Maximilian Miller

Gelöste und ungelöste mathematische Probleme

1973 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 73
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein mathematisches Problem?

Das der griechischen Sprache entstammende Wort "Problem" hatte ursprünglich eine sehr vielseitige Bedeutung. Einerseits verstand man hierunter "Verlagerung, Hindernis, Schwierigkeit, Schutz", andererseits "Vorgelegtes, Aufgegebenes".
In den Elementen des griechischen Mathematikers Euklid (ca. 300 v.u.Z.) schließen sich die Aufgaben, Problemata genannt, an die Lehrsätze (Theoremata) an. Die Lösung der Problemata erfolgt im allgemeinen bei Euklid dadurch, dass jedes Folgende durch Zurückgehen auf das Frühere erhärtet wird.
Mathematische Probleme sind vielfach allgemeiner Natur, z.B.

"In welchen Fällen ist eine geometrische Konstruktion unter alleinigem Gebrauch von Zirkel und Lineal durchführbar?"

Der Aufgabenstellung nach handelt es sich hier um ein geometrisches Problem. Die Lösung erfolgt jedoch auf algebraischem Wege. Dass dieses Problem über 2000 Jahre nicht erledigt werden konnte, lag daran, dass die Algebra erst die Mittel bereitstellen musste, die für die Lösung dieses Problems erforderlich waren.
Ein sehr schönes Beispiel bietet das Delische Problem (Verdoppelung des Würfels), das von W. Breidenbach in dem lesenswerten Büchlein "Das Delische Problem" in dem Abschnitt VI (Der Unmöglichkeitsbeweis), S. 35-56, in leichtfasslicher Form behandelt wird.[1]

Aus der Lösung eines allgemeinen Problems ergibt sich bisweilen eine selbständige Theorie.
An Problemen reich ist das Gebiet der Zahlentheorie. Hier gibt es eine Reihe von Problemen, die sich durch die Leichtverständlichkeit der Fragestellung auszeichnen. Dies führt dann vielfach dazu, dass die bei der Lösung auftretenden Schwierigkeiten bedeutend unterschätzt werden.

Ein Problem dieser Art ist die sog. "Goldbachsche Vermutung". Die Fragestellung ist hier verblüffend einfach: Es ist nachzuweisen, dass jede gerade Zahl größer als 2 wenigstens auf eine Art als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden kann. Zunächst ist die Tatsache einleuchtend, dass die Summe zweier ungerader Primzahlen stets eine gerade Zahl ergibt.
Als Ergänzung können wir noch hinzufügen, dass $2 + 2$ ebenfalls eine gerade Zahl ergibt. Die Goldbachsche Vermutung stellt nun gewissermaßen die Umkehrung dieser fast trivial zu nennenden Behauptung dar. Für den Nachweis der Richtigkeit der Goldbachschen Vermutung ist jedoch hiermit nichts gewonnen.
Man hat nun im 19. Jahrhundert das Goldbach-Problem dadurch zu bewältigen gesucht, dass man die Goldbachsche Behauptung überprüfte und Näherungsformeln für die Anzahl der Darstellungen einer geraden Zahl als Summe von zwei Primzahlen aufstellte. Auf diesem Wege ist jedoch eine Lösung des Problems nicht möglich.

Würde man jedoch nur eine einzige gerade Zahl nachweisen können, die sich nicht als

[1] In der vorliegenden Arbeit werden vorzugsweise algebraische Probleme behandelt, da die geometrischen in einer anderen Arbeit dieser Schriftenreihe veröffentlicht werden.

Summe von zwei Primzahlen darstellen lässt, so wäre die Goldbachsche Behauptung widerlegt und das Problem restlos gelöst. Bisher konnte jedoch die Goldbachsche Behauptung weder bewiesen noch widerlegt werden.

Gibt es in der Mathematik unlösbare Probleme?

Bleiben wir bei dem Beispiel der Goldbachschen Vermutung. Im Jahre 1912 stellte der bedeutende Mathematiker Edmund Landau (1877-1938) mit einer gewissen Resignation fest, dass keine Aussicht bestehe, mit den damals bekannten Mitteln der Mathematik das Goldbachsche Problem zu lösen.
Etwa zwei Jahrzehnte später entwickelte der sowjetische Mathematiker Lev Genrichovic Snirelman (1905-1938) vollkommen neue Gedanken, die aller Wahrscheinlichkeit nach in absehbarer Zeit zur Lösung des Goldbachschen Problems führen werden.

Felix Klein (1849-1925) hat in seinem Buch "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" (Berlin 1924), Bd. I, S. 154, zu der Frage der unlösbaren mathematischen Probleme in folgender Weise Stellung genommen:

"Man darf eben nur, wenn etwas auf dem gewöhnlichen Wege nicht geht, nicht gleich resignieren und bei der Feststellung der Unmöglichkeit bleiben, sondern muss nur das richtige Ende finden, an dem sich die Sache anfassen und weiter fördern lässt.
Der mathematische Gedanke als solcher hat nie ein Ende, und sagt uns jemand, dass an einer Stelle das mathematische Verständnis aufhört, so können wir überzeugt sein, dass da die eigentlich interessante Fragestellung erst einsetzen muss."

2 Primzahlen

Der Unterschied zwischen den zusammengesetzten Zahlen und den sogenannten Primzahlen war bereits den Pythagoreern (5. bis 4. Jahrhundert v.u.Z.) bekannt. Das Wissen um die Eigenschaften dieser Primzahlen fand seinen Niederschlag in den "Elementen" des griechischen Mathematikers Euklid, der das damals bekannte mathematische Wissen in diesem Werk zusammenfasste.

Da wir über die Leistungen der voreuklidischen Mathematiker nur durch die nicht allzu umfangreichen Berichte aus späterer Zeit unterrichtet sind, können wir nicht mehr entscheiden, was Euklid von seinen Vorgängern übernommen bzw. selbst entdeckt hat.

Ein Problem, das zweitausend Jahre später wieder aufgegriffen wurde, erscheint erstmalig in den Elementen (IX, 20) und wird dort in geradezu genialer Weise gelöst. Es handelt sich um die Frage, ob es eine größte Primzahl gibt oder ob die Anzahl der Primzahlen unbegrenzt sei.

Um zu beweisen, dass es keine größte Primzahl p geben könne, wird zunächst die Existenz einer größten Primzahl p angenommen und das Produkt aller Primzahlen von 2 bis p gebildet. Die Zahl

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p + 1$$

ist dann durch keine Primzahl von 2 bis p teilbar, d.h., P ist dann entweder eine neue Primzahl oder enthält neue Primzahlen als Faktoren. In beiden Fällen ergeben sich Primzahlen, die größer als p sind.

Beispiele: Für $p = 11$ ergibt sich die größere Primzahl

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$

für $p = 13$ finden wir

$$P = 30031 = 59 \cdot 509$$

Dieses Verfahren, bei dem man das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung als richtig annimmt und daraus einen Widerspruch herleitet, bezeichnet Aristoteles (384-322 v.u.Z.) als "indirekten Beweis" (Analyt. post. 1, 2).
Die Methode der indirekten Beweisführung wird auch in anderen Wissenschaften angewandt. Aristoteles führt (De coel. II. I 4) als Beispiel für einen indirekten Beweis folgenden Schluss an: "Schon vordem schloss man, dass die Gestalt der Erde rund sei; denn sonst (angenommen, dass sie eckig sei) würde ihr Schatten bei der Mondfinsternis Ecken zeigen."

Zweitausend Jahre später bewies Leonhard Euler (1707-1783), dass in dem Intervall $p...P^2$ (P eingeschlossen) eine Primzahl liegen muss. Der französische Mathematiker Joseph Bertrand (1822-1900)versuchte das Intervall, innerhalb dessen sicher eine Primzahl liegen muss, zu verkleinern. Er stellte die Behauptung auf, dass zwischen a und $2a$ (letzteres eingeschlossen) für $a \geq 1$ stets eine Primzahl liegen muss.
Den exakten Beweis für diese Behauptung erbrachte der russische Mathematiker Pafnutij Lvovic Cebysev (1821-1894).
Eine andere Einengung des Intervalls auf die Grenzen $a < p \leq a + \sqrt{2}$ gelang bereits dem französischen Mathematiker Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Ein weiteres Problem, das sich auf die Primzahlen bezieht, ist die Aufstellung der Primzahlenreihe, d.h. die Zusammenstellung von Primzahlen in der Reihenfolge ihrer Größe.
Auch dieses Problem fand schon im Altertum seine endgültige Erledigung durch den großen Mathematiker und Geographen Eratosthenes von Kyrene[3] (276? bis 194 ? v.u.Z.).
Da uns die Originalschriften des Eratosthenes nicht mehr erhalten sind, müssen wir uns der Berichte aus späterer Zeit bedienen.

Es sind dies die Schriften von Nikomachos von Gerasa (um 100 u.Z.) und die Kommentare des im vierten Jahrhundert u.Z. lebenden Mathematikers Jamblichos.
Danach erfolgte die Aufstellung der Primzahlenreihe durch das sogenannte Sieb des Eratosthenes.

Das Verfahren besteht darin, dass man in der Reihe der natürlichen Zahlen erst alle

[2] Es ist hier wieder $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p + 1$.
[3] Eratosthenes ist auch der Begründer der wissenschaftlich fundierten Erdmessung. Er berechnete mit sehr anerkennenswerter Annäherung den Erdumfang zu 252000 Stadien (1 Stadion entspricht 165 bis 210 m).

durch 2, dann alle durch 3, 5, 7, ... usw. teilbaren Zahlen streicht; die übrigbleibenden Zahlen 2, 3, 5, 7, ... sind dann die gesuchten Primzahlen. Dass ein und dieselbe Zahl hierbei unter Umständen auch mehrmals gestrichen wird,ist ohne Bedeutung.

Es wurde auch schon im Altertum die Frage aufgeworfen, ob die Zahl 1 zu den Primzahlen gehört. Man konnte sich lange nicht einigen.
Ausgehend von der Definition, dass eine Primzahl p eine natürliche Zahl ist, die genau zwei Teiler, nämlich 1 und p hat, rechnen wir die Zahl 1, die nur einen Teiler, nämlich 1 hat, nicht zu den Primzahlen.

Mit Hilfe des Siebes des Eratosthenes kann die Reihe der Primzahlen beliebig weit fortgesetzt werden.
Für die Primzahlforschung war es nun sehr wichtig, Primzahltabellen aufzustellen. Vielfach enthalten diese Tabellen außer den Primzahlen auch die Zerlegungen größerer Zahlen in ihre Primfaktoren, wobei auf die leicht erkennbaren Vielfachen von 2, 3, 5, 9 usw. verzichtet wird.
Bisweilen wird auch immer nur der kleinste Teiler einer zerlegbaren Zahl angegeben.

Durch Division durch diesen kleinsten Teiler ergibt sich eine neue Zahl, für die an Hand der Tabelle festgestellt werden kann, ob sie noch weiter zerlegt werden kann.
Es gibt Tafeln bis zu der Zahl 100000000.
Die praktische Verwertbarkeit einer solchen Tafel hängt weitgehend von deren Fehlerlosigkeit ab.

Ein Muster an rechnerischer Genauigkeit stellt die von dem niederländischen Professor Chernac 1811 zu Deventer herausgegebene Primfaktorentafel dar. Sie gibt von allen nicht durch 2, 3 oder 5 teilbaren Zahlen die Zerlegung in Primfaktoren an, und zwar bis 1020000; dabei werden die Primzahlen besonders gekennzeichnet.

Eine Kuriosität stellt eine Mitteilung in der "Histoire de l'Academie des Sciences de Paris" aus dem Jahre 1705 dar, nach der der Mathematiker Josef Privat de Molières (1677-1742) in einer Zeit von nicht ganz drei Stunden sämtlich Primzahlen unterhalb 25000 ermittelt haben soll.
Da die Mitteilung nicht die geringste Andeutung über das von Molières angewandte Verfahren enthält, erscheint die ganze Angelegenheit etwas fragwürdig. In Tabelle 1 sind nun alle Primzahlen unterhalb 500 aufgezeichnet.

Tabelle 1

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97					
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149					
151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199				
211	223	227	229	233	239	241								
251	257	263	269	271	277	281	283	293						
307	311	313	317	331	337	347	349							
353	359	367	373	379	383	389	397							
401	409	419	421	431	433	439	443	449						
457	461	463	467	479	487	491	499							

Schon eine oberflächliche Betrachtung der Tabelle ergibt, dass die Primzahlen ziemlich unregelmäßig aufeinanderfolgen. Man könnte vielleicht eine gewisse Periodizität etwa nach Art der Atomgewichte der chemischen Elemente im periodischen System vermuten.

Dass die Primzahlen jedoch nicht periodisch wiederkehren, geht schon daraus hervor, dass die zusammengesetzten Zahlen im Sieb des Eratosthenes verschieden oft gestrichen werden müssen, so dass die Periodizität der übrigbleibenden Primzahlen immer wieder von neuem gestört wird.
Es ist also nicht ohne weiteres möglich, eine Gesetzmäßigkeit in der Aufeinanderfolge der Primzahlen zu erkennen.

Dagegen wurde von Legendre 1785 in einem Bericht der Academie Royale des Sciences, Paris, (erschienen 1788) die Behauptung aufgestellt, dass jede arithmetische Folge

$$r, r+m, r+2m, r+3m, ...$$

in der r und m teilerfremde Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Der von Legendre 1808 veröffentlichte Beweis für die von ihm aufgestellte Behauptung ist jedoch nicht vollständig.

Erst Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) erbrachte im Jahre 1837 einen lückenlosen Beweis für die Legendresche Behauptung.

3 Das Problem der Primzahlverteilung

Um einen Überblick über die Verteilung der Primzahlen zu erhalten, betrachten wir Tabelle 2:

Tabelle 2

Intervall	Anzahl der Primzahlen
1 - 250	53
251 - 500	42
501 - 750	37
751 - 1000	36
1001 - 1250	36
1251 - 1500	35
1 - 50	15
501 - 550	6
1001 - 1050	8

Wir sehen, dass die Anzahl der Primzahlen bei gleichbleibenden Intervallen nach oben hin abnimmt. Diese Abnahme ist jedoch sehr unregelmäßig, und die Unregelmäßigkeit tritt bei kleineren Intervallen stärker hervor.

Die Mathematiker des 18. Jahrhunderts warfen nun folgende Frage auf: Gibt es eine einfache Beziehung, mit deren Hilfe man die Anzahl der Primzahlen bis zu einer gewissen Zahl x angeben kann.

Es ist vornherein nicht zu erwarten, dass diese Beziehung vollkommen exakt ist. Wir werden uns vielmehr mit einer Näherungsformel begnügen müssen, wobei es sehr wichtig ist, den Grad der Genauigkeit dieser Beziehung festzustellen.
Da die Primzahlen bis zu der oberen Grenze von etwa 9000000 bekannt sind, ist es ohne weiteres möglich, eine Näherungsformel auf ihre Genauigkeit hin zu prüfen. Gauß (1777-1855) vermutete, dass die Anzahl $N(x)$ der Primzahlen zwischen 1 und x durch die Näherungsformel

$$N(x) \approx \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$$

dargestellt wird, in der $\ln x$ der auf die Basis $e = 2{,}71828$ bezogene natürliche Logarithmus von x ist. Legendre fand die Näherungsformel

$$N(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1{,}08364}$$

Über die Genauigkeit der Legendreschen Näherungsformel gibt Tabelle 3 Auskunft:

x	10	100	1000	10000	100000
$N(x)$ nach Legendre	8,20	28,40	171,70	1230,51	9588,38
wahrer $N(x)$-Wert	4	25	168	1229	9502
prozentualer Fehler	105,00	13,60	2,20	0,12	0,05

Mit zunehmendem x nimmt der prozentuale Fehler merklich ab.
Um die theoretische Begründung der Näherungsformeln machten sich Bernhard Riemann (1826-1866), Dirichlet, Jacques Hadamard (1865-1963), De la Vallée Poussin und vor allem Pafnutij Lvovic Cebysev sehr verdient.

Ein weiteres Problem der Primzahlforschung stellt die Suche nach einem gesetzmäßigen Ausdruck, der ausschließlich Primzahlen liefert, dar.
Wir erwähnten bereits, dass Dirichlet einwandfrei zeigen konnte, dass jede arithmetische Folge erster Ordnung mit dem Anfangsglied r und der zu r teilerfremden Differenz m unendlich viele Primzahlen enthält.

Eine derartige Reihe liefert außer den Primzahlen noch unendlich viele zusammengesetzte Zahlen. Auch Trinome und Polynome liefern niemals ausschließlich Primzahlen.

So bemerkte schon Euler, dass der Ausdruck $x^2 + x + 41$ für $x = 0, 1, 2, ..., 39$ Primzahlen, für $x = 40$ und $x = 41$ jedoch zusammengesetzte Zahlen liefert.
Pierre de Fermat (1601-1665) stellte 1637 die Behauptung auf, dass der Ausdruck $2^{2^\nu} + 1$ stets Primzahlen ergibt. In einem Brief an Blaise Pascal (1623-1662) gibt Fermat 1654 zu, dass er keinen Beweis für seine Behauptung erbringen könne.

Für $\nu = 0, 1, 2{,}3{,}4$ ergeben sich auch die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537. Dagegen findet man für $\nu = 5$ die Zahl 4294967297, die Euler als zusammengesetzte Zahl, nämlich $641 \cdot 6700417$, erkannte.
Ebenso wurde für $\nu = 6, 7, 8, ..., 16$ und für noch 24 weitere v-Werte der Nachweis erbracht, dass die Zahlen $2^{2^\nu} + 1$ keine Primzahlen sind. Für $\nu = 17$ konnte dieser Nachweis noch nicht geführt werden.

Ob es außer den genannten fünf Primzahlen noch weitere Primzahlen von der Form $2^{2^\nu}+1$ gibt, ist eine noch ungeklärte Frage.

4 Vollkommene Zahlen

Eine natürliche Zahl N wird dann als vollkommene Zahl bezeichnet, wenn die Summe aller Teiler von N (einschließlich 1 und N) gleich $2N$ ist. Euklid wies in seinen Elementen (IX, 36) nach, dass jede gerade Zahl der Form $(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$ eine vollkommene Zahl ist, wenn 2^n-1 eine Primzahl ist.

Für $n=1$ ergibt sich $N=1$; da jedoch $2^1-1=1$ keine Primzahl ergibt, rechnen wir $N=1$ nicht zu den vollkommenen Zahlen.
Für $n=2,3,5,7,13,17,19,31$ ergeben sich die vollkommenen Zahlen

$$6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128$$

Der Minoritenpater Marin Mersenne (1588-1648) und Euler beschäftigten sich eingehend mit den vollkommenen Zahlen. Da bei der Untersuchung der vollkommenen Zahlen die Primzahlen der Form 2^n-1 eine besondere Rolle spielen, wandte sich das Interesse der Mathematiker diesen sogenannten Mersenneschen Primzahlen zu.

Bis heute sind 20 Mersennesche Primzahlen nachgewiesen worden, nämlich für $n=2$, 3, 5,7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253 und 4423. Somit muss es auch mindestens 20 vollkommene Zahlen geben.

Sehr wenig weiß man über die etwaige Existenz ungerader vollkommener Zahlen. Bisher konnte noch keine ungerade vollkommene Zahl nachgewiesen werden.

Euler bewies, dass jede gerade vollkommene Zahl die Form $(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$ haben muss, wobei 2^n-1 eine Primzahl sein muss. Ferner konnte Euler den Nachweis führen, dass eine ungerade vollkommene Zahl, falls eine solche existiert, die Form $p^{4k+1}\cdot q^2$ haben muss, wobei p eine Primzahl der Form $4n+1$ ist und die ungerade Zahl q nicht gleich 1 und nicht durch p teilbar sein darf.
Man fand auch für ungerade vollkommene Zahlen die einschränkende Bedingung, dass sie nicht kleiner als 10^{36} sein können.

Als Besonderheit der geraden vollkommenen Zahlen stellte man fest, dass sie entweder mit 6 oder 28 enden; ferner bewies T.L. Heath (1861-1940), dass jede gerade vollkommene Zahl - ausgenommen 6 - als Summe von $2^{\frac{n-1}{2}}$ Kubikzahlen dargestellt werden kann, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 28 &= 1^3+3^3,\\ 496 &= 1^3+3^3+5^3+7^3,\\ 8128 &= 1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Wir weisen noch darauf hin, dass die Zahl n in dem Ausdruck $2^{\frac{n-1}{2}}$ mit der Zahl n der vorher angegebenen Form $(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$ identisch ist.

Ferner wurde festgestellt, dass jede gerade vollkommene Zahl, außer der 6, bei der Division durch 9 den Rest 1 ergibt. Die Frage, ob es unendlich viele oder eine größte vollkommene Zahl gibt, ist noch nicht geklärt.

5 Primzahlzwillinge

Abgesehen von dem Primzahlpaar 2 und 3 ist der Mindestabstand von zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen gleich 2.
Primzahlpaare dieser Art bezeichnet man als Primzahlzwillinge, z.B. 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19 usw.

Auch die Primzahlzwillingspaare werden nach oben hin seltener. Die Abnahme unterliegt jedoch keinem angebbaren Gesetz und ist ziemlich unregelmäßig. So liegen zwischen 1 und 500 genau 24, zwischen 501 und 1000 nur 11 und zwischen 1001 und 1500 merkwürdigerweise 15 Zwillingspaare.

Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge oder ob es ein größtes Zwillingspaar gibt, ist bisher noch ungelöst.
Das Problem der Primzahldrillinge ist sehr einfach zu lösen. Außer den Drillingen 3, 5 und 7 kann es weiter keine Drillinge gehen, da von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stets eine Zahl durch 3 teilbar ist.
Daraus folgt, dass es auch keine Vierlinge von Primzahlen, die in den Abständen 2, 2, 2 auftreten, geben kann. Bezeichnet man dagegen Primzahlen mit den Abständen 2, 4, 2 als Primzahlvierlinge, so kann man mit Hilfe einer Primzahltabelle solche Vierlinge ohne weiteres feststellen, z.B. 5, 7, 11, 13 oder 101, 103, 107, 109. Sogar noch zwischen 290000 und 300000 gibt es Primzahlvierlinge:

294311, 294313, 294317, 294319;
295871, 295873, 295877, 295879;
299471, 299473, 299477, 299479.

Ob es unendlich viele Gruppen von Primzahlvierlingen gibt, ist bisher nicht bekannt.

6 Die Goldbachsche Vermutung

Der Mathematiker Christian Goldbach (1691-1764) schreibt in einem Brief vom 7. Juni 1742 an Euler:

"Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die größer ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum[4] sei. Zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

[4] eine Summe von drei Primzahlen

Euler antwortet hierauf am 30. Juni 1742: "Dass aber jeder numeros par eine Summa duorum primorum[5] sei, halte ich für ein gewisses Theorema, ungeacht ich dasselbe nicht demonstieren kann."

Ergänzend sei bemerkt, dass sowohl Euler als auch Goldbach in ihrem Briefwechsel 1 zu den Primzahlen rechnen.
Wenn man, wie heute üblich, 1 nicht zu den Primzahlen rechnet, so kann man die im Vergleich zur Goldbachschen Vermutung etwas weitergehende Behauptung folgendermaßen formulieren:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann mindestens auf eine Art in zwei Primzahlen zerlegt werden, also $4 = 2 + 2$; $6 = 3+ 3$; $10 = 5 + 5 = 3 + 7$; $22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11+ 11$ usw.

Wie bei manchen anderen mathematischen Problemen verblüfft die Goldbachsche Vermutung durch Einfachheit und Leichtverständlichkeit der Problemstellung.
Wer die nötige Geduld besitzt, kann auch ohne weiteres für beliebig hohe gerade Zahlen die Zerlegung in zwei Primzahlen vornehmen.

So untersuchte Georg Cantor (1845-1918), der Begründer der Mengenlehre, alle geraden Zahlen von 4 bis 1000 bezüglich ihrer Zerlegbarkeit in zwei Primzahlen. Für die Lösung des Problems ist damit so gut wie nichts gewonnen. E. Mehle konnte 1911 zeigen, dass in dem Bereich von 4000000 bis 9000000 höchstens vierzehn Ausnahmen, für die die Goldbachsche Vermutung nicht zutrifft, möglich sind.

Ein konkretes Gegenbeispiel konnte Mehle jedoch auch nicht angeben. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Goldbachschen Theorems zwar sehr groß, ein exakter Beweis ist hierdurch jedoch nicht erbracht.

Im Jahre 1930 lieferte der sowjetische Mathematiker Lev Genrichovic Snirelman einen entscheidenden Beitrag zur Lösung des Goldbachschen Problems. Snirelman geht von der Annahme aus, dass es irgendeine vollständig bestimmte, vorläufig unbekannte ganze Zahl C gebe, die so beschaffen ist, dass jede natürliche Zahl N in der Form einer Summe von nicht mehr als C Primzahlen dargestellt werden kann. Man kann dies so formulieren, dass

$$N = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n$$

ist, wobei $p_1, p_2, ..., p_n$ Primzahlen sind und n kleiner oder höchstens gleich C ist. Kann der Nachweis erbracht werden, dass $C = 3$ ist, so ist die Behauptung Goldbachs erwiesen.

Als kleinster Wert für C wurde zunächst 67 gefunden. Schließlich bewies Ivan Matveevic Vinogradov, dass für genügend große ungerade Zahlen die Konstante C nicht größer als drei sei.

[5] jede gerade Zahl eine Summe von zwei Primzahlen

7 Das Waringsche Problem

Der englische Mathematiker Eduard Waring (1734-1798) stellte 1770 in seinen "Meditationes algebraicae" (Algebraische Betrachtungen) ohne Beweis die Behauptung auf:

"Jede ganze Zahl ist entweder eine Kubikzahl oder die Summe von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 Kubikzahlen, entweder ein Biquadrat oder die Summe von 2, 3, ... oder 19 Biquadraten."

David Hilbert (1862-1943) lieferte 1909 den Beweis für den Satz in der erweiterten Form:

"Für eine beliebige natürliche Zahl n existiert eine natürliche Zahl T, so dass jede natürliche Zahl durch nicht mehr als T Summanden dargestellt werden kann, die n-te Potenzen von natürlichen Zahlen sind.
Für $n = 3$ ist $T = 9$ und für $n = 4$ ist $T = 19$ usw.

Beispiele:
$$20 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3; \qquad 30 = 2^4 + 14 \cdot 1^4$$

8 Fermat-Eulerscher Primzahlsatz

Pierre de Fermat stellte um 1660 in seinen "Bemerkungen zu Diophant" folgenden Satz auf:

"Eine Primzahl von der Form $4n + 1$ und ihr Quadrat sind nur auf eine einzige Art Summen von zwei Quadraten, ihr Kubus und ihre vierte Potenz auf zwei Arten, ihre fünfte und sechste Potenz auf drei Arten usw. ..."

Beispiele: $5 = 2^2 + 1^2$; $25 = 3^2 + 4^2$; $125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$; $625 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$ usw.

Fermat gab für seine Behauptung keinen Beweis.
Euler schreibt in seiner "Anleitung zur Algebra" (2. Abschnitt, Kapitel 11, Nr. 172):

"Dass aber alle Primzahlen von der Form $4n+1$ eine Summe von zwei Quadraten sind, ist zwar gewiss, aber nicht so leicht zu beweisen."

In einer anderen Abhandlung (1754/1755) gelang Euler dann der Beweis. Diese Eigenschaft von Primzahlen von der Form $4n + 1$ spielt eine bedeutende Rolle bei der Feststellung der Primzahleigenschaft großer Zahlen.
Heute sind mehrere Beweise dieses Satzes bekannt.

9 Der Wilsonsche Satz

In dem vorhin genannten Werk "Meditationes algebraicae" von Eduard Waring steht folgende Bemerkung:

"Ist p eine Primzahl, dann ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) + 1}{p}$$

eine ganze Zahl. Diese sehr elegante Eigenschaft von Primzahlen hat der ausgezeichnete, in mathematischen Dingen sehr bewanderte John Wilson Armiger (1741-1793) entdeckt."

Wir formulieren diesen sogenannten Wilsonschen Satz folgendermaßen: "Die Zahl p ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) + 1$ durch p ohne Rest teilbar ist".

Dieser Satz gibt theoretisch die Möglichkeit zu entscheiden, ob eine Zahl Primzahl ist oder nicht. Den Beweis für den Wilsonschen Satz erbrachte Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Was ist jedoch praktisch mit dem Wilsonschen Satz für die Primzahlforschung gewonnen? Nicht allzuviel; da nämlich schon für verhältnismäßig kleine p-Werte der Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) + 1$ riesige Zahlen ergibt, wird man bei der Untersuchung der Primzahleigenschaft einer beliebigen Zahl lieber auf das Sieb des Eratosthenes oder auf den Fermat-Eulerschen Primzahlsatz zurückgreifen.

10 Periodische Dezimalbrüche

Verwandelt man einen gemeinen Bruch[6] in den ihm gleichwertigen Dezimalbruch, so hängt die Art des entstehenden Dezimalbruches ausschließlich vom Nenner des gemeinen Bruches ab.
Besteht der Nenner nur aus Potenzen der Zahlen 2 und 5, so bekommt man einen endlichen Dezimalbruch, und zwar besitzt dieser endliche Dezimalbruch so viele Stellen, wie der Exponent der höchste Potenz von 2 oder 5 Einheiten hat.
So ergeben sich für den Nenner $8000 = 2^6 \cdot 5^3$ sechsstellige Dezimalbrüche.

Diejenigen gemeinen Brüche, deren Nenner nicht durch 2 oder 5 teilbar sind, liefern rein-periodische Dezimalbrüche, deren Periode sofort nach dem Komma beginnt.
Sind im Nenner die Faktoren 2 und 5, allgemein das Produkt $2^\alpha \cdot 5^\beta$ enthalten, so treten hinter dem Komma vor der Periode so viele Vorziffern auf, wie die größere der Zahlen α und β angibt. Dezimalbrüche dieser Art werden als gemischt-periodische Dezimalbrüche bezeichnet.

Im folgenden werden wir nur rein periodische Dezimalbrüche untersuchen. Zunächst interessiert uns die Anzahl der Ziffern der Perioden. Da der Zähler des gemeinen Bruches ohne Einfluss auf die Länge der Periode ist, können wir als Zähler die Einheit wählen. Bezüglich des Nenners beschränken wir uns auf Primzahlen p (außer 2 und 5).

Für $p = 3$ finden wir $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}33...$, also die einstellige Periode 3.

[6] Wir setzen voraus, dass Zähler und Nenner des gemeinen Bruch keinen gemeinsamen Teiler enthalten.

Für $p = 7$ ergibt sich $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}142857...$, also die sechsstellige Periode 142857.

Für $p = 11$ erhalten wir $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}09...$, also die zweistellige Periode 09.

Für $p = 13$ finden wir $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}076923...$, also die sechsstellige Periode 076923.

Für $p = 17$ ergibt sich die sechzehnstellige Periode 0588235294117647.

$p = 19$ erhalten wir die achtzehnstellige Periode 052631578947368421.

$p = 23$ ergibt sich eine zweiundzwanzigstellige Periode.

Es gibt natürlich umfangreiche Tabellenwerke, in denen für alle in einem bestimmten Bereich liegenden Primzahlen p die zugehörigen Periodenlängen λ angegeben sind.

Tabelle 4

p	3	7	11	13	17	19	23	39	31	37	41
λ	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5
p	43	47	53	61	67	71	73	79	83	89	97
λ	21	46	13	60	33	35	8	13	41	44	96

Die Tabelle enthält die λ-Werte für alle Primzahlen (außer 2 und 5) unter 100.

Es liegt nun sehr nahe, die Frage zu stellen, welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Primzahlnenner p und der zugehörigen Periodenlänge λ.
Aus vorstehender Tabelle können wir ersehen, dass λ höchstens gleich $p-1$ sein kann. Ist $\lambda < p-1$, so ist λ ein echter Teiler von $p-1$.

Hier erhebt sich nun die Frage, in welchen Fällen ist $\lambda = p-1$ bzw. $\lambda < p-1$. Das einfachste, etwas primitive Verfahren zu Beantwortung dieser Frage besteht darin, dass man $\frac{1}{p}$ durch Ausführung der Division in einen periodischen Dezimalbruch verwandelt. Für größere p-Werte ist dies ein u.U. zeitraubendes und daher wenig ansprechendes Verfahren, das keinen tieferen Einblick in den theoretischen Zusammenhang zwischen p und λ gewährt.

Einige Aufschlüsse erhalten wir, wenn wir die Rückverwandlung eines periodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch vornehmen. Der Engländer John Robertson (1712-1776) stellte im Jahre 1768 folgende allgemeingültige Regel auf:

"Ein rein-periodischer Dezimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruch, dessen Zähler die Periode ist und dessen Nenner von so vielen Nennen gebildet wird, als die Periode Ziffern hat."

Beispiele :

$$0,\overline{12}12... = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$
$$0,\overline{027}027... = \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$$
$$0,\overline{02439}02439... = \frac{2439}{99999} = \frac{1}{41}$$
$$0,\overline{00813}00813... = \frac{813}{99999} = \frac{1}{123}$$
$$0,\overline{285714}285714... = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$$

usw.

Aus diesen Beispielen ist zu ersehen, dass bei der Bestimmung von λ die Primzahlzerlegung der aus Nennen bestehenden Nenner eine besondere Rolle spielt. Wir zerlegen also solche Nenner in ihre Primfaktoren:

$$\begin{aligned}
9 &= 10^1 - 1 = 3^2 \\
99 &= 10^2 - 1 = 3^2 \cdot \underline{11} \\
999 &= 10^3 - 1 = 3^3 \cdot \underline{37} \\
9999 &= 10^4 - 1 = (10^2 - 1)(10^2 + 1) = 3^2 \cdot 11 \cdot \underline{101} \\
99999 &= 10^5 - 1 = 3^2 \cdot \underline{41} \cdot \underline{271} \\
999999 &= 10^6 - 1 = 3^3 \cdot \underline{7} \cdot 11 \cdot \underline{13} \cdot 37 \\
9999999 &= 10^7 - 1 = 3^2 \cdot \underline{239} \cdot \underline{4649} \\
99999999 &= 10^8 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot \underline{73} \cdot 101\underline{137} \\
999999999 &= 10^9 - 1 = 3^4 \cdot 37 \cdot \underline{333667} \\
9999999999 &= 10^{10} - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \underline{9091}
\end{aligned}$$

Die Herstellung dieser Übersicht ist nicht ganz einfach; so bereitet die Feststellung, dass 333667 eine Primzahl ist, erheblich Schwierigkeiten. Die bei den Zerlegungen in Primfaktoren jeweils neu auftretenden Primteiler wurden unterstrichen. Die Aufstellung ergibt z.B. folgendes:

$\frac{1}{101}$ führt und eine vierstellige Periode, da der Nenner vier Neunen aufweist. $\frac{1}{9091}$ führt eine zehnstellige Periode, da der Nenner aus zehn Neunen besteht usw.

Diese Übersicht gibt uns einen nur sehr bescheidenen Einblick in den theoretischen Zusammenhang zwischen p und λ. Eine vollständige Klärung dieses Zusammenhanges ist auf diesem Wege nicht möglich. Hier liegt ein noch ungelöstes Problem vor.
Es wurde auch schon von bedeutenden Mathematikern die Lösung folgender Frage in Angriff genommen:

Wie muss die Primzahl p beschaffen sein, wenn der zugehörige λ-Wert den Höchstwert $p - 1$ erreichen soll?
Über den Bau der Primzahlen p, für die die Periodenlängen gleich

$$\frac{p-1}{2}, \quad \frac{p-1}{3}, \quad \frac{p-1}{4}, \quad \text{und} \quad \frac{p-1}{8}$$

sind, liegen spezielle Untersuchungsergebnisse von Euler, Lagrange, Gauß, Jacobi u.a. vor.
Leider müssen wir es uns versagen, auf diese Fragen, die zu den schwierigsten Problemen der Zahlentheorie gehören, näher einzugehen.

11 Die Zerlegung des Binoms $x^n - 1$

Bei der Untersuchung der periodischen Dezimalbrüche nahmen wir Zerlegungen von Ausdrücken $10^n - 1$ vor. Wir verallgemeinern die Aufgabenstellung dahin, dass wir nach der Zerlegung der Binome

$$x^n - 1$$

fragen. Da diese Aufgabe mit dem Kreisteilungsproblem in einem sehr engen Zusammenhang steht, ist die Beschaffenheit der Faktoren, in die sich das Binom $x^n - 1$ zerlegen lässt, von besonderem Interesse.
Für die Binome mit dem Exponenten $n < 7$ ergeben sich folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned} x - 1 &= x - 1 \\ x^2 - 1 &= (x-1) \cdot (x+1) \\ x^3 - 1 &= (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) \\ x^4 - 1 &= (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 1) \\ x^5 - 1 &= (x-1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ x^6 - 1 &= (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Wie aus der elementaren Algebra bekannt ist, kann $x^n - 1$ stets in

$$(x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$$

zerlegt werden. Der zweite Faktor kann nun in vielen Fällen noch weiter zerlegt werden. Bei den Zerlegungen bis $n = 100$ ergab sich nun, dass die in den Faktoren auftretenden Koeffizienten -1, 0 oder $+1$ waren. Man kann dies auch folgendermaßen formulieren:

Die absoluten Beträge der Koeffizienten überschreiten die Zahl Eins nicht. Da dies nun für $n < 101$ der Fall war, lag die Vermutung nahe, dass diese Tatsache für jedes beliebige n zutreffe. Im Jahre 1938 forderte der sowjetische Mathematiker N. G. Cebotarev (1894-1947) in der Zeitschrift "Fortschritte der mathematischen Wissenschaften", Heft IV, die Mathematiker auf, diese Vermutung zu beweisen.
Der Beweis wurde nicht erbracht; vielmehr konnte der sowjetische Mathematiker W. Ivanov zeigen[7], dass in einem der Faktoren von $x^{105} - 1$ zweimal der Koeffizient -2 auftritt. Damit war das Problem gelöst, d.h. gezeigt, dass die Behauptung nicht richtig war.

12 Das Potenzsummenproblem

Der schweizer Mathematiker Jacob Bernoulli (1656-1705) behandelt in seiner "Ars conjectandi (Mutmaßungskunst = Wahrscheinlichkeitsrechnung)" die Berechnung der Summen von Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + 2 + 3 + ... + n, \\ S(n^2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2, \\ S(n^3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3, \quad ... \\ S(n^p) &= 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p \end{aligned}$$

[7]Fortschritte der mathematischen Wissenschaften 1941, Heft IV

Bernoulli entwickelte die Formeln bis zur zehnten Potenz. Für niedrige Potenzen ist die Aufstellung der Formeln verhältnismäßig einfach, da die p-ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Folge p-ter Ordnung und deren Summe $S(n^p)$ ein Polynom $(p+1)$-ten Grades bildet. Für $p = 1$ ergibt sich die bekannte Beziehung

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

die der sechsjährige Gauß nachentdeckte.[8]

Die Formel für $S(n^2)$ erhalten wir aus dem Ansatz:

$$S(n^2) = An^3 + Bn^3 + Cn$$

Setzen wir in diese Gleichung der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ ein, so erhalten wir für die Koeffizienten A, B, C die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 8A + 4B + 2C &= 5 \\ 27A + 9B + 3C &= 14 \end{aligned}$$

und hieraus $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, also

$$S(n^2) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es ist also ohne weiteres möglich, auf elementarem Wege die Formeln für $S(n^p)$ abzuleiten. Bernoulli stellte seine Beziehungen wohl auf induktivem Wege auf. Er fand:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
S(n^2) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S(n^3) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S(n^4) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S(n^5) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
S(n^6) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
S(n^7) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
S(n^8) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S(n^9) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
S(n^{10}) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

[8]Die Summenformel für die arithmetische Reihe erster Ordnung war schon den Pythagoreern (6. Jh. v.u.Z.) bekannt.

"Wer aber", schreibt Bernoulli, "das Gesetz der Reihen genauer betrachtet, kann auch ohne die Umwege der Rechnung die Tabelle fortsetzen."
Der geniale Mathematiker kommt dann zu folgender allgemeinen Formel:

$$S(n^p) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{p}{2} \cdot B_1 \cdot n^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 \cdot n^{p-3} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 \cdot n^{p-5} + ...$$

Die Exponenten von n der beiden ersten Glieder sind $p+1$ und p, die zugehörigen Koeffizienten sind $\frac{1}{p+1}$ und $\frac{1}{2}$. Vom dritten Glied ab nehmen die Exponenten von n jeweils um 2 ab, so dass der Exponent des letzten Gliedes 2 oder 1 ist, je nachdem, ob p eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Die Koeffizienten $B_1, B_2, B_3, ...$ die später als Bernoullische Zahlen[9] bezeichnet wurden, ergeben sich aus folgenden Rekursionsgleichungen, die dadurch entstehen, dass man in der obigen Beziehung $n = 1$ und für p nacheinander die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... setzt. Dann ist $S(1^p) = 1$ und somit:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} B_1 = 1$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} B_1 + B_2 = 1$$
$$\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{6}{2} B_1 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 + B_3 = 1$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{8}{2} B_1 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 + B_4 = 1$$
$$\frac{1}{11} + \frac{1}{2} + \frac{10}{2} B_1 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} B_4 + B_5 = 1$$

Man erhält hieraus schrittweise die Bernoullischen Zahlen:

$$B_1 = \frac{1}{6}; B_2 = -\frac{1}{30}; B_3 = \frac{1}{42}; B_4 = \frac{1}{20}; B_5 = \frac{5}{66} \qquad \text{usw.}$$

Die Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen können auch in der vereinfachten Form

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{(p_1)}{2} B_1 + \frac{(p_3)}{4} B_2 + \frac{(p5)}{6} B_3 + \frac{(p_7)}{8} B_4 + ... = 1$$

geschrieben werden. Auch hier sind der Reihe nach für p die geraden Zahlen 2, 4, 6, zu setzen. (p_i) bedeutet

$$\frac{p(p-1)(p-2)...(p-i+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot i} \qquad (i = 1{,}3{,}5{,}...)$$

Auch bei der Berechnung der Summen der unendlichen Reihen

$$1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + ...$$

spielen die Bernoullischen Zahlen eine Rolle. Wir werden hierauf in dem Abschnitt über die Zahl π zurückkommen und dabei auf ein noch ungelöstes Problem stoßen.

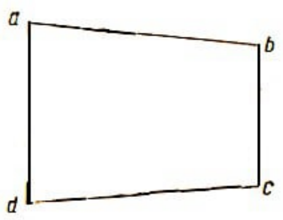
[9] Die Bezeichnungsweise ist nicht einheitlich.

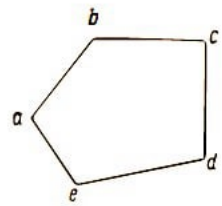
13 Das Euler-Catalansche Problem

In einem an Goldbach gerichteten Brief[10] vom 24. 8./4.9. 1751 schreibt Euler:

"Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft, an wie vielerlei Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinie in triangula (Dreiecke) zerschnitten werden könne.

Also ein quadrilaterum (Vierseit) (Abb. 1) kann entweder durch die Diagonalen ac oder durch bd und also auf 2erlei Art in zwei triangula resolviert (zerlegt) werden.
Ein Fünfeck (Abb. 2) wird durch 2 Diagonales in 3 Triangula geteilet, und solches kann auf 5erlei verschiedene Arten geschehen nämlich durch die Diagonales
I. ac, ad ; II. bd, be; III. ca, ce; IV. db, da; V. ec, eb





Ferner wird ein Sechseck durch 3 diagonales in 4 triangula zerteilet und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter (allgemein): da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-3$ triangula zerschnitten wird, auf wie vielerlei Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per Induktionen gefunden,

wann $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$
so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430.$

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sei

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot ... \cdot (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot ... \cdot (n-1)} \quad \text{“}$$

Bezeichnet man das zu n gehörige x mit x_n, so ergibt sich die Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot (4n-6)}{n} \qquad \text{für} \quad n = 3,4,5,...$$

Johann Andreas von Segner (1704-1777), dem Euler die sieben ersten Zerlegungszahlen 1, 2, ..., 429 mitteilte, stellte für x_n eine andere Rekursionsformel auf.[11] Setzt man $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$, so ist:

$$x_n = x_2 x_{n-1} + x_3 x_{n-2} + ... + x_{n-1} x_2$$

[10] L. Euler u. Ch. Goldbach, Briefwechsel 1729-1764, Akademie Verlag, Berlin 1965.
[11] Novi Comment. Acad. Petropol. 1758/59 Tom VII.

Beispiele:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_2x_3 + x_3x_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ x_5 &= x_2x_4 + x_3x_3 + x_4x_2 = 5 \\ x_6 &= x_2x_5 + x_3x_4 + x_4x_3 + x_5x_2 = 14 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Achtzig Jahre später brachte der französische Mathematiker Catalan im Journal de Mathématiques (1838) eine Arbeit heraus, in der das Eulersche Problem mit einer algebraischen Aufgabe in Zusammenhang gebracht wurde. Das sogenannte Catalansche Problem lautet:

"Auf wieviel Arten lässt sich ein Produkt aus n verschiedenen Faktoren paarig darstellen?
Wir bezeichnen eine Produktdarstellung als paarig, wenn stets nur zwei Faktoren miteinander multipliziert werden, wobei das bei einer derartigen paarigen Multiplikation entstehende Produkt für die Fortsetzung der Rechnung als ein Faktor gilt."

Für $n = 2$ Faktoren a, b gibt es $y_2 = 2$ Darstellungen, nämlich ab und ba. Für $n = 3$ Faktoren a,b,c ergeben sich $y_3 = 12$ Darstellungen, nämlich

$$(ab)c, a(bc), (ac)b, a(cb), (ba)c, b(ac), (bc)a, b(ca), (ca)b, c(ab), (cb)a, c(ba)$$

Eine einfache Überlegung ergibt:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2 \\ y_3 &= 2 \cdot 6 = 12 \\ y_4 &= 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120 \\ y_5 &= 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 = 1680 \\ &\dots \\ y_n &= 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-6) \end{aligned}$$

Als Rekursionsformel finden wir:

$$y_{n+1} = y_n \cdot (4n-2)$$

Sollen die Faktoren in einer bestimmten Reihenfolge (etwa lexikalisch) angeschrieben werden, dann gibt es für $n = 2$ nur $z_2 = 1$ Darstellung. Für $n = 3$ finden wir $z_3 = \frac{y_3}{3!} = 2$, es sind dies die Produkte $(ab)c$ und $a(bc)$. Für $n = 4$ ergibt sich $z_4 = \frac{y_4}{4!} = 5$; allgemein

$$z_n = \frac{y_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-6)}{n!}$$

Die entsprechende Rekursionsformel lautet:

$$z_{n+1} = \frac{z_n \cdot (4n-2)}{n+1}$$

Eine weitere Rekursionsformel ergibt sich, wenn man $z_1 = z_2 = 1$ setzt, zu:

$$z_n = z_1z_{n-1} + z_2z_{n-2} + \dots + z_{n-1}z_1$$

Der Zusammenhang zwischen den x- und z-Werten ist gegeben durch

$$x_n = z_{n+1} \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = z_n$$

Der Beweis für die angegebenen Beziehungen kann auch mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion erbracht werden, worauf wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen.

14 Steiners Gesetzmäßigkeiten bei der Teilung der Ebene und des dreidimensionalen Raumes

Jacob Steiner (1796-1863) behandelt in seiner Abhandlung "Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes", Crelles Journal, Bd. I [1826], S.349-361, und Steiner, Gesammelte Werke, Berlin 1881, Bd. I, S. 77-94) unter anderen Problemen die beiden Aufgaben:

I. In wieviel Teile kann die Ebene durch n Geraden höchstens zerlegt werden?

II. In wieviel Teile kann der Raum durch n Ebenen höchstens zerlegt werden?

Der Zusatz "höchstens" bezieht sich auf die Tatsache, dass die Anzahl der Teilstücke der Ebene verringert wird, wenn unter den n Geraden sich Parallele befinden oder wenn mehr als zwei Geraden durch einen Punkt gehen. Analoges gilt für den Zusatz "höchstens" bei der II. Aufgabe. Die Fälle, in denen parallele Geraden bzw. Ebenen auftreten, werden von Steiner ebenfalls behandelt, sie sollen hier jedoch unberücksichtigt bleiben.

Wie Steiner einleitend bemerkt, wurde er durch die Formenlehre des berühmten Pädagogen Heinrich Pestalozzi (1746-1827) auf diese Frage hingewiesen. Steiner gehörte mehrere Jahre hindurch dem um Pestalozzi geleiteten Pädagogium zu Yverdon zuerst als Schüler und später als Hilfslehrer an.

Die I. Aufgabe löst Steiner auf folgende Weise:

Die Ebene wird durch eine in ihr liegende Gerade in zwei Teile zerlegt; durch eine zweite Gerade, die die erste schneidet, wird die Anzahl der Ebene um zwei vermehrt; durch eine dritte Gerade, die die beiden ersten Geraden in zwei Punkten schneidet, um drei; durch eine vierte Gerade, die die drei ersten in drei Punkten schneidet, um vier usw.:
Jede folgende Gerade vermehrt die Anzahl der Teile der Ebene um ebenso viel, als die Zahl der Teile beträgt, in die die Gerade durch die vorhandenen Geraden geteilt wird; daher wird die Ebene durch n beliebige in ihr liegende Gerade höchstens in

$$t_n = 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (n-1) + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Teile geteilt. Steiner fügt hier noch die Bemerkung bei, dass von diesen t_n Teilen $2n$ unbegrenzt und $\frac{n^2-3n+2}{2}$ begrenzt sind.

Wie folgende Tabelle zeigt, bilden die aufeinanderfolgenden t_n-Werte eine arithmetische Folge zweiter Ordnung:

$$\begin{array}{rcccccccc}
n = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\
t_n = & 1, & 2, & 4, & 7, & 11, & 16, & 22, & \dots \\
 & & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\
 & & & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots
\end{array}$$

Lösung der II. Aufgabe

Bei der I. Aufgabe ergab sich als Lösung eine arithmetische Folge zweiter Ordnung. Es wird sich zeigen, dass die II. Aufgabe auf eine arithmetische Folge dritter Ordnung führt. Der dreidimensionale Raum werde durch n Ebenen in T_n Teile zerlegt. Kommt eine weitere Ebene hinzu, so wird diese von den bereits vorhandenen n Ebenen in n Geraden geschnitten. Die hinzugekommene $(n+1)$-te Ebene wird daher durch jene n Geraden in t_n Teile zerlegt. Hieraus ergibt sich

$$T_{n+1} = T_n + t_n$$

Für $n = 1, 2, 3, 4,\dots$ erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{array}{llccc}
T_1 = 1+1 & = 2 & & & \\
 & & 2 & & \\
T_2 = T_1 + t_1 = 2 + 2 & = 4 & & 2 & \\
 & & 4 & & 1 \\
T_3 = T_2 + t_2 = 4 + 4 & = 8 & & 3 & \\
 & & 7 & & 1 \\
T_4 = T_3 + t_3 = 8 + 7 & = 15 & & 4 & \\
 & & 11 & & 1 \\
T_5 = T_4 + t_4 = 15 + 11 & = 26 & & 5 & \\
 & & 16 & & 1 \\
T_6 = T_5 + t_5 = 26 + 16 & = 42 & & 6 & \\
 & & 22 & & \\
T_7 = T_6 + t_6 = 42 + 22 & = 64 & & \dots &
\end{array}$$

Die ersten Differenzen dieser Folge sind die t_n-Werte; wir haben also für die T_n-Werte eine arithmetische Folge dritter Ordnung gefunden, deren allgemeines Glied die Form

$$T_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

hat.

Aus den Werten T_1, T_2, T_3, T_4 erhalten wir für die vier Koeffizienten A, B, C, D die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A + B + C + D &= 2, \\
8A + 4B + 2C + D &= 4, \\
27A + 9B + 3C + D &= 8, \\
64A + 16B + 4C + D &= 15
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems führt auf:

$$A = \frac{1}{6}; B = 0; C = \frac{5}{6}; D = 1$$

Ergebnis:

$$T_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

Um die Richtigkeit dieser Beziehung zu erhärten, wenden wir die Methode der vollständigen Induktion an:
Die Beziehung $T_n = \frac{n^3+5n+6}{6}$ ist für jede natürliche Zahl n richtig, wenn sie

a) für $n = 1$ richtig ist und wenn
b) aus der Richtigkeit der Beziehung für eine willkürliche natürliche Zahl $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Die Bedingung a) ist erfüllt, da $T_1 = \frac{1+5+6}{6} = 2$ ist.
Die Bedingung b) ist ebenfalls erfüllt, da

$$T_{n+1} = T_n + t_n$$

auf die Identität

$$\frac{(n+1)^3 + 5(n+1) + 6}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} + \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

führt. Auch hier unterscheidet Steiner n^2-n+2 unvollkommen begrenzte und $\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$ vollkommen begrenzte Teile. Hieraus zieht Steiner den wichtigen Schluss:
Da $\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$ für $N = 1, 2, 3$ den Wert 0 und nur für $n = 4$ den Wert 1 ergibt, können nicht weniger als vier Ebenen einen Körper begrenzen, und zwar können diese vier Ebenen nur einen Körper begrenzen; dieser Körper ist das allgemeine Tetraeder.

Steiner erweiterte die Fragestellung auch auf die Teilung der Ebene durch Kreise und auf die Zerlegung des Raumes durch Kugelflächen. Ferner wird in der Steinerschen Arbeit der Satz bewiesen:

Die Kugelfläche wird durch n beliebige in ihr liegenden Kreise höchstens in $n^2 - n + 2$ Teile geteilt.

Auch auf die n-dimensionalen Räume lassen sich die Steinerschen Gesetzmäßigkeiten erweitern. So können im n-dimensionalen Raum nicht weniger als $n + 1$ lineare Räume von der Dimension $n - 1$ ein Polytop[12] begrenzen, und zwar existiert genau ein Polytop dieser Art, der sogenannte Simplex (S_n).

[12] Ein Polytop ist ein n-dimensionales Gebilde im n-dimensionalen Raum, das von $(n - 1)$-dimensionalen Gebilden begrenzt ist.

15 Magische Quadrate

Unter einem magischen Quadrat versteht man ein Quadrat, das schachbrettartig in Felder eingeteilt ist, in die die natürlichen Zahlen oder auch die Glieder einer arithmetischen Folge so eingetragen sind, dass die Horizontal-, Vertikal- und Diagonalreihen gleiche Summen ergeben.

Die einzelnen Felder bezeichnet man auch als Zellen. Wir beschränken uns hier auf Quadrate, in deren Felder die natürlichen Zahlen eingetragen werden. In die n^2 Zellen werden also die Zahlen von 1 bis n^2 eingetragen, deren Summe

$$\frac{(1+n^2)n^2}{2}$$

beträgt. Jede Horizontal-, Vertikal- und Diagonalreihe muss demnach die Summe

$$\frac{(1+n^2)n^2}{2n} = \frac{(1+n^2)n}{2}$$

ergeben. Ein aus $2^2 = 4$ Feldern bestehendes magisches Quadrat kann es, wie ein Versuch zeigt, nicht geben. Für das magische Quadrat mit $3^2 = 9$ Feldern ist die Summe jeder Horizontal-, Vertikal- und Diagonalreihe gleich 15.
Man bezeichnet diese Summe als "Konstante" oder "magische Konstante". Aus den Zahlen 1 bis 9 gibt es für die Bildung der Summe 15 aus je drei Zahlen genau 8 Möglichkeiten:

$$1,5,9; 1,6,8; 2,4,9; 2,5,8; 2,6,7; 3,4,8; 3,5,7; 4,5,6$$

Da 5 die am häufigsten auftretende Zahl ist, setzen wir sie in das Mittelfeld des magischen Quadrates. Es ist nun nicht schwierig, die anderen Felder so auszufüllen, dass die Bedingungen eines magischen Quadrates erfüllt sind.

Abb. 3

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Abb. 3 zeigt eine von den möglichen Lösungen. Aus dieser Lösung können noch weitere sieben Lösungen abgeleitet werden, und zwar durch Spiegelung an der Horizontal- und Vertikalachse durch den Mittelpunkt des Quadrates, an den beiden Diagonalachsen durch diesen Punkt und durch Drehung des ganzen Quadrates um den Mittelpunkt.

Die Drehung kann erfolgen um $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$. Die durch Spiegelung und Drehung gewonnenen sieben Lösungen betrachtet man als eine einzige Lösung. Die sieben Lösungen bilden mit der Ausgangslösung zusammen eine Gruppe von 8 Elementen. Weitere Lösungen gibt es für das Quadrat mit 9 Zellen nicht.

Betrachten wir nun die magischen Quadrate mit $4^2 = 16$ Fehlern.
Die magische Konstante ist $\frac{(1+4^2)4}{2} = 34$. Wenn wir daran festhalten, dass Lösungen, die durch Drehungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen, als eine Lösung zu

betrachten sind, so ergeben sich nicht weniger als 880 verschiedene Lösungen.

Der französische Zahlenkünstler Bernard Frénicle de Bessy (1605-1675), ein Beamter der Münze und Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften, korrespondierte mit seinem Zeitgenossen Pierre de Fermat über magische Quadrate.
Von Frénicle stammt die Angabe, dass es 880 verschiedene magische Quadrate mit 16 Zellen gibt.

Er unterzog sich auch der Mühe, alle diese 880 magischen Quadrate zu berechnen und in einer Tabelle, die 18 Jahre nach seinem Tode von Philippe de la Hire (1640-1718) veröffentlicht wurde, zusammenzustellen.

Die Richtigkeit dieser Tabelle wurde mehrfach angezweifelt, konnte aber bisher nicht widerlegt werden. Besondere Berühmtheit erlangte das in Abb. 4 gezeigte magische Quadrat, das Albrecht Dürer Jahre 1514 - man beachte die beiden mittleren Zellen der untersten Zeile - auf dem "Melancholia" genannten Kupferstich darstellte.

Abb. 4

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	$\underline{15}$	$\underline{14}$	1

Über magische Quadrate mit mehr als 16 Feldern wissen wir nicht allzuviel. Das Problem, eine Methode zu finden, mit Hilfe derer für magische Quadrate mit beliebig großer Felderzahl sämtliche möglichen Anordnungen bestimmt werden können, ist noch nicht gelöst.

Fermat behauptete zwar, eine solche Methode zu besitzen; er schränkte jedoch seine Behauptung später dahin ein, dass sein Verfahren nicht erschöpfend sei. In Wirklichkeit ist die von Fermat angegebene Zahl der Möglichkeiten für $n^2 = 64$ viel zu klein.
Es gibt jedoch Methoden, mit deren Hilfe spezielle Fälle, besonders für ungerade n^2, berechnet werden können.

16 Die Zahl π

Unter der Zahl π versteht man das Verhältnis des Umfanges u eines Kreises zu dessen Durchmesser $d = 2r$; also ist $\frac{u}{d} = \pi$.
Die Zahl gibt aber auch das Verhältnis des Flächeninhaltes F eines Kreis zum Quadrat über dessen Halbmesser an, also $\frac{F}{r^2} = \pi$.

Das Symbol π wurde in diesem Sinne von William Jones (1675-1749) in der im Jahre 1706 erschienenen "Synopsis palmariorum matheseos" (Zusammenstellung der hauptsächlichsten Errungenschaften der Mathematik) benutzt und ist wohl eine Abkürzung für "peripheria".
Zur allgemeinen Annahme kam die Bezeichnung π durch Euler, der in seinen früheren Werken an Stelle von pi auch p schreibt.

Zahlenmäßig war der Wert von π mit sehr unterschiedlicher Genauigkeit schon den

Kulturvölkern der alten Welt bekannt. Die alten Ägypter kannten im 17. Jahrhundert v.u.Z. schon den Näherung wert $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16$.

Mit der genauen Kenntnis der Eigenschaften dieser Zahl ist die Lösung des uralten Problems der Quadratur des Kreises aufs engste verbunden. Man versteht hierunter die exakte Lösung der Aufgabe unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal die Fläche eines Kreises in die eines flächengleichen Quadrates zu verwandeln.
Die Geschichte dieses Problems kann man in drei Perioden unterteilen. Die erste Periode, etwa bis 1650, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Berechnung des Kreisumfanges bzw. der Kreisfläche aus dem Kreisdurchmesser auf Grund geometrischer Erwägungen vor genommen wird.

Einen interessanten, wenn auch erfolglosen Versuch der Lösung der Quadratur des Kreises unternahm der griechische Mathematiker Hippokrates von Chios (um 440 v.u.Z.). In der leider nur fragmentarisch erhaltenen Geschichte der Mathematik des Eudemos von Rhodos (ca. 335 v.u.Z.) lesen wir:

"Nach Anaxagoras von Klazomenai (500? bis 428 v.u.Z.) und Oinopides von Chios (5. Jahrh. v.u.Z.) wurden Hippokrates von Chios, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodores von Kyrene (um 390 v.u.Z.) in der Geometrie berühmt. Unter den hier genannten hat zuerst Hippokrates "Stoicheia" (= Elemente) geschrieben."

Auch mit dem Problem der Würfelverdoppelung hat sich Hippokrates erfolgreich beschäftigt. Nach dem Bericht des Aristoteleskommentators Simplikios (um 520 u.Z.) fand Hippokrates folgenden Satz:

Errichtet man über der Hypotenuse und den beiden Katheten eines gleichschenkliggrechtwinkligen Dreiecks Halbkreise (siehe Abb. 5), so ist die Summe der Flächen der (schraffierten) Möndchen M_1 und M_2 gleich der Fläche des Dreiecks ABC.

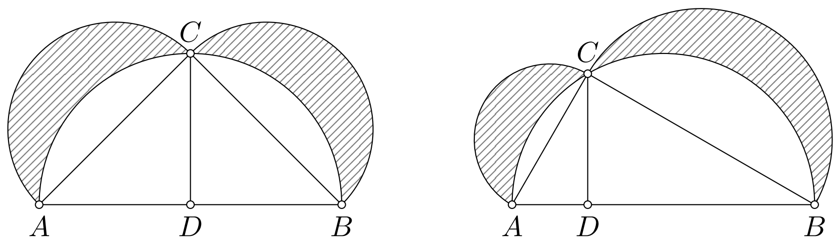


Abb. 5 und 6

Selbstverständlich ist auch die Fläche des Möndchens M_1 gleich der Fläche des Dreiecks ADC.
Die Verallgemeinerung auf das rechtwinklige Dreieck mit ungleichen Katheten (Abb.6) kommt bei Hippokrates nicht vor. Dagegen erwähnt Eudemos noch drei von Hippokrates herrührende Quadraturen von Möndchen, die auf flächengleiche Trapeze führen.

Doch alle diese schönen Konstruktionen tragen zur Quadratur des Kreises nichts bei. Wir hätten deshalb von der der Behandlung der Möndchen des Hippokrates hier absehen können, wenn nicht ein anderes, bis heute noch nicht vollständig erledigtes Problem mit den von Hippokrates gefundenen Sätzen in engem Zusammenhang stünde.

Es gibt nämlich außer den von Hippokrates gefundenen Möndchen noch weitere Kreisbogenzweiecke, die sich mit Hilfe von Zirkel und Lineal in geradlinig begrenzte Figuren (Dreiecke oder Vierecke) verwandeln lassen.

Es lässt sich zeigen, dass die Konstruktion stets dann möglich ist, wenn gleichzeitig $\alpha : \beta = p : q$ und $AC : BC = \sqrt{q} : \sqrt{p}$ ist (Abb. 7); p und q sind natürliche Zahlen, wobei $p \neq q$ sein muss.
Für 1. $p = 1$, $q = 2$ ergibt sich $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$ und $AB : BC = \sqrt{2} : 1$, d.h. die Punkte C, B und C' liegen in einer Geraden und das Dreieck CAC' ist gleichschenklig-rechtwinklig. Außerdem sind bisher noch gefunden worden die Fälle

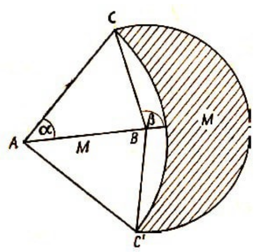


Abb. 7

$$2.p = 1,q = 3; \quad 3.p = 2,q = 3; \quad 4.p = 1,q = 5 \quad \text{und} \quad 5.p = 3,q = 5$$

Ob es außer diesen fünf bekannten Fällen noch weitere Kreisbogenzweiecke (Möndchen) gibt, die mit Hilfe von Zirkel und Lineal in flächengleiche Deltoide (Drachenvierecke) verwandelt werden können, ist eine bisher noch nicht geklärte Frage.

Mit diesem Problem beschäftigten sich unter anderen Gabriel Cramer (1704 bis 1752) und Leonhard Euler, der zwei Abhandlungen unter de Titel "Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas" (Lösung eines geometrischen Problems, das die von Kreisbögen gebildeten Möndchen zum Gegenstand hat) verfasste.
Auch in dem Euler-Goldbachschen Briefwechsel klingt das Problem mehrmals an, ohne jedoch seine vollständige Erledigung zu finden.

Den Höhepunkt der Untersuchungen über die Zahl π in der ersten Periode bildet die "Kreismessung" des Archimedes (287? bis 212 v.u.Z.). In dieser nicht sehr umfangreichen aber sehr inhaltsschweren Schrift werden die folgenden drei Sätze bewiesen:

1. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Inhalt ein rechtwinkligen Dreiecks, wenn die eine Kathete gleich dem Halbmesser des Kreises und die andere Kathete gleich dem Umfang des Kreises genommen wird.

2. Die Kreisfläche verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers nahezu wie 11:14.

3. Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ des Durchmessers.

Aus dem 2. Satz ergibt sich $\pi \approx \frac{22}{7}$; der 3. Satz besagt $\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$.
Zu diesen Werten gelangte Archimedes folgendermaßen: Ausgehend von dem Gedanken, dass der Kreisumfang zwischen den Umfängen des dem Kreis um- bzw. einbeschriebenen regulären n-Ecks liegt, berechnet Archimedes die Umfänge eines um- bzw. einbeschriebenen regulären Vielecks von so großer Seitenzahl, dass der Unterschied nur

einen kleinen Betrag ausmacht.

Bezeichnet man mit U_n den Umfang des dem Kreis mit dem Durchmesser 1 umbeschriebenen und mit u_n den des einbeschriebenen regulären n-Ecks, so berechnet Archimedes U_6, U_{12}, U_{24}, U_{48}, U_{96} und ebenso u_6, u_{12}, u_{24}, u_{48}, u_{96}.
Die Zahlen der ersten Folge nehmen mit wachsenden Index n ab, die der zweiten Folge nehmen mit wachsendem n zu.

Wir schalten hier eine vielleicht nebensächlich erscheinende Bemerkung ein: Für die Berechnung der U_n- bzw. u_n-Werte ist die Kenntnis der Berechnung von irrationalen Quadratwurzeln nötig.
Ist z.B. der Kreisdurchmesser gleich 1, so ist $U_6 = 2\sqrt{3}$. Für die Bestimmung des numerischen Wertes von $\sqrt{3}$ stehen uns Tabellen, Rechenschieber, Rechenmaschinen usw. zur Verfügung. Das Wurzelziehen ohne derartige Hilfsmittel wird heute an unseren Schulen kaum mehr gelehrt. Im Altertum musste die irrationale Quadratwurzel durch gebrochene Werte angenähert werden. So nimmt Archimedes für $\sqrt{3}$ den etwas zu kleinen Wert $\frac{265}{153}$ (= 1,73203 statt 1,73205). In ähnlicher Weise berechnet er

$$U_{96} \quad \text{zu} \quad \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > \frac{223}{17}, \quad \text{d.h.} \quad U_{96} > 3{,}1409 > 3{,}1408$$

Das Archimedische Verfahren kann durch Vergrößerung der Seitenzahl n beliebig weit fortgeführt werden. Francois Vieta (1540 bis 1603) leitete durch Erweiterung der Rechnung auf das $6 \cdot 2^{16} = 393216$-Eck die Werte

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$$

ab. Die zweite Periode der Untersuchungen über die Zahl π erstreckt sich ungefähr von 1650 bis 1730. In diesem Zeitraum wird π durch unendliche Reihen, unendliche Produkte und unendliche Kettenbrüche angenähert berechnet.
Isaac Newton (1643-1727) beschäftigte sich eingehend mit unendlichen Reihen. Er fand die Sinusreihe:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \qquad (-\infty < x < \infty)$$

die Kosinusreihe:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad (-\infty < x < \infty)$$

und die Arkussinusreihe:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + ...$$

Jamaes Gregory (1633-1675) stellte die Arkustangensreihe auf:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

Setzt man $x = 1$, so ergibt sich aus der Arkustangensreihe die von Leibniz (1645-1716) selbständig gefundene und deshalb nach ihm benannte Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + -...$$

Theoretisch ist diese Reihe von größter Bedeutung; für die Berechnung von π ist sie jedoch ungeeignet, da etwa 330 Glieder nötig sind, um π auf zwei Dezimalen genau - 3,14 - zu erhalten.
John Wallis (1616-1703) fand:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}...$$

Lord Brouncker (1620-1684) verwandelte das von Wallis gefundene unendliche Produkt in einen unendlichen Kettenbruch:

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + ...}}}}$$

Euler, Goldbach u.a. fanden die Reihen:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\
\frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... \\
\frac{\pi^3}{32} &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + ... \\
\frac{\pi^4}{90} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ... \\
\frac{7\pi^4}{720} &= 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + ...
\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + ... &= \frac{\pi^{2n} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot |B_n| \\
1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + ... &= \frac{\pi^{2n} \cdot (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} \cdot |B_n| \\
1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + ... &= \frac{\pi^{2n} \cdot (2^{2n} - 1)}{2 \cdot (2n)!} \cdot |B_n|
\end{aligned}$$

wobei B_n, die sogenannten Bernoullischen Zahlen

$$B_1 = \frac{1}{6}; |B_2| = \frac{1}{30}; B_3 = \frac{1}{42}; |B_4| = \frac{1}{30}; B_5 = \frac{5}{66}$$

usw. sind.

Während nun für die geradzahligen Potenzen $2n$ die Frage der Summierung der Reihen vollkommen geklärt ist, kennen wir für die ungeradzahligen Potenzen $2n+1$ eigentlich nur die Summen der Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + ... = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!} \cdot E_n$$

wobei E_n die sogenannten Eulerschen Zahlen $E_1 = 1$; $E_2 = 5$; $E_3 = 61$; $E_4 = 1385$; $E_4 = 50521$ usw. sind.
Die Eulerschen Zahlen können ebenfalls durch Rekursionsformeln berechnet werden.
Die Summierung der Reihen

$$1 + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} + + \frac{1}{4^{2n+1}} + ...$$

ist trotz der Bemühungen Eulers und anderer bedeutender Mathematiker ein bisher ungelöstes Problem.

Eine sehr brauchbare Formel für die Berechnung von π veröffentlichte der englische Astronom John Machin (1685-1751) im Jahre 1706. Sie lautet:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + ...\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + ...\right)$$

Wir wenden uns nun der dritten Epoche (seit 1760) zu, in der die Natur der Zahl π mit den Hilfsmitteln der höheren Algebra erforscht wurde.
Aus der Kettenbruchentwicklung ergab sich, dass π: keine rationale Zahl sein kann. Der Nachweis der Irrationalität von π stellte jedoch noch keine endgültige Lösung der Quadratur des Kreises dar, da z.B. Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Wenn auch bei den meisten Mathematikern sich immer mehr die Überzeugung durchsetzte, dass π eine transzendente Zahl sei, d.h., dass π nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind, sein könne, so dauerte es doch geraume Zeit, bis der Beweis der Transzendenz von π erbracht wurde.

Aus der von Euler gefundenen Relation[13]

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ergibt sich für $x = \pi$ die Gleichung

$$e^{i\pi} = -1$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Natur der Zahl π in sehr engem Zusammenhang mit der Natur der Zahl e, der Basis der natürlichen Logarithmen steht. Die Transzendenz von e bewies nun Charles Hermite (1822-1901) im Jahre 1873.

[13] i ist die imaginäre Einheit: $i \cdot i = -1$.

Im Anschluss an die Forschungen Hermites erbrachte Ferdinand Lindemann (1852-1939) im Jahre 1882 den Beweis für die Transzendenz von π.
Es ist leider nicht möglich, im Rahmen dieses Büchleins die Beweise für die Transzendenz von e und π zu behandeln. Wir müssen uns mit der Bemerkung begnügen, dass der Lindemannsche Beweis von Karl Weierstrass (1815-1897) und David Hilbert wesentlich vereinfacht wurde. Mit dem Nachweis der Transzendenz von π ist auch das Problem der Quadratur des Kreises endgültig in dem Sinne erledigt, dass

1. ein Kreisbogen, dessen Sehne eine algebraisch ausdrückbare Länge hat, nicht mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion, bei der nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen, in eine Strecke gleicher Länge verwandelt werden kann;

2. der zugehörige Kreissektor durch eine derartige Konstruktion nicht in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden kann.

Was für den Kreissektor gilt, ist auch für den Vollkreis richtig. Es seien hier, um naheliegenden Missverständnissen vorzubeugen, noch folgende Bemerkungen beigefügt:

Lässt man die Beschränkung des alleinigen Gebrauchs von Zirkel und Lineal für die Quadratur des Kreises fallen, so ist, wie das im Altertum bereits bekannt war, die Quadratur des Kreises mit Hilfe von transzendenten Kurven ausführbar.

So liefert die Polargleichung der Quadratrix[14] $r = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Wert $r = \frac{\pi}{2}$.
Verfügt man nun über ein Instrument, mit Hilfe dessen die Quadratrix gezeichnet werden kann, so kann der Figur die Zahl π entnommen werden.

Wir haben bei der Erörterung des Problems der Quadratur des Kreises stillschweigend vorausgesetzt, dass das sogenannte euklidische Parallelenaxiom gilt, d.h., dass wir uns in dem Bereich der euklidischen Geometrie bewegen.
Im Jahre 1831 erschien nun als Anhang zu einem Werk des ungarischen Mathematikers Wolfgang Bolyai (1775.1856), der sich als Studienfreund von C.F. Gauß (1777-1855) mit der Parallelentheorie befasst hatte, ein Anhang seines Sohnes Johann Bolyai (1802-1860) unter dem vielversprechenden Titel: "Anhang enthaltend die absolute Raumlehre, deren Richtigkeit unabhängig davon ist, ob das XI. Euklidische Axiom richtig oder falsch ist (eine Frage, die a priori wohl niemals entschieden werden kann); beigefügt ist für den Fall der Unrichtigkeit (des XI. Euklidischen Axioms) eine geometrische Quadratur des Kreises."

Wolfgang Bolyai legte diesen "Anhang" seines Sohnes seinem Studienfreund Gauß zur Beurteilung vor. Der "princeps mathematicorum", der mit Lobeserhebungen im allgemeinen sehr zurückhaltend war, sprach sich sehr anerkennend über die Arbeit Johann Bolyais aus. Der "Anhang" - Appendix genannt - enthält eine knappe Darlegung der (nichteuklidischen) hyperbolischen Geometrie.

Unabhängig von Bolyai hatten Gauß und der russische Mathematiker Ivanovic Lobacevskyj (1793-1856) die hyperbolische Geometrie, in der das Parallelenaxiom Euklids nicht gilt, begründet.

[14] Eine Quadratrix ist jede zur Quadratur des Kreises benutzte Kurve.

Bolyai konnte in seinem "Anhang" einwandfrei zeigen, dass im Gegensatz zur euklidischen Geometrie in der hyperbolischen Geometrie ein Kreis existiert, nämlich der mit dem Inhalt π, der mit Hilfe von Kreis und Geraden in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandelt werden kann.

Der Leser wird vielleicht einwenden, dass hier ein Widerspruch vorliegt, wenn in der euklidischen Geometrie die Lösung der Quadratur des Kreises unter den angegebenen Bedingungen unmöglich und in der nichteuklidischen Geometrie möglich ist.
Dieser Widerspruch kann auf folgende Weise geklärt werden:

In der nichteuklidischen Geometrie müssen der geraden Linie infolge des veränderten Parallelenaxioms[15] Eigenschaften beigelegt werden, die ihre Zeichnung mittels des Lineals, dessen wir uns in der euklidischen Geometrie zur Herstellung der geraden Linie bedienen, unmöglich machen.

17 Die Zahl e

Die Zahl e steht der Zahl π an Bedeutung nicht nach, obwohl sie sich nicht der gleichen Popularität wie die Zahl π erfreut. Wir definieren die Zahl e als Grenzwert:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459...$$

Wir haben den numerischen Wert auf 12 Dezimalstellen genau angegeben, um der Vermutung vorzubeugen, dass e ein gemischt-periodischer Dezimalbruch mit der Vorzahl 2,7 und der Periode 1828 ist.

Ohne auf die Geschichte der Entdeckung der Zahl e hier näher eingehen zu wollen, teilen wir kurz mit, dass der um die Entwicklung der Logarithmen hochverdiente Uhr- und Instrumentenmacher Jobst Bürgi (1552-1632) die Zahl e als Basis der natürlichen Logarithmen mit Hilfe des Ausdrucks

$$1{,}001^{10000} = 2{,}718146$$

auf drei Dezimalstellen genau berechnete. Nikolaus Mercator[16] (1620-1687) entwickelte die Reihe

$$\ln(1+x) = \int_o^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

aus der Newton durch Reihenumkehrung die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

[15] In der euklidischen Geometrie kann in der Ebene durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden; in der hyperbolischen Geometrie gibt es zu einer Geraden in der Ebene zwei Parallele durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden.

[16] Nicht zu verwechseln mit dem Geographen und Mathematiker Gerhard Mercator (1512-1594).

ableitete. Setzt man in dieser Reihen $x = 1$, so ergibt sich

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

Mit der Exponentialfunktion hängt folgende von Jacob Bernoulli in den Acta Eruditorum von 1690 gestellte Frage aufs engste zusammen:

"Es wird gefragt, wenn ein Gläubiger eine Geldsumme auf Zinsen ausleiht unter der Bedingung, dass in jedem einzelnen Augenblick ein proportionaler Teil des Jahreszinses zum Kapital geschlagen wird, wieviel ihm dann nach Verlauf eines Jahres geschuldet wird."

Ist K das Kapital und p der Zinsfuß, so beträgt der einfache Zins für ein Jahr $z = \frac{K \cdot p}{100}$. Bernoulli teilt dann - ohne Beweis - für die am Schluss des Jahres geschuldete Summe die Formel[17]

$$K + z + \frac{z^2}{2K} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot K} + ... = K \cdot e^{\frac{p}{100}}$$

mit. In n Jahren beträgt dann die Schuld $K \cdot e^{\frac{np}{100}}$. Das Symbol e wurde erstmalig von Euler in einem Brief an Goldbach vom 25. 11. 1731 benutzt. Früher und gelegentlich auch nach 1731 schrieb Euler an Stelle von e den Buchstaben c.

Aus der intensiven Beschäftigung der Mathematiker des 18. Jahrhunderts mit den unendlichen Reihen ergab sich eine Reihe von zu lösenden Problemen. Vor allem suchten bedeutende Mathematiker, z.B. Johann Bernoulli, Roger Cotes (1682-1716), Euler u.a., den Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen zu ergründen. Nach einigen Ansätzen von Johann Bernoulli und Cotes gelang Euler die Lösung des Problems.
Johann Bernoulli wurde von Euler in einem Brief vom 18. 11. 1740 darauf aufmerksam gemacht, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

sowohl die Lösung $y = 2\cos x$ als auch $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ aufweise. Daraus schloss Euler, bestärkt durch den Umstand, dass beide Lösungen auf dieselbe Reihe

$$2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...\right)$$

führten, dass

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

sein müsse. Obwohl Euler damals auch schon die Beziehung

$$2\sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

[17] Bernoulli benutzt etwas andere Bezeichnungen.

kannte, veröffentlichte er erst acht Jahre später die Beziehung:

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = e^{x\sqrt{-1}}$$

Setzt man in der zuletzt gefundenen Gleichung $x = \pi$, so ergibt sich die Beziehung:

$$e^{ipi} = -1$$

Diese Formel ist die Grundlage für den Nachweis der Transzendenz der Zahlen π und e.

Wir beschließen unsere Ausführungen über die Zahl e mit einem von Jakob Steiner STEINER aufgestellten Problem[18]

"Welche Zahl gibt mit sich selbst radiziert die größte Wurzel?"

Die Aufgabe kann selbstverständlich mit Hilfe der Differentialrechnung gelöst werden. Steiner verzichtet jedoch auf das Hilfsmittel der höheren Analysis und schlägt einen anderen Weg ein:

Entwickelt man $e^{\frac{x-e}{e}}$ nach der Reihe der Exponentialfunktion

$$e^{\frac{x-e}{e}} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{x-e}{e} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + ...$$

und berücksichtigt nur die beiden ersten Glieder, so gilt

$$e^{\frac{x-e}{e}} \geq 1 + \frac{x-e}{e}$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $x = e$. Wir können die Ungleichung auch in der Form

$$e^{\frac{x}{e}} \cdot \frac{1}{e} \geq \frac{x}{e} \qquad \text{oder} \qquad e^{\frac{x}{e}} \geq x$$

schreiben. Ziehen wir beiderseits die x-te Wurzel, so erhalten wir

$$\sqrt[e]{e} \geq \sqrt[x]{x}$$

18 Das Fermatproblem

Es ist nachzuweisen, dass die diophantische[19] Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \tag{A}$$

für jedes $n > 2$ in nichtverschwindenden ganzen Zahlen x, y, z nicht bestehen kann.

[18] Crelles Journal, Bd. XL; Steiners Werke Bd. 2, S. 423

[19] Die nach dem griechischen Mathematiker Diophant (etwa 3. Jahrhundert u.Z.) benannten Gleichungen enthalten mehr als eine Unbekannte. Als Lösungen kommen nur ganzzahlige Werte in Betracht.

Wir können noch voraussetzen, dass je zwei der drei Zahlen x, y, z zueinander teilerfremd sind. Haben nämlich zwei dieser drei Zahlen den größten gemeinsamen Teiler t, so ist t auch Teiler der dritten Zahl. Das Zahlentripel x,y,z kann dann durch Division durch t von diesem größten gemeinsamen Teiler befreit werden.
Ferner ist der Nachweis für die Unmöglichkeit des Bestehens von Gleichung (A) in ganzen Zahlen nur für Primzahlexponenten $p > 2$ zu erbringen, da jede Potenz $n = p \cdot \nu$ zugleich eine p-te Potenz ist.

Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen die Gleichung (A) in ganzen Zahlen lösbar ist, nämlich $n = 1$ und $n = 2$.
Im ersten Falle ($n = 1$) stellt jedes Additionsbeispiel in ganzen Zahlen eine Lösung dar; der zweite Fall ($n = 2$) erfordert eine eingehende Untersuchung.
Zunächst bietet sich uns als einfache Lösung in einstelligen ganzen Zahlen das Zahlentripel $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ an.

Aus dieser Lösung können durch Multiplikation mit einem beliebigen ganzzahligen Faktor t unendlich viele weitere Lösungen abgeleitet werden, z.B. 6, 8, 10, also $6^2 + 8^2 = 10^2$; 15, 20, 25, also $15^2 + 20^2 = 25^2$ usw. Es gibt aber noch weitere teilerfremde Zahlentripel, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{B}$$

genügen, z.B. $15^2 + 8^2 = 17^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$; $21^2 + 20^2 = 29^2$ usw.
Die Gleichung (B) kann auch geometrisch gedeutet werden. Jede ganzzahlige Lösung von (B), unabhängig davon, ob es sich um teilerfremde Zahlentripel x, y, z oder um solche mit einem gemeinsamen Teiler handelt, entspricht den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Lösungen von (B) bezeichnet man auf Grund des Zusammenhanges mit dem pythagoreischen Lehrsatz als pythagoreische Dreieckzahlen.

Mit der Frage, wie man zu ganzzahligen Lösungen von (B) gelangen kann, befassten sich schon die Mathematiker des Altertums. Pythagoras (6. Jahrh. v.u.Z.) und seine Schüler fanden als Lösung (B)

$$x = 2n + 1; \quad y = 2n^2 + 2; \quad z = 2n^2 + 2n + 1$$

worin für n jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann. Von der Richtigkeit dieser Lösung kann man sich überzeugen durch die Identität

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

Für $n = 1$ ergibt sich $3^2 + 4^2 = 5^2$,
für $n = 2$ ergibt sich $5^2 + 12^2 = 13^2$,
für $n = 3$ ergibt sich $7^2 + 24^2 = 25^2$ usw.

Durch diese Rechenvorschrift ergeben sich ausschließlich teilerfremde Lösungen, und zwar unendlich viele; doch finden wir auf diesem Wege nicht alle überhaupt möglichen teilerfremden pythagoreischen Dreieckszahlen. So gibt es z.B. keine Werte, die auf die Zahlentripel $8^2 + 15^2 = 17^2$ oder $20^2 + 21^2 = 29^2$ führen.

Nach dem Bericht des Euklidkommentators Proklos (410 bis 485) fand der griechische Philosoph Platon (429 bis 348 v.u.Z.) folgende Lösung:

$$(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass sich für ungerade n-Werte drei gerade Zahlen, also keine teilerfremden Zahlen ergeben.
Diese Rechenvorschrift umfasst aber auch nicht alle überhaupt möglichen pythagoreischen Zahlentripel; so gibt es z.B. keine n-Werte, die auf die Lösungen $20^2+21^2=29^2$ oder $56^2+33^2=65^2$ führen. Da zahlentheoretisch nur die teilerfremden pythagoreischen Dreieckszahlen von Interesse sind, wollen wir nach einer Methode suchen, die alle überhaupt teilerfremden möglichen pythagoreischen Zahlentripel die man auch als sogenannte Grundlösungen bezeichnet, liefert.

Wir schreiben Gleichung (B) in der Form:

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$$

Wir setzen $z+y=m$ und $z-y=n$, woraus folgt:

$$x^2=mn; \qquad y=\frac{m-n}{2}; \qquad z=\frac{m+n}{2}$$

Über x,y,z können wir folgende Aussagen machen:
Die beiden Werte x,y können nicht gleichzeitig gerade sein, da sonst z ebenfalls gerade sein müsste. x und y können aber auch nicht beide gleichzeitig ungerade sein, da sie sonst die Formen $x=2p+1$, $y=2q+1$ haben müssten.
Das ergäbe:

$$x^2+y^2=4p^2+4p+4q^2+4q+2=z^2$$

Der Ausdruck $4(p^2+p+q^2+q)+2$ kann aber niemals ein Quadrat sein, da dieser Ausdruck durch 4 geteilt den Rest 2 ergibt.

Ist nämlich z eine gerade Zahl, also $z=2n$, so ist $z^2=4n^2$ eine Zahl, die bei der Division mit Rest durch 4 den Rest 0 hat. Ist z eine ungerade Zahl, also $z=2n+1$, so ist $z^2=4n^2+4n+1$ eine Zahl, die bei der Division mit Rest durch 4 den Rest 1 hat. Es gibt also keine Quadratzahl, die bei der Division mit Rest durch 4 den Rest 2 hat.

Also muss eine der beiden Zahlen x,y gerade und die andere ungerade sein, woraus noch folgt, dass z stets ungerade ist.
Bezüglich der Zahlen m,n können wir folgern, dass beide teilerfremd sein müssen, da ein etwaiger gemeinsamer Teller von m und n auch gemeinsamer Teller von x,y,z sein müsste. m und n können also nur ungerade, zueinander teilerfremde Zahlen sein.

Wegen $x^2=nm$ müssen jedoch m und n teilerfremde Quadratzahlen, also $m=u^2$ und $n=v^2$ sein, wobei u und v gleichzeitig ungerade und zueinander teilerfremd sein müssen. Unter diesen Voraussetzungen ist also

$$x=u\cdot v; \qquad y=\frac{u^2-v^2}{2}; \qquad z=\frac{u^2+v^2}{2} \tag{C}$$

die alle teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel umfassende Lösung unseres Problems; man bezeichnet eine solche Lösung, die alle überhaupt möglichen Fälle umfasst, als vollständige Lösung.

Es lässt sich auf elementarem Wege zeigen, dass x stets ungerade und y immer durch 4 teilbar ist; ferner muss stets eine der Zahlen durch 3 und eine der Zahlen x, y, z durch 5 teilbar sein.

Diese Sätze wurden von dem französischen Zahlenkünstler Bernard Frenicle (1605 bis 1675) zusammengefasst in der Behauptung:
Das Produkt aus drei teilerfremden pythagoreischen Dreieckszahlen ist entweder gleich 60 oder ein Vielfaches von 60, wobei auch der Fall möglich ist, dass nur in y allein die drei Faktoren 3, 4 und 5 gleichzeitig enthalten sind, z.B. in dem Zahlentripel $x = 209$; $y = 120$; $z = 241$, das aus $u = 19$; $v = 11$ hervorgegangen ist.

Wir verzichten jedoch auf den Beweis des Frenicleschen Satzes, da er für die Lösung des Fermatproblems ohne Bedeutung ist.
Wir lassen nun eine Tabelle der 9 ersten teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel folgen:

$u =$	3	5	5	7	7	7	9	9	9
$v =$	1	1	3	1	3	5	1	5	7
$x =$	3	5	15	7	21	35	9	45	63
$y =$	4	12	8	24	20	12	40	28	16
$z =$	5	13	17	25	29	37	41	53	65

Der Fall $u = 9; v = 3$ scheidet z.B. aus, da hier u,v nicht teilerfremd sind und das Tripel 27; 36; 45 ergeben, das den gemeinsamen Teiler 9 aufweist.

Da sich durch Multiplikation der aus (C) gewonnenen Zahlenwerte mit einem beliebigen ganzzahligen Faktor[20] sämtliche überhaupt möglichen pythagoreischen Dreieckszahlen ergeben, ist das Fermatsche Problem für $n = 2$ vollständig erledigt.

Mit der Lösung der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

hat sich Diophant auch in seiner Arithmetik (II, 8) befasst. Das Problem erscheint hier in einer etwas modifizierten Form. Diophant zeigt, dass jedes Quadrat a^2 auf beliebig viele Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann. Er geht hierbei folgendermaßen vor:

Die Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfolgt durch den Ansatz $y = mx - a$, wobei m ganz beliebig gewählt werden kann. Aus

$$x^2 + (mx - a)^2 = a^2 \qquad \text{d.h.} \qquad x^2 + m^2x^2 - 2max + a^2 = a^2$$

findet man $x = \frac{2am}{m^2+1}$ und $y = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}$.

[20] Der Faktor 1 ergibt natürlich die teilerfremden Zahltripel.

Die Richtigkeit der Lösung zeigt die Identität:

$$\left(\frac{2am}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\cdot a\right)^2 = a^2 \tag{D}$$

Auf die Forderung der Ganzzahligkeit der Lösungen verzichtet Diophant; es genügt ihm, wenn sich für x und y rationale Werte ergeben. Aus den durch (D) gegebenen Lösungen können durch Multiplikation mit $\left(\frac{m^2+1}{a}\right)^2$ ohne weiteres Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

abgeleitet werden. Es ist dies dann die Platonische Lösung $(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$.
Die erste griechisch-lateinische Diophant-Ausgabe erschien im Jahre 1621. Der Herausgeber war der französische Mathematiker Claude Gaspard Bachet der Méziriac (1581-1638), der auch zur Auflösung der Diophantischen Gleichungen in ganzen Zahlen in seinen Anmerkungen zur Diophant-Ausgabe wertvolle Beiträge lieferte.

An den Rand eines Exemplares dieser Diophant-Ausgabe schrieb der französische Mathematiker und Jurist Pierre de Fermat[21] sehr interessante Bemerkungen, in denen vielfach die von Diophant und Bachet aufgeworfenen Probleme weitergeführt worden.
So bemerkte Fermat zu den Ausführungen Diophants über die Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ (Arithmetik II, 8) folgendes:

"Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen.
Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Band hier zu schmal, um ihn zu fassen." (II. Bemerkung)

Für die vierte Potenz hat Fermat in seiner XXXIII.Bemerkung (zu Diophants Arithmetik V. 32) einen Hinweis für den Beweis seiner Behauptung gegeben, wenn er schreibt:

"Warum aber sucht er (Diophant) nicht zwei Biquadrate, deren Summe ein Quadrat ist? Diese Aufgabe kann nämlich nicht gelöst werden, wie auf Grund unserer Beweismethode unwiderleglich gezeigt werden kann."

Diese beiden Bemerkungen enthalten nun eine Reihe von ungeklärten Fragen:

Wie sah dieser "wahrhaft wunderbare Beweis" für die Behauptung, dass für $n > 2$ die Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen unmöglich ist, aus? Hatte Fermat überhaupt einen vollgültigen Beweis in den Händen?
Dass Fermat seine Zeitgenossen wissentlich täuschen wollte, ist nicht anzunehmen, da die Bemerkungen zu Diophant in der uns vorliegenden Form überhaupt nicht für die Veröffentlichung durch den Druck bestimmt waren und auch zu Lebzeiten ihres

[21] Fermat verdanken wir bedeutende Entdeckungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik (Zahlentheorie, analytische Geometrie, Theorie der Maxima u. Minima, Integralrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Optik usw.).

Verfassers nicht im Druck erschienen; der Öffentlichkeit zugänglich gemacht wurden diese erst 1670 - Fermat starb 1665 - durch seinen Sohn Samuel Fermat.

Dagegen besteht immer noch die Möglichkeit, dass Fermat sich über die Bündigkeit seines Beweises getäuscht hat. Ein Beispiel dafür, dass Fermat auch gelegentlich[22] eine Behauptung aufstellte, die einer Nachprüfung nicht standhielt, bietet der "Satz", dass

$$2^{2^k} + 1$$

für alle natürlichen Zahlen k eine Primzahl ergibt.
Für $k = 1, 2, 3$ und 4 ist dies tatsächlich der Fall. Daraus schloss Fermat, der bei der Anwendung von Analogieschlüssen hin und wieder etwas großzügig verfuhr, dass diese Behauptung für alle natürlichen Zahlen k Gültigkeit habe.

Es lohnt sich, hier den Wortlaut des Fermatschen Textes (Brief vom 29. 8. 1654 an Pascal) genau zu betrachten. Wir lesen dort:

"Es ist dies eine Eigenschaft, für deren Wahrheit ich einstehe; der Beweis ist sehr schwierig und ich bekenne, dass ich ihn noch nicht vollständig zu erledigen imstande war. Ich würde Ihnen nicht vorschlagen, einen Beweis zu suchen, wenn ich damit zustande gekommen wäre."

Fermat verfuhr also nicht leichtsinnig oder gar unehrlich. Fermats Behauptung bezüglich der Primzahleigenschaft von $2^{(2^k)} + 1$ erwies sich als Irrtum: $2^{32} + 1 = 4294967297$ ist nämlich keine Primzahl, sondern lässt sich in die Faktoren $641 \cdot 6700417$ aufspalten.

Etwas anders liegt der Fall bei der Behauptung Fermats, dass er einen unwiderleglichen Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$, die die Unmöglichkeit der Lösung von $x^4 + y^4 = z^4$ in ganzen Zahlen in sich schließt, besitze. Wie aus der XLV. Bemerkung Fermats (zu Diophants Arithmetik VI, 26) hervorgeht, handelt es sich bei der unwiderleglichen Beweismethode um die Methode "de la descente infinie ou indefinie (= der unendlichen oder unbegrenzten Abnahme). Fermat skizzierte den Gedankengang dieser Beweismethode in der soeben erwähnten XLV. Bemerkung.

Euler führt in seiner "Vollständigen Anleitung zur Algebra" (Unbestimmte Analytik, Kap. 13, Nr. 202ff.)[23] den Beweis im Sinne Fermats vollständig durch an Hand des Beispiels $x^4 + y^4 = z^2$.
Der Gedankengang dieser Beweismethode ist folgender: Es ist zu beweisen, dass diese Gleichung keine Lösung in natürlichen Zahlen habe. Zunächst wird angenommen, dass eine Lösung $x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$ existiert.
Wenn man, von dieser Annahme ausgehend, beweisen könne, dass in diesem Falle die Gleichung eine weitere Lösung in natürlichen Zahlen $x_2^4 + y_2^4 = z_2^4$ hat, wobei $z_2 < z_1$ ist, dann folgt daraus, dass in diesem Falle eine unendliche Zahl von Lösungen in natürlichen Zahlen existiert, wobei $z_1 > z_2 > z_3 > ....$

Auf diese Weise ergibt sich eine unendliche abnehmende Folge natürlicher Zahlen, was

[22] "Über einige falsche Behauptungen Fermat's" schrieb A. Schinzel in Comptes Bendus Acad. Sc. 249, 17, 1959, S. 1604-1605.
[23] Erschienen in der leicht zugänglichen Ausgabe in Reclams Universal-Bibliothek, Nr. 1802-1805.

unmöglich ist. Folglich kann die Gleichung in natürlichen Zahlen keine Lösung haben. Es verdient angemerkt zu werden, dass die Beweismethode der unendlichen oder unbegrenzten Abnahme im wesentlichen auf der Methode "der vollständigen Induktion" beruht.

Somit hatte Euler das Fermatproblem für die vierte Potenz erledigt. In einem Brief an Goldbach (vom (6./17. 5. 1755) bekennt Euler, dass er auch noch den Fall für die dritte Potenz - für die dritte Potenz ist der Beweis bedeutend weitläufiger als für die vierte Potenz - erledigt habe, weiter sei er jedoch nicht gekommen.

Seinen elementaren Beweis für $n = 3$ nahm Euler ebenfalls in die "Vollständigen Anleitung zur Algebra" (Unbestimmte Analytik, Kap. 15, Nr. 242ff.) auf.

Auch Gauß hat sich mit dem Fall $n = 3$ befasst und dabei folgenden Weg eingeschlagen (Gauß, Werke, Bd. 11, S. 254ff.):
Ausgehend von dem Gedanken, dass der Beweis eines allgemeineren Satzes oft leichter zu erbringen ist als der eines speziellen Falles, zeigte Gauß die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ für beliebige Zahlen x, y, z von der Form

$$\alpha \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \beta \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

in der α, β beliebige ganze Zahlen und $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ die konjugiert-komplexen Wurzeln den Gleichung $u^3 + 1 = 0$ sind.

Der geniale Mathematiker Lejeune Dirichlet erledigte das Fermatproblem 1828 für $n = 5$; Gabriel Lamé (1795-1871) bezwang 1860 den Fall $n = 7$.

Alle diese Arbeiten betrafen nur spezielle Fälle der Fermatschen Behauptung. Die Hoffnung, das Fermatproblem durch Verallgemeinerung eines speziellen Falles zu bezwingen, erfüllte sich nicht.
Als im Jahre 1849 die Pariser Akademie für die vollständige Lösung des Fermatproblems eine goldene Medaille im Wert von 3000 fr stiftete, lief zunächst kein ernst zunehmender Lösungsversuch ein.

Die Akademie verlängerte den Termin und verlieh die Medaille schließlich dem Mathematiker Ernst Eduard Kummer (1810-1893), der schon 1837, wenn auch nicht die vollständige Lösung, so doch einen sehr wesentlichen Beitrag zur Lösung geliefert hatte. Er führte die "idealen" Zahlen in die Theorie der algebraischen Zahlkörper ein; daraus entwickelte sich die sogenannte Idealtheorie.

Euler, Dirichlet, Lamé usw. haben das Fermatproblem nur für einzelne Primzahlpotenzen erledigt; Kummer konnte durch seine Theorie, wenn auch nicht alle, so doch eine große Anzahl von Primzahlexponenten erfassen.
Im Bereich der natürlichen Zahlen von $n = 3$ bis $n = 100$ bereiteten nur noch die Exponenten 37, 59 und 67 Schwierigkeiten; im Jahre 1857 wurde jedoch auch für diese Exponenten die Richtigkeit der Fermatschen Behauptung nachgewiesen.

Wir müssen es uns leider versagen, auf die Kummersche Theorie näher einzugehen, da für das Verständnis zahlentheoretische Kenntnisse nötig sind, die wir bei den Lesern dieses Büchleins nicht voraussetzen können. Der interessierte Leser sei auf die am Schluss dieses Abschnittes mitgeteilten Literaturangaben verwiesen.

Durch die Beschäftigung mit dem Fermatproblem veranlasst, hat Kummer die zahlentheoretische Forschung in neue Bahnen gewiesen. David Hilbert und andere bedeutende Mathematiker haben die Kummerschen Untersuchungen weitergeführt. Es ist dies als die positive Seite des Fragenkomplexes des Fermatproblems zu werten. Leider haben wir auch Anlass, über eine negative Seite der Fermatproblemforschung zu berichten:

Der Privatgelehrte Paul Wolfskehl (1856-1906) stellte der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften aus seinem bedeutenden Privatvermögen den ansehnlichen Betrag von 100000 M als Preis für die vollständige Erledigung des Fermatproblems zur Verfügung. Die Bedingungen wurden veröffentlicht in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen 1908, S. 103ff, und in vielen wissenschaftlichen und populärwissenschaftlichen Zeitschriften nachgedruckt.

Als Lösung würde sowohl der vollständige Beweis der Fermatschen Behauptung als auch die Angabe eines einzigen Gegenbeispiels, durch das die Behauptung Fermats widerlegt wird, anerkannt. Mit einer Widerlegung des Fermatschen Theorems durch ein Gegenbeispiel ist wohl nicht zu rechnen, da die hierzu erforderlichen Zahlenrechnungen selbst unter Einsatz elektronischer Rechenmaschinen kaum zu bewältigen sind.

Nach dem derzeitigen Stand der Forschung ist der Beweis erbracht, dass die Behauptung Fermats für jede beliebige natürliche Zahl $n > 2$, die durch Primzahlen kleiner als 4003 teilbar ist, richtig ist.

Die Folge der Wolfskehlschen Stiftung war nun eine unabsehbare Flut von Einsendungen. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften hatte zwar in Voraussicht der zu erwartenden Menge von Lösungsversuchen die Entscheidung über die Zuerkennung des Preises an Bedingungen geknüpft, durch die die Einsendungen einer gewissen Vorzensur unterworfen werden.
Die Beurteilung von Manuskripten lehnt die Gesellschaft von vornherein ab; geprüft werden nur Beiträge, die in einer Zeitschrift oder in Buchform erscheinen. Die Geduld der Einsender wird dadurch auf eine harte Probe gestellt, dass die Zuerkennung des Preises frühestens zwei Jahre nach Erscheinen der Arbeit erfolgt.

Der Zwang der Veröffentlichung durch den Druck hatte zur Folge, dass in vielen Fällen die Redaktionen der Zeitschriften und die Verlage die Manuskripte ablehnten. Gegen Lösungen, die im Selbstverlag oder als Privatdrucke erschienen, konnte sich die Göttinger Gesellschaft jedoch nicht schützen. Die Zinsen der Stiftung konnte das Preisrichterkollegium nach freiem Ermessen zur Prämierung von Arbeiten verwenden, durch die in der Fermatproblemforschung ein wesentlicher Fortschritt erzielt wurde. Hierzu bot sich aber nur selten Gelegenheit.

Die meisten Lösungsversuche zeigten nur, dass ihre Urheber von der Schwierigkeit des ganzen Fragenkomplexes geradezu naive Vorstellungen hatten. Der Preis sollte im Jahre 2007 erlöschen; er wurde jedoch schon in den zwanziger Jahren durch die Inflation entwertet.

Seitdem ließ das Interesse an der Lösung des Fermatproblems merklich nach, ohne jedoch völlig zu erlöschen. Leider gelingt es nicht immer, den Einsender von der Zwecklosigkeit seiner Bemühungen um die Lösung des Fermatproblems wirklich zu überzeugen. Sehr viele mathematische Institute von Hochschulen und Akademien lehnen deshalb die Begutachtung von vorgelegten Lösungen von vornherein ab. Denn Zeit und Arbeitskraft werden dadurch ohne die geringste Aussicht auf Erfolg der Lösung wichtigerer Aufgaben entzogen, und es ist wohl angebracht, eine Warnung auszusprechen:

Um das Fermatproblem zu lösen oder auch nur zu seiner Lösung einen wesentlichen Beitrag zu liefern, sind nicht nur gediegene zahlentheoretische Kenntnisse, sondern auch eine überdurchschnittliche mathematische Findigkeit nötig. Namhafte Mathematiker erlitten bei der Lösung des Fermatproblems Schiffbruch. Man kann hier sogar die Frage aufwerfen: Handelt es sich hier um ein erstrangiges mathematisches Problem?

Kummer gelangte zwar durch seine Forschungen über das Fermatproblem zu seiner Theorie der idealen Zahlen, die einen großen Fortschritt in der Arithmetik der algebraischen Zahlen darstellt.
Die Lösung des Fermatproblems selbst, die Fermat seiner Meinung nach in den Händen hatte, ist im Vergleich zu anderen Entdeckungen Fermats - es sei hier nur an die Begründung der analytischen Geometrie erinnert - keine epochemachende Entdeckung.

Vielmehr handelt es sich hier lediglich um eine interessante Aufgabe, die schließlich nur ein zahlentheoretisches Unikum darstellt. Fermat selbst ist auch später nie mehr auf seine Behauptung zurückgekommen, so dass man wohl annehmen kann, dass er ihr keine allzu große Bedeutung beimaß.

19 Wann sind drei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten miteinander verträglich?

Diese Frage stellte und löste Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief an Guillaume Francois de l'Hospital (1661-1704) vom 28. April 1693.
Die drei Gleichungen lauten:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

Um Missverständnissen vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass unter 10, 11, 12 usw. nicht etwa Zahlen, sondern die Symbole a_{10}, a_{11}, a_{12} usw. zu verstehen sind. Die drei Gleichungen lauten in der heute gebräuchlichen Schreibweise:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \quad \text{(I)}$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \quad \text{(II)}$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0 \quad \text{(III)}$$

wobei wenigstens eine der Zahlen a_{13}, a_{23}, a_{33} ungleich null ist. Leibniz eliminierte nun y aus (I) und (II) bzw. (I) und (III), indem er

$$I \cdot a_{22} - II \cdot a_{12} = 0 \qquad \text{und} \qquad I \cdot a_{32} - III \cdot a_{12} = 0$$

setzt:

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y + a_{13}a_{22} - a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y - a_{12}a_{23} = 0$$
$$a_{11}a_{32}x + a_{12}a_{32}y + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{31}x - a_{12}a_{32}y - a_{12}a_{33} = 0$$

oder

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x + a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23} = 0$$
$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} = 0$$

Die Berechnung von x aus diesen beiden Gleichungen ergibt:

$$x = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}}{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}$$

also ist

$$(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Nach Beseitigung der auf der rechten und linken Seite stehenden gleichen Produkte, nach Division durch a_{12} und Umordnung erhalten wir

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0$$

Unter dieser Bedingung sind also drei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten miteinander verträglich. Der mit den Anfangsgründen der Determinantentheorie[24] vertraute Leser wird erkennen, dass diese Bedingung in der Form der verschwindenden dreireihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.
Die Unbekannten x und y ergeben sich dann aus einem der drei Gleichungspaare (I) (II); (I) (III); (II) (III). In Determinantenschreibweise hat die oben angegebene Lösung für x die Form

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Dieselbe Bedingung erhalten wir als Antwort auf die Frage:

[24] s. Belkner, Determinanten, 2. Aufl., Leipzig 1970.

Wann sind drei homogene[25] lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

miteinander verträglich? Als Lösung finden wir aus diesen drei Gleichungen nicht mehr die Werte x,y,z sondern deren Verhältnis

$$\begin{aligned} x : y : z &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) : (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) : (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

Zahlenbeispiele:

$$3x + 2y - 31 = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$4x + 9y - 73 = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$2x + 3y - 29 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Die Determinante $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -31 \\ 4 & 9 & -73 \\ 2 & 3 & -29 \end{vmatrix}$ ist gleich null, d.h., es gibt ein Wertepaar x,y, das allen drei Gleichungen genügt. Dieses Wertepaar finden wir, indem wir zwei von den drei Gleichungen, z.B. (I) und (II), nach x und y auflösen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -31 \\ 9 & -73 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{133}{19} = 7 \qquad , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -31 & 3 \\ -73 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{95}{19} = 5$$

Das Wertepaar $x = 7, y = 5$ genügt auch der dritten Gleichung: $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 29$.

Geometrisch bedeutet dies, dass die durch die Gleichungen (I), (II), (III) dargestellten Geraden durch einen Punkt gehen, nämlich durch den Punkt mit den Koordinaten $x = 7, y = 5$.
Man kann jedoch noch in ganz anderer Weise an dieses Problem herangehen:

Die drei Gleichungen (I), (II), (III) sind nämlich miteinander verträglich, wenn sie nicht linear unabhängig voneinander sind, d.h., jede der drei Gleichungen geht aus den beiden anderen durch lineare Kombination hervor. Multipliziert man in dem angeführten Beispiel die Gleichung (I) mit 6 und addiert hierzu die mit 5 multiplizierte Gleichung (III), so entsteht die mit 19 multiplizierte Gleichung (III); also:

$$\begin{array}{rr} 18x + 12y = 186 & (I) \cdot 6 \\ \underline{20x + 45y = 365} & (II) \cdot 6 \\ \hline 38x + 57y = 551 & (III) \cdot 19 \end{array}$$

[25] Ein lineares Gleichungssystem heißt homogen, wenn sämtliche Glieder, die keine Variable enthalten, gleich null sind.

Beispiel 2:

$$2x + 3y - z = 0 \quad \text{(I)}$$
$$3x - y + 2z = 0 \quad \text{(II)}$$
$$x + 7y - 4z = 0 \quad \text{(III)}$$

Die Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix}$ ist gleich null.
Die drei Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander. Es ist nämlich $(I)\cdot 2-(II) = (III)$.
Das Verhältnis der drei Unbekannten ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x : y : z &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (+5) : (-7) : (-11) \end{aligned}$$

Probe:

$$10 - 21 + 11 = 0 \quad \text{(I)}$$
$$15 + 7 - 22 = 0 \quad \text{(II)}$$
$$5 - 49 + 44 = 0 \quad \text{(III)}$$

20 Ein Problem der Ausgleichsrechnung

Im vorigen Abschnitt wurde die Bedingung untersucht, unter der drei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten durch ein Wertepaar x,y genau erfüllt werden.
Wir nehmen nun an, dass die drei linearen Gleichungen durch kein Wertepaar genau erfüllt werden. In diesem Falle ist der Wert der Koeffizientendeterminante nicht gleich null.

Geometrisch kann dieser Sachverhalt so gedeutet werden, dass die drei durch die Gleichungen dargestellten Geraden nicht mehr durch einen Punkt gehen, sondern ein sogenanntes "fehlerzeigendes Dreieck" bilden. Hier erhebt sich nun die Frage:

Welches Wertepaar x,y erfüllt am besten die drei linearen Gleichungen?
Es handelt sich hier um ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das von C. F. Gauß durch Anwendung der von ihm entwickelten "Methode der kleinsten Quadrate" in allgemeinster Form[26] gelöst wurde. In den folgenden Ausführungen beschränken wir uns auf drei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Da wir annahmen, dass es kein Wertepaar x,y gibt, das die drei linearen Gleichungen

$$a_1x + b_1y - l_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y - l_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y - l_3 = 0$$

[26] Gauß löste die Aufgabe für ν lineare Gleichungen mit n Unbekannten, wobei $\nu > n$ ist.

streng erfüllt, führen wir auf der rechten Seite der Gleichungen an Stelle der Nullen die Abweichungen v_1, v_2, v_3 ein, also:

$$a_1x + b_1y - l_1 = v_1$$
$$a_2x + b_2y - l_2 = v_2$$
$$a_3x + b_3y - l_3 = v_3$$

Die v-Werte können sowohl positiv als auch negativ sein. Es liegt nun der Gedanke nahe, das Wertepaar x, y so zu bestimmen, dass die Summe der absoluten Beträge der v-Werte möglichst klein wird, also

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| = \sum |v_i| = \text{ Minimum }, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{A}$$

Die Erfüllung dieser Bedingung steht in engstem Zusammenhang mit dem Aufgabenbereich der linearen Optimierung. Gauß fand, dass im allgemeinen einer der Eckpunkte des fehlerzeigenden Dreiecks der Forderung (A) genügt.
Es wurden in jüngster Zeit mehrere Verfahren entwickelt, um den richtigen der drei Punkte zu ermitteln. Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen von Gauß ergaben jedoch, dass es zweckmäßiger ist, die Koordinaten des Wertepaares x,y so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der v-Werte ein Minimum wird. Gauß bezeichnete dieses Verfahren als Methode der kleinsten Quadrate.

Ersetzen wir nach dem Vorgehen von Gauß das in der Mathematik gebräuchliche Summenzeichen $\sum$ durch eine eckige Klammer - wir schreiben also

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2; \qquad [a^2] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2; \qquad [ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

usw. -, so wird nach den Regeln der Differentialrechnung $[v^2]$ ein Minimum, wenn die Koordinaten x,y die Gleichungen

$$[a^2]x + [ab]y = [al] \tag{B}$$
$$[ab]x + [b^2]y = [bl] \tag{C}$$

erfüllen. Die Gleichungen (B) und (C) bezeichnet man als Normalgleichungen.

Zahlenbeispiel:

$$x + 4y - 35 = v_1 \tag{I}$$
$$5x - y - 28 = v_2 \tag{II}$$
$$-4x + 5y - 28 = 0 \tag{III}$$

Die Eckpunkte des fehlerzeigenden Dreiecks haben die Koordinaten

$$x = 7, y = 7 \text{ für } (I)/(II)$$
$$x = 8, y = 12 \text{ für } (II)/(III)$$
$$x = 3, y = 8 \text{ für } (III)/(I)$$

Als Summen der absoluten v-Werte erhalten wir für

$$x = 7, y = 7 : |-28 + 35 - 28| = 21$$
$$x = 8, y = 12 : |8 + 48 - 35| = 21$$
$$x = 3, y = 8 : |15 - 8 - 28| = 21$$

Hier ergibt sich zufällig für alle drei Eckpunkte des fehlerzeigenden Dreiecks derselbe Summenwert 21, d.h., die Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Summe der Absolutwerte liefert kein eindeutiges Ergebnis. Gleicht man jedoch nach der Methode der kleinsten Quadrate aus, so ergibt sich aus den Normalgleichungen

$$42x - 21y = 63$$
$$-21x + 42y = 252$$

eindeutig das Wertepaar $x = 6, y = 9$. Dass dieser Punkt mit dem Schwerpunkt des fehlerzeigenden Dreiecks zusammenfällt, ist Zufall.

21 Ein landwirtschaftlich-mathematisches Problem Newtons

Isaac Newton sollte nach dem Willen seiner aus einer Bauernfamilie stammenden Mutter den von seinem Vater ererbten kleinen Gutshof in dem nahe der Ostküste Englands liegenden Dorf Wolsthorpe übernehmen.
Aber auf Anraten von Verwandten und Freunden, die Newtons Begabung erkannten, konnte er studieren und erhielt bereits im Jahre 1669 den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge übertragen. Zu seinen Pflichten gehörten auch Vorlesungen über Arithmetik und Algebra.

Sein Schüler und späterer Nachfolger William Whiston (1667-1752) veröffentlichte 1707 diese Vorlesungen seines Lehrers unter dem Titel "Arithmetica universalis". In diesem Werk findet sich folgendes Problem, das Newton wohl in Erinnerung an seine frühere landwirtschaftliche Tätigkeit aufgestellt hatte:

k_1 Kühe weiden w_1 Wiesen in t_1 Tagen ab, k_2 Kühe weiden w_2 Wiesen in t_2 Tagen ab, k_3 Kühe weiden w_3 Wiesen in t_3 Tagen ab.

Welche Beziehung besteht zwischen den neun Größen k_1 bis t_3?

Es muss vorausgesetzt werden, dass alle Wiesen den gleichen Ertrag an Futter liefern, dass das tägliche Wachstum der Wiesen sich nicht ändert und dass jede Kuh täglich dieselbe Futtermenge frisst.
Newton fand folgende Lösung der Aufgabe:

Der anfängliche Grasbestand jeder Wiese sei x, die tägliche Wachstumsmenge jeder Wiese sei y und die täglich von jeder Kuh aufgenommene Futtermenge sei z.
Am Ende des ersten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x + w_1y - k_1z$;
am Ende des dritten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x + 3w_1y - 3k_1z$ usw.;
am Ende des t-ten Tages ist auf allen Wiesen noch die Futtermenge $w_1x + tw_1y - tk_1z$ vorhanden.

Da nach t Tagen sämtliche Wiesen abgefressen sind, ergebe sich die drei homogenen Gleichungen

$$w_1x + t_1w_1y - t_1k_1z = 0 \tag{I}$$
$$w_2x + t_2w_2y - t_2k_2z = 0 \tag{II}$$
$$w_3x + t_3w_3y - t_3k_3z = 0 \tag{III}$$

Newton wusste von den von Leibniz gefundenen Determinanten noch nichts; er löste die Aufgabe folgendermaßen:

Die Gleichungen (I) und (II) ergeben, nach den Unbekannten x und y aufgelöst:

$$x = \frac{t_1t_2(k_1w_2 - k_2w_1)}{w_1w_2(t_2 - t_1)}z; \qquad y = \frac{w_1t_2k_2 - w_2t_1k_1}{w_1w_2(t_2 - t_1)}z$$

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in (III) ein und erhalten nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner $w_1w_2(t_2 - t_1) : z$ die gesuchte Beziehung:

$$w_3t_1t_2(k_1w_2 - k_2w_1) + t_3w_3(w_1t_2k_2 - w_2t_1k_1) = k_3t_3w_1w_2(t_2 - t_1)$$

In Determinantenform lautet diese Bedingung:

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_1t_1 & -k_1t_1 \\ w_2 & w_2t_2 & -k_2t_2 \\ w_3 & w_3t_3 & -k_3t_3 \end{vmatrix} = 0$$

22 Das Auflösen algebraischer Gleichungen durch Wurzelziehen

Unter einer algebraischen Gleichung n-ten Grades versteht man eine Gleichung von der Form

$$P(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1x + A_0 = 0$$

in der die Koeffizienten $A_n, A_{n-1}, ..., A_1, A_0$ reelle Zahlen sind.[27] Da in einer algebraischen Gleichung n-ten Grades $A_n \neq 0$ ist, kann die Gleichung durch A_n dividiert werden. Es ergibt sich:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

wobei

$$a_i = \frac{A_i}{A_n}$$

ist. Für algebraische Gleichungen n-ten Grades gilt der Satz:
Für jede algebraische Gleichung n-ten Grades gibt es einen Zahlenbereich, in dem diese Gleichung genau n Wurzeln hat.

[27] Die Funktionentheorie beschäftigt sich auch mit Gleichungen, deren Koeffizienten komplexe Werte sein können.

Der Fundamentalsatz der Algebra, der eigentlich ein funktionentheoretischer Satz ist, sagt aus, dass der Bereich der komplexen Zahlen ein solcher Zahlenbereich für jede beliebige algebraische Gleichung ist.
Dieser Satz lautet in anderer Form:

Das Polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ lässt sich stets in n Linearfaktoren von der Form $x - \alpha_i$ zerlegen, wobei die Wurzeln der Gleichung mit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ bezeichnet werden.

Den ersten vollständigen Beweis erbrachte im Jahre 1799 der damals zweiundzwanzigjährige Gauß in seiner Doktordissertation "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi ve] secundi gradus resolvi posse" (Neuer Beweis des Theorems, nach dem jede algebraische rationale ganze Funktion einer Variablen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann).

Der Titel der Dissertation besagt also, dass neben Faktoren ersten Grades auch Faktoren zweiten Grades auftreten können. Letztere sind die Produkte von $x - (a + ib)$ und $x - (a - ib)$; d.h., komplexe Wurzeln können bei Gleichungen mit reellen Koeffizienten nur paarweise konjugiert komplex auftreten.
Das Produkt hat also die Form $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Bezeichnet man dasselbe mit $x^2 + px + q$, so ist $p = -2a$ und $q = a^2 + b^2$, wobei $p^2 - 4q < 0$ sein muss.

Berücksichtigt man noch, dass ein- und dieselbe Wurzel auch mehrfach auftreten kann, so erhält die algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten die Form

$$(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}... = 0$$

wobei jeweils $p_i^2 - 4q_i < 0$ ist.

Hieraus folgt, dass eine algebraische Gleichung ungeraden Grades mindestens eine reelle Wurzel als Lösung hat.

Mit dem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra war eine mehr als zweitausendjährige Entwicklung der Gleichungslehre zum Abschluss gelangt.
Eine Reihe von speziellen Problemen, die die Lösung algebraischer Gleichungen betrafen, waren schon vorher erledigt worden. Über die Gleichungen ersten und zweiten Grades wusste man im allgemeinen schon im Altertum recht gut Bescheid, wenn auch Lösungen $x = 0$ oder $x < 0$ unterdrückt wurden.
Ebenso wurde bei quadratischen Gleichungen meistens nur die größere Lösung angegeben. Aufgaben, die auf Gleichungen ersten und zweiten Grades führen, erschienen bei den Mathematikern der Antike vielfach in geometrischem Gewande.

Ein wesentlich anderes Bild bietet uns die Geschichte der Gleichungen dritten und vierten Grades. In den babylonischen Keilschrifttexten (um 1900 v.u.Z.) tauchen bereits umfangreiche Tabellen von Kubikzahlen auf, mit Hilfe derer kubische Aufgaben bzw. Gleichungen gelöst werden konnten.
Archimedes löst Gleichungen dritten und vierten Grades auf geometrischem Wege unter Anwendung von Kegelschnitten. An eine allgemeine Lösung der Gleichungen dritten und

vierten Grades dachte damals noch niemand.

Das Problem der Lösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades wurde erst um das Jahr 1500 u.Z. vollständig erfasst.
Zunächst eine Bemerkung, die für alle algebraischen Gleichungen Gültigkeit hat:

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades von der Form

$$X^n + A_{n-1}X^{n-1} + A_{n-2}X^{n-2} + ... + A_1X + A_0 = 0$$

wird durch die Substitution $X = x - \frac{A_{n-1}}{n}$ stets in eine algebraische Gleichung n-ten Grades übergeführt, in der das Glied $(n-1)$-ten Grades fehlt. Beispiele:

a)
$$X^2 + A_1X + A_0 = 0 \qquad ; \qquad X = x - \frac{A_1}{2}$$
$$x_2 - A_1x + \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 + A_1x - \frac{A_1^2}{2} + A_0 = 0 \qquad ; \qquad x^2 = \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - A_0$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - A_0} \qquad \text{und} \qquad X = -\frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - A_0}$$

b)
$$X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0 \qquad ; \qquad X = x - \frac{A_2}{3}$$
$$x_3 - A_2x^2 + \frac{A_2^2}{3}x - \frac{A_2^3}{27} + A_2x^2 - \frac{2A_2^2}{3}x + \frac{A_2^3}{9} + A_1x - \frac{A_1A_2}{3}A_0 = 0$$
$$\text{also} \qquad x^3 + \left(A_1 - \frac{A_2^2}{3}\right)x + \left(\frac{2A_2^3}{27} - \frac{A_1A_2}{3} + A_0\right) = 0$$

c)
$$X^4 - 12X^3 + 59X^2 - 188X + 140 = 0 \qquad ; \qquad X = x + 3$$
$$x^4 + 5x^2 - 50x - 136 = 0$$

Für die Gleichung dritten Grades ergibt sich hieraus, dass es genügt, die Lösung der Gleichungsform

$$x^3 + px + q = 0$$

zu suchen, wobei $p = A_1 - \frac{A_2^2}{3}$ und $q = \frac{2A_2^2}{27} - \frac{A_1A_2}{3} + A_0$ zu setzen ist. Hat man für diese reduzierte Gleichung die drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 gefunden, so sind die drei Wurzeln der vollständigen Gleichung:

$$X_1 = x_1 - \frac{A_2}{3}; \qquad X_2 = x_2 - \frac{A_2}{3}; \qquad X_3 = x_3 - \frac{A_3}{3}$$

Die Lösung der Gleichung dritten Grades wurde erstmalig veröffentlicht von Geronimo Cardano (1501-1576) in der im Jahre 1545 erschienenen "Ars magna sive de regulis algebraicis liber"(Die große Kunst oder das Buch von den algebraischen Regeln), wie Cardano im ersten Kapitel seines bedeutenden Werkes hervorhebt, ist nicht er der Entdecker der Lösung, sondern Scipio Ferro (1465?-1526), der seine Lösung nicht selbst veröffentlichte, sondern dieselbe unter dem Siegel der Verschwiegenheit mehreren Freunden anvertraute.

Durch weitere Mittelsmänner, unter denen sich auch Niccolo Tartaglia (1500?-1557) befand, erhielt Cardano Kenntnis von der Ferroschen Lösung. Er hatte zwar Tartaglia eidlich zugesichert, die Lösung nicht zu veröffentlichen, brach jedoch sein Wort und fügte der Lösung einen vollständigen Beweis bei.
Da Cardano sowohl Ferro als auch alle Mathematiker, die irgend etwas zur Lösung beitrugen, namentlich anführt, kann man ihn wohl des Wortbruches, nicht aber des Plagiates bezichtigen.

Die von Cardano gegebenen Entwicklungen sind für unsere Begriffe ziemlich weitläufig. Dazu kommt noch, dass Cardano noch nicht über die Bezeichnungsweise eines Vieta oder Descartes (1596-1650) verfügte.
Die Ableitung der nach Cardano benannten Lösung der Gleichung $x^3+px+q=0$ wurde später wesentlich vereinfacht. Die eleganteste Herleitung der "Cardanischen Formel" gab wohl Leonhard Euler in der Zeitschrift "Commentarii Academiae Petropolitanae" (Jahrg. 6, 1732-33 (1738)).

Sie hat folgende Form: In

$$x^3 + px + q = 0 \tag{I}$$

wird

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \tag{II}$$

gesetzt und eine Gleichung

$$z^2 = \alpha z - \beta \tag{III}$$

gesucht, deren Wurzeln u und v sein sollen. Durch Kubieren von (II) und Vergleich mit (I) wird

$$p = -3\sqrt[3]{uv} \qquad \text{und} \qquad q = -(u+v)$$

Aus $u+v=\alpha$ und $u\cdot v=\beta$ folgt

$$\alpha = -q, \quad \beta = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \text{also} \qquad z^2 + qz = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Die Wurzeln $u=z_1$ und $v=z_2$ sind dann

$$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{und} \qquad v = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Hieraus ergibt sich die bekannte "Cardanische Formel":

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Damit ist theoretisch die Lösung der kubischen Gleichung erledigt

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
X^3 - 9X^2 + 18X + 28 &= 0 \\
X &= x + 3 \\
x^3 - 9x + 28 &= 0 \\
x &= \sqrt[3]{-14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{-14 - \sqrt{196 - 27}} \\
x_1 &= -1 - 3 = -4
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $x^3 - 9x + 28 = 0$ kann aufgespalten werden in die lineare Gleichung $x + 4 = 0$ und in die quadratische Gleichung

$$
\begin{array}{l}
\big(\; x^3 \qquad\quad - 9x + 28\big) : \big(x + 4\big) = x^2 - 4x + 7 \\
\underline{-x^3 - 4x^2} \\
\qquad - 4x^2 \;\; - 9x \\
\qquad\;\; \underline{4x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad\quad 7x + 28 \\
\qquad\qquad\; \underline{- 7x - 28} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

aus der sich die beiden anderen Lösungen $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{-3}$ ergeben. Die drei Lösungen der Ausgangsgleichung sind somit:

$$X_1 = -4 + 3 = -1; \qquad X_2 = 5 + \sqrt{-3}; \qquad X_3 = 5 - \sqrt{-3}$$

Die Aufspaltung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ in eine lineare und eine quadratische Gleichung ist für den Fall, dass eine reelle Wurzel x_1 bereits bekannt ist, verhältnismäßig einfach.
Hat man etwa mit Hilfe der Cardanischen Formel den Wurzelwert x_1 gefunden, so lautet die quadratische Gleichung für die Wurzeln x_2 und x_3

$$x^2 + x_1 x + x_1^2 + p = 0$$

aus der sich die weiteren Lösungen x_2 und x_3 zu

$$x_{2,3} = \frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3x_1^2}{4} - p}$$

ergeben. Etwas schwieriger gestaltet sich die Handhabung der Cardanischen Formel, wenn die beiden Ausdrücke

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad , \qquad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

einzeln irrationale Werte ergeben. Es kann nämlich hier der Fall eintreten, dass die Summe der beiden irrationalen Werte einen rationalen Wert ergibt. Beispiel:

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

Selbstverständlich kann man die numerische Berechnung der beiden Kubikwurzeln mit Hilfe von Tabellen oder Logarithmen durchführen:

$$x = \sqrt[3]{3{,}9245} + \sqrt[3]{0{,}0755} = 1{,}577 + 0{,}423 = 2{,}000$$

Etwas mehr Findigkeit gehört dazu, wenn man feststellen soll, dass $2+\frac{10}{3\sqrt{3}} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ und $2-\frac{10}{3\sqrt{3}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ ist. Hieraus ergibt sich die rationale Lösung

$$x = \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2$$

Eingangs dieses Abschnittes wurde bereits erwähnt, dass eine algebraische Gleichung ungeraden Grades wenigstens eine reelle Wurzel haben muss. Für die kubische Gleichung ergibt sich hieraus, dass diese entweder eine reelle Wurzel und zwei konjugiert komplexe Wurzeln oder drei reelle Wurzeln hat[28]. Der zweite Fall war für Cardano ein noch ungelöstes Problem. Er tritt nämlich stets dann ein, wenn $\left(\frac{q}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist. Das ist natürlich nur möglich, wenn p negativ ist.

Die Cardanische Formel ergibt dann den Wert x als Summe von zwei konjugiert-komplexen Größen, deren Summe reell ist. Auch hier gelingt es in manchen Fällen, die Kubikwurzeln aus den komplexen Größen durch Probieren zu ermitteln. Von einem exakten Verfahren kann man hier nicht sprechen. Ein Beispiel möge dies erläutern:

$$\begin{aligned} &x^3 - 15x - 4 = 0 \\ &\qquad x_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{2^2-5^2}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{2^2-5^2}} = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \end{aligned}$$

Durch Probieren kann man feststellen, dass

$$2+11i = (2+i)^3 \qquad \text{und} \qquad 2-11i = 2-i)^3$$

ist. Also ergibt sich:

$$x_1 = (2+i) + (2-i) = 4 \qquad \text{und} \qquad x_{2,3} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{-\frac{3\cdot 16}{4} + 15} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Man bezeichnet den Fall, für den $\left(\frac{q}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist, als "Casus irreducibilis"[29] , da die Lösung der kubischen Gleichung nicht auf Kubikwurzeln reeller Zahlen zurückführbar ist.

Dagegen kann eine derartige Gleichung dritten Grades mit Hilfe goniometrischer Funktionen exakt gelöst werden. Francois Vieta, Albert Girard (1595-1632) u.a. fanden die

[28] Von den mehrfachen Wurzeln, die bei kubischen Gleichungen stets reell sind, wollen wir hier absehen.

[29] Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass der Ausdruck "irreduzibel" in der Theorie der algebraischen Gleichungen in anderem Sinne gebraucht wird.

trigonometrischen Lösungen für den Casus irreducibilis. Am gebräuchlichsten ist die Girardsche Lösung:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \left(p < 0, \left(\frac{q}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0\right)$$

Geht man von der goniometrischen Beziehung

$$\cos 3\varepsilon = -3\cos\varepsilon + 4\cos^3\varepsilon \qquad \text{oder} \qquad \cos^3\varepsilon - \frac{3}{4}\cos\varepsilon - \frac{1}{4}\cos 3\varepsilon = 0$$

aus, so erhält man durch die Substitution $\cos\varepsilon = \frac{x}{r}$

$$x^3 - \frac{3}{4}r^2x - \frac{1}{4}r^3\cos 3\varepsilon = 0$$

durch Vergleich mit $x^3 + px + q = 0$ die Bestimmungsgleichungen

$$r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \text{und} \qquad \cos 3\varepsilon = -\frac{4q}{r^3}$$

Dann ist

$$x_1 = r\cdot\cos\varepsilon \qquad \text{und} \qquad x_{2,3} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3x_1^2}{4} - p}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 = 0 \\ r &= 2\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad (\log r = 0{,}48502) \\ \cos 3\varepsilon &= -\frac{4\cdot 6}{\left(2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3} \\ 3\varepsilon &= 147°19'07'' \\ \varepsilon &= 49°06'22'' \\ x_1 &= r\cdot\cos\varepsilon = 2 \\ x_{2,3} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{-\frac{3\cdot 4}{4} + 7}; \qquad x_2 = 1; x_3 = -3 \end{aligned}$$

23 Die Lösung der Gleichung vierten Grades

Um die Gleichung vierten Grades

$$x^4 = -px^2 + qx - r$$

in der bereits das Glied dritten Grades durch geeignete Substitution beseitigt wurde, zu lösen, addieren wir beiderseits $2x^2u + u^2$, also:

$$x^4 + 2x^2u + u^2 = 2x^2u + u^2 - px^2 - qx - r$$

Die linke Seite ist bereits ein volles Quadrat, nämlich $(x^2 + u)^2$. Die rechte Seite $(2u - p)x^2 - qx + (u^2 - r)$ wird ein volles Quadrat, wenn $4 \cdot (2u - p) \cdot (u^2 - r) = q^2$ ist.
Dies ist eine Gleichung dritten Grades für die Unbekannte u, die wir in der Form

$$u^3 - \frac{pu^2}{2} - ru + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0$$

schreiben können. Diese kubische Gleichung hat wenigstens eine reelle Wurzel, die wir mit u_1 bezeichnen. Dann ist:

$$(x^2 + u_1)^2 = \left(x\sqrt{2u_1 - p} - \frac{q}{2\sqrt{2u_1 - p}}\right)^2$$

oder

$$\left(x^2 + u_1 - x\sqrt{2u_1p} + \frac{q}{2\sqrt{2u_1 - p}}\right)\left(x^2 + u_1 + x\sqrt{2u_1p} + \frac{q}{2\sqrt{2u_1 - p}}\right) = 0$$

Die Gleichung

$$x^4 + 2x^2u_1 + u_1^2 = 2x^2u_1 + u_1^2 - px^2 - qx - r$$

wurde somit in zwei quadratische Gleichungen aufgespalten. Die Lösungen der quadratischen Gleichungen

$$x^2 - x\sqrt{2u_1 - p} + u_1 + \frac{q}{2\sqrt{2u_1 - p}} 0$$
$$x^2 + x\sqrt{2u_1 - p} + u_1 - \frac{q}{2\sqrt{2u_1 - p}} 0$$

sind dann die vier Lösungen der gegebenen biquadratischen Gleichung.

Soll die vollständige Gleichung vierten Grades

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{I}$$

in zwei quadratische Gleichungen aufgespalten werden, so kann man auch folgendermaßen verfahren:

$$\left(x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{B}{6} + u\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0 \tag{II}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{A^2}{4} - \frac{2B}{3} + 2u \\ 2\alpha\beta &= \frac{AB}{6} + Au - C \qquad \text{(III)} \\ \beta^2 &= \frac{B^2}{36} + u^2 + \frac{Bu}{3} - D \end{aligned}$$

Die Identität $(2\alpha\beta)^2 = 4\alpha^2\beta^2$ führt auf die reduzierte Gleichung dritten Grades für u:

$$u^3 + \left(\frac{AC}{4} - \frac{B^2}{12} - D\right)u + \left(\frac{ABC}{24} - \frac{C^2}{8} - \frac{B^2}{108} - \frac{A^2D}{8} + \frac{BD}{3}\right) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Als Gleichung dritten Grades besitzt diese "kubische Resolvente" wenigstens eine reelle Lösung u_1. Aus (III) ergeben sich die Werte α und β. Gleichung (I) kann dann in die beiden quadratischen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + \left(\frac{A}{2} + \alpha\right)x + \left(\frac{B}{6} + u + \beta\right) = 0 \\ x^2 + \left(\frac{A}{2} - \alpha\right)x + \left(\frac{B}{6} + u - \beta\right) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

aufgespalten werden.
Beispiel:

$$x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 28x + 8 = 0$$
$$u^3 - 67u - 204 = 0 \qquad \text{Casus irreducibilis}$$

Eine Lösung dieser kubischen Resolventen ist $u_1 = -4$. Dann wird

$$\alpha = \sqrt{(\left(\frac{8}{2}\right)^2 - \frac{2\cdot 6}{3} - 2\cdot 4} = 2$$
$$\beta = \sqrt{\frac{6^2}{36} + 4^2 - \frac{6\cdot 4}{3} - 8} = 1$$

Probe: $2\alpha\beta = \frac{8\cdot 6}{6} - 8\cdot 4 + 28 = 4$
Die Gleichung vierten Grades wird in die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 + 6x - 2 = 0 \qquad , \qquad x^2 + 2x - 4 = 0$$

aufgespalten; die Lösungen sind

$$x_1 = -3 + \sqrt{11}; \qquad x_2 = -3 - \sqrt{11}; \qquad x_3 = -1 + \sqrt{5}; \qquad x_4 = -1 - \sqrt{5}$$

24 Algebraische Gleichungen von höherem als dem vierten Grade

Nachdem Gleichungen dritten und vierten Grades durch Wurzelziehen gelöst werden konnten, befassten sich die Algebraiker mit dem Problem der Gleichungen von höherem als dem vierten Grade.
Es tauchte hier immer wieder der Gedanke auf, durch geeignete Substitutionen die Glieder einer Gleichung höheren Grades, die einer Zurückführung auf eine Gleichung niedrigeren Grades im Wege standen, zu beseitigen. Als Endziel betrachtete man die Lösung der algebraischen Gleichung beliebig hohen Grades mit Hilfe des Ziehens von Wurzeln.

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708) nahm zunächst die Gleichungen fünften und sechsten Grades in Angriff und legte seine Gedanken über die Reduktion höherer Gleichungen brieflich seinem Freunde Gottfried Wilhelm Leibniz zur Begutachtung vor. Leibniz hatte sich selbst schon mit der Lösung der Gleichung fünften Grades eingehend beschäftigt und glaubte sogar eine Lösung gefunden zu haben; er vermochte jedoch die Scheu vor den hierzu nötigen ausgedehnten numerischen Berechnungen nicht zu überwinden.

Schließlich kam Leibniz jedoch zu der Vermutung, dass die Tschirnhaussche Methode, die mittleren Glieder einer Gleichung wegzuschaffen, bei Gleichungen höheren Grades höchstens in Sonderfällen von Erfolg sein könne. Er glaubte sogar, diese seine Vermutung beweisen zu können.
Viel optimistischer äußerte sich Leonhard Euler zu diesem Problem. Nachdem er zur Lösung der Gleichung 4. Grades durch Umformung in eine biquadratische Gleichung einen sehr wesentlichen Beitrag geleistet hatte, hielt er die Lösung der Gleichung fünften und allgemein n-ten Grades für durchaus möglich.

Man war sich also im 18. Jahrhundert noch nicht darüber im klaren, ob man nach einer Lösung oder nach dem Unmöglichkeitsbeweis einer solchen Lösung suchen sollte.
Das entscheidende Wort sprach dann Carl Friedrich Gauß, der in seiner Dissertation (1799) folgendes bemerkte: "Es dürfte wohl gar nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit für den fünften Grad in aller Strenge zu beweisen; ich werde an anderer Stelle meine Untersuchungen über die Frage ausführlicher darlegen."

Für Gauß stand also fest, dass es sich nur um den Nachweis der Unmöglichkeit der Lösung handeln könne. Es ist auch über jeden Zweifel erhaben, dass der damals 22jährige Gauß den Unmöglichkeitsbeweis besaß.
Einen vollgültigen Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung einer Gleichung von höherem als dem vierten Grad mit Hilfe von Wurzelgrößen erbrachte der junge Norweger Henrik Abel (1802-1829) im Jahre 1826. Der Abelsche Beweis wurde vereinfacht von Leopold Kronecker (1823-1891).

25 Die Anwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen auf geometrische Probleme

Bei der Behandlung der Quadratur des Kreises zeigte sich, dass die Lösung dieses uralten Problems schließlich nur auf Grund algebraischer Untersuchungen gelang.
Den Zusammenhang zwischen den Gleichungen und der Geometrie zu klären ist Aufgabe der von Pierre de Fermat und René Descartes begründeten analytischen Geometrie. Erst mit Hilfe der Methoden der analytischen Geometrie war es möglich, die Frage zu beantworten, welche geometrischen Konstruktionen können in der Euklidischen Ebene unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal exakt ausgeführt werden.
Manche Autoren bezeichnen geometrische Konstruktionen dieser Art als "exakte und elementare Konstruktionen".

Jede exakte und elementare Konstruktion kann auf folgende Fundamentalkonstruktionen zurückgeführt werden:

1. Durch zwei gegebene Punkte ist die Gerade zu legen.

2. Zwei Geraden sind zum Schnitt zu bringen.

3. Um einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt ist ein Kreis zu zeichnen, der die Entfernung zweier beliebiger oder vorgegebener oder bereits gefundener Punkte zum Halbmesser hat.

4. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis sind zu bestimmen.

5. Die Schnittpunkte zweier Kreise sind zu bestimmen.

Die Ausführung dieser fünf Fundamentalkonstruktionen läuft letzten Endes auf die Konstruktion von Punkten hinaus. Eine geometrische Konstruktion kann nun vielfach dadurch algebraisch formuliert werden, dass sowohl die gegebenen als auch die gesuchten Punkte durch je ein Zahlenpaar (Koordinaten) festgelegt werden.
Die Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Punkten werden dann durch Gleichungen der analytischen Geometrie ausgedrückt. Ferner können geometrische Konstruktionen auch mit Hilfe der sogenannten algebraischen Analysis gelöst werden.

Hier werden die Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Strecken durch Gleichungen ausgedrückt. Es lässt sich nun auf elementarem, jedoch etwas umständlichem Wege beweisen[30], dass in beiden Fällen die Lösung der Gleichungen auf die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und des Quadratwurzelziehens beschränkt sein muss.

Konstruktionsaufgaben, die auf irreduzible Gleichungen dritten oder höheren Grades oder auf transzendente Gleichungen führen, können mit Hilfe von Zirkel und Lineal allein nicht gelöst werden. Aufgaben dieser Art sind die Würfelverdopplung, die Dreiteilung des Winkels, die Konstruktion des ebenen Dreiecks aus den gegebenen Längen der drei Winkelhalbierenden usw.

Die Kreisteilungsgleichungen

Die einfachste algebraische Gleichung n-ten Grades hat die Form

$$x^n - 1 = 0$$

Sie hat stets n voneinander verschiedene Lösungen, mit anderen Worten:
Die n-te Einheitswurzel $\sqrt[n]{1}$ ist n-deutig. Eine dieser n Wurzeln ist stets $x_1 = 1$.
Für $n = 2$ ergibt sich aus

$$x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1) = 0 \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

[30] Dieser Beweis ist vollständig durchgeführt in dem lesenswerten Büchlein von Walter Breidenbach "Das Delische Problem", Leipzig 1952, S. 116 ff.

Für $n = 3$ finden wir aus

$$x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Für $n = 4$ ergibt sich:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2-(-1))$$

Um den zweiten Faktor zerlegen zu können, setzt man $i^2 = -1$ und erhält

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

also $x_1 =$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Schwieriger ist schon die Lösung von

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

Wir teilen das Ergebnis vorläufig ohne Beweis mit:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1;\\
x_2 &= +\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\\
x_3 &= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\\
x_4 &= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\\
x_5 &= +\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$x^6 - 1^6 = (x-1(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = 0$$

ergibt:

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = -1; \qquad x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}; \qquad x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3};$$
$$x_5 = +\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}; \qquad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

Man beachte, dass für$n = 2, 3, 4, 5, 6$, sich für $x_2, x_3, ..., x_n$ entweder -1 oder Ausdrücke, die aus endlich vielen Quadratwurzeln zusammengesetzt sind, ergeben. Für

$$x^7 - 1^7 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

ist es jedoch nicht mehr möglich, für die Gleichung

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$$

Wurzeln zu finden, die aus endlich vielen Quadratwurzeln zusammengesetzt sind.

Wie schon die Bezeichnung "Kreisteilungsgleichungen" besagt, steht die Lösung der Gleichung $x^n - 1^n = 0$ in engstem Zusammenhang mit der geometrischen Aufgabe, den Kreis mit dem Halbmesser 2 unter alleiniger Verwendung von Zirkel in n gleiche Teile zu teilen oder, was damit gleichbedeutend ist, in einen Einheitskreis mit Zirkel und Lineal ein reguläres n-Eck einzubeschreiben.

Schon im Altertum unterschied man die folgenden drei Familien von konstruierbaren regulären Polygonen:

$$n = 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ ...,$$
$$n = 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ ...,$$
$$n = 5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ ...$$

Durch Kombinationen gelang die Konstruktion weiterer regulärer Vielecke. Wegen der Identität

$$\frac{360°}{6} - \frac{360°}{10} = \frac{360°}{15}$$

ergab sich die Konstruktion des regulären 15-Ecks aus den Konstruktionen des regulären 6- und 10-Ecks usw. Hieraus gewann man die Polygone mit $n =$ 30, 60, 120, Ecken. Diese abgeleiteten Konstruktionen sind nichts wesentlich Neues. Wir werden uns im folgenden auf die Betrachtung von Konstruktionen von regulären Polygonen, deren Eckenzahlen Primzahlen sind, beschränken.

In dem Zeitraum von ca. 200 v.u.Z. bis zum ausgehenden 18. Jahrhundert wurden in der Frage der Konstruierbarkeit der regulären Polygone keine nennenswerten Fortschritte erzielt. Erst Gauß erkannte im Jahre 1796 völlig klar, dass es sieh bei der Frage der Konstruierbarkeit der regulären Polygone um ein zahlentheoretisches Problem handelt.

Er fand nämlich, dass ein reguläres n-Eck, dessen Eckenzahl n sich als Primzahl von der Form $2^{(2^\nu)} + 1$ darstellen lässt, exakt mittels Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Über die Primzahlen dieser Form wurde bereits das wichtigste mitgeteilt.

Konstruierbar sind demnach die regulären Polygone mit $n =$ 3, 5, 17, 257 und 65537 Ecken sowie die hieraus durch geeignete Kombinationen abgeleiteten Polygone.
Die Entdeckung des damals 19jährigen Gauß wurde von E.A.W. Zimmermann im "Jenenser Intelligenzblatt" (1796) durch eine kurze Mitteilung der gelehrten Welt zur Kenntnis gebracht.
Näher ausgeführt hat Gauß seine Theorie der Kreisteilungsgleichungen in dem für die Entwicklung der Zahlentheorie grundlegenden Werk "Disquisitiones arithmeticae" (Arithmetische Untersuchungen) im Jahre 1801.

Es war ein nicht nur für die damalige Zeit überraschendes Ergebnis, dass das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Der Beweis für die Konstruierbarkeit des regulären 17-Ecks mit Hilfe von Zirkel und Lineal beruht auf der Gleichung:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{6}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

In der Folgezeit bemühten sich bedeutende Mathematiker darum, die Konstruktion des regulären 17-Ecks zu vereinfachen.

Der Kuriosität halber sei erwähnt, dass für die Konstruktion des regulären 257-Ecks die einschlägigen Rechnungen in einer 80 Seiten umfassenden Abhandlung durchgeführt wurden.
Schließlich sei noch erwähnt, dass ein Mathematiker Hermes in zehnjähriger Arbeit ein Manuskript fertigstellte, in dem die Konstruktion des regulären 65537-Ecks behandelt wird. Besagtes Manuskript wird in einem Handkoffer im mathematischen Institut der Göttinger Universität aufbewahrt.

Nach diesem Exkurs über die mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruierbaren Polygone kehren wir zurück zu den Kreisteilungsgleichungen. Soll die Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

ohne Rücksicht auf die Konstruierbarkeit mit Hilfe von Zirkel und Lineal gelöst werden, so bedienen wir uns hierzu des Moivreschen Satzes:

$$x = \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 0,1,2,...,n-1)$$

Beispiel: Die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ hat fünf verschiedene Wurzeln:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\
x_2 &= \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\
x_3 &= \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\
x_4 &= \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\
x_5 &= \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Wie wir sahen, können Gleichungen vierten Grades auf solche dritten Grades zurückgeführt werden. Bei Gleichungen von höherem als dem vierten Grad ist eine Reduktion auf Gleichungen von einfacherem Typus (etwa auf reine Gleichungen von der Form $x^n - A_0 = 0$ oder auf solche niedrigeren Grades) im allgemeinen nicht mehr möglich, d.h., die Reduktion auf einfachere Gleichungen gelingt nur noch in bestimmten Sonderfällen.

Die Antwort auf die Frage, welche algebraische Gleichungen höheren Grades auf einfachere Gleichungen reduziert werden können, gibt die von Evariste Galois (1811 bis 1832) begründete Theorie der Permutationsgruppen.
Galois war noch nicht 21 Jahre alt, als er am Vorabend eines sinnlosen Duells, dem er zum Opfer fiel, in einem sieben Seiten langen Brief an seinen Freund Auguste Chevalier seine Theorie der Gleichungsgruppe entwickelte.

Um dem Leser wenigstens einen Begriff zu geben, was eine Gleichungsgruppe ist, nehmen wir an, dass vier Personen, die wir mit A, B, C, D bezeichnen, an einem Tisch Platz nehmen.

Dies kann auf $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedene Arten geschehen. Jede Sitzordnung geht aus irgend einer anderen hervor durch eine Operation, die man als "Permutation" bezeichnet.
Es setzt sich etwa A auf den Platz von D, dieser auf den Platz von B, dieser auf den Platz von A, während C seinen Platz beibehält. Es kann auch jede der vier Personen den Platz verändern, andererseits rechnen | wir zu den 24 Permutationen auch die "identische" Permutation, bei der jeder Teilnehmer seinen Platz beibehält.

Diese 24 Permutationen haben nun eine grundlegende Eigenschaft: Irgend zwei Permutationen ergeben, in einer bestimmten Reihenfolge nacheinander ausgeführt, eine ganz bestimmte dritte Permutation, d.h., mehrere Platzwechsel, nacheinander ausgeführt, können durch einen einzigen bestimmten Platzwechsel ersetzt werden.
Führen wir dieselbe Untersuchung für 10 Personen durch, so wird die Anzahl der Permutationen natürlich bedeutend größer. Es ergeben sich:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10 = 3628800 \text{ Permutationen.}$$

Die zu einer bestimmten Personenzahl n gehörigen $n!$ Permutationen bilden eine sogenannte Permutationsgruppe. Setzen wir nun an die Stelle der vier Personen die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 einer Gleichung vierten Grades und untersuchen die Ausdrücke, die man aus diesen vier Wurzeln bilden kann, hinsichtlich ihres Verhaltens bei der Permutierung der vier Wurzeln, so wird man finden, dass die Art, wie sich mehrere hintereinander ausgeführte Permutationen zu einer einzigen Permutation zusammensetzen lassen, zu dem Charakter der Gleichung in einer sehr engen Beziehung steht.

Galois fand, dass zu jeder algebraischen Gleichung n-ten Grades eine ganz bestimmte Permutationsgruppe ihrer Wurzeln gehört. Ist diese Gruppe bekannt, so kann man aus ihr ablesen, ob die Gleichung durch Wurzelziehungen lösbar ist. Ferner erfahren wir durch diese gruppentheoretische Betrachtungsweise, ob die Lösung einer algebraischen Gleichung auf die Lösung einfacherer Gleichungen zurückgeführt werden kann.

Die Bestimmung der Permutationsgruppe einer algebraischen Gleichung erfolgt auf elementarem Wege unter ausschließlicher Benutzung der vier Grundrechnungsarten. Wir wollen dem Leser jedoch nicht verhehlen, dass diese elementaren Rechnungen im allgemeinen einen kaum zu bewältigenden Umfang annehmen.

Die Frage nach der Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung durch Wurzelziehen bzw. Zurückführung auf eine einfachere Gleichung ist also theoretisch durch die Galoissche Theorie restlos geklärt.
Es erhebt sich nun die Frage, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, algebraische Gleichungen von höherem als dem vierten Grad zu lösen. Von den Näherungsmethoden, wie sie von Newton, Lagrange u.a. gefunden wurden, wollen wir hier absehen, da dieselben mit der Theorie der algebraischen Gleichungen nichts zu tun haben.

Bleiben wir zunächst bei den Gleichungen fünften Grades. Durch Wurzelziehungen kann die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht gelöst werden.
In Sonderfällen ist dies jedoch möglich. Die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ ist ein Beispiel dafür. Die fünf Wurzeln sind, wie wir gesehen haben, sogar durch Quadratwurzeln darstellbar,

woraus folgt, dass das reguläre Fünfeck mittels Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Einen speziellen Fall einer Gleichung fünften Grades, die durch fünfte Wurzeln aus konjugiert-komplexen Größen gelöst werden kann, fand Euler (1762). Es ist dies die Gleichung

$$x^5 - 40x^4 - 72x^3 + 50x + 98 = 0$$

mit der Lösung

$$x_1 = \sqrt[5]{-31 + 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-31 - 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 + 10\sqrt{-7}} - \sqrt[5]{-18 - 10\sqrt{-7}}$$

Diese Wurzel ist reell und hat den numerischen Wert 6,9987.

In besonderen Fällen können algebraische Gleichungen mit Hilfe transzendenter Funktionen gelöst werden. Der Casus irreducibilis bei den kubischen Gleichungen kann, wie wir bereits gezeigt haben, im allgemeinen nur durch Anwendung trigonometrischer Funktionen gelöst werden. Dazu ist jedoch eine Tabelle der trigonometrischen Funktionswerte nötig.

26 Literatur

Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie, MSB Nr. 1, 8. Aufl. Berlin 1973

Bachmann, P.: Das Fermatproblem, Berlin 1919

Belkner, H.: Matrizen, MSB Nr. 48, 2. Aufl. Leipzig 1973

Belkner, H.: Metrische Bäume, MSB Nr. 65, Leipzig 1972

Berman, G. N.: Die Zahl und ihre Theorie, Leipzig-Jena 1954

Breidenbach: Das Delische Problem, Leipzig 1952

Dynkin, E. B., W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen, Bd. II, Aufgaben aus der Zahlentheorie, MSB Nr. 20, 4. Aufl., Berlin 1968

Gelfond, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen, MSB Nr. 22, 5. Aufl. Berlin 1973

Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. I bis III, Berlin 1924-1928

Krein, S. G., und W. N. Uschakowa: Vorkurs zur Analysis, Leipzig 1966

Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt, MSB Nr. 13, Leipzig 1968

Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz, mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem, MSB Nr. 6, 9. Aufl. Leipzig 1968

Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich, MSB Nr. 13, 8. Aufl. Leipzig 1969

Lietzmann, W.: Wo steckt der Fehler, Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen, MSB Nr. 11, 5. Aufl. Leipzig 1969

Lugowski, H., und H.J. Weinert: Grundzüge der Algebra, Teil I bis III (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek), Leipzig 1968

Miller, M.: Rechenvorteile, MSB Nr. 14, 5. Aufl. Leipzig 1975

Schafarewitsch, I.R.: Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades, MSB Nr. 23, 3. Aufl. Berlin 1968

Sominski, I. S.: Die Methode der vollständigen Induktion, MSB Nr. 8, 10. Aufl. Berlin 1971

Übungen für Junge Mathematiker, Teil I, Lehmann: Zahlentheorie, MSB Nr. 36, 2. Aufl. Leipzig 1970

Vyšín, J.: Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben, MSB Nr. 5, 2. Aufl. Leipzig 1975

Wenzel, H.: Einfachste Konvergenzkriterien für unendliche Reihen (Lehrprogrammbücher Mathematik. Bd. 3), Leipzig 1973

Wußing, H.: Mathematik in der Antike, 2. Aufl. Leipzig 1965