

---

**A.S. Solodownikow**

# **Lineare Ungleichungssysteme**

Übersetzung: Dr. H. Weinert, Dr. H. Hollatz  
1973 Deutscher Verlag der Wissenschaften  
MSB: Nr. 74  
Abschrift und LaTex-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## Aus dem Vorwort zur russischen Ausgabe

Ungleichungen ersten Grades oder, wie man sie auch nennt, lineare Ungleichungen, sind Ungleichungen der Gestalt

$$ax + by + c \geq 0$$

(der Einfachheit halber haben wir eine Ungleichung in den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$  aufgeschrieben).

Die Theorie der linearen Ungleichungssysteme ist zwar kein großes, aber ein recht interessantes Teilgebiet der Mathematik. Dies liegt vornehmlich daran, dass sie geometrische Sachverhalte beschreiben.

Wenn man nämlich Aufgaben, die auf lineare Ungleichungssysteme mit zwei bzw. drei Unbekannten führen, in die Sprache der Geometrie überträgt, erhält man Aufgaben über konvexe polygonale Bereiche in der Ebene bzw. über konvexe polyedrische Körper im Raum. So verwandelt sich beispielsweise die Lehre von den konvexen Polyedern, die seit den ältesten Zeiten ein Teilgebiet der Geometrie gewesen ist, in ein Teilgebiet der Theorie der linearen Ungleichungssysteme.

Man findet in dieser Theorie aber auch Gebiete, die dem Algebraiker sehr nahe stehen. Hierzu können wir z.B. die bemerkenswerte Analogie zwischen den Eigenschaften linearer Ungleichungssysteme und denen linearer Gleichungssysteme rechnen (alles, was damit im Zusammenhang steht, wurde schon seit langem und sehr eingehend untersucht).

Bis in die jüngste Zeit hinein hätte man denken können, dass lineare Ungleichungen stets Objekte bleiben würden, die zur sogenannten reinen Mathematik gehören. Das änderte sich von Grund auf, als - beginnend in den vierziger Jahren dieses Jahrhunderts - ein neues Teilgebiet der sogenannten angewandten Mathematik entstand, nämlich die lineare Optimierung mit ihren wichtigen Anwendungen in Ökonomie und Technik.

Es zeigte sich bald, dass die lineare Optimierung lediglich ein (wenn auch sehr wichtiges) Teilgebiet der Theorie der linearen Ungleichungssysteme ist.

Diese Broschüre möchte den Leser mit verschiedenen Aspekten der Theorie der linearen Ungleichungssysteme bekannt machen:

mit geometrischen Aspekten und, eng damit zusammenhängend, mit Lösungsmethoden, mit einigen rein algebraischen Eigenschaften und mit prinzipiellen Fragen der linearen Optimierung.

Für die Lektüre des Büchleins werden keinerlei Kenntnisse vorausgesetzt, welche Ergebnisse des Mathematikunterrichts der Schule überschreiten. Am Schluss des Büchleins ist verwandte bzw. weiterführende Literatur angegeben.

Wir wollen einige Worte dem historischen Werdegang der Lehre von den linearen Ungleichungssystemen widmen. Obwohl man im Hinblick auf ihren Gegenstand annehmen müsste, dass die Theorie der linearen Ungleichungssysteme zu den grundlegenden und elementarsten Teilen der Mathematik gehört, hat man sich mit ihr bis in die jüngste Vergangenheit recht wenig beschäftigt.

---

Beginnend mit den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts erschienen hier und da Arbeiten, in denen Eigenschaften linearer Ungleichungssysteme beleuchtet wurden. Man kann in diesem Zusammenhang die Namen solcher Mathematiker nennen wie H. Minkowski (einer der größten Mathematiker gegen Ende des vorigen und zu Anfang dieses Jahrhunderts, besonders bekannt durch seine Arbeiten über konvexe Mengen und als Begründer der "Minkowskischen Geometrie"), G.F. Voronoi (einer der Stammväter der "Petersburger zahlentheoretischen Schule"), A. Haar (ein ungarischer Mathematiker, der durch seine Arbeiten über "Integration auf Gruppen" bekannt geworden ist) und H. Weyl (einer der hervorragendsten Mathematiker in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts).

Einige der von diesen Mathematikern erhaltenen Resultate fanden ihren Niederschlag im vorliegenden Büchlein (ohne dass immer die Namen der Autoren genannt werden).

Die gegenwärtige intensive Entwicklung der Theorie der linearen Ungleichungssysteme begann erst in den vierziger bis fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts, als das stürmische Wachstum der angewandten Disziplinen (lineare, konvexe und andere Gebiete der "mathematischen Optimierung", die sogenannte "Spieltheorie" usw.) ein vertieftes und systematisches Studium der linearen Ungleichungen nötig machten.

Heute würde eine vollständige Liste der Arbeiten und Bücher über lineare Ungleichungen wahrscheinlich hunderte verschiedener Titel und Autoren zählen.

## Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Einiges aus der analytischen Geometrie</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Operationen mit Punkten . . . . .   | 5         |
| 1.2 Was bedeuten Gleichungen und Ungleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten geometrisch? . . . . . | 9         |
| <b>2 Die geometrische Deutung linearer Ungleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten</b>                     | <b>14</b> |
| <b>3 Die konvexe Hülle eines Punktsystems</b>   | <b>18</b> |
| <b>4 Konvexe polyedrische Kegel</b>   | <b>21</b> |
| <b>5 Der Lösungsbereich für ein Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten</b>                                       | <b>27</b> |
| 5.1 Notwendige Lemmata . . . . .  | 27        |
| 5.2 Der Fall eines normalen Ungleichungssystems (1) . . . . .   | 29        |
| 5.3 Das homogene normale Ungleichungssystem (2) . . . . .   | 33        |
| 5.4 Das Ungleichungssystem (1) sei nicht normal . . . . .   | 35        |
| <b>6 Der Lösungsbereich für ein System mit drei Unbekannten</b>   | <b>39</b> |
| 6.1 Das Ungleichungssystem (1) sei normal . . . . .   | 39        |
| 6.2 Das homogene Ungleichungssystem (2) sei normal . . . . .  | 41        |
| 6.3 Das Ungleichungssystem (1) sei nicht normal . . . . .   | 42        |
| <b>7 Lineare Ungleichungssysteme mit mehreren Unbekannten</b>   | <b>47</b> |
| <b>8 Unlösbare Systeme</b>  | <b>52</b> |
| <b>9 Duale polyedrische Kegel</b>   | <b>59</b> |
| <b>10 Der Dualitätssatz der linearen Optimierung</b>  | <b>65</b> |

# 1 Einiges aus der analytischen Geometrie

## 1.1 Operationen mit Punkten

Wir führen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Die Tatsache, dass ein Punkt  $M$  in diesem System die Koordinaten  $x$  und  $y$  hat, werden wir wie folgt schreiben:

$$M = (x, y) \quad \text{oder auch einfach } M(x, y)$$

Die Existenz eines Koordinatensystems erlaubt es uns, für die Punkte der Ebene einige Operationen einzuführen, und zwar die Addition von Punkten und die Multiplikation eines Punktes mit einer Zahl.

Die Addition von Punkten wird auf folgende Weise definiert: Ist  $M_1 = (x_1, y_1)$  und  $M_2 = (x_2, y_2)$ , so sei

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Hiermit wird die Addition von Punkten auf die Addition ihrer einzelnen Koordinaten zurückgeführt.

Die geometrische Deutung dieser Operation ist sehr einfach (Abb. 1):

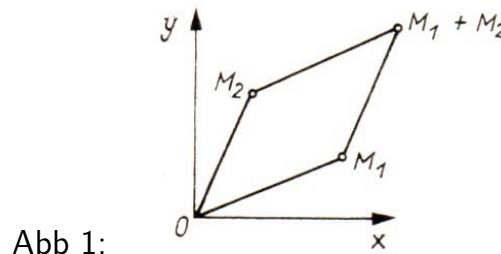


Abb 1:

Der Punkt  $M_1 + M_2$  ist die vierte Ecke des Parallelogramms, das aus den Strecken  $OM_1$  und  $OM_2$  als nichtparallele Seiten gebildet wird ( $O$  ist der Koordinatenursprung). Die übrigen Ecken des Parallelogramms sind  $M_1$ ,  $O$  und  $M_2$ .

Dasselbe kann man auch anders sagen: Den Punkt  $M_1 + M_2$  erhält man aus dem Punkt  $M_2$  durch eine Parallelverschiebung von  $M_2$  in Richtung der Strecke  $OM_1$  um soviel, wie die Länge dieser Strecke beträgt.

Die Multiplikation des Punktes  $M(x, y)$  mit einer beliebigen Zahl  $k$  wird nach der folgenden Regel durchgeführt:

$$kM = (kx, ky)$$

Die geometrische Deutung dieser Operation ist noch einfacher als bei der Addition:

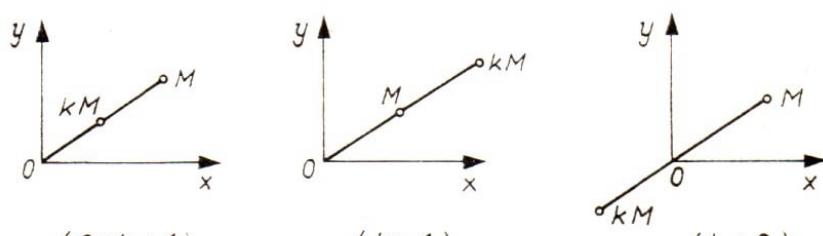


Abb 2:

$$(0 < k < 1)$$

$$(k > 1)$$

$$(k < 0)$$

Für  $k > 0$  liegt der Punkt  $M' = kM$  auf dem Strahl  $OM$ , wobei  $|OM'| = k \cdot |OM|$  ist, bei  $k < 0$  liegt der Punkt  $M'$  auf der Verlängerung des Strahles  $OM$  über den Punkt  $O$  hinaus, wobei  $|OM'| = k \cdot |OM|$  ist (Abb. 2); dabei haben wir mit  $|OM|$  bzw.  $|OM'|$  die Länge der Strecke  $OM$  bzw.  $OM'$  bezeichnet.

Den Beweis für diese geometrische Deutung der beiden Operationen überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.<sup>1</sup>

Die von uns eingeführten Operationen sind sehr bequem, um geometrische Tatsachen in die Sprache der Algebra zu übersetzen. Wir wollen einige Beispiele für eine derartige Übersetzung angeben.

1. Die Strecke  $M_1M_2$  besteht aus allen Punkten der Gestalt

$$s_1M_1 + s_2M_2$$

wobei  $s_1, s_2$  zwei beliebige nichtnegative Zahlen mit der Summe 1 sind.

Hier wird die rein geometrische Tatsache, dass ein Punkt zu einer Strecke  $M_1M_2$  gehört, in Gestalt der algebraischen Beziehung  $M = s_1M_1 + s_2M_2$  mit den oben angegebenen Einschränkungen für  $s_1$  und  $s_2$  beschrieben.

Zum Beweis betrachten wir einen beliebigen Punkt  $M$  auf der Strecke  $M_1M_2$ . Wir ziehen durch  $M$  Geraden, die zu  $OM_2$  und  $OM_1$  parallel sind, und erhalten den Punkt  $N_1$  auf der Strecke  $OM_1$  und den Punkt  $N_2$  auf der Strecke  $OM_2$  (Abb. 3). Wir setzen

$$s_1 = \frac{|M_2M|}{|M_2M_1|} \quad , \quad s_2 = \frac{|M_1M|}{|M_1M_2|}$$

die Zahlen  $s_1$  und  $s_2$  sind nichtnegativ und haben die Summe 1.

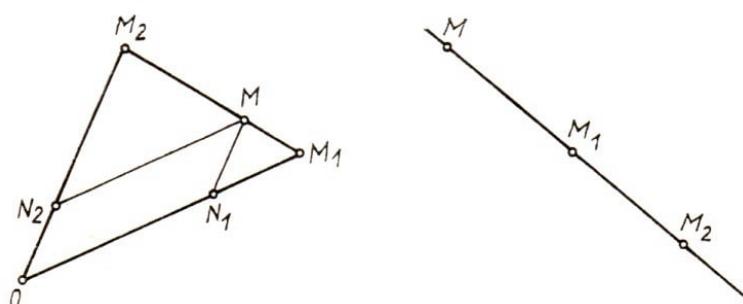


Abb. 3 und 4

Aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke erhalten wir

$$\frac{|ON_1|}{|OM_1|} = \frac{|M_2M|}{|M_2M_1|} = s_1 \quad , \quad \frac{|ON_2|}{|OM_2|} = \frac{|M_1M|}{|M_1M_2|} = s_2$$

<sup>1</sup>Wenn er nicht schon die Anfangsgründe der Vektorrechnung kennt. Vom Standpunkt der Vektorrechnung aus bedeuten unsere Operationen bekanntlich folgendes: Der Punkt  $M_1 + M_2$  ist die Spitze des Vektors  $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ , und der Punkt  $kM$  ist die Spitze des Vektors  $k \cdot \overrightarrow{OM}$  (unter der Bedingung, dass dieser Vektor im Punkt  $O$  beginnt).

woraus  $N_1 = s_1 M_1$  und  $N_2 = s_2 M_2$  folgt. Nun gilt  $M = n_1 + N_2$  also  $M = s_1 M_1 + s_2 M_2$ . Schließlich bemerken wir, dass dann, wenn der Punkt  $M$  die Strecke  $M_1 M_2$  in der Richtung von  $M_1$  nach  $M_2$  durchläuft, die Zahl  $s_2$  alle Werte von 0 bis 1 annimmt. Die Behauptung 1 ist damit bewiesen.

2. Jeder Punkt  $M$  der Geraden  $M_1 M_2$  kann in der Gestalt

$$tM_1 + (1 - t)M_2$$

dargestellt werden, wobei  $t$  eine gewisse Zahl ist.

Falls der Punkt  $M$  auf der Strecke  $M_1 M_2$  liegt, folgt unsere Behauptung aus der oben bewiesenen. Nun liege  $M$  außerhalb der Strecke  $M_1 M_2$ . Dann liegt entweder der Punkt  $M$ , auf der Strecke  $MM_2$  (wie in Abb. 4), oder  $M_2$  liegt auf der Strecke  $MM_1$ .

Nehmen wir etwa an, dass der erste Fall zutrifft, dann gilt nach dem Bewiesenen

$$M = sM + (1 - s)M_1 \quad (0 < s < 1)$$

woraus

$$M = \frac{1}{s}M_1 - \frac{1-s}{s}M_2 = tM_1 + (1-t)M_2$$

mit  $t = \frac{1}{s}$  folgt. Den Fall, dass  $M_2$  auf der Strecke  $MM_1$  liegt, überlassen wir dem Leser zum Beweis.

3. Wächst der Parameter  $s$  von 0 bis  $\infty$ , so durchläuft der Punkt  $sB$  den Strahl  $OB^2$  und der Punkt  $A + sB$  den von  $A$  ausgehenden Strahl mit der Richtung  $OB$ . Fällt  $s$  von 0 bis  $-\infty$ , so durchlaufen die Punkte  $sB$  und  $A + sB$  Strahlen, die die oben angegebenen ergänzen.

Als Beweis genügt ein Blick auf Abb. 5 und 6.

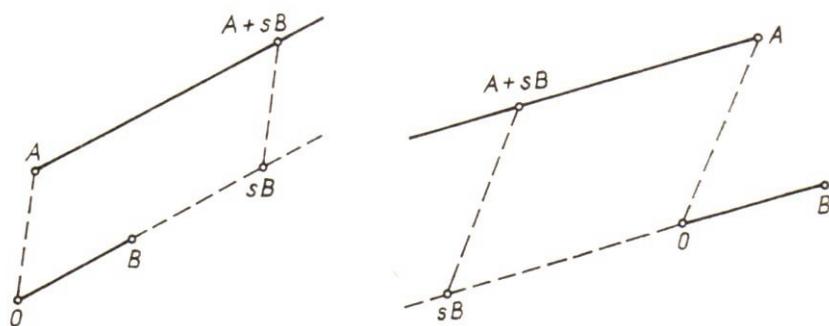


Abb. 5 und 6

Aus der Aussage 3 ergibt sich, dass bei einer Änderung von  $s$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  der Punkt  $A + sB$  die Gerade durch  $A$ , parallel zu  $OB$ , durchläuft.

Die Operationen "Addition" und "Multiplikation mit einer Zahl" kann man natürlich auch zwischen Punkten des Raumes erklären. In diesem Fall gilt nach Definition

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad , \quad kM = (kx, ky, kz)$$

<sup>2</sup>Es wird vorausgesetzt, dass der Punkt  $B$  vom Koordinatenursprung 0 verschieden ist.

Alle oben bewiesenen Aussagen sind offenbar auch im Raum richtig.

Zum Abschluss dieses Paragraphen treffen wir eine Übereinkunft, die es uns im folgenden ermöglichen wird, vieles klarer und kürzer zu formulieren. Sind nämlich  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Punktmenzen (in der Ebene oder im Raum), so wollen wir in Zukunft unter ihrer "Summe"  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$  die Menge aller Punkte  $K + L$  verstehen, wo  $K$  ein beliebiger Punkt von  $\mathcal{K}$  und  $L$  ein beliebiger Punkt von  $\mathcal{L}$  ist.

In der Mathematik wird seit langem eine spezielle Schreibweise dafür verwendet, dass ein Punkt einer gegebenen Menge angehört. Wenn wir also ausdrücken wollen, dass der Punkt  $M$  in der Menge  $\mathfrak{M}$  liegt, werden wir  $M \in \mathfrak{M}$  schreiben (das Zeichen  $\in$  steht dabei für "Element von"). Somit ist  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$  die Menge aller Punkte  $K + L$  mit  $K \in \mathcal{K}$  und  $L \in \mathcal{L}$ .

Wenn wir davon ausgehen, was die Addition von Punkten geometrisch bedeutet, so können wir eine einfache Regel für die Addition der Punktmenzen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  aufstellen. Sie lautet:

Für jeden Punkt  $K \in \mathcal{K}$  bilde man die Menge, die aus  $\mathcal{L}$  hervorgeht, wenn man  $\mathcal{L}$  längs der Strecke  $OK$  verschiebt. Danach vereinige man alle auf diese Weise gewonnenen Mengen zu einer einzigen. Diese Menge ist dann  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ .

Wir wollen einige Beispiele betrachten.

1. Die Menge  $\mathcal{K}$  bestehe aus genau einem Punkt  $K$ , während  $\mathcal{L}$  eine beliebige Punktmenge sei. Die Menge  $K + \mathcal{L}$  erhält man nun, wenn man die Menge  $\mathcal{L}$  parallel zur Strecke  $OK$  verschiebt (Abb. 7).

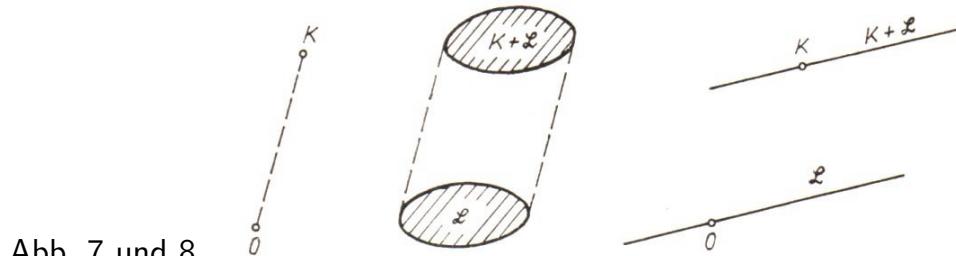


Abb. 7 und 8

Ist insbesondere  $\mathcal{L}$  eine Gerade, so ist  $K + \mathcal{L}$  eine zu  $\mathcal{L}$  parallele Gerade. Geht dabei die Gerade  $\mathcal{L}$  durch den Koordinatenursprung, so ist  $K + \mathcal{L}$  eine zu  $\mathcal{L}$  parallele Gerade durch den Punkt  $K$  (Abb. 8).

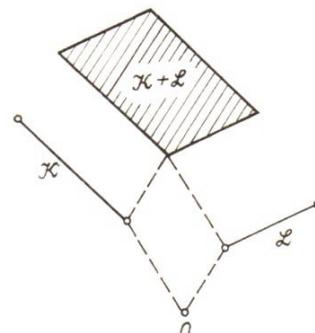


Abb. 9

2. Nun seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei nichtparallele Strecken (in der Ebene oder im Raum); vgl. Abb. 9.

Dann ist  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$  ein Parallelogramm mit Seiten, die gleich und parallel zu  $\mathcal{K}$  bzw.  $\mathcal{L}$  sind. Was erhält man, wenn  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zueinander parallel sind?

3. Es sei  $\mathcal{K}$  eine Ebene und  $\mathcal{L}$  eine nicht zu ihr parallele Strecke. Dann besteht die Menge  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$  aus dem Teil des Raumes, der zwischen zwei zu  $\mathcal{K}$  parallelen Ebenen liegt (Abb. 10).

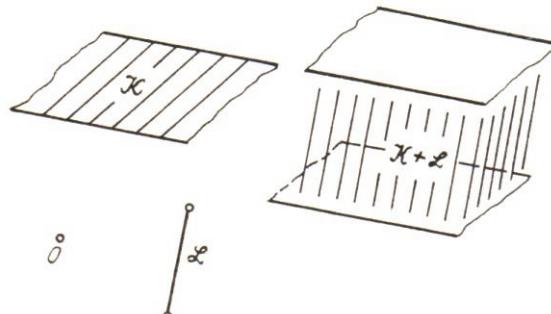


Abb. 10

4. Es seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei in einer Ebenen liegende Kreise mit den Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  und den Mittelpunkten  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

Dann stellt  $\mathcal{K} + \mathcal{L}$  einen Kreis vom Radius  $r_1 + r_2$  mit dem Mittelpunkt in  $P_1 + P_2$  dar. Dieser Kreis liegt in einer zu  $\pi$  parallelen Ebene (Abb. 11).

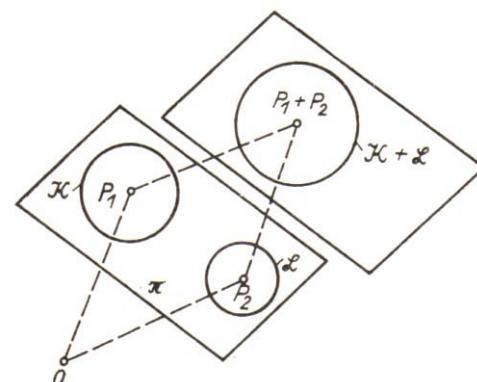


Abb. 11

## 1.2 Was bedeuten Gleichungen und Ungleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten geometrisch?

Wir betrachten eine Gleichung ersten Grades in den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$ :

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

Sehen wir  $x$  und  $y$  als Koordinaten für Punkte in einer Ebene an, so werden wir natürlich fragen, was für eine Menge die Punkte in der Ebene bilden, deren Koordinaten die Gleichung (1) erfüllen, d.h., was für eine Punktmenge durch Gleichung (1) definiert wird.

Obgleich die Antwort dem Leser wahrscheinlich bekannt ist, formulieren wir sie: Die durch die Gleichung (1) bestimmte Punktmenge ist eine Gerade in der Ebene. Ist nämlich  $b \neq 0$ , so können wir (1) auf die Form

$$y = kx + p$$

bringen; diese Gleichung definiert bekanntlich eine Gerade. Ist hingegen  $b = 0$ , so führt das auf die Gestalt  $x = h$ , und die Gleichung charakterisiert eine zur Ordinatenachse parallele Gerade.

Die analoge Frage können wir in Bezug auf die Ungleichung

$$ax + by + c \geq 0 \quad (2)$$

stellen: Welche Punktmenge wird in der Ebene durch die Ungleichung (2) definiert?

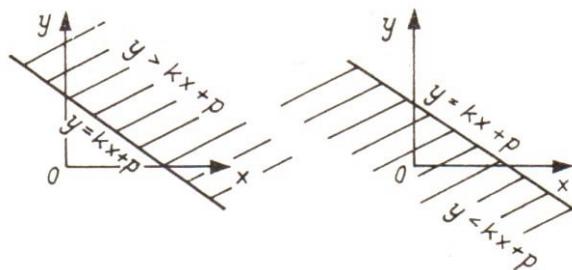


Abb. 12

Auch hier ist die Antwort sehr einfach. Ist  $b \neq 0$ , so führt die gegebene Ungleichung auf eine der Formen

$$y \geq kx + p \quad \text{oder} \quad y \leq kx + p$$

Es ist nicht schwer zu verstehen, dass der ersten dieser Ungleichungen alle Punkte genügen, die "oberhalb" der Geraden  $y = kx + p$  oder auch auf ihr liegen, und der zweiten diejenigen, die "unterhalb" oder auf der Geraden  $y = kx + p$  zu finden sind (Abb. 12).

Ist dagegen  $b = 0$ , so führt unsere Ungleichung auf eine der Ungleichungen

$$x \geq h \quad \text{oder} \quad x \leq h$$

der ersten genügen alle Punkte, die "rechts" von der Geraden  $x = h$  oder darauf liegen, der zweiten alle diejenigen, die "links" von  $x = h$  oder auf dieser Geraden liegen (Abb. 13).

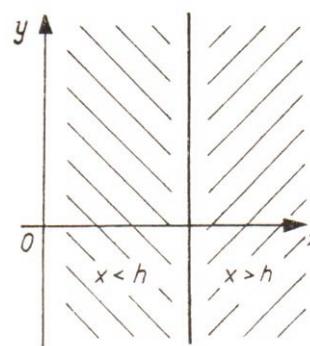


Abb. 13

Somit definiert die Gleichung (1) in der Koordinatenebene eine Gerade, die Ungleichung (2) dagegen eine der beiden Halbebenen, in die diese Gerade die gesamte Ebene zerlegt

(von der Geraden selbst nehmen wir an, dass sie einer beliebigen der beiden durch sie bestimmten Halbebenen angehört).

Wir wollen nun die analogen Fragen klären, die sich auf die Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3)$$

und die Ungleichung

$$ax + by + cz + d \geq 0 \quad (4)$$

beziehen, wobei  $x, y, z$  selbstverständlich als Punktkoordinaten im Raum erklärt werden. Wie man leicht einsieht, erhält man als Resultat den folgenden

Satz. Die Gleichung (3) bestimmt im Raum eine Ebene, hingegen definiert die Ungleichung (4) einen der beiden Halbräume, in den diese Ebene den gesamten Raum zerlegt (von der Ebene selbst wird angenommen, dass sie einem der beiden Halbräume angehört, die durch sie bestimmt werden).

Beweis. Mindestens eine der drei Zahlen  $a, b, c$  sei von Null verschieden, zum Beispiel sei  $c \neq 0$ . Dann führen wir Gleichung (3) über in

$$z = kx + ly + p \quad (5)$$

Mit  $\mathfrak{L}$  bezeichnen wir die Menge aller Punkte  $M(x, y, z)$ , die der Gleichung (5) genügen. Unser Ziel ist zu zeigen, dass  $\mathfrak{L}$  eine Ebene darstellt.

Wir wollen klären, welche Punkte von  $\mathfrak{L}$  der Koordinatenebene  $yOz$  angehören. Zu diesem Zweck müssen wir in (5)  $x = 0$  setzen. Wir erhalten

$$z = ly + p \quad (6)$$

Also ist der Durchschnitt von  $\mathfrak{L}$  mit der Ebene  $yOz$  die Gerade  $u$ , die in dieser Ebene durch die Gleichung (6) bestimmt wird (Abb. 14).

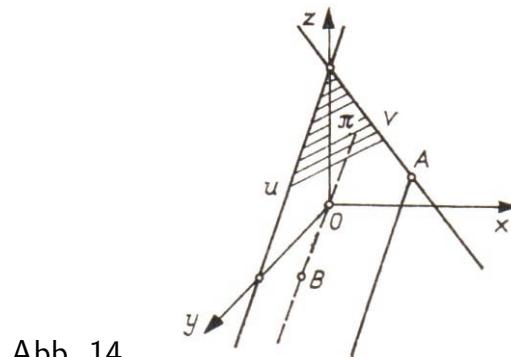


Abb. 14

Analog finden wir, dass der Durchschnitt von  $\mathfrak{L}$  mit der Ebene  $xOz$  eine Gerade  $v$  ist, die in dieser Ebene durch die Gleichung

$$z = kx + p \quad (7)$$

definiert wird. Die beiden Geraden  $u$  und  $v$  gehen durch den Punkt  $P(0,0,p)$ .

Mit  $\pi$  wollen wir die Ebene bezeichnen, die die Geraden  $u$  und  $v$  enthält. Wir werden beweisen, dass  $\pi$  zur Menge  $\mathfrak{L}$  gehört. Dazu reicht es aus, den folgenden Tatbestand zu sichern:

Eine durch einen beliebigen Punkt  $A \in v$  gehende, zu  $u$  parallele Gerade liegt in  $\mathfrak{L}$ .

Zunächst suchen wir einen Punkt  $B$  derart, dass  $OB \parallel u$  ist<sup>3</sup>. In der Ebene  $yOz$  bestimmt die Gleichung  $z = ly + p$  die Gerade  $u$ , d.h., die Gleichung  $z = ly$  definiert eine zu  $u$  parallele und durch den Koordinatenursprung verlaufende Gerade (in Abb. 14 ist diese gestrichelt).

Als  $B$  kann man den Punkt mit den Koordinaten  $y = 1, z = l$  wählen, der auf dieser Geraden liegt. Ein beliebiger Punkt  $A \in v$  hat die Koordinaten  $x, 0, kx + p$ ; der von uns gewählte Punkt  $B$  besitzt die Koordinaten  $0, 1, l$ . Eine zu  $u$  parallele, durch  $A$  verlaufende Gerade besteht aus den Punkten

$$A + sB = (x, 0, kx + p) + s(0, 1, l) = (x, s, kx : +p + sl)$$

wo  $s$  eine beliebige Zahl bedeutet (vgl. Aussage 3 aus Teil A).

Man prüft leicht nach, dass die Koordinaten jedes Punktes  $A + sB$  der Gleichung (5) genügen, d.h., dass  $A + sB \in \mathfrak{L}$  gilt. Damit ist bewiesen, dass die Ebene  $\pi$  vollständig zur Menge  $\mathfrak{L}$  gehört.

Wir müssen nun noch einen letzten Schritt ausführen, nämlich beweisen, dass  $\mathfrak{L}$  und  $\pi$  zusammenfallen, d.h., dass kein Punkt außerhalb von  $\pi$  zur Menge  $\mathfrak{L}$  gehört.

Dazu betrachten wir drei Punkte: den in der Ebene  $\pi$  liegenden Punkt  $M(x_0, y_0, z_0)$ , den "oberhalb" der Ebene  $\pi$  liegenden Punkt  $M'(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , und den Punkt  $M''(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ , der "unterhalb"  $\pi$  liegt (Abb. 15). Wegen  $M \in \pi$  gilt  $z_0 = kx_0 + ly_0 + p$  und folglich

$$z_0 + \varepsilon > kx_0 + ly_0 + p \quad , \quad z_0 - \varepsilon < kx_0 + ly_0 + p$$

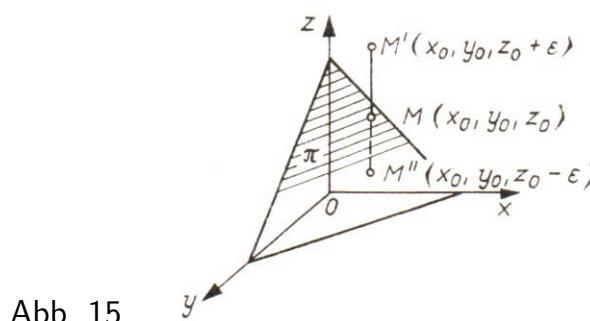


Abb. 15

Hieraus ist ersichtlich, dass die Koordinaten des Punktes  $M'$  die strenge Ungleichung

$$z > kx + ly + p$$

und die Koordinaten des Punktes  $M''$  die strenge Ungleichung

$$z < kx + ly + p$$

<sup>3</sup>Diese Schreibweise bedeutet:  $OB$  parallel zu  $u$ .

erfüllen.

Somit gehören  $M'$  und  $M''$  nicht zu  $\mathfrak{L}$ . Das beweist, dass  $\mathfrak{L}$  mit der Ebenen zusammenfällt. Außerdem folgt aus unseren Untersuchungen, dass die Menge aller Punkte, die der Ungleichung

$$ax + by + cz + d \geq 0$$

genügen, einer der beiden Halbräume ist (der "obere" oder der "untere"), in die die Ebene  $\pi$  den gesamten Raum zerlegt.

## 2 Die geometrische Deutung linearer Ungleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten

Gegeben sei das Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

mit den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$ .

Die erste Ungleichung im System definiert in der Koordinatenebene  $xOy$  eine Halbebene  $P_{i_1}$ , die zweite eine Halbebene  $P_{i_2}$  usw.

Erfüllt ein Zahlenpaar  $x, y$  alle Ungleichungen von (1), so gehört der entsprechende Punkt  $M(x, y)$  allen Halbebenen  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$  zugleich an. Mit anderen Worten, der Punkt  $M$  liegt im Durchschnitt (dem gemeinsamen Teil) besagter Halbebenen.

Man sieht leicht, dass der Durchschnitt endlich vieler Halbebenen ein gewisser polygonaler Bereich  $\mathcal{R}$  ist. In Abb. 16 ist ein möglicher Bereich  $\mathcal{R}$  abgebildet.

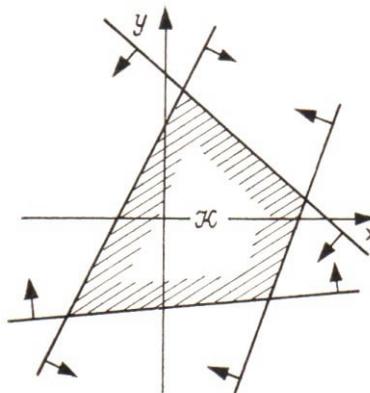


Abb. 16

Langs des Bandes des Bereichs sind Striche gezeichnet, die ins Innere des Bereichs weisen. Sie zeigen gleichzeitig, auf welcher Seite der gegebenen Geraden die entsprechende Halbebene liegt. Dasselbe wird auch durch die Pfeile angedeutet.

Der Bereich  $\mathcal{R}$  heißt Lösungsbereich des Systems (1). Schon hier wollen wir bemerken, dass der Lösungsbereich nicht beschränkt zu sein braucht. Wenn sich Halbebenen schneiden, kann auch ein unbeschränkter Bereich auftreten, wie zum Beispiel der Bereich in Abb. 17.

Wenn wir betonen wollen, dass der Bereich  $\mathcal{R}$  von Geradenstücken (oder ganzen Geraden) begrenzt wird, so sagen wir,  $\mathcal{R}$  sei ein polygonaler Bereich (wir bemerken dazu, dass wir bei beschränktem  $\mathcal{R}$  einfach vom Lösungspolygon für das System (1) sprechen werden).

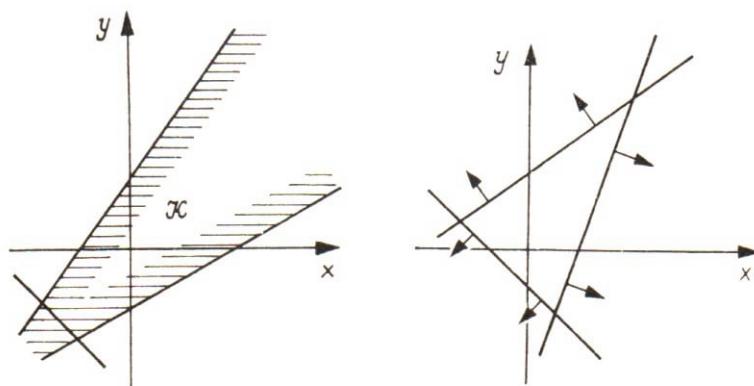


Abb. 17 und 18

Selbstverständlich kann es auch vorkommen, dass kein einziger Punkt existiert, der gleichzeitig allen betrachteten Halbebenen angehört, d.h., dass  $\mathcal{K}$  "leer" ist; das bedeutet, dass das System (1) widersprüchlich ist. Einen solchen Fall zeigt Abb. 18.

Ein Lösungsbereich  $\mathcal{K}$  ist stets konvex. Wir wollen daran erinnern, dass nach der allgemeinen Definition eine Punktmenge (in der Ebene oder im Raum) konvex genannt wird, wenn sie mit je zwei Punkten  $A$  und  $B$  auch die ganze Strecke  $AB$  enthält.

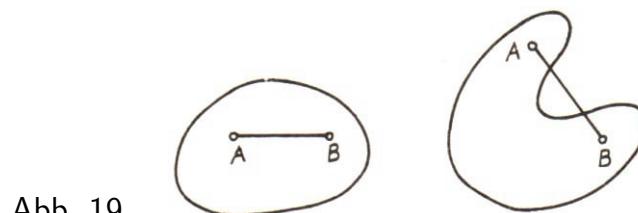


Abb. 19

Abb. 19 zeigt den Unterschied zwischen konvexen und nicht konvexen Mengen. Dass der Lösungsbereich  $\mathcal{K}$  konvex ist, folgt aus der Art und Weise, wie er gebildet wurde. Wir hatten ihn ja dadurch gewonnen, dass wir den Durchschnitt mehrerer Halbebenen bildeten; jede Halbebene ist aber eine konvexe Menge.

Um jegliche Unklarheit über die Konvexität von  $\mathcal{K}$  zu beseitigen, beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma. Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist ebenfalls eine konvexe Menge.

Beweis. Es seien  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zwei konvexe Mengen und  $\mathcal{K}$  ihr Durchschnitt.

Wir betrachten zwei beliebige in  $\mathcal{K}$  gelegene Punkte  $A$  und  $B$  (Abb. 20). Nun gilt

$A \in \mathcal{K}_1$ ,  $B \in \mathcal{K}_1$ , und die Menge  $\mathcal{K}_1$  ist konvex. Also liegt die Strecke  $AB$  in  $\mathcal{K}_1$ .

Ganz analog erhält man aber auch, dass die Strecke  $AB$  in  $\mathcal{K}_2$  liegt.

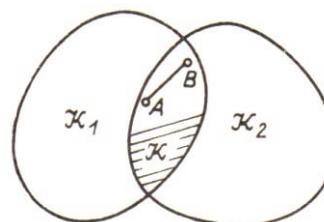


Abb. 20

Somit gehört  $AB$  gleichzeitig zu beiden Mengen  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  also auch zu ihrem Durchschnitt  $\mathcal{K}$ . Damit wurde bewiesen, dass  $\mathcal{K}$  eine konvexe Menge ist.

Analoge Betrachtungen zeigen, dass der Durchschnitt beliebig vieler (nicht nur zweier) konvexer Mengen eine konvexe Menge ist.

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Koordinaten sämtliche Ungleichungen von (1) erfüllen, d.h. der Lösungsbereich für das System (1), ist ein konvexer polygonaler Bereich  $\mathcal{K}$ . Man erhält ihn, wenn man den Durchschnitt aller Halbebenen bildet, die den Ungleichungen im gegebenen System entsprechen.

Wir wenden uns nun dem Fall dreier Unbekannter zu und geben uns das System

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

vor. Wie wir aus § 1 wissen, bestimmt jede der hier aufgeschriebenen Ungleichungen einen gewissen Halbraum. Daher wird man den durch das gegebene System definierten Bereich als Durchschnitt (gemeinsamen Teil) von  $m$  Halbräumen auffassen. Der Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist aber ein konvexer polyedrischer Bereich  $\mathcal{K}$ . Abb. 21 liefert ein Beispiel für einen solchen Bereich mit  $m = 4$ .

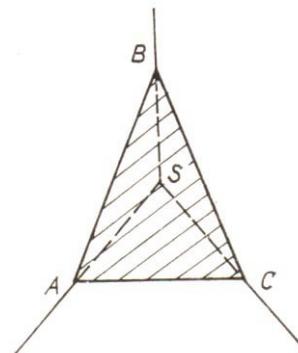


Abb. 21

Bei diesem Beispiel ist der Bereich  $\mathcal{K}$  ein gewöhnlicher Tetraeder (genauer,  $\mathcal{K}$  besteht aus allen Punkten, die im Innern und auf dem Rande des Tetraeders liegen).

Überhaupt ist es nicht schwer zu verstehen, dass man jedes konvexe Polyeder erhalten kann, wenn man endlich viele Halbräume miteinander schneidet. Natürlich ist auch der Fall möglich, dass der Bereich unbeschränkt ist (sich bis ins Unendliche erstreckt).

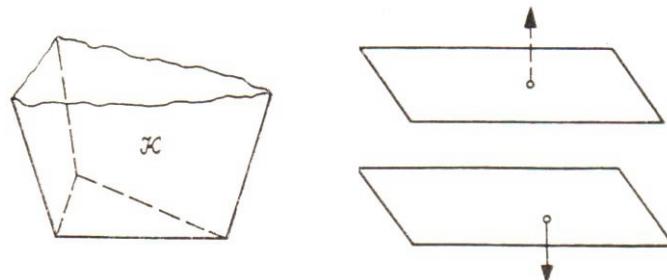


Abb. 22 und 23

Ein Beispiel eines solchen Bereiches zeigt Abb. 22. Schließlich kann es auch vorkommen, dass überhaupt keine Punkte existieren, die sämtlichen betrachteten Ungleichungen genügen (das System (2) ist widersprüchlich). Dann ist der Bereich  $\mathcal{R}$  leer. Diesen Fall zeigt Abb. 23.

Wir wollen noch besonders auf den Fall eingehen, dass sich unter den Ungleichungen (2) zwei finden, die die folgende Gestalt haben:

$$ax + by + cz + d \geq 0 \quad , \quad -ax - by - cz - d \geq 0$$

Beide Ungleichungen können zu der einzigen Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

zusammengefasst werden. Sie definiert im Raum eine Ebene  $\pi$ . Die restlichen Ungleichungen von (2) werden aus der Ebene  $\pi$  einen gewissen konvexen polygonalen Bereich herausschneiden, welcher gerade Lösungsbereich für System (2) ist.

Wir sehen, dass als Spezialfall eines konvexen polyedrischen Bereichs im Raum ein konvexer polygonaler Bereich in einer Ebene auftreten kann.

In Abb. 24 stellt der Bereich  $\mathcal{R}$  ein Dreieck dar, das aus fünf Halbräumen gebildet wird:

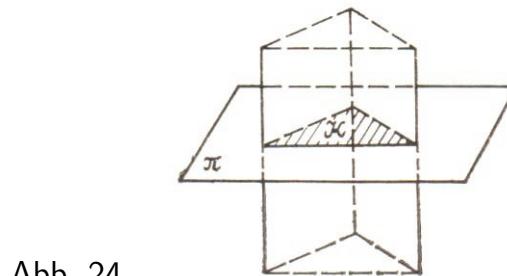


Abb. 24

Zwei davon werden von der "horizontalen" Ebenen begrenzt, die restlichen drei Halbräume bilden als Durchschnitt das "vertikale" dreiseitige Prisma.

In Analogie zum Fall mit zwei Unbekannten nennen wir den Bereich  $\mathcal{R}$  den Lösungsbereich für System (2). Wir wollen nochmals unterstreichen, dass der Bereich  $\mathcal{R}$  als Durchschnitt von Halbräumen notwendigerweise konvex ist.

Somit definiert System (2) im Raum einen konvexen polyedrischen Bereich  $\mathcal{R}$ . Diesen gewinnt man als Durchschnitt aller Halbräume, die den Ungleichungen im gegebenen System entsprechen.

Ist der Bereich  $\mathcal{R}$  beschränkt, so wird er einfach Lösungspolyeder für System (1) genannt.

### 3 Die konvexe Hülle eines Punktsystems

Wir stellen uns eine Ebene in Gestalt eines unendlichen Brettes vor, bei der in die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_p$  Holzpfölcke gesteckt seien. Wir fertigen uns eine Gummischlinge an und dehnen diese so aus, dass sie alle Pflöcke umfasst (die gestrichelte Linie in Abb. 25).

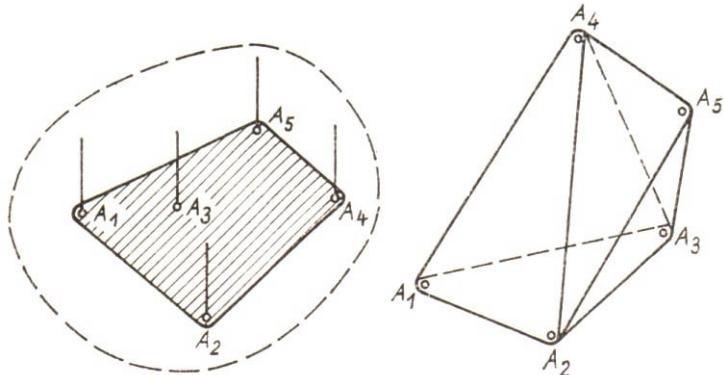


Abb. 25 und 26

Danach lassen wir die Schlinge sich zusammenziehen, soweit das die von uns eingesetzten Pflöcke erlauben. Die Menge aller Punkte, die von der Schlinge umfasst wird, nachdem sie sich zusammengezogen hat, ist in Abb. 25 schraffiert. Sie stellt offensichtlich ein konkaves Polygon dar.

Wir nennen es die konvexe Hülle der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Liegen die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nicht in einer Ebene, sondern im Raum, so kann man sich ein ähnliches Experiment vorstellen, das praktisch allerdings recht schwierig durchzuführen ist. Wir wollen aber unserer Phantasie freien Lauf lassen und annehmen, es sei uns gelungen, die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_p$  in einen Sack aus einer straffen Gummihaut einzuschließen.

Nun möge sich der Sack soweit zusammenziehen, bis einige dieser Punkte zu stören beginnen. Schließlich wird der Moment eintreten, wo ein weiteres Zusammenziehen unmöglich wird (Abb. 26).

Es ist ziemlich klar, dass der Sack in diesem Moment die Gestalt eines konvexen Polyeders annimmt, dessen Ecken irgendwelche der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sind. Der Raumbereich, der von diesem Polyeder umfasst wird, heiße wiederum die konvexe Hülle des Punktsystems  $A_1, A_2, \dots, A_p$ .

Diese Definition für die konvexe Hülle ist zwar sehr anschaulich, aber vom Standpunkt "mathematischer Strenge" nicht völlig einwandfrei. Wir wollen diesen Begriff jetzt streng definieren.

Es sei  $A_1, A_2, \dots, A_p$  ein beliebiges System von Punkten (in der Ebene oder im Raum). Wir betrachten alle möglichen Punkte der Gestalt

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 + \dots + s_p A_p \quad (1)$$

wobei  $s_1, s_2, \dots, s_p$  geeignete nichtnegative Zahlen mit der Summe 1 sind:

$$s_1 s_2 \dots s_p \geq 0 \quad \text{und} \quad s_1 + s_2 + \dots + s_p = 1 \quad (2)$$

Definition. Eine Punktmenge der Gestalt (1) mit den Zusatzbedingungen (2) heißt konvexe Hülle des Punktsystems  $A_1, A_2, \dots, A_p$  und wird mit

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$$

bezeichnet.

Damit wir uns davon überzeugen können, dass sich diese Definition von der vorhergehenden nicht unterscheidet, betrachten wir zunächst die Fälle  $p = 2$  und  $p = 3$ .

Ist  $p = 2$ , so sind uns zwei Punkte  $A_1$  und  $A_2$  gegeben. Die Menge  $\langle A_1, A_2 \rangle$  ist, wie in § 1, Aussage 1 gezeigt wurde, die Strecke  $A_1 A_2$ .

Ist  $p = 3$ , so sind uns die drei Punkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  gegeben. Wir werden zeigen, dass die Menge  $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$  aus all den Punkten besteht, die im Inneren und auf den Seiten des Dreiecks mit den Ecken  $A_1, A_2, A_3$  liegen.

Allgemein beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma. Die Menge  $\langle A_1, \dots, A_{p-1}, A_p \rangle$  besteht aus allen möglichen Strecken, die den Punkt  $A_p$  mit den Punkten der  $\langle A_1, \dots, A_{p-1} \rangle$  verbinden.

Beweis. Um weiterhin bequemer schreiben zu können, bezeichnen wir die Menge  $\langle A_1, \dots, A_{p-1} \rangle$  mit  $\mathfrak{M}_{p-1}$  und die Menge  $\langle A_1, \dots, A_{p-1}, A_p \rangle$  mit  $\mathfrak{M}_p$ .

Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $A \in \mathfrak{M}_p$ : Er hat die Gestalt

$$A = s_1 A_1 + \dots + s_{p-1} A_{p-1} + s_p A_p$$

mit

$$s_1, \dots, s_p \geq 0 \quad ; \quad s_1 + \dots + s_p = 1$$

Ist  $s_p = 0$ , so gilt  $A \in \mathfrak{M}_{p-1}$ ; also ist die Menge  $\mathfrak{M}_{p-1}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{M}_p$ .

Ist  $s_p = 1$ , so ist  $A = A_p$ ; somit liegt der Punkt  $A_p$  in  $\mathfrak{M}_p$ . Also enthält  $\mathfrak{M}_p$  die Menge  $\mathfrak{M}_{p-1}$  und den Punkt  $A_p$ . Wir werden nun zeigen, dass jede Strecke  $A' A_p$  mit  $A' \in \mathfrak{M}_{p-1}$  ganz zu  $\mathfrak{M}_p$  gehört.

Ist  $A$  ein Punkt auf einer solchen Strecke, dann ist

$$A = t A' + s A_p \quad (t, s \geq 0; t + s = 1)$$

Andererseits haben wir nach Definition des Punktes  $A'$

$$A' = t_1 A_1 + \dots + t_{p-1} A_{p-1}$$

$$t_1, \dots, t_{p-1} \geq 0 \quad ; \quad t_1 + \dots + t_{p-1} = 1$$

und folglich

$$A = t t_1 A_1 + \dots + t t_{p-1} A_{p-1} + s A_p$$

Wenn wir  $t t_1 = s_1, \dots, t t_{p-1} = s_{p-1}, s = s_p$  setzen, erhalten wir (1), (2). Damit ist  $A \in \mathfrak{M}_p$  bewiesen. Also liegt jede der oben angegebenen Strecken vollständig in  $\mathfrak{M}_p$ .

Wir müssen nun noch nachprüfen, dass  $\mathfrak{M}_p$  keine Punkte außer solchen Strecken enthält, d.h., dass jeder Punkt  $A$  aus  $\mathfrak{M}_p$  auf einer der betrachteten Strecken liegt.

Es sei also  $A \in \mathfrak{M}_p$ . Dann gilt (1), (2). Wir können  $s_p \neq 1$  annehmen, denn sonst wäre  $A = A_p$  und nichts weiter zu beweisen. Ist nun aber  $s_p \neq 1$ , so ist  $s_1 + \dots + s_{p-1} = 1 - s_p > 0$ , und daher können wir schreiben:

$$A = (s_1 + \dots + s_{p-1}) \left[ \frac{s_1}{s_1 + \dots + s_{p-1}} A_1 + \dots + \frac{s_{p-1}}{s_1 + \dots + s_{p-1}} A_{p-1} \right] + s_p A_p$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck bestimmt einen Punkt  $A'$ , der zu  $\mathfrak{M}_{p-1}$  gehört, da die Koeffizienten von  $A_1, \dots, A_{p-1}$  in diesem Ausdruck nichtnegativ sind und die Summe 1 haben. Somit ist

$$A = (s_1 + \dots + s_{p-1}) A' + s_p A_p$$

Da die Koeffizienten von  $A'$  und  $A_p$  ebenfalls nichtnegativ sind und die Summe 1 haben, liegt der Punkt  $A$  auf der Strecke  $A'A_p$ . Damit ist der Beweis des Lemmas beendet.

Nun können wir leicht verstehen, dass die zu Beginn dieses Paragraphen gegebene anschauliche Definition der konvexen Hülle und die danach folgende strenge Definition äquivalent sind. Denn welche der beiden Definitionen für die konvexe Hülle wir auch zugrunde legen, in beiden Fällen gehen wir von der konvexen Hülle des Systems  $a_1, \dots, A_{p-1}$  zur konvexen Hülle des Systems  $A_1, \dots, A_{p-1}, A_p$  nach ein und derselben Regel über:

Den Punkt  $A_p$  müssen wir mittels Strecken mit allen Punkten der konvexen Hülle für  $A_1, \dots, A_{p-1}$  verbinden (in der anschaulichen Definition der konvexen Hülle ist diese Regel unmittelbar einsichtig, in der strengen Definition stellt sie den Inhalt des Lemmas dar).

Ziehen wir nun in Betracht, dass wir nach beiden Definitionen für  $p = 2$  ein und dieselbe Menge erhalten, nämlich die Strecke  $A_1 A_2$ , so wird die Äquivalenz beider Definitionen offenbar.

Dabei ist der Terminus "konvexe Hülle" für uns noch nicht vollständig gerechtfertigt, denn wir haben noch nicht gezeigt, dass die Menge  $\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$  stets konvex ist. Dies holen wir sogleich nach.

Es seien  $A$  und  $B$  zwei beliebige Punkte dieser Menge:

$$A = s_1 A_1 + s_2 A_2 + \dots + s_p A_p \quad , \quad B = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_p A_p$$

mit

$$s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p \geq 0 \quad , \quad s_1 + \dots + s_p = t_1 + \dots + t_p = 1 \quad (3)$$

Jeder Punkt  $C$  auf der Strecke  $AB$  hat die Gestalt

$$C = sA + tB$$

mit

$$s, t \geq 0 \quad ; \quad s + t = 1 \quad (4)$$

woraus

$$C = s(s_1A_1 + \dots + s_pA_p) + t(t_1A_1 + \dots + t_pA_p) = (ss_1 + tt_1)A_1 + \dots + (ss_p + tt_p)A_p$$

folgt. Die als Koeffizienten bei  $A_1, \dots, A_p$  stehenden Zahlen sind nichtnegativ und haben die Summe 1 (wie aus (3), (4) folgt). Das bedeutet, dass der Punkt  $C$  zur Menge  $\langle A_1, \dots, A_p \rangle$  gehört, d.h., diese Menge ist konvex.

Im Zusammenhang damit ist leicht zu sehen, dass die Menge  $\langle A_1, \dots, A_p \rangle$  die kleinste unter allen konvexen Mengen ist, die die Ausgangspunkte  $A_1, \dots, A_p$  enthalten, d.h., dass sie in jeder solchen Menge enthalten ist. Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem weiter oben bewiesenen Lemma und aus der Definition der konvexen Hülle.

Der oben angegebene Sachverhalt erklärt die Bezeichnung "konvexe Hülle". Gleichzeitig gibt er noch eine Erklärung dafür, dass man die Menge  $\langle A_1, \dots, A_p \rangle$  mit dem Verfahren gewinnen kann, das am Anfang dieses Paragraphen beschrieben wurde.

Tatsächlich ist die Menge, die von einer Gummischlange (oder einem Sack) umschlossen wird, nachdem sich diese soweit wie möglich um das Punktsystem  $A_1, \dots, A_p$  zusammengezogen hat, gerade die kleinste konvexe Menge, die die vorgegebenen Punkte enthält.

## 4 Konvexe polyedrische Kegel

Wir beginnen mit einer Definition.

Unter einem konvexen polyedrischen Kegel versteht man den Durchschnitt endlich vieler Halbräume, deren begrenzende Ebenen durch mindestens einen gemeinsamen Punkt gehen; ein solcher Punkt heißt Spitze des Kegels.

Zuerst werden wir zeigen, in welcher Beziehung der Begriff des konvexen polyedrischen Kegels zu linearen Ungleichungssystemen steht. Wir beschränken uns auf den Spezialfall, dass eine Spitze des Kegels im Koordinatenursprung liegt. Das bedeutet, dass alle begrenzenden Ebenen den Koordinatenursprung enthalten. Nun hat aber die Gleichung einer Ebene, die durch den Koordinatenursprung geht, die Gestalt

$$ax + by + cz = 0$$

(das freie Glied der Gleichung muss gleich Null sein, denn anderenfalls wäre  $(0, 0, 0)$  keine Lösung). Also ist ein konvexer polyedrischer Kegel mit einer Spitze im Koordinatenursprung Lösungsbereich eines homogenen Ungleichungssystems:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz \geq 0 \end{array} \right\}$$

Selbstverständlich gilt auch die Umkehrung: Der Lösungsbereich eines homogenen Ungleichungssystems stellt stets einen konvexen polyedrischen Kegel mit einer Spitze im

Koordinatenursprung dar.

Als Beispiel eines konvexen polyedrischen Kegels kann ein konvexer Bereich im Raum dienen, der nur eine Ecke im Punkt  $S$  hat, etwa eine unendliche konvexe Pyramide, die keine Grundfläche besitzt und sich von der Spitze aus unbeschränkt fortsetzen lässt. Abb. 27 zeigt eine solche vierseitige Pyramide.

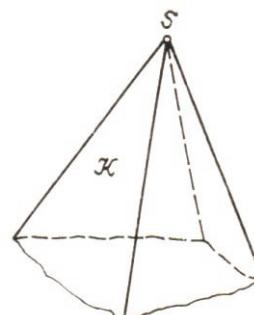


Abb. 27

Es sind aber auch weniger interessante Fälle möglich:

1. Der Halbraum (Abb. 28a). Bei einem solchen "Kegel" kann jeder Punkt  $S \in \pi$  die Rolle der Spitze spielen, dabei ist  $\pi$  die begrenzende Ebene des gegebenen Halbraumes.
2. Der Durchschnitt zweier Halbräume, deren berandende Ebenen sich in einer Geraden  $l$  schneiden (Abb. 28b). Die Rolle der Spitze kann jeder Punkt  $S \in l$  spielen.
3. Die Ebene. Jede Ebene  $\pi$  im Raum kann offenbar als Durchschnitt zweier Halbräume angesehen werden, die auf den verschiedenen Seiten von  $\pi$  liegen (Abb. 28c). Die Rolle der Spitze kann in diesem Fall jeder Punkt  $S \in \pi$  spielen.
4. Die Halbebene (Abb. 28d). Als Spitze  $S$  kann jeder Punkt der berandenden Geraden dienen.

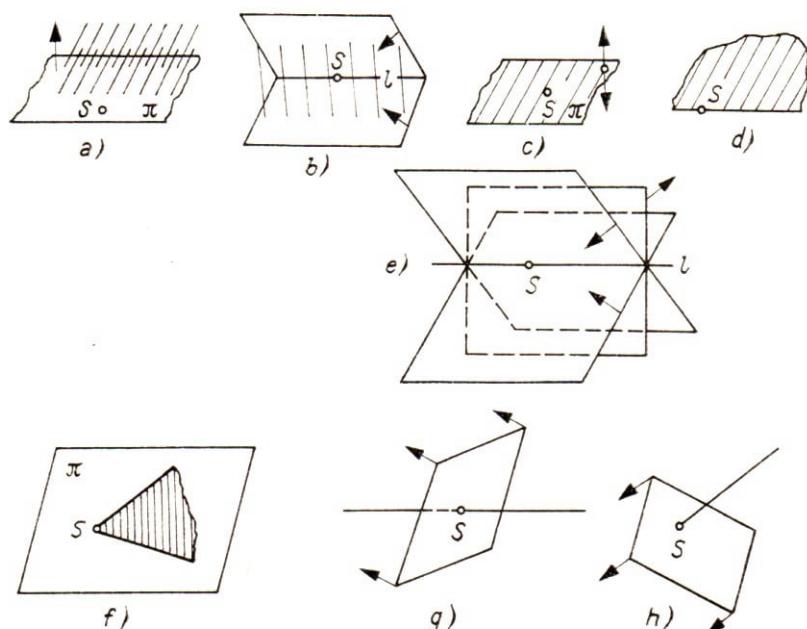


Abb. 28

5. Die Gerade. Man kann jede Gerade  $l$  im Raum als Durchschnitt dreier Halbräume erhalten, deren berandende Ebenen durch  $l$  gehen (Abb. 28e). Als Spitze  $S$  kann jeder

Punkt der Geraden  $l$  dienen.

6. Ein Winkel (kleiner als  $180^\circ$ ) in einer beliebigen Ebenen (Abb. 28f). Den Winkel kann man erhalten, wenn man die Ebene  $\pi$  mit zwei Halbräumen schneidet (und zwar wie?).

7. Ein Strahl (Abb. 28g). Einen Strahl kann man als Durchschnitt einer Geraden mit einem Halbraum ansehen. Die Spitze  $S$  ist der Anfang des Strahles.

8. Ein Punkt. Diesen "Kegel" kann man erhalten, wenn man den Durchschnitt eines Strahles mit einem entsprechenden Halbraum nimmt (Abb. 28h).

Natürlich entsprechen unsere Beispiele 1 bis 8 (das eine in geringerem, das andere in stärkerem Maße) nicht dem üblichen Gebrauch des Wortes "Kegel", aber wir müssen uns damit abfinden, wenn wir die zu Anfang dieses Paragraphen gegebene allgemeine Definition eines konvexen polyedrischen Kegels beibehalten wollen.

Wir wollen nun kurz zeigen, dass mit den oben aufgezählten Mengen alle polyedrischen konvexen Kegel im Raum erfasst werden.

Es bezeichne  $p$  die Anzahl der Halbräume, deren Durchschnitt der zu betrachtende Kegel  $\mathcal{K}$  ist. Ist  $p = 1$ , so ist die Behauptung richtig, denn dann ist  $\mathcal{K}$  ein Halbraum. Eine einfache Untersuchung, die der Leser selbst durchführen möge, zeigt, dass unsere Behauptung, wenn sie für den Kegel wahr ist, den man durch Schneiden von  $p$  Halbräumen gewinnt, auch für den Kegel stimmt, welcher Durchschnitt von  $p + 1$  Halbräumen ist. Hieraus folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Behauptung für jedes  $p$  gilt.

Konvexe polyedrische Kegel besitzen viele interessante Eigenschaften. Der Rahmen unseres Büchleins gestattet uns nicht, in diese Thematik tiefer einzudringen; alles, was wir darüber bringen wollen, ist teils in diesem Paragraphen, teils im § 9 enthalten.

Wir führen noch eine Definition oder - wenn man will - eine Bezeichnung ein.

Es seien  $B_1, B_2, \dots, B_q$  beliebig, aber endlich viele Punkte (im Raum). Mit  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Gestalt

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 + \dots + t_q B_q$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_q$ .

Welche geometrische Bedeutung hat nun die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$ ? Definitionsgemäß ist sie die Summe der Mengen  $(B_1), (B_2), \dots, (B_q)$ . Daher müssen wir zunächst erklären, was eine Menge  $(B)$  darstellt, d.h. die Menge aller Punkte  $tB$  bei beliebigem nichtnegativem  $t$  und fest gewähltem Punkt  $B$ . Jedoch ist die Antwort auf die letzte Frage offensichtlich:

Ist  $B$  der Koordinatenursprung, so fällt  $(B)$  mit dem Ursprung zusammen. Andernfalls ist  $(B)$  der vom Koordinatenursprung ausgehende und durch den Punkt  $B$  verlaufende Strahl. Nun wollen wir bemerken, dass die Summe aus einer beliebigen Menge und dem Koordinatenursprung wieder dieselbe Menge ergibt.

Daher ist klar, dass wir beim Studium der Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  nichts außer Acht lassen, wenn wir annehmen, alle Punkte  $B_1, B_2, \dots, B_q$  seien vom Koordinatenursprung verschieden. Dann ist aber die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  die Summe der Strahlen  $(B_1), (B_2), \dots, (B_q)$ .

Diese Bemerkung bewirkt, dass das folgende Lemma fast trivial wird.

Lemma. Die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_{q-1}, B_q)$  ist die Vereinigung derjenigen Strecken, die jeden Punkt der Menge  $(B_1, \dots, B_{q-1})$  mit jedem Punkt des Strahls  $(B_q)$  verbinden.

Der strenge Beweis des Lemmas verläuft nach demselben Schema wie der des analogen Lemmas in § 3. Der Leser möge ihn selbständig durchführen.

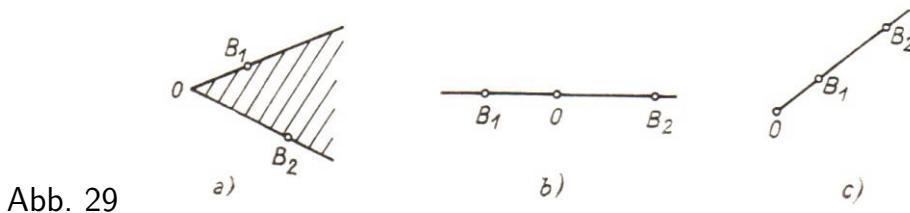


Abb. 29

Ausgehend von diesem Lemma überlegt man sich leicht, dass  $(B_1, B_2)$  ein Winkel, eine Gerade oder ein Strahl ist (Abb. 29a, b, c). Danach ist es einfach, festzustellen, dass  $(B_1, B_2, B_3)$  eine der folgenden Mengen ist:

eine unendliche dreiseitige Pyramide, eine Ebene, eine Halbebene, ein Winkel, eine Gerade oder ein Strahl.

Nunmehr wird klar, dass zwischen den Mengen  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  und konvexen polyedrischen Kegeln ein enger Zusammenhang bestehen muss. Und dieser Zusammenhang besteht tatsächlich. Zur größeren Klarheit wollen wir die entsprechenden Aussagen in zwei Sätzen formulieren.

Satz 1. Die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  stimmt entweder mit dem gesamten Raum überein, oder sie stellt einen konvexen polyedrischen Kegel mit Spitze im Koordinatenursprung dar.

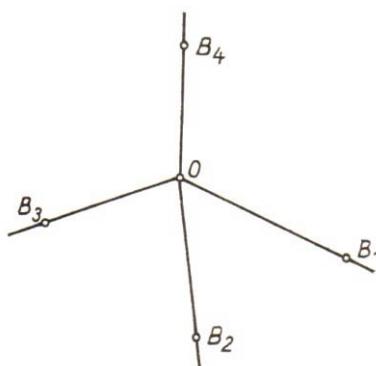


Abb. 30

Dass die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  wirklich mit dem gesamten Raum übereinstimmen kann, zeigt ein Beispiel. Wir betrachten vier Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , die so gelegen sein sollen, dass die Strahlen  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$  paarweise stumpfe Winkel bilden (Abb. 30).

Jede der Mengen  $(B_1, B_2, B_3)$ ,  $(B_1, B_2, B_4)$ ,  $(B_1, B_3, B_4)$ ,  $(B_2, B_3, B_4)$  stellt eine unendliche dreiseitige Pyramide mit der Spitze im Koordinatenursprung dar. Die Menge  $(B_1, B_2, B_3, B_4)$  enthält offenbar jede dieser Pyramiden. Die Vereinigung dieser Pyramiden ist aber der gesamte Raum.

Satz 2. Jeder konvexe polyedrische Kegel mit Spitze im Koordinatenursprung ist eine Menge der Form  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$ .

Beweis von Satz 1. Diesen Beweis führen wir nur in großen Zügen und bedienen uns der Methode der vollständigen Induktion. Die Behauptung des Satzes gilt offenbar für  $q = 1$ . Wir nehmen nun an, der Satz sei für Mengen der Gestalt  $(B_1, \dots, B_q)$  richtig, und zeigen seine Gültigkeit für Mengen  $(B_1, \dots, B_q, B_{q+1})$ , indem wir uns auf die Induktionsvoraussetzung stützen.

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $(B_1, \dots, B_q)$  der gesamte Raum oder ein konvexer polyedrischer Kegel in ihm. Im ersten Fall ist im wesentlichen nichts zu zeigen, denn dann ist auch  $(B_1, \dots, B_q, B_{q+1})$  der gesamte Raum.

Es gelte also der zweite Fall:  $(B_1, \dots, B_q)$  ist ein konvexer polyedrischer Kegel  $\mathcal{K}$ . Nach dem Lemma ist die Menge  $(B_1, \dots, B_q, B_{q+1})$  die Vereinigung aller Strecken, die jeden Punkt der Menge  $\mathcal{K}$  mit jedem Punkt des Strahles  $(B_{q+1})$  verbinden.

Wie aber schon früher gezeigt wurde, ist jeder konvexe polyedrische Kegel  $\mathcal{K}$  entweder eine unendliche konvexe Pyramide oder eine der Mengen 1 bis 8. Betrachtet man für jeden dieser Fälle die oben angeführte Vereinigung der Strecken, so kann man sich leicht davon überzeugen (der Leser führe das selbstständig durch!), dass sie mit dem gesamten Raum zusammenfallen oder wieder konvexe polyedrische Kegel sind.

Also ist der Satz für Mengen der Gestalt  $(B_1)$ , aber auch für solche wie  $(B_1, \dots, B_q, B_{q+1})$  richtig, weil wir die Gültigkeit der Aussage für  $(B_1, \dots, B_q)$  vorausgesetzt hatten. Hieraus folgt, dass der Satz für jedes  $q$  gilt.

Beweis von Satz 2. Es sei  $\mathcal{K}$  ein konvexer polyedrischer Kegel mit Spitze im Koordinatenursprung  $O$ . Wie wir schon sagten, ist  $\mathcal{K}$  eine unendliche konvexe Pyramide oder eine der Mengen 1 bis 8.

Es sei  $\mathcal{K}$  eine Pyramide. Wir wählen auf jeder Kante einen Punkt. Dann erhalten wir ein System von Punkten  $B_1, B_2, \dots, B_q$ . Wir behaupten, dass die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  mit  $\mathcal{K}$  übereinstimmt.

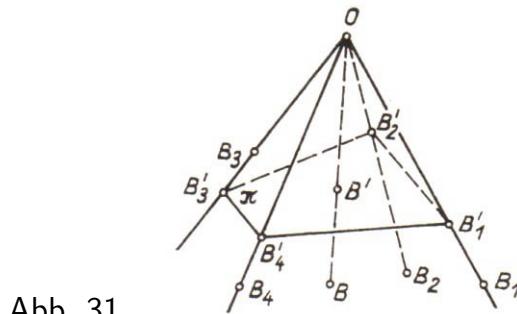


Abb. 31

Zum Beweis betrachten wir eine Ebene  $\pi$ , die alle Kanten von  $\mathcal{K}$  schneidet. Wir erhalten die Punkte  $B'_1, B'_2, \dots, B'_q$  (Abb. 31).

Offenbar ist

$$B'_1 = k_1 B_1, \quad B'_2 = k_2 B_2, \quad \dots, B'_q = k_q B_q \quad (1)$$

mit gewissen nichtnegativen Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_q$ . Es sei nun  $B$  ein beliebiger vom Punkt  $O$  verschiedener Pyramidenpunkt.

Der Strahl  $OB$  schneidet die Ebene  $\pi$  in einem Punkt  $B'$ . Offenbar liegt  $B'$  in der konvexen Hülle des Systems  $B_1, B_2, \dots, B_q$ , und daher ist

$$B' = s_1 B'_1 + s_2 B'_2 + \dots + s_q B'_q$$

mit nichtnegativen Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_q$ , deren Summe gleich 1 ist. Berücksichtigen wir nun (1), dann erhalten wir

$$B' = s_1 k_1 B_1 + s_2 k_2 B_2 + \dots + s_q k_q B_q$$

und wenn wir noch  $B' = kB$  ( $k > 0$ ) beachten, finden wir

$$B = t_1 B_1 + t_2 B_2 + \dots + t_q B_q$$

mit  $t_i = \frac{s_i k_i}{k}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Somit haben wir gezeigt, dass jeder Punkt  $B$  der Pyramide  $\mathfrak{K}$  zur Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  gehört. Die Umkehrung (d.h., dass jeder Punkt der Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  zu  $\mathfrak{K}$  gehört) ist klar. Also stimmen  $\mathfrak{K}$  und  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  überein.

Der Fall, dass  $\mathfrak{K}$  eine der Mengen 1 bis 8 ist, lässt sich ohne Mühe bewältigen. Wir überlassen ihn dem Leser.

## 5 Der Lösungsbereich für ein Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten

Wir wollen unsere Aufgabe jetzt darin sehen, sämtliche Lösungen eines linearen Ungleichungssystems effektiv zu beschreiben.

In diesem Paragraphen wird diese Aufgabe für Systeme mit den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$  gelöst. Ungeachtet dessen, dass die Anzahl der Unbekannten nicht groß (und sogar nur gleich 2) ist, wollen wir uns bemühen, solche Systeme von einem allgemeinen Standpunkt aus zu analysieren, damit wir die dabei erzielten Ergebnisse leicht auf Systeme mit einer größeren Anzahl von Unbekannten übertragen können.

Letzten Endes lässt sich die Lösung eines beliebigen linearen Ungleichungssystems auf das Lösen einer Reihe von linearen Gleichungssystemen zurückführen. Wir werden das Lösen linearer Gleichungssysteme als etwas Einfaches, als eine elementare Aufgabe betrachten und uns nicht verwirren lassen, wenn wir diese Aufgabe mehrere Male ausführen müssen, um die dargestellte Methode zu realisieren.

### 5.1 Notwendige Lemmata

Gegeben sei das Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, gleichzeitig mit ihm das zugehörige homogene Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y \geq 0 \\ a_2x + b_2y \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

sowie das entsprechende homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

zu betrachten.

Den Lösungsbereich für System (1) werden wir in der Koordinatenebene  $xOy$  mit  $\mathcal{K}$ , den von System (2) mit  $\mathcal{K}_0$  und den von System (3) mit  $\mathcal{L}$  bezeichnen. Offenbar gilt  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_0$ , wo das Symbol  $\subset$  "ist Teilmenge von" <sup>4</sup> bedeutet.

<sup>4</sup>Man darf das Symbol  $\subset$  nicht mit dem früher eingeführten  $\in$  verwechseln. Letzteres wird dann angewendet, wenn es um die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Menge geht. Wenn wir den Tatbestand aufschreiben wollen, dass eine Menge Teilmenge einer anderen ist, so werden wir das Symbol  $\subset$  verwenden.

Lemma 1. Es gilt die Teilmengenbeziehung

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}$$

d.h., die Summe einer beliebigen Lösung des gegebenen Ungleichungssystems mit einer beliebigen Lösung des entsprechenden homogenen Ungleichungssystems ist wiederum Lösung des gegebenen Systems.

Beweis. Es sei  $A$  ein beliebiger Punkt aus  $\mathfrak{K}$  und  $B$  ein beliebiger Punkt aus  $\mathfrak{K}_0$ . Dann sind folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} a_1x_A + b_1Y_A + c_1 &\geq 0 & \text{und} & \quad a_1x_B + b_1y_B \geq 0 \\ a_2x_A + b_2Y_A + c_2 &\geq 0 & \text{und} & \quad a_2x_B + b_2y_B \geq 0 \\ &\dots & & \\ a_mx_A + b_mY_A + c_m &\geq 0 & \text{und} & \quad a_mx_B + b_my_B \geq 0 \end{aligned}$$

Wenn wir nun jede links stehende Ungleichung zu der entsprechenden rechten addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1(x_A + x_B) + b_1(y_A + y_B) + c_1 &\geq 0 \\ a_2(x_A + x_B) + b_2(y_A + y_B) + c_2 &\geq 0 \\ &\dots \\ a_m(x_A + x_B) + b_m(y_A + y_B) + c_m &\geq 0 \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen lassen sich aber so deuten, dass das Zahlenpaar  $x_A + x_B, y_A + y_B$ , d.h. die Koordinaten des Punktes  $A + B$  Lösung des Ausgangssystems (1) sind, d.h., es ist  $A + B \in \mathfrak{K}$ , womit das Lemma bewiesen ist.

Lemma 2. a) Gehört ein Strahl mit dem Anfangspunkt  $A$  ganz zur Menge  $\mathfrak{K}$  und ist  $P$  ein beliebiger Punkt dieses Strahls, so ist  $P - A \in \mathfrak{K}_0$ .

b) Gehört eine Gerade ganz zur Menge  $\mathfrak{K}$  und sind  $A$  und  $P$  zwei beliebige Punkte dieser Geraden, so gilt  $P - A \in \mathfrak{L}$ .

Beweis. a) Wir bezeichnen den Punkt  $P - A$  mit  $B$ . Der von uns zu betrachtende Strahl besteht aus Punkten der Gestalt

$$A + sB \tag{4}$$

mit beliebigem nichtnegativem  $s$  (Abb. 32).

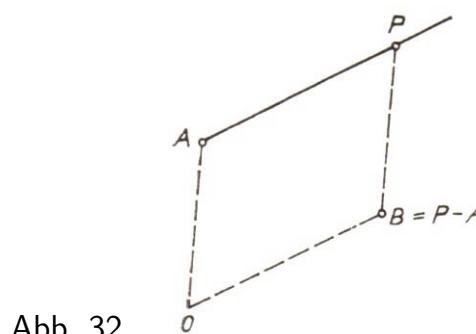


Abb. 32

Jeder dieser Punkte ist nach Voraussetzung Lösung des Systems (1), d.h.

$$\left. \begin{array}{l} a_1(x_A + sx_B) + b_1(y_A + sy_B) + c_1 \geq 0 \\ a_2(x_A + sx_B) + b_2(y_A + sy_B) + c_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_m(x_A + sx_B) + b_m(y_A + sy_B) + c_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wir betrachten zum Beispiel die erste dieser Ungleichungen. Sie kann in der Gestalt

$$(a_1x_A + b_1y_A + c_1) + s(a_1x_B + b_1y_B) \geq 0$$

geschrieben werden. Da diese Ungleichung für jedes  $s \geq 0$  gilt, muss, wie man leicht sieht, der Koeffizient von  $s$  nichtnegativ sein:

$$a_1x_B + b_1y_B \geq 0$$

Analog kann man aus den anderen Ungleichungen von (5)

$$a_2x_B + b_2y_B \geq 0 \quad \dots \quad a_mx_B + b_my_B \geq 0$$

erhalten. Daraus folgt, dass der Punkt  $B$  zur Menge  $\mathfrak{K}_0$  gehört.

Der Beweis von b) wird analog geführt. Die zu untersuchende Gerade besteht aus Punkten der Form (4) mit beliebigem  $s$ . Daher sind die Ungleichungen (5) für beliebige Werte von  $s$  erfüllt. Hieraus ergibt sich, dass der Koeffizient von  $s$  für jede dieser Ungleichungen Null sein muss, d.h.

$$\begin{aligned} a_1x_B + b_1y_B &= 0 \\ a_2x_B + b_2y_B &= 0 \\ \dots \\ a_mx_B + b_my_B &= 0 \end{aligned}$$

Folglich gilt  $B \in \mathfrak{L}$ , und das Lemma ist bewiesen. Man sieht leicht, dass Lemma 1 und 2 auch für Systeme mit mehreren Unbekannten gelten.

## 5.2 Der Fall eines normalen Ungleichungssystems (1)

Wir betrachten wiederum das Ungleichungssystem (1) und das ihm zugeordnete homogene Gleichungssystem (3).

Das letzte hat die triviale Lösung  $x = 0, y = 0$ . Diese Lösung heißt Nulllösung. Es zeigt sich, dass es, wenn man (1) untersuchen will, wichtig ist zu wissen, ob das System (3) auch eine Nicht-Nulllösung besitzt. Im Zusammenhang damit bringen wir die Definition.

Ein lineares Ungleichungssystem heißt normal, wenn das zugeordnete lineare homogene Gleichungssystem nur die Nulllösung besitzt.

Mit anderen Worten, ein Ungleichungssystem ist normal, falls die oben definierte Menge  $\mathfrak{L}$ , d.h. der Lösungsbereich des zugeordneten Gleichungssystems, nur einen einzigen Punkt enthält (den Koordinatenursprung).

Selbstverständlich hat der Begriff des normalen Systems auch für eine beliebige Anzahl von Unbekannten einen Sinn.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass ein lösbares Ungleichungssystem dann und nur dann normal ist, wenn sein Lösungsbereich  $\mathcal{K}$  keine Gerade enthält.

Ist nämlich das System normal, d.h. enthält die Menge  $\mathcal{L}$  nur den Koordinatenursprung, so enthält  $\mathcal{K}$  keine Geraden.

Das folgt auch unmittelbar aus der zweiten Behauptung von Lemma 2. Ist dagegen das System nicht normal, so enthält die Menge  $\mathcal{L}$  mindestens einen vom Koordinatenursprung verschiedenen Punkt  $B$ . Selbstverständlich gehören auch alle Punkte  $kB$  ( $k$  eine beliebige Zahl) zu  $\mathcal{L}$ .<sup>5</sup>

In diesem Fall gehört aber nach Lemma 1 die Menge aller Punkte  $P + kB$  ( $k$  eine beliebige Zahl) bei beliebig gewähltem Punkt  $P \in \mathcal{K}$  (und ein solcher Punkt lässt sich selbstverständlich finden, weil das System lösbar und daher der Bereich  $\mathcal{K}$  nicht leer ist) zu  $\mathcal{K}$ .

Die konstruierte Menge ist, wie wir wissen, eine Gerade. Ist das System also nicht normal, so enthält der Bereich  $\mathcal{K}$  eine Gerade. Damit ist die obige Aussage vollständig bewiesen.

In diesem Paragraphen untersuchen wir den Lösungsbereich eines normalen Systems (1), setzen also voraus, dass dieses System lösbar (der Bereich  $\mathcal{K}$  nicht leer) und normal ist.

Zuerst folgt aus der Tatsache, dass der Bereich  $\mathcal{K}$  keine Geraden enthält, dass er gewiss eine Ecke besitzt. Mit dem Begriff Ecke verbinden wir folgenden (der anschaulichen Bedeutung des Wortes "Ecke" ähnlichen) Sinn.

Unter einer Ecke eines Bereiches  $\mathcal{K}$  verstehen wir einen solchen Punkt des Bereiches, der für keine ganz in  $\mathcal{K}$  gelegene Strecke ein innerer Punkt ist. Mit anderen Worten, eine Ecke ist ein Punkt  $A \in \mathcal{K}$  mit der Eigenschaft, dass jede in  $\mathcal{K}$  liegende und durch den Punkt  $A$  gehende Strecke in diesem Punkt ihren Anfang oder ihr Ende haben muss (Abb. 33a und b, wo der Punkt  $A$  eine der Ecken ist; in Abb. 33b ist der Bereich  $\mathcal{K}$  eine Strecke).

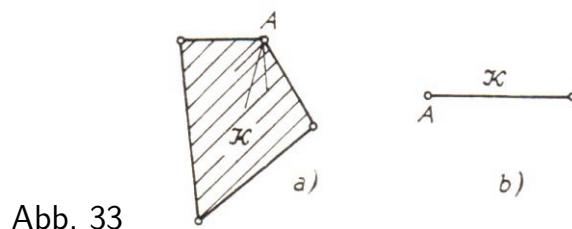


Abb. 33

Wir wollen nun eingehender erklären, weshalb die uns interessierende konvexe Menge  $\mathcal{K}$  Ecken besitzt. Liegt  $\mathcal{K}$  auf einer Geraden, so ist es entweder ein einzelner Punkt oder eine Strecke oder ein Strahl, und die Existenz einer Ecke ist offenbar.

Liegt  $\mathcal{K}$  dagegen nicht auf einer Geraden, so betrachten wir den Rand dieser Menge. Er besteht aus Strecken und Strahlen (vollständige Geraden enthält  $\mathcal{K}$  nicht). Offenbar

<sup>5</sup>Genügen die Zahlen  $x, y, z$ , d.h. die Koordinaten von Punkt  $B$ , einem homogenen Gleichungssystem, so genügen auch die Zahlen  $kx, ky, kz$ , d.h. die Koordinaten des Punktes  $kB$ , diesem System.

sind die Endpunkte jeder solchen Strecke und der Anfang eines Strahles Ecken von  $\mathcal{R}$ .

Die Ecken des Bereiches  $\mathcal{R}$  aufzufinden bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. Zunächst bemerken wir, dass der  $i$ -ten Ungleichung im System in der Koordinatenebene  $xOy$  eine Halbebene entspricht, deren berandende Gerade  $l_i$  durch die Gleichung

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

definiert wird. Offenbar ist ein Punkt  $A$  aus dem Bereich  $\mathcal{R}$  dann und nur dann eine Ecke, wenn er auf zwei verschiedenen berandenden Geraden liegt.

Wir wollen ein aus zwei Gleichungen bestehendes Teilsystem des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ \dots \\ a_m x + b_m y + c_m = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

regulär nennen, falls dieses Teilsystem eine eindeutige Lösung  $(x, y)$  besitzt.

Aus der obigen Charakterisierung der Ecken ergibt sich nun das folgende Verfahren zum Auffinden der Ecken eines Bereiches  $\mathcal{R}$ .

Um sämtliche Ecken aufzufinden, muss man die Lösungen aller regulären Teilsysteme von System (6) suchen und daraus diejenigen auswählen, die das Ausgangssystem (1) erfüllen.

Da die Anzahl der regulären Teilsysteme die Zahl  $\binom{m}{2}$  nicht überschreitet (die Zahl der Kombinationen zu 2 Elementen aus  $m$ ), kann auch die Anzahl der Ecken des Bereiches  $\mathcal{R}$  nicht größer sein. Somit ist die Anzahl der Ecken endlich.

Bemerkung. Aus dem oben Gesagten folgt: Besitzt der Lösungsbereich  $\mathcal{R}$  eines normalen Systems keine Ecke, so ist dieser Bereich leer, und das System hat keine Lösungen (ist widersprüchlich).

Beispiel 1. Man finde sämtliche Ecken des durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + 1 &\geq 0 \\ x - 2y - 2 &\geq 0 \\ 2x - y - 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

definierten Bereiches  $\mathcal{R}$ .

Löst man die Teilsysteme

$$\begin{array}{lll} x + y + 1 = 0 & x + y + 1 = 0 & x - 2y - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 & 2x - y - 4 = 0 & 2x - y - 4 = 0 \end{array}$$

(sie erweisen sich sämtlich als regulär), so findet man die drei Punkte

$$(0, -1), \quad (1, -2), \quad (2, 0)$$

von denen nur der zweite und der dritte alle gegebenen Ungleichungen erfüllen. Das bedeutet: Ecken des Bereiches  $\mathcal{K}$  sind die Punkte  $A_1(1, -2)$  und  $A_2(2, 0)$ .

Wir kehren zum System (1) zurück. Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sämtliche Ecken des Bereiches  $\mathcal{K}$ . Die Menge  $\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$  sei die konvexe Hülle des Punktsystems  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . Sie liegt ebenfalls in  $\mathcal{K}$  (denn  $\mathcal{K}$  ist ein konvexer Bereich). Dann gehört nach Lemma 1 aber auch die Menge

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + \mathcal{K}_0$$

zu  $\mathcal{K}$ . Wir werden beweisen, dass diese Summe in Wirklichkeit mit  $\mathcal{K}$  übereinstimmt, d.h., dass der folgende Satz gilt.

Satz. Ist ein Ungleichungssystem normal, so gilt

$$\mathcal{K} = \langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + \mathcal{K}_0$$

wobei  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sämtliche Ecken des Bereiches  $\mathcal{K}$  sind.

Beweis. Es sei  $P$  ein beliebiger von den Ecken des Bereiches verschiedener Punkt des Bereiches  $\mathcal{K}$ . Die Gerade  $A_1P$  schneidet den konvexen Bereich  $\mathcal{K}$  entweder in einer Strecke  $A_1A$  (Abb. 34) oder in einem Strahl mit dem Anfangspunkt in  $A_1$  (Abb. 35). Im zweiten Fall ist  $P - A_1 \in \mathcal{K}_0$  (Lemma 2) und folglich  $P \in A_1 + \mathcal{K}_0$ .

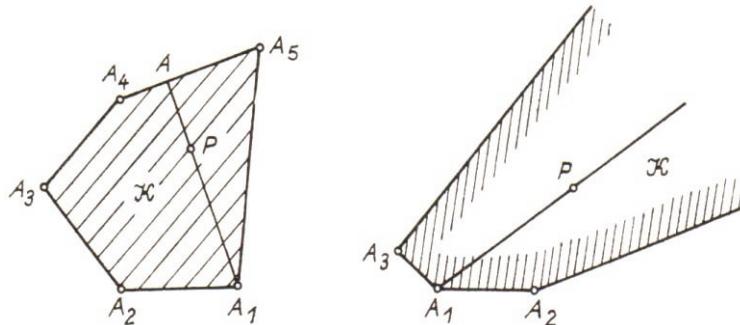


Abb. 34 und 35

Im ersten Fall dagegen überlegen wir wie folgt: Liegt der Punkt  $A$  auf einer beschränkten Kante  $A_iA_j$  des Bereiches  $\mathcal{K}$  (wie in Abb. 34), so gehört  $P$  zur konvexen Hülle der Punkte  $A_1, A_i, A_j$ .

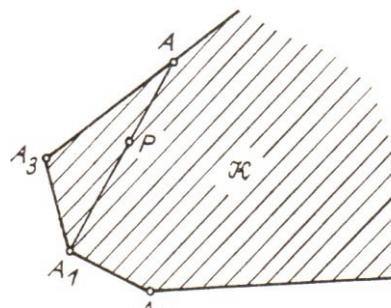


Abb. 36

Liegt jedoch der Punkt  $A$  auf einer unbeschränkten Kante mit dem Anfang in der Ecke  $A_i$  (Abb. 36), so gilt nach Lemma 1 die Beziehung  $A \in A_i + \mathcal{K}_0$ ; also  $P \in \langle A_1, A_i \rangle + \mathcal{K}_0$ . Auf diese Weise zeigt sich, dass der Punkt  $P$  in allen Fällen zur Menge

$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + \mathcal{K}_0$  gehört. Der Satz ist damit bewiesen.

Da uns das Verfahren zum Auffinden der Ecken schon bekannt ist, brauchen wir zur völligen Beschreibung des Bereiches  $\mathcal{K}$  nur noch zu wissen, wie man den Bereich  $\mathcal{K}_0$  findet. Dieser ist aber der Lösungsbereich des homogenen normalen Systems (2). Wir gehen jetzt dazu über, ihn zu beschreiben.

### 5.3 Das homogene normale Ungleichungssystem (2)

Jede Ungleichung aus (2) definiert eine Halbebene, deren berandende Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Der Durchschnitt aller dieser Halbebenen ist genau gleich  $\mathcal{K}_0$ .

In unserem Fall finden sich unter den berandenden Geraden mindestens zwei verschiedene (das System (2) ist normal). Folglich fällt  $\mathcal{K}_0$  entweder mit dem Koordinatenursprung zusammen ( $x = 0, y = 0$ ) oder ist ein Strahl mit der Ecke im Koordinatenursprung oder ein Winkel kleiner als  $180^\circ$  mit dem Scheitel im Koordinatenursprung.

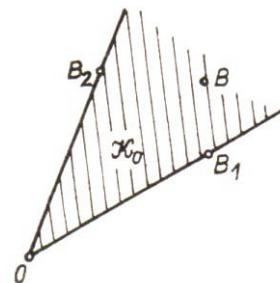


Abb. 37

Kennt man zwei Punkte  $B_1$  und  $B_2$ , die auf verschiedenen Schenkeln dieses Winkels liegen (Abb. 37), so kann man sämtliche Punkte des Winkels in der Gestalt

$$B = t_1 B_1 + t_2 B_2 \quad (8)$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1$  und  $t_2$  beschreiben. Die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  sind leicht zu finden, wenn man beachtet, dass jeder von ihnen a) zu  $\mathcal{K}_0$  gehört, d.h. dem System (2) genügt, und b) auf der Begrenzung von  $\mathcal{K}_0$  liegt, d.h. einer der Gleichungen (3) genügt. Ist  $\mathcal{K}_0$  ein Strahl, so haben wir anstelle von (8) die Gleichung

$$B = t B_1 \quad (9)$$

wobei  $B_1$  ein beliebiger Punkt dieses Strahles (verschieden vom Ursprung) und  $t$  eine beliebige nichtnegative Zahl ist.

Beispiel 2. Man bestimme den Lösungsbereich  $\mathcal{K}_0$  des Systems

$$\begin{aligned} x + y &\geq 0 \\ x - 2y &\geq 0 \\ 2x - y &\geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

sowie den Lösungsbereich  $\mathcal{K}$  des Systems in Beispiel 1.

Lösung. Das System (10) ist normal: Die einzige Lösung des entsprechenden homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

ist  $(0, 0)$ .

Wir wählen einen von  $(0, 0)$  verschiedenen Punkt, der die erste Gleichung aus (11) erfüllt, zum Beispiel den Punkt  $C(-1, 1)$ . Durch eine einfache Probe überzeugen wir uns, dass der Punkt  $C$  nicht sämtlichen Ungleichungen (10) genügt. Folglich gehört weder er selbst noch ein (vom Ursprung  $O$  verschiedener) Punkt des Strahles  $OC$  zu  $\mathfrak{K}_0$ .

Betrachten wir den Punkt  $-C$  (d.h. den Punkt  $(1, -1)$ ), so finden wir, dass er zu  $\mathfrak{K}_0$  gehört. Also ist  $B_1 = (1, -1)$ . Der zweiten Gleichung genügt der Punkt  $(2, 1)$ .

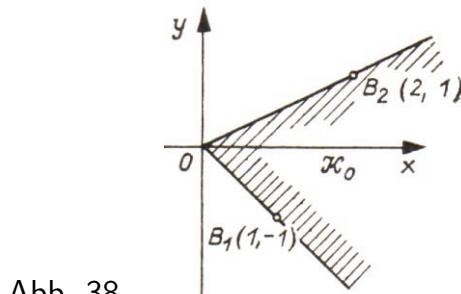


Abb. 38

Er ist auch Lösung des Systems (10), so dass  $B_2 = (2, 1)$  ist. Der Bereich  $\mathfrak{K}$  (Abb. 38) besteht aus den Punkten

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 = t_1(1, -1) + t_2(2, 1) = (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2)$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1$  und  $t_2$ .

Wenn wir uns dem Ungleichungssystem im Beispiel 1 zuwenden, bemerken wir, dass das ihm zugeordnete homogene Ungleichungssystem zugleich das System (10) ist. Nach dem oben bewiesenen Satz gilt aber

$$\mathfrak{K} = \langle A_1, A_2 \rangle + \mathfrak{K}_0$$

mit  $A_1(1, -2)$  und  $A_2(2, 0)$  als Ecken von  $\mathfrak{K}$ . Somit besteht  $\mathfrak{K}$  aus den Punkten (Abb. 39)

$$s(1, -2) + (1 - s)(2, 0) + (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2) = (2 - s + t_1 + 2t_2, -2s - t_1 + t_2)$$

wobei  $s$  eine beliebige Zahl aus dem Intervall  $[0, 1]$  ist und  $t_1, t_2$  beliebige nichtnegative Zahlen sind.

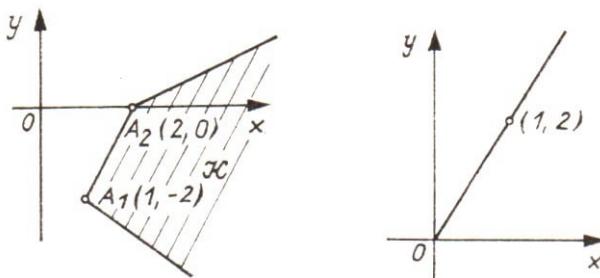


Abb. 39 und 40

Beispiel 3. Man finde den Lösungsbereich von

$$\begin{aligned} 2x - y &\geq 0 \\ -4x + 2y &\geq 0 \\ x + y &\geq 0 \end{aligned}$$

Wenn wir wie beim Beispiel 2 verfahren, finden wir nur einen Strahl (Abb. 40):

$$B = t(1, 2) = (t, 2t) \quad (t \geq 0)$$

Beispiel 4. Man bestimme den Lösungsbereich von

$$\begin{aligned} 2x - y &\geq 0 \\ x + y &\geq 0 \\ -3x + y &\geq 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall hat keine der Gleichungen

$$2x - y = 0; \quad x + y = 0; \quad -3x + y = 0$$

eine Lösung (außer  $(0, 0)$ ), die alle gegebenen Ungleichungen erfüllt. Der Bereich  $K_0$  besteht nur aus dem einzigen Punkt  $(0, 0)$ , dem Koordinatenursprung.

## 5.4 Das Ungleichungssystem (1) sei nicht normal

Das bedeutet, dass der Lösungsbereich  $\mathcal{L}$  für das homogene Gleichungssystem (3) nicht nur den Koordinatenursprung enthält. Folglich definieren sämtliche Gleichungen (3) in der Ebene eine und dieselbe Gerade, und diese Gerade ist  $\mathcal{L}$ .

Gemäß Lemma 1 enthält der Bereich  $K$  zusammen mit jedem seiner Punkte  $P$  die Gerade  $P + \mathcal{L}$  (die durch den Punkt  $P$  gehende, zu  $\mathcal{L}$  parallele Gerade).

Wir betrachten eine zu  $\mathcal{L}$  nicht parallele Gerade  $\mathcal{T}$ . Sofern wir wissen, welche Punkte der Geraden  $\mathcal{T}$  zum Bereich  $K$  gehören (die Menge dieser Punkte bezeichnen wir mit  $K_{\mathcal{T}}$ ), so können wir auch den Bereich  $K$  selbst finden, denn dann ist  $K = K_{\mathcal{T}} + \mathcal{L}$  (Abb. 41).

Die Gleichung der Geraden  $\mathcal{L}$  ist  $a_1x + b_1y = 0$ . In dieser Gleichung ist- mindestens einer der Koeffizienten  $a_1$  oder  $b_1$  von Null verschieden, etwa  $b_1 \neq 0$ .

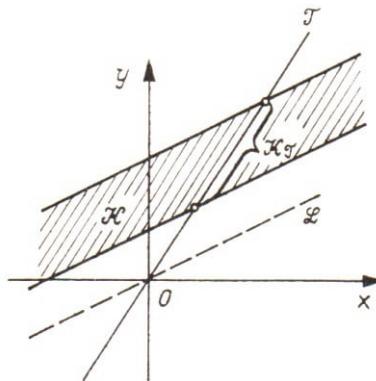


Abb. 41

Dann kann man als zu  $\mathfrak{L}$  nicht parallele Gerade  $\mathfrak{T}$  die  $y$ -Achse wählen (ihre Gleichung ist  $x = 0$ ). In diesem Fall ist die Menge  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{T}}$ , die wir jetzt mit  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{y}}$  bezeichnen wollen, der Teil der  $y$ -Achse, der in  $\mathfrak{K}$  fällt.

Um diese Menge zu finden, muss man im System (1)  $x = 0$  setzen. Dann erhält man das Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} b_1 y + c_1 \geq 0 \\ b_2 y + c_2 \geq 0 \\ \dots \\ b_m y + c_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

mit einer Unbekannten  $y$ , dessen Lösung keinerlei Schwierigkeit bereitet.<sup>6</sup> Wir weisen darauf hin, dass die Menge  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{y}}$  entweder die leere Menge (dann ist auch  $\mathfrak{K}$  leer) oder ein Punkt oder eine Strecke oder ein Strahl sein kann (aber nicht die ganze  $y$ -Achse, denn sonst ist  $\mathfrak{K}$  die ganze Ebene, was unmöglich ist).

Wenn wir diese Menge gefunden haben, dann kennen wir auch den Bereich  $\mathfrak{K}$ , denn es ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{L} \quad (13)$$

(falls  $\mathfrak{L}$  nicht parallel zur  $y$ -Achse ist).

Beispiel 5. Man bestimme den Lösungsbereich für

$$\begin{aligned} x + y - 1 &\geq 0 \\ -x - y + 2 &\geq 0 \\ 2x + 2y + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass das gegebene System nicht normal und  $\mathfrak{L}$  die (nicht zur  $y$ -Achse parallele) Gerade

$$x + y = 0$$

ist. Setzt man  $x = 0$ , so erhält man das System

$$\begin{aligned} y - 1 &\geq 0 \\ -y + 2 &\geq 0 \\ 2y + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Wir bemerken, dass das (als Ungleichungssystem mit einer Unbekannten angesehene) System (12) normal ist. Sonst hätte das ihm zugeordnete homogene System eine von Null verschiedene Lösung, aber dann hätte auch das System (3) eine Lösung, die von  $(0, 0)$  verschieden ist.

aus dem zu ersehen ist, dass  $\mathcal{K}_y$  (der Durchschnitt von  $\mathcal{K}$  mit der y-Achse) die Strecke mit den Enden  $C_1(0, 1)$  und  $C_2(0, 2)$  ist. Das bedeutet,  $\mathcal{K}$  ist die Menge der Punkte der Gestalt (Abb. 42)

$$(0, y) + (x, -x) = (x, y - x)$$

mit völlig beliebigem  $x$  und beliebigem  $y$  im Intervall von 1 bis 2.

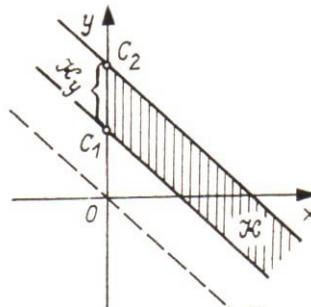


Abb. 42

Zum Schluss wollen wir kurz auf einen Satz eingehen, der sich aus diesen Resultaten ergibt. In dem von uns stets betrachteten zweidimensionalen Fall (es spielt sich alles in einer Ebene ab) macht dieser Satz keinen besonderen Eindruck, und man sollte ihn eher als Ausgangspunkt für eine Verallgemeinerung auf den "n-dimensionalen" Fall ansehen. Das wird in § 7 untersucht.

Satz. Jeder (nichtleere) konvexe polygonale Bereich  $\mathcal{K}$  in der Ebene kann als Summe

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q) \quad (14)$$

dargestellt werden.

Das erste Glied dieser Summe ist die konvexe Hülle eines Punktsystems  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , das zweite die Menge aller Punkte der Form  $t_1B_1 + t_2B_2 + \dots + t_qB_q$  mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_q$ .

Der Beweis des Satzes kann mit wenigen Worten geführt werden.

Wir betrachten ein Ungleichungssystem, das  $\mathcal{K}$  liefert. Ist dieses System normal, so gilt die Gleichung (7). Nehmen wir an, dass in dieser Gleichung  $\mathcal{K}_0$  eine der Mengen  $(B_1, B_2)$ ,  $(B_1)$  oder  $(O)$  (der Koordinatenursprung) ist, so finden wir, dass unsere Behauptung für ein normales System gilt.

Ist das System nicht normal, so gilt Gleichung (13), aus der ebenfalls die Darstellbarkeit von  $\mathcal{K}$  in der gewünschten Form folgt. (Warum ?)

Stimmen alle Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_p$  mit dem Koordinatenursprung  $O$  überein, so stimmt auch die Menge  $\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$  mit  $O$  überein. Dann bleibt von der Summe (14) nur das zweite Glied.

Wenn andererseits die Punkte  $B_1, B_2, \dots, B_q$  mit  $O$  übereinstimmen, so stimmt die Menge  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  ebenfalls mit  $O$  überein, und von der Summe (14) bleibt nur noch das erste Glied.

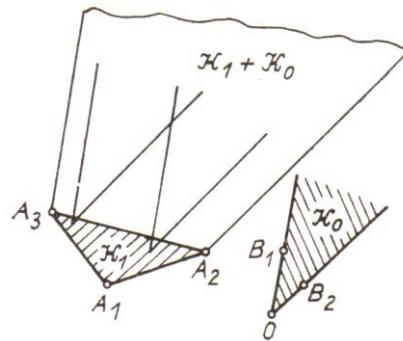


Abb. 43

Der umgekehrte Satz gilt ebenfalls, wenn auch mit einem Vorbehalt:

Satz. Jede Menge der Gestalt

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q)$$

in der Ebene ist die ganze Ebene oder ein konvexer polygonaler Bereich in ihr.

Der Beweis ist ziemlich einfach. Das zweite Glied, d.h. der Bereich  $K_0 = (B_1, B_2, \dots, B_q)$ , ist die gesamte Ebene oder eine Halbebene oder ein Winkel (kleiner als  $180^\circ$ ) oder ein Strahl oder ein Punkt (der Koordinatenursprung). Dagegen stellt das erste Glied

$$K_1 = \langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$$

ein konkaves Polygon dar. Die Menge  $K_1 + K_0$  kann man erhalten, wenn man  $K_0$  einer Parallelverschiebung längs der Strecke  $OK_1$  unterwirft (wobei  $K_1$  ein beliebiger Punkt aus  $K_1$  ist) und die Vereinigung der erhaltenen Mengen nimmt (Abb. 43).

Man sieht leicht, dass man dabei die ganze Ebene (das ist der Fall, wenn  $K_0$  die ganze Ebene ist) oder einen konvexen polygonalen Bereich in ihr gewinnt.

## 6 Der Lösungsbereich für ein System mit drei Unbekannten

Nach der im vorangegangenen Paragraphen gegebenen gründlichen Analyse können wir nun, wenn wir Systeme mit drei Unbekannten untersuchen, die nötige Theorie auf ein Minimum beschränken.

Zusammen mit dem Ausgangssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

betrachten wir wiederum, wie in § 5, die beiden Systeme

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Den Lösungsbereich für das System (1) bezeichnen wir wieder mit  $\mathcal{R}$ , den für (2) mit  $\mathcal{R}_0$  und den für (3) mit  $\mathcal{L}$ . Verwenden wir die früher eingeführte Terminologie, so können wir sagen, dass  $\mathcal{R}$  ein konvexer polyedrischer Bereich im Raum und  $\mathcal{R}_0$  ein konvexer polyedrischer Kegel ist. Die Lemmata 1 und 2 aus § 5 gelten, wie schon bemerkt, auch hier.

### 6.1 Das Ungleichungssystem (1) sei normal

Dann enthält der Bereich  $\mathcal{R}$  keine Geraden; folglich muss er mindestens eine Ecke besitzen. Läge nämlich  $\mathcal{R}$  in einer Ebene (das ist tatsächlich möglich, wie in § 2 bemerkt wurde), so wäre  $\mathcal{R}$  ein konvexer polygonaler Bereich in der Ebene, der keine Geraden enthält, also, wie in § 5, Teil B bewiesen wurde, sicher Ecken besitzen muss.

Liegt dagegen der Bereich  $\mathcal{R}$  nicht in einer Ebene, so betrachten wir seinen Rand. Er besteht aus ebenen Flächen, die sämtlich Ecken besitzen müssen, weil sie polygonale Bereiche darstellen, die keine Geraden enthalten.

Es ist aber leicht einzusehen, dass eine Ecke einer beliebigen Seitenfläche zugleich auch Ecke des Bereiches  $\mathcal{R}$  ist.

In jeder Ecke  $A$  eines Bereiches  $\mathcal{R}$  stoßen mindestens drei berandende Ebenen zusammen, für die der Punkt  $A$  der einzige gemeinsame Punkt ist. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würden sämtliche berandende Ebenen, die durch  $A$  gehen, entweder zusammenfallen, oder sie hätten eine gemeinsame Gerade.

Dann würde aber eine hinreichend kleine, durch  $A$  gehende und in der gemeinsamen berandenden Ebene oder auf der gemeinsamen berandenden Geraden liegende Strecke

zu  $\mathfrak{K}$  gehören, was der Definition einer Ecke widerspricht.

Diese Bemerkungen veranlassen uns, das in § 5, Teil B beschriebene Eckensuchverfahren etwas zu modifizieren. Wir verstehen jetzt unter einem regulären Teilsystem nicht ein Teilsystem aus zwei, sondern eines aus drei Gleichungen des Systems

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

falls die Lösung  $(x, y, z)$  dieses Teilsystems eindeutig ist. Dann bleibt das Eckensuchverfahren genau dasselbe wie vorher:

Um sämtliche Ecken des Bereiches  $\mathfrak{K}$  zu finden, muss man die Lösungen aller regulären Teilsysteme des Systems (4) bestimmen und unter ihnen diejenigen aussondern, die das Ausgangssystem (1) erfüllen.

Auch der Satz aus § 5, Teil B bleibt in Kraft. Die zum Beweis notwendigen Änderungen sind offensichtlich. Ferner bleibt die Bemerkung, dass ein normales System keine Lösungen besitzt, wenn der Bereich  $\mathfrak{K}$  keine Ecken hat, ebenfalls richtig.

Beispiel 1. Man bestimme die Ecken des Bereiches  $\mathfrak{K}$ , der durch das Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 1 \geq 0 \\ x + 2y + z - 1 \geq 0 \\ x + y + 2z - 1 \geq 0 \\ x + y + z - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

definiert wird.

In diesem Fall lautet das entsprechende homogene Gleichungssystem:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \quad (5')$$

Löst man es, so ergibt sich, das  $(0, 0, 0)$  die einzige Lösung ist. Das System (5) ist also normal.

Um die Ecken aufzusuchen, müssen wir alle aus drei Gleichungen bestehenden Teilsysteme des Systems (5') betrachten:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Wenn wir die nötigen Rechnungen ausführen, finden wir, dass sämtliche Teilsysteme regulär sind; ihre Lösungen sind die Punkte

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 0, 0)$$

von denen nur der erste dem System (5) nicht genügt. Folglich lauten die Ecken des Bereiches  $\mathfrak{K}$ :

$$A_1(1, 0, 0), \quad A_2(0, 1, 0), \quad A_3(0, 0, 1)$$

## 6.2 Das homogene Ungleichungssystem (2) sei normal

Jede Ungleichung aus (2) definiert einen Halbraum, dessen berandende Ebene durch den Koordinatenursprung geht.

In unserem Falle ist der Durchschnitt der berandenden Ebenen ein einziger Punkt, und zwar der Koordinatenursprung (System (2) ist normal!) Mit anderen Worten, die Menge  $\mathfrak{K}_0$ , der Lösungsbereich des Systems (2), ist ein konvexer polyedrischer Kegel mit einer einzigen Spitze.

Aus der in § 4 gegebenen Aufzählung der konvexen polyedrischen Kegel folgt, dass in unserem Fall  $\mathfrak{K}_0$  entweder eine unendliche konvexe Pyramide oder ein ebener Winkel oder ein Strahl oder schließlich ein Punkt (der Koordinatenursprung) ist. Den letzten Fall lassen wir einstweilen beiseite. In allen übrigen Fällen haben wir

$$\mathfrak{K}_0 = (B_1, B_2, \dots, B_q)$$

wobei  $B_1, B_2, \dots, B_q$  irgendwelche Punkte sind, die jeweils auf einer Kante des Kegels  $\mathfrak{K}_0$  (vgl. § 4, Satz 2) gewählt wurden.

Solche Punkte kann man finden, wenn man von folgenden Erwägungen ausgeht. Jeder von ihnen gehört a) zu  $\mathfrak{K}_0$ , d.h. erfüllt System (2), und b) zur Schnittlinie zweier verschiedener Seiten, d.h. erfüllt zwei nichtproportionale<sup>7</sup> Gleichungen aus System (3).

Wenn der Punkt  $(0, 0, 0)$  der einzige den Bedingungen a) und b) genügende Punkt ist, fällt der Bereich  $\mathfrak{K}_0$  mit dem Koordinatenursprung zusammen.

Beispiel 2. Man bestimme den Lösungsbereich  $\mathfrak{K}_0$  für das System

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z \geq 0 \\ x + 2y + z \geq 0 \\ x + y + 2z \geq 0 \\ x + y + z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

und ferner den Lösungsbereich  $\mathfrak{K}$  für das System in Beispiel 1.

1.5ex] Zuerst bemerken wir, dass das System (6) zu dem Ungleichungssystem (5) aus

<sup>7</sup>Zwei Gleichungen  $ax + by + cz = 0$  und  $a'x + b'y + c'z = 0$  nennen wir nichtproportional, wenn von den Größen  $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$  mindestens zwei verschieden sind. In diesem Fall schneiden sich die entsprechenden Ebenen in einer Geraden (sind die Größen sämtlich einander gleich, so sind die Ebenen parallel).

Beispiel 1 gehört; (6) ist nämlich das dem System (5) entsprechende homogene System. Folglich ist das System (6) normal.

Im gegebenen Fall kann man auf sechs verschiedene Arten ein System aus zwei nichtproportionalen Gleichungen bilden:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z \geq 0 \\ x + y + 2z \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y + z \geq 0 \\ x + y + 2z \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y + z \geq 0 \\ x + y + z \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z \geq 0 \\ x + 2y + z \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + z \geq 0 \\ x + y + z \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + 2z \geq 0 \\ x + y + z \geq 0 \end{array} \right\}$$

Für jedes dieser sechs Systeme wählen wir zwei von Null verschiedene Lösungen:  $(x, y, z)$  und  $(-x, -y, -z)$ . Zum Beispiel kann man für das erste System  $(3, -1, -1)$  und  $(-3, 1, 1)$  nehmen. Nur die erste dieser Lösungen erfüllt die Ungleichungen (6). Hieraus erhalten wir den Punkt  $B_1 = (3, -1, -1)$ .

Verfährt man analog mit den restlichen fünf Systemen, so findet man die Punkte  $B_2 = (-1, 3, -1)$  und  $B_3 = (-1, -1, 3)$ . Somit besteht der Bereich  $\mathfrak{K}_0$  aus Punkten der Gestalt

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 + t_3 B_3 = (3t_1 - t_2 - t_3, -t_1 + 3t_2 - t_3, -t_1 - t_2 + 3t_3)$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, t_3$ .

Wir wenden uns nun dem Ungleichungssystem (5) aus Beispiel 1 zu. Wie schon bemerkt, ist das ihm zugeordnete homogene System gerade das System (6). Folglich hat der Bereich  $\mathfrak{K}$  die Gestalt

$$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle + \mathfrak{K}_0$$

und besteht aus den Punkten

$$\begin{aligned} s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3 + t_1 B_1 + t_2 B_2 + t_3 B_3 \\ = s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0) + s_3(0, 0, 1) + t_1(3, -1, -1) + t_2(-1, 3, -1) + t_3(-1, -1, 3) \\ = (s_1 3t_1 - t_2 - t_3, s_2 - t_1 + 3t_2 - t_3, s_3 - t_1 - t_2 + 3t_3) \end{aligned}$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, t_3$  und nichtnegativen  $s_1, s_2, s_3$  deren Summe 1 ist.

### 6.3 Das Ungleichungssystem (1) sei nicht normal

Das bedeutet, dass der Lösungsbereich  $\mathfrak{L}$  für das homogene Gleichungssystem (3) Punkte enthält, die vom Koordinatenursprung verschieden sind. Da  $\mathfrak{L}$  ein Durchschnitt von Ebenen ist, sind zwei Fälle möglich:

1.  $\mathfrak{L}$  ist eine Gerade. Nach Lemma 1 enthält der Bereich zusammen mit jedem seiner Punkte  $P$  die Gerade  $P + \mathfrak{L}$ . Wir betrachten eine zu  $\mathfrak{L}$  nicht parallele Ebene  $\mathfrak{T}$ . Wenn wir wissen, welche Punkte der Ebene  $\mathfrak{T}$  zum Bereich  $\mathfrak{K}$  gehören (wir bezeichnen die Menge dieser Punkte mit  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{T}}$ ), so können wir auch den Bereich  $\mathfrak{K}$  selbst finden, denn dann ist  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{T}} + \mathfrak{L}$ .

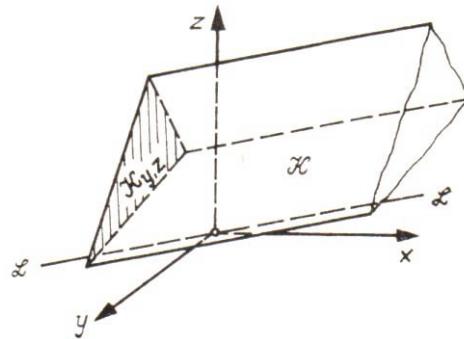


Abb. 44

Nun kann man stets, wie auch die Gerade  $\mathcal{L}$  gelegen ist, als zu ihr nichtparallele Ebene  $\mathfrak{T}$  eine der Koordinatenebenen  $xPy$ ,  $xOz$  oder  $yOz$  wählen.

Nehmen wir zum Beispiel an,  $\mathcal{L}$  sei nicht parallel zur Ebene  $yOz$ . Wir nehmen diese Ebene als  $\mathfrak{T}$ . In diesem Fall ist die Menge  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{T}}$ , die wir nun mit  $\mathfrak{K}_{y,z}$  bezeichnen werden, der Teil der Ebene  $yOz$ , der in den Bereich  $\mathfrak{K}$  fällt (Abb. 44). Um diese Menge zu finden, muss man im System (1)  $x = 0$  setzen. Dann erhalten wir das Ungleichungssystem<sup>8</sup>

$$\left. \begin{array}{l} b_1y + c_1z + d_1 \geq 0 \\ \dots \\ b_my + c_mz + d_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

das mit Methoden gelöst werden kann, die in § 5 entwickelt wurden.

Wenn wir die Menge  $\mathfrak{K}_{y,z}$  bestimmt haben, können wir

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{y,z} + \mathfrak{K} \quad (8)$$

schreiben (falls die Gerade  $\mathcal{L}$  zur Ebene  $yOz$  nicht parallel ist), womit der Bereich  $\mathfrak{K}$  vollständig beschrieben ist.

Bemerkung. Ist die Menge  $\mathfrak{K}_{y,z}$  leer, so ist auch  $\mathfrak{K}$  leer. Das bedeutet, dass das System (1) widersprüchlich ist.

Beispiel 3. Man bestimme den Lösungsbereich  $\mathfrak{K}$  für das System

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + z - 1 \geq 0 \\ -3x - y + 4z - 1 \geq 0 \\ -x - 2y + 3z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Wir betrachten das zugeordnete homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ -3x - y + 4z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Wenn wir es lösen wollen, stellen wir fest, dass die dritte Gleichung eine Folge der ersten beiden ist, so dass sich das System auf die ersten beiden Gleichungen reduziert. Die Menge  $\mathcal{L}$  ihrer Lösungen ist die Gerade, in der sich die Ebenen

$$-2x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad -3x - y + 4z = 0$$

<sup>8</sup>Das System (7) ist, wie man unschwer erkennt, schon normal.

schneiden.

Wir wählen einen Punkt  $B$  auf der Geraden  $\mathfrak{L}$ , der vom Koordinatenursprung verschieden ist. Dazu genügt es, drei Zahlen  $x, y, z$  (die nicht gleichzeitig Null sind) zu suchen, die den ersten beiden Gleichungen des Systems (10) genügen. Wir nehmen zum Beispiel  $1, 1, 1$ .

Somit ist  $\mathfrak{L}$  die Gerade  $OB$  mit  $B = (1, 1, 1)$ .

Es ist leicht zu sehen, dass die Gerade  $\mathfrak{L}$  nicht parallel zur Koordinatenebene  $yOz$  ist. Setzen wir im System (9)  $x = 0$ , so erhalten wir das System

$$\left. \begin{array}{l} y + z - 1 \geq 0 \\ -y + 4z - 1 \geq 0 \\ -2y + 3z \geq 0 \end{array} \right\}$$

mit den beiden Unbekannten  $y$  und  $z$ , das normal ist. Seinen Lösungsbereich  $\mathfrak{K}_{y,z}$  kann man mit der in § 5 dargelegten Methode auffinden. Nachdem wir die notwendigen Rechnungen durchgeführt haben, finden wir, dass  $\mathfrak{K}$  die Menge ist, die nur aus dem Punkt  $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$  (in der Ebene  $yOz$ ) besteht. Folglich besteht der gesuchte Bereich  $\mathfrak{K}$  aus allen Punkten der Gestalt

$$A + tB = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) + t(1, 1, 1) = \left(t, t + \frac{3}{5}, t + \frac{2}{5}\right)$$

wobei  $t$  eine beliebige nichtnegative Zahl ist (der Bereich  $\mathfrak{K}$  ist eine zu  $\mathfrak{L}$  parallele Gerade).

2.  $\mathfrak{L}$  ist eine Ebene. Dann nehmen wir als schneidende Menge  $\mathfrak{T}$  eine nicht zu dieser Ebene parallele Gerade. Insbesondere kann man eine der Koordinatenachsen wählen. Wir nehmen zum Beispiel an, dass die  $z$ -Achse nicht parallel zu  $\mathfrak{L}$  ist, und nehmen sie als  $\mathfrak{J}$ . Um die Menge  $\mathfrak{K}_z$ , den Teil der  $z$ -Achse zu finden, der in  $\mathfrak{K}$  hineinfällt, müssen wir im System (1)  $x = 0, y = 0$  setzen. Dann erhalten wir das Ungleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} c_1z + d_1 \geq 0 \\ \dots \\ c_mz + d_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

das ohne Schwierigkeiten gelöst werden kann.<sup>9</sup> Ist die Menge  $\mathfrak{K}_z$ , gefunden, so können wir (vgl. Abb. 45)

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_z + \mathfrak{L}$$

schreiben (falls die Ebene  $\mathfrak{L}$  nicht parallel zur  $z$ -Achse ist), womit  $\mathfrak{K}$  vollständig beschrieben ist.

Bemerkung. Ist die Menge  $\mathfrak{K}_z$  leer, so ist  $\mathfrak{K}$  leer. In diesem Fall ist System (1) widersprüchlich.

---

<sup>9</sup>System (11) ist normal.

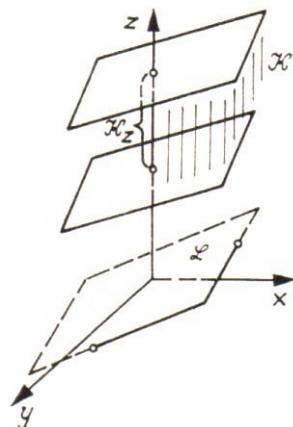


Abb. 45

Beispiel 4. Man bestimme den Lösungsbereich  $\mathfrak{K}$  für das System

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z + 1 \geq 0 \\ -x + y - z + 2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Im vorliegenden Fall hat das zugeordnete homogene Gleichungssystem die Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

Hier ist die zweite Gleichung eine Folge der ersten, deshalb ist der Lösungsbereich des Systems (14) die durch die Gleichung

$$x - y + z = 0$$

definierte Ebene  $\mathfrak{L}$ . Man sieht leicht, dass diese Ebene die z-Achse in einem einzigen Punkt schneidet, also nicht parallel zu ihr ist.

Wir suchen nun die Menge  $\mathfrak{K}_3$ .

Setzen wir im System (13)  $x = 0, y = 0$ , so erhalten wir das System

$$\left. \begin{array}{l} z + 1 \geq 0 \\ -z + 2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

aus dem

$$-1 \leq z \leq 2 \quad (15)$$

folgt. Somit ist  $\mathfrak{K}$  die Menge  $\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{L}$ , die aus den Punkten der Gestalt

$$(0, 0, z) + (x, y, -x + z) = (x, y, z - x + z)$$

besteht, wobei  $x$  und  $y$  beliebig sind und  $z$  die Ungleichung (15) erfüllt.

Wir beenden diesen Paragraphen mit der Formulierung zweier Sätze, die eine Verallgemeinerung der letzten beiden Sätze aus § 5 auf den dreidimensionalen Fall darstellen. Die einzige Änderung, die dafür in der Formulierung bei dem in Erinnerung gerufenen Satz von § 5 durchgeführt werden muss, besteht darin, dass das Wort "Ebene" durch das Wort "Raum" zu ersetzen ist.

Satz. Jeder (nichtleere) konvexe polyedrische Bereich im Raum kann als Summe

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q)$$

dargestellt werden.

Satz. Jede Menge der Gestalt

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q)$$

im Raum ist entweder der ganze Raum oder ein konvexer polyedrischer Bereich darin. Die Beweise der beiden Sätze sind fast wörtliche Wiederholungen der Beweise der entsprechenden Sätze im zweidimensionalen Fall. Wir überlassen sie dem Leser.

## 7 Lineare Ungleichungssysteme mit mehreren Unbekannten

In den vorhergehenden Paragraphen konzentrierten wir unsere Aufmerksamkeit auf Ungleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten. Diese Beschränkung wurde in der Hauptsache durch zwei Umstände diktiert: erstens dadurch, dass die Untersuchung dieser Systeme unkompliziert ist und ganz im Rahmen der "Schulmathematik" liegt, und zweitens (und das ist im vorliegenden Fall wesentlicher) dadurch, dass die Lösung derartiger Systeme einen anschaulichen geometrischen Sinn hat (Punkte in einer Ebene oder im Raum).

In den Anwendungen (zum Beispiel auf lineare Optimierungsprobleme) treten jedoch Ungleichungssysteme auf, bei denen die Anzahl  $n$  der Unbekannten größer als 3 ist. Sie mit Schweigen zu übergeben, hieße die Darstellung der Probleme sehr dürftig zu gestalten. Daher wollen wir, allerdings nur kurz, darstellen, wie die Lage bei beliebigem  $n > 3$  ist.

Zur geometrischen Deutung linearer Ungleichungssysteme mit  $n$  Unbekannten müssen wir uns dem sogenannten  $n$ -dimensionalen Raum zuwenden.

Wir beginnen damit, dass wir die entsprechenden Begriffe definieren, wobei wir uns auf die allernötigsten beschränken.

Unter einem Punkt im  $n$ -dimensionalen Raum versteht man eine geordnete Menge von  $n$  Zahlen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

die man die Koordinaten nennt. Das Motiv für diese Definition ist der für die analytische Geometrie grundlegende Tatbestand, dass ein Punkt in der Ebene durch ein Zahlenpaar und im Raum durch ein Zahlentripel charakterisiert wird. Statt zu sagen, "der Punkt  $M$  habe die Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ", werden wir im folgenden  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  oder einfach  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  schreiben. Der Punkt  $(0, 0, \dots, 0)$  heißt Koordinatenursprung oder einfach Ursprung.

Zuerst wollen wir sagen, was unter einer "Strecke" im  $n$ -dimensionalen Raum zu verstehen ist. Gemäß § 1 kann im gewöhnlichen Raum die Strecke  $M_1M_2$  als Menge aller Punkte der Gestalt

$$s_1M_1 + s_2M_2$$

mit beliebigen nichtnegativen Zahlen  $s_1, s_2$  deren Summe 1 ist, charakterisiert werden. Im  $n$ -dimensionalen Raum verwenden wir diese Charakterisierung als Definition der Strecke. Genauer, sind

$$M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad \text{und} \quad M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

zwei beliebige Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum, dann wird die Menge aller Punkte den Form

$$s'M' + s''M'' = (s'x'_1 + s''x''_1, s'x'_2 + s''x''_2, \dots, s'x'_n + s''x''_n) \quad (1)$$

mit zwei beliebigen nichtnegativen Zahlen  $s', s''$ , deren Summe gleich 1 ist, die Strecke  $M'M''$  genannt. Für  $s' = 1, s'' = 0$  erhalten wir den Punkt  $M'$ , für  $s' = 0, s'' = 1$  den Punkt  $M''$ .

Dies sind die Endpunkte der Strecke  $M'm''$ . Die übrigen Punkte der Strecke (die man für  $s' > 0, s'' > 0$  erhält) heißen innere Punkte der Strecke.

Von den weiteren Begriffen, die sich auf den  $n$ -dimensionalen Raum beziehen, brauchen wir den Begriff der Hyperebene.

Damit wird der Begriff der Ebene im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum verallgemeinert. Die Vorsilbe "Hyper" hat hier einen wohlbestimmten Sinn. Im  $n$ -dimensionalen Raum sind nämlich "Ebenen" verschiedener Typen möglich: eindimensionale "Ebenen" (sie werden Geraden genannt), zweidimensionale "Ebenen" usw., schließlich  $(n - 1)$ -dimensionale "Ebenen", und gerade diese werden "Hyperebenen" genannt.

Definition. Unter einer Hyperebene im  $n$ -dimensionalen Raum versteht man die Gesamtheit der Punkte  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , deren Koordinaten eine Gleichung ersten Grades

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0 \quad (2)$$

erfüllen, wobei mindestens eine der Zahlen (Koeffizienten)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  von Null verschieden ist.

Für  $n = 3$  nimmt Gleichung (2) die Gestalt  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$  an. Das ist nichts anderes als die Gleichung einer Ebene im gewöhnlichen Raum (hier wurden die Koordinaten mit  $x_1, x_2, x_3$  und nicht wie gewöhnlich mit  $x, y, z$  bezeichnet).

Durch eine Hyperebene (2) wird der ganze  $n$ -dimensionale Raum in zwei Teile geteilt: in den Bereich, in dem die Ungleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \geq 0 \quad (3)$$

und in denjenigen, in dem

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \leq 0 \quad (4)$$

erfüllt ist. Diese Bereiche heißen Halbräume. Somit teilt jede Hyperebene den ganzen Raum in zwei Halbräume, deren Durchschnitt sie ist.

Der Begriff des konvexen Körpers lässt sich ebenfalls auf den  $n$ -dimensionalen Fall verallgemeinern. Eine Punktmenge im  $n$ -dimensionalen Raum heißt konvex, wenn sie mit je zweien ihrer Punkte  $M'$  und  $M''$  auch die ganze Strecke  $M'M''$  enthält.

Es lässt sich leicht zeigen, dass jeder Halbraum eine konvexe Menge ist. Die Punkte  $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  und  $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  mögen etwa dem Halbraum (3) angehören. Wir beweisen, dass dann auch jeder Punkt  $M$  der Strecke  $M'M''$  diesem Halbraum angehört.

Die Koordinaten des Punktes  $M$  lassen sich in der Gestalt (1) oder, was dasselbe ist,

in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= sx'_1 + (1-s)x''_1, \\ x_2 &= sx'_2 + (1-s)x''_2, \\ &\dots \\ x_n &= sx'_n + (1-s)x''_n \end{aligned}$$

$(0 \leq s \leq 1)$  darstellen. Setzen wir diese Ausdrücke in die linke Seite von (3) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1(sx'_1 + (1-s)x''_1) + a_2(sx'_2 + (1-s)x''_2) + \dots + a_n(sx'_n + (1-s)x''_n) + b \\ = s(a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n) + (1-s)(a_1x''_1 + a_2x''_2 + \dots + a_nx''_n) \end{aligned}$$

dabei haben wir die Zahl  $b$  durch die Summe  $sb + (1-s)b$  ersetzt, und dieser Ausdruck ist gleich

$$s[a_1x'_1 + \dots + a_nx'_n + b] + (1-s)[a_1x''_1 + \dots + a_nx''_n b]$$

Jede der beiden Summen in den eckigen Klammern ist nichtnegativ, weil die beiden Punkte  $M'$  und  $M''$  im Halbraum (3) liegen. Folglich ist auch der ganze Ausdruck nichtnegativ (denn es ist  $s \geq 0$  und  $(1-s) \geq 0$ ). Somit ist gezeigt, dass der Punkt  $M$  zum Halbraum (3) gehört, d.h., dass dieser Halbraum konvex ist.

Hiernach ist es nicht schwer zu verstehen, welche geometrische Terminologie man bei linearen Ungleichungssystemen mit  $n$  Unbekannten zu verwenden hat. Gegeben sei das System

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a &\geq 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b &\geq 0 \\ &\dots \\ x_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Jede dieser Ungleichungen definiert einen Halbraum, das System also einen Bereich  $\mathcal{R}$  im  $n$ -dimensionalen Raum. (Wenn das System widersprüchlich ist, ist  $\mathcal{R}$  leer.) Dieser Bereich ist der Durchschnitt endlich vieler Halbräume und somit konvex.

In Analogie zum dreidimensionalen Fall nennen wir einen Bereich im  $n$ -dimensionalen Raum, welcher Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist, einen konvexen polyedrischen Bereich und, wenn dieser Durchschnitt eine beschränkte Menge ist, einfach konvexes Polyeder.

Hier ist der Begriff "beschränkte Menge" in dem Sinne zu verstehen, dass die absoluten Beträge der Koordinaten aller Punkte des betrachteten Bereiches eine gewisse Konstante  $c$  nicht überschreiten:

$$|x_1| \leq c, \dots, |x_n| \leq c$$

für alle Punkte des gegebenen Bereiches.

Somit ist die Gesamtheit der Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum, deren Koordinaten dem System (5) genügen, ein konvexer polyedrischer Bereich  $\mathcal{R}$ , nämlich der Durchschnitt

aller Halbräume, die den Ungleichungen des gegebenen Systems entsprechen.

Wir wiederholen, dass wir diesen Bereich ein konvexes Polyeder nennen, wenn er beschränkt ist.

Die Methode der expliziten Beschreibung eines Bereiches  $\mathcal{R}$ , die wir in § 5 für Systeme mit zwei Unbekannten und in § 6 für Systeme mit drei Unbekannten betrachteten, kann mit entsprechenden Änderungen auf den Fall von  $n$  Unbekannten übertragen werden. Allerdings werden wir darauf nicht eingehen, da eine erschöpfende Darstellung sehr viel Platz erfordern würde. Außerdem ist diese Methode bei einer größeren Anzahl von Unbekannten wenig effektiv: Sie bringt einen übermäßig großen Rechenaufwand mit sich.

Es ist bemerkenswert, dass die allgemeinen Sätze über die Konstruktion konvexer polyedrischer Mengen im dreidimensionalen Raum auch für den  $n$ -dimensionalen Raum gültig bleiben, wenn auch die Beweise komplizierter sind. Wir beschränken uns auf die Formulierung dieser Sätze und die dazu nötigen Erklärungen.

**Satz 1.** Die konvexe Hülle jedes endlichen Systems von Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_q$  ist ein konvexes Polyeder.

Um die Bedeutung dieses Satzes hervortreten zu lassen, weisen wir auf folgendes hin: Es geht hier um den Zusammenhang zwischen zwei auf ganz verschiedene Arten definierten Typen von Mengen; die konvexe Hülle des Systems der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_q$  die mit  $\langle A_1, A_2, \dots, A_q \rangle$  bezeichnet wird, ist als Menge aller Punkte der Gestalt

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \dots + s_qA_q$$

mit nichtnegativen Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_q$ , deren Summe 1 ist, definiert, während konvexe Polyeder beschränkte Bereiche sind, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume ergeben.

Im zwei- und im dreidimensionalen Raum ist Satz 1 anschaulich klar (aus der anschaulichen Bedeutung der konvexen Hülle), im mehrdimensionalen Fall ist er keinesfalls offensichtlich und muss bewiesen werden.

**Satz 1'** (Umkehrung zu Satz 1). Jedes konvexe Polyeder ist die konvexe Hülle eines endlichen Punktsystems.

Man kann sogar noch mehr behaupten: Jedes konvexe Polyeder stimmt mit der konvexen Hülle seiner Ecken überein. Die Definition einer Ecke ist genau dieselbe wie im zweidimensionalen Fall (eine Ecke ist ein Punkt des Polyeders, der nicht innerer Punkt einer ganz im Polyeder enthaltenen Strecke ist). Man kann zeigen, dass die Anzahl der Ecken stets endlich ist.

**Satz 2.** Jede Menge der Gestalt  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  stimmt entweder mit dem ganzen Raum überein oder ist ein konvexer polyedrischer Kegel mit einer Spitze im Koordinatenursprung.

Wir erinnern daran, dass das Symbol  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  die Menge aller Punkte bezeichnet, die sich in der Form

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \dots + t_qB_q$$

mit nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_q$  darstellen lassen. Ein konvexer polyedrischer Kegel wird als Durchschnitt endlich vieler Halbräume definiert, deren berandende Hyperebenen einen gemeinsamen Punkt haben (die Spitze des Kegels). Die Gültigkeit von Satz 2 im dreidimensionalen Raum wurde in Satz 1 von § 4 nachgewiesen.

Satz 2'. Jeder konvexe polyedrische Kegel mit einer Spitze im Koordinatenursprung kann in der Form  $(B_1, B_2, \dots, B_q)$  dargestellt werden.

Die Gültigkeit für den dreidimensionalen Fall wurde in Satz 2 von § 4 bewiesen.

Satz 3. Jeder konvexe polyedrische Bereich kann als Summe

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q)$$

dargestellt werden.

Satz 3'. Jede Summe der angegebenen Art ist entweder der ganze Raum oder ein konvexer polyedrischer Bereich.

## 8 Unlösbare Systeme

Bisher interessierten uns vorzugsweise solche Ungleichungssysteme, die mindestens eine Lösung besitzen (die lösbar sind). Die entsprechenden Bereiche (in der Ebene oder im Raum) stellten nichtleere Punktmengen dar.

Was unlösbare Systeme betrifft, so könnte man deren Studium auf den ersten Blick als unnötige Beschäftigung ansehen; es kommt einem zunächst unwahrscheinlich vor, dass solche Systeme hinreichend interessant sind und eine gehaltvolle Theorie liefern könnten. Aber das ist tatsächlich nur "auf den ersten Blick" so.

In Wirklichkeit ist die Sache ganz anders: Die Eigenschaften unlösbarer Systeme sind nicht nur an sich von Interesse, sondern sie liefern auch den Schlüssel zum Verständnis einer ganzen Reihe wichtiger Tatsachen. So wird zum Beispiel der Hauptsatz der linearen Optimierung (der Dualitätssatz, vgl. § 10) letzten Endes aus einigen Eigenschaften unlösbarer Systeme hergeleitet.

Wir betrachten ein beliebiges lineares Ungleichungssystem. Der bequemeren Schreibweise halber werden wir einstweilen annehmen, die Anzahl der Unbekannten sei gleich 3, obgleich sich unsere Ausführungen gleichermaßen auch auf Systeme mit  $n$  Unbekannten übertragen lassen.

Es sei also das System

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

gegeben. Wir multiplizieren beide Seiten der ersten Ungleichung von (1) mit einer nichtnegativen Zahl  $k_1$ , beide Seiten der zweiten mit einer nichtnegativen Zahl  $k_2$  usw., und addieren die so entstehenden Ungleichungen. So kommen wir zu der Ungleichung

$$\begin{aligned} & (k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m)x + (k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_mb_m)y \\ & + (k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_mc_m)z + k_1d_1 + k_2d_2 + \dots + k_md_m = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

die wir Linearkombination der Ungleichungen (1) nennen.

Es kann vorkommen, dass sich eine Linearkombination der Ungleichungen (1) als Ungleichung der Form

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d \geq 0 \quad (3)$$

herausstellt, wobei  $d$  eine negative Zahl ist (nach Division durch  $d$  erhält man die Ungleichung  $-1 \geq 0$ ). Es ist klar, dass kein System von Werten für die Unbekannten eine solche Ungleichung erfüllen kann. Daher ist das System (1) im betrachteten Fall unlösbar (die Ungleichungen sind unverträglich).

Es ist durchaus bemerkenswert, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt:

Ist das System (1) unlösbar, so hat eine geeignete Linearkombination seiner Ungleichungen die Gestalt (3).

Diese Aussage beweisen wir gleich in allgemeiner Form (d.h. für Systeme mit mehreren Unbekannten), vorher aber geben wir folgende

Definition. Die Ungleichung

$$ax + by + cz + d \geq 0$$

soll unlösbar heißen, wenn es kein System von Werten für die Unbekannten gibt, das sie erfüllt.

Offenbar hat jede unlösbare Ungleichung die Gestalt (3) mit  $d < 0$  (warum ?). Die Aussage, die wir beweisen wollen, kann man nun als folgenden Satz formulieren.

Satz über unlösbare Ungleichungssysteme. Ist ein lineares Ungleichungssystem unlösbar, so gibt es eine geeignete Linearkombination dieser Ungleichungen, die eine unlösbare Ungleichung ist.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Unbekannten in unserem System.

Für  $n = 1$  lautet das System:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

Man kann annehmen, alle Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_m$  seien von Null verschieden. Wäre nämlich zum Beispiel  $a_1 = 0$ , so hätte die erste Ungleichung die Gestalt  $0 \cdot x + b_1 \geq 0$ . Ist die Zahl  $b_1$  nichtnegativ, so kann man diese Ungleichung weglassen, ist sie jedoch negativ, so ist schon die erste Ungleichung des Systems unlösbar, und dann ist nichts mehr zu beweisen.

So dürfen wir also annehmen, keine der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sei Null. Man sieht leicht, dass sich unter diesen Zahlen sowohl positive als auch negative befinden müssen: Hätten nämlich alle angegebenen Zahlen ein und dasselbe Vorzeichen, wären sie zum Beispiel positiv, so könnte man das System (4) auf die Form

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -\frac{b_1}{a_1} \\ x \geq -\frac{b_2}{a_2} \\ \dots \\ x \geq -\frac{b_m}{a_m} \end{array} \right\}$$

bringen, es wäre also lösbar.

Wir nehmen nun, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, an, die ersten  $k$  der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_m$  seien positiv und die übrigen  $m - k$  negativ. Dann ist das System

(4) äquivalent mit dem System

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -\frac{b_1}{a_1} \\ \dots \\ x \geq -\frac{b_k}{a_k} \\ x \leq -\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ \dots \\ x \leq -\frac{b_m}{a_m} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Unter den Zahlen  $-\frac{b_1}{a_1}, \dots, -\frac{b_k}{a_k}$  wählen wir die größte; dies sei etwa  $-\frac{b_1}{a_1}$ . Dann können im System (5) die ersten  $k$  Ungleichungen einfach durch die erste Ungleichung ersetzt werden.

Analog wählen wir unter den Zahlen  $-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \dots, -\frac{b_m}{a_m}$  die kleinste, sagen wir  $-\frac{b_m}{a_m}$ ; dann können die restlichen  $m - k$  Ungleichungen des Systems (5) analog durch die entsprechende Ungleichung ersetzt werden. Somit ist das System (4) äquivalent dem aus den beiden Ungleichungen

$$x \geq -\frac{b_1}{a_1}, \quad x \leq \frac{b_m}{a_m}$$

entstehenden System; dieses System ist sicher unlösbar, wenn

$$-\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_m}{a_m} \quad (6)$$

gilt. Aus (6) ergibt sich

$$b_m a_1 - b_1 a_m < 0 \quad (7)$$

(man muss berücksichtigen, dass  $a_1 > 0$  und  $a_m < 0$  gilt).

Multipliziert man nun die erste Ungleichung von (4) mit der positiven Zahl  $-a_m$  und die letzte mit der positiven Zahl  $a_1$  und bildet dann die Summe, so erhält man die Ungleichung

$$0 \cdot x + (b_m a_1 - b_1 a_m) \geq 0$$

die wegen (7) unlösbar ist. Somit gilt der Satz in Systemen mit einer Unbekannten.

Wir nehmen nun an, die Behauptung des Satzes gelte für Ungleichungssysteme mit  $n-1$  Unbekannten, und beweisen unter dieser Voraussetzung ihre Gültigkeit für Systeme mit  $n$  Unbekannten.

Gegeben sei ein unlösbares lineares Ungleichungssystem mit den Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wir betrachten eine beliebige Ungleichung des Systems. Sie habe die Gestalt

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n + b \geq 0$$

oder, nachdem das Glied  $a_n x_n$  auf die rechte Seite gebracht wurde,

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + b \geq -a_n x_n$$

Ist  $a_n = 0$ , so lassen wir diese Ungleichung unverändert. Ist  $a_n < 0$ , so dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch die positive Zahl  $-a_n$ , dann ergibt sich die Ungleichung

$$a'_1 x_1 + \dots + a'_{n-1} x_{n-1} + b' \geq x_n$$

Bei  $a_n > 0$  dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch  $a_n$  und erhalten

$$-(a'_1 x_1 + \dots + a'_{n-1} x_{n-1} + b') \geq -x_n$$

Multipliziert man jede Ungleichung des Ausgangssystems mit einer geeigneten positiven Zahl, so erhält man ein diesem äquivalentes System der Form

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \geq x_n, \\ P_2 \geq x_n, \\ \dots \\ P_p \geq x_n; \\ -Q_1 \geq -x_n, \\ -Q_2 \geq -x_n, \\ \dots \\ -Q_q \geq -x_n, \\ R_1 \geq 0, \\ R_2 \geq 0, \\ \dots \\ R_r \geq 0, \end{array} \right\} \quad (8)$$

wobei  $P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_r$  Ausdrücke der Gestalt  $a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + b$  sind (also  $x_n$  nicht enthalten).

Nach Voraussetzung ist das Ausgangssystem unlösbar. Infolgedessen ist auch System (8) unlösbar. Daraus folgt dann, dass das System

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \geq Q_1, \\ \dots \\ P_p \geq Q_q; \\ R_1 \geq 0, \\ \dots \\ R_r \geq 0, \end{array} \right\} \quad (9)$$

mit den Unbekannten  $x_1, \dots, x_{n-1}$  unlösbar ist (der obere Teil dieses Systems besteht aus Ungleichungen der Gestalt  $P_\alpha \geq Q_\beta$ ,  $\alpha$  eine beliebige Zahl unter  $1, 2, \dots, p$  und  $\beta$  eine beliebige Zahl unter  $1, 2, \dots, q$ . Wäre nämlich das System (9) lösbar, so bedeutete das, dass für gewisse Werte

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$$

der Unbekannten die (Zahlen-)Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} P_1^0 \geq Q_1^0, \\ \dots \\ P_p^0 \geq Q_q^0; \\ R_1^0 \geq 0, \\ \dots \\ R_r^0 \geq 0, \end{array} \right\}$$

geltenden würden, wobei  $P_\alpha^0$  der Wert von  $P_\alpha$  bei  $x_1 = x_1^0, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$  ist (analoge Bedeutung haben  $Q_\beta^0$  und  $R_\gamma^0$ ). Somit wäre jede der Zahlen  $Q_1^0, \dots, Q_q^0$  nicht größer als jede der Zahlen  $P_1^0, \dots, P_p^0$ . In diesem Fall findet man aber sicher eine Zahl  $x_n^0$ , die zwischen allen Zahlen  $Q_1^0, \dots, Q_q^0$  und allen Zahlen  $P_1^0, \dots, P_p^0$  liegt (Abb. 46):

$$P_1^0 \geq x_n^0 \geq Q_1^0 \quad \dots \quad P_p^0 \geq x_n^0 \geq Q_q^0$$

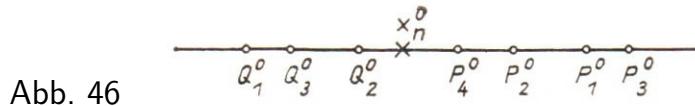


Abb. 46

Die sich hieraus ergebenden Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} P_1^0 \geq x_1^0, \\ \dots \\ P_p^0 \geq x_n^0; \\ -Q_1^0 \geq -x_n^0 \\ \dots \\ -Q_q^0 \geq -x_n^0 \end{array} \right\}$$

zeigen zusammen mit

$$\left. \begin{array}{l} R_1^0 \geq 0, \\ \dots \\ R_r^0 \geq 0, \end{array} \right\}$$

dass das System der Werte

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^0, \quad x_n = x_n^0$$

eine Lösung des Systems (8) ist, was der Voraussetzung, das System (8) sei unlösbar, widerspricht.

Also ist das System (9) unlösbar. Da die Anzahl der Unbekannten in diesem System gleich  $n - 1$  ist, kann darauf die Induktionsannahme angewendet werden. Das bedeutet, dass sich eine geeignete Linearkombination der Ungleichungen (9) als unlösbare Ungleichung darstellen lässt.

Es ist leicht einzusehen, dass jede Ungleichung aus (9) eine Linearkombination von Ungleichungen aus (8) ist: Addiert man nämlich einfach die Ungleichungen  $P_\alpha \geq x_n$  und  $-Q_\beta \geq -x_n$  aus (8), so erhält man  $P_\alpha - Q_\beta \geq 0$  oder  $P_\alpha \geq Q_\beta$ , d.h. eine Ungleichung aus (9).

Folglich ist eine bestimmte Linearkombination von Ungleichungen aus (8) ebenfalls eine unlösbare Ungleichung. Hieraus folgt aber, dass eine Linearkombination der Ungleichungen des Ausgangssystems eine unlösbare Ungleichung ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Unlösbarkeitssatz für lineare Ungleichungssysteme ist nur ein Ausdruck der weitgehenden Analogie, die zwischen den Eigenschaften linearer Ungleichungssysteme und denen linearer Gleichungssysteme besteht. Wir wollen einmal versuchen, in der Formulierung des Satzes das Wort "Ungleichung" durch das Wort "Gleichung" zu ersetzen;

dann erhalten wir folgende Aussage:

Ist ein lineares Gleichungssystem unlösbar, so ist eine gewisse Linearkombination dieser Gleichungen eine unlösbarer Gleichung.

Es zeigt sich, dass diese Aussage richtig ist.

In etwas anderer Form wird sie als Satz von Kronecker-Capelle bezeichnet und in den Vorlesungen über lineare Algebra bewiesen (so nennt man die Disziplin der Mathematik, in der die linearen Operationen, d.h. Operationen, die der Punktaddition und der Punktmultiplikation mit einer Zahl im  $n$ -dimensionalen Raum ähnlich sind, untersucht werden).

Übrigens ist es zum vollen Verständnis des oben Gesagten nötig, den Begriff der Linearkombination zu präzisieren. Eine Linearkombination von Gleichungen wird auf denselben Wege konstruiert wie eine Linearkombination von Ungleichungen, lediglich mit dem Unterschied, dass man die gegebenen Gleichungen mit passenden, nicht nur mit nichtnegativen Zahlen multiplizieren darf.

Unlösbar nennt man wie im Fall von Ungleichungen eine Gleichung, die keine Lösungen besitzt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass eine unlösbarer Gleichung auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n + b = 0$$

wobei  $b$  eine von Null verschiedene Zahl ist (nach Dividieren beider Seiten durch  $b$  erhalten wir die "Gleichung"  $1 = 0$ ).

Besonders wichtig ist ein Spezialfall des Satzes über unlösbarer Ungleichungssysteme, und zwar der, bei dem das gegebene System Ungleichungen der Gestalt

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (10)$$

enthält. Bezeichnet man den übrigen Teil des Systems mit  $(S)$ , so kann man sagen, das Problem besteht darin, alle nichtnegativen (d.h. die Bedingungen (10) erfüllenden) Lösungen des Systems  $(S)$  zu bestimmen.

Wenn dieses Problem keine Lösungen besitzt, liefert nach dem oben bewiesenen Satz eine Linearkombination der Ungleichungen des Systems  $(S)$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a \geq 0 \quad (11)$$

als Summe mit einer Linearkombination der Ungleichungen von (10),

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n \geq 0 \quad (k_1, k_2, \dots, k_n \text{ nichtnegativ})$$

die unlösbarer Ungleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n + c \geq 0$$

mit einer negativen Zahl  $c$ . Folglich ist

$$a_1 = -k_1 \leq 0, a_2 = -k_2 \leq 0, \dots, a_n = -k_n \leq 0, \quad a < 0$$

Wir formulieren das gewonnene Resultat als spezielle Aussage.

Folgerung aus dem Satz über unlösbare Systeme.

Besitzt ein Ungleichungssystem keine nichtnegativen Lösungen, so ist eine Linearkombination dieser Ungleichungen eine Ungleichung der Gestalt (11), wobei alle Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nicht positiv sind und das freie Glied  $a$  negativ ist.

Eine andere wichtige Folgerung aus dem Satz ist der Zusammenhang, den man zwischen einem gegebenen Ungleichungssystem und einem anderen System feststellen kann, in dem neben Ungleichungen auch Gleichungen vorkommen. Wir erläutern diesen Zusammenhang am Beispiel des Systems (1) (mit den drei Unbekannten  $x, y, z$ ).

Ist das System (1) unlösbar, so hat eine Linearkombination (2) seiner Ungleichungen die Form (3) mit  $d < 0$ . Das bedeutet, dass nichtnegative Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_m$  existieren, für die

$$\begin{aligned} k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m &= 0, \\ k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_mb_m &= 0, \\ k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_mc_m &= 0, \\ k_1d_1 + k_2d_2 + \dots + k_md_m &< 0 \end{aligned}$$

gilt. Mit anderen Worten heißt dies, dass das gemischte System

$$\left. \begin{aligned} a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m &= 0 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m &= 0 \\ c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_my_m &= 0 \\ d_1y_1 + d_2y_2 + \dots + d_my_m &= -1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ \dots & \\ y_m &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

das aus Gleichungen und Ungleichungen besteht, die Lösung  $y_1 = \lambda k_1, y_2 = \lambda k_2, \dots, y_m = \lambda k_m$  besitzt.<sup>10</sup>

Ist also das System (1) unlösbar, so ist System (1') lösbar. Umgekehrt gilt diese Aussage natürlich ebenfalls (ist System (1') lösbar, so ist (1) unlösbar), denn die Lösbarkeit des Systems (1') bedeutet, dass eine Linearkombination der Ungleichungen (1) die unlösbare Ungleichung  $-1 \geq 0$  ergibt.

---

<sup>10</sup>Die Zahl  $\lambda$  wird so gewählt, dass gilt:

$$d_1(\lambda k_1) + d_2(\lambda k_2) + \dots + d_m(\lambda k_m) = -1, \quad \text{d.h.} \quad \lambda = -\frac{1}{d_1k_1 + d_2k_2 + \dots + d_mk_m}$$

## 9 Duale polyedrische Kegel

In § 4 haben wir versprochen, konvexe polyedrische Kegel später noch etwas genauer zu studieren. Wir wollen das nun tun.

Wie früher bewiesen wurde, ist im dreidimensionalen Raum jeder konvexe polyedrische Kegel mit einer Spitze im Koordinatenursprung Lösungsbereich eines gewissen homogenen linearen Ungleichungssystems mit drei Unbekannten

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Zugleich mit dem System sei eine einzelne Ungleichung

$$ax + by + cz \geq 0 \quad (2)$$

gegeben.

Wir sagen, die Ungleichung (2) sei aus dem System (1) ableitbar, falls jedes System von Werten für die Unbekannten  $x, y, z$ , das dem System (1) genügt, auch der Ungleichung (2) genügt.

Selbstverständlich ist jede Ungleichung, welche Linearkombination der Ungleichungen (1) ist, aus dem System (1) ableitbar. Gilt aber auch die Umkehrung? Es erweist sich, dass dies zutrifft.

**Satz 1.** Eine homogene Ungleichung (2), die aus dem homogenen System (1) ableitbar ist, kann als Linearkombination der Ungleichungen (1) dargestellt werden.

**Beweis.** Damit wir im folgenden unsere Schreibweise vereinfachen können, bezeichnen wir die linken Seiten der ersten, zweiten, ...,  $m$ -ten Ungleichung des Systems (1) mit  $P_1, P_2, \dots, P_m$  und die linke Seite der Ungleichung (2) mit  $P$ . Also ist uns das System

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \geq 0 \\ P_2 \geq 0 \\ \dots \\ P_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

sowie die Ungleichung

$$P \geq 0 \quad (2)$$

gegeben, welche aus (1) ableitbar ist. Es soll bewiesen werden, dass diese Ungleichung als Linearkombination der Ungleichungen (1) darstellbar ist.

Da sich die Ungleichung  $P \geq 0$  aus dem System (1) ableiten lässt, ist die Gleichung  $P = -1$  mit dem System unvereinbar, d.h., das gemischte System

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \geq 0 \\ P_2 \geq 0 \\ \dots \\ P_m \geq 0 \\ P = -1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

ist unlösbar. Wir wollen versuchen, darauf den Satz über unlösbare Systeme anzuwenden. Selbstverständlich geht das nicht unmittelbar, denn dieser Satz bezieht sich auf Systeme, die lediglich aus Ungleichungen bestehen. Dagegen befindet sich in dem System (3) auch noch die Gleichung  $P = -1$ . Jedoch ist diese Gleichung selbst äquivalent zum System

$$\left. \begin{array}{l} P \geq -1 \\ P \leq -1 \end{array} \right\} \text{ oder, was dasselbe ist} \quad \left. \begin{array}{l} P + 1 \geq 0 \\ -P - 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

also ist das System (3) äquivalent dem System

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \geq 0 \\ P_2 \geq 0 \\ \dots \\ P_m \geq 0 \\ P + 1 \geq 0 \\ -P - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

das sich infolge von (3) als unlösbar erweist.

Nach dem Satz über unlösbare Systeme ist eine geeignete Linearkombination der Ungleichungen von (4) eine unlösbare Ungleichung.

Mit anderen Worten, es existieren nichtnegative Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_m$  derart, dass die Ungleichung

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_m P_m + k_{m+1}(P + 1) + k_{m+2}(-P - 1) \geq 0$$

(nach Einführung geeigneter Summanden) die Form

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d \geq 0$$

mit einer negativen Zahl  $d$  hat. Folglich gilt

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_m P_m + (k_{m+1} - k_{m+2})P = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$$

und die Zahl  $k_{m+1} - k_{m+2} = d$  ist negativ. Hieraus erhalten wir

$$P = \frac{k_1}{k_{m+2} - k_{m+1}} P_1 + \dots + \frac{k_m}{k_{m+2} - k_{m+1}} P_m$$

wobei die bei  $P_1, \dots, P_m$  stehenden Faktoren nichtnegativ sind.

Das bedeutet offenbar, dass die Ungleichung (2) eine Linearkombination der Ungleichungen (1) ist, was bewiesen werden sollte.

Dieser Satz ist auch von selbständiger Interesse, aber noch interessanter ist sein geometrischer Inhalt. Um den Leser damit bekannt zu machen, müssen wir einen Abstecher in die analytische Geometrie machen; jedoch ist dieser Abstecher ebenso elementar wie die wenigen Tatsachen aus der analytischen Geometrie, die wir bisher verwendet haben. Es seien

$$A(x_A, y_A, z_A) \quad , \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

zwei vom Koordinatenursprung  $O$  verschiedene Punkte im Raum.

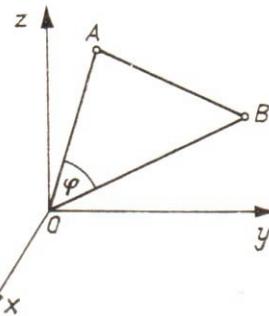


Abb. 47

Wir wenden auf das Dreieck  $OAB$  (Abb. 47) den Kosinussatz an, nach welchem das Quadrat einer beliebigen Dreiecksseite gleich der Differenz der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten und dem doppelten Produkt dieser Seiten mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels ist.

In unserem Fall gilt

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \varphi \quad (2)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den Strecken  $OA$  und  $OB$  ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \\ |OB|^2 &= x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 \\ |AB|^2 &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \end{aligned}$$

so dass wir aus (5) die Beziehung

$$-2(x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B) = -2|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \varphi \quad (6)$$

erhalten. Der Winkel  $\varphi$  wird nur dann nicht spitz sein, wenn  $\cos \varphi \leq 0$  ist. Hieraus und aus (6) ergibt sich:

Der Winkel zwischen den Strecken  $OA$  und  $OB$  ist dann und nur dann nicht spitz, wenn

$$x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \leq 0$$

ist.

Wir wollen für das Folgende vereinbaren, den auf der linken Seite dieser Ungleichung stehenden Ausdruck, das sogenannte Skalarprodukt, kurz mit  $(A, B)$  zu bezeichnen:

$$(A, B) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

Dann können wir sagen:

Der Winkel zwischen den Strecken  $OA$  und  $OB$  ist dann und nur dann nicht spitz, wenn gilt:

$$(A, B) \leq 0$$

Damit erschöpfen sich eigentlich auch die für das Weitere nötigen Tatsachen aus der analytischen Geometrie. Wir erwähnen zum Schluss noch eine Eigenschaft des Skalarprodukts  $(A, B)$ :

Es ist für beliebige  $k_1, k_2$

$$(k_1 A_1 + k_2 A_2, B) = k_1(A_1, B) + k_2(A_2, B) \quad (7)$$

Der Beweis ist fast offensichtlich: Da der Punkt  $k_1 A_1 + k_2 A_2$  die Koordinaten

$$k_1 x_{A_1} + k_2 x_{A_2}; \quad k_1 y_{A_1} + k_2 y_{A_2}; \quad k_1 z_{A_1} + k_2 z_{A_2}$$

hat, gilt

$$\begin{aligned} (k_1 A_1 + k_2 A_2, B) &= (k_1 x_{A_1} + k_2 x_{A_2}) x_B + (k_1 y_{A_1} + k_2 y_{A_2}) y_B + (k_1 z_{A_1} + k_2 z_{A_2}) z_B \\ &= k_1(x_{A_1} x_B + y_{A_1} y_B + z_{A_1} z_B) + k_2(x_{A_2} x_B + y_{A_2} y_B + z_{A_2} z_B) \\ &= k_1(A_1, B) + k_2(A_2, B) \end{aligned}$$

Schließlich wenden wir uns dem Hauptthema dieses Paragraphen zu, den konvexen polyedrischen Kegeln im Raum. Gemäß der in § 4 gegebenen Definition wird der Durchschnitt endlich vieler Halbräume, deren berandende Ebenen durch einen Punkt  $S$  gehen, ein konvexer polyedrischer Kegel mit Spitze in  $S$  genannt.

Das typischste Beispiel für einen konvexen polyedrischen Kegel ist bekanntlich die unendliche konvexe Pyramide. Im weiteren Teil dieses Paragraphen wollen wir voraussetzen, dass  $S$  mit dem Koordinatenursprung  $O$  zusammenfällt.

Der vom Koordinatenursprung verschiedene Punkt  $B$  habe folgende Eigenschaft: Die Strecke  $OB$  bilde einen nicht spitzen Winkel mit jeder Strecke  $OA$ , wobei  $A$  ein beliebiger Punkt des betrachteten Kegels  $\mathcal{K}$  sei. Einen solchen Punkt  $B$  kann man stets finden; dafür reicht es zum Beispiel aus, durch die Spitze des Kegels eine Ebene  $\pi$  derart zu legen, dass sich der ganze Kegel in einem der beiden von dieser Ebene definierten Halbräume liegt (Abb. 48).

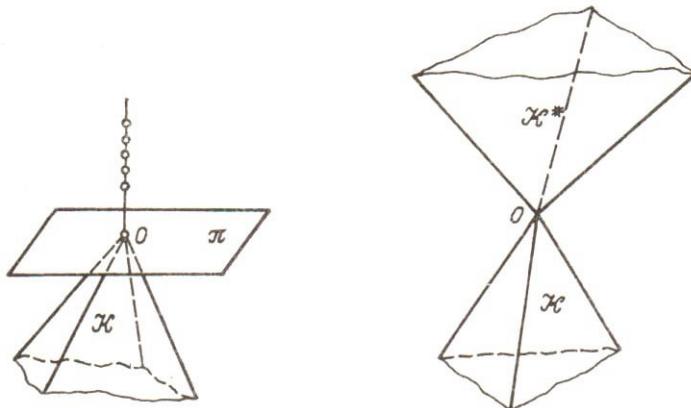


Abb. 48 und 49

Dann besteht das im anderen Halbraum auf die Ebene  $\pi$  gefällte Lot aus Punkten  $B$  der gewünschten Art.

Wir betrachten die Gesamtheit aller Punkte  $B$ , die die oben geforderte Eigenschaft besitzen, vervollständigen diese Gesamtheit noch durch einen weiteren Punkt, nämlich den Koordinatenursprung, und bezeichnen die gewonnene Menge mit  $\mathcal{K}^*$ . Wir beweisen zunächst das folgende Lemma:

Lemma.  $\mathfrak{K}^*$  ist ebenfalls ein konvexer polyedrischer Kegel (zur Illustration vgl. Abb. 49).

Beweis. Nach Satz 2 aus § 4 ist jeder konvexe polyedrische Kegel  $\mathfrak{K}$  eine Menge der Gestalt  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$  (im angegebenen Satz waren die Bezeichnungen etwas anders: anstelle von  $A_1, A_2, \dots, A_m$  wurde dort  $B_1, B_2, \dots, B_q$  geschrieben). Das bedeutet, dass man jeden Punkt  $A \in \mathfrak{K}$  in der Form

$$A = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_m A_m$$

mit nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_m$  darstellen kann. Gehört der Punkt  $B$  zu  $\mathfrak{K}^*$ , so ist der Winkel zwischen der Strecke  $OB$  und einer beliebigen Strecke  $OA$ ,  $A \in \mathfrak{K}$ , nicht spitz, d.h., es ist

$$(A, B) \leq 0 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{K}$$

Wegen

$$(A, B) = t_1(A_1, B) + t_2(A_2, B) + \dots + t_m(A_m, B)$$

(vgl. Formel (7)) haben wir im vorliegenden Fall

$$t_1(A_1, B) + t_2(A_2, B) + \dots + t_m(A_m, B) \leq 0 \quad (8)$$

für beliebige  $t_1, t_2, \dots, t_m$  gewählt. Insbesondere gilt

$$(A_1, B) \leq 0, (A_2, B) \leq 0, \dots, (A_m, B) \leq 0 \quad (9)$$

Jedoch ist auch umgekehrt, wenn die Ungleichungen (9) gelten, für beliebige nichtnegative  $t_1, t_2, \dots, t_m$  die Ungleichung (8) richtig, d.h., dann ist  $B \in \mathfrak{K}^*$ .

Also liegt der Punkt  $B$  genau dann in  $\mathfrak{K}^*$ , wenn die Ungleichungen (9) erfüllt sind.

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte  $A_i$  mit  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) und die Koordinaten des Punktes  $B$  mit  $x, y, z$ .

Dann können wir die Bedingungen (9) wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \leq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z \leq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_mz \leq 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Der Punkt  $B$  liegt genau dann in der Menge  $\mathfrak{K}^*$ , wenn seine Koordinaten  $x, y, z$  sämtliche Ungleichungen (10) erfüllen. Mit anderen Worten

$\mathfrak{K}^*$  ist der Lösungsbereich des Systems (10).

Da das System (10) homogen ist, ist sein Lösungsbereich ein konvexer polyedrischer Kegel im Raum. Folglich ist  $\mathfrak{K}^*$  ein konvexer polyedrischer Kegel, was bewiesen werden sollte.

Somit haben wir gelernt, jedem konvexen polyedrischen Kegel  $\mathfrak{K}$  einen neuen konvexen polyedrischen Kegel  $\mathfrak{K}^*$  zuzuordnen. Dieser Kegel  $\mathfrak{K}^*$  besteht aus sämtlichen Punkten  $B$ , für welche die Strecke  $OB$  nicht spitze Winkel mit jeder beliebigen Strecke  $OA$ .

$A \in \mathfrak{K}$ , bildet.

Man nennt  $\mathfrak{K}^*$  den zu  $\mathfrak{K}$  dualen Kegel.

Nun entsteht natürlich die Frage: Was für einen Kegel stellt der zu  $\mathfrak{K}^*$  duale Kegel dar, d.h., was kann man über die Menge  $(\mathfrak{K}^*)^*$  aussagen?

Aus der Definition des Kegels  $\mathfrak{K}^*$  folgt direkt, dass die Menge  $(\mathfrak{K}^*)^*$  die Ausgangsmenge  $\mathfrak{K}$  enthalten muss (warum ?).

Jedoch ist durchaus nicht klar, ob diese beiden Mengen etwa zusammenfallen. Mehr noch, wenn man versucht, diesen Sachverhalt durch geometrische Betrachtungen zu prüfen, überzeugt man sich davon, dass er nicht einfach ist. Wie dem auch sei, zum Beweis, dass  $(\mathfrak{K}^*)^*$  und  $\mathfrak{K}$  zusammenfallen, wählen wir einen algebraischen Weg, der auf Satz 1 beruht. Wie aus dem nachstehenden Beweis ersichtlich wird, besteht der geometrische Inhalt von Satz 1 für Systeme mit drei Unbekannten im wesentlichen in der Gleichung  $(\mathfrak{K}^*)^* = \mathfrak{K}$ .

Wir beweisen nun den folgenden Satz.

Satz 2. Es sei  $\mathfrak{K}$  ein konvexer polyedrischer Kegel. Dann stimmen die Mengen  $(\mathfrak{K}^*)^*$  und  $\mathfrak{K}$  überein.

Dasselbe kann man auch anders sagen, vielleicht sogar durchsichtiger. Wir bezeichnen den Kegel  $\mathfrak{K}$  mit  $\mathfrak{K}_1$  und den Kegel  $\mathfrak{K}^*$  mit  $\mathfrak{K}_2$ . Offenbar behauptet der Satz dann:

Ist  $\mathfrak{K}_1^* = \mathfrak{K}_2$ , so gilt  $\mathfrak{K}_2^* = \mathfrak{K}_1$ .

Oder: Ist ein Kegel dual zu einem zweiten, so ist es auch der zweite zum ersten, d.h., die Dualitätsbeziehung ist symmetrisch.

Beweis von Satz 2. Es sei  $C(a, b, c)$  ein beliebiger Punkt der Menge  $(\mathfrak{K}^*)^*$ . Für jeden Punkt  $B(x, y, z) \in \mathfrak{K}^*$  muss die Ungleichung  $(B, C) \leq 0$  erfüllt sein, d. h.

$$ax + by + cz \geq 0 \quad (11)$$

Die Zugehörigkeit des Punktes  $B$  zur Menge  $\mathfrak{K}^*$  bedeutet aber, wie oben gezeigt wurde, dass die Ungleichungen (10) erfüllt sein müssen. Also muss jede Lösung  $(x, y, z)$  des Systems (10) auch die Ungleichung (11) erfüllen. Mit anderen Worten: Die Ungleichung (11) ist aus System (10) ableitbar.

Nach dem früher bewiesenen Satz 1 ist dies nur dann möglich, wenn die Ungleichung (11) Linearkombination der Ungleichungen (10) ist, d.h. falls

$$(a, b, c) = t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2) + \dots + t_m(a_m, b_m, c_m)$$

mit nichtnegativen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_m$  gilt. Nun bedeutet aber diese Gleichung, dass

$$C = t_1A_1 + t_2A_2 + \dots + t_mA_m$$

gilt, d.h., dass der Punkt  $C$  zum Kegel  $\mathfrak{K}$  gehört. Also gehört jeder in  $(\mathfrak{K}^*)^*$  liegende Punkt  $C$  zu  $\mathfrak{K}$ .

Das Umgekehrte hatten wir schon festgestellt, d.h., dass  $\mathfrak{K}$  zu  $(\mathfrak{K}^*)^*$  gehört. Folglich ist  $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^*)^*$  und der Satz bewiesen.

## 10 Der Dualitätssatz der linearen Optimierung

Die lineare Optimierung ist ein relativ neues Gebiet in der angewandten Mathematik, das sich in den letzten fünfzehn bis zwanzig Jahren im Zusammenhang mit der Lösung verschieden- artiger ökonomischer Aufgaben entwickelt hat.

In der Regel sind Aufgaben, die uns in der Ökonomie und besonders im Bereich der Wirtschaftsplanung begegnen, Extremalprobleme, bei denen die vorteilhafteste Variante gesucht wird.

Wenn wir die reale Situation vereinfachen (und sogar zuspitzen), können wir zum Beispiel annehmen, dass in einem Betrieb, der zwei verschiedenartige Typen von Werkstücken ausstößt, die Produktionskapazität der Montageabteilung 100 Werkstücke vom ersten oder 300 vom zweiten Typ pro Tag beträgt. Gleichzeitig sei die Abteilung für technische Kontrolle nicht in der Lage, am Tag mehr als 150 Werkstücke (gleich welchen Typs) zu prüfen.

Es sei weiterhin bekannt, dass ein Werkstück des ersten Typs doppelt so teuer ist wie ein Werkstück des zweiten.

Unter diesen Bedingungen ist ein Produktionsplan aufzustellen (d.h. wie viele Werkstücke vom ersten Typ und wie viele vom zweiten täglich zu produzieren sind), der dem Betrieb maximalen Gewinn sichert.

Bis in die jüngste Vergangenheit bestand die einzige Methode zur Lösung derartiger Probleme in einer gewöhnlichen Schätzung, in einer Lösung "über den Daumen" oder aber in einer Durchmusterung aller möglichen Varianten, um die beste herauszufinden. Heute hat sich alles geändert.

Im letzten Jahrzehnt wurde die Produktion in einem solchen Grade komplizierter, dass ein einfaches Durchmustern von Varianten unmöglich wurde. Es traten so viele Faktoren auf, die die Lösung beeinflussten, dass die Zahl der Varianten in vielen Fällen in die Milliarden ging.

Im Zusammenhang damit wuchs das Interesse an mathematischen Methoden in der Ökonomie stark an. Den Prozess der "Mathematisierung der Ökonomie" förderte die Entwicklung der Rechentechnik, insbesondere das Aufkommen elektronischer Rechenautomaten.

Wir kehren nun zu unserem Beispiel zurück. Der gesuchte Plan für die Anzahl der zu produzierenden Stücke wird durch zwei nichtnegative ganze Zahlen  $x, y$  ( $x$  die Anzahl der Werkstücke des ersten Typs,  $y$  die des zweiten) gegeben, welche folgenden Bedingungen genügen müssen<sup>11</sup>

1.  $3x + y \leq 300,$
2.  $x + y \leq 150,$
3.  $2x + y$  maximal

---

<sup>11</sup>Diese Bedingung stammt aus der Montageabteilung. Man kann nämlich anstelle eines Werkstückes des ersten Typs in der Abteilung drei Werkstücke des zweiten herstellen. Die Gesamtproduktion der Abteilung beträgt bei Werkstücken des zweiten Typs  $3x + y$  Stück, und diese Zahl darf 300 nicht überschreiten.

Mit anderen Worten, aus den nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} 3x + y &\leq 300 \\ x + y &\leq 150 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (1)$$

muss man eine bestimmen, die den größten Wert der linearen Funktion

$$f = 2x + y$$

liefert.

Führt man in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $xOy$  ein, so wird die Menge der Lösungen des Systems (1) durch das in Abb. 50 schraffierte Polygon gebildet. Anhand dieser Zeichnung kann man feststellen, dass die Lösung des Problems der Punkt  $P(75, 75)$ , also eine der Ecken des Polygons ist.

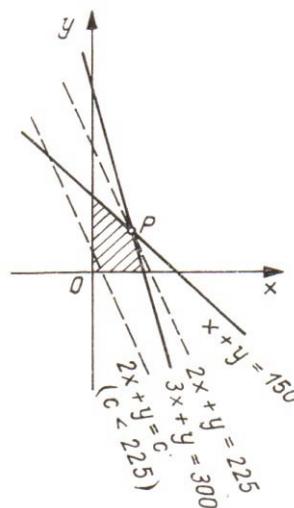


Abb. 50

Wir betrachten die Gerade  $2x + y = c$  ( $c$  eine Zahl) und bezeichnen sie mit  $l_c$ . Mit wachsendem  $c$  wird die Gerade  $l_c$  "nach oben" verschoben (und bleibt dabei parallel zu ihrer Ausgangslage).

Der größte  $c$ -Wert, für den die Gerade  $l_c$  noch gemeinsame Punkte mit dem schraffierten Polygon hat, ist derjenige  $c$ -Wert, für den diese Gerade durch den Punkt  $P$  geht. Folglich nimmt die Funktion  $2x + y$  ihren größten Wert (im Vergleich zu ihren Werten in den übrigen Polygonpunkten) in diesem Punkt an.

Unser Beispiel ist natürlich sehr primitiv, aber trotz allem gibt es eine Vorstellung vom Charakter linearer Optimierungsprobleme. In jedem solchen Problem wird gefordert, den maximalen (oder minimalen) Wert einer linearen Funktion in  $n$  Variablen

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

unter der Bedingung zu finden, dass diese Variablen einem linearen Ungleichungssystem genügen (darunter sind auch diejenigen Ungleichungen, die aussagen, dass die Variablen nichtnegativ sind:  $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$ ).

Die Lösungsmethoden für lineare Optimierungsprobleme wurden bis heute sehr gründlich ausgearbeitet. Die meisten sind völlig elementar und können natürlich im Rahmen

der "Schulmathematik" gebracht werden. Im wesentlichen handelt es sich hier um einen großen und, wie wir heute sehen, erstaunlich wichtigen Teil der elementaren Algebra, der sich mit der Untersuchung linearer Gleichungs- und Ungleichungssysteme beschäftigt.

Zu den Aufgaben dieses Büchleins gehört es nicht, die Grundlagen der linearen Optimierung darzulegen. Mit dieser Disziplin befassen sich heute viele Bücher und Broschüren, darunter auch eine Anzahl populärer. Wir werden hier nur ein Teilgebiet streifen, nämlich das von der mathematischen Seite her wesentlichste, das sogenannte Dualitätsprinzip.

Zuerst formulieren wir das lineare Optimierungsproblem in allgemeiner Form. Gegeben sei das System

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

von  $m$  linearen Ungleichungen mit  $n$  Unbekannten<sup>12</sup> sowie eine gewisse lineare Funktion

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Unter allen nichtnegativen ( $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$ ) Lösungen des Systems (2) soll eine solche gefunden werden, die der Funktion  $f$  den größtmöglichen Wert gibt, die - wie man sagt - die Funktion  $f$  maximiert.

Diese Aufgabe werden wir Ausgangsproblem (oder Problem A) nennen.

Wir verbinden mit dem Problem A ein neues, welches wir das zu Problem A duale Problem oder (Problem A') nennen werden:

Gegeben seien das System

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m + c_1 \leq 0 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m + c_2 \leq 0 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m + c_n \leq 0 \end{array} \right\} \quad (2')$$

von  $n$  linearen Ungleichungen mit  $m$  Unbekannten und die lineare Funktion

$$\phi = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

Unter allen nichtnegativen Lösungen des Systems (2') soll eine solche gefunden werden, die der Funktion  $\phi$  den kleinstmöglichen Wert erteilt, d.h., die die Funktion  $\phi$  minimiert.

Vergleichen wir die Probleme A und A', so bemerken wir folgendes:

1. Der Koeffizient der  $j$ -ten Unbekannten in der  $i$ -ten Ungleichung von (2) ist derselbe

---

<sup>12</sup>Im System (2) wird folgende Bezeichnung verwendet: Der Koeffizient; der  $j$ -ten Unbekannten in der  $i$ -ten Ungleichung wird mit  $a_{ij}$  bezeichnet.

wie der Koeffizient der  $i$ -ten Unbekannten in der  $j$ -ten Ungleichung von (2').

2. Die freien Glieder in den Ungleichungen des einen Problems stimmen mit den Koeffizienten der Unbekannten in der linearen Funktion des anderen Problems überein.

3. Im Ungleichungssystem von Problem A sind sämtliche Ungleichungen vom Typ  $\geq$ , und in diesem Problem soll  $f$  sein Maximum annehmen. Im Ungleichungssystem von Problem A' dagegen sind alle Ungleichungen vom Typ  $\leq 0$ , dafür aber soll  $\phi$  minimiert werden.

Ein grundlegender Satz der linearen Optimierung ist das sogenannte Dualitätstheorem. Es lautet folgendermaßen:

Dualitätstheorem. Besitzt das Ausgangsproblem eine Lösung, so hat auch das zu ihm duale eine Lösung. Dabei ist das Maximum der Funktion  $f$  gleich dem Minimum der Funktion  $\phi$ :

$$\max f = \min \phi$$

Wir werden diesen Satz dadurch beweisen, dass wir ihn auf die Frage nach der Lösbarkeit eines Ungleichungssystems zurückführen.

Damit man dem Beweis besser folgen kann, führen wir ihn in mehreren Etappen.

Etappe 1. Lemma. Ist  $x_1^0, \dots, x_n^0$  eine nichtnegative Lösung von (2) und  $y_1^0, \dots, y_m^0$  eine nichtnegative Lösung von (2'), so besteht zwischen den Werten der Funktionen  $f$  und  $\phi$  für diese Lösungen der durch folgende Ungleichung ausgedrückte Zusammenhang:

$$f_0 \leq \phi_0$$

Beweis. Wir betrachten die Ungleichungen von (2), wobei anstelle von  $x_1, \dots, x_n$  die Werte  $x_1^0, \dots, x_n^0$  eingesetzt wurden. Die erste Ungleichung multiplizieren wir mit  $y_1^0$ , die zweite mit  $y_2^0$  usw., danach addieren wir sämtliche erhaltenen Ungleichungen und gelangen zu

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \dots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + b_1y_1^0 + \dots + b_my_m^0 \geq 0$$

(Wir müssen berücksichtigen, dass wir die Ungleichungen mit nichtnegativen Zahlen multiplizieren. Daher ändern sich die Vorzeichen bei den Ungleichungen nicht.) Genau so multiplizieren wir die erste Ungleichung von (2') mit  $x_1^0$ , die zweite mit  $x_2^0$  usw. und addieren:

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \dots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + c_1x_1^0 + \dots + c_mx_m^0 \leq 0$$

In beiden Fällen steht in den Klammern ein Ausdruck, der gleich der Summe der Glieder  $a_{ij}y_i^0x_j^0$  über alle  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ . Folglich sind die Ausdrücke in den Klammern identisch. Dann ist aber

$$c_1x_1^0 + \dots + c_nx_n^0 \leq b_1y_1^0 + \dots + b_my_m^0$$

oder  $f_0 \leq \phi_0$ . Das Lemma ist damit bewiesen.

Etappe 2. Die Probleme A und A' werden auf die Lösung eines gewissen Ungleichungssystems zurückgeführt.

Wir betrachten das folgende "kombinierte" Ungleichungssystem:

$$\left. \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & & +b_1 \geq 0 \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & & +b_m \geq 0 \\ & a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m & +c_1 \leq 0 \\ \dots & & \dots \\ & a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m & +c_n \leq 0 \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n & & -b_1y_1 - \dots - b_my_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (S)$$

Wie hieraus hervorgeht, besteht es aus den Systemen (2), (2') und der Ungleichung  $f - \phi \geq 0$ . Die Unbekannten im System (S) sind  $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m$  (insgesamt  $n+m$  Unbekannte).

Wir stellen zuerst folgenden Sachverhalt fest:

Besitzt das System (S) die nichtnegative Lösung  $x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0$ , so liefern die Zahlen  $x_1^0, \dots, x_n^0$  die Lösung von Problem A und die Zahlen  $y_1^0, \dots, y_m^0$  die Lösung von Problem A', wobei  $f_0 = \phi_0$  gilt.

Wir wollen hier ein wenig verweilen, um die prinzipielle Rolle dieser Aussage zu unterstreichen. Darin ist bemerkenswert, dass sich ein lineares Optimierungsproblem, d.h. ein Maximierungsproblem, auf die Lösung eines linearen Ungleichungssystems ohne jegliche Maximierungsforderung reduziert.

Allerdings ist natürlich die Lösung von (S) (im Bereich nichtnegativer Werte für die Unbekannten) durchaus nicht leichter als diejenige des Ausgangsproblems der linearen Optimierung (Problem A) ; allein schon die Tatsache dieser Reduktion ist sehr interessant.

Nunmehr wollen wir die Behauptung beweisen. Zunächst ist klar, dass die Zahlen  $x_1^0, \dots, x_n^0$  nichtnegativ sind und dem System (2) genügen; analog sind auch die Zahlen  $y_1^0, \dots, y_m^0$  nichtnegativ und genügen (2'). Außerdem gilt für diese Zahlen die Ungleichung

$$f_0 \geq \phi_0$$

(die sich aus der letzten Ungleichung von (S) ergibt). Andererseits haben wir nach dem Lemma

$$f_0 \leq \phi_0$$

also gilt  $f_0 = \phi_0$ .

Ist ferner  $x_1, \dots, x_n$  eine beliebige nichtnegative Lösung des Systems (2), so haben wir wiederum nach dem Lemma

$$f \leq \phi_0$$

Setzen wir hier  $\phi_0 = f_0$ , so erhalten wir  $f \leq f_0$  woraus folgt, dass  $f_0$  maximaler Wert für  $f$  ist.

Ist analog dazu  $y_1, \dots, y_m$  eine beliebige nichtnegative Lösung von System (2'), so haben wir nach dem Lemma

$$f_0 \leq \phi$$

Setzen wir  $f_0 = \phi_0$ , so erhalten wir  $\phi_0 \leq \phi$ , d.h.,  $\phi$  ist minimaler Wert für  $\phi$ . Damit ist die oben formulierte Aussage bewiesen.

Etappe 3. Vollendung des Beweises.

Wir haben nun noch das folgende zu zeigen: Besitzt das Problem A eine Lösung, so hat das System (S) eine nichtnegative Lösung, denn dann gilt, wie vorher bewiesen,  $f_0 = \phi_0$ , d.h.  $\max f = \min \phi$ .

Wir führen den Beweis indirekt, d.h., wir nehmen an, das System (S) besitze keine nichtnegativen Lösungen. Jedoch verfügen wir in diesem Fall über eine Folgerung aus dem Satz über unlösbare Systeme (§ 8). Zwar bezog sich diese Folgerung auf ein System, das nur aus Ungleichungen  $\geq 0$  bestand, während wir auch Ungleichungen  $\leq 0$  vor uns haben. Aber diese Voraussetzung ist leicht zu erfüllen, wenn wir (S) wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{array}{lll} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & & +b_1 \geq 0 \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & & +b_m \geq 0 \\ & -a_{11}y_1 - \dots - a_{m1}y_m & -c_1 \geq 0 \\ \dots & & \dots \\ & -a_{1n}y_1 - \dots - a_{mn}y_m & -c_n \geq 0 \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n & & -b_1y_1 - \dots - b_my_m \geq 0 \end{array} \right\} \quad (S')$$

Nehmen wir also an, das System (S') besitze keine nichtnegativen Lösungen. Nach der Folgerung aus dem Satz über unlösbare Systeme gibt es nicht-negative Zahlen  $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n, s$  (insgesamt  $m+n+1$  Zahlen), so dass<sup>13</sup>

$$\left. \begin{array}{ll} a_{11}k_1 + \dots + a_{m1}k_m + c_1s \leq 0 \\ a_{1n}k_1 + \dots + a_{mn}k_m + c_ns \leq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{ll} -a_{11}l_1 - \dots - a_{1n}l_n - b_1s \leq 0 \\ -a_{m1}l_1 - \dots - a_{mn}l_n - b_ms \leq 0 \end{array} \right\} \quad (3')$$

$$b_1k_1 + \dots + b_mk_m - c_1l_1 - \dots - c_nl_n < 0 \quad (4)$$

Wir zeigen zunächst, dass die Zahl  $s$  von Null verschieden ist.

Nehmen wir nämlich an, das wäre nicht der Fall, d.h., es wäre  $s = 0$ , so betrachten wir eine nichtnegative Lösung  $x_1^0, \dots, x_n^0$  von (2) und eine nichtnegative Lösung  $y_1^0, \dots, y_m^0$  von (2').

Wenn wir wie beim Beweis des Lemmas vorgehen, finden wir

$$(a_{11}k_1x_1^0 + \dots + a_{mn}k_mx_n^0) + b_1k_1 + \dots + b_mk_m \geq 0$$

<sup>13</sup>Die Zahlen  $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n, s$  sind zugleich dieselben, mit denen wir die erste, zweite, ...,  $(m+n+1)$ -te Ungleichung im System (S') multiplizieren, um (nach Addition) die unlösbare Ungleichung  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a'_1y_1 + \dots + a'_my_m + d \geq 0$  zu erhalten, wobei  $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \leq 0$  sind und  $d$  eine negative Zahl ist.

Der in Klammern stehende Ausdruck ist aber nicht positiv (das zeigt sich, wenn wir die erste Ungleichung aus (3) mit  $x_1 0$ , die zweite mit  $x_2^0$  usw. multiplizieren und danach die Addition ausführen).

Hieraus ergibt sich

$$b_1 k_1 + \dots + b_m k_m \geq 0 \quad (5)$$

Analog finden wir

$$(a_{11} l_1 y_1^0 + \dots + a_{mn} l_n y_m^0) + c_1 l_1 + \dots + c_n l_n \leq 0$$

Da der Ausdruck in Klammern nicht negativ ist (was sich zeigt, wenn wir die erste Ungleichung aus (3') mit  $y_1^0$ , die zweite mit  $y_2^0$  usw. multiplizieren und danach addieren), folgt

$$c_1 l_1 + \dots + c_n l_n \leq 0 \quad (6)$$

Die Ungleichungen (5) und (6) widersprechen aber (4).

Also ist  $s$  nicht gleich Null. In diesem Fall folgt aus (3), dass die Zahlen  $\frac{k_1}{s}, \dots, \frac{k_m}{s}$  eine nichtnegative Lösung des Systems (2) bilden, ferner aus (3'), dass die Zahlen  $\frac{l_1}{s}, \dots, \frac{l_n}{s}$  eine nichtnegative Lösung des Systems (2') darstellen, und aus (4), dass für diese Lösung  $\phi - f < 0$  gilt.

Das aber widerspricht dem Lemma. Also erhielten wir aus der Annahme, das System (S) besitze keine nichtnegativen Lösungen, einen Widerspruch. Folglich existiert eine solche Lösung, und damit ist das Dualitätstheorem bewiesen.

Beispiel. Man bestimme den maximalen Wert der Funktion

$$f = 2x_2 + 12x_3$$

unter der Bedingung, dass die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  nichtnegativ sind und den Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

genügen.

Lösung. Wir bezeichnen die gestellte Aufgabe mit A. Die zu ihr duale Aufgabe (Aufgabe A') muss wie folgt formuliert werden:

Man bestimme den minimalen Wert der Funktion

$$\phi = 2y_1 + y_2$$

unter der Bedingung, dass die Variablen  $y_1, y_2$  nichtnegativ sind und den Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{l} y_1 - y_2 \leq 0 \\ -y_1 - y_2 + 2 \leq 0 \\ -y_1 - 4y_2 + 12 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

genügen.

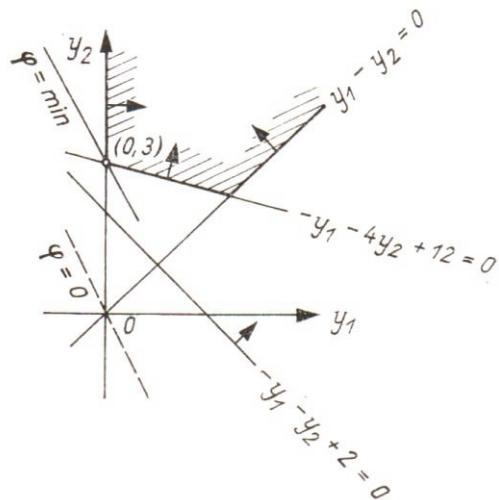


Abb. 51

Die Aufgabe A' kann man graphisch lösen, wenn man in der Koordinatenebene  $y_1 O y_2$  den Lösungsbereich von (7) einzeichnet. Das wurde in Abb. 51 getan.

In dieser Zeichnung ist auch zu sehen, dass die Funktion  $\phi$  ihren kleinsten Wert im Punkt  $(0,3)$  annimmt. Das ist eine Ecke des Bereiches. Dieser Wert ist gleich -3.

Nach dem Dualitätstheorem muss das Maximum von  $f$  ebenfalls gleich -3 sein.

## Literatur

Boseck, H., Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

Kréko, B., Lehrbuch der linearen Optimierung, 6. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

Piehler, J., Einführung in die lineare Optimierung, 4. Aufl., BSB B. G. Teubner, Leipzig 1970.

Smirnow, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III/1, 7. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

Tschernikow, S. N., Lineare Ungleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).