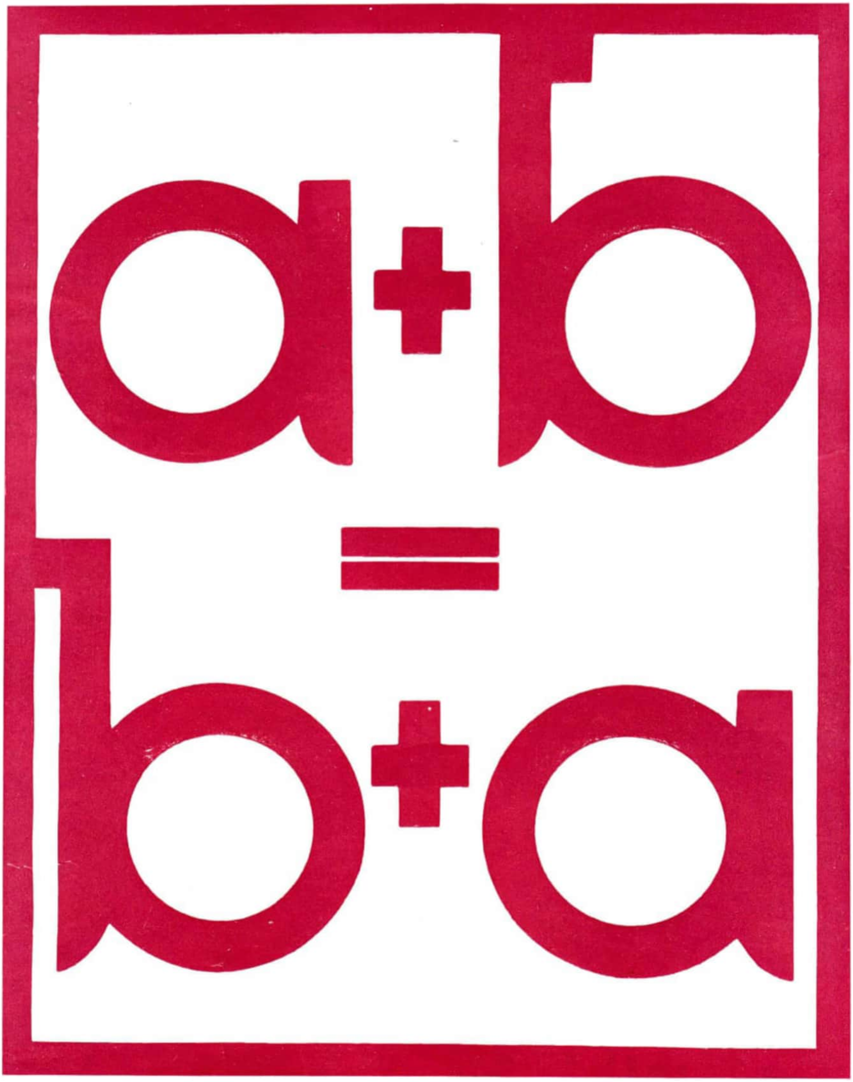
JUNGE MATHEMATIKER

Mathematischer Lesebogen, herausgegeben vom Rat der Stadt Leipzig, Abteilung Volksbildung, Pädagogisches Kreiskabinett, zusammengestellt und bearbeitet von J. Lehmann und W. Unze

Heft 14



573 Mathematikaufgaben aus Olympiaden der DDR

— Dokumentation — Klassenstufe 2 bis 10 —

Klasse 2

1. $81 - x = 35$

   Frage:

   Wie groß ist x?

2. „Wieviel Geld hast du gespart?" fragt Brigitte ihren Bruder. Er antwortet: „In meinem Sparbuch sind drei 10-Pfennigmarken und eine Marke zu 50 Pfennig."

   Frage:

   Wieviel hat Brigittes Bruder gespart und wieviel fehlt ihm noch an 1 DM?

3. Inge kauft 2 Hefte zu je 8 Pfennig. Ihre Freundin braucht doppelt soviel Hefte. Sie zahlen gemeinsam und legen 1 DM-Stück auf den Ladentisch.

   Frage:

   a) Wieviel Hefte kaufen die Mädchen und wieviel Geld bezahlen sie dafür?

   b) Wieviel Geld gibt ihnen die Verkäuferin zurück?

4. Stelle einen Würfel auf den Tisch und setze einen zweiten darauf.

   Frage:

   Wieviel Quadrate siehst du von allen Seiten und von oben?

Lösungen:

1. $x = 46$
2. Brigittes Bruder hat 80 Pfennig gespart; es fehlen ihm noch 20 Pfennig an 1 DM.
3. a) Die Mädchen kaufen 6 Hefte und zahlen dafür 48 Pfennig.

   b) Die Verkäuferin gibt 52 Pfennig zurück.
4. 9 Quadrate.

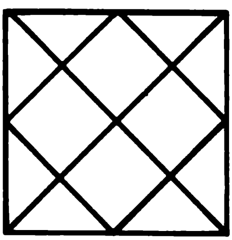
Klasse 3

1. „Hat die Gruppe 2 100 Flaschen abgeliefert?" fragt Thomas. Hans erwidert: „Nein, wir haben nur 10 mehr als die Hälfte davon zur Sammelstelle gebracht."

   Frage: Wieviel Flaschen hat die Gruppe 2 zur Sammelstelle gebracht?

2. Für 5 Schutzumschläge bezahlt man im Schreibwarengeschäft 2,00 DM.

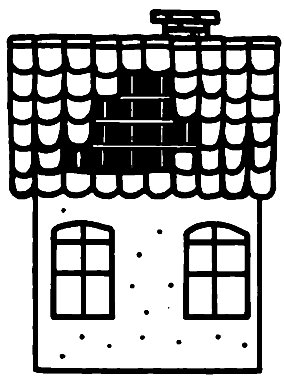
   Frage: Wieviel Schutzumschläge bekommt man für 3,60 DM?



3. Wieviel Quadrate findest du in dieser Zeichnung? Und wieviel Dreiecke sind es?

4. Ein Dach soll repariert werden. In jeder Reihe liegen 10 Ziegel.

   Frage: Wieviel Ziegel fehlen?



5. Von Rostock fuhren gleichzeitig zwei Autos nach Berlin: Ein „Trabant" und ein „Wartburg". Der „Trabant" fuhr in jeder Stunde 60 km, der „Wartburg" 80 km.

   Frage 1: Wieviel km fuhr der „Trabant" in 3 Stunden?

   Frage 2: Wieviel km fuhr der „Wartburg" in 3 Stunden?

Frage 3: Wieviel km ist der „Wartburg“ nach drei Stunden dem „Trabant“ voraus?

6. Suche die fehlenden Zahlen. Es muß stets dieselbe Zahl herauskommen, wenn du die Zahlen waagerecht, senkrecht und von einer Ecke zur schräg gegenüberliegenden zusammenzählst.

80	180	40
—	100	—
160	—	—

7. a:b = c. b = 6; c = 9
Frage: Wie groß ist a?

8. Rainer, Horst und Klaus helfen den Nachbarn beim Kohlentragen. Rainer trägt 40 Eimer Kohlen in den Keller, Horst trägt nur den 4. Teil davon. Klaus bringt 15 Eimer Kohlen mehr als Horst in den Keller.
Frage:
a) Wieviel Eimer Kohlen trägt Horst in den Keller und wieviel trägt Klaus?
b) Wieviel Eimer Kohlen tragen alle drei Jungen zusammen?

9. In der Küche eines Ferienlagers waren 95 kg Mehl, 73 kg Zucker, 24 kg Dauerwurst und 17 kg Fett vorhanden. An einem Tage wurden davon 28 kg Mehl, 15 kg Zucker, 9 kg Dauerwurst und 6 kg Fett verbraucht.
Frage: Wieviel kg Mehl, Zucker, Wurst und Fett blieben übrig?

10. Stelle dir einen Turm vor, der aus würfelförmigen Bausteinen errichtet ist. Er steht auf dem Tisch! 25 Quadrate sind von allen Seiten und von oben zu sehen. Überlege, aus wieviel Würfeln der Turm besteht!

11. „Wie alt ist die Eiche?“ fragten die Kinder den Forstaufseher.
„Nun, überlegt einmal“, antwortete er, „addiert die größte einstellige Zahl, die größte zweistellige und größte dreistellige Zahl! Von der erhaltenen Summe subtrahiert die kleinste vierstellige Zahl und dann wißt ihr, wie alt die Eiche ist.“ Wie alt ist die Eiche?

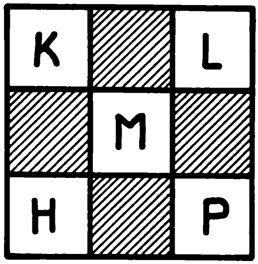
12. In zwei Schalen lagen je 16 Äpfel. Aus der ersten Schale wurden einige Äpfel herausgenommen, aus der zweiten wurden so viel herausgenommen, wie in der ersten übriggeblieben waren. Wieviel Äpfel blieben in beiden Schalen zusammen übrig?

13. Wasja kaufte zwei Alben für Ansichtskarten. Ein Kamerad fragte ihn, wieviel er für jedes Album bezahlt habe. „Für das größere Album“, antwortete Wasja, „gab ich 7 von den gleichen Geldstücken, wovon ich 5 für das kleinere gab. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken.“ Wieviel kostete jedes Album?

14. Kinder fragten den Großvater, wie alt er sei. Der Großvater antwortete: „Wenn ihr die Zahl meiner Jahre durch 6 dividiert und von der erhaltenen Zahl 6 subtrahiert, dann erhaltet ihr 6.“ Wie alt ist der Großvater?

15. Wenn man eine gedachte Zahl durch 3 dividiert, zu der erhaltenen Zahl 3 addiert und die dann erhaltene Zahl mit 3 multipliziert, dann erhält man als Produkt 333. Suche die gedachte Zahl!

16. a) Bildet aus 12 Stäbchen 5 Quadrate!
b) Nehmt 2 Stäbchen so weg, daß 2 Quadrate übrigbleiben!
c) Bildet abermals aus 12 Stäbchen 5 Quadrate und legt 3 Stäbchen so um, daß 3 Quadrate daraus entstehen!
d) Bildet nochmals aus 12 Stäbchen 5 Quadrate, legt diesmal aber 4 Stäbchen so um, daß 3 Quadrate daraus entstehen.



17. Welche Zahl bedeutet jeder Buchstabe im magischen Quadrat, wenn folgendes bekannt ist:
K ist die Hälfte von L,
L ist die Summe von M und H,
M ist die Differenz zwischen H und P,
H ist dreimal soviel wie P,
P ist der vierte Teil von 56.

18. Ein Boot fuhr von einem Dorf aus 9 km stromabwärts, dann 15 km stromaufwärts, danach fuhr es noch 11 km stromabwärts. In welcher Entfernung von dem Dorf befand sich nun das Boot?

19. Zwei Boote befinden sich 30 km voneinander entfernt. Wie groß ist die Entfernung zwischen ihnen, wenn das eine Boot 6 km stromaufwärts fährt und das andere 10 km stromabwärts?

20. Die Summe zweier Zahlen ist um 15 größer als die eine und um 25 größer als die andere Zahl. Wie groß ist die Summe dieser Zahlen?

21. Das Produkt zweier Zahlen ist 18 mal so groß wie die eine Zahl und 5 mal so groß wie die andere Zahl. Errechne das Produkt dieser Zahl!

Lösungen:

1. Die Gruppe 2 hat 60 Flaschen zur Sammelstelle gebracht.
2. Für 3,60 DM bekommt man 9 Umschläge.
3. Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.
4. In der obersten, ersten Reihe fehlen 0 Ziegel
in der zweiten Reihe fehlen 2 Ziegel
in der dritten Reihe fehlen 3 Ziegel
in der vierten Reihe fehlen 4 Ziegel
in der fünften Reihe fehlen + 4 Ziegel
Es fehlen insgesamt 13 Ziegel
5. **Lösung 1:** Der „Trabant“ fuhr 180 km in 3 Stunden.
Lösung 2: Der „Wartburg“ fuhr 240 km in 3 Stunden.
Lösung 3: Der „Wartburg“ ist dem „Trabant“ nach 3 Stunden um 60 km voraus.
6.

80	180	40
60	100	140
160	20	120

7. a = 54

8. a) Horst trägt 10 Eimer Kohlen in den Keller, Klaus trägt 25 Eimer.
   b) Alle drei Jungen zusammen tragen 75 Eimer Kohlen in den Keller.
9. Es blieben 67 kg Mehl, 58 kg Zucker, 15 kg Dauerwurst und 11 kg Fett übrig.
10. Der Turm besteht aus 6 Würfeln.
11.
$$\begin{array}{r} 9 \\ 99 \\ +\ 999 \\ \hline 1107 \\ -\ 1000 \\ \hline 107 \end{array}$$
Die Eiche ist 107 Jahre alt.

12.
$$\begin{array}{l} 16 - a = b \\ 16 - b = a \\ \hline a + b = 16 \end{array}$$
In beiden Schalen bleiben zusammen 16 Äpfel übrig.

13. $60 : (7 + 5) = 5$ oder: $7x + 5 = 60$; $12x = 60$; $x = 5$

Das größere Album kostete 35 Kopeken, das kleinere Album kostete 25 Kopeken.

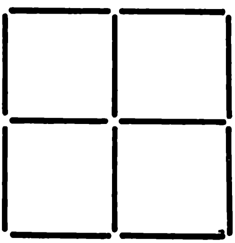
14. $6 + 6 = 12$ $12 \cdot 6 = 72$ oder: $\frac{x}{6} - 6 = 6$; $x = 72$

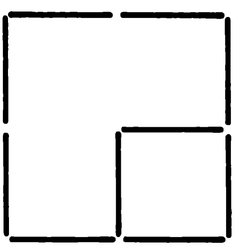
Der Großvater ist 72 Jahre alt.

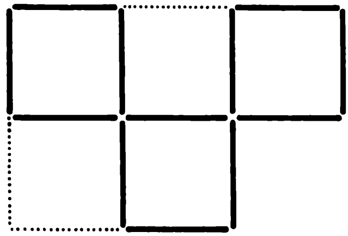
15. $333 : 3 = 111$ oder: $\left(\frac{x}{3} + 3\right) = 333$; $x = 324$

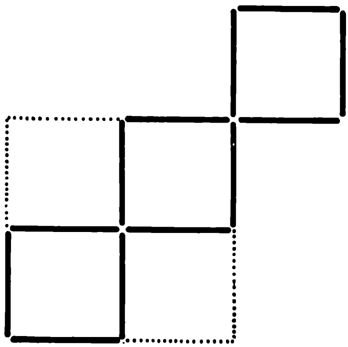
$111 - 3 = 108$
$108 \cdot 3 = 324$
Die gedachte Zahl heißt 324.

16.



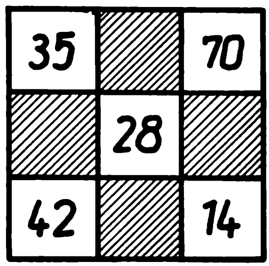




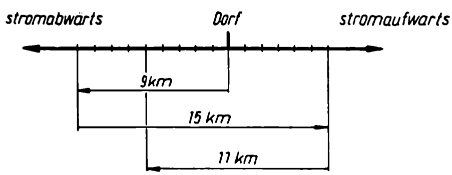


17.

$P = 56 : 4 = 14$
$H = 14 \cdot 3 = 42$
$M = 42 - 14 = 28$
$L = 28 + 42 = 70$
$K = 70 : 2 = 35$

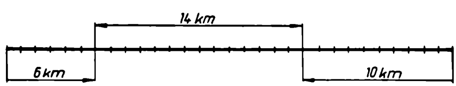


18.



Das Boot befindet sich 5 km stromabwärts vom Dorf.

19.



Die Entfernung der Boote beträgt 14 km.

20. $15 + 25 = 40$, denn $40 - 15 = 25$ und $40 - 25 = 15$
$18 \cdot 5 = 90$, denn $90 : 18 = 5$ und $90 : 5 = 18$

Klasse 4

1. Detlef spart für ein Fahrrad. Es soll 360,00 DM kosten. Als er gefragt wird, wieviel Geld ihm noch fehle, sagt er: „Wenn ich sechsmal soviel Geld hätte wie ich bereits habe, hätte ich genug."

   Frage: Wieviel Geld hat Detlef schon gespart?

2. Der erste Sputnik wog 83,600 kg. Der zweite Sputnik war 424,700 kg schwerer als der erste Sputnik. Und der dritte Sputnik war 813,700 kg schwerer als der zweite Sputnik.

   Frage: Wie schwer waren der zweite und der dritte Sputnik?

3. Uwe sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder."

   Frage: Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

4. Ein Betrieb hat zwei Autos vom Typ „Wartburg". Das eine Auto fuhr in einer Woche 600 km und das andere 900 km.

   Frage: Wieviel Liter Benzin brauchte jedes Auto, wenn das zweite, das 900 km fuhr, 27 Liter mehr verbrauchte als das erste?

5. Zeichne ein Rechteck, das 7 cm lang und 5 cm breit ist. Unterteile die Länge so, daß ein Quadrat und ein Rechteck entstehen.
   Das Quadrat zerlege in 4 kleine Quadrate.

   Frage: Wie lang sind die Seiten eines kleinen Quadrates?

6. **Frage:** Findest du heraus, wie die Zahlen heißen müssen? Bei dieser Aufgabe fehlen einige Ziffern.

$$\begin{array}{r} 3\ x\ 8 \\ +\ 2\ 3\ x \\ \hline x\ 0\ 2 \end{array}$$

7. Multipliziere! $2093 \cdot 63$

8. Ordne folgende Zahlen der Größe nach!
   (Beginne mit der größten Zahl!)
   80 472; 236 451; 2 364 510; 80 274

9. a) Wieviel Millimeter sind 53 cm?
   b) Wieviel Kilogramm sind 7 t?

10. Bilde aus $8 < 56$ Gleichungen, indem du ausgleichst
    a) durch Addition
    b) durch Subtraktion
    c) durch Multiplikation
    d) durch Division!

11. a) Zeichne ein Rechteck, das 36 mm breit und 48 mm lang ist!
    b) Zeichne in dieses Rechteck eine Diagonale (Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Rechtecks)!
    c) Miß diese Diagonale und gib ihre Länge an!

12. 30 Pioniere der Klasse 4 halfen der Paten-LPG beim Nachlesen der Kartoffeln. Je zwei Pioniere bekamen einen Korb. Jeder Korb faßte 12 kg Kartoffeln. Die Pioniere füllten jeden Korb dreimal.
    Wieviel Kilogramm Kartoffeln sammelten sie?

13. $(a + b) : c = x$. $a = 5432$; $b = 589$; $c = 3$
    Frage: Wie groß ist x?

14. Uwe bekam ein Buch geschenkt. Es ist 72 Seiten stark. Er las an 2 Tagen den 4. Teil des Buches. An jedem der 2 Tage las er gleichviel.

    Frage: Wieviel Seiten las er an einem Tag?

15. Für 3 Handtücher vom gleichen Preis bezahlt die Mutter 4,62 DM.

    Frage: Wieviel Mark würden 7 Handtücher dieser Sorte kosten?

16. Vermindere das Produkt der Zahlen 7 und 600 so, daß das Ergebnis 4000 ist.

    Frage: Wie groß ist der Subtrahend?

17. Zwei Pfefferkuchen und eine Praline kosten 10 Kopeken. Zwei Pralinen und ein Pfefferkuchen kosten 11 Kopeken. Wieviel kostet je eine Praline und ein Pfefferkuchen?

18. Auf einer Wiese weiden Gänse und Schafe. Alle zusammen haben 40 Köpfe und 96 Beine. Wieviel Gänse und Schafe weiden auf der Wiese?

19. Petja hat drei Tage am Bau eines Segelflugzeuges gearbeitet und insgesamt 9 Std. 40 Min. gebraucht. Am ersten Tag und am zweiten Tag hat er insgesamt 5 Std. 55 Min. gebaut. Zählt man die Zeit zusammen, die er am ersten und am dritten Tage gebaut hat, kommen 6 Std. 20 Min. zusammen. Wieviel Stunden hat Petja an jenem Tag gebaut?

20. Aus zwei Städten A und B, die 100 km auseinanderliegen, fuhren gleichzeitig zwei Radfahrer ab und sich entgegen. Der eine fuhr mit einer Geschwindigkeit von 12 km in der Stunde, der andere mit 13 km in der Stunde. Zusammen mit dem ersten Radfahrer lief ein Hund los, der in der Stunde 35 km zurücklegte. Nachdem dieser Hund den ersten Radfahrer hinter sich gelassen hatte, lief er dem zweiten Radfahrer entgegen. Als er ihm begegnete, lief er zum ersten zurück. So lief er vor und zurück, bis die Radfahrer einander begegneten. Wieviel Kilometer lief der Hund in dieser Zeit insgesamt?

21. Ein Schüler las am ersten Tag 28 Seiten, am zweiten Tag 22 Seiten, er hatte nun noch $^2/_3$ des ganzen Buches zu lesen. Wieviel Seiten enthielt das Buch?

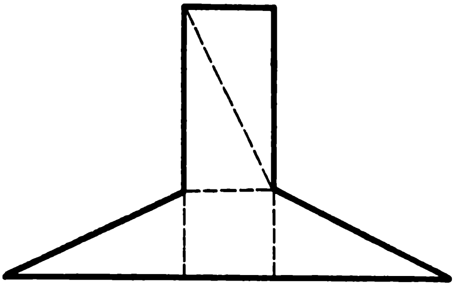
22. Auf zwei Büschen saßen 35 Stare. Nachdem vom ersten Busch 6 Stare, vom zweiten 9 Stare weggeflogen waren, saßen auf dem ersten Busch dreimal soviel Vögel wie auf dem zweiten. Wieviel Stare waren ursprünglich auf jedem Busch?

23. In drei Eisenbahnwagen waren 90 Fahrgäste. Wären aus dem ersten 12 Fahrgäste in den zweiten Wagen und aus dem zweiten Wagen 9 Fahrgäste in den dritten umgestiegen, dann wären in allen drei Wagen gleichviel Personen. Wieviel Fahrgäste waren ursprünglich in jedem Wagen?

24. Schneidet aus Papier ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von einem Quadratzentimeter aus! Schneidet daraus ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm! Zerschneidet den verbleibenden Teil so, daß ihr ein neues Quadrat daraus legen könnt! Ermittelt die Seitenlänge und den Flächeninhalt dieses Quadrates!

25. Zwei Bogen Karton von je 48 cm Länge und 44 cm Breite wurden von zwei Schülern in 16 cm lange und 12 cm breite Stücke zerschnitten. Der eine zerschnitt

seinen Bogen so, daß er 11 Stücke erhielt. Der andere erhielt 9 Stücke und noch einen Rest.
Fertigt eine Zeichnung an und zeigt daran, wie jeder Schüler den Karton zerschnitt!



26. Zerschneidet die Figur in 5 Teile und legt daraus ein Quadrat!

27. Zu ermitteln ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis einschließlich 19, wobei sie in der Weise zu ordnen sind, daß sich die Zahlen leicht addieren lassen.

28. Löst die folgenden Beispiele und sagt, was euch an den Ergebnissen auffällt, die ihr beim Lösen erhaltet!

$12 \cdot 9 + 3$	$9 \cdot 9 + 7$	$1 \cdot 8 + 1$
$123 \cdot 9 + 4$	$98 \cdot 9 + 6$	$12 \cdot 8 + 2$
$1\,234 \cdot 9 + 5$	$987 \cdot 9 + 5$	$123 \cdot 8 + 3$
$12\,345 \cdot 9 + 6$	$9\,876 \cdot 9 + 4$	$1\,234 \cdot 8 + 4$

Könnt ihr in einigen Beispielen das Ergebnis sofort hinschreiben?

29. Ergänzt in den folgenden Beispielen die Ziffern, die durch Sternchen ersetzt sind! Rechnet die Beispiele schriftlich in euren Heften!

a)
```
   4x7x
 + 76x3
 ------
   1x568
```
b)
```
   1x6x8
 − 5x5x
 ------
   6896
```
c) 63x · 7 = 4x38

d) 48x · x5 = xx35

e)
```
98x : 38 = x6
76
--
22x
xxx
===
```
f)
```
4042 : 8x = 4x
344
---
 602
 602
 ===
```

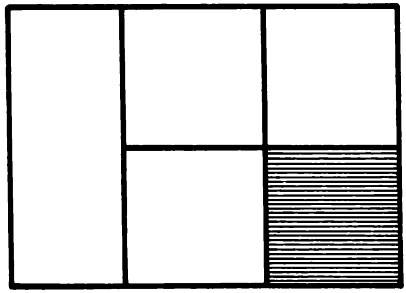
30. Denkt euch eine Zahl! Verdoppelt sie und addiert zu dem Ergebnis 3! Multipliziert die erhaltene Zahl mit 4 und subtrahiert von dem Produkt 12! Dividiert das Ergebnis durch die gedachte Zahl! Das Ergebnis heißt 8. Macht die Probe!

31. Denkt euch eine Zahl! Addiert dazu 5 und multipliziert die Summe mit 8! Addiert zu dem Ergebnis das Doppelte der gedachten Zahl! Dividiert die Summe durch 10 und subtrahiert von diesem Ergebnis die gedachte Zahl! Das Ergebnis muß 4 heißen. Macht die Probe!

32. Denkt euch eine Zahl! Verdreifacht sie und subtrahiert davon 2! Multipliziert die Differenz mit 5 und addiert zu dem Produkt 5! Was erhaltet ihr, wenn ihr durch 5 dividiert und zu dem Quotienten 1 addiert? Schließlich dividiert ihr die Summe durch die gedachte Zahl. Der Quotient muß 3 sein. Macht die Probe!

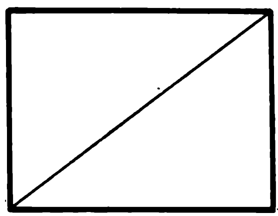
Lösungen:

1. Detlef hat 60,00 DM gespart.
2. Der zweite Sputnik wog 508,300 kg, der dritte Sputnik 1322 kg.
3. Uwe ist 9 Jahre, sein Bruder 11 Jahre und seine Mutter 40 Jahre alt.
4. Das erste Auto verbrauchte 54 l Benzin. Das zweite Auto verbrauchte 81 l Benzin.
5.



Die Seiten des Quadrats sind 2,5 cm lang.

6.
```
  368
+ 234
-----
  602
```
7. 131 859
8. 2 364 510; 236 451; 80 472; 80 274
9. a) 530 mm
   b) 7000 kg
10. $48 + 8 = 56$
    $8 = 56 - 48$
    $7 \cdot 8 = 56$
    $8 = 56 : 7$
11.



Die Länge der Diagonale beträgt 60 mm.

12. 540 kg
13. $x = 2007$
14. Uwe las an einem Tag 9 Seiten des Buches.
15. 7 Handtücher würden 10,78 DM kosten.
16. Der Subtrahend ist 200.
17. $2x + y = 10$
    $2y + x = 11$
    $x = 3$ 1 Pfefferkuchen kostet 3 Kopeken,
    $y = 4$ 1 Praline kostet 4 Kopeken.
18. $x + y = 40$
    $2x + 4y = 96$
    $x = 32$ Es weiden 32 Gänse und 8 Schafe
    $y = 8$ auf der Wiese.

19. Petja arbeitete

am 1., 2. u. 3. Tag	9 Std. u. 40 Min. = 580 Min.
— am 1. u. 2. Tag	5 Std. u. 55 Min. = 355 Min.
verbleiben für den 3. Tag	225 Min.
am 1. u. 3. Tag	6 Std. u. 20 Min. = 380 Min.
— am 3. Tag	3 Std. u. 45 Min. = 225 Min.
verbleiben für den 1. Tag	155 Min.
am 1. u. 2. Tag	5 Std. u. 55 Min. = 355 Min.
— am 1. Tag	2 Std. u. 35 Min. = 155 Min.
verbleiben für den 2. Tag	200 Min.

Die Probe ergibt

225 Min. + 155 Min. + 200 Min. = 580 Min.

580 Min. = 9 Std. u. 40 Min.

20. 100 : (12 + 13) = 4, d. h. in 4 Stunden treffen die Radfahrer aufeinander.
Auch der Hund läuft während dieser Zeit von einem Radfahrer zum anderen:
$35 \cdot 4 = 140$, d. h. der Hund lief in diesen 4 Stunden insgesamt 140 km.

21. Da (28 + 22) = 50 Seiten $^1/_3$ des Buches sind, hat das ganze Buch (d. s. $^3/_3$) 150 Seiten.

22. Wir bilden eine Reihe:

1. Busch	2. Busch	
$23 - 6 = 17$	$12 - 9 = 3$	$\frac{17}{3} > 3$
$22 - 6 = 16$	$13 - 9 = 4$	$\frac{16}{3} > 4$
$21 - 6 = 15$	$14 - 9 = 5$	$\frac{15}{3} = 5$
$20 - 6 = 14$	$15 - 9 = 6$	$\frac{14}{3} < 6$

oder: $x + y = 35$

$(x - 6) = (y - 9) \cdot 3$

$x = 21$

$y = 14$

Auf jedem Busch waren ursprünglich 21 bzw. 14 Stare.

23. $x + y + z = 90$

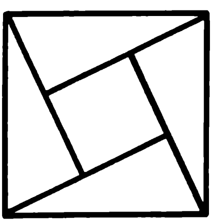
$x - 12 = 30, \quad x = 42$

$y + 12 - 9 = 30, \quad y = 27$

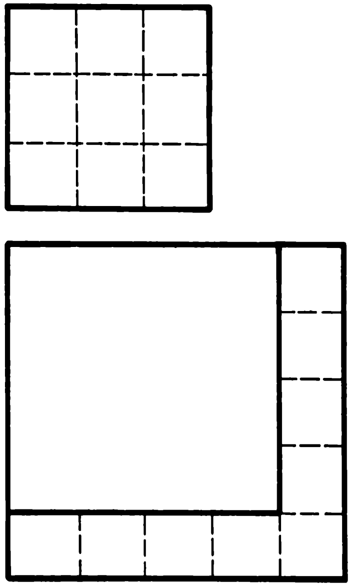
$z + 9 = 30, \quad z = 21$

das sind zusammen 90 Fahrgäste, d. h.
im 1. Wagen befanden sich 42 Fahrgäste,
im 2. Wagen befanden sich 27 Fahrgäste und
im 3. Wagen befanden sich 21 Fahrgäste.

24.



25.



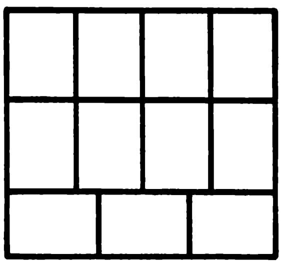
$10\ cm^2 \cdot 10 = 100\ cm^2$

$-\ 8\ cm^2 \cdot 8 = 64\ cm^2$

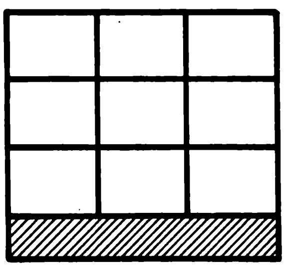
$36\ cm^2$ verbleiben für den Rest.

Der Rest wird in 9 Quadrate zerschnitten und, wie die Abbildung zeigt, zu einem neuen Quadrat zusammengesetzt.

26.



Der Schüler erhält 11 Stück Zuschnitte ohne Abfall.



Der Schüler erhält 9 Stück Zuschnitte und Abfall.

27. $1 + 19 = 20$
$3 + 17 = 20$
$5 + 15 = 20$
$7 + 13 = 20$
$9 + 11 = 20$
$\overline{100}$

28.

111	88	9
1111	888	98
11111	8888	987
111111	88888	9876
usw.	usw.	usw.

29. a) $4875 + 7693 = 12568$ b) $12638 - 5742 = 6896$ c) $634 \cdot 7 = 4438$

d) $489 \cdot 15 = 7335$

e) $988 : 38 = 26$
76
228
228

f) $4042 : 86 = 47$
344
602
602

30. Da das 8fache der gedachten Zahl wieder durch die gedachte Zahl zu dividieren ist, und die hinzugefügte 12 wieder substrahiert wird, verbleiben 8 als Rest. Das ist das Ergebnis.

$$\frac{(2x + 3) \cdot 4 - 12}{x} = 8$$

31. Insgesamt wurde die gedachte Zahl verzehnfacht. Außerdem wurden insgesamt 40 addiert. Da schließlich durch 10 dividiert wurde, hebt sich die gedachte Zahl auf, als Rest verbleiben 4, und das ist das Ergebnis.

$$\frac{(x + 5) \cdot 8 + 2x}{10} - x = 4$$

32. Die gedachte Zahl wurde insgesamt 15fach in die Aufgabe gebracht. Nach Division durch 5 verbleibt sie noch 3fach übrig. Bei der letzten Division durch die gedachte Zahl verbleiben somit 3 als Ergebnis. Die übrigen Zahlen heben sich auf.

$$\left[\frac{\frac{(3x - 2) \cdot 5 + 5}{5}}{} + 1\right] : x = 3$$

Raum für weitere Aufgaben

Zur Beachtung:

Bei den Aufgaben konnte nur einer der Lösungswege angedeutet werden, z. T. wurden nur Endergebnisse genannt. Zu einzelnen Aufgaben fehlen die Lösungen. Die Herausgabe dieses Lesebogens sollte nicht weiter verzögert werden. Für die Einsendung von Lösungen ist das PKK Leipzig jederzeit dankbar.
Aus drucktechnischen Gründen wurde der Bruchstrich teilweise schräg gesetzt, über den Strecken fehlen z. T. die Striche, bei einzelnen Aufgaben wurden die Begriffe Masse und Gewicht nicht unterschieden, p/cm[1] statt $p \cdot cm^{-1}$ oder km/h statt $km \cdot h^{-1}$ geschrieben.
Die Herausgeber haben die Aufgaben original übernommen. Das entspricht dem Wesen einer Dokumentation. Dem Leser bleibt es überlassen, die Aufgaben im Sinne der Moternisierung des Mathematikunterrichts entsprechend abzuändern.

Klasse 5

1. Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet. Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

2. Nimm eine dreistellige Zahl — allerdings mit der Einschränkung, daß die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen —, setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

3. Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4. Wie heißt die gedachte Zahl?

4. Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14 076 und 1 009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

5. Wieviel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kantenlänge unterbringen?

6. Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, daß an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1 757 000 t, im Jahre 1960 aber 4 158 000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
Wieviel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

7. Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang. Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.
   a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
   b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

8. Ersetze die fehlenden Ziffern!

```
• • • . • 2
  • 08
• 6 •
• 12 •
```

Wie hast Du die fehlenden Ziffern gefunden?

9. Im Jahre 1961 wurden in der DDR 70 000 t Schlachtvieh und Geflügel, 115 000 t Milch und 300 000 000 Eier mehr auf den Markt gebracht als im Jahre 1960. Die Einwohnerzahl unserer Republik beträgt rund 17 000 000.
Wieviel Schlachtvieh und Geflügel, wieviel Milch und wieviel Eier konnte jeder Bürger unserer Republik im Jahre 1961 zusätzlich verbrauchen? Runde auf volle Kilogramm bzw. volle Stückzahlen!

10. Bei einem Probeflug von Moskau zur sowjetischen Südpolar-Beobachtungsstation Mirny über insgesamt 25 300 km legte ein Flugzeug vom Typ „IL 18" die letzten 6 700 km in zwei Etappen zurück. Dabei war die erste Etappe um rund 1 700 km länger als die zweite. Wieviel Kilometer betrugen die beiden Etappen?

11. Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mußten etwa 7100 m^3 Boden abtransportiert werden:
   a) Wieviel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4 m^3 Boden tranportieren kann?
   b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug" gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3 m hat?

12. „Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen", sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

13. Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legte in jeder Stunde 4 km zurück. Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.
Wann muß sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

14. Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich. Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

```
4 • •  .  • 2 •
    • 3 • •
        • 1 2
        • • 4 •
    • • • • • 8
```

15. Während der Herbstferien waren viele Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.
   a) Wieviel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes ingesamt gesammelt? (Angabe in dt).
   b) Wieviel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg beträgt?

16. Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft" wird etwa 4000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.
   a) Wieviel Tonnen sind das in einer Minute?
   b) Wieviel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

17. Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich. Wieviel Kleinstroller wurden im Jahre 1963 mehr produziert als im Jahre 1958?
Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

18. Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100."
   a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
   b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

19. Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff „Wostok 6“ rund 48mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.
Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

20. In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.
    a) Wieviel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich — 26 Arbeitstage — angefertigt?
    b) Wieviel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

21. Im VEB Normdrehteile Hildburghausen stehen drei Drehmaschinen, die unter Aufsicht eines Facharbeiters selbst Schrauben herstellen. Jede stellt in der Stunde 58 Schrauben her. Die erste arbeitet 4 Tage lang 8 Stunden täglich, die zweite 6 Tage lang 11 Stunden täglich und die dritte 2 Tage lang ununterbrochen Tag und Nacht. Wieviel Schrauben werden insgesamt hergestellt?

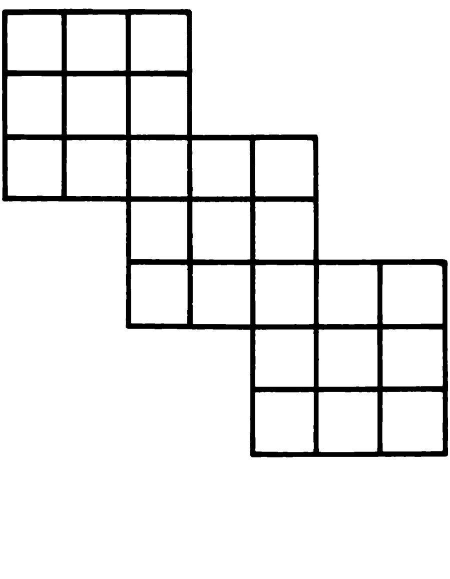
22. Eine Klasse hat im letzten Schuljahr 683,20 DM für die Ferienwanderungen gespart. Es bilden sich drei Wandergruppen, eine zu 8, eine zu 11 und eine zu 13 Schülern. Verteile das Geld gerecht auf die drei Gruppen!

23. 1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf. Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

24. Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: ****—***=1

25. Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen. Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM. Wo ist die restliche Mark?

26. Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, daß die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!



27. Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, daß jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.
Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

28. Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60$ cm und der Breite $b = 15$ cm sollen 12 kleine Brettchen von der Größe 5 cm mal 15 cm ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen. Wieviel Schnitte muß er mindestens durchführen?
(Das Sägen „im Paket“ soll dabei nicht gestattet sein.)
Wieviel Zentimeter beträgt der Sägeweg?

29. An einem Tische sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.
    a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
    b) Warum muß er so heißen?

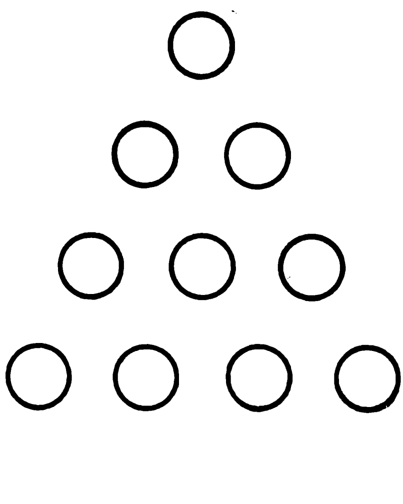
30. Petra spielt mit Werner eine Partie Schach. Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“ Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, daß die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“ (Die Bahn fährt alle 20 Minuten). Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

31. Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht:
Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

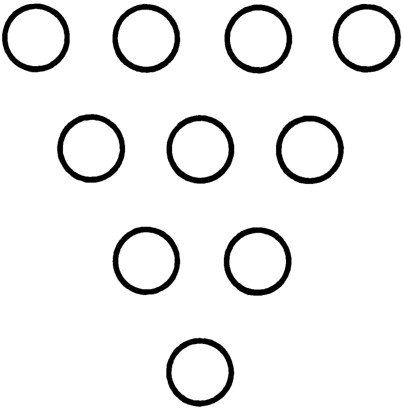
13* · 7* = 1****

alle * so durch Ziffern ersetzt werden, daß alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und daß beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle. Was hast du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

32. Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, die die Abb. zeigt.



Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, daß die auf der Abb. dargestellte Anordnung entsteht.



a) Wieviel Pfennige muß man mindestens umlegen?

b) Welche Pfennige sind das? Kreuze sie an!

33. Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:
Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel. Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!

b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

34. Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wieviel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz: „Jeder von uns hat eine ungerade Zahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück."
Was meinst du zu dieser Behauptung?

35. Ergänze die fehlenden Zahlen des vorliegenden Quadrates! Sie sind Glieder von Zahlenfolgen!

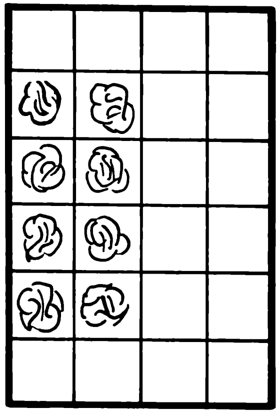
2		8		14
	8			20
	11	16		
10		24		

36. Klaus, Ingrid. Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe deine Antwort!

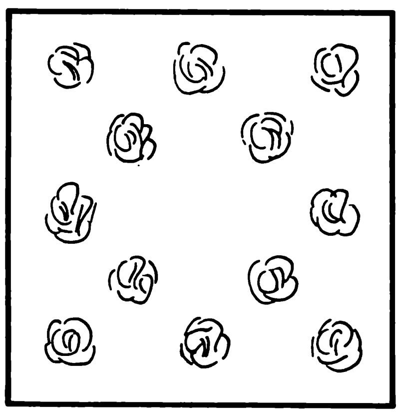
b) Wieviel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

37. Vier Geschwister haben sich gemeinsam ein Gartengrundstück gekauft, in dem 8 große Obstbäume stehen, die nicht verpflanzt werden können (siehe beigefügte Figur). Sie wollen das Grundstück so aufteilen, daß jeder ein Stück von gleicher Größe und zwei Bäume erhält. Wie müssen sie das Grundstück einteilen?

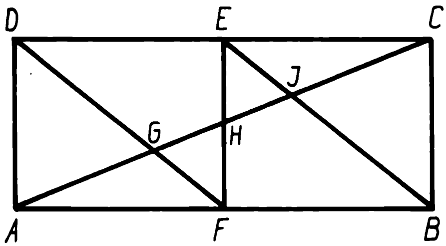


38. Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm! Schraffiere davon $^4/_9$ (vier Neuntel)!

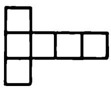
39. In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt. Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, daß auf jedem Stück drei Bäume stehen.



40. Wieviel Dreiecke sind in der Figur enthalten? Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!



44. Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen. Versuche, 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge a = 2 cm)!

42. Zeichne ein beliebiges Dreieck und nenne seine Winkel

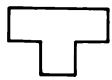
α, β und γ!

Konstruiere mit Zirkel und Lineal außerhalb des Dreiecks den Winkel

$\alpha + \beta + \gamma$!

Wie groß ist der konstruierte Winkel vermutlich?

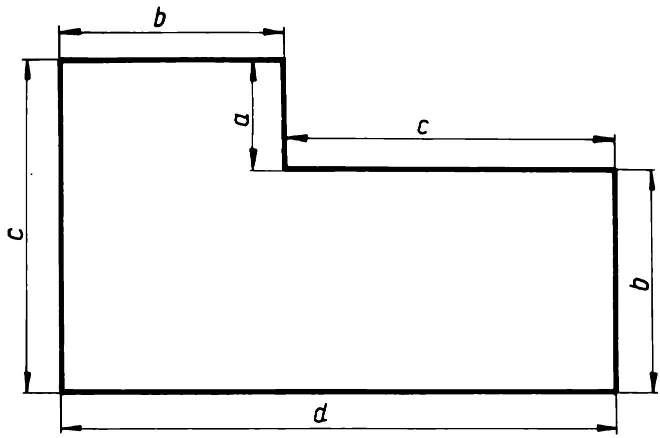
43. Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, daß die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?
(Es ist gut, wenn man sich eine entsprechende Figur aus Papier ausschneidet und es damit versucht.)

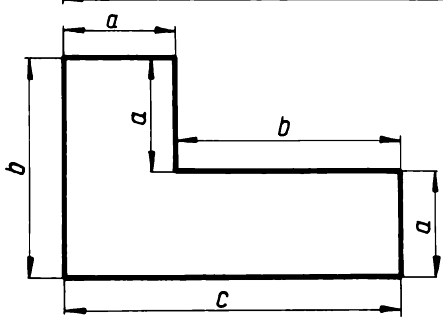


44. Die Abbildung zeigt zwei verschieden große Flächen.

a) Wie oft ist die kleine Fläche in der großen enthalten?

b) Weise die Richtigkeit dieser Behauptung durch eine Zeichnung nach!

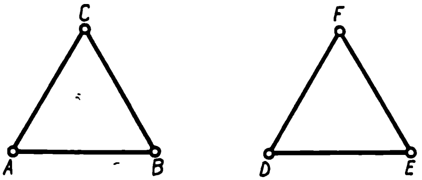




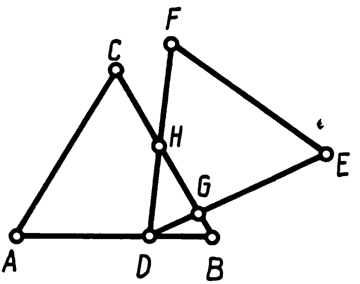
a = 2 cm
b = 4 cm
c = 6 cm
d = 10 cm

45. Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken AB = 3 cm, BC = 5 cm und CD = 4 cm ab! Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe deine Antwort durch Rechnung!

46. Gegeben seien die beiden abgebildeten Dreiecke.



Sie haben dabei keinen Punkt gemeinsam. Wenn sie dagegen so liegen wie auf der folgenden Abbildung, haben sie genau drei Punkte, nämlich D, G und H, gemeinsam.



Wie können die Dreiecke liegen, wenn sie genau
a) einen Punkt
b) zwei Punkte
c) vier Punkte
d) fünf Punkte
e) sechs Punkte
gemeinsam haben sollen?
Zeichne die Dreiecke in diesen verschiedenen Lagen!

47. Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen
a = 3 cm (Länge)
b = 2 cm (Breite)
c = 1 cm (Höhe)!

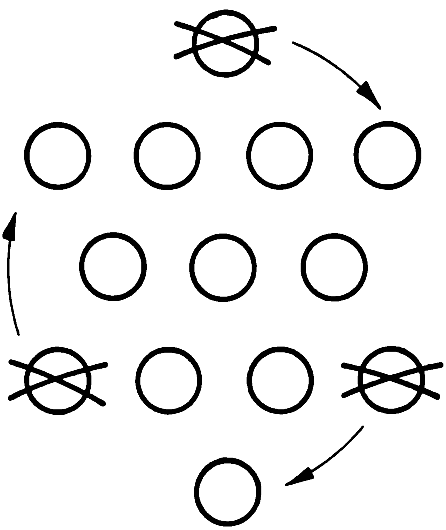
Lösungen:

1. $3844\ \text{m}^2 \approx 0{,}38$ ha
2. $$\begin{array}{rrl} 452 \text{ oder} & 691 & \\ -\ 254 & -\ 196 & \\ \hline 198 & 495 & \\ +\ 891 & +\ 594 & \\ \hline 1089 & 1089 & \text{als wiederkehrendes Ergebnis} \end{array}$$
3. $(4 + 22 \cdot 9 + 8) : 7 - 16 = 14$
4. $3\,(14076 + 1009) + 2\,(8072 + 496) = 62\,391$
5. $1\,000\,000\ \text{cm}^3 : 0{,}2\ \text{cm}^3 = 5\,000\,000$ Stück
6. 2 401 000 t
7. a) 28 mm b) 10 mm
8. $$\begin{array}{l} 254 \cdot 32 \\ \hline 508 \\ \ \ 762 \\ \hline 8128 \end{array}$$
9. Rund 4 kg Schlachtvieh und Geflügel,
rund 7 kg Milch,
rund 18 Eier.
10. 4 200 km und 2 500 km
11. a) 1775 Muldenkipperladungen
b) 5325 m (= 5,325 km)
12. 1 209 600 s = 20 160 min = 336 h = 14 Tage
Das Treffen findet am 24. Mai um 12.00 Uhr statt.
13. Die zweite Gruppe muß um 10.00 Uhr aufbrechen, da sie in einer Stunde die gleiche Strecke zurücklegt, für die die erste Gruppe 3 Stunden benötigt.
14. $$\begin{array}{r} 456 \cdot 328 \\ \hline 1368 \\ 912 \\ 3648 \\ \hline 149568 \end{array}$$
15. a) 38 400 dt Kartoffeln
b) 15 360 Familien
16. a) 9 t Erdöl in einer Minute
b) 150 kg Erdöl in einer Sekunde
17. 57 900 Kleinstroller wurden 1963 mehr produziert als 1958.
18. a) Der Pionier erzielte 35 Punkte.
b) z. B.: „Die doppelte Summe war 100 — 10, also 90, mithin betrug die Summe 45 . . .“
19. 70 Stunden 24 Minuten.
20. a) 364 Stück
b) 312 Stück
21. $58\,(4 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + 2 \cdot 24) = 8468$
22. 1. Gruppe 170,80 DM
2. Gruppe 234,85 DM
3. Gruppe 277,55 DM
23. . . . 26; 27; 29; 34;
37; 38; 40; 45;
48; 49; 51; 56 . . .
24. $1000 - 999 = 1$
Andere Zahlen erfüllen die Stellenwerte nicht.
25. Jeder Gast hatte $(30 - 5) : 3 = 8\frac{1}{3}$ DM zu bezahlen, zahlte jedoch $(30 - 3) : 3 = 9$ DM, also $\frac{2}{3}$ DM zuviel. $\frac{2}{3}$ DM $\cdot\ 3 = 2$ DM, die der Ober für sich behielt. Die Bezugnahme auf die restliche 1 DM ist eine Irreführung.

26.

7	8	3				
6	8	4				
5	2	6	4	1		
		3	9	6		
		2	5	4	6	1
				6	3	9
				1	9	8

27. Da die Summe zweier ungerader Zahlen gerade, die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl stets ungerade ist, kann die gerade Zahl 30 nicht in 3 ungerade Summanden zerlegt werden.
28. Lutz braucht in jedem Falle mindestens 11 Schnitte, gleichgültig, wie er die Schnitte führt. Der Sägeweg beträgt stets 165 cm.
29. a) Lutz Schulz
    b) Es gibt vier Schüler, die mit Vornamen Lutz, aber nur drei Schüler, die mit Zunamen **nicht** Schulz heißen.
30. 180 Minuten = 3 Stunden
31. 136 · 76 = 10 336
    z. B.: „Die letzte Ziffer kann nur 0 oder 1 oder 5 oder 6 heißen, da nur bei diesen das Ergebnis wieder auf 0 bzw. 1 bzw. 5 bzw. 6 endet. Durch Probieren findet man dann die Lösung . . .“

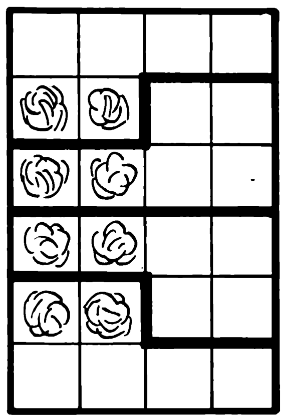


32. a) Drei Pfennige
    b) Siehe Abbildung links unten.
33. a) Inge, Bärbel, Doris, Renate, Marga
    b) Der erste, vierte, fünfte, siebente, achte und neunte Vergleich sind überflüssig, da man die richtige Reihenfolge eindeutig aus den übrigen erhält.
34. Die Behauptung stimmt nicht, da die Summe aus zwei ungeraden Zahlen eine gerade Zahl und die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl stets eine ungerade Zahl ist. 500 ist aber eine gerade Zahl.
35. a) Es gibt 24 Möglichkeiten.
    b) Es gäbe 120 Möglichkeiten.

36.

2	5	8	11	14
4	8	12	16	20
6	11	16	21	26
8	14	20	26	32
10	17	24	31	38

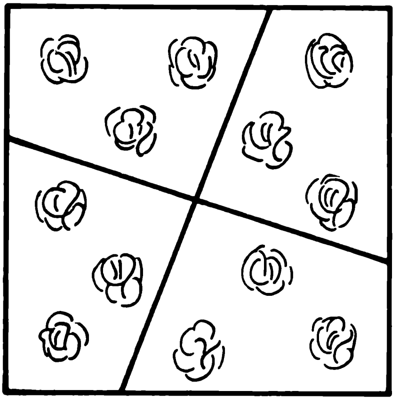
37.



38.

$\frac{4}{9} \triangleq 16\ \text{cm}^2$

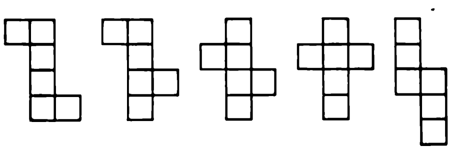
39.



40. 16 Dreiecke

ABC	BEF	CJE	DFE	EHJ	FGM
ADC	BEC	CHE			
AHF	BJC	CGD			
AJB					
AGF					
AFD					
ADG					

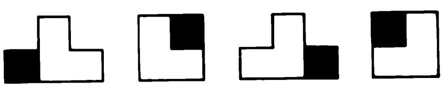
41.



42.

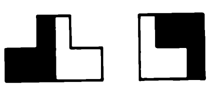
$\alpha+\beta+\gamma$ vermutlich gleich 180°.

43.



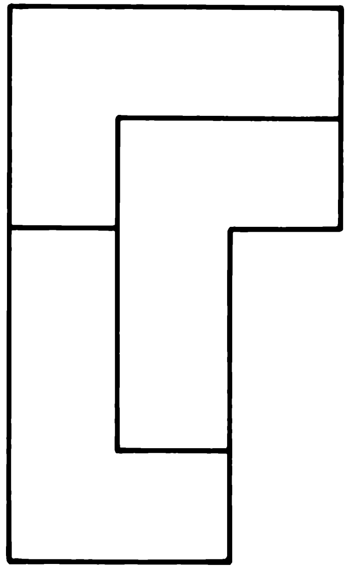
a

oder

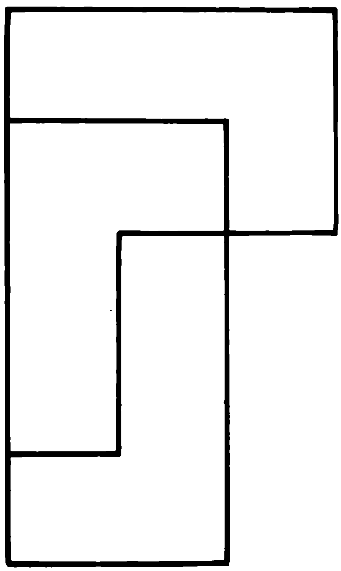


b

44.

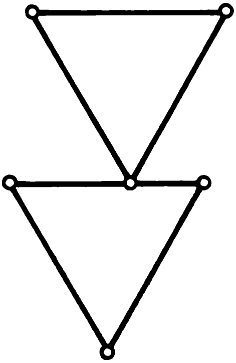


oder

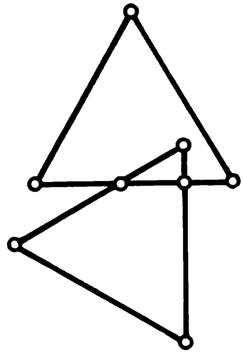


45. Die Entfernung beträgt 8,5 cm.

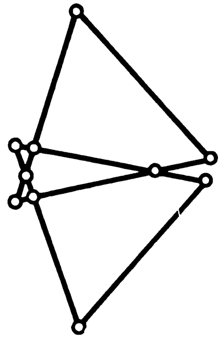
46. a)



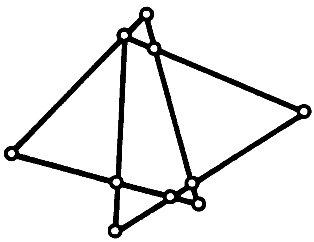
b)



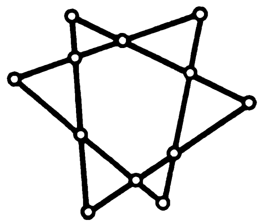
c)



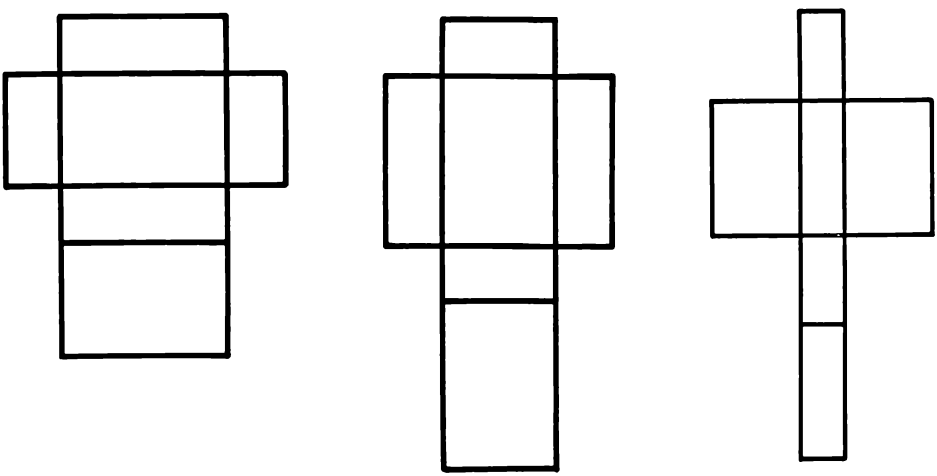
d)



e)



47.



Klasse 6

1. Vor dem Zusammenschluß landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG mußte eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor. Nach dem Zusammenschluß konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.
   a) Wieviel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
   b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren. Ziehe die Schlußfolgerung!

2. Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten. Sie beschließen, daß die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten. Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

3. Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt. Wieviel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

4. Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

5. Wieviel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

6. Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $^7/_9$ und kleiner als $^8/_9$ ist?

7.
   a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$ b) $3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49}$

8. Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12 500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war.
   Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

9. Ein „Trabant" fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17 880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18 030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.
   a) Wieviel Kilometer hat der „Trabant" zurückgelegt?
   b) Wieviel Liter Treibstoff muß der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

10. Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein?
    Begründe die Antwort!

11. Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau—Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ „AN-10" und „IL 18" Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean. Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25 300 km in 48 Std. und 7 Min., die IL-18 in 44 Std. und 36 Min. zurück.
    Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

12. Eine Expedition legte am ersten Tage $^2/_5$ des Weges, am zweiten Tage $^1/_3$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.
    a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
    b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

13. Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.
    Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15 000 dt Kartoffeln geerntet. $^1/_5$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $^1/_3$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern."
    Wieviel Dezitonnen Kartoffeln ernteten
    a) die Schüler?
    b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?
    c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

14. Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.
    a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?
    b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden.
    Wie groß ist dabei die Einsparung?

15. Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).
    a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?
    b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?
    Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

16. Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, daß der Bohrer bei jeder Umdrehung $^1/_4$ mm tief in das Werkstück eindringt. Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
    In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

17. Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.
    a) Wieviel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?
    b) Wieviel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

18. Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager. Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mußten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus?
(Wieviel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

19. Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.
a) Zeige, daß unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

20. Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300 000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher
a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?
Begründe deine Antwort.

21. Eine Verkäuferin verkauft von einem Stoffballen nacheinander $2\frac{1}{2}$ m, $4\frac{1}{4}$ m und $3\frac{2}{5}$ m Stoff. Auf dem Stoffballen waren vor dem Verkauf 19 m Stoff.
a) Wieviel m Stoff verkaufte sie?
b) Wieviel m Stoff waren nach dem Verkauf noch auf dem Ballen?

22. Wieviel Weinflaschen können aus einem Tank von 5 hl Fassungsvermögen abgefüllt werden? (1 Flasche $\triangleq$ 700 ml)

23. Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnungsaufgabe so flüchtig hingeschrieben, daß er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann. Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen ? ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

```
? ? 5 ? ? : ? 9 = ???
1 ? ?
 ‾‾‾‾‾
 1 0 ?
   ? 7
 ‾‾‾‾‾
   2 ? 3
   ? ? ?
   ‾‾‾‾‾
```

24. Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4. Wie heißt die gedachte Zahl?

25. Wieviel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?
Wie hast Du die Anzahl ermittelt?

26. Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km." Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km." Robert sagt: „Einer von beiden hat recht."
Nun wissen wir, daß Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

27. Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden."
Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

28. Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.
Wie heißt der Ingenieur?
Wie heißt der Elektriker?
Wie heißt der Monteur?
Die Lösung ist zu begründen!

29. Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$mal so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.
a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, daß es nur eine solche Zahl gibt!

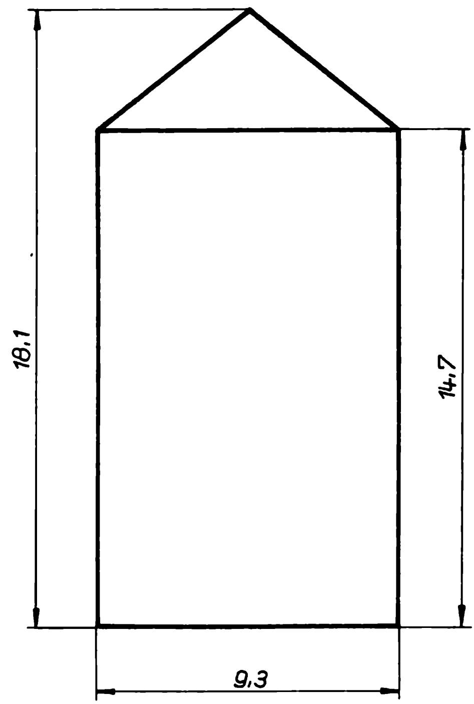
30. Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt: „Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater."
Wie alt ist Brigitte?
Wie alt sind ihre Eltern?
Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

31. Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater: „Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist."
Wieso weiß Peter das?

32. Ein Winkel von 7,5° wird durch eine Lupe mit fünffacher Vergrößerung betrachtet.
Mit wieviel Grad wird der Winkel unter der Lupe erscheinen?

33. Konstruiere ein Dreieck aus:
$a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$!
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel!
Miß die anderen Stücke!

34. In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM. Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung (siehe nächste Seite oben) und die Kosten für 1 m² Kalkanstrich!



35. Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet! Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

36. Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, daß 27 kleinere Würfel entstehen. Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben. Wieviel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

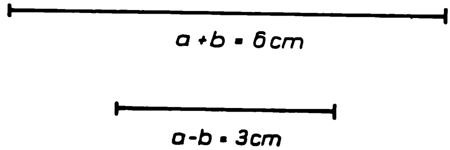
37. Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden. Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe Deine Antwort!

38. Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P! Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, daß PX = AX ist! Begründe die Konstruktion!

39. In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, daß genau
   a) kein Schnittpunkt
   b) 1 Schnittpunkt
   c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten)
   d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten)
   e) 5 Schnittpunkte
   f) 6 Schnittpunkte entstehen!

   Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

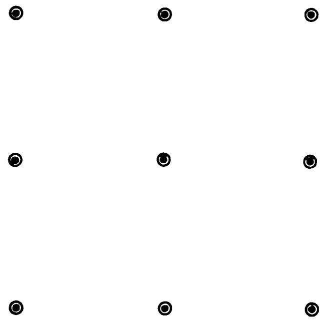
40. Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz.



Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

41. Zeichne eine Strecke AB = 5 cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an! Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:
   Verbindet man P und B, dann soll
   $\sphericalangle ABP = \sphericalangle APB$ sein.
   Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

42. a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt:



   Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, daß auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!

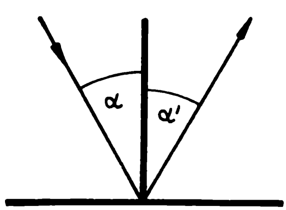
   b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, daß man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen. Fertige auch dazu eine Zeichnung an!

43. Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen

a = 36 mm	f = 16 mm
b = 30 mm	g = 14 mm
c = 28 mm	h = 8 mm
d = 20 mm	i = 2 mm
e = 18 mm	

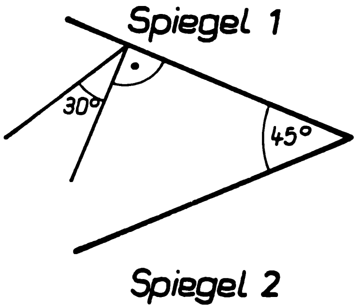
   Füge diese Quadrate so zusammen, daß sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

44.



Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, daß der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind.

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!



b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

45. Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung. Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

46. Wieviel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden. (Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch **ein** Streichholz getrennt werden.)

47. Drei Pionierfreundschaften aus den Orten A, B, und C machen eine Sternwanderung. Von den Orten A bis B sind es 6 km, von B bis C 8 km und A bis C 7 km kürzeste Wegstrecke.

a) Konstruiere den Treffpunkt im Maßstab 1:100 000 (1km $\triangleq$ 1cm)
Alle Pioniergruppen sollen den gleichlangen Anmarschweg bis zum Treffpunkt haben!

b) Wie lang ist der Anmarschweg aller Pioniere bis zum Treffpunkt?

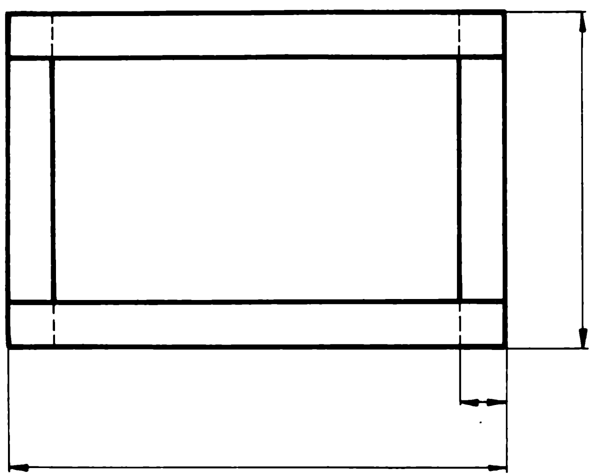
48. Zeichne den Grundriß eines Quaders mit 4,3 cm Breite, 3,9 cm Höhe und 2,6 cm Länge!

a) Der Quader steht mit seiner größten Fläche auf der Grundrißtafel.

b) Der Quader steht mit seiner kleinsten Fläche auf der Grundrißtafel.

c) Berechne Rauminhalt und Oberfläche des Quaders!

49. Der in der Figur dargestellte Rahmen soll im Werkunterricht hergestellt werden. Berechne, wieviel Meter Rahmenleiste für 25 solcher Rahmen notwendig sind!



Maßstab 1:10

Lösungen:

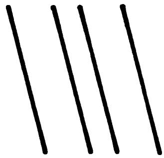
1. a) $\approx 0{,}6$ ha
   b) $\approx$ 3 ha
2. Am 60. Tag, d. h. am 30. August.
3. ≈ 2200 Platten.
4. Ja, denn die **kleinste** Primzahlenpotenz des g. g. T. ist immer in der **größten** Primzahlenpotenz des k. g. V. enthalten.
5. 50
6. $^5/_6$
7. a) $9\frac{1}{5}$ b) $583\frac{41}{245}$
8. Der Radius würde 2 mm betragen.
9. a) 150 km
   b) $24\frac{1}{2}$ l
10. Die vier Zahlen bestehen stets aus zwei geraden und zwei ungeraden Zahlen.
    Die Summe zweier gerader und auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl, also keine Primzahl.
11. AN-10: $25\,300 : 2\,887 \approx 8{,}763$
    etwa 526 km
    IL-18: $25\,300 : 2\,676 \approx 9{,}454$
    etwa 567 km
12. a) 1000 km entsprechen $^4/_{15}$ des Weges.
    1500 km am ersten, 1250 km am zweiten Tag.
    b) 3750 km
13. a) 3000 dt Kartoffeln
    b) 5000 dt Kartoffeln
    c) 7000 dt Kartoffeln
14. a) 144 DM
    b) 199,20 DM
15. a) Rund 28 000 km
    b) Rund 7,8 km
16. In 30 Sekunden
17. a) Im Jahre 1962 wurden 20 Milliarden DM für die angegebenen Zwecke ausgegeben.
    b) Im Jahre 1958 waren es 882 DM, das sind rund 900 DM, im Jahre 1962 dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.
18. Der Bus benötigte für $\frac{9}{10}$ des Weges $\frac{1}{2}$ Stunde.
    Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, fuhr der Bus 18 km.
    Also legte er in einer Stunde 36 km zurück.
19. a) Da in der Folge der natürlichen Zahlen jede zweite Zahl gerade ist, muß bei drei Zahlen wenigstens eine Zahl durch 2 teilbar sein.
    b) Da außerdem in der gleichen Folge jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist, ist stets genau eine solche Zahl bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen zu finden. Mithin kommen 2 und 3 als Primfaktoren in mindestens einer dieser Zahlen vor.
20. Da die Schallwellen für eine Strecke von 2 m rund $\frac{1}{170}$ Sekunde benötigen, die Rundfunkwellen aber für 1000 km nur $\frac{1}{300}$ Sekunde brauchen, hört der Rundfunkhörer den Redner etwas früher.
21. a) $10\frac{3}{20}\,\text{m} = 10{,}15$ m
    b) $8\frac{17}{20}\,\text{m} = 8{,}85$ m
22. Etwa 714 Flaschen.
23.
$$\begin{array}{l} 15573 : 29 = 537 \\ \underline{145} \\ \;\;107 \\ \;\;\underline{\;87} \\ \;\;\;203 \\ \;\;\;\underline{203} \\ \;\;\;\;\;= \end{array}$$
24. $(4 + 22 \cdot 9 + 8) : 7 - 16 = 14$
25. Jede Station braucht 14 verschiedene Fahrkarten. Insgesamt werden daher 15 · 14 Fahrkarten = 210 Fahrkarten benötigt.
26. Da Robert eine falsche Aussage gemacht hat, ist die Entfernung weder größer als 5 km noch kleiner als 5 km. Daraus folgt, daß die Entfernung genau 5 km beträgt.
27. Paul ist 8 Jahre alt, da
    Mutter: 40 Jahre
    Vater: $(40 + 5)$ Jahre
    Lotte: $\frac{45}{3}$ Jahre
    Emil: $(15 - 4)$ Jahre
    Paul: $(11 - 3)$ Jahre
28. Der Ingenieur heißt Eichler, der Elektriker heißt Baumann und der Monteur heißt Hahn.
    Begründung: Aus b und d folgt, daß Herr Hahn weder Elektriker noch Ingenieur ist. Er ist also Monteur ... usw.
29. 18, da $81 = 4\frac{1}{2} \cdot 18$
30. Lösung z. B. durch systematisches Probieren:
    $10 + 30 + 34 = 74,$
    $12 + 36 + 40 = 88.$
    Alle Zahlen müssen gerade sein.......
    Oder:
    Beide Eltern sind zusammen sechsmal so alt und noch 4 Jahre älter als Brigitte. Also beträgt das Siebenfache des Alters von Brigitte 84 Jahre. Mithin ist Brigitte 12 Jahre alt......
31. a) Peter nimmt eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand. Dann bleibt bei ihm eine gerade Anzahl übrig. Sagt der Vater jetzt: „gerade", so bleibt bei ihm ebenfalls eine gerade Anzahl übrig. Die Anzahl der insgesamt übriggebliebenen Hölzer ist aber (als Summe zweier gerader Zahlen) gerade. Sagt der Vater: „ungerade", dann bleibt bei ihm eine ungerade Anzahl übrig, und die Anzahl aller übriggebliebenen Streichhölzer ist (als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl) ungerade.
    b) Peter nimmt eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand. Dann muß er, wie eine entsprechende Überlegung zeigt, stets das Gegenteil wie sein Vater sagen.
32. Unverändert 7,5°.
33. $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm
34. $\approx 152{,}5\ \text{m}^2$; $\approx 0{,}86$ DM
35.

36. 8 Würfel mit 3 schwarzen Seitenflächen
12 Würfel mit 2 schwarzen Seitenflächen
6 Würfel mit 1 schwarzen Seitenfläche
1 Würfel ohne schwarze Seitenfläche
27
Kantenlänge 4 cm.

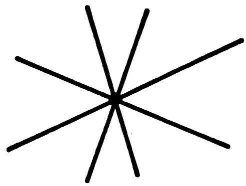
37. Beide Nebenwinkel sind zusammen 180° groß. Daher beträgt die Summe ihrer Hälften die Hälfte davon, nämlich 90°.

38. X liegt auf der Symmetrieachse zu AP.

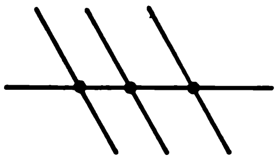
a



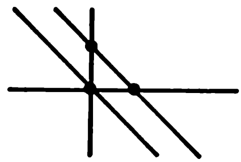
b



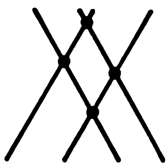
c



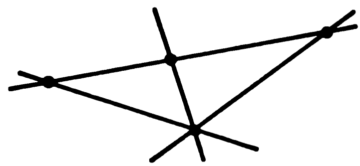
oder



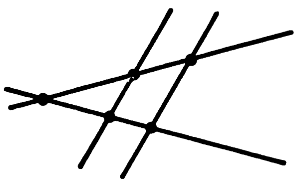
d



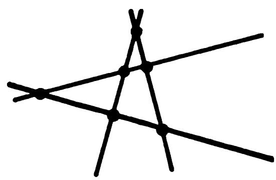
oder



e



f

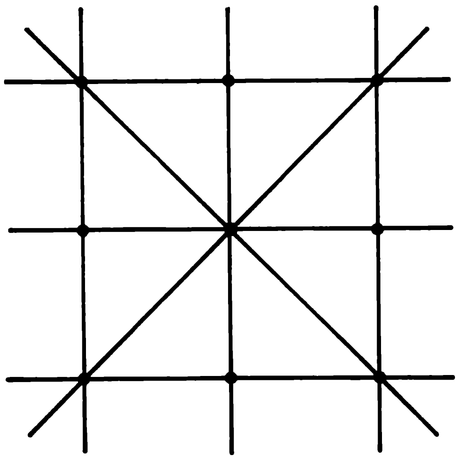


39. a) alle parallel (Abb. a)
b) alle durch einen Punkt (Abb. b)
c) drei Parallelen, eine Gerade schneidet (Abb. c) oder drei durch einen Punkt, eine Parallele zu einer der Geraden
d) zwei Paare paralleler Geraden (Abb. d) oder drei Geraden durch einen Punkt und eine schneidende, zu keiner parallele Gerade
e) nur zwei Parallelen, alle anderen schneiden (Abb. e)
f) keine Parallelen (Abb. f)

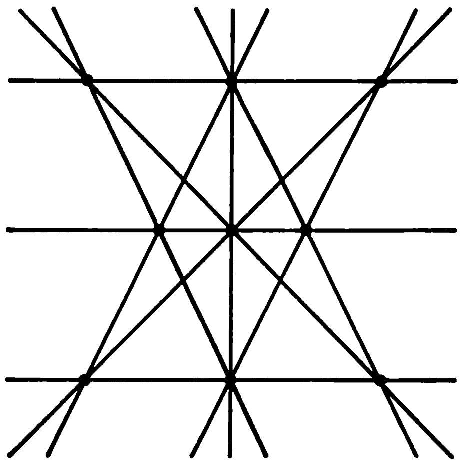
40. Man kann die Strecken z. B. addieren oder subtrahieren und das Ergebnis halbieren. Dadurch erhält man eine der beiden Strecken. Die andere ist dann leicht zu ermitteln.

41. Der Punkt P liegt im Abstand von 5 cm auf dem freien Schenkel des Winkels α. Dadurch erhält man ein gleichschenkliges Dreieck.

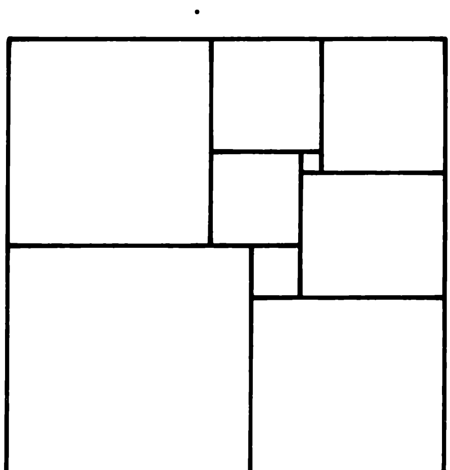
42. a)



b)



43.



44. a)

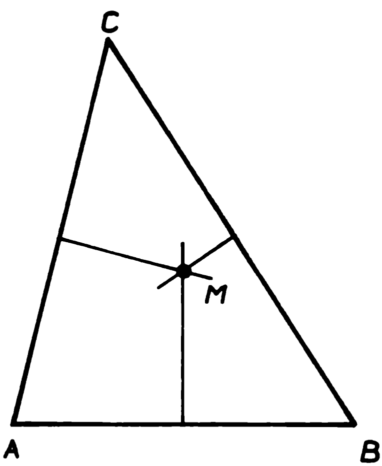
b) Die Strahlen bilden miteinander einen rechten Winkel.

45. Man schlägt um A und um B Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muß. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke AB, und diese läßt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

46. Man erhält insgesamt 400 Quadrate. In jeder horizontalen Reihe liegen 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ horizontal liegende Streichhölzer. In jeder vertikalen Reihe liegen ebenfalls 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ vertikal liegende Streichhölzer. Daher werden insgesamt 840 Streichhölzer gebraucht.

47. a) Der Treffpunkt ist der Mittelpunkt M des Umkreisradius des Dreiecks ABC.

b) Rund 4 km



48.

49. 75 m

Klasse 7

1. Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a. Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

2. Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muß die wiederhergestellte Aufgabe lauten:
Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muß die wieder hergestellte Aufgabe lauten:

```
117??? : ??3 = ???
 ??6
 ---
 187?
 ????
 ----
  ????
  ????
  ----
     0
```

3. Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $^1/_{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert! Wie heißt sie?

4. Welche der beiden Zahlen ist die größere?
$$\frac{35}{47} \text{ oder } \frac{23}{31}$$
Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

5. $$\frac{169}{30} \;?\; \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$
Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

6. Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm. Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen. Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100 000 Stück! (Dichte des Eisens $7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$)

7. Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit $100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muß Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen. Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

8. Ordne folgende Zahlen der Größe nach:
$$\frac{29}{8};\ -0{,}66;\ -\frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ 3{,}52;\ -0{,}67;\ 3{,}5\overline{2}!$$

9. Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km². Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha. Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

10. Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht. Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

11. Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Elektroenergie	Vorkriegsjahr	1959
Stahl	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Zement	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Erzeugnis	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wieviel Prozent stieg die Erzeugung?

12. Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ An 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.

Ein Flugzeug vom Typ Il 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.

Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

13. In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558 000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: „558 000 minus 10% davon, das sind 55 800. Also wurden 1958 558 000 — 55 800 = 502 200 Stück hergestellt."

a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?

b) Wie muß man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?

c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290 000 Stück.
Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?

d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

14. Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm
Spannstück 2 Länge 119,7 mm
Spannstück 3 Länge 120,2 mm
Spannstück 4 Länge 120,1 mm
Spannstück 5 Länge 120,6 mm

a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?

b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).

c) Wieviel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).

d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens $^1/_2$ Prozent betragen darf?

15. Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

$$\begin{array}{r} 3?7 \cdot 8? \\ \hline 2?7? \\ ???2 \\ \hline ????? \end{array}$$

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern!

16. a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^4$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

17. Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1^1/_2$mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.
Wieviel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

18. Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet. Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

19. Die Eisenbahnstrecke Leipzig—Halle—Köthen—Magdeburg ist 123,6 km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,7 km/h. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75,2 km/h.
   a) Um wieviel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?
   b) Wieviel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

20. Der Kapitalismus hat zur Folge, daß einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.
So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603 000 000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204 000 000 t Stahl und 1 604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1 283 000 000 Menschen nur 6 000 000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Wieviel Stahl und wieviel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

21. Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.
Um wieviel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität
   a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine
   b) beim Einsatz eines Melkstandes?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

22. Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen—Storkow—Golßen—Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück. Auf einer Karte im Maßstab 1:750 000 stellen wir die folgenden Strecken fest:

Zossen — Storkow	4,5 cm
Storkow — Golßen	5,2 cm
Golßen — Zossen	3,9 cm

Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.
   a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?
   b) Um wieviel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

23. Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396. Wie lauten die Zahlen?

24. An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.
Welcher Stadtbezirk wies die bessere Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

25. Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3	einmal die 8
zweimal die 5	einmal die 9
zweimal die 6	einmal die 10
zweimal die 7	

Günther erzielte mit seinem letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuß; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoß die 9.
   a) Wer gewann den Wettkampf?
   b) Wer schoß die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

26. Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und vier mal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.
   a) Wieviel Lösungen waren eingesandt worden?
   b) Wieviel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

27. In einen Flachstahlstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden. In welchem Abstand muß angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

28. Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm. Auch hier bleibt beiderseits ein halber Stauden-

abstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d. h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln. Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

29. Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen. Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt" von 40 km je Stunde.
In welcher Zeit und nach wieviel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

30. Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

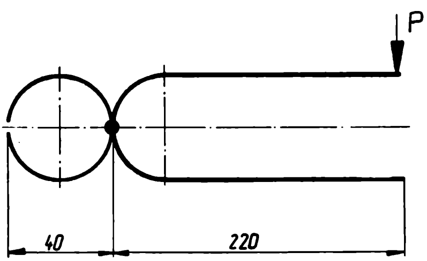
größer oder kleiner als 1 ist?

31. Mit wieviel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

32. a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist!
b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

33. Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

34. Wie groß ist die Druckkraft Q der Zangenschneiden, wenn die Zange, deren Maße im Bild angegeben sind, mit einer Kraft von P = 8 kp betätigt wird?

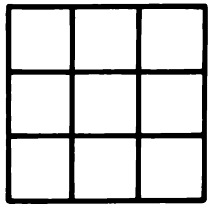


35. Bilde die Summe der Zahlen von 1 bis 100! Erkläre deinen Lösungsweg!

36. Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, daß seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen. Wie muß er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt!

37. a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111 111!
b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

38. In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, daß du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.



39. Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

abb — cdb = ebd
: + —
fg · ch = gic
fk + cfc = cbi

40. Neun Streichhölzer sind so zu legen, daß sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf!

41. Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl. Stelle die richtige Alters-Reihenfolge unserer Freunde fest!

42. Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt. Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet?
Begründe die Antwort!

43. Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung" folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:

Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow gegen Max-Kreuziger-Oberschule	1 : 0
4. Oberschule Köpenick gegen 8. Oberschule Lichtenberg	2 : 0

Tabellenstand:	Punkte	Tore
4. Oberschule Köpenick	2 : 2	2 : 1
12. Oberschule Treptow	2 : 2	2 : 2
Max-Kreuziger-Oberschule	2 : 2	1 : 1
8. Oberschule Lichtenberg	2 : 2	2 : 3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?

Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für eine Niederlage 0 : 2 Punkte.

44. Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.
a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!

b) Läßt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

45. In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so daß an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.
Wieviel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

46. Emil erzählt: „Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt."
Wie alt ist Emil?
Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

47. Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, daß er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen. Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner." Sie vereinbaren, daß sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und daß der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen).

a) Wer gewinnt?

b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?

c) Wieviel Stufen müßte die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben).

Begründe deine Antworten!

48. Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.

a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)

b) Wieviel Würfel erhält man?

49. In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.
Wieviel Kugeln muß sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

50. In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich auf je eine Bank 6 Personen, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen sitzen; setzen sich auf jede Bank 5 Personen, so müssen 4 Personen stehen. Wieviel Bänke und wieviel Personen sind in dem Raum? (Lösung darf auch durch Knobeln ermittelt werden!)

51. In einer Schule finden 2 Fußballspiele statt. Der Sportlehrer hat eine Wette nach dem System des VEB Fußballtoto ausgeschrieben.

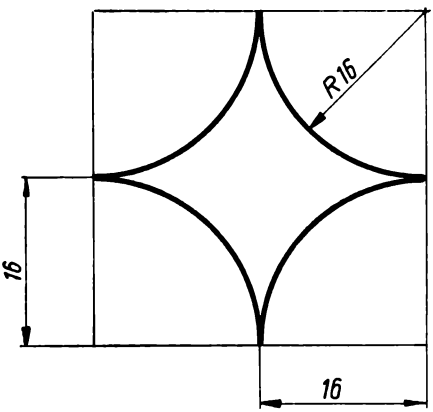
	Tipzettel	1	0	2
1	Klasse 8a - Klasse 8b			
2	Klasse 7a - Klasse 8b			

Ein Schüler wollte unbedingt gewinnen und überlegte sich die Anzahl der möglichen Spielausgänge.
Wieviel Tipzettel mußte er abgeben?
Wie lauteten seine Tips?

52. Die Klasse 7a macht eine Wanderung, und Klaus hat sein Frühstück zu Hause gelassen. Karl-Heinz, der 3 Schnitten mitgebracht hat, und Dieter, der 5 Schnitten hat, teilen mit ihm, so daß die drei alle 8 Schnitten zu gleichen Teilen aufessen. Am nächsten Tag schenkt Klaus seinen Freunden dafür als „Ausgleich" 8 Äpfel, die die beiden sich teilen, Karl-Heinz, dem besten Rechner der Klasse, sind 4 Äpfel zu viel; er meint, die „mathematisch gerechte" Verteilung müsse anders aussehen.

53. Eine Zahl 30 * 0 * 03 soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die * jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muß nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)
Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben.

54. Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern!

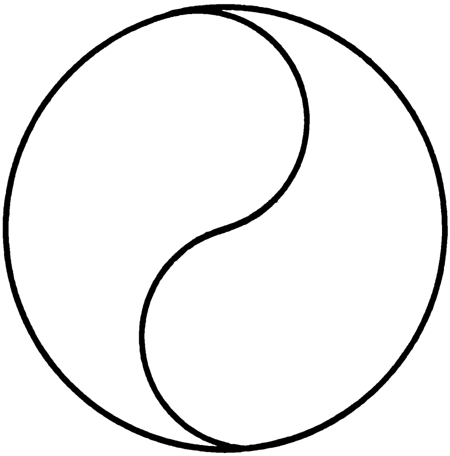


55. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miß die Höhe h_c!

56. Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen. Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, daß er die beiden ersten Kreise von außen berührt! Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

57. Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche

Teile zerlegen? Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen!



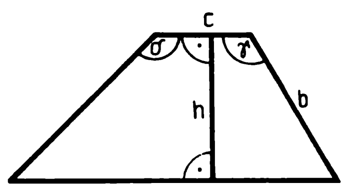
58. Konstruiere ein Dreieck aus:
   $a = 7$ cm
   $b = 6$ cm
   $h_a = 5$ cm!

   Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!) Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)
59. Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise — ohne zu messen — nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!
60. Beweise folgende Behauptung!
   Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.
61. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, von dem du weißt:
   $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14\ cm^2$
   Wieviel
   a) Parallelogramme
   b) Rechtecke
   c) Quadrate

   gibt es insgesamt, die mit ABCD in a und F übereinstimmen?
62. Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm! Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis! Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, daß dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!
63. Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:
   a) zwei benachbarte Seiten
   b) eine Seite und zwei anliegende Winkel
   c) beide Diagonalen
   d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel
   e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?
   f) Durch wieviel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!
64. Konstruiere ein beliebiges Quadrat!
   Konstruiere dann
   a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche
   b) ein Quadrat mit der halben Fläche

   des Ausgangsquadrates!
   Begründe die Konstruktion!
65. Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.
66. In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen. Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!
67. Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zu unterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.
   Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?
68. Es ist zu beweisen, daß die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichseitig Winkelhalbierende und Mittellinie ist!
69. In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben.
   Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen!
   Wieviel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?
70. In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen:
   Länge $l = 29{,}5$ cm
   Breite $b = 12{,}0$ cm
   a) Berechne die Fläche einer Fliese!
   b) Wieviel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge?

   Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.
71. Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen. Wie groß ist die Fläche?
   $b = 60$ mm $\gamma = 120°$
   $c = 34$ mm $\delta = 135°$
   $h = 52$ mm



72. Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist!

73. Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.

a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!

b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist!
Beschreibe die Konstruktion und begründe sie!

74. Wieviel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben? Begründe deine Antwort!

75. Konstruiere ein Dreieck aus
$a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

76. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2. Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

77. Gegeben ist ein Trapez ABCD und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M. Beweise, daß der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

78. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b, der Winkel γ und die Höhe h_a gegeben sind. $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.

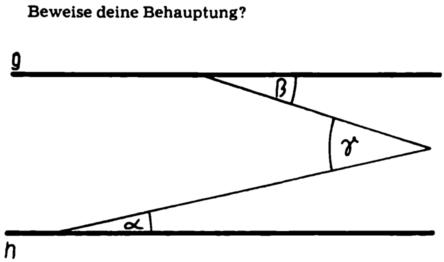
79. Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.

a) Beweise, daß die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!

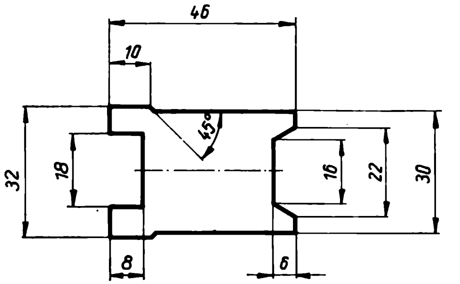
b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

80. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

81. Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$).
Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ?
Beweise deine Behauptung?



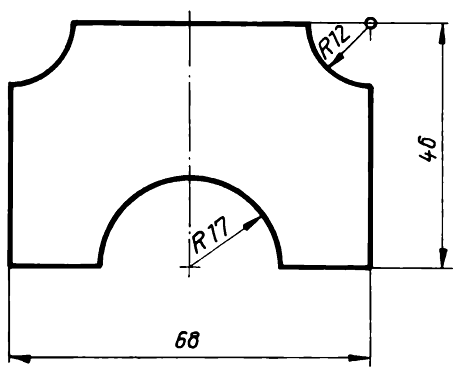
82. Das dargestellte Blech wird aus vorgeschnittenen Stücken von 32 mm Höhe und 46 mm Breite hergestellt.
Berechne den auftretenden Schnittverlust für 75 Bleche!



83. Dem rechtwinkligen Dreieck aus $c = 7,4$ cm und $h_c = 3,2$ cm ist das größtmögliche Quadrat einzubeschreiben. Wie groß ist dessen Fläche?

84. Die waagerechte Fahrbahn einer eisernen Bogenbrücke hat eine Länge von 42 m. Der Bogen ist 7 m hoch. Suche durch eine Konstruktion den Halbmesser des Kreises, zu dem der Bogen gehört!

85. In einem Industriebetrieb werden Deckbleche von der angegebenen Form gestanzt.
Berechne den Inhalt der Fläche!



86. Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!
Wieviel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten?
Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

87. Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, daß sie die Gerade schneiden!
Beweise, daß die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

88. Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere dieses Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

Lösungen:

1. 7a: 3360 Stck. (35%); 7b: 2520 Stck. (26,25%); 7c: 3720 Stck. (38,75%).
2. 117334 : 493 = 238

```
117334 : 493 = 238
986
1873
1479
 3944
 3944
    0
```

3. $\frac{x}{10} + 3 = \frac{x}{100} - 6 \qquad x = -100$
4. $\frac{35}{47} > \frac{23}{31}$; 0,7433
5. $\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$ und $\frac{169}{30} : \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$
6. $\approx$ 13 t
7. Aus der benötigten Gesamtfahrzeit von 56 Minuten zwischen T_1 und T_2 ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $\approx$ 76,8 km $\cdot$ h^{-1}
8. $-\frac{3}{2}$; $-$ 0,67; $-0,6\overline{6}$; $\frac{2}{3}$; 3,52; $3,5\overline{2}$; $\frac{29}{8}$ oder umgekehrt.
9. $346,\overline{6}$ ...
Sinnvolles Runden auf 347 bzw. 350. Die Fläche des Stausees ist rund 347 mal (bzw. 350 mal) so groß wie die Fläche des Müggelsees.
10. Man braucht 814 kg.
11. 1. Verhältnis: w : g = p : 100 418,2 : 84,7 = p : 100
p = 493,7 d. h. Anstieg um 393,7%
2. Verhältnis: w : g = p : 100 92,7 : 25,4 = p : 100
p = 365,0 d. h. Anstieg um 265%
3. Verhältnis: w : g = p : 100 73,7 : 14,5 = p : 100
p = 505,5 d. h. Anstieg um 405,5%
12.
1. Berechnung der drei Durchschnittsgeschwindigkeiten:

a) Formel: $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$

gegeben: $s_1 = 220$ km; $t_1 = 85$ min;
gesucht: v_1.
Berechnung: $v_1 = \frac{220}{85}$

$v_1 = 2{,}59$ km/min
$\underline{v_1 \approx 155 \text{ km/h}}$

Bei dem Flugzeug vom Typ An 2 beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1 \approx$ 155 km/h.

b) Formel: $v_2 = \frac{s_2}{t_2}$

gegeben: $s_2 = 443$ km; $t_2 = 95$ min;
gesucht: v_2.
Berechnung: $v_2 = \frac{443}{95}$

$v_2 = 4{,}66$ km/min
$\underline{v_2 \approx 280 \text{ km/h}}$

Das Flugzeug vom Typ IL 14 P hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit v_2 von etwa 280 km/h.

c) Formel: $v_3 = \frac{s_3}{t_3}$

gegeben: $s_3 = 169$ km; $t_3 = 137$ min;
gesucht: v_3.
Berechnung: $v_3 = \frac{169}{137}$

$v_3 = 1{,}23$ km/min
$\underline{v_3 \approx 74 \text{ km/h}}$

13. Aufstellung der gesuchten Proportionen:
a) 155 : 74 = 2,1
b) 280 : 73 = 3,8
c) 74 : 74 = 1
Die gesuchte Proportion lautet:
$v_1 : v_2 : v_3 = 2{,}1 : 3{,}8 : 1$
13.
14.
15.

```
347 · 86
 2776
  2082
 29842
```

16. a) $\frac{25}{36}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $-\frac{32}{243}$ d) $\frac{256}{625}$
$\frac{25}{36}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{256}{625}$; $-\frac{32}{243}$ (oder umgekehrt)
17. Insgesamt werden 3½mal soviel Dezitonnen Kartoffeln gesammelt wie in der Gruppe 1, zuzüglich 3 dt Kartoffeln. Daher ergibt sich:
Gruppe 1: 14 dt Kartoffeln
Gruppe 2: 21 dt Kartoffeln
Gruppe 3: 17 dt Kartoffeln.
18. Da alle Abmessungen viermal so groß sind und es drei Abmessungen gibt, ist das Stück 4 · 4 · 4 = 64 mal so schwer.
Es wiegt 30 400 p = 30,4 kp.
19. Um 13.11 Uhr ist der Personenzug 21,3 km gefahren.
$21{,}3 + 32{,}7\,x = 75{,}2\,x$
$x \approx 0{,}5$
a) Um 13.41 Uhr
b) 37,6 km
20. 1 283 000 000 = 204 000 000 : 603 000 000
$x = \frac{204 \cdot 1\,283\,000\,000}{603}$
Etwa 434 000 000 t Stahl
x : 1 283 000 000 = 1 604 000 000 000 : 603 000 000
$x = \frac{1\,283 \cdot 1\,604\,000\,000\,000}{603}$
Etwa 3413 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
21.
22.
23. 396 : 9 = 44, also sind 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 und 48 die gesuchten Zahlen.
24. Der Stadtbezirk Lichtenberg, da 5097 : 7387 3808 : 5828 ... oder mit Hilfe einer Proportion ... oder mit Hilfe der Prozentrechnung .....
25. a) Heidrun schoß 5 + 8 + 10 + 7 + 6 = 36 Ringe und gewann.
b) Günther schoß 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30 Ringe.
Begründung: Da Günther mit den letzten vier Schüssen die neunfache Ringzahl erzielte, muß sein erster Schuß die 3 gewesen sein usw.
26. 240 Lösungen entsprechen 16%
a) 1500 eingesandte Lösungen
$\left.\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right\}$ Paare richtig: 180 Einsender

2 Paare richtig: 360 Einsender
1 Paar richtig: 720 Einsender
0 Paare richtig: 240 Einsender
$\overline{1500}$

27. 250 cm — (2 cm · 2,5 + 1 cm) · 2 = 238 cm
238 cm : 14 = 17 cm

28. Es sind 400 Reihen zu je 900 Stauden.
Die 360 000 Stauden ergeben einen voraussichtlichen Gesamtertrag von 225 t Kartoffeln.

29. Ampler legt in jeder Stunde durchschnittlich 2 km mehr zurück als Vyncke. Dieser hätte $\frac{2}{3}$ km Vorsprung, also wäre er nach 20 min von Ampler eingeholt worden. In dieser Zeit hätte Ampler 14 km zurückgelegt.

30. Die Zahl ist gleich
$$\frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$$
Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

31. Das Produkt enthält die Faktoren 10, 20, 30 und 40 und ferner die Faktoren 5, 15 und 35 sowie den Faktor 25, in denen insgesamt neunmal der Faktor 5 vorkommt. In allen übrigen Faktoren tritt der Faktor 5 nicht auf. Da die Anzahl der Endnullen von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt und im vorliegenden Fall der Faktor 2 mehr als neunmal auftritt, hat das Produkt genau neun Endnullen.

32. a) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60. Die Zahlen 61, 121, 181, ... lassen bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 also jeweils den Rest 1. Durch Probieren findet man, daß 301 die kleinste dieser Zahlen ist, die sich durch 7 teilen läßt.

b) Weitere Zahlen sind z. B. 721 und 1141. Durch Addition von 420 zu einer derartigen Zahl erhält man stets eine weitere Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

33. Von den Zahlen sind stets eine durch 8, eine weitere durch 4 und die restlichen beiden durch 2 teilbar. Also ist das Produkt durch $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 2^7$ teilbar.

34. P : Q = q : p 8 : Q = 40 : 220 Q = 44 kp

35. 100 + 1 = 101
99 + 2 = 101
98 + 3 = 101
.
.
.
53 + 48 = 101
52 + 49 = 101
51 + 50 = 101
d. s. 50 Paare mit der Summe 101
oder: 50 · 101 = 5050

36. Da die Uhr in 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgeht, muß sie 4,5 Minuten vorgestellt werden. Die Tatsache, daß sie auch während der 4,5 Minuten etwas nachgeht, bleibt unberücksichtigt.

37. a) Die Primfaktoren sind:
3, 7, 11, 13, 37

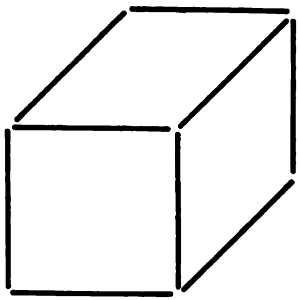
b) z. B.: 21, 33, 39,

38.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

39. 644 — 104 = 540
: + —
23 · 17 = 391
$\overline{28 + 121 = 149}$

40. Die Streichhölzer sind so zu legen, daß man etwa das Perspektivbild eines Würfels erhält (ein Quadrat mit zwei anliegenden Rhomben).



41. Hierzu gibt es viele Lösungswege.
Beispiel:
Das Zeichen „<" bedeutet hier „jünger als".

R < H K < L	a) Derjenige muß der Älteste sein, der auf der linken Seite nicht auftritt: H
I < R L < H	b) Zweitältester ist derjenige, der links nur erscheint mit H als rechter Seite: L
K < R I < H	c) Der Nachfolgende ist der, der links auftritt mit H und L als rechter Seite: R
R < L I < K	d) Der Nächste kann nur der sein, der links auftritt und jeweils H, L und R auf der rechten Seite hat: K
I < L K < H	e) Der Jüngste muß dann der sein, der links erscheint mit H, L, R und K auf der rechten Seite: I

So ergibt sich die Reihenfolge (der Älteste zuerst):
Herbert, Lore, Richard, Karl, Ilse.

42.

43. Laut Punkt- bzw. Torverhältnis ermittelt man
Lichtenberg — Treptow 2 : 1
Max-Kreuziger-Oberschule — Köpenick 1 : 0

44. a) $7+7+7+7+7+7-\frac{7}{7}-\frac{7}{7}\cdot 7\cdot 7+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}$
$= 1962$

b) $\frac{(1962+1962+1962+1962+1962+1962+1962)}{1962} = 7$

45. Würde man die Fenster ohne Laden mit je einem Laden der kompletten Fenster versehen, dann fehlte an jedem Fenster ein Laden. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

46. Emil ist 12 Jahre alt.
Beschreibung muß eine Begründung enthalten, z. B.: Alter des Vaters muß eine Quadratzahl sein. Da 49 bereits zu hoch ist, kommen nur 25 oder 36 in Frage. Tatsächlich ist $12 + 6 + 36 + 31 = 85$.

47. a) $5 \cdot 17 + 3 = 88$
$4 \cdot 20 = 80$; Klaus gewinnt

b) $5 \cdot 7 + 3 = 38$
$3 \cdot 20 + 10 = 70$; Hans gewinnt

c) $(x - 3) \cdot 5 + 3 = 60 + x$
$x = 18$

48. a) Man braucht 26 Schnitte $(2 + 6 + 18)$.
b) Man erhält 27 Würfel $(3 \cdot 3 \cdot 3)$.

49. Sie muß 38 Kugeln nehmen. Im ungünstigsten Falle kann Brigitte zunächst die 10 schwarzen bzw. weißen Kugeln und von jeder Farbe 9 Kugeln, insgesamt also 37 Kugeln, herausnehmen. Nimmt sie jetzt noch eine weitere Kugel heraus, dann hat sie stets mindestens 10 Kugeln gleicher Farbe unter diesen 38 Kugeln.

50.

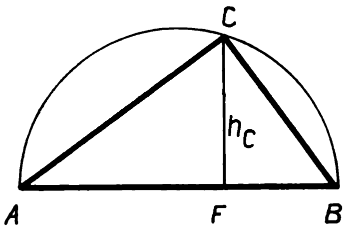
51.

52. 1 Apfel / 7 Äpfel.

53. Durch systematisches Probieren findet man die Zahlen
3020303;
3030703;
3050603;
3060603;
3080103;
3090503.

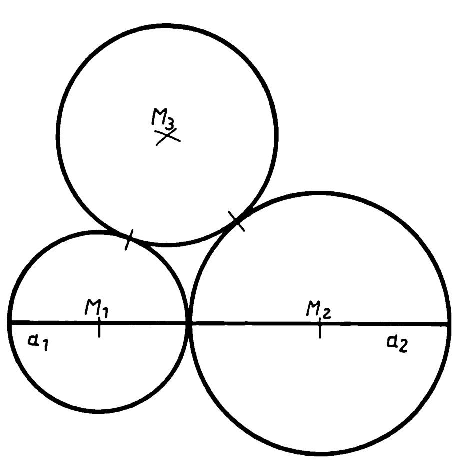
54. $F \approx 220\ \text{cm}^2$

55.
$h_c \approx 2{,}8$ cm



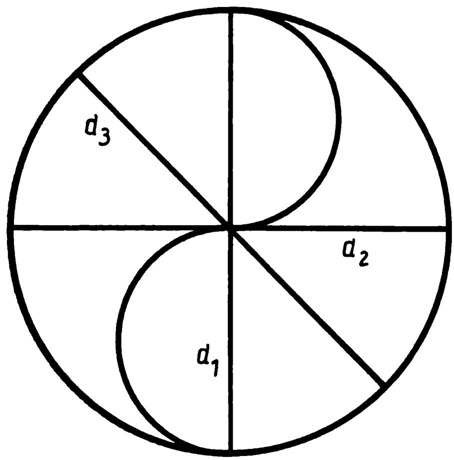
56. Die Kreisbogen um M_1 mit $\frac{d_1 + d_3}{2}$ und um M_2 mit $\frac{d_2 + d_3}{2}$ sind geometrischer Ort für den Kreismittelpunkt um M_3 (Abb. siehe rechts oben).

57. Bestimmung von h_b durch Messung (rund 6 cm)
Bestimmung von h_b durch Rechnung
$$\left(\frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{35}{6}\text{ cm}\right)$$
Anmerkung: Läßt man ungleichsinnige Kongruenz zu, so lassen sich 4 Dreiecke konstruieren. Auch diese Lösung ist selbstverständlich richtig.



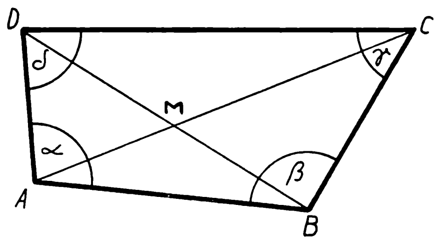
58. Man zeichnet d_1, d_2 und d_3 ein. Jeder der 8 Kreisteile hat die Fläche $\frac{r^2}{8} \cdot \pi$

$\frac{r^2}{8} \cdot \pi$. 8 Teilflächen $= r^2\pi$ als Vollkreis



59. Richtige Formulierung der gesuchten Eigenschaft: Die Winkelsumme der Außenwinkel eines Vierecks beträgt stets 360°.

60.

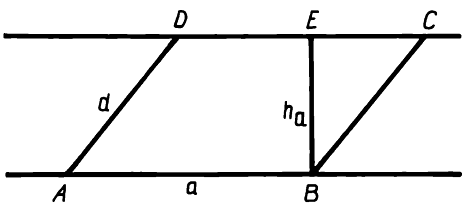


a) Voraussetzung: AC = BD
AM = MC
BM = MD

b) Behauptung:
Winkel α = Winkel β = Winkel γ = Winkel δ

c) Beweis:
Die Dreiecke ABM und DMC sind gleichschenklig und einander kongruent nach sws,
daher
Winkel MAB = Winkel ABM = Winkel MCD = Winkel CDM.
Dasselbe trifft für die Dreiecke DAM und MBC zu.
Daher
Winkel DAM = Winkel MDA = Winkel MBC = Winkel BCM.
Da α = Winkel DAM + Winkel MAB
β = Winkel ABM + Winkel MBC
γ = Winkel MCD + Winkel BCM
δ = Winkel CDM + Winkel MDA
Daraus folgt α = β = γ = δ.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und lt. Aufgabe die Diagonalen einander halbieren, ist jeder der vier Winkel ein Rechter, das Viereck also ein Rechteck.
(Der Beweis kann auch geführt werden, indem die Feststellung getroffen wird, daß jede Diagonale Durchmesser eines Thaleskreises ist.)

61. Gegeben: AB = a = 5 cm, AD = d = 3,7 cm, F = 14 cm²; gesucht: ha;
Umwandlung: $F = a \cdot h_a$ Berechnung:
$h_a = \frac{F}{a}$ $h_a = \frac{14}{5}$ cm
$h_a = 2{,}8$ cm



Durch Nachdenken über die Bestimmungsstücke von Parallelogramm, Rechteck und Quadrat kommt man zu dem Schluß:

a) Es gibt beliebig viele Parallelogramme, die mit ABCD in a und F übereinstimmen.
b) Es gibt genau ein Rechteck, daß mit ABCD in a und F übereinstimmt.
c) Es gibt kein Quadrat, daß mit ABCD in a und F übereinstimmt.

62.

63. a) bis d) nein; e) ja; f) Es sind drei voneinander unabhängige Stücke erforderlich.

64. Diagonale ist Quadratseite, halbe Diagonale ist Quadratseite, Beweis durch Kongruenz.

65. △ ABD = △ ABD (gleiche Grundlinie und Höhe)
△ ABD − △ ABE = △ AED
△ ABC − △ ABE = △ BCE
Daher △ AED = △ BCE
Gleiches von Gleichem subtrahiert, ergibt Gleiches.

66. Man ziehe die Parallelen zu g im Abstand 3 cm. Dann liegen die gesuchten Punkte auf ihnen und auf der Symmetrieachse zu AB.

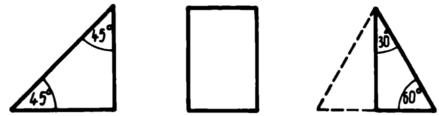
67. $F = 5\,a_1^2 + 4\,a_2^2 + 4\,a_3^2$
Die Fläche beträgt 2464 cm².

68.

69.

70. a) 29,5 · 12,0 cm² = 354 cm²
b) Man benötigt 93 · 36 Fliesen = 3348 Fliesen

71.



$F_I = \frac{52 \cdot 52}{2}$ $F_{II} = 34 \cdot 52$ $F_{III} = \frac{30 \cdot 52}{2}$

$F_I = 1352\ \text{mm}^2$ $F_{II} = 1768\ \text{mm}^2$ $F_{III} = 780\ \text{mm}^2$

$F_{I,II,III} = 3900\ \text{mm}^2$

72. Aus der Kongruenz von Teildreiecken, z. B. nach (s, w, w), oder nach (s, s, w) und daraus Winkelgleichheit ableiten.

73. Konstruktion (z. B. mit dem Thaleskreis)
Konstruktion (Geraden durch M liefern die halben Winkel bei A und B usw.)

74. Ein Dreieck kann höchstens einen stumpfen Innenwinkel haben. Die Außenwinkel sind Nebenwinkel der Innenwinkel, also kann höchstens ein Außenwinkel spitz sein.

75. Teildreieck aus R, h_a und s_a. Punkt B mit Hilfe von a und entsprechend Punkt A.

76. Es entsteht ein Parallelogramm. Die Diagonalen halbieren die Fläche, also $F_1 : F_2 = 1$

77. Winkel am gleichen Schenkel sind zusammen 180°.
AM, DM sind Winkelhalbierende
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2} = 90°$$
$$\sphericalangle\ AMD = 180° - 90° = 90°$$

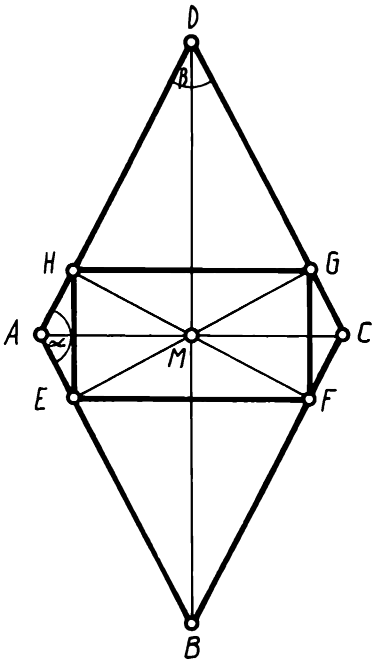
78. a) △ ABD aus s, $\frac{\alpha}{2}$ und h_a konstruieren
(△ ACD ist gleichschenklig)
b) $\frac{\alpha}{2}$ in A an AD antragen, führt auf C.

79. a) Man ziehe die Diagonalen.
Dann ist △ AMH ≅ △ EMA (s, w, w),
also $\overline{AH} = \overline{AE}$
und $\sphericalangle\ AEH = \sphericalangle\ EHA = 90° - \frac{\alpha}{2}$,
mithin $\sphericalangle\ HEM = \frac{\alpha}{2}$, da $\sphericalangle\ AEM = 90°$ ist.

Analog findet man $\sphericalangle\ MEF = \frac{\beta}{2}$.

Also ist $\sphericalangle\ HEF = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$, da $\alpha + \beta = 180°$ ist.

Analog läßt sich der Beweis für die übrigen Winkel des Vierecks EFGH führen.
Das Viereck ist daher ein Rechteck mit dem Mittelpunkt M.



b) EFGH ist genau dann ein Quadrat, wenn
$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, also $\alpha = \beta$ ist.

Dann ist aber auch der Rhombus ein Quadrat.

80. Man konstruiert aus h, dem rechten Winkel und einem Winkel von 30° das halbe gleichseitige Dreieck und vervollständigt dann die Figur.
(Der Winkel von 30° kann z. B. mit Hilfe eines beliebigen gleichseitigen Dreiecks konstruiert werden.)

81. Man zieht durch den Scheitelpunkt des Winkels γ die Parallele zu g und h.
Es ist $\gamma = \alpha + \beta$.
(Wechselwinkel an Parallelen)

82.

83.

84.

85.

86. Es gibt 5 Vierecke, die aus je 3 Fünfeckseiten und einer Diagonalen, 5 Vierecke, die aus je 2 Fünfeckseiten und 2 Diagonalen, und 5 Vierecke, die aus je einer Fünfeckseite und 3 Diagonalen gebildet werden, insgesamt also 15 Vierecke.

87. Die beiden Abschnitte sind zur selben Diagonalen parallel und als Parallelogrammseiten auch genau so lang wie diese Diagonalen, also sind sie auch untereinander gleich lang.

88. Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, daß beide zusammen ein Parallelogramm mit (a + c) als Parallelseiten bilden.
Es läßt sich dann aus (a+c), e und f ein Teildreieck konstruieren.
Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes läßt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und einer Trapezseite durchführen.

Klasse 8

1. Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden. Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wieviel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

2. Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muß die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

```
154...:..7 = ...
...4
 267.
  ....
   ....
   ....
      —
```

3. Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $^2/_3$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $^5/_8$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

4. Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $^2/_5$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $^3/_8$ seines Fassungsvermögens. Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, daß $^4/_5$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $^3/_4$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

5. Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze. Um wieviel Prozent ist das „Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

6. Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen. Wie lang ist dieser Draht?

7. $(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$
   a) Fasse zusammen!
   b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2$; $b = 1{,}5$; $c = 7$?

8. In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen. Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mußten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lokkern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wieviel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
   a) mit der Kartoffellegemaschine,
   b) bei der Handarbeit?
   c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten!

9. Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben
134 kg Pechstein
7 kg Flußspat
228 kg Sand
82,5 kg Kalk
17 kg Sulfat
103 kg Soda
Wieviel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

10. In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so daß die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

11. Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw.
$73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

12. Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16$ km/h. Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, daß die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt. Der Radfahrer nimmt an, daß er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu?
Begründe deine Antwort!

13. Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

14. $$\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right)$$

15. In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, daß man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde „auslegen" könnte.
Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384 000 km).

16. Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl. Probiere es!
Beweise die Behauptung!

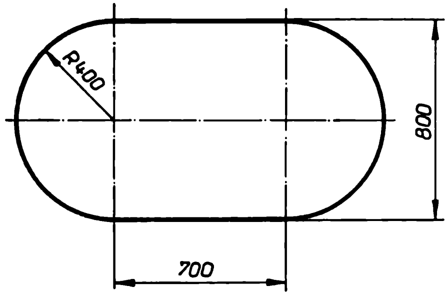
17. Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Rußland) auf etwa 1640 Prozent gesteigert worden. In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genausoviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

18. Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von

$d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.
Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85\ \mathrm{p \cdot cm^{-3}}$)

19. In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1 350 000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, daß dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150 000 bzw. 290 000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.
   a) Wieviel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?
   b) Wieviel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

20. Peter hat für seine Modelleisenbahn ein „Schienenoval" auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise). Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: „Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?" Peter antwortet: „Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!" „Ja", sagt Peter, „das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müßte es umrechnen." Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:
   Zeit für eine Umkreisung: 11 s
   Spurweite der Modellbahn: 18,5 mm
   Spurweite in Wirklichkeit: 1435 mm
   Fragen: a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?
   b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?



21. Zu beweisen ist folgender Satz:
   a) Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!
   b) Welcher Rest bleibt bei Division durch 4?

22. Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?
   Die Antwort ist zu begründen!

23. Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27^1/_2$ Stunden. Beim „I. Wettstreit der Aktivisten von Morgen" im Stadtbezirk Treptow unterbreitete der Schüler Lothar Schlapinski einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16^1/_2$ Stunden verringert werden konnte.
   a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?
   b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?
   Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

24. Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt. Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m², alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je 6,37 m². Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m. Den oberen Abschluß der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m². Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m. Es sind zu berechnen:
   a) die Höhe der Fassade,
   b) die Länge der Fassade!
   Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

25. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
**********  : ? = ****8**
***
 ---
  ***
  ***
  ---
   ***
   ***
   ----
     **
     **
    ---
      ***
      ***
  -------
        0
```

26. Zu beweisen ist folgender Satz:
   Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen läßt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

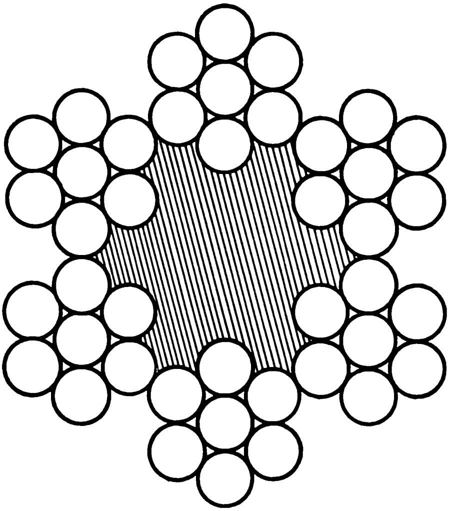
27. Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, wird die Kohleförderung 1980 um 687 Mill. t höher liegen als im Jahre 1960.
   Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960. Berechne die Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Mill. t!

28. Berechne: $\dfrac{m^2 - n^2}{m - n} + \dfrac{m^2 + 2mn + n^2}{m + n}$

29. $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$

30. Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren. Wieviel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

31. Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (schraffiert gezeichneten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm. Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!



32. Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen.
2 Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

18 · 17 = ?	18 + 7	25
	Null anhängen	250
	7 · 8 addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

33. Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge unserer volkseigenen Hochseefischerei 117 291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74 445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.
   a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?
   b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

34. Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, daß 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, daß die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.
Wieviel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

35. Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind. Beweise, daß entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

36. Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m² ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.
   a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?
   b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit). Wieviel Hänger beraucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

37. Beweise die folgende Behauptung:
Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781 781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

38. Eine Pioniergruppe geht zum Sportplatz mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h. Auf dem Weg trifft sie eine andere Pioniergruppe, die vom Sportplatz kommt und mit einer Geschwindigkeit von 3,3 km/h geht. Ein Pionier aus der ersten Gruppe sieht die zweite Gruppe in 20 Sekunden vorbeigehen, ein Pionier der zweiten Gruppe sieht die erste Gruppe in 16 Sekunden vorbeigehen.
Wie lang waren die beiden Gruppen, und wieviel Pioniere waren in jeder, wenn die Pioniere in Zweierreihen gingen und jede Reihe 0,7 m Platz einnahm?

39. Zur Versorgung des Wasserhaushaltes einer LPG-Gärtnerei wird eine Kreiselpumpe eingesetzt. Dieselbe fördert in der Minute 5,4 m³ Wasser.
Das Wasser wird durch eine Rohrleitung von 9 dm² Querschnitt gedrückt.
   a) Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in der Rohrleitung?
   b) Wie könnte man die Geschwindigkeit des Wassers im Rohr erhöhen, ohne die Pumpe schneller laufen zu lassen?

40. Eine Prämie wird unter 4 Kollegen einer sozialistischen Brigade verteilt. A erhält $\frac{1}{3}$ der Summe, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest, der 52,— DM beträgt.
   a) Wie hoch war die Prämie?
   b) Wieviel DM erhält jeder einzelne?

41. Der irische Naturwissenschaftler Robert Boyle untersuchte die Abhängigkeit des Gasdruckes vom Volumen bei konstanter Temperatur. Er stellte 1662 fest:
„Wird das Gas bei konstanter Temperatur zusammengedrückt, so sind die Drücke den Volumina umgekehrt proportional“. (Boylesches Gesetz) $p_1 : p_2 = V_2 : V_1$ (T = konstant).
Die zum autogenen Schweißen und Schneiden verwendeten Gase (Wasserstoff, Äthin, Sauerstoff) werden Stahlflaschen entnommen. Das Hochdruckmanometer einer solchen 40 l-Flasche zeigt einen Druck von 120 at an. Wieviel Liter Gas stehen bei einem Arbeitsdruck von 1,2 at zur Verfügung?

42. Berechne $(a + b)(c - d)$ und veranschauliche das Produkt der Binome durch eine Zeichnung.
$a = 80$ mm, $b = 30$ mm, $c = 50$ mm, $d = 20$ mm.

43. Ein 130 m langer Güterzug fährt mit 42 km/h Geschwindigkeit durch einen 220 m langen Tunnel. Wie lange dauert es, bis der Zug mit seiner ganzen Länge den Tunnel durchfahren hat, d. h. von der Einfahrt

der Lokomotive bis zur Ausfahrt des letzten Wagens? (Zeitangabe in einer üblichen Maßeinheit)

44. Bei einem Hallenhandballturnier in der Sporthalle der SV Dynamo in Berlin-Hohenschönhausen sollen fünf Mannschaften im Punktsystem gegeneinander spielen (d. h. jede Mannschaft spielt einmal gegen jede andere). Dauer eines Spiels: 2 mal 10 Minuten. Für den Wechsel der Spielfeldhälften zur Halbzeit wird je eine Minute gerechnet. Die Pausen zwischen den Spielen betragen im allgemeinen 3 Minuten, zwei davon sind größere Pausen von je 20 Minuten Dauer. Wann ist das Turnier planmäßig beendet, wenn es um 17.00 Uhr beginnt?

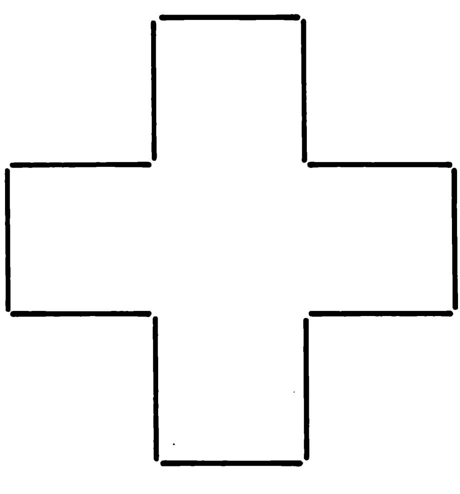
45. Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist?
Begründe, daß es die kleinste derartige Zahl ist!

46. Beweise folgende Behauptung:
Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$

47. Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl. Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl. Wie lauten Peters Lottozahlen?

48. Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

49. Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht. Die Streichhölzer sind so umzulegen, daß eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht! (Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)



50. Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen. Wie groß ist er?

51. Denkaufgabe:
Fritz sagt: „Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt." Franz erwidert: „Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, daß Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

52. In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

53. Setze in ein „magisches Quadrat" mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, daß die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld! Begründe deine Anordnung der Zahlen!

54. In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.
Der Steuermann sagt: „Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist." Der 1. Matrose sagt: „Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist." Der 2. Matrose sagt: „Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert." Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.
Wie alt ist der Kapitän?

55. Wer hat den Ring?
Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verläßt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald: 1. Ich habe den Ring nicht.
2. Fritz hat den Ring.
3. Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.

Fritz: 1. Ich habe den Ring nicht.
2. Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
3. Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: „Ich muß nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat." Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

56. Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1^1/_2$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen. Nach weiteren $1^1/_2$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.
a) Welche Strecke legte Klaus zurück?
b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

57. Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, daß einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind. Er stellt fest, daß die Schuhe verschiedene Größen aufweisen; nämlich 37, 38, 39 und 40. 6 Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.
Von den außerdem vorhandenen 5 rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39. Die außerdem noch vorhandenen 8 linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.
a) Wieviel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?
b) Was für Fußballschuhe sind das?
Begründe deine Antwort!

58. Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

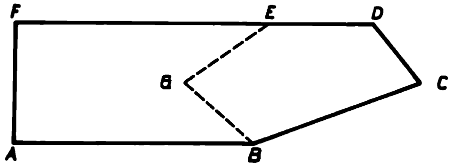
59. In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.
Wieviel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe?
Begründe deine Behauptung!

60. In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
  f o r t y
+     t e n
+     t e n
  s i x t y
```

61. Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung. Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat. Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?

62. Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (vgl. Abb.) einer LPG ist eine gebrochene Linie. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen. Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!



63. Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale. Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten! Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme. Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs mit Hilfe der Kongruenz der Dreiecke!

64. Beweise, daß die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

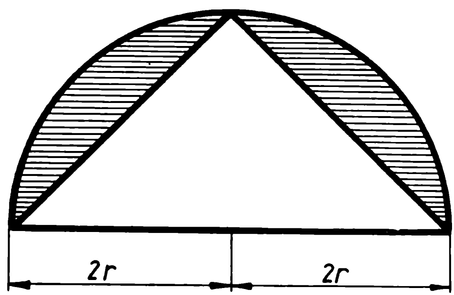
65. Konstruiere ein Dreieck ABC aus
$a = 8$ cm,
$b = 10$ cm,
$c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren. Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

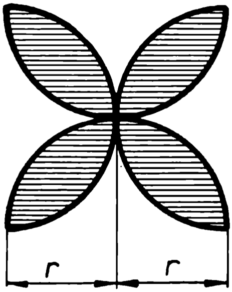
66. Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muß der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!

67. Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm
$h_c = 5$ cm
$\gamma = 60°$!
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

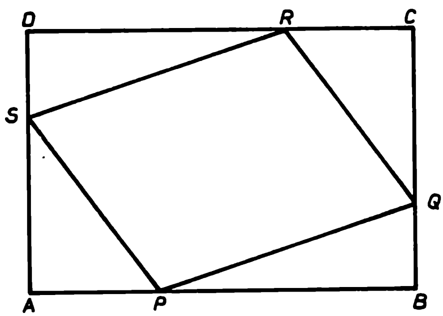
68. Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben! Wieviel solcher Geraden gibt es?

69. Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?





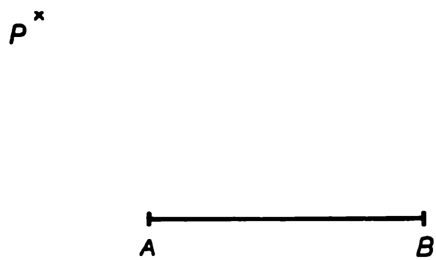
70. Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, daß sie einander berühren.
 a) Wieviel Adern braucht man?
 b) Beweise diese Behauptung!
71. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt. Begründe die Konstruktion!
72. Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren?
Die Antwort ist zu begründen!
73. Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind? Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, daß er die angegebenen Eigenschaften hat!
74. Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm. Konstruiere zwei Parallelen, von denn eine durch P, die andere durch Q geht und die von einander einen Abstand a = 3 cm haben! Begründe die Konstruktion! Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?
75. Beweise folgenden Satz:
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!
76. Gegeben sei ein Rechteck ABCD, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1:2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.



 a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten AB = 10 cm und BC = 7 cm durch!
 b) Was für ein Viereck ist das Viereck PQRS? (Beweis!)
 c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks PQRS zu dem des Rechtecks ABCD? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke (Begründung)?
77. Von einem Dreieck sind gegeben:
Die Summe zweier Seiten und zwei Winkel. Konstruiere das Dreieck!

$$a + b = 10 \text{ cm}$$
$$\beta = 45^\circ \qquad \gamma = 60^\circ$$

Beschreibe und begründe die Konstruktion!
78. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB = 10 cm! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie 2 : 3 verhalten.
Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c!
Beschreibe die Konstruktion!
79. Folgende Behauptung ist zu beweisen:
Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, daß die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.
(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)
80. Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm mißt.
81. Beweise folgenden Satz: Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.
82. a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A.
Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.
 b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!
83. In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.
Beweise, daß diese Sehnen stets gleichlang sind!
84. Gegeben sei eine Strecke AB und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abb.)



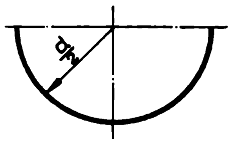
Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu AB parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist!
Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

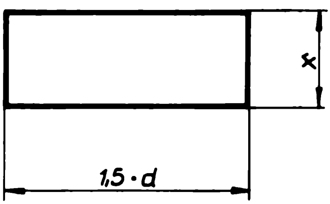
85. Gegeben sei ein Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke AB und Y ein Punkt der Strecke CD.
Beweise, daß die Strecke XY stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

86. Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern. Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen.
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

87. Der Umfang eines Dreiecks betrage 1 mm. Kann sein Umkreis einen Radius r = 1000 km haben?
Begründe die Antwort!

88. Eine Abflußrinne von halbkreisförmigem Querschnitt soll durch eine querschnittgleiche rechteckige von der Breite 1,5 d ersetzt werden. Berechne die Seite x des Rechtecks!





89. a) Beweise: In einem Viereck mit gleich langen Seiten stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
b) Wie lautet die Umkehrung dieses Satzes? Gilt sie auch?

90. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird. Beweise, daß diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

91. Gegeben sind die Strecken
s—a = 3 cm
s—b = 2 cm
s—c = 1 cm,
wobei 2s = a + b + c der Umfang des Dreiecks ist.
a) Konstruiere das Dreieck!
b) Begründe die Konstruktion!

92. Gegeben seien die parallelen Seiten a = 8 cm und c = 4 cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen e = 8 cm und f = 6 cm.
c = 4 cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen e = 8 cm und f = 6 cm.

Lösungen:

1. Erstes Kollektiv: 2940 Spulen; zweites Kollektiv: 5044 Spulen.
2. 154 154 : 637 = 242
1274
2675
2548
1274
1274
—
3. $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}x + 45 = \frac{2}{3}x$
$x = 180$
Der Ball fiel aus einer Höhe von 180 cm.
4. 1. Gefäß: 14,5 l Fassungsvermögen
2. Gefäß: 7,2 l Fassungsvermögen
5. Beim Doppelstockgliederzug ist das Sitzplatzgewicht um 67,75 Prozent niedriger als bei einem D-Zug alter Bauart.
6. Die Länge des Drahtes beträgt 360 km.
7. a) $3{,}4\,a + 2{,}6\,b - 17\,c$
b) $-108{,}3$
8. a) $30 : 5 = x : 1$
$x = 6$
Mit der Kartoffellegemaschine sind 6 Arbeitskraftstunden für 1 ha erforderlich.
b) $10 : 0{,}5 = x : 1$
$x = 20$
Bei der Handarbeit sind 20 Arbeitskraftstunden für 1 ha erforderlich.
c) Zum Vergleich sind zwei Möglichkeiten vorhanden:
c_1) $20 : 100 = 6 : x$
$1 : 5 = 6 : x$
$x = 30$
Der Arbeitskraftaufwand beträgt mit der Maschine nur noch 30 Prozent.
c_2) $6 : 100 = 20 : x$
$3 : 50 = 20 : x$
$3x = 1000$
$x \approx 333$
Der Arbeitskraftaufwand bei der Handarbeit beträgt gegenüber der Maschine 333 Prozent.
9. a) $x : 250 = 1000 : 228$
$228x = 250 \cdot 1000$
$x = \frac{250 \cdot 1000}{228}$
$x = 250 \cdot 4{,}386$
$x = 1096{,}5$
b) $x : 134 = 4{,}386$
$x = 4{,}386 \cdot 134$
$x = 597{,}724$
c) $x : 7 = 4{,}386$
$x = 4{,}386 \cdot 7$
$x = 30{,}702$
d) $x : 82{,}5 = 4{,}386$
$x = 4{,}386 \cdot 82{,}5$
$x = 361{,}845$
e) $x : 17 = 4{,}386$
$x = 4{,}386 \cdot 17$
$x = 74{,}562$
f) $x : 103 = 4{,}386$
$x = 4{,}386 \cdot 103$
$x = 451{,}785$
Beim Verbrauch von 1 t Sand werden rund folgende Mengen benötigt:

1096 kg Scherben,	362 kg Kalk,
590 kg Pechstein,	75 kg Sulfat und
31 kg Flußspat,	452 kg Soda.

10. Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muß sie auch durch 8 und durch 9 teilbar sein, denn $8 \cdot 9 = 72$. Um die fehlenden Ziffern zu ermitteln, wendet man

die Teilbarkeitsregeln der 8 und 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78. muß also durch 8 teilbar sein. $720 : 8 = 90$.
Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muß die letzte Ziffer 4 sein.
Um die erste Ziffer zu erhalten, wende ich die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Dies ist auch die fehlende Ziffer.
Die vollständige Zahl lautet 53 784.

11. a) $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$

$$\begin{aligned}(30 + 2)(40 - 2) &= 30 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 30 - 2 \cdot 2\\ &= 30 \cdot 40 + 2(40 - 30 - 2)\\ &= \mathbf{30 \cdot 40 + 2 \cdot 8}\end{aligned}$$

b) $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned}(70 + 3)(80 - 3) &= 70 \cdot 80 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 70 - 3 \cdot 3\\ &= 70 \cdot 80 + 3(80 - 70 - 3)\\ &= \mathbf{70 \cdot 80 + 3 \cdot 7}\end{aligned}$$

c) **Verallgemeinerung:**

1. $(10a + b)(10a + 10 - b)$
$= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 - 10ab + 10ab + 10b - b \cdot b$
$= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 + 10b - b \cdot b$
$= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2$
$= 100a^2 + 100a + 10b - b^2$
$= \mathbf{10a\,(10a + 10) + b\,(10 - b)}$

2. Eine andere Verallgemeinerung ist folgende:
(b bedeuten die Einer, a die vollen Zehner, also nicht nur den Stellenwert der Zehner):
$(a + b)(a + 10 - b)$
$= a \cdot a + a \cdot 10 - ab + ab + 10 \cdot b - b \cdot b$
$= \mathbf{a\,(a + 10) + b\,(10 - b)}$

Daraus könnte man etwa folgende Rechenregel ableiten:
Man erhält das Produkt zweier zweistelliger (ganzer) Zahlen mit gleichen Zehnern und einander zu 10 ergänzenden Einern, indem man zuerst die Zehner mit dem nächsthöheren Zehner, dann die Einer miteinander multipliziert und die beiden Zwischenprodukte addiert.

12.

13.

14. $$\frac{1}{3}c + \frac{28}{3}m - \frac{25}{12}g + \frac{3}{2}$$

15. Mondbahn $\approx$ 2 412 000 000 km.
Die Bahn ließe sich 3,44 mal, also fast $3\frac{1}{2}$ mal mit dem Stoff belegen.

16. Eine der Zahlen muß mindestens gerade sein, da die Summe sonst gerade wäre. Daher ist das Produkt gerade.

17. In etwa 22 Tagen.

18. $$4 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi \cdot l}{4}\gamma = G, \qquad l = \frac{G}{\pi \cdot \gamma \cdot d^2}$$
Die Höhe beträgt rund 10.5 m.

19. a) **1 421 000 Mauersteine**
b) 105,3%

20. a) $v \approx 35{,}5\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$
b) $v_1 \approx 99\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

21. a) **Da $2n+(2n+2)=4n+2$, ist Summe nicht durch 4 teilbar.**
b) **Es bleibt stets der Rest 2.**

22. Nein; denn sie ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der Zahl und der Zahl 3 und damit durch 3 teilbar.
$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$

23. a) um 40%
b) von 36,36 auf 60,61, also um rund 67%

24. a) **Die Fassade ist (29.42+10) m hoch**
b) **Die Fassade ist 61.85 m lang.**

25. $109\,197\,708 : 12 = 9\,099\,809$
Begründung: Zweistelligkeit des 8fachen und Dreistelligkeit des 9fachen liefert 12 usw.

26. Wären a und b nicht teilerfremd, so ließe sich aus $a - b$ und $a + b$ der gleiche Faktor ausklammern, der gegebene Bruch also kürzen.

27. Die Kohleförderung betrug 1960 in der Sowjetunion rund 513 Mill. t.

28. $\mathbf{2\,(m+n)}$

29. $$\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$
Probe: linke Seite
$$\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 1} = 4$$
rechte Seite
$$\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} : \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 1} = \underline{4}$$

30. Gesucht sind x kg Zinkblende
$\frac{65 \cdot x}{100}$ kg Zink vor dem Schmelzen
$\frac{65 \cdot x \cdot 85}{100 \cdot 100}$ kg Zink nach dem Schmelzen, das sind
1000 kg
$$\underline{\underline{x \approx 1810}}$$

31. Der Durchmesser beträgt 9 mm.

32. $$\begin{aligned}(10 + a)(10 + b) &= 100 + 10a + 10b + ab\\ &= 10(10 + a + b) + ab\end{aligned}$$

33. a) Die Fangmenge betrug rund 51 700 t.
b) Die voraussichtliche Fangmenge beträgt rund 169 000 t.

34. Bezeichnet man die Anzahl der Schüler mit x, so erhält man die Gleichung
$$\frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + (x - 17) \cdot 3 + 4 \cdot 4}{x} = 2{,}5$$
und daraus $x = 28$.
28 Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben.

35. 1. Fall: Alle drei Zahlen lassen den Rest 1, dann läßt ihre Summe den Rest 3, ist also durch 3 teilbar.
2. Fall: Alle lassen den Rest 2, dann läßt ihre Summe den Rest 6, ist also auch durch 3 teilbar.
3. Fall: Zwei Zahlen lassen den Rest 1 (bzw. 2) und die dritte den Rest 2 (bzw. 1), dann addiert man eine Zahl, die den Rest 1 läßt, und eine Zahl, die den Rest 2 läßt, und erhält wieder eine durch 3 teilbare Summe.

36. a) Man braucht rund 22 Stunden.
b) Da jeder Mähhäcksler 3,5 t in 20 Minuten aberntet, braucht man insgesamt 4 Hänger.

37. Bezeichnet man die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl mit x, so ist die gegebene sechsstellige Zahl gleich
$$1000 \cdot x + x = 1001 \cdot x$$
Nun ist $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$,
also ist auch die gegebene sechsstellige Zahl durch 7, 11 und 13 teilbar.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44. 21.31 Uhr.

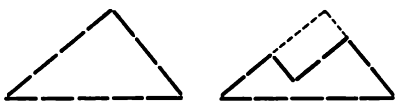
45. Da $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ ist, die Zahl aber durch 9 teilbar sein muß, muß ihre Quersumme 36 betragen, denn $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44$.
Um die kleinste derartige Zahl zu erhalten, nimmt man als erste Ziffern 1023, dann verbleiben für die letzten vier Stellen noch 6, 7, 8, 9; denn $6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Die kleinste vierstellige Zahl aus diesen Ziffern, die durch 8 teilbar ist, ist aber 7896.
Also heißt die gesuchte Zahl 10237896.

46. Es ist $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 5(a - b)^2 + 4ab$.
Beide Summanden sind aber stets positive reelle Zahlen.
Also ist unter den angegebenen Bedingungen
$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$

47. Die Lottozahlen sind: 7, 14, 41, 49, 56

48. $2^{50} \cdot 0{,}1$ mm $\approx 112\,000\,000$ km

49.



$F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Einheiten $F = (6 - 2) = 4$ Einheiten

50. 290 cm

51. Erkenntnis, das es zwei verschiedene Fälle gibt:
Beurteilung des 1. Falles:
Fritz hat sich wirklich erst dreimal geirrt. Dann hat er sich jetzt nicht geirrt, weil er ja die Wahrheit gesprochen hat. Franz hat also in diesem Falle unrecht.
Beurteilung des 2. Falles:
Fritz hat sich bisher nicht dreimal, sondern mehr (oder weniger) als dreimal geirrt. Dann hat er sich eben zwar geirrt, aber bestimmt nicht zum vierten Mal. Infolgedessen hat Franz auch in diesem Fall (und damit in jedem Fall) unrecht.

52.

53. Mehrere Lösungen sind möglich. Im Mittelfeld muß stets 7 stehen, da die Mittelfeldzahl mit allen Zahlen summiert wird und sonst die 11 oder die 3 nicht verwendet werden können ($11 + 7 = 18$ bzw. $3 + 4 = 7$).
Die Zahlen 11 und 3 dürfen nur zweimal in einer Summe auftreten, da $11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$ und andere Kombinationen nicht möglich sind. Sie können daher nicht an den Ecken stehen.
(Beispiel siehe Abb. links unten.)

6	11	4
5	7	9
10	3	8

54.

	Alter	
Steuermann	$2x$	36
Maschinist	$2x - 6$	30
1. Matrose	$\frac{2x - 6 + x}{2}$	24
2. Matrose	$\frac{2x - 6 + x}{2} - 4$	20
jüngster Matrose x		18

Aus der Gleichung erhält man

$$2x - 6 + x - 8 = 40$$
$$3x = 54$$
$$x = 18$$

Er ergeben sich die in der letzten Spalte eingetragenen Alter. Für das Alter des Kapitäns gilt:

$$36 + 30 + 24 + 20 + 18 + z = 28 \cdot 6$$
$$z = 40$$

55. Die Aussagen F 3 und E 2 sind falsch, also hat Brigitte den Ring.

56. Die wichtigsten Überlegungen sind: da mit gleichbleibender Geschwindigkeit gefahren wurde, müssen die Abstände vom 1. zum 2. Kilometerstein und vom 2. zum 3. gleich lang sein. Außerdem kann die letzte Zahl nur mit einer 1 beginnen. So kommt man durch sinnvolles Probieren auf die Zahlen
16, ... 61, ... 106, ..
45 km 45 km
Die Strecke beträgt also 90 km.
Die Geschwindigkeit : $v = \frac{s}{t} = \frac{90\ \text{km}}{3\ \text{h}} = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

57.

	37	38	39	40
Paare	1	3	1	1
rechte Schuhe	1	—	3	1
linke Schuhe	1	2	2	3
es fehlen	—	2 rechte	1 linker	2 rechte Schuhe

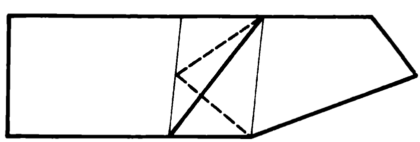
58. Rolf ist 27 Jahre, Inge 18 Jahre alt. Inge sei früher x Jahre alt gewesen. Dann war Rolf damals 2 x Jahre alt. Heute ist also Inge 2 x Jahre, und Rolf somit 3 x Jahre alt. Beide zusammen sind heute 5 x Jahre alt. Daraus erhält man $x = 9$ usw.

59. Es gab ursprünglich 20 Querreihen mit je 15 Stühlen. Jetzt sind es 25 Querreihen zu 12 Stühlen. Nur für den angeführten Fall sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

60. Da $n = 0$ und $e = 5$ sein muß, folgt daraus $o = 9$ und $i = 1$.
Da wegen $f + 1 = s$ unbedingt x ungleich 8 sein muß, ergibt sich für $t = 8$ und für $r = 7$ und somit $x = 4$, $f = 2$ und $y = 6$, $s = 3$.

61. $F_Q = \frac{U^2}{16}$, $F_R = \frac{U^2}{16} - x^2$, $F_Q > F_R$ (für x ungleich 0);
$F_Q = 1$ ha, $F_K \approx 1{,}3$ ha.

62. z. B.

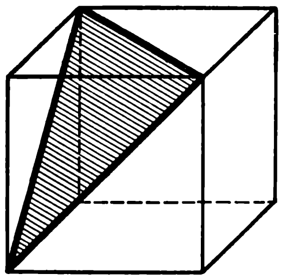


63. Aus dem Nachweis kongruenter Dreiecke folgt
$F_1 : F_2 = 1 : 1$

64.

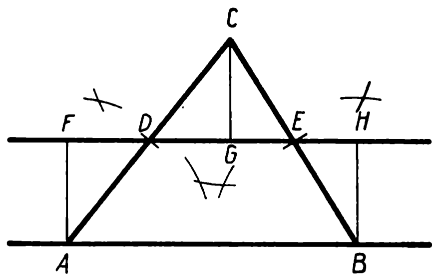
65. $r_a = 4$ cm, $r_b = 2$ cm, $r_c = 6$ cm

66. a) Die Diagonalen dreier anliegender Würfelflächen bilden die Seiten des gleichseitigen Dreiecks.
b)



67.

68. Ich betrachte die drei gegebenen Punkte A, B und C als Eckpunkte eines Dreiecks. Ich halbiere die Seiten AC und BC und erhalte D und F. Durch diese beiden Punkte ziehe ich eine Gerade. Diese Gerade hat von A, B, C den gleichen Abstand.
Konstruktion:



Voraussetzung:
A, B und C liegen nicht auf einer Geraden.
Behauptung: AF = CG = BH.
Beweis:

1. AD = CD nach Konstruktion
Winkel ADF = Winkel CDG Scheitelwinkel
Winkel AFD = Winkel CGD rechte Winkel nach Konstruktion
$\triangle$ ADF $\cong$ $\triangle$ CGD (sww)
folglich ist **AF** = CG

2. CE = BE nach Konstruktion
Winkel CEG = Winkel BEH Scheitelwinkel
Winkel CGE = Winkel EHB rechte Winkel nach Konstruktion
$\triangle$ CEG $\cong$ $\triangle$ BEH (sww)
folglich ist **CG = BH.**

Da nun AF = CG und BH = CG ist, ist auch AF = BH. Dies gilt nach dem Grundsatz:
Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.
Daraus folgt: AF = CG = BG (w. z. b. w.).
Es gibt drei solcher Geraden.
Der Schüler könnte auch folgende Überlegung anstellen: Von den drei Punkten A, B, und C müssen zwei auf einer Seite von der Geraden liegen, die dritte auf der anderen. Wenn A und B auf einer Seite liegen, dann sind alle Geraden, die zu A und B gleichen Abstand haben, Parallelen zu AB. Unter ihnen wäre die zu suchen, die zu A, B, und C gleichen Abstand hat, C also auf der anderen Seite wie A und B liegt. Das ist aber gerade diejenige Parallele zu AB, die durch den Mittelpunkt des Lotes von C auf AB geht. So kann man noch zweimal vorgehen: A allein auf einer Seite und B allein (siehe Abb.).

69. Die Fläche der Rosette ist gleich der Fläche der beiden Kreisabschnitte.

70. Man denke sich durch die Adern senkrecht zur Aderachse einen ebenen Schnitt gelegt. Dann lautet die Frage: Wieviel Kreise gleichen Durchmessers lassen sich so um einen gleichgroßen Innenkreis anordnen, daß sie einander berühren?
Da der Abstand jedes Kreismittelpunktes von den Mittelpunkten der Nachbarkreise stets 2 r beträgt, entstehen aus den Verbindungslinien der Kreismittelpunkte 6 gleichseitige Dreiecke, die ein regelmäßiges Sechseck bilden. Man braucht also einschließlich der Mittelader 7 Adern.

71. Der Kreismittelpunkt liegt
a) auf der Symmetrieachse zu AB und
b) auf der Senkrechten in B zu g.

72. Nein. Die Sehnen könnten als Diagonalen eines Parallelogramms aufgefaßt werden. Das einzige Parallelogramm, um das sich ein Kreis konstruieren läßt, ist aber das Rechteck und bei ihm sind die Diagonalen Durchmesser des Umkreises.

73. Ja. Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Aus Symmetriegründen gehen alle 4 Winkelhalbierenden durch einen Punkt.
Beweis: Kongruenz nach (s, w, w).

74. Es gibt zwei Möglichkeiten.

75. Beweis entweder mit dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel oder durch Zerlegung in gleichschenklige Teildreiecke (Seitenhalbierende).

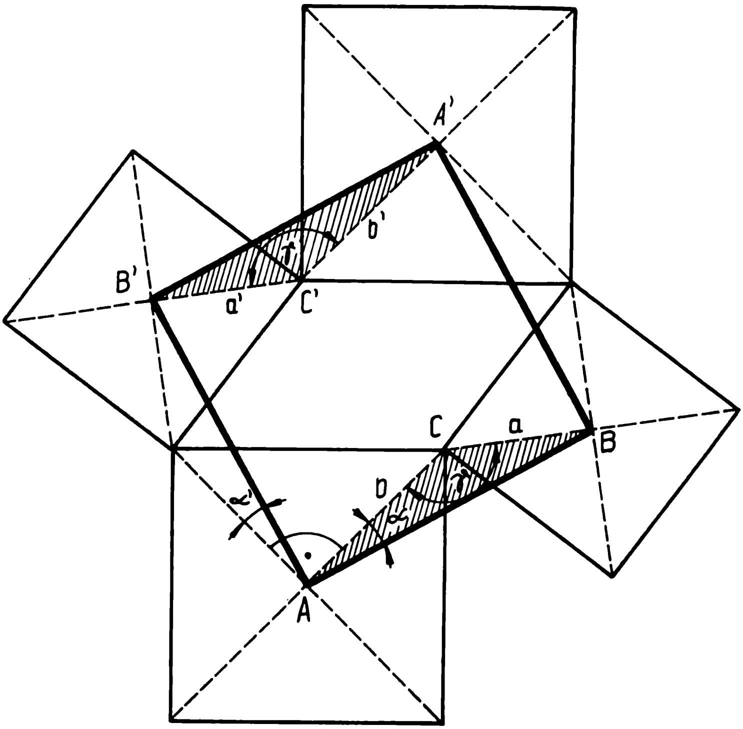
76. a) Konstruktion
b) P Q R S ist ein Parallelogramm (Kongruenz von Teildreiecken)
c) $F_{PQRS} = \frac{5}{9} F_{ABCD}$

77. Z. B.: Ähnliches Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruieren. In C_1 an (a + b) den Winkel $\gamma/_2$ antragen liefert Punkt A.

78. Ich zeichne die Strecke AB = c = 10 cm. Ich teile die Seite c im Verhältnis 2 : 3 und erhalte P. Ich halbiere die Seite c und schlage über M den Thaleskreis. In P errichte ich auf c die Senkrechte, die den Thaleskreis in C schneidet. ABC ist das gesuchte Dreieck.
Die Länge von h_c beträgt $\approx$ 4,9 cm.

Kreisolympiade am 12. und 13. Januar 1965
Bezirksolympiade am 13. und 14. März 1965
DDR-Olympiade vom 3. bis 6. Mai 1965
Im Juli 1965 ist die DDR Gastland für die VII. Internationale Mathematik-Olympiade.

79. Aus der Abbildung geht hervor:



a) Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind gleich groß. Also muß gelten:

AC = A'C'
BC = B'C'

Weiterhin ist ∢γ genau so groß wie ∢γ' und somit ist das Dreieck ABC mit dem Dreieck A'B'C' kongruent. Da so die Kongruenz aller vier Dreiecke nachgewiesen werden kann, ist AB = BA' = A'B' = B'A.

b) Da wegen der Kongruenz $\alpha = \alpha'$ ist, müssen die Seiten rechte Winkel einschließen, womit die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen sind. Siehe Abb.

80. Winkel von 100°, 3 Einheiten auf dem einen Schenkel und 2 Einheiten auf dem anderen abtragen. Endpunkte verbinden.

a) 7 cm auf der Verbindungsstrecke abtragen, Parallele zu einem Schenkel, Parallele zur Verbindungsstrecke.

b) Lot vom Scheitel des Winkels auf die Verbindungsstrecke fällen, 7 cm auf dem Lot abtragen und halbieren. Parallele zur Verbindungsstrecke.

81. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist zweimal Scheitel eines Thaleskreises. Wer zwei gleichgroße Kreise zu Grunde legt, beweist nicht allgemeingültig.

82. a) Von A aus Lot auf g_2 fällen und verlängern ergibt den 2. Dreieckspunkt usw.

b) Liegt A auf einer der senkrecht zu einer anderen stehenden Geraden, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Liegt A auf der dritten Geraden, entsteht kein Dreieck.

83. Man verbindet den Kreismittelpunkt mit den beiden freien Endpunkten der Sehnen. Das ergibt zwei gleichschenklige Dreiecke, deren Kongruenz aus (s, w, w) bewiesen werden kann. Also sind die Sehnen gleichlang.

84. Verbindet man z. B. P mit B, halbiert PB (Halbierungspunkt M), verbindet A mit M und verlängert AM über M hinaus um sich selbst, so erhält man den zweiten Endpunkt X der zu konstruierenden Strecke PX. Diese hat die verlangte Eigenschaft, da ABXP ein Parallelogramm ist.

85. Der Schnittpunkt der Strecke XY mit der Mittellinie EF sei M. Man ziehe durch M die Parallele zu BC oder AD. Den Beweis führt man z. B. mit Hilfe der Kongruenz der entstehenden Dreiecke.

86. Da gleichlange Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkt M haben, müssen sie symmetrisch zu dem Durchmesser durch P liegen. Errichtet man in P auf PM die Senkrechte und halbiert die rechten Winkel, so erhält man die gesuchten Sehnen.

87.

88.

89.

90. Durch jede Seitenhalbierende wird das Dreieck in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt, die ihrerseits aus je drei der in der Aufgabe erwähnten Dreiecke bestehen. Andererseits sind von diesen je zwei untereinander flächengleich, da sie gleiche Grundseite und gleiche Höhe haben. Wenn man beides entsprechend kombiniert, erhält man den Beweis.

91. Es ist
$(s-a)+(s-b)=a+b+c-(a+b)=c$ und ebenso
$(s-a)+(s-c)=b$, bzw.
$(s-b)+(s-c)=a$.
Aus den so konstruierten drei Seiten konstruiert man nun das Dreieck.

92. Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, daß beide zusammen ein Parallelogramm mit $(a+c)$ als Parallelseiten bilden. Dann läßt sich aus $(a+c)$, e und f ein Teildreieck konstruieren. Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes läßt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und einer Trapezseite durchführen.

Klasse 9

1. Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

2. Wie kommt es zu der Formel?
$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

3. Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser. Wie tief war der Teich?

4. Für eine Reihe technischer Anwendungen, z. B. für das Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken.
Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!
$$\begin{array}{ccccccccc} 270 = 1\cdot 2^8 & + & 0\cdot 2^7 & + & 0\cdot 2^6 & + & 0\cdot 2^5 & + & 0\cdot 2^4 \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ L & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccccc} + & 1\cdot 2^3 & + & 1\cdot 2^2 & + & 1\cdot 2^1 & + & 0 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 0 \\ & L & & L & & L & & 0 \end{array}$$

5. An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere. Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

6. Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{Fe} = 7{,}5\ \mathrm{p\cdot cm^{-3}}$) in Quecksilber ($\gamma_{Hg} = 13{,}6\ \mathrm{p\cdot cm^{-3}}$) ein?

7. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

8. Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet um 16.10 Uhr (beachte: 12,00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, daß das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
(Die Flugstrecke beträgt 1630 km.)

9. Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von $\pm$ 0,5 s behaftet war?

10. Gemäß unserem Siebenjahrplan wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen.
Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88 Prozent. Die Produktion von Produktionsmitteln (d. s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95 Prozent, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d. s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77 Prozent.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958 und wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

11. Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade x Jahre alt. Wann ist er geboren?

12. Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet:
$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2+d_1d_2+d_2^2).$$
Dabei ist h die Höhe,
d_1 der untere Durchmesser und
d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:
$$V' = \frac{\pi h}{4}\cdot d^2,$$
wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist
$$\left(d = \frac{d_1+d_2}{2}\right).$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10\,m$
$d_1 = 20\,cm$
$d_2 = 14\,cm$!

b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?

c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V - V'}{V}$ auf, indem Sie $d_1 = d + \delta$, $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

13. Für alle ungeraden Zahlen ist die Differenz n^2-1 durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

14. Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}?
Begründen Sie Ihre Feststellung!

15. Berechnen Sie:
$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right)$$

16. In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff „mittlere Präzision" pm. Nimmt man pm als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfaßt man mit einem Kreis, der einen etwa $4^1/_2$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von pm=0,5 Prozent der Schußweite. Später wollen sie Werte von pm=0,1 Prozent und in ferner Zukunft sogar pm=0,05 Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schußweite 12 500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision pm wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, daß der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

17. Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm³) und möglichst weichem Wasser gekühlt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm³, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,996 g/cm³ haben.
Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser braucht man für 10 Liter Emulsion?

18. Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.

a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?

b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

19. a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen. Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm² Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp. Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm² Querschnitt 0,8 p wiegt?

20. Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt. Es ist zu beweisen, daß unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

21. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93 024. Wie heißen die Zahlen?

22. In den ersten $2^1/_2$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus. Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310 000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.
Wieviel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?
Wieviel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

23. Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her. Nach wieviel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

24. Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben! Wie haben Sie die Lösung gefunden?

25. Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23\,m$ und der Höhe $h = 21\,m$.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wieviel Tonnen Erdöl faßt ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa $0{,}85\,g \cdot cm^{-3}$).

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10 200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je $250\,t \cdot h^{-1}$.
In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wieviel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

26. Im Rahmen des Produktionsaufgebotes senkte im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald" eine Jugendabteilung die Ausschußquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschußquote nur noch $^2/_5$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,— DM.

a) Wieviel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuß vorher?

b) Wieviel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in DM) entspricht der Ausschuß jetzt noch?

27. Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat

von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?
Es ist zu beweisen, daß die Lösung vollständig ist!

28. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt (Begründung!)?

```
xx xxx xxx : xxx = xx xxx
 x xx
 ----
   xx xx
    x xx
    ----
    x xxx
    8 xxx
    -----
        0
```

29. Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41 000 km) in rund 88 Minuten zurück.
Welchen Abstand müßten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 km/Std. auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

30. Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/Std. Es wird gebremst.
a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 m s^{-1} abnimmt?
b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

31. Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $^1/_2$ Elle herunter und in der Nacht wieder $^1/_6$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $^1/_4$ Elle hinunter.
Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

32. Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

33. Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig—Riesa—Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h zurück. Infolge Bauarbeiten muß der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig—Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz—Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 km/h erhöht.
Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

34. Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km.
a) Wieviel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, daß Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)
b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) während des Raumfluges? (Mittlerer Erdradius R = 6370 km)

35. Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, daß dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.
Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

36. Beweisen Sie, daß die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

37. Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

38. a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen?
b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3000 Kugeln zusammenstellen kann?

39. Berechnen Sie:
$$\frac{a-b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{6a^2-6b^2} \cdot \left(1+\frac{b}{a-b}-\frac{1+b}{b}\right) : \frac{b(b+1)-a}{6b}$$

40. Manfred wohnt in einem Ort, der ständig von Flugzeugen überflogen wird, die den Zentralflughafen Schönefeld anfliegen oder dort gestartet sind. Die Flugzeuge haben fast immer die gleiche Flughöhe. Manfred möchte diese gern ermitteln. Er benutzt dazu seine Kamera, eine Praktika, deren Objektiv eine Brennweite von 50 m besitzt. Eine Maschine vom Typ IL-14 fotografiert er genau in dem Augenblick, als sie sich senkrecht über ihm befindet. Auf dem entwickelten Film hat sie eine Spannweite von 2 mm. Da ihm die wirkliche Spannweite mit 31,70 m, also rund 32 m bekannt ist, kann er daraus die Flughöhe ermitteln. In welcher Höhe flog die IL-14?

41. Lösen Sie durch Zeichnung
I. $x - y = 1$
II. $x + 4y = 6$

42. Auf einer Eisenbahn-Nebenlinie wurden mehrere neu errichtete Bahnhöfe in Betrieb genommen. Für alle Stationen dieser Linie sollten neue Fahrkartensätze für den Personenverkehr auf dieser Strecke gedruckt werden, so daß auf jeder Station dieser Linie Fahrkarten für jede schon vorhandene und neu hinzugekommene Station dieser Linie vorhanden sein sollten. Es waren 38 Fahrkartensätze zusätzlich zu drucken. Wieviel Bahnhöfe lagen an dieser Nebenlinie und wieviel waren neu gebaut worden?

43. Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

44. Welche Punkte P (x ; o) sind von dem Punkt P_1 (a ; o) doppelt so weit entfernt wie von P_2 (b ; o)?
Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ($b > a$)

45. Das Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024.
Wie lauten die Zahlen?
Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

46. Gegeben sind die Zahlen $m + n$ und $p - r$, wobei m, n, p, r sämtlich größer oder gleich 0. Gesucht werden die Zahlen x und y, die von $m + n$ doppelt so weit

entfernt sind wie von p — r. (Dabei bedeute „entfernt sein" den Abstand auf der Zahlengeraden.)

47. Zu entziffern ist: $a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$ (Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar!)

48. Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

49. Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

50. Wie kann man unter 9 gleich großen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

51. Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

OTTO	MAIS	OTTO	MAIS	OTTO
— ROSE	— SALZ	— SALZ	— ROSE	— MAIS
4709	2963	3497	4175	534

52. In einem Abteil des Pannonia-Expreß sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, D, E, C und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze).
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:
1. Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
2. Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
3. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
4. B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
5. Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
6. Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbuser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

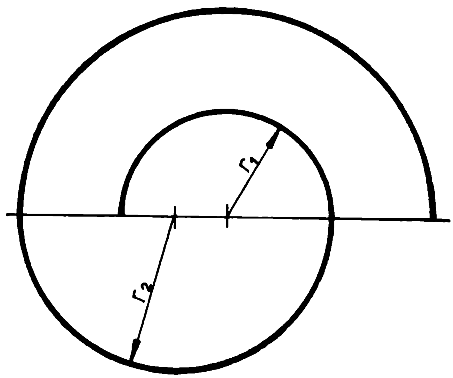
53. Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10 000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat. Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.
Wer gewinnt die Wette?
Begründen Sie die Behauptung!

54. Beim Preisschießen der GST hat ein Schütze mit 5 Schuß auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuß hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?
Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

55. Hans fragt eines Tages seinen neuen Klassenkameraden Peter: „Wie alt ist eigentlich deine Schwester?" Peter lächelt und antwortet: „In 2 Jahren besitzt sie $\frac{1}{3}$ des augenblicklichen Alters meines Vaters; vor 5 Jahren jedoch war mein Vater 5 mal so alt wie sie. Nun überlege, wie alt meine Schwester und wie alt mein Vater ist!"

56. Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:
1. Anna hat den Ball.
2. Brigitte hat den Ball nicht.
3. Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

57. Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

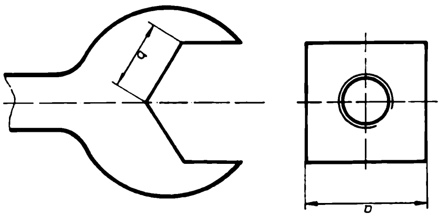


58. Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben.
Wie lang wird dessen Kante a?
Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben.
Wie lang wird deren Radius r_i?

59. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe h_a (— 2; + 2)
b) Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB} = c$ (+ 1; — 3)
c) Mittelpunkt M des Umkreises (+2; + 1)
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau!
(1 cm $\hat{=}$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

60. Eine Vierkantmutter (Kantenlänge a) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.

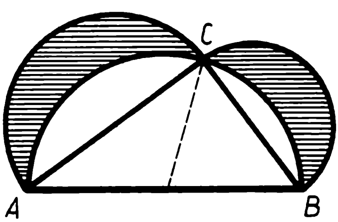
Welche Abmessungen muß b haben, damit der Schlüssel paßt?



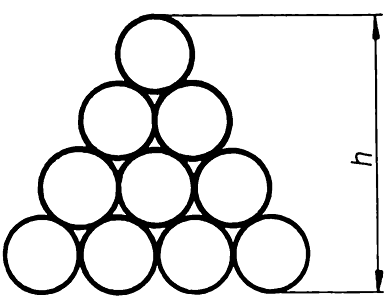
61. Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebnen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks. Man beweise, daß für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen

$$0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5 \quad \text{gelten!}$$

62. „Hippokratische Möndchen". Beweisen Sie folgenden Satz: „Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreicks ABC". (Hippokrates, 440 v. d. Zw. in Athen).

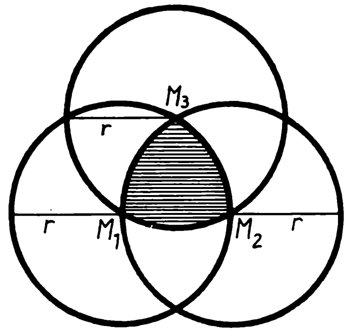


63. Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?



64. In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen. Wie lang sind die gezogenen Rohre?

65. Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (schraffierten) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8 \text{p} \cdot \text{cm}^{-3}$.



66. Zeichnen Sie ein Parallelogramm ABCD! Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten denPunkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'! Was für eine Figur stellt A'B'C'D' dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

67. Konstruieren Sie ein Dreieck aus:
$s_c = 5{,}4$ cm $\qquad c = 6{,}9$ cm
$b = 6{,}2$ cm
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, daß er mit dem Dreieck den Winkel gemeinsam hat und daß die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

68. Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm). Wie muß sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

69. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck ABA'B'. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Vierecksseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie die Aussage!

70. Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelöffnung ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. in C' schneidet. Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit der gleichen Zirkelöffnung, der den Kreis um B in D schneidet. Schlagen Sie nun einen gleichgroßen Kreis um D! Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um F mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden! Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M. Beweisen Sie, daß M Mittelpunkt von AB ist!

71. Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?
Die Behauptung ist zu beweisen!

72. Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, daß dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend! Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur?
Die Behauptung ist zu beweisen!

73. Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$! Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich?
Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch
b) arithmetrisch!

74. Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.
Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, daß PA = PB wird!
Die Konstruktion ist zu begründen!

75. Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende (Mittellinien) gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

76. Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'. Es ist zu beweisen, daß
a) die Dreiecke AA'D und DB'B gleichschenklig sind und
b) es einen Kreis gibt, der durch A,A', B,B' geht!

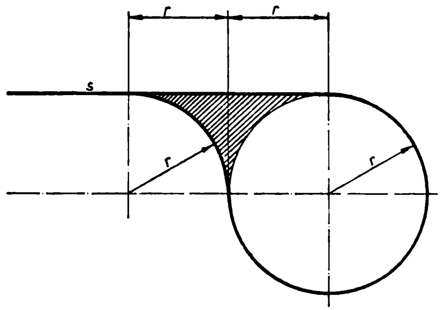
77. Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, daß eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, daß Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

78. Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet! Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist!
Begründen Sie die Konstruktion!

79. Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von 135° miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je 45°.
Beweisen Sie, daß die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

80. In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert. Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.
Wieviel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wieviel in der ganzen Pyramide?

81. An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, daß die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.
a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze.
b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?



82. Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.
Beweisen Sie, daß $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

83. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus:
$a = 5{,}6$ cm
$r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises)
$\gamma = 60°$!
b) Beschreiben Sie die Konstruktion!
c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!
d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

84. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

85. a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wieviel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?
b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?
c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wieviel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

86. Von dem Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:

AB = 6 cm	CD = 4,5 cm
BC = 4 cm	DA = 3 cm

Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

87. Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, daß eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die

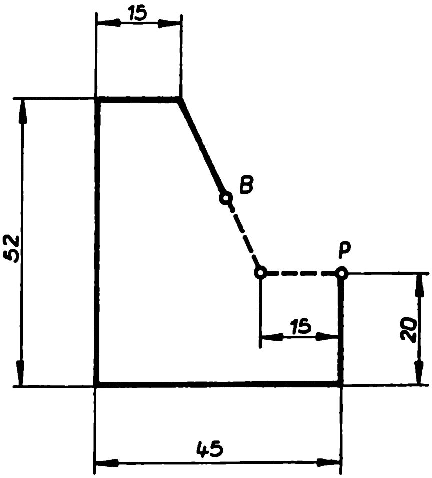
Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.
Begründen Sie die Konstruktion!

88. Zwischen zwei Parallelen liegen zwei Kreise so, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:
   a) Beide Kreise berühren sich von außen.
   b) Jeder Kreis berührt eine der Parallelen.
   c) Die Gerade, die die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, verläuft zu den Parallelen unter einem Winkel von 45°.
   d) Der Radius des ersten Kreises r_1 ist 2 cm lang, r_2 ist doppelt so groß.

   Fertigen Sie eine nichtmaßstäbliche Überlegungsfigur an! Berechnen Sie den Abstand der beiden Parallelen! Überprüfen Sie Ihre Berechnungen an einer Konstruktion!

89. Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez aus seiner Grundseite $a = 6$ cm und dem Radius des einbeschriebenen Kreises $r = 1{,}8$ cm!

90. Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Profils. Vom Punkt P aus soll durch eine Ausrundung mit dem Radius $r = 30$ mm der Übergang zur schrägen Kante hergestellt werden. Konstruieren Sie den Mittelpunkt M des Anschlußbogens und den Berührungspunkt B!

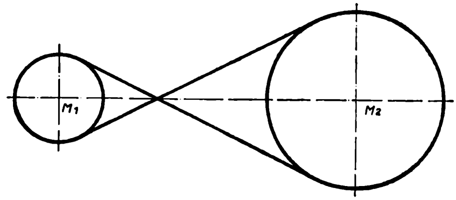


91. Ein Quadrat hat die Fläche von 81 cm^2, ein zweites die von 16 cm^2. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Fläche gleich der Differenz der beiden gegebenen Quadrate ist! Welche Länge hat seine Seite?
(Hilfslinien der Konstruktion müssen sichtbar sein.)

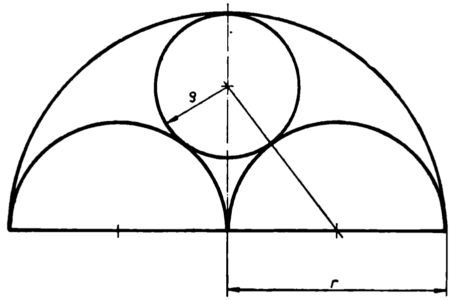
92. Verwandeln Sie durch Konstruktion ein Quadrat mit $F = 25$ cm^2 in zwei gleich große Quadrate! Überprüfen Sie die Genauigkeit der konstruierten Quadratseiten durch Rechnung!

93. Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.
   a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
   b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen!)!

94. Konstruieren Sie die inneren Tangenten an zwei Kreise! ($r_1 = 1{,}5$ cm; $r_2 = 3$cm; Abstand der Mittelpunkte der Kreise beträgt 10 cm).



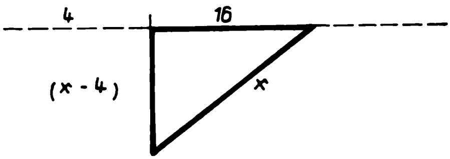
95. Die Abbildung zeigt ein romanisches Motiv. Der Radius des äußeren großen Halbkreises sei $r = 50$ cm. Berechnen Sie den Radius ρ des inneren Vollkreises!



96. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Lösungen:

1. $11 + 9 = 20 \qquad 11^2 + 9^2 = 202$
2.
3. $x^2 = (x-4)^2 + 16^2$
   $x = 34$
   $(34 - 4) = 30$ Fuß beträgt die Teichtiefe.



4. $413 = [110\,011\,101]_2$
5. $U = R \cdot I \quad I \triangleq x \quad (I) \qquad xy = 120$
   $R \triangleq y \quad (II) \quad (y+10)(x-1) = 120$
   $x = 4 \qquad I = 4$ Ampère
   $y = 30 \qquad R = 30$ Ohm
6. $\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$
   $7{,}5 : 13{,}6 = x : 30$
   $x = 16{,}54\ldots \qquad \approx 16\tfrac{1}{2}$ mm Eintauchtiefe.
7. (I) $a + 5 = 12$
   (II) $(10a + 5) - (10b + a) = 54$
   $a = 9 \qquad 93$
   $b = 3 \qquad -39$
   54
8. Berechnung der Flugzeiten: $(2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h)
   Berechnung der Fluggeschwindigkeiten:
   (559 bzw. 502 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$)
   Die Windgeschwindigkeit beträgt rund 28,5 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
9. Gegeben: $s = 100$ km;
   $t = 170$ s
   gesucht: $v\ [\mathrm{km \cdot h^{-1}}]$
   a_1) Umrechnung von t:
   $$170\text{ s} = \frac{170}{3600}\text{ h}$$
   a_2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit:
   $$v = \frac{s}{t}$$
   $$v = \frac{100 \cdot 3600}{170}$$
   $$\mathbf{v = 2117{,}6 \approx 2118}$$
   Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
   b_1) Umrechnung von t:
   $$170{,}5\text{ s} = \frac{170{,}5}{3600}\text{ h}$$
   zeitliche Abweichung nach oben:
   $$v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5}$$
   $$\mathbf{v = 2111{,}4 \approx 2111}$$
   b_2) zeitliche Abweichung nach unten:
   $$169{,}5\text{ s} = \frac{169{,}5}{3600}\text{ h}$$
   $$v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5}$$
   $$\mathbf{v = 2123{,}9 \approx 2124}$$
   Bei einem Zeitfehler von $\pm 0{,}5$ s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa $\pm 6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ behaftet.

10.

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	x	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	y	$\frac{177}{100}y$

Ansatz:

Gesamte Industrieproduktion
= Prod. von Prod.-Mitteln + Prod. von Konsumgütern

(I) $100 = x + y$
(II) $100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y$

Aus (I) + (II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$
$\mathbf{x = 61{,}1}$

Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion.
Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich jetzt:
Sei p der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmittel im Jahre 1965, dann muß gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p$$
$$\mathbf{p = 63{,}4}$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4% der gesamten industriellen Produktion.

11.
12.
13.
14.
15. $\frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{3}{4}$
16. a) Für 0,5 % 62,5 km 281,25 km
    Für 0,1 % 12,5 km 56,25 km
    Für 0,05% 6,25 km 28,125 km
    b) $p_m < 0{,}0018\%$
17. 4 l Öl + 6 l Wasser bzw.
    2 l Öl + 8 l Wasser
18. a) UdSSR: 9 Billionen Tonnen
    USA: 2 Billionen Tonnen
    b) Insgesamt: 15 Billionen Tonnen
    $$\frac{3}{5}x + \frac{2}{15}x + \frac{3}{5}x - 5 \text{ Billionen} = x$$
    $$15 \text{ Billionen} = \frac{5}{15}x = \frac{1}{3}$$
19. a) $x \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = 175000$
    $$x = \frac{175000}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{175000}{176{,}7} \approx 990{,}4$$
    d. s. $\approx 990{,}4$ m

    b) $x \cdot \frac{\pi}{4}d^2 \cdot 0{,}8 = 400000$
    $$x = \frac{400000}{\frac{\pi}{4}d^2 \cdot 0{,}8} = \frac{400000}{0{,}8 \cdot 176{,}7} \approx 2830$$
    d. s. ≈ 2830 m

20. Seien a und b die Ausgangszahlen. Falls $3 | a$ oder $3 | b$, so $3 | a \cdot b$, falls $3 \nmid a$ und $3 \nmid b$, so lassen entweder a und b bei Teilung durch 3 den Rest 1 bzw. 2 oder a läßt den Rest 1 und b den Rest 2 bzw. umgekehrt. Im ersten Falle ist $3 | a - b$, im zweiten Falle ist $3 | a + b$.

21. Es ist $n(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = 93\,024$
Da $10^4 = 10\,000$, ist $n + 3 > 10$
Da $20^4 = 160\,000$, ist $n < 20$
Da $15^4 = 50\,625$, ist $n + 3 > 15$
Da 93 024 nicht durch 15 teilbar, ist $n > 15$
also $15 < n$
Setzt man $n = 16$, so erhält man bereits:
$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93\,024$
Oder Zerlegung in Primfaktoren:
$93\,024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$
Da $n < 20$, müssen die Zahlen 17 und 19 auftreten. Also
$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93\,024$

22. a) $(0{,}5\,x - 310\,000) \cdot 2{,}5 = 1{,}13\,x$
Gleichung
Etwa 7,3 Millionen t
b) Etwa 6,5 Millionen t

23. Der Freund hat $4\frac{1}{2}$ Minuten Vorsprung, also holt ihn Kurt in 9 Minuten ein.

24. Es ist $\frac{2}{5} = 0{,}4$, also $\frac{2n}{5n} = 0{,}4$.
Daraus errechnet man leicht $n = 7$, also $\frac{14}{35}$.

25. a) rund 8700 m^3
b) rund 7400 t
c) 10 h 12 min
d) 7 h 24 min

26. a) 10 Prozent
b) 4 Prozent
c) 2234 DM

27. Für y sind zunächst nur 1,5 oder 6 möglich. Durch Fall-Unterscheidung erhält man $y = 5$ und daher 25 als einzige Lösung. (Systematisches Probieren ist zulässig!)

28. 10008981 : 999 = 10019 Lösung: Begründung (auf verschiedene Weise möglich).

29. Rund 23,3 m.

30. a) Bremszeit
Man verwendet am einfachsten die Formel: $v = b \cdot t$

$$v = b \cdot t \qquad b = 5\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$t = \frac{v}{b} \qquad v = 100\ \mathrm{km/Std.} = \frac{250}{9}\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$t = \frac{250}{9 \cdot 5}$$

$t \approx 5{,}6$ **Die Bremszeit beträgt 5,6 s**

b) Bremsweg
Man verwendet wieder am besten die Formel $s = \frac{b}{2} t^2$

$$s = \frac{b}{2} t^2 \qquad t = \frac{v}{b} \qquad b = 5\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$s = \frac{b \cdot v^2}{2 \cdot b^2} \qquad v = \frac{250}{9}\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$s = \frac{v^2}{2b}$$

$$s = \frac{250^2}{2 \cdot 5 \cdot 9^2}$$

$s = 77{,}16$ **Der Bremsweg beträgt 77 m.**

31. Die Katze erreicht die Maus nach x Tagen.
An jedem Tag klettert die Maus um $\frac{1}{2}$ Elle $- \frac{1}{6}$ Elle $= \frac{1}{3}$ Elle nach unten, die Katze um 1 Elle $- \frac{1}{4}$ Elle $= \frac{3}{4}$ Ellen nach oben, die Tiere kommen sich also um $\frac{3}{4}$ Elle $+ \frac{1}{3}$ Elle $= \frac{13}{12}$ Ellen näher. Das gilt aber für den Tag der Begegnung nicht, hier entfällt das nächtliche Zurückweichen. Am letzten Tag kommen sich die Tiere also um $\frac{3}{2}$ Ellen näher. Also gilt

$$(x - 1) \cdot \tfrac{13}{12} + \tfrac{3}{2} = 60$$

mit der Lösung $x = 55$.
Die Tiere treffen sich am 55. Tag.

32. $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 + 1)(a^3 - 1)$
wegen $(a^3 - 1) = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1)$ folgt
$a^7 - a = a \cdot (a^3 + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$
$a^7 - a = (a^3 + 1)(a - 1)(a^3 + a^2 + a)$,
womit die Behauptung bewiesen ist.
Oder

$$\begin{array}{l}
(a^7 - a) : (a^3 + a^2 + a) = a^4 - a^3 + a - 1 \\
-(a^7 + a^6 + a^5) \\
\quad - a^6 - a^5 - a \\
\quad -(- a^6 - a^5 - a^4) \\
\qquad\qquad a^4 - a \\
\qquad\quad -(a^4 + a^3 + a^2) \\
\qquad\qquad - a^3 - a^2 - a \\
\qquad\quad -(- a^3 - a^2 - a) \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

33. Normale Fahrzeit: 2 Stunden.
Während der Bauarbeiten:

Fahrzeit für die erste Teilstrecke: $\frac{6}{5}$ Std.

Fahrzeit für die zweite Teilstrecke: $\frac{6}{7}$ Std.

Gesamtfahrzeit: $\frac{42 + 30}{35}$ Std. $= \frac{72}{35}$ Std. $= 2\frac{2}{35}$ Std.

$\frac{2}{35}$ Std. $\approx 3{,}5$ Minuten.

Der Zug kommt also rund 3,5 Minuten zu spät an.

34. a) Rund 1 981 000 km.
b) Rund 28000 km h^{-1}.

35. Der Gegenzug bewegt sich scheinbar mit einer Geschwindigkeit von 40 m s^{-1}, das sind 144 km h^{-1}. Seine wahre Geschwindigkeit beträgt also 84 km h^{-1}.

36. Die erste dieser Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe: $k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+999)$ mit 1000 Summanden. Das ergibt aber
$1000 \cdot k + (1 + 2 + \ldots + 998 + 999)$.
Addiert man der Reihe nach $1 + 999$, $2 + 998$ usw. bis $499 + 501$ und berücksichtigt den übriggebliebenen Summanden 500, so erhält man die Summe
$1000\,k + (1000 \cdot 499 + 500)$. Da hier jeder Summand durch 500 teilbar ist, ist die Summe keine Primzahl.
(Einfachere Lösung: Die Summe aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen ist stets gerade.)

37. Ein solches Paar sei a, b, wobei b ungleich 0 ist. Dann ist $a+b = a \cdot b$ und $a \cdot b = \frac{a}{b}$. Daraus erhält man a ungleich 0 und $b^2 = 1$ mit den Lösungen $b_1 = +1$ und $b_2 = -1$. Die Lösung b_1 führt zn einem Widerspruch, da $a+1$ ungleich a ist. Für $b_2 = -1$ erhält man $a = \frac{1}{2}$.

Also ist $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ das einzige Paar reeller Zahlen, das die Bedingungen erfüllt.

38. a) Die Säckchen enthalten 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 und 512 Kugeln.
    b) Man braucht 2 Säckchen mehr, da mit 11 Säckchen höchstens alle Anzahlen von 1 bis 2047 zusammengestellt werden können, also noch ein weiteres Säckchen nötig ist.

39.

40.

41.

42.

43. Die gesuchte dreistellige Zahl sei xyz bzw. $100x + 10y + z$ (mit x, y und z ganzzahlig, $0 \leqq x, y, z \leqq 9$ und x ungleich 0).
Aus je 2 ihrer Ziffern lassen sich 6 zweistellige Zahlen bilden, und zwar
$10x + y$, $10x + z$,
$10y + x$, $10y + z$,
$10z + x$, $10z + y$.
Also gilt: $22x + 22y + 22z = 200x + 20y + 2z$,
oder: $89x - y - 10z = 0$, bzw.
$y = 98x - 10z$.
Diese diophantische Gleichung hat in dem angegebenen Definitionsbereich als einzige Lösung
$x = 1, y = 9, z = 8$.
Die gesuchte Zahl ist also 198.

44. Falluntersuchungen:
(1) $a<x<b$ $\quad x-a = 2(b-x)$ oder
$3x = 2b+a$ d. h.
$$x = \frac{2}{3}b + \frac{a}{3}$$
(2) $a<b<x$ $\quad x-b = b-a$ d. h.
$x = 2b-a$
(3) $x<a<b$ für diesen Fall keine Lösung.

45. Bezeichnet man die erste Zahl mit x, so ist
$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 110\,355\,024$
Daraus folgt: $x^4 < 111\,000\,000$, also
$x < 104$.
Da $104^2 > 10\,800$ und $104^4 > 10\,800 \cdot 10800 > 116\,000\,000$ ist, folgt:
$(x+3)^4 > 100\,000\,000$, also
$x + 3 > 100$, und
$x > 97$.
Nun kann keine der Zahlen x, $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ durch 5 teilbar sein, da sonst auch das Produkt durch 5 teilbar wäre. Da ferner
$97 < x < 104$ ist,
ergibt sich mithin
$x = 101$.
Die Zahlen lauten 101, 102, 103, 104.

46.

47. $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$

48. Eine Tabelle z. B. für 2 Würfel ergibt:

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6		
1	3	2	4	3	5	4	6				
1	4	2	5	3	6						
1	5	2	6								
1	6										

= 21 verschiedene Würfe

Mit 3 Würfeln ergeben sich 56 verschiedene Würfe.

49. Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zu einander verschiedene Stellungen.

50. 1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) (4) (5) (6)
bei Gleichheit
2. Wägung: (7) (8)
bei Gleichheit
bei Ungleichheit (7) (8)
[(7) leichter (schwerer) als (8)]
3. Wägung: (9) (1) (7) (1)
Bei Gleichheit ist (8) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als die anderen Kugeln.
Hierbei ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) ist.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) (4) (5) (6)
[(1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)]
2. Wägung: (1) (2) (3) (7) (8) (9)
bei Gleichheit
3. Wägung: (4) (5)
bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) (7) (8) (9)
[(1) (2) (3) leichter (schwerer) als (7) (8) (9)]
3. Wägung: (1) (2)
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit [(1) leichter oder schwerer als (2)] ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

51. $Z = 0$, $J = 1$, $R = 2$, $S = 3$, $T = 4$,
$L = 5$, $M = 6$, $O = 7$, $E = 8$, $A = 9$

52. Die Lösung durch „Strukturmatrix" liefert:

A, Ingenieur,	Suhl
B, Dreher,	Rostock
C, Kranführer,	Erfurt
D, Kranführer,	Schwerin
E, Dreher,	Cottbus
F, Ingenieur,	Berlin

53. Peter gewinnt.
Er braucht nur 20 000 Schritte zu gehen, während Jürgen $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 149 + 150)$ Schritte, also $2 \cdot 75 \cdot 151$ Schritte $= 22\,650$ Schritte braucht.

54. Es gibt 101 Möglichkeiten, die man aus folgenden 5 Fällen durch Vertauschung bestimmter Summanden erhält:
1) $7 + 7 + 7 + 9 + 10 = 40$ (20 Möglichkeiten)
2) $7 + 7 + 8 + 8 + 10 = 40$ (30 Möglichkeiten)
3) $7 + 7 + 8 + 9 + 9 = 40$ (30 Möglichkeiten)
4) $7 + 8 + 8 + 8 + 9 = 40$ (20 Möglichkeiten)
5) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$ (1 Möglichkeit)

55.

56. 1. Fall: Angenommen, die Aussage 1 sei wahr. Dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber im Widerspruch zu der Aussage 1, da nicht zwei Schülerinnen den Ball haben können.
2. Fall: Angenommen, die Aussage 2 sei wahr, d. h. Brigitte hat den Ball nicht. Dann sind die Aussagen 1 und 3 falsch. Also hat Claudia die

Schere. Anna hat den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.

3. Fall: Angenommen, die Aussage 3 sei wahr. Dann sind die Aussagen 1 und 2 falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

57. a) $r_{10} = 5{,}5$ cm

b) $(r_1 + r_2 + r_2 + \cdots + r_{10}) \cdot \pi \approx 102{,}1$ cm

58. $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$r = \frac{a}{b}$ bzw. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

59.

60. $b = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

61.

62. $F_{\text{Möndchen}} = F_{\text{Dreieck ABC}} + F_{\text{Halbkreis über a}} + F_{\text{Halbkreis über b}} - F_{\text{Halbkreis über c}}$

$$F_M = F_\triangle + \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} - \frac{c^2\pi}{8}$$

$$F_M = F_\triangle + \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) \quad a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

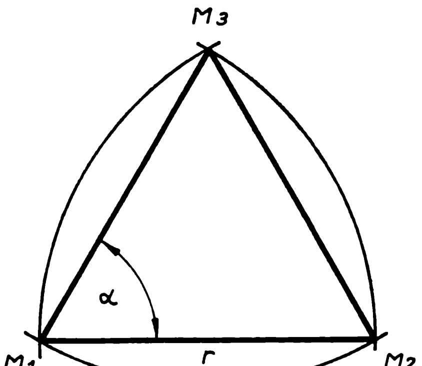
$$F_M = F_\triangle$$

63. ≈ 187 cm.

Allgemein: $h = d + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot d \cdot \sqrt{3}$

64. Die gezogenen Rohre sind 5,28 m lang.

65.



$$F = F_{\text{Dreieck } M_1M_2M_3} + 3\,F_{\text{Segmente}}$$

$$F = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2}$$

$F \approx 0{,}845$ cm²

$G \approx 6{,}6$ p

66. A'B'C'D' ist ein Parallelogramm.

67. Die gesuchte Gegenecke liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels (Diagonale des Rhombus).

68. Gegeben: Radius des kleinsten Kreises $r_1 = 2$ cm,

gesucht: die Radien des 4 übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen (r_2, r_3, r_4, r_5).

Es ist gefordert, daß

$$\begin{aligned} F_1 &= \pi r_1^2 \\ &= F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \\ &= F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \\ &= F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) \\ &= F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2) \text{ sein soll.} \end{aligned}$$

Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$;

bei Division durch π ergibt sich dann:

$$r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 \rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3}$$

$$r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4}$$

$$r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 \rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5}$$

Berechnung: $r_1 = 2$ cm

$r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$ cm

$r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$ cm

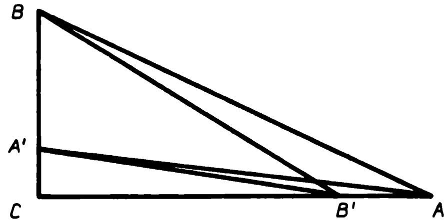
$r_4 = 2\sqrt{4} = 4{,}000$ cm

$r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}472$ cm

Inge muß für die Radien folgende Größen wählen:

$r_1 = 2$ cm, $r_2 \approx 2{,}8$ cm, $r_3 \approx 3{,}5$ m, $r_4 = 4$ cm, $r_5 \approx 4{,}5$ cm.

69.



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

I im Dreieck A'B'C'	$A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$
II im Dreieck BB'C	$BC^2 + B'C^2 = BB'^2$
III im Dreieck AA'C	$A'C^2 + AC^2 = AA'^2$
IV im Dreieck ABC	$BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = ((B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2.$$

Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.

Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2.$$

Damit ist bewiesen, daß die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

70.

71. Bei allen rechtwinkligen Dreiecken Beweis durch Strahlensatz.

72. Es entsteht ein Rhombus, dessen Seiten jeweils halb so lang sind wie die zu ihnen parallele Diagonale. Sein Umfang beträgt also $u = 4 \cdot r = 12$ cm.

73. a) Beweis geometrisch etwa durch Aneinanderfügen der Dreiecke usw.

b) Es ist: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Behauptet wird:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}.$$

Das ist aber:

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1}.$$

74. Man ziehe eine Parallele durch P zu einem der Schenkel. Ihr Schnittpunkt mit dem anderen Schenkel ist die halbe Strecke SA oder SB.

75. Beweis z. B. über Kongruenz entstehender Teildreiecke (sws) möglich.

76. a) Beweis (z. B. über Basiswinkel und Winkel an Parallelen oder Sehnentangentenwinkel).
b) Beweis (Tangentenlänge; gleichschenklige Dreiecke).

77. Die Radien zu den Ecken der beiden Figuren sowie die Lote vom Mittelpunkt des Kreises auf die nichtparallelen Trapezseiten liefern kongruente Teildreiecke (Winkel beobachten!) usw.

Es ist nachzuweisen über den Kongruenzsatz wws, daß die Dreiecke

$\triangle MEE_1 \cong \triangle MBE_2$ und $\triangle ME_1F \cong \triangle ME_2C$,

weiterhin

$\triangle MFF_1 \cong \triangle MA_1B$.

Über Winkelbeziehungen an rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken ist dieses möglich.

Auf der linken Hälfte des Dreiecks ABC gilt dann entsprechendes.

78. Man denke sich einen der beiden Punkte an der Geraden gespiegelt. Die Verbindungsgerade zwischen dem Spiegelbild des einem und dem anderen Punkt liefert den gesuchten Punkt P (Beweis über kongruente Dreiecke).
Lot von A auf g und $AC = A'C$.
A' mit B verbinden, diese Verbindungsstrecke schneidet g in P. Dann ist $\sphericalangle APC = \sphericalangle CPA'$ ($\triangle APC \cong \triangle CPA'$ Kongruenzsatz sws) und demzufolge auch
$\sphericalangle CPA' = \sphericalangle BPD$ (Scheitelwinkel).
Daraus ergibt sich $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$.

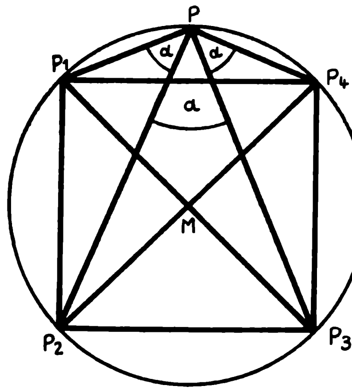
79. M sei der Mittelpunkt des gegebenen Kreises; P_1, P_2, P_3 und P_4 seien die Endpunkte der 4 Sehnen.
Dann gilt: $\sphericalangle P_2MP_3 = 2\alpha$ als Zentriwinkel über der Sehne $\overline{P_2P_3}$ mit $\alpha = \sphericalangle P_3PP_2$ als Peripheriewinkel; und entsprechend zu den Sehnen $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$

$$\sphericalangle P_3MP_4 = 2\alpha \quad \text{und} \quad \sphericalangle P_2MP_1 = 2\alpha.$$

Ferner ist $\sphericalangle P_1MP_4 = 2\,(180° - 3\alpha)$ auf Grund der Beziehungen zwischen Peripherie- und Zentriwinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{P_1P_4}$.
Wegen $\alpha = 45°$ gilt also

$$\sphericalangle P_1MP_4 = \sphericalangle P_4MP_3 = \sphericalangle P_3MP_2 = \sphericalangle P_2MP_1 = 90°.$$

Vier Zentriwinkel von je 90° bilden aber zwei senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser. Damit sind also P_1P_3 und P_2P_4 Diagonalen des entstandenen Vierecks, die senkrecht aufeinander stehen und (da es sich um Durchmesser handelt) gleich lang sind. Ein Viereck mit gleich langen und senkrecht aufeinanderstehenden Diagonalen ist ein Quadrat.



80. x: Mittelpunkt der nächsten Schicht

1. Schicht:	$1 + 2 + 3 + \ldots + 8$	$=$	36
2. Schicht:	$1 + 2 + 3 + \ldots + 7$	$=$	28
3. Schicht:	$1 + 2 + 3 + \ldots + 6$	$=$	21
4. Schicht:	$1 + 2 + 3 + \ldots + 5$	$=$	15
5. Schicht:	$1 + 2 + 3 + 4$	$=$	10
6. Schicht:	$1 + 2 + 3$	$=$	6
7. Schicht:	$1 + 2$	$=$	3
8. Schicht:	1	$=$	1
Summe			120

81. a) Gleislänge:

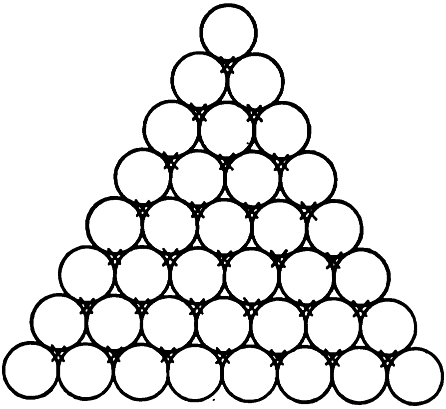
$$l = 2\pi r + 2r$$
$$l = 2r\,(\pi + 1).$$

b) Flächenstück:
Beachten Sie, daß sich die schraffierte Fläche als Differenz zwischen dem Rechteck und den beiden Viertelkreisen ergibt.

$$F = \pi r^2 + \left(2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}\right)$$
$$F = 2r^2\left(\frac{\pi}{4} + 1\right).$$

Es ist nicht das Wissen,
sondern das Lernen,
nicht das Besitzen,
sondern das Erwerben,
nicht das Da-Sein,
sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.

Gauß an Bolyai



82.

Beweis zu 82:

$$2\,\overline{EA}^2 = d^2 \text{ nach Pythagoras}$$

$$d^2 = e^2 + g^2 \text{ nach Pythagoras}$$

$$2\,\overline{EA}^2 = e^2 + g^2 = 2\,\overline{ED}^2.$$

Entsprechend gilt für die anderen Dreiecke:

$$2\,\overline{HD}^2 = 2\,\overline{CH}^2 = g^2 + f^2;$$

$$2\,\overline{AF}^2 = 2\,\overline{FB}^2 = e^2 + h^2$$

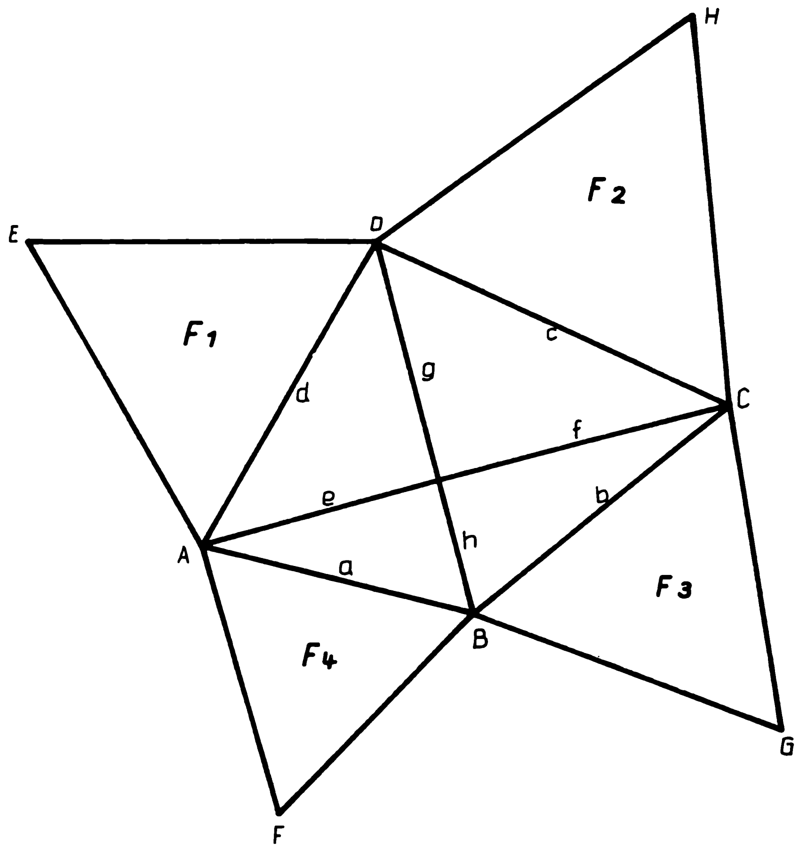
$$2\,\overline{BG}^2 = 2\,\overline{GC}^2 = f^2 + h^2$$

also:

$$\frac{1}{2}\,(\overline{EA}\cdot\overline{ED} + \overline{BG}\cdot\overline{CG}) = \frac{1}{4}(e^2 + g^2 + h^2 + f^2)$$

$$\frac{1}{2}\,(\overline{AF}\cdot\overline{FB} + \overline{DH}\cdot\overline{CH}) = \frac{1}{4}(e^2 + h^2 + g^2 + f^2)$$

Hieraus folgt die Behauptung.



Beh.: $\frac{1}{2}\,(\overline{EA}\cdot\overline{ED}+\overline{BG}\cdot\overline{CG}) = \frac{1}{2}(\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{DH}\cdot\overline{CH})$

Vorauss.:

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{EA} = \overline{ED}\\ \overline{EA} \perp \overline{ED}\end{array}\right\}\ \text{usw. für die anderen Dreiecke}$$

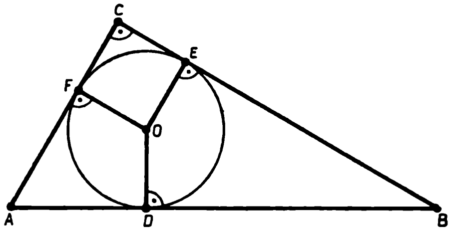
83 a) und b) Man schlägt um einen Punkt M den Kreis mit dem Radius r und zeichnet in diesen Kreis eine Sehne $\overline{BC}$ von der Länge a. An $\overline{BC}$ trägt man in C den Winkel an, dessen freier Schenkel den Kreis in A schneidet. ABC ist das verlangte Dreieck.

c) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ sei D, dann ist

$$\overline{AD} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = 2{,}1 \text{ cm}.$$

d) Ist $r < \frac{a}{2} = 2{,}8$ cm, so ist die Konstruktion nicht möglich, da die Sehne eines Kreises nicht größer als sein Durchmesser sein kann.

84. Es sei O der Inkreismittelpunkt und $\overline{EO} = \overline{FO} = \overline{DO} = \varrho$. Dann ist $\overline{FO} = \overline{CE} = \overline{FC}$ (Quadrat), also $\overline{FC} + \overline{CE} = 2\varrho$.



Ferner ist $\overline{EB} = \overline{DB}$ und $\overline{AF} = \overline{AD}$ (Tangentenabschnitte), also $\overline{AF} + \overline{EB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 2r$, da der Umkreismittelpunkt (Thaleskreis) auf der Seitenmitte von $\overline{AB}$ liegt. Mithin ist $\overline{AC} + \overline{CB} = 2r + 2\varrho$.

85. a) Jeder Punkt kann mit 4 anderen verbunden werden. Dabei kommt jede Verbindungsstrecke doppelt vor. Es gibt also bei 5 Punkten 10 Verbindungsstrecken.

b) Bei 10 Punkten gibt es aus dem gleichen Grunde $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Verbindungsstrecken.

c) Nach analogen Überlegungen erhält man für n Punkte genau $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Verbindungsstrecken. (Von den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $(n-1)$ und n ist stets genau eine durch 2 teilbar.)

86. Man zeichnet AB und trägt von A aus die Strecke CD auf AB ab. Ihr anderer Endpunkt sei A'. Dann läßt sich nach (s, s, s) das Teildreieck A' B C konstruieren ....

87. Man zeichnet durch einen beliebigen Punkt D der Seite AB die Parallele zu BC. Ihr Schnittpunkt mit AC sei E. Über DE wird das gleichseitige Dreieck EDF so errichtet, daß F außerhalb des Dreiecks ADE liegt und die Verbindungsgerade AF die Strecke BC in F' schneidet. Die Parallele durch F' zu FD schneidet AB in D', die Parallele durch F' zu EF schneidet AC in E'. D'F'E' ist das gesuchte Dreieck.

88.

89.

90.

91.

92.

93. Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man den Abbildungen.

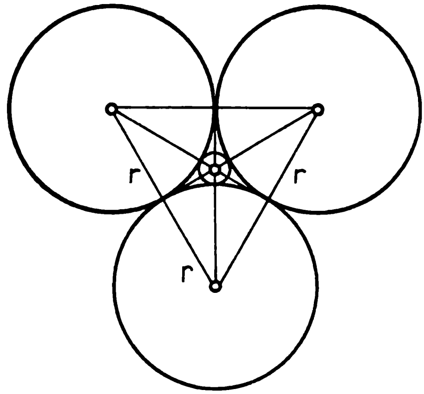
a) Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Daraus ergibt sich die Konstruktion.

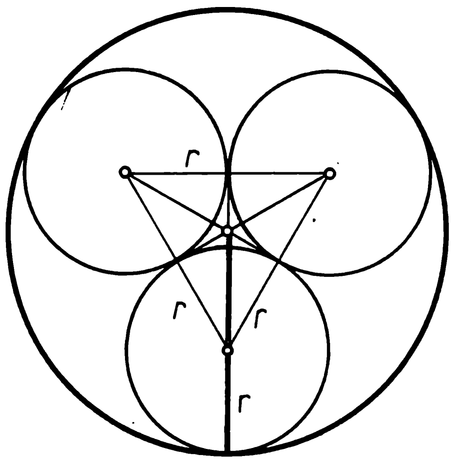
b) Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 teilen, ergibt sich:

$$r + r_1 = \frac{2}{3} r \sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad r_1 = \frac{2}{3} r \sqrt{3} - r \quad \text{oder}$$

$$r_1 + r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right) \approx 0{,}15\,r$$

$$r_2 = 2r + r_1 \quad \text{oder} \quad r_2 = r\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \approx 2{,}15\,r.$$





94.

95.

96. In dem Trapez ABCD seien die einander parallelen Grundseiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = c$ und die Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$.

Die Parallele zu AC durch B schneidet die Gerade CD in F. Dann ist $\overline{CF} = a$, also $\overline{DF} = a + c$ und $\overline{BF} = e$.

Da das Dreieck rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras

$$e^2 + f^2 = (a + c)^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Klasse 10

1. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?
2. Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden. In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muß die Verpflegungsbombe ausgelöst werden, damit sie ihr Ziel erreicht?
   $(g = 10\ m/s^2)$
3. Zerlege 900 so in zwei Summanden, daß die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!
4. Bestimmen Sie die Unbekannten aus:
   $2^x \cdot 2^y = 2^{22}$
   $x - y = 4$
5. Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd ($P_2\,0_5$) erhalten. Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?
6. Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?
   a) $\sin x = \sin 69^\circ$
   b) $\tan(\frac{x}{2} + 32^\circ) = 1$
   c) $\sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2.$
7. Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10 Prozent. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
   Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
   in den nächsten 10 Jahren,
   in den nächsten 20 Jahren,
   bis zum Jahre 2000
   anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10 Prozent zugrunde legt!
8. Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100 000 km der Venus nähern.
   a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
   (Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmond**scheibe** bzw. der Venus**scheibe** und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben)
   b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
   Monddurchmesser: 3 476 km
   Venusdurchmesser: 12 220 km
   Entfernung Erde—Mond: 384 000 km
9. Unter der Zahl „n!", gelesen „n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
   So ist z. B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
   Wieviel Nullen hat die Zahl „50!" (50 Fakultät)?
   Begründen Sie Ihre Antwort!
10. In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genau so viel Gas erzeugt wie im zaristischen Rußland während des gesamten Jahres 1913.
    Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!
11. Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke). An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
    a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug? (in km/h)
    b) Wie lang ist der Zug?
12. Gegeben ist die Zahl $x = 9^{(9^9)}$
    a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden).
    b) Wie lang müßte der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?
    c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?
13. Im Jahre 1970 wird die Sowjetunion mindestens 900 Md. kWh und 1980 wenigstens 2700 Md. kWh Elektroenergie erzeugen. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1475 Md. kWh bzw. 2230 Md. kWh an.
    Wann wird die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?
14. An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen a = 120 mm; b = 60 mm; c = 17 mm soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine. Folgende Einstellungen sind möglich:
    1. 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm
    2. 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm
    a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?
    b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen: a = 150 mm; b = 50 mm; c = 17 mm?
    Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.
15. Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU berichtete Genosse Chruschtschow über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben. In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais. Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha. Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?
16. Mit welcher Ziffer endet die Summe
    $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
    Begründen Sie Ihre Aussage!
17. Die Bauern aus den LPG des Bezirkes Neubrandenburg haben ihre Schlußfolgerungen aus dem VII. Deutschen Bauernkongreß gezogen. Sie werden dafür sorgen, daß die Ernteerträge an Kartoffeln im Vergleich zum Vorjahr um

100% steigen. In der Presse soll diese Verpflichtung mit einem Diagramm veröffentlicht werden.
In der Redaktion der Bezirkszeitung berät man, ob zur Veranschaulichung 2 Streifen gleicher Breite, 2 Quadrate oder 2 Würfel gezeichnet werden sollen.
In welchem Verhältnis stehen die Maße der zweiten Bilder zu denen der ersten Bilder?

18. Gegeben sind 2 Zahlen a und b. Welche Bedingungen müssen diese Zahlen erfüllen, damit das Gleichungssystem
$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1 \cdot x_2 = b$$
reell lösbar ist?

19. Wie Genosse Chruschtschow in seiner Rede über das Programm der Kommunistischen Partei der Sowjetunion auf dem XXII. Parteitag mitteilte, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d. s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie. Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8fache steigen, Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) wird stark anwachsen, sie wird auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2fache.
a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?
b) Wieviel Prozent wird er im Jahre 1980 betragen?

20. Auf einem Fluß mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück. Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.
a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?
b) Welches Ergebnis erhält man für
$$s = 250\ \text{m},\ v = 150\ \text{m} \cdot \text{min}^{-1} \text{ und } c = 250\ \text{m} \cdot \text{min}^{-1}?$$

21. Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Berechnen Sie s^2 und s^3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

22. Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer!

23. Es ist die **kleinste** natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;
b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

24. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen m die Zahl
$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$ immer eine natürliche Zahl ist!

25. Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, daß die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

26. Die von einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4%. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6% übererfüllt.
Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

27. Berechnen Sie:
$${}^2\log\frac{1}{256} + {}^2\log\frac{1}{128} + {}^2\log\frac{1}{64} + {}^2\log\frac{1}{32} + \cdots + {}^2\log\frac{1}{2}$$
$$+ {}^2\log 1 + {}^2\log 2 + \cdots + {}^2\log 64 + {}^2\log 128!$$

28. Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wieviele Lösungen gibt es?

29. Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

30. Bestimmen Sie alle Paare (x; y) der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ ist!

31. Beweisen Sie, daß für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

32. Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4235 g. Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule?
(Dichte des Kupfers $\varrho = 8{,}93\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.)

33. Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:
$$\frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} \quad \text{oder} \quad \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}\ ?$$
Begründen Sie ihre Behauptung!

34. a) Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

35. Wo steckt der Fehler?
$$y = 6 - \frac{4}{3}x$$
$$4x + 3y = 12$$
$$4x + 3\left(6 - \frac{4}{3}\right) = 12$$
$$4x + 18 - 4x = 12$$
$$18 = 12$$

36. Berechnen Sie: $\lg\{5 + \lg[5 + \lg(5 + \lg 5{,}7604)]\}$.

37. Stellen Sie folgende Funktion graphisch dar:
$$y = \frac{2}{3}\left\{\frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} + \sqrt{36 - x^2}\right\}$$

38. Ein Dreher erhält die Aufgabe, zwei Zahnräder anzufertigen, die folgenden Anforderungen genügen sollen:
Das erste Rad soll 210 Umdrehungen in der Minute machen, das zweite, dessen Umfang 47,1 cm größer sein soll, ist für 120 Umdrehungen in der Minute bestimmt.
Welchen Durchmesser hat jedes der beiden Räder?

39. Berechnen Sie logarithmisch:
$$x = \sqrt[3]{\frac{17{,}46 \cdot \sqrt{0{,}384} - 18{,}49 \cdot \sqrt[3]{0{,}0324}}{8{,}59 \cdot \sqrt{2{,}345} - 19{,}62 \cdot \sqrt[3]{0{,}4567}}}$$

40. Lösen Sie folgende Gleichung (mit Probe):

$$\frac{5}{x+1}+\frac{6}{x+2}-\frac{14}{x-3}=0.$$

41. Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf und führen Sie alle möglichen Proben durch!

$$\frac{x-8a}{8x-48a}-\frac{2ax+5a^2}{x^2-36a^2}+\frac{72a+13x}{24x+144a}=\frac{5}{12}$$

42. Ist der Ikarus 55 voll belastet, so kommt auf 187,5 kp seines Leergewichts eine Person (Nutzungsverhältnis). Fehlen an der vollen Besetzung 18 Personen, so beträgt das Nutzungsverhältnis 322,5 kp/Person. Berechnen Sie die Personenzahl bei der vollen Besetzung und das Leergewicht des Ikarus 55!

43. Eine Spule enthält $2{,}4 \cdot 10^4$ Windungen eines Kupferdrahtes mit 0,15 mm Durchmesser. Sie ist zylindrisch gewickelt und hat einen mittleren Durchmesser von 3,9 cm. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $R=\varrho\cdot\frac{l}{q}$ den Widerstand der Spule logarithmisch!
Der spezifische Widerstand von Kupfer

$$\varrho=1{,}75\cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega\cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}.$$

44. Von A fährt ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nach B. Zu gleicher Zeit fährt ein zweiter Kraftwagen mit $70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von B nach A. Die Entfernung AB beträgt 140 km. Nach wieviel Minuten Fahrzeit und wieviel km von A entfernt treffen sie sich?

45. Eine Messinglegierung enthält 35,5 % Zink und 1,4% Blei; der Rest ist Kupfer. Wieviel p der genannten Metalle enthält eine Messingplatte $400\cdot 300\cdot 4$ (in mm), $\gamma = 8{,}5\ \mathrm{p/cm^3}$?
(Die angegebenen Prozente sind Gewichtsprozente!)

46. $$\frac{x+3}{6x+12}-\frac{7}{6x+18}-\frac{2x+2}{(3x+9)(x+2)}=\frac{x-2}{6x+12}-\frac{1}{x+2}+\frac{5}{(2x+4)(x+3)}$$

47. Verwandeln Sie in eine fortlaufende Proportion

$$a:b=6:5$$
$$b:c=4:3$$
$$a:d=8:11$$

48. Ein rechteckiges Blumenbeet in einem Schulgarten in den Ausmaßen 9 m × 8 m soll von einem überall gleich breiten Rasenstreifen umgeben werden, der ein Viertel so groß wie die Beetfläche ist.
Berechnen Sie die Breite des Rasens!

49. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{4a^3-4a^2b+ab^2}{a^2b-4ab^2+4b^3}}$$

50. Bestimmen Sie x der nachfolgenden Gleichung:

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\cdot x-5\right)-5\right]-5\right\}-5=0$$

51. Eine vierstellige Zahl wird in der Mitte geteilt. Es entstehen zwei zweistellige Zahlen, deren Produkt 1458 ist. Die Summe der beiden zweistelligen Zahlen verhält sich zur ursprünglichen Zahl wie 1:34.
Wie heißt die vierstellige Zahl?

52. Ermitteln Sie (auf mathematischem Wege) diejenige positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert das gleiche ergibt als zu sich selbst addiert!

53. Man löse die Gleichung $\lg(2x+1)-\lg x=2$!

54. Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0$, $b > 0$).
Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor.
Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308.
Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
Wie heißen die Zahlen a und b?

55. Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n der Term n^3+11n durch 6 teilbar ist!

56. Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$ und $x>2,\ y>2$!

57. Jemand behauptet $|\tan\beta+\cot\beta|\geqq 2$.
a) Die Behauptung ist zu beweisen!
b) Jemand schlußfolgert aus $|\tan\beta+\cot\beta|=|\tan\beta|+|\cot\beta|$ und daraus, daß tan und cot jeden beliebigen Wert annehmen können — also auch a und b: $|a+b|=|a|+|b|$.
Das ist aber offensichtlich nicht richtig! Wo steckt sein Fehler?

58. Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit $80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

59. Gegeben seien die Zahlen $Z_1=\sqrt{7}+\sqrt{10}$ und $Z^2=\sqrt{3}+\sqrt{19}$. Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

60. Wieviel Endnullen hat das Produkt
$p_1^1\cdot(p_1^2\cdot p_2^1)\cdot(p_1^3\cdot p_2^2\cdot p_3^1)\cdots(p_1^{100}\cdot p_2^{99}\cdot p_3^{98}\cdots p_{98}^3\cdot p_{99}^2\cdot p_{100}^1)$?
Dabei sind $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

61. Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:
„Sie heißt III Z .... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22. Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche“.

62. Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vorn streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

63. Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
Hinweis: 1. Zahl ?????1

2. Zahl 1?????

b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung Sie zur Lösung kamen!

64. Hans Heinz Lassen will seinem Freunde seine Telefonnummer in verschlüsselter Form mitteilen. Er schreibt auf eine Postkarte:

$$\begin{array}{r} \text{HANS} \\ +\ \text{HEINZ} \\ \hline \text{LASSEN} \end{array}$$

Wie lautet seine Telefonnummer?
Wie haben Sie die Lösung gefunden?
Anmerkung: Jeder Buchstabe bedeutet eine Zahl zwischen 0 und 9. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen.

65. Peter sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das?
Begründen Sie Ihre Antwort!

66. Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17 380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe?
Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

67. Beim Fußball-Toto ist auf dem Tipschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird.
Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tipscheine müßte jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte?
Der Lösungsweg ist zu begründen.

68. Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

69. Hans hat die Aufgabe, an jedem Wochenende alle Schuhe der fünfköpfigen Familie zu putzen. Er stellt fest, daß es zusammen viermal soviel Schuhe sind, wie er selbst hat. Sein Bestand beträgt zwei Paar mehr, als jede seiner beiden Schwestern hat, die wiederum 50 Prozent mehr Schuhe als der Vater besitzen. Dem Vater dagegen gehört ein Paar Schuhe weniger als der Mutter. Wieviel Paar Schuhe muß Hans putzen?

70. Auf einem Flugplatz der Deutschen Lufthansa stehen doppelt soviel viermotorige wie einmotorige Flugzeuge und doppelt soviel zweimotorige wie viermotorige Flugzeuge. Die Gesamtzahl der Motoren beträgt 34. Wieviel Flugzeuge jeder Gattung sind vorhanden? (Lösung darf auch durch Knobeln ermittelt werden!)

71. Wenn du den Geburtstag deines Freundes „erraten" willst, forderst du ihn auf, folgendermaßen zu rechnen: Multipliziere die Tageszahl mit 7! Addiere zu dem Ergebnis 3! Multipliziere die Summe mit 2! Addiere die Monatszahl und subtrahiere 6! Das Endergebnis läßt du dir sagen. Wie kannst du daraus das Geburtsdatum erhalten? Wann hat Heinz Geburtstag, wenn er dir als Ergebnis 263 nennt? Was ergibt sich aus Jürgens Ergebnis 97?

72. In einer Produktionsberatung macht Brigadier Lerch den Vorschlag, aus Rationalisierungsgründen Nägel nur noch in Paketen zu 3 und 5 kg zu verpacken. Er gibt an, daß sich mit solchen Packungen jede gewünschte (ganzzahlige) Kilomenge von Nägeln von 8 kg aufwärts liefern läßt. Begründe das!
Eignen sich auch Pakete von 4 kg und 7 kg dazu, und — wenn ja — von welcher Menge an läßt sich hier jede Lieferung ausführen?

73. Unter den 500 Schülern der 5. bis 10. Klassen einer sportfreudigen Oberschule wurde eine Umfrage nach den aktiv betriebenen Sportarten veranstaltet. Sie hatte folgendes Ergebnis: 330 Schüler spielen Handball, 210 gehen zum Schwimmen, 150 treiben Leichtathletik, 75 betreiben Schwimmen und Handball, 80 Schwimmen und Leichtathletik, 60 Leichtathletik und Handball. Ob und wieviel Schüler überhaupt keinen Sport treiben, wurde nicht festgestellt. Wieviel Schüler betreiben im Höchstfall alle drei Sportarten gleichzeitig?

74. Peter stellt gegenüber Hans die Behauptung auf, Schuhnummer und Alter anderer Personen wie folgt „erraten" zu können: Er sagt zu Hans:
„Multipliziere deine Schuhnummer (als ganze Zahl ausgedrückt) mit 2 (4; 5) und addiere zum erhaltenen Produkt die Zahl 11 (14; 23). Multipliziere die Summe mit 50 (25; 20) und addiere 1412 (1612; 1502) hinzu — bzw. 1413 (1613; 1503) falls du in diesem Jahre schon deinen Geburtstag gefeiert hast. Subtrahiere nunmehr dein Geburtsjahr und nenne mir die erhaltene Zahl!"
Peter zerlegt nun die genannte Zahl in zwei Zahlen von je zwei Ziffern: die aus den beiden ersten Ziffern gebildete Zahl entspricht der Schuhnummer, die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl gibt das Alter (in vollen Jahren) an.
Soll die Rechnung für das Jahr 1964, 1965 usw. durchgeführt werden, so sind die Summanden 1412 usw. um 1, um 2 usw. zu erhöhen.
Die in Klammern stehenden Zahlen geben noch andere Möglichkeiten des Rechenganges an.
Aufgabe ist es, mathematisch zu beweisen, daß die oben ausgeführte Lösung für jede beliebige Schuhnummer und für jedes beliebige Alter (außer bei Personen von 100 und mehr Jahren) stimmt.

75. Auf der Kleinmesse liegen in einer Würfelbude 3 Würfel bereit. Jeder Wurf (mit den 3 Würfeln zugleich) kostet einen bestimmten Betrag. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Wurf einen der Hauptgewinne (1, 2, 3, 18, 17, 16 Augen) zu erreichen? (Die Wahrscheinlichkeiten sind für jeden Fall einzeln anzugeben!)

76. Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muß der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

77. Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

78. Welcher Nagel läßt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnitt-

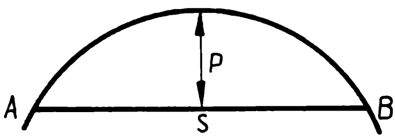
flächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

79. In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden. Wie lang wird er?

80. Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
   a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
   b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

81. Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

82. Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen. Wie lautet die entsprechende Funktion r (s/p)?



83. An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt. Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann? (Die Maße des Zylinders: h = 20 cm, d = 10 cm).

84. Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so daß jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
   a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichenKreise (r_1; r_2; r_3; r_4) durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
   b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für r = 20 mm durch!

85. Von einem Dreieck sind gegeben:
   $a = 5$ cm
   $\beta = 47°$
   $\gamma = 55°$
   Berechnen Sie b, c und α!

86. In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird. Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)? Radius der Erde R = 6 370 km.

87. Konstruieren Sie ein Rechteck (a = 5 cm, b = 3 cm) und seine Winkelhalbierenden!
   a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
   b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit a = 5 cm ist?

88. An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie AB = 250 m abgesteckt worden (Meßfehler ± 0,50 m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man mißt die Winkel
   $\sphericalangle CAB = 41°$, $\sphericalangle ABC = 72°$
   Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Meßfehler für beide Winkel
   $$\text{je } \pm\frac{1}{2}^{\circ}.$$
   a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Meßfehler!
   b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

89. Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

90. Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius r = 3 cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, daß sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
   Begründen Sie die Konstruktion!

91. Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_s = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechsecksseiten ist.
   a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
   b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für a = 50 mm?

92. Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises. Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, daß die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind.
   (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
   Begründen Sie Ihre Konstruktion!

93. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: AB = c = 87,51 m, $\sphericalangle CAB = \alpha = 93{,}42°$
   Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!

94. Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht. Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan?
   Die Antwort ist zu begründen!

95. Es ist
   a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
   b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
   Ist dieser Punkt stets vorhanden?
   Gibt es nur einen solchen Punkt?

96. Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen? Die Behauptung ist zu begründen!

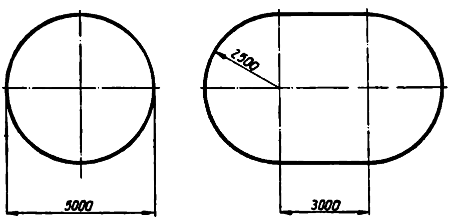
97. Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten paralle-

len Geraden so geschnitten werden, daß das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

98. In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel. Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

99. Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Zifferblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Zifferblattes verläuft. Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zu gleicher Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.
 a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?
 b) Konstruieren Sie diese Kurve für folgenden Fall: Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5$ cm (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich zu groß gewählt)!
 Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenzifferblattes.

100. In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht" in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (siehe Abbildung). Er hat ein Leergewicht von 30 Mp.



 a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke? (Wichte des Stahls 7,85 p. cm^{-3})
 b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

101. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren aus

$$h + \frac{a}{2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Beschreiben Sie die Konstruktion und berechnen Sie die Seite a!

102. Von einem spitzwinkligen Dreieck sind bekannt

$$c = 28 \text{ cm} \quad \sin\alpha = 0{,}8 \quad \sin\beta = \frac{12}{13}$$

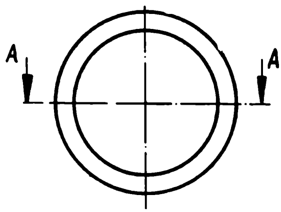
Berechnen Sie die Seite b, ohne den Sinussatz zu verwenden!

103. Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie BC teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

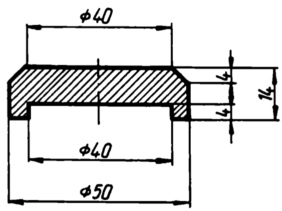
104. Gegeben sind ein Winkel $\alpha = 40°$. Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll!
Die Konstruktion ist zu begründen!
Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)

105. Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m. Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m.
Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

106. Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben ($d = 80$ mm, $h = 15$ mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung). Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?



Schnitt A-A



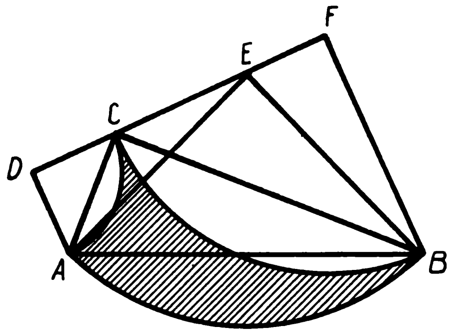
107. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Es ist zu beweisen, daß für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt stets $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ist,
wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!

108. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.
 a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle!)!
 b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle!)?

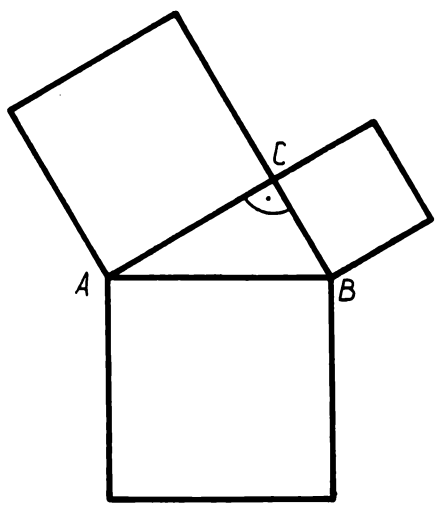
109. In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu Mp gefördert werden. Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.
Wie groß muß der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann?
(Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8$ p $\cdot$ cm^{-3}).

110. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E. Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positiven Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N.
Beweisen Sie, daß das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

111. Vergleichen Sie die Flächeninhalte der schraffierten Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC! (Die Dreiecke $\triangle$ ACD, $\triangle$ ABE und $\triangle$ CBF sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)



112. Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck. Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!



113. Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_x bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen: Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen. Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E.
Fällt man von E aus das Lot auf die gegebene Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, daß EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_x angibt.
a) Beweisen sie die Richtigkeit der Konstruktion!
b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von 8 Ω, 10 Ω, 12 Ω parallel geschaltet werden. ?

114. Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, daß die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind. Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt?
(Beweis!)

115. Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wieviele Lösungen hat diese Aufgabe?

116. Beweisen Sie, daß die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

117. Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß eine quadratische Schnittfigur entsteht.
a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

118. Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

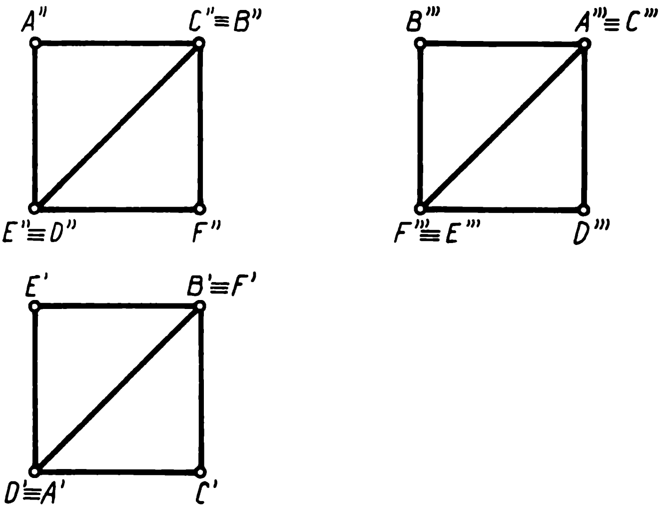
119. Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriß, Aufriß und Seitenriß zeigt ($a = 6$ cm)!
(Zeichnung siehe Seite 66 oben.)

120. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, daß ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.
a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus!
b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

121. In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.
a) Es ist zu beweisen, daß stets
$$a + h_a \geqq b + h_b \text{ ist!}$$
b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

122. Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

123. In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis 1 : 2 (von der



Spitze aus) teilt. Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius der Kugel?

124. Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a wird mit den 8 Würfelecken verbunden. Wie groß ist das Volumen einer Pyramide, die eine Würfelseite zur Grundfläche hat und deren Spitze der Mittelpunkt des Würfels ist?

125. In einer Kugel befindet sich ein Würfel, der die Kugeloberfläche mit allen Ecken berührt. Der Würfel hat 463,7 m^3 Volumen. Wie groß ist der Radius der Kugel?

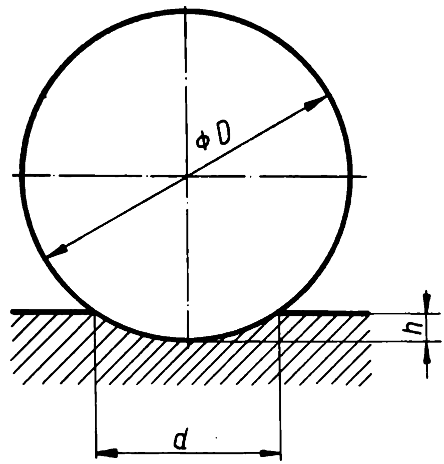
126. Durch Konstruktion ist ein Quadrat mit F = 9 F.E. (F.E. = Flächeneinheit) in ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die dreifache Länge der Quadratseite besitzt, zu verwandeln!

127. Die Länge eines Riemens ist zu berechnen, der straff um zwei Seilscheiben vom Radius R und $\frac{R}{2}$ gespannt ist, wenn der Achsenabstand der Scheiben 2 R ist.
a) Allgemeine Lösung.
b) R = 1 m.

128. Es soll ein Kanal von 3,75 m Tiefe ausgeschachtet werden, der unten eine Breite von 6 m hat. Der Böschungswinkel beträgt 24°. Berechnen Sie die obere Breite des Kanals!

129. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist gegeben. Um eine Ecke ist ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ a beschrieben. Ziehen Sie von den beiden anderen Ecken die sich schneidenden Tangenten an den Kreis und berechnen Sie das Flächenstück, das von einem Teil des Kreises und den beiden Tangenten begrenzt wird.
Beispiel: a = 10 cm

130. Bei der Härtebestimmung nach Brinell wird eine kleine Stahlkugel in das Material eingedrückt. Wie groß ist die Eindrucktiefe h, wenn D = 12 mm und d = 5 mm ist?

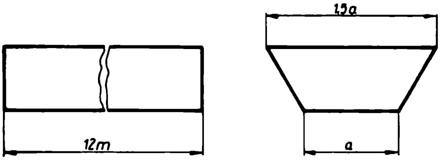


131. Zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 15$ mm und $r_2 = 25$ mm, deren Mittelpunkte a = 70 mm voneinander entfernt liegen, werden von einem dritten Kreis (Anschlußkreis) mit r = 70 mm umhüllt. Konstruieren Sie den Mittelpunkt M dieses Anschlußkreises!

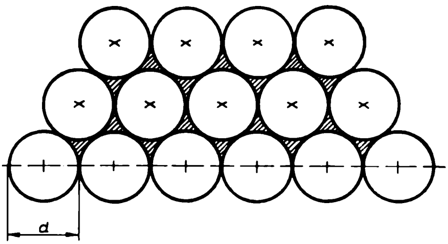
132. Die Oberfläche zweier Kugeln betragen zusammen 15 400 cm^2. Wie groß sind die Durchmesser, wenn sich diese um 14 cm unterscheiden?
$(\pi = \frac{22}{7})$

133. Bestimmen Sie die Maße des in der Figur gegebenen Gärfuttersilos, der randgefüllt 585 dt gedämpfte

Kartoffeln faßt! (Schüttdichte $0{,}975 \frac{t}{m^3}$). Die Maße sind in m angegeben. Die numerische Rechnung ist logarithmisch durchzuführen.

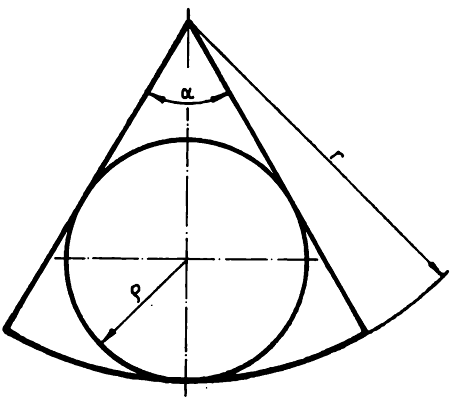


134. 15 gleiche Fässer mit dem Durchmesser d sind so gestapelt, wie es die Figur zeigt!
Berechnen Sie die Höhe des Stapels und die Größe der schraffierten Fläche!



135. In einem liegenden zylindrischen Faß von der Länge l und dem Durchmesser d wird mit einem Maßstab der Benzinstand mit einer Höhe h gemessen.
   a) Stellen Sie die Gleichung für das Volumen der Treibstoffmenge auf!
   b) Berechnen Sie das Volumen für folgende Maße:
   $l = 1{,}80$ m $d = 0{,}85$ m $h = 0{,}35$ m

136. a) Wie groß ist der Radius ρ des Kreises, den man dem Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α einbeschreiben kann?
   b) In einem Kreis vom Radius r sind von innen n gleich große, sich untereinander berührende Kreise gelegt. Wie groß ist der Radius ρ eines jeden dieser Kreise? ρ ist in Abhängigkeit von r und n darzustellen!

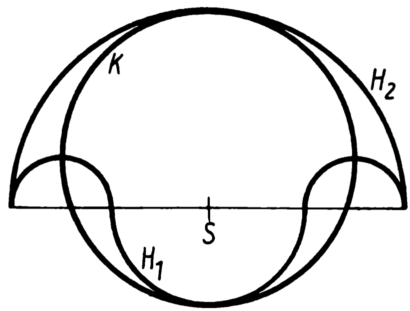


137. Ein Futtersilo für eine LPG hat einen kreisförmigen Querschnitt und wird aus 10 cm dicken Betonrohren angefertigt, die einen inneren Durchmesser $d = 2{,}50$ m und eine Höhe $h = 1{,}00$ m haben. Ein Silo ist $H = 3{,}00$ m tief. Die LPG baut vier dieser Silos. Bestimmen Sie
   a) den Betonverbrauch für ein Rohr
   b) das Gewicht eines Rohrs
   $$\left(\gamma = 2{,}4 \frac{Mp}{m^3}\right)$$
   c) den Zementverbrauch für alle 4 Silos
   (für 1 m^3 Beton werden 0,3 t Zement benötigt)!

138. In einem Dreieck ist ein Winkel um 30° kleiner als die Summe und um 50° größer als die Differenz der beiden anderen Winkel. Wie groß sind die drei Winkel?

139. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser von 24 mm soll ein Sechskantstahl bei geringstem Materialverschleiß hergestellt werden. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Abfalls!

140. Gegeben sei ein Kreis K und in ihm eine Sehne mit dem Mittelpunkt S. Man konstruiert zwei Halbkreise H_1 und H_2 um S, die den Kreis K von innen beziehungsweise von außen berühren. Durch Konstruktion zweier weiterer Halbkreise mit der Strecke als Durchmesser, die durch die Schnittpunkte von H_1 und H_2 mit der Sehne bzw. ihrer Verlängerung begrenzt wird, erhält man ein „Kreisbogenviereck" (s. Abbildung).



Aufgabe: Es ist zu zeigen, daß dieses Kreisbogenviereck flächengleich dem Ausgangskreis K ist.

141. Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
   a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck
   $$F_I = 6\frac{2}{3}\,cm^2.$$
   b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.

142. Auf zwei sich rechtwinklig kreuzenden Straßen bewegen sich zwei Radfahrer R_1 und R_2 nach der Kreuzung hin.
Im Anfang der Bewegung ist R_1 96 m und R_2 72 m von der Kreuzung entfernt.
   a) Wie groß ist die Luftlinienentfernung der beiden Radfahrer am Anfang der Bewegung?
   b) Nach wieviel Sekunden wird ihre Entfernung nur noch 55 m betragen, wenn
   $vR_1 = 8 m \cdot s^{-1}$
   $vR_2 = 6 m \cdot s^{-1}$ betragen?

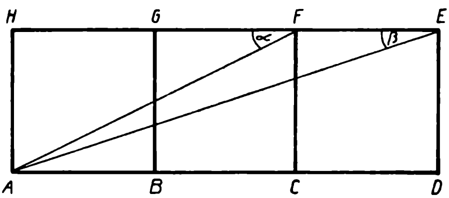
c) Unter welchem Winkel zur jeweiligen Straßenrichtung sehen sich die beiden Radfahrer dann? (Nur α, $\beta < 90^\circ$ angeben.)

143. Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY!
(X und Y sind stets von A verschieden.)

144. Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, daß sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

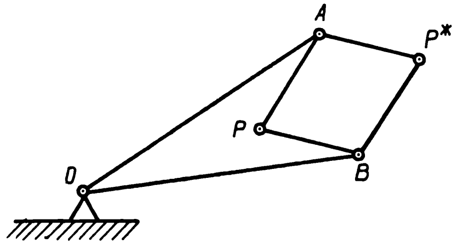
145. Das Tariergewicht einer Dezimalwaage ist eine zentrisch durchbohrte Eisenkugel ($\rho = 7{,}86\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$) von 24 mm Durchmesser. Es gleitet auf einer Rundstange von 8 mm Durchmesser. Die Durchbohrung hat einen um 5 Prozent größeren Durchmesser als die Führungsstange. Wie groß ist die Masse des Tariergewichts?

146. Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung.



Es ist zu beweisen, daß $\alpha + \beta = 45^\circ$ ist!

147. Der „Inversor" von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB, die in A und B mit einem Gelenkrhombus APBP* verbunden sind. (Vgl. Abbildung.)
$OA = OB$



Es sei $OA > AP$. Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, daß das Produkt der Entfernungen $OP = r$ und $OP^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.

148. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

Für die Olympiadeklassen wird folgende Einteilung festgesetzt:

Olympiadeklasse 5 bis 7:
Schüler der entsprechenden Oberschulklassen

Olympiadeklasse 8:
Gruppe A: Schüler der Klasse 8 an Oberschulen
Gruppe C: Berufsschüler, die aus einer 8. Klasse der Oberschule in die Berufsschule gekommen sind

Olympiaklasse 9:
Gruppe A: Schüler der Klasse 9 an Oberschulen
Gruppe B: Schüler der Klasse 9 an erweiterten Oberschulen
Gruppe S: Schüler der mathematischen Sonderklassen 9 an erweiterten Oberschulen

Olympiadeklasse 10:
Gruppe A: Schüler der Klasse 10 an Oberschulen
Gruppe B: Schüler der Klasse 10 an erweiterten Oberschulen
Gruppe C: Schüler der Klassen „Berufsausbildung mit Abitur", 1. Lehrjahr, sowie Schüler anderer Berufsschulklassen (ohne Abitur), 2. beziehungsweise 3. Lehrjahr
Gruppe D: Schüler der Berufsschulklassen (ohne Abitur), 1. Lehrjahr
Gruppe S: Schüler der mathematischen Sonderklassen 10 an erweiterten Oberschulen

Olympiadeklasse 11:
Gruppe B: Schüler der Klassen 11 an erweiterten Oberschulen
Gruppe C: Schüler der Klassen „Berufsausbildung mit Abitur", 2. Lehrjahr

Olympiadeklasse 12:
Gruppe B: Schüler der Klasse 12 an erweiterten Oberschulen
Gruppe C: Schüler der Klassen „Berufsausbildung mit Abitur", 3. Lehrjahr

Schüler aus Volkshochschulen beziehungsweise Abendoberschulen lösen die Aufgaben der ihrer Ausbildung und ihrem Alter entsprechenden Olympiadeklassen. Sie gehören in jedem Falle zu den Gruppen C.

Zentrales Komitee
der Olympiaden Junger Mathematiker

Lösungen:

1. $$\begin{array}{r} a + b = 9 \\ 5\,(10a + b) - 9 = 10b + a \\ \hline a = 1 \\ b = 8 \end{array}$$

Die zweistellige Zahl heißt 18.

2.

3.

4. $x = 13;\quad y = 9$

5. Es werden rund 203 dt Superphosphat benötigt.

6. a) $x_1 = 69°;\ x_2 = 111°$

Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also

$x_1 = 69° + k \cdot 360°$

$x_2 = 111° + k \cdot 360°$ mit $k = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$

b) $x_1 = 26°;\ x_2 = 206°$

Bei Berücksichtigung der Periodizität

$x_1 = 26° + k \cdot 360°$

$x_2 = 206° + k \cdot 360°$ bzw.

$x = 26° + k \cdot 180°$; mit $k = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 \frac{x}{2}$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

7. A sei die Anfangsproduktion; dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

1959 A

$$1960\quad A + \frac{1}{10}A = A\left(1 + \frac{1}{10}\right) = A \cdot 1{,}1$$

$$1961\quad A \cdot 1{,}1 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1 = A \cdot 1{,}1\left(1 + \frac{1}{10}\right) = A \cdot 1{,}1^2$$

$$1962\quad A \cdot 1{,}1^2 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1^2 = A \cdot 1{,}1^2\left(1 + \frac{1}{10}\right) = A \cdot 1{,}1^3$$

Nach n-jährigem Wachsen ergibt sich $A \cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt.

Danach gilt die Formel:

$$x = A \cdot 1{,}1^n.$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:

zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59$ rund 2,6,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73$ rund 6,8,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26$ rund 45,3.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren ...., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

8.

9.

10. Die Steigerung beträgt rund 1420441%.

11. Es ist $v_z = \frac{l - 9}{9}$ m/s und

$$v_z = \frac{171 + l}{27}\ \text{m/s}.$$

Daraus: $l = 99$ m

$v_z = 10$ ms $= 36$ km/h.

12. a) $9^9 = 387420489$, also hat $9^{387420489}$ rund 369600000 Ziffern.

b) 739,2 km lang.

c) Da 9^{2n} mit 1 und 9^{2n+1} mit 9 endet, endet die gesuchte Zahl auf 9.

13. $2700 - 900 = 1800$

$2230 - 1475 = 755$

$900 + 180\,x = 1475 + 75{,}5\,x$

$x \approx 5{,}5$

In etwa $5^1/_2$ Jahren, also im Jahre 1976.

14. a) Bei Einstellung 1 wird man so einspannen, daß a in Hubrichtung liegt. Man benötigt für eine Fläche 40 Hübe, also $\frac{20}{23}$ Minuten reine Arbeitszeit.

Bei Einstellung 2 wird man so einspannen, daß b in Hubrichtung liegt. Man benötigt dann 80 Hübe, also $\frac{20}{27}$ Minuten reine Arbeitszeit. Daher ist die Einstellung 2 rationeller.

b) Bei Einstellung 1 Einspannung wie oben, 34 Hübe; $\frac{17}{23}$ Minuten.

Bei Einstellung 2 Einspannung wie oben, 100 Hübe; $\frac{25}{27}$ Minuten.

Hier ist Einstellung 1 rationeller.

15.

16.

17. $1:2,\quad 1:\sqrt{2}\quad 1:\sqrt[3]{2}$

18. $a^2 - 4b \geqq 0$

19.

20.

21.

22. Aus der geforderten Eigenschaft folgt, daß auch $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ auf Null enden muß. Das ist aber nur möglich, wenn die Quadrate in den Endziffern übereinstimmen.

23. Vielfältige Lösungsmöglichkeiten. Z. B. sei $x = 4\,n$. Dann ist $10\,x - n = 40\,n - n = 39\,n$ von der Form 599 ... 94. Diese Zahl muß durch 39 teilbar sein. Die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist aber 5 999 994. Sie führt auf $n = 153\,846$.

24. Fallunterscheidungen mit $m = 2k$ bzw. $m = 2k + 1$ führt über Restbetrachtungen zum Ergebnis.

Oder: Umformung auf

$\frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{6}$ usw...

25. Da die Quersumme beider Zahlen gleich ist, bleibt bei Division durch 9 auch der gleiche Rest, also ist die Differenz beider Zahlen stets durch 9 teilbar.

26. $12{,}4\,\% \mathrel{\hat{=}} 4{,}7$ Mio DM

$112{,}4\,\% \mathrel{\hat{=}} x$ „

Daraus folgt

$105{,}6\,\% \mathrel{\hat{=}} x$ Mio DM

$100\ \% \mathrel{\hat{=}} y$ „

$y = 40{,}4$ Mio DM

27. Die Summe ist

$$S = -{}^2\log 2^8 + ({}^2\log 128 - {}^2\log 128) + ({}^2\log 64 - {}^2\log 64) + \ldots + ({}^2\log 2 - {}^2\log 2) + {}^2\log 1$$

$S = -8$

28. Da die gesuchte Zahl durch 99 teilbar ist und die letzte Ziffer nicht größer als die erste Ziffer sein kann, kommen nur die Zahlen 594, 693, 792, und 891 in Frage. Berechnet man $\frac{2}{9}$ dieser Zahlen, so erhält man die Zahlen 132, 154,

176 und 198. Nur die letzte Zahl entspricht der gestellten Bedingung.
891 ist also die einzige Zahl, die die geforderten Eigenschaften hat.

29. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$
$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3\,[n^3 + 3n^2 + 5n + 3]$.
$3n^2 + 3$ ist durch 3 teilbar.
Es muß noch gezeigt werden, daß $(n^3 + 5n)$ auch durch 3 teilbar ist: $n^3 + 5n = n\,(n^2 + 5)$.
3 Fälle:
1. $n = 3m \longrightarrow 3m\,(9m^2 + 5)$.
2. $n = 3m + 1 \longrightarrow (3m + 1)\,[9m^2 + 6m + 6] = (3m + 1)\,3\,(3m^2 + 2m + 2)$.
3. $n = 3m + 2 \longrightarrow (3m + 2)\,[9m^2 + 12m + 9] = (3m + 2)\,3\,(3m^2 + 4m + 3)$.

Damit: $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ auch durch 3 teilbar!

30. Man muß erkennen, daß $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ist, erst dann sind folgende Zerlegungen möglich:

1. $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
2. $4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
3. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
4. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Damit ergeben sich für x und y wegen
$4\sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$ und $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$ und
$2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = 8$
folgende vier Lösungen:
$x_1 = 2;\ y_1 = 32 \qquad x_2 = 32;\ y_2 = 2$
$x_3 = 8;\ y_3 = 18 \qquad x_4 = 18;\ y_4 = 8$.
Bei diesen Lösungen wurde streng darauf geachtet, daß die Wurzeln eindeutig sind.
Das systematische Probieren — was die meisten tun — wurde durch einmaliges Quadrieren beider Seiten vereinfacht:

$$\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{y}$$
$$x = 50 + y - 2\sqrt{50y}\,.$$

Geschickte und zielgerichtete Überlegungen am Anfang sind oft entscheidend für den Umfang der Lösungen.

31.

32. Auf der Spule befinden sich rund 1165 m Draht.

33. Man bildet die Differenz

$$d = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} - \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$
$$= \frac{(100^{100} + 1)(100^{89} + 1) - (100^{90} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{90} + 1)(100^{89} + 1)}$$

Für den Zähler gilt:
$z = 100^{99}(100 - 1) - 100^{89}(100 - 1) > 0$.
Da der Nenner positiv ist, ist also $d > 0$. Mithin ist der erste Bruch größer.

34. a) Es ist $2^{256} - 1 = (2^{128} + 1)(2^{128} - 1)$, also keine Primzahl.
b) Es ist $2^{256} - 1 = (2^{128} + 1)(2^{64} + 1)(2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$
Man erhält als Primfaktoren: 3, 5, 17, 257 usw.

35.

36.

37. Die graphische Darstellung der Funktion ergibt die sogenannte „Herzkurve".

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44.

45.

46. Man sieht der Gleichung nicht von vornherein an, daß es sich um eine Identität handelt, also um eine Gleichung, die durch Umformen auf die Form $0 = 0$ gebracht werden kann. Demzufolge zerfällt die Lösung in zwei Teilschritte: Das Umformen bis zu $0 = 0$ und daraus die Folgerung, daß jede Zahl (mit Ausnahme von -2 und -3) Lösung der Gleichung ist.

47. Durch entsprechendes Erweitern gewinnt man:

$a : b = 6 : 5 \qquad a : b = 24 : 20$
$b : c = 4 : 3 \qquad b : c = 20 : 15$
$a : d = 8 : 11 \qquad a : d = 24 : 33$

Daraus ergibt sich die fortlaufende Proportion:
$a : b : c : d \;=\; 24 : 20 : 15 : 33$

48. $$\frac{(9 + 2x)\cdot(8 + 2x)}{9 \cdot 8} = \frac{5}{4}\,.$$

Die Gleichung führt auf $x^2 + \frac{17}{2}x = \frac{9}{2}$

und $x_{1,2} = -\frac{17}{2} \pm \frac{19}{4}$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -9$ (keine Lösg.)

Der Rasen muß 50 cm breit gemacht werden.

49. Nach Ausklammern erhält man

$$\sqrt{\frac{a(4a^2 - 4ab + b^2)}{b(a^2 - 4ab + 4b^2)}}$$

und schließlich:

$$\sqrt{\frac{a\,(2a - b)^2}{b\,(a - 2b)^2}} = \pm\,\frac{(2a - b)}{(a - 2b)}\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

50. Das Auflösen der Klammern von innen nach außen führt auf $x = 3900$.

51. Die vierstellige Zahl sei abcd. Dann gilt:

$ab \mathrel{\widehat{=}} x$
$cd \mathrel{\widehat{=}} y \qquad abcd = 100x + y$
(I) $x \cdot y = 1458$
(II) $(x + y) : (100x + y) = 1 : 3x$

Daraus folgt: $x = 27$
$y = 54$

Die vierstellige Zahl lautet demnach 2754.
Die Probe ergibt: $27 \cdot 44 = 1458$
$$\frac{27 + 54}{2754} = \frac{1}{34}\,.$$

52. $x \cdot x = x + x$
$x^2 = 2x$
$x_1 = 2$
$x_2 = 0$ (keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung).

53. Der Definitionsbereich der Gleichung ist $0 < x < \infty$.
Aus $\lg(2x + 1) - \lg x = 2$ folgt:
$\lg\frac{2x + 1}{x} = 2$, d. h. $\frac{2x + 1}{x} = 100$, also $x = \frac{1}{98}$.

Probe: $\lg\left(\frac{2}{98}+1\right)-\lg\frac{1}{98}=2$

$\lg\frac{100}{98}-\lg\frac{1}{98}=2$

$\lg 100-\lg 98-\lg 1+\lg 98=2.$

$\frac{1}{98}$ ist die Lösung der Gleichung.

54. Es gilt:

$$\frac{ab-100}{a}=575+\frac{227}{a} \quad \text{und}$$

$$\frac{ab-1000}{a}=572+\frac{308}{a}.$$

Daraus folgt:

$a=327,\ b=576.$

Durch die Probe kann man nachweisen, daß 327 und 576 tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügen.

55. $z=n^3+11n=n(n^2+11)$.

a) Ist n gerade, so ist z durch 2 teilbar.
Ist n ungerade, so ist n^2+11 gerade, d. h. z ist durch 2 teilbar.

b) Ist n durch 3 teilbar, so ist auch z durch 3 teilbar. Läßt n bei der Division durch 3 den Rest 1 bzw. 2, so läßt n^2 bei Division durch 3 stets den Rest 1, d. h. n^2+11 ist durch 3 teilbar.
Daraus folgt: z ist durch 3 teilbar.

Aus (a) und (b) folgt: z ist durch 6 teilbar.

56. Aus $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$ folgt: $2x+2y>xy$.

a) Für $x=3$ ergibt sich $6+2y>3y$ oder $y<6$.
Da nach Voraussetzung $y>$ gilt, erhält man die Zahlenpaare (3, 3); (3, 4); (3, 5).

b) Für $x=4$ erhält man analog $y<4$ und damit das Zahlenpaar (4, 3).

c) Für $x=5$ erhält man $y<\frac{10}{3}$ und damit das Zahlenpaar (5, 3).

d) Für $x=6+a$ mit $a\geqq 0$ ergibt sich $y<3-a$.
Da nach Voraussetzung $y>2$ war, erhält man keine weiteren Zahlenpaare.

57.

58. a) Das Auto fährt in gleicher Richtung wie der erste Radfahrer. Da beide Radfahrer mit gleicher Geschwindigkeit fahren, hat der erste Radfahrer $\frac{6}{8}$ des Weges in dem Augenblick zurückgelegt, in dem das Auto am Anfang der Brücke angelangt ist, wo es den zweiten Radfahrer trifft. In der Zeit, in der der Radfahrer das restliche Viertel zurücklegt, fährt das Auto über die ganze Brücke. Also ist die Geschwindigkeit des Autos viermal so groß wie die der Radfahrer. Diese fahren daher mit einer Geschwindigkeit von $20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

b) Das Auto fährt in gleicher Richtung wie der zweite Radfahrer. Dann muß es die ganze Brücke in der gleichen Zeit durchfahren, die der zweite Radfahrer für $\frac{2}{8}$ des Weges braucht. Auch in diesem Fall erhält man $20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ als Geschwindigkeit der beiden Radfahrer.

59. Es ist $27<20\cdot 7$ (1)

$27<20\cdot\sqrt{49}$ und $20\cdot\sqrt{49}<20\cdot\sqrt{57}$ (2)

also ist $27<20\cdot\sqrt{57}$ (3)

und $4\cdot 70=(2\cdot\sqrt{70})^2<25+20\cdot\sqrt{57}+4\cdot 57$
$=(5+2\cdot\sqrt{57})^2$ (4)

$2\cdot\sqrt{70}<5+2\cdot\sqrt{57}$ (5)

$7+2\sqrt{70}+10<3+2\sqrt{57}+19$ (6)

und damit $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}$ (7)

Bemerkung:
Es ist darauf zu achten, daß in dieser Reihenfolge geschlossen wird. Natürlich wird man die Lösung zunächst in umgekehrter Reihenfolge finden. Es muß aber stets von einer gesicherten Aussage ausgegangen werden.

60. Die Anzahl der Endnullen hängt nur von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 ab. Im vorliegenden Falle ist, da $p_1=2$ und $p_3=5$ ist, die Anzahl der Faktoren 5 kleiner als die der Faktoren 2. Man erhält die gesuchte Anzahl und damit auch die Anzahl der Endnullen als Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 98. Das Produkt hat daher 4851 Endnullen.

61. 1. Ziffer y
die drei letzten Ziffern: 3 x
(I) $y+3x=22$
(II) $(1000y+100x=10x+x)-1998$
$=(1000x+100x+10x+y)$
$x=5$
$y=7$
Die Autonummer heißt demnach III Z 7555

62.

63. a) Die beiden Zahlen lauten: 1. Zahl: 142 857
2. Zahl: 428 571

b) Die letzte Stelle der 1. Zahl, mit 3 multipliziert, muß eine Zahl ergeben, deren letzte Stelle 1 ist. Das ist 7.
1????7 · 3 = ?????1 (merke 2!)
Diese 7 erscheint nun auch in der 2. Zahl, und zwar an vorletzter Stelle, also
1????7 · 3 = ????71
Vor der 7 der 1. Zahl muß jetzt eine 5 erscheinen, denn 3 · 5 = 15 (+2 gemerkt gleich 17), also:
1???57 · 3 = ????71 (merke 1!)
Die 5 erscheint wieder vor der 7 der 2. Zahl usw. und man erhält schließlich die obigen beiden Zahlen.

64. Es ist $L=1$, $H=9$ und $A=0$, da das Ergebnis eine sechsstellige Zahl ist, die als Summe einer vierstelligen und einer fünfstelligen Zahl entstanden ist. Für die restlichen Zahlen lassen sich etwa folgende Begründungen angeben:

Es ist: $9+E=10+S$
$S+Z=N$ oder $S+Z=10+N$
$E=S+1$
$2N=10+E$ oder $2N+1=10+E$
$S=I+1$
$2N=10+S+1$ oder $2N+1=10+S+1$
$N=\frac{S+11}{2}$ oder $N=S+5$

Setzt man in die erste Gleichung rechts $N=S+5$ ein, so erhält man $S+Z=10+S+5$ und daraus $Z=15$. Das ist aber nicht zulässig, mithin sind die rechts stehenden Gleichungen falsch. Aus den verbleibenden Gleichungen erhält man $N=\frac{E}{2}+5$. Also ist E gerade; S ungerade und I wieder gerade. Da $I\geqq 2$; $S\geqq 3$ und $6\geqq E\geqq$ sein muß, kommen für N nur die Zahlen

7 und 8 in Frage. Aus den obigen Gleichungen erhält man ferner $\frac{E}{2} + 5 - E - 1 + Z$ und daraus $Z = 6 - \frac{E}{2}$. Mithin könnten für Z die Zahlen 3 oder 4 möglich sein. Da verschiedene Buchstaben auch verschiedene Zahlen bedeuten sollen, scheidet der Wert 4 aus. Nun erhält man sofort $Z = 3$; $E = 6$; $S = 5$; $I = 1$ und $N = 8$.

Die gesuchte Telefonnummer lautet: 10 55 68.

65. $(2\,n)$ — gerade Zahl
$(2\,n + 1)$ — ungerade Zahl

I. linke Hand rechte Hand
$(2\,n) \cdot 2 \quad + \quad (2\,n + 1) \cdot 3 = x$
$4\,n \quad + \quad 6\,n + 3 = 10\,n + 3$ (ungerade)

II. $(2\,n + 1) \cdot 2 + (2\,n) \cdot 3 = x$
$4\,n + 2 \quad + \quad 6\,n \quad = 10\,n + 2$ (gerade)

Zu I:

Jedes Vielfache einer geraden Anzahl ergibt wieder eine gerade Anzahl, das Dreifache einer ungeraden Anzahl ergibt wieder eine ungerade Anzahl — daher ist das Ergebnis ungerade.

Zu II:

Das Zweifache einer ungeraden Anzahl ist gerade, jedes Vielfache einer geraden Anzahl ist wieder gerade. Das Ergebnis ist folglich gerade.

Ist die Summe (x) gerade, so hält der Freund die gerade Anzahl in der rechten Hand; ist die Summe ungerade, so hält der Freund die gerade Anzahl in der linken Hand.

66.

67. Bei einem Spiel gäbe es drei Möglichkeiten, bei 2 Spielen könnte jeder der 3 Möglichkeiten des ersten Spieles mit jeder der drei Möglichkeiten des zweiten Spiels kombiniert werden. Man hätte also 3^2 Möglichkeiten. Entsprechend erhält man für 12 Spiele 3^{12} Möglichkeiten, den Tipschein auszufüllen.
Infolgedessen braucht man 531 441 Tipscheine.

68. Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor. Von diesen drei Zahlen ist bestimmt eine durch 2, eine durch 3 und eine durch 4 teilbar. Das Produkt ist also durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar.

69.

70.

71.

72. Das Problem ist mit Hilfe von Fallunterscheidungen (am bequemsten nach den drei Resten 0, 1 und 2, die sich bei der Division einer Zahl durch 3 ergeben können) zu lösen.

73.

74. Die Schuhnummer sei x, das Alter sei y. Dann ergibt sich aus der Aufgabe folgende Gleichung:

$$(x \cdot 2 + 11) \cdot 50 + 1412 - (1962 - y) = abcd$$

bzw. $100\,x + 550 + 1412 - 1962 + y = abcd$

bzw. $100\,x + y = abcd$

Bei der vierstelligen Zahl abcd steht x 2 Stellen voraus, also

ab cd

x y

Schuhnum. Alter

ab entspricht in der Gleichung 100 x, cd entspricht y (wobei auch eine einstellige Zahl des Alters als zweistellig aufzufassen ist, z. B. 08 Jahre).

Es gibt noch vier andere Möglichkeiten des Rechenganges, indem man am Anfang der Rechnung die Schuhnummer x mit 10 oder 20 oder 25 oder 50 multiplizieren läßt und die anderen Zahlen dann entsprechend wählt.

75.

76. $d \approx 15{,}6$ cm

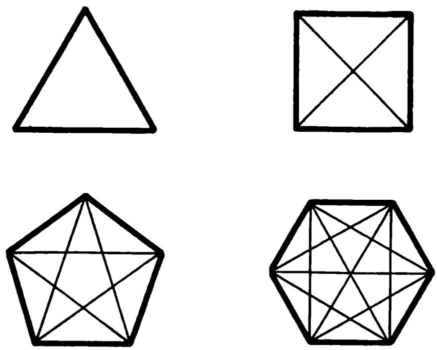
77. $h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

78. Der Nagel weist den besten Halt auf, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Die Seiten eines Quadrats umschließen eine größere Fläche als die Dreieckseiten, und der Kreis umschließt eine größere Fläche als die Seiten eines Quadrats. Setzen wir die Seiten eines Quadrats gleich 1, dann erhalten wir folgende Verhältniswerte: 4,5 : 4 : 3,55. Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

79. Etwa 211,5 m

80.

81.



Im Dreieck: 0 Diagonalen
Im Viereck: 2 Diagonalen
Im Fünfeck: 5 Diagonalen
Im Sechseck: 9 Diagonalen

Daraus folgt für das n—Eck: $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Somit hat das 4775—Eck $\frac{4775(4775-3)}{2}$

$= 11\,393\,150$ Diagonalen

82.

83.

84. a) $F = r^2\pi$ daraus folgt: $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$

$2\,F = r_1^2\pi$ daraus folgt: $r_1 = \sqrt{\frac{2\,F}{\pi}}$

$3\,F = r_2^2\pi$ daraus folgt: $r_2 = \sqrt{\frac{3\,F}{\pi}}$

$4F = r_3^2\pi$ daraus folgt: $r_3 = \sqrt{\dfrac{4F}{\pi}}$

$5F = r_4^2\pi$ daraus folgt: $r_4 = \sqrt{\dfrac{5F}{\pi}}$

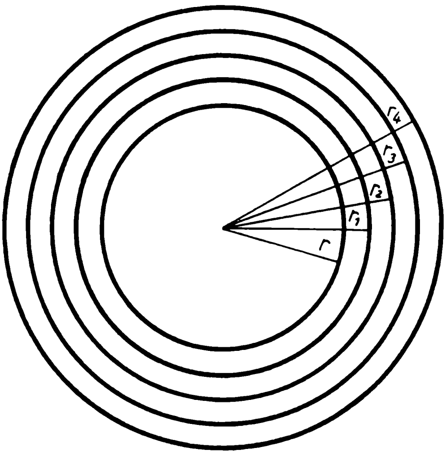
b) $r = \sqrt{\dfrac{2^2\pi}{\pi}}$ $\quad r = \sqrt{4}$ $\quad r = 2$ cm

$r_1 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 2^2\pi}{\pi}}$ $\quad r_1 = \sqrt{8}$ $\quad r_1 \approx 2{,}38$ cm

$r_2 = \sqrt{\dfrac{3\cdot 2^2\pi}{\pi}}$ $\quad r_2 = \sqrt{12}$ $\quad r_2 \approx 3{,}46$ cm

$r_3 = \sqrt{\dfrac{4\cdot 2^2\pi}{\pi}}$ $\quad r_3 \doteq \sqrt{16}$ $\quad r_3 = 4$ cm

$r_4 = \sqrt{\dfrac{5\cdot 2^2\pi}{\pi}}$ $\quad r_4 = \sqrt{20}$ $\quad r_4 \approx 4{,}47$ cm



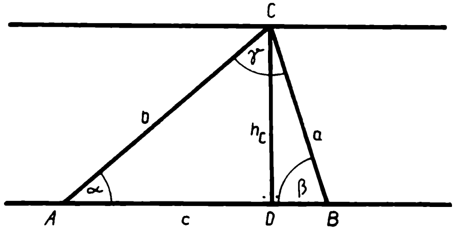
85. $\alpha = 78°$
$b \approx 3{,}74$ cm
$c \approx 4{,}19$ cm

86. Die gesuchte Entfernung beträgt rund 79,8 km.
Die gesuchte Strecke ist der Tangentenabschnitt von der Spitze des Turmes bis zum Berührungspunkt der Tangente mit der Erdkugel (im Schnitt als Kreis dargestellt).

87. a) Die eingeschlossene Figur ist ein Quadrat.
b) Feststellung, daß bei einem Quadrat als Ausgangsfigur die Winkelhalbierenden mit den Diagonalen identisch sind und infolgedessen der gesuchte Flächeninhalt $F = 0$ ist.

88. Gegeben:
$AB = 250$ m
Winkel $CAB = 41°$
Winkel $ABC = 72°$
Winkel $ACB = 180° -$ Winkel $CAB -$ Winkel $ABC = 67°$
Gesucht: $CD = h_c$

Skizze:



Allgemeine Lösung:

$$\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a} \qquad h_c = a\cdot\sin\beta$$

$$\sin\alpha : a = \sin\gamma : c$$

$$a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$h_c = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Rechnerische Lösung:

zu a) $h_c = \dfrac{250\cdot\sin 41°\cdot\sin 72°}{\sin 67°}$

$$h_c = \frac{250\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}9} \approx 175$$

$$h_c = \frac{250\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}9511}{0{,}9205}$$

$$h_c = 169{,}4 \text{ m}$$

zu b_1) $+0{,}5$; $+\dfrac{1°}{2}$

$$h_c = \frac{250{,}5\cdot 0{,}6626\cdot 0{,}9537}{0{,}9135}$$

$$h_c = 173{,}8 \text{ m}$$

zu b_2) $-0{,}5$; $-\dfrac{1°}{2}$

$$h_c = \frac{249{,}5\cdot\sin 40{,}5°\cdot\sin 71{,}5°}{\sin 68°}$$

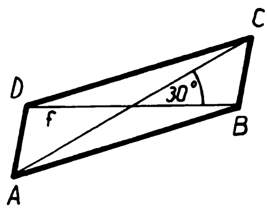
$$h_c = \frac{249{,}5\cdot 0{,}6494\cdot 0{,}9483}{0{,}9272}$$

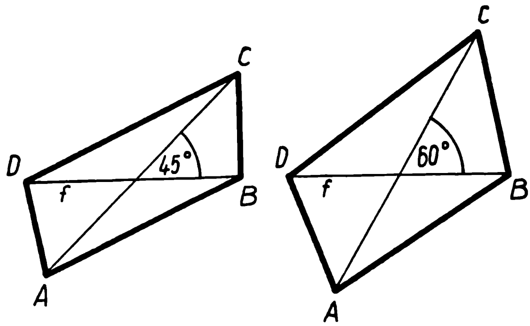
$$h_c = 165{,}7 \text{ m}$$

a) Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung der Meßfehler 169,5 m.

b) $(173{,}5 \text{ m} - 165{,}5 \text{ m}) : 2 = 8 \text{ m} : 2 = 4$ m.
Der mögliche Fehler beträgt 4 m.

89. Skizze:





Gegeben: die Diagonalen e und f

die Schnittwinkel $\alpha_1 = 30°$

$\alpha_2 = 45°$

$\alpha_3 = 60°$.

Gesucht: Verhältnis der Flächeninhalte.

Voraussetzung:

$e_1 + e_2 = e$

$f_1 + f_2 = f$

Beweis:

$$F = \frac{a \cdot b \sin\gamma}{2}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot f_2 \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot \sin(180° - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha \, (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha \, (e_1 + e_2)(f_1 + f_2)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha \, e \cdot f$$

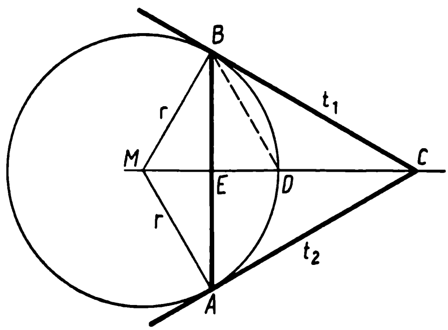
$$F_1 : F_2 = \sin 30° : \sin 45° = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : 2$$

$$F_2 : F_3 = \sin 45° : \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 : 3$$

$$F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie 1 : 2 : 3.

90. Konstruktion



Voraussetzung:

MC = 2 r und Symmetrieachse zu AB.

Behauptung:

Das Dreieck ABC ist gleichseitig, die Eckpunkte A, D und B sind Eckpunkte eines einbeschriebenen regelmäßigen Sechseckes.

Beweis:

1. Winkel MBC ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck MDB ist gleichseitig, alle Seiten sind r, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel MBC – Winkel MBD = Winkel DBC = 30°.
4. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel BCD = Winkel DBC = 30°.
   Im △ EBM treten die Winkel
   EMB = 60° (aus 2.)
   MBE = 30° (Basiswinkel in ABM) auf,
   folglich ist
   Winkel MBC – Winkel EBM = Winkel EBC = 60°.
   Im Dreieck EBC ist der Winkel EBC=60°, der Winkel BCE=30° und der Winkel BEC=90°. Die Strecke EC ist Symmetrieachse im Dreieck BAG = 60° groß sind. Daraus folgt, daß es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muß. Damit ist gezeigt, daß im Dreieck ABC alle Innenwinkel Winkel EBC, Winkel BCA, Winkel BAC 60° groß sind. Daraus folgt, daß es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muß.
   Die Punkte A, D, und B sind Eckpunkte eines regelmäßig einbeschriebenen Sechsecks. Der Zentriwinkel AMB = 120°, er wird durch MD halbiert.

91.

92.

93. $\beta = \gamma = 43{,}29°$ $b = 87{,}51$m
$a \approx 127{,}4$m

94. Es ist $V_W = a^3$

$$V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8} = \frac{\pi}{6}a^3$$

Daher wiegt die Kugel mehr:

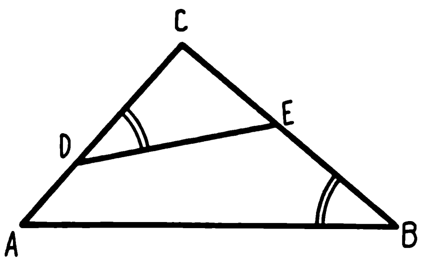
denn $\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$.

95. a) Der Punkt liegt auf der Symmetrieachse zu AB. Wenn diese parallel zur Geraden läuft, gibt es keine Lösung.

b) Wie oben. Wenn die Symmetrieachse mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es keine Lösung. Ist sie Tangente, erhält man eine, ist sie Sekante, zwei Lösungen.

96. Nein, da die Teilungslinie durch eine Ecke verlaufen muß und die gegenüberliegende Seite entweder rechtwinklig (dabei verschiedene Hypotenusen!) oder so schneidet, daß ein stumpfer und ein spitzer Winkel entstehen. Ist das Ausgangsdreieck selbst stumpfwinklig (sonst wäre es sowieso unmöglich), dann ist der neue stumpfe Winkel stets Außenwinkel des Teildreiecks, das den stumpfen Dreieckswinkel als nicht anliegenden Innenwinkel enthält.

97. D auf AC wählen und $\sphericalangle$ CDE $= \sphericalangle$ CBA antragen



Beweis nach (w, w, w).

98.

99.

100.

101. $a \approx 5{,}5$ cm.

102. $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$.

Aufstellen der Beziehungen zwischen h, b und h, a.
Aufstellen der Beziehungen zwischen q, b und p, a.
Elimination von h, p und q.
$b = 30$ cm.

103.

104.

105. Das Volumen beträgt etwa 7100 m³.

106. Etwa $4\frac{1}{4}$ Lagerscheiben.

107. Im Innern des Dreiecks entsteht ein Quadrat. Daraus läßt sich die Ähnlichkeit dreier Dreiecke ableiten. Aus den Ähnlichkeitseigenschaften folgt der Beweis.

108. a) Der Kreis kann den äußeren Kreis von innen und den inneren Kreis von außen berühren. Er kann aber auch den inneren Kreis umschließen. Sein Radius beträgt mithin entweder

$$\frac{R-r}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{R+r}{2}$$

Daraus ergibt sich die Konstruktion.

b) Der geometrische Ort ist die Kreislinie mit

$$r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2} \quad \text{oder mit}$$

$$\frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$$

als Radius. Für jeden Punkt dieser Kreislinie läßt sich eine entsprechende Konstruktion durchführen.

109. Der Querschnitt des Seils sei x mm².
Gesamtlast = 12000 kp + Seilgewicht.
Seilgewicht G: $\quad G = V\gamma$

$$G = \frac{80000 \cdot 7{,}8}{100\ \text{p}}\ \text{p}$$

$$G = 6{,}24 \cdot \text{kp}$$

Gesamtlast mithin 12000 kp + 6,24 · kp Belastung:

$$\frac{12000\ \text{kp} + 6{,}24\ \text{kp}}{20\ \text{kp mm}^{-2}} = x\ \text{mm}^2$$

$$x = 872\ \text{mm}^2$$

110. Mit Hilfe der Kongruenz entstehender Teildreiecke erhält man $\overline{CM} = \overline{CN}$ und $\sphericalangle$ MCN $= 60°$.

111.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$2r_1^2 = c^2$$
$$2r_2^2 = b^2$$
$$2r_3^2 = a^2$$

Dreiecksfläche:

$$F_\triangle = \frac{ab}{2}$$

„Sichelfläche":

$$F_S = \frac{ab}{2} + \frac{\pi r_1^2}{4} - \frac{r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{4} + \frac{r_2^2}{2} - \frac{\pi r_3^2}{4} + \frac{r_3^2}{2}$$

$$F_S = \frac{ab}{2} + \frac{\pi}{4}(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) + \frac{1}{2}(-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

$$F_S = \frac{ab}{2} + (r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$F_S = \frac{ab}{2} + \underbrace{\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}_{=0}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$F_S = \frac{ab}{2} \quad \text{und daraus folgt:} \quad F_\triangle = F_S$$

112. Abbildung siehe Seite 76 oben.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

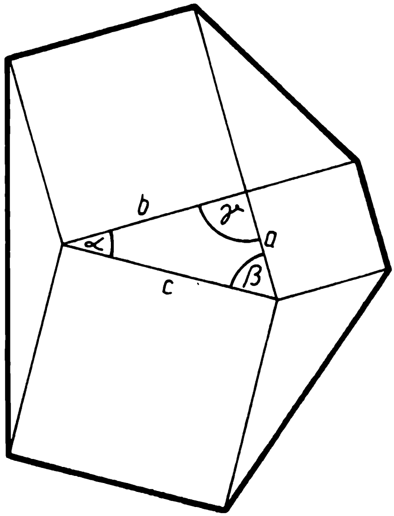
$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$F = 2 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ac}{2} \cdot \sin(180° - \beta) + \\ + \frac{bc}{2} \cdot \sin(180° - \alpha)$$

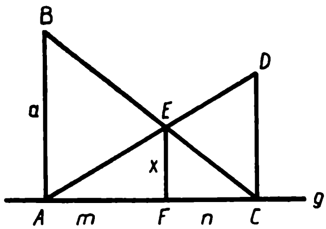
$$F = ab + a^2 + b^2 + b^2 + a^2 + \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta + \frac{bc}{2} \cdot \sin\alpha$$

$$F = ab + 2a^2 + 2b^2 + \frac{ac}{2} \cdot \frac{b}{c} + \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{c}$$

$$F = ab + 2a^2 + 2b^2 + ab$$
$$F = 2(a^2 + ab + b^2).$$



113. a)



$$R_1 \triangleq a$$
$$R_2 \triangleq b$$
$$R_x \triangleq x$$
$$a : x = (m + n) : n$$
$$b : x = (m + n : m$$

$$an = mx + nx$$
$$bm = mx + nx,$$

$$n = \frac{mx}{a - x}$$

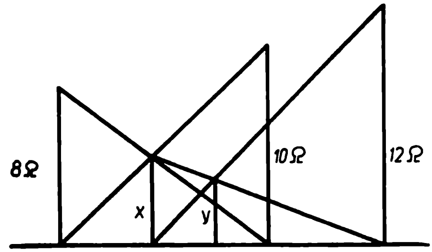
$$n = \frac{bm - mx}{x}$$

$$\frac{mx}{a - x} = \frac{bm - mx}{x}$$

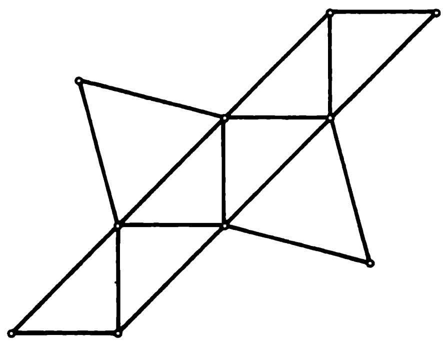
$$x^2 = ab - bx - ax + x^2$$
$$ab = ax + bx$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

b)

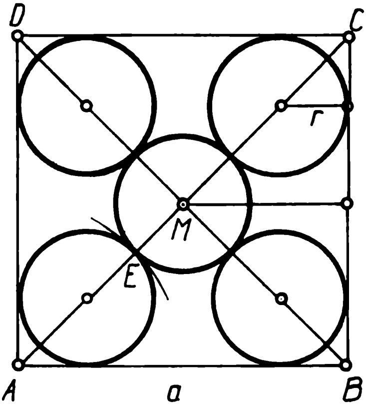


114.
115.
116.
117.
118. Man zeichnet die Strecke $\overline{AD} = s_a$ und den Thaleshalbkreis über dieser Strecke (1. geometrischer Ort für Punkt C). Da die Seitenhalbierenden eines Dreiecks einander im Verhältnis 2:1 schneiden, schlägt man um ihren auf s_a gelegenen Schnittpunkt S einen Kreisbogen mit $\frac{2}{3} s_c$ (2. geometrischer Ort für C). Der Schnittpunkt dieses Kreisbogens mit dem Thaleshalbkreis ist der gesuchte Punkt C. Man verbindet C mit S und verlängert diese Strecke bis zum Punkt E, so daß $\overline{CE} = s_c$ ist. Ferner verbindet man A mit C und zeichnet die von A über B bzw. von C über D verlaufenden Strahlen. Sie schneiden einander im Punkt B. ABC ist das verlangte Dreieck. Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\frac{1}{3} s_a < \frac{2}{3} s_c < \frac{2}{3} s_a$ ist, weil sonst kein Schnittpunkt vorhanden ist.
119. Der Körper hat folgendes Netz:



120. a) Es ist $a\sqrt{2} = 4r + 2 \cdot r\sqrt{2}$.
Daraus erhält man $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.
b) Man zeichnet das Quadrat ABCD einschließlich seiner Diagonalen (Schnittpunkt M) und schlägt um A mit $\frac{a}{2}$ einen Kreisbogen, der $\overline{AC}$ in E schneidet.

Da $r + r\sqrt{2} = \frac{a}{2}$ ist, ist $\overline{EM}$ der gesuchte Radius r.



121. a) Es ist $a \cdot h_a = 2F$, also $h_a = \frac{2F}{a}$

$b \cdot h_b = 2F$, also $h_b = \frac{2F}{b}$

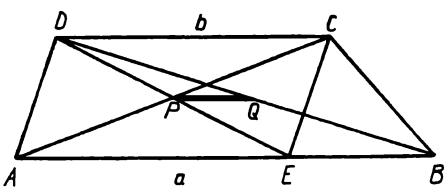
$(a + h_a) - (b + h_b) = \frac{(a - b)(ab - 2F)}{ab} \geqq 0$,

da $ab \geqq 2F$ ist.

Also ist $a + h_a \geqq b + h_b$.

b) Genau dann, wenn $\gamma = 90°$ ist, ist $ab = 2F$ und $a + h_a = b + h_b$.

122.



Es sei $a > b$.
In der Abb. ist $EB = AB - CD = a - b$.
Der Punkt P liegt auf DE.
Es ist $DP = PE$ und $DQ = QB$, also $PQ \parallel EB$. Mithin ist $DP : DE = PQ : EB = 1 : 2$.

Daher ist $PQ = \frac{a - b}{2}$.

Falls $a = b$ ist, erhält man ein Parallelogramm mit $P \equiv Q$ (Diagonalschnittpunkt), also $PQ = 0$.

123. Es seien S die Kegelspitze, M der Kugelmittelpunkt, r der Kugelradius und h die Höhe des Kegels.

Dann ist $r : SM = \frac{a}{2} : a$,

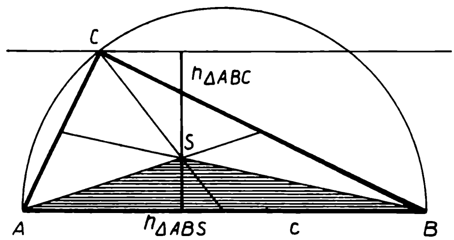
also $SM = 2r$.

Da $h = 6r$ ist, ist wegen $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

mithin $r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$.

124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.

141. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2.



$F_{\triangle ABS} = 6\frac{2}{3}$ cm², aus $F = \frac{g \cdot h}{2}$ folgt: $\frac{2F}{g} = h$

und $\frac{2 \cdot 6\frac{2}{3}}{10} = h$

$\frac{4}{3} = h$

Auch die Höhenabschnitte verhalten sich wie 1:2, daraus folgt:

$h_{\triangle ABC} = 3\,(h_{\triangle ABS}) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ cm

$F_{\triangle ABC} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$ cm².

Aus den Verbindungslinien des Schwerpunktes S mit den Dreieckspunkten A, B und C entstehen drei flächengleiche Teildreiecke.

$h = 4$ cm $\quad h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)

$p + q = c = 10$

$h^2 = p \cdot (10 - p)$

$p^2 - 10p + 16 = 0$

$p_1 = 8$ cm, $p_2 = 2$ cm

$a^2 = h^2 + p_1^2$ (Pythagoras)

$a_2 = 16 + 64$

$a = 8{,}94$ cm

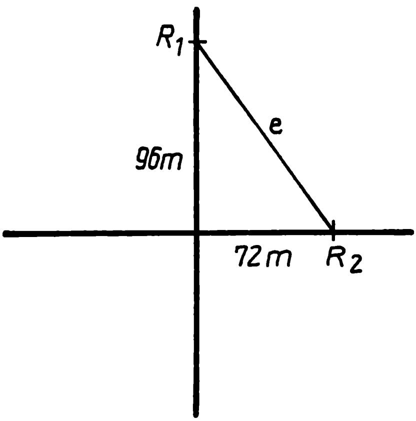
$b^2 = h^2 + p_2^2$

$b^2 = 16 + 4$

$b = 4{,}47$ cm

Bei Verwendung von $p_1 = 2$ cm ergeben sich
$a = 4{,}47$ cm und
$b = 8{,}94$ cm.

142.



a) $e = \sqrt{96^2 + 72^2}$

$e = \sqrt{14400}$

$e = 120$ m

b) $(96 - 8x)^2 + (72 - 6x)^2 = 55^2$
$(x - 12)^2 = 30{,}25$
$x_1 = 17{,}5$
$x_2 = \ \ 6{,}5$

Nach 6,5 Sekunden beträgt die Entfernung der beiden Radfahrer nur noch 55 m. Die zweite Lösung ergibt die Zeit für die abermalige Entfernung der beiden Radfahrer von 55 m, jedoch **nach** der Straßenkreuzung.

c) Standort der beiden Radfahrer nach 17,5 bzw. nach 6,5 Sekunden:
$R_1: 96\text{ m} - 17{,}5\text{ s} : 8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -44\text{ m}$
(d. h. 44 m über die Kreuzung hinaus),
$R_2: 72\text{ m} - 17{,}5\text{ s} : 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -33\text{ m}$
(d. h. 33 m über die Kreuzung hinaus),
und
$R^1: 96\text{ m} - 6{,}5\text{ s} : 8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 44\text{ m}$ vor der Kreuzung,
$R_2: 72\text{ m} - 6{,}5\text{ s} : 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 33\text{ m}$ vor der Kreuzung.

$\tan\alpha = \frac{33\text{ m}}{44\text{ m}} = 0{,}75 \quad \alpha = 36{,}87° = 36°\ 52'\ 12''$

$\tan\beta = \frac{44\text{ m}}{33\text{ m}} = 1\frac{1}{3} \quad = 53{,}13° = 53°\ \ 7'\ 48''.$

R_1 (R_2) sieht nach 6,5 s und nach 17,5 s R_2 (R_1) unter einem Winkel von 36,87° (53,13°) zur Straßenrichtung bzw. nach 17,5 s unter einem Winkel von 143,13° (126,87°) zur Fahrtrichtung.

143. Z sei der Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{XY}$. Auf Grund der Umkehrung des Satzes von Thales ist

$$\overline{ZA} = \frac{\overline{XY}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{ZA} = 3\text{ cm}.$$

Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 teilen, gilt:

$$\overline{SA} = \frac{2}{3}\overline{ZA} \quad \text{bzw.} \quad \overline{SA} = \frac{1}{3}\overline{XY} \quad \text{oder} \quad \overline{SA} = 2\text{ cm}.$$

Da X, Y Punktvariablen bedeuten, ist der geometrische Ort der Schwerpunkt S aller möglichen Dreiecke AXY der Kreis um A mit $r = 2$ cm mit Ausnahme der Schnittpunkte des Kreises mit den beiden Geraden.

144. Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt des umhüllenden Kreises ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.

Daraus ergibt sich für den Radius R des umhüllenden Kreises:

$$R = \frac{2}{3} r\sqrt{3} + r = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right).$$

Es gilt:

$$(r + x)^2 = r^2 + \left(R - x - \frac{1}{3} r\sqrt{3}\right)^2.$$

Daraus folgt: $\quad x = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{33} \cdot r.$

145.

146. Es ist $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ und $\tan\beta = \frac{1}{3}$.

Aus $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

erhält man $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$ und somit $\tan(\alpha + \beta) = 1$

$\alpha + \beta = 45° + k \cdot 180°.$

Außer $\alpha + \beta = 45°$ könnte noch $\alpha + \beta = 225°$ sein. Das ist aber nicht möglich, da in diesem Falle mindestens einer der beiden Winkel größer als 90° sein müßte, im Widerspruch zur Voraussetzung.

147. Man betrachte den Mechanismus in einer beliebigen, dann aber fixierten Stellung. Die Punkte O, P, P* liegen auf einer Geraden und die Diagonalen $\overline{PP^*}$ und $\overline{AB}$ des Gelenkrhombus schneiden einander rechtwinklig. Ihr Schnittpunkt heiße C. Dann gilt:

$r \cdot r^* = (\overline{OC} - \overline{CP})(\overline{OC} + \overline{CP}) = \overline{OC}^2 - \overline{CP}^2$;

ferner ist

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} - \overline{AC}^2$ und $\overline{OP}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AC}^2$,

so daß $\quad r \cdot r^* = \overline{OA}^2 - \overline{PA}^2$.

Dieser Wert hängt aber nur von den Gliederabmessungen des Mechanismus ab, q. e. d.

148. Man denke sich den Umkreis um das Dreieck gezeichnet und den Mittelpunkt M mit den Ecken verbunden. Dann entstehen drei gleichschenklige Dreiecke (AMB, BMC und CMA). Ferner denke man sich vom Umkreismittelpunkt die Lote auf die Dreieckseiten gefällt; ihre Fußpunkte seien D (auf $\overline{AB}$), E (auf $\overline{BC}$) und F (auf $\overline{AC}$).
Da der Umkreismittelpunkt auch Mittelpunkt des Inkreises sein soll, ist der Abstand aller drei Dreieckseiten von ihm gleich groß. Durch die Lote wird jedes der drei oben erwähnten Dreiecke in zwei Teildreiecke (z. B. AMD und DMB) zerlegt die sämtlich untereinander kongruent sind, da sie in zwei Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen. Dann sind aber auch die restlichen Seiten alle gleichlang, also

$$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{FA}.$$

Nun ist im Ausgangsdreieck
$a = \overline{BE} + \overline{EC}$, $b = \overline{CF} + \overline{FA}$ und $c = \overline{AD} + \overline{DB}$.
Das Dreieck ist mithin gleichschenklig.

Kurztitel	Kl.II	Kl.III	Kl.IV	Stufe	Kl.V	Stufe	Kl.VI	Stufe	Kl.VII	Stufe	Kl.VIII	Stufe	Kl.IX	Stufe	Kl.X
ABC/I		1-4, (Haus-) 5-6, (Schul-)	1-4, (Haus-) 5-12, (Schul-)												
ABC/II	1-4.	7-10, (Haus-)	13-16, (Haus-)												
Sowj. Lehrb. 3		11-21.													
Sowj. Lehrb. 4			17-32.												
Vorolympiade 1960 Berlin/Leipzig					1-5, 23-26, 38-39		1-6, 24, 33-36.		1-7, 38-39 54-57,		1-4, 47-50, 61-66,		1-7, 47-48, 57-64,		1-4, 61-63, 76-84,
Vorolympiade 1961 Berlin/Leipzig								I.	8-10,40, 58-59	I.	5-7, 51, 67,	I.	8,49,65-67,	I.	5-6,65,85-87,
								II.	11-12,41,60-61	II.	8-11, 68,	II.	9-10,50,68-69,	II.	7,64, 88-90,
								III.	13-15, 42, 62,	III.	12-13, 52,69,	III.	11-14, 70,	III.	8-9, 66, 91-92,
I. Olympiade 1962				I.	6-8, 40-41.	I.	7-10, 25, 37,	I.	16-18,43, 63-64,	I.	14-16,53, 70-71,	I.	15-17,51, 71-72,	I.	10-11, 93-95,
				II.	9-10, 27-28,42,	II.	11-12, 26,38,	II.	19-20, 65-67,	II.	17-18,54, 72-73,	II.	18-21, 73,	II.	12-14, 96-97,
								III.	21-22,44, 68-69,	III.	19-21,55, 74,	III.	22-24,52, 74,	III.	15-18, 98-102,
														IV.	19-21, 103-104,
II. Olympiade 1963				I.	11-14, 29,43.	I.	13-14, 27-28, 39-40,	I.	23,45, 70,73,	I.	22-25, 75-76,	I.	25-28, 75-76,	I.	22-23, 105-108,
				II.	15-16, 30,44-45,	II.	15-16, 29-30,41,	II.	24-25,46, 74-75,	II.	26-29,31,56, 77-79,	II.	29-30,53, 77-78,81-82,	II.	24-26 109-110,
								III.	26-27,47, 76-78,	III.	30,32,57, 80-82,	III.	31-33,79-80,	III.	27-29,111-113
														IV.	30-31,114-117,
III. Olympiade 1964				I.	17-18, 31-33,46,	I.	17-19,31, 42-43,	I.	28-32,70,	I.	33-35,58, 83-84,	I.	34-36,83-85,	I.	32-33,67,118-120,
				II.	19-20, 34,36,47.	II.	20, 44-46,	II.	33,48-49, 80-81,	II.	36-37,59, 85-86,	II.	37-38,54, 86-87,	II.	34,68,121-123
								III.	36-37,53, 86-88,	III.	45-46,60, 90-92,	III.	43-45,56, 93,96,	III.	53-56,143-144,
														IV.	58-60,146-148,
Suhl					21-22, 35,37,		21-23, 47-49.		34-35, 50-51, 82-85,		39-43,88,		39-41,55, 89-92,94-95,		39-45,70, 124-139,
Lichtb.							32,				38, 87,		88,		35-38,69
Humb.									52,		44,89,				46,71-72,140,
Fern													42,		73,
LVZ															47-52,74, 141-142,
Volksh.													46,		57,75,145,

Chronologische Übersicht

zur Dokumentation
577 Olympiadeaufgaben (Kl. 2 bis 10)

Erläuterung zur Übersicht Seite 79
Kurztitel:

ABC/I	„ABC-Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 3 und 4 im April 1963". (Haus- und Schulaufgaben)
ABC/II	„ABC-Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 2 bis 4 1964". (Haus- und Schulaufgaben)
Sowj. Lehrb. 3	„Arithmetik, Lehrbuch für die 3. Klasse". Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der RSFSR.
Sowj. Lehrb. 4	„Arithmetik, Lehrbuch für die 4. Klasse". Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der RSFSR.
Suhl	„Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden" PBK, Suhl.
Lichtb.	„Berliner Mathematiklehrer berichten". Aus der Arbeit des Stadtbezirks Lichtenberg.
Humb.	„Mathematischer Schülerwettbewerb an der Humboldt-Universität 1960"
Fern.	„Mathematik-Fernländerkampf Ungarn — DDR 1963". (Sendung „Abend der Jugend" von Radio DDR)
LVZ	„Mathe-Preisaufgabe für Berufs- und Oberschüler der Leipziger Volkszeitung". (In 4 „Runden", von Juli bis August 1963)
Volksh.	„Mathematik-Meisterschaften der Volkshochschulen der DDR". (2. Wettkampf im Frühjahr 1964)

Bitte beachten Sie weitere Hinweise auf Seite 7.

An dem 15. Lesebogen arbeiteten dankenswerterweise mit:

Technische Zeichnungen: Brigitte Gubitz, Heidi Hofmann, Vroni Zeising, Jungarbeiterinnen im RFT Fernmeldewerk Leipzig

Klischees: Kopieranstalten Voigt und Stier, Leipzig

Fotos: 28 Fotos J. Lehmann, PKK Leipzig, 6 Fotos ND/ADN

Titelblatt: Tuschzeichnung (1962) eines Schülers (Name) unbekannt) der erw. Humboldt-Oberschule, Leipzig.

In unermüdlicher Kleinarbeit wurden von den Werktätigen der Buchdruckerei R. Hahn, dem Druckhaus Aufwärts (beide Leipzig 05), der Druckerei „Sachsendruck", Plauen, der oft nicht einfache Handsatz erstellt und von der Elbe-Saale-Druckerei, Naumburg, mit dem Maschinensatz zu einem Ganzen zusammengefügt.
Unser besonderer Dank gilt dem Mathematikfachlehrer W. Unze (Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig O 39) für seine fleißige Mitarbeit am Lesebogen. Der Zentralvorstand der Gewerkschaft Unterricht und Erziehung, das Ministerium für Volksbildung, Herr Ing. Zeißler, Deutscher Buchexport und Import und der Direktor des Pädagogischen Kreiskabinetts förderten unsere Arbeit hervorragend. Oberstudienrat Herbert Titze (PBK Berlin) stellte in alter Freundschaft uneigennützig das uns fehlende Material zur Dokumentation zur Verfügung.

Der vorliegende Lesebogen ist eine Dokumentation. Er soll anregen, systematisch weiter zu sammeln. Bei fleißiger Auswertung der 573 Aufgaben wird ersichtlich werden, wie die Anforderungen von Jahr zu Jahr im System unserer Olympiaden gestiegen sind. Wir haben die Originaltexte der Aufgaben und Lösungen übernommen. Dem Leser sei eine Modernisierung selbst überlassen. Aus satztechnischen Gründen mußten wir uns schweren Herzens entschließen, die Klassenstufen 11 und 12 sowie die Aufgaben der Internationalen Olympiaden auszuklammern. Es ist vorgesehen, die über 300 Aufgaben Anfang 1965 gesondert als Dokumentation herauszugeben.

Die Bezirkskabinette sowie die Leser von „Wissenschaft und Fortschritt", die sich an uns wandten, werden wir zum entsprechenden Zeitpunkt **unaufgefordert** beliefern. Wir bitten, keine Anfragen an uns zu richten. Alle Lesebogen entstehen außerhalb der Arbeitszeit. Wir wollen weiterhin an der **inhaltlichen** Verbesserung der außerunterrichtlichen Arbeit tätig sein und unseren 16 000 Lesern aktiv und unbürokratisch helfen und uns nicht mit Organisationsfragen belasten.

Wir wünschen all unseren Lesern für die IV. Mathematikolympiade, sei es als Lehrer, Schüler oder als Kollektiv, viel Erfolg.

Johannes Lehmann
(Verdienter Lehrer des Volkes)
Vorsitzender des Aktivs Mathematik Leipzig-Stadt