier Faktoren mit konstanter Summe ist. Folglich ergibt sich $z_{\max}$ bei

$$\frac{r}{2} = \frac{r}{2} = R - r$$

d.h. für $r = \frac{2}{3}$.

§ 21. Aufgabe 16: In eine gegebene Kugel ist ein Kegel größten Volumens einzuzeichnen.

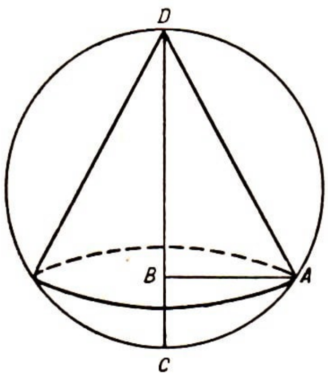

Fig. 10

Lösung: Wir bezeichnen mit R den Kugelradius, mit r und h Grundradius bzw. Höhe des Kegels. Aus Fig. 10 ist zu erkennen, dass $r = AB$ die mittlere Proportionale zwischen den Strecken BD und BC ist. Wegen $BD = h$, $BC = 2R - h$ folgt

$$r^2 = h(2R - h)$$

Da das gesuchte Volumen durch

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ausgedrückt wird, ist

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$$

Wird an Stelle von V die Funktion

$$z = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h)$$

eingeführt, die gleichzeitig mit V ihr Maximum annimmt, so sehen wir, dass bei

$$\frac{h}{2} = \frac{h}{2} = 2R-h$$

d.h. für $h = \frac{4}{3}R$ $z_{\max}$ erreicht wird.

§ 22. Aufgabe 17: Über der Mitte eines runden Tisches hängt eine Lampe. In welcher Höhe muss diese Lampe angebracht werden, damit die Beleuchtung des Tischrandes maximal wird?

Lösung: Wir führen die Bezeichnungen der Fig. 11 ein. Aus der Physik ist bekannt, dass die Lichtstärke I im Punkte A durch die Formel

$$I = k\frac{\sin\phi}{l^2}$$

gegeben wird, wobei k ein Proportionalitätsfaktor ist. Wegen

$$\cos\phi = \frac{r}{l}$$

erhalten wir

$$I = \frac{k}{r^2}\sin\phi\cdot\cos^2\phi$$

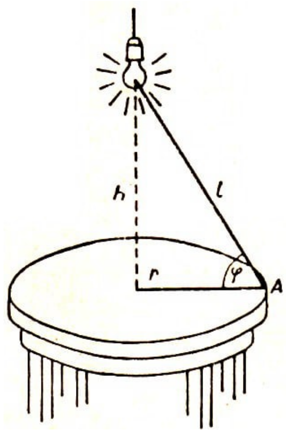

Fig. 11

Wir betrachten an Stelle von I die Größe

$$z = \frac{r^4}{k^2}I^2$$

Es ist klar, dass $z_{\max}$ und $I_{\max}$ gleichzeitig angenommen werden. Nun ist

$$z = \sin^2\phi\cos^4\phi$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{4}z = (1-\cos^2\phi)\frac{\cos^2\phi}{2}\cdot\frac{\cos^2\phi}{2}$$

Das Maximum von z wird bei

$$1-\cos^2\phi = \frac{\cos^2\phi}{2} = \frac{\cos^2\phi}{2}$$

d.h. bei

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

erreicht. Für dieses ϕ ist

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und da $h = r\tan\phi$ ist, ergibt sich die gesuchte Höhe zu

$$h_0 = r\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7r$$

§ 23. Aufgabe 18: Gegeben sei eine rechteckige Blechplatte von der Größe 80 cm x 50 cm. An den Ecken sollen gleichgroße Quadrate so ausgeschnitten werden, dass die durch Aufbiegen der Ränder entstehende oben offene Schachtel ein größtes Volumen erhält.

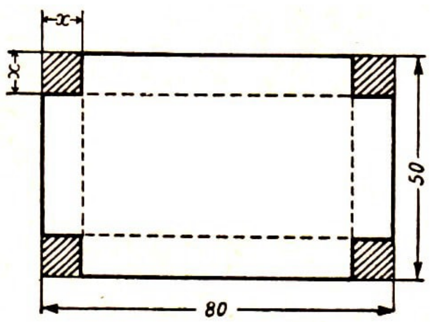

Fig. 12

Lösung: Wir bezeichnen die Seite des ausgeschnittenen Quadrates mit x (Fig. 12). Es ist nicht schwer einzusehen, dass das Volumen V der Schachtel durch

$$V = x(80-2x)(50-2x)$$

gegeben wird. Hier gelingt es nicht, das gesuchte Maximum $V_{\max}$ in der mehrfach verwendeten Weise zu ermitteln. Setzt man nämlich

$$z = 4x(80-2x)(50-2x)$$

so kann man die Faktoren nicht gleichsetzen, da die Gleichung

$$80-2x = 50-2x$$

einen Widerspruch enthält und unerfüllbar ist. Wir verfahren deshalb so, dass wir in den letzten Faktor einen konstanten Multiplikator k einführen, über den wir später verfügen. Demzufolge müssen wir anstatt V die Größe

$$kV = x(80 - 2x)(50k - 2kx)$$

betrachten. Hier ist die Summe der Faktoren keine konstante Größe, deshalb multiplizieren wir den ersten Faktor noch mit $2k + 2$. Statt V untersuchen wir nun die Funktion

$$z = [(2k + 2)x][80 - 2x][50k - 2kx]$$

Bei jeder Wahl von k ist hier die Summe der Faktoren von x unabhängig und gleich $80 + 50k$. Folglich nimmt die Funktion z (und mit ihr V) den Maximalwert dann an, wenn

$$(2k + 2)x = 80 - 2x = 50k - 2kx$$

So erhalten wir zur Ermittlung von x zwei Gleichungen

$$(2k + 2)x = 80 - 2x \qquad , \qquad (2k + 2)x = 50k - 2kx$$

Diese Gleichungen besitzen folgende Lösungen

$$x = \frac{40}{k + 2} \qquad , \qquad x = \frac{25k}{2k + 1}$$

Wenn die Aufgabe lösbar sein soll, müssen diese x-Werte zusammenfallen, d.h., es muss

$$\frac{40}{k + 2} = \frac{25k}{2k + 1} \tag{*}$$

sein.

Jetzt kommt uns der Umstand zu Hilfe, dass wir die Zahl k frei wählen können. Wir wählen k nämlich so, dass die Bedingung (*) erfüllt ist. Wir fassen also die Beziehung (*) als Bestimmungsgleichung für k auf. Lösen wir diese Gleichung, so finden wir für k zwei Werte

$$k_1 = 2 \qquad , \qquad k_2 = -\frac{4}{5}$$

Ein negativer Wert für k ist jedoch unbrauchbar. Entsprechend dem Sinn der Aufgabe muss der in den Ausdruck für V eingehende Faktor $50 - 2x$ positiv sein. Andererseits müssen, wenn zur Bestimmung von $z_{\max}$ das "Verfahren der Faktorgleichsetzung" anwendbar sein soll, alle Faktoren positiv sein. Insbesondere muss der Faktor

$$50k - 2kx = k(50 - 2x)$$

positiv sein. Die Ausdrücke $k(50-2x)$ und $(50-2x)$ können jedoch nur dann gleichzeitig positiv sein, wenn k positiv ist. Folglich muss für K notwendig der Wert . $k = 2$ gewählt werden. Bei dieser Wahl von k erhält man für x den Wert $x = 10$. Dies ist die Lösung der Aufgabe.

4 Schlussbemerkungen

Wie wir sahen, kann mit Hilfe elementarer algebraischer Mittel jede beliebige Aufgabe gelöst werden, die auf die Bestimmung eines Extremwertes des quadratischen Trinoms

$$y = ax^2 + bx + c$$

hinausläuft.
In denjenigen Fällen, in denen das Problem auf die Ermittlung eines Minimal- oder Maximalwertes einer komplizierten Funktion führte, gelang uns die volle Lösung nur mit Hilfe dieses oder jenes Kunstgriffes, der für jede einzelne Aufgabe besonders gefunden werden musste.

Naturgemäß fragt man sich, ob allgemeine Verfahren zur Ermittlung der Extremwerte von Funktionen beliebiger Art und nicht nur quadratischer Trinome existieren. Derartige Verfahren gibt es.
Wie jedoch schon in der "Einführung" gesagt wurde, müssen dazu Hilfsmittel der höheren Mathematik herangezogen werden.