Günter Grosche

Übungen für Junge Mathematiker 2
Elementargeometrie

1969 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 37
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das vorliegende Büchlein ist aus einer Reihe von Übungen entstanden, die der Verfasser zur Vorbereitung auf die DDR-Olympiade Junger Mathematiker mit Schülern der Klassenstufen 9 bis 12 aus dem Bezirk Leipzig in den vergangenen Jahren durchgeführt hat.
Die Anregung, die dort vorgetragenen Aufgaben und Lösungshinweise noch etwas zu erweitern und zusammen mit entsprechenden Aufgaben aus dem Gebiete der Zahlentheorie, die bereits vorliegen (MSB Nr. 36), und der Behandlung von Ungleichungen zu veröffentlichen, ging von Herrn G. Kleinfeld vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit aus.
So entstand diese dreiteilige mit Hinweisen versehene Aufgabensammlung, von der die Autoren hoffen, dass sie interessierten Schülern Anregungen gibt und eine Hilfe bei der Vorbereitung auf Olympiaden darstellt.

Darüber hinaus soll sie Lehrer und Zirkelleiter bei der Förderung für Mathematik begabter Schüler unterstützen. Aus der kurz angedeuteten Genese geht hervor, dass die vorliegende Darstellung nicht eine in Aufgaben gesetzte Einführung in die Elementargeometrie ist.
Vielmehr wird der Besitz elementargeometrischer Kenntnisse des Schulunterrichts vorausgesetzt. Diese werden durch die hier behandelten Aufgaben gefestigt, vertieft und erweitert.

Ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis zeigt, dass sich dieser Prozess unter dem methodischen Aspekt der "geometrischen Konstruktionsaufgabe" vollziehen soll.

Damit möchte der Verfasser erreichen, dass ein anwendungsbereites Wissen entsteht und dass zugleich durch die Selbsttätigkeit bei der Analyse und Lösung mathematisch formulierter Aufgaben konstruktive und schöpferische Fähigkeiten entwickelt werden.

Leipzig, Frühjahr 1969

Dr. rer. nat. Günter Grosche

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Begriff 'geometrische Konstruktionsaufgabe'

Unter einer geometrischen Konstruktionsaufgabe verstehen wir die Aufgabe, ein Verfahren anzugeben, nach dem eine geometrische Figur mit geforderten Eigenschaften unter Verwendung vorgeschriebener Hilfsmittel hergestellt werden kann.

Wir unterscheiden ebene und räumliche Konstruktionsaufgaben. Bei ebenen Konstruktionsaufgaben wollen wir unter der Herstellung der Figur die Anfertigung einer Zeichnung verstehen, bei räumlichen Aufgaben genügt die Beschreibung des Verfahrens, wobei wir zur Unterstützung der Anschauung Projektionsskizzen verwenden wollen:
Die geforderten Eigenschaften werden in der Aufgabe genannt.

Als klassische vorgeschriebene Hilfsmittel gelten seit Platon[1] Lineal und Zirkel. Zur technischen Vereinfachung des Zeichnens verwenden wir auch Zeichendreiecke zum Zeichnen von zueinander parallelen Geraden und zueinander senkrechten Geraden. Zeichendreiecke bedeuten also grundsätzlich keine Erweiterung der konstruktiven Hilfsmittel im Sinne des Problems, da sich zueinander parallele bzw. senkrechte Geraden auch allein mit Zirkel und Lineal zeichnen lassen.

Es sei an dieser Stelle nur vermerkt, dass man als konstruktive Hilfsmittel für gewisse Aufgaben auch allein den Zirkel oder allein das Lineal fordern kann.

1.2 Gliederung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe

Zur vollständigen Lösung einer ebenen Konstruktionsaufgabe gehören:

1. Aufstellen eines Lösungsplanes,
2. Durchführung der Konstruktion (Zeichnung) nach dem Lösungsplan,
3. Beschreibung der Konstruktion (Angabe des Verfahrens),
4. Determination,
5. Beweis, dass jede durch das Verfahren gewonnene Figur die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften hat.

Zu 1.: Voraussetzung zur Aufstellung des Lösungsplanes ist ein klares Erfassen des gestellten Problems. Dazu ist es zweckmäßig, die in der genannten Aufgabe enthaltenen Begriffe sich durch deren Definitionen bzw; charakteristischen Eigenschaften vertraut zu machen. Desgleichen vergegenwärtige man sich geometrische Lehrsätze, in denen diese Begriffe mit anderen Stücken der zu konstruierenden Figur in Verbindung gebracht werden.

Zur Erleichterung dieser Überlegungen verwenden wir eine Überlegungsskizze, d.h. eine Figur, von der wir annehmen, dass sie eine der gesuchten sei, und zeichnen darin die gegebenen Stücke ein.

Zu 2.: Nach dem Lösungsplan wird die Zeichnung ausgeführt. Dabei hat man die Möglichkeit, den Lösungsplan nochmals zu kontrollieren.

Zu 3.: Die Beschreibung muss so ausgeführt werden, dass man mit ihrer Hilfe die Zeichnung anfertigen kann.

[1] Platon, griechischer Mathematiker und Philosoph um 400 v.u.Z.

Zu 4.: Die Determination hat zwei Fragen zu beantworten, nämlich
1. ob die Lösung der Aufgabe immer möglich ist oder an gewisse zu ermittelnde Bedingungen gebunden ist, und
2. ob die Konstruktion eindeutig oder mehrdeutig ist, d.h., ob man nur eine oder mehrere zueinander nicht kongruente Figuren mittels der Konstruktion finden kann.
(Zueinander kongruente Figuren gelten als nicht wesentlich verschieden.)

Zu 5.: Der Beweis hat zu zeigen, dass die durch das Verfahren gewonnenen Figuren tatsächlich die in der Aufgabe genannten Eigenschaften besitzen.
Das ist deswegen nötig, weil man oft aus dem Lösungsplan nur notwendige Bedingungen für die Lage gewisser Punkte der gesuchten Figur erhält.

Wir werden nur in wenigen Fällen eine vollständige Lösung angeben. Aus Gründen der Platzersparnis- beschränken wir uns bei den meisten Aufgaben auf die Mitteilung des Lösungsplanes und einiger Anmerkungen zur Determination.

1.3 Begriff 'geometrischer Ort'

Wir verwenden zuweilen bei der Aufstellung des Lösungsplanes den Begriff des geometrischen Ortes. Unter einem geometrischen Ort verstehen wir eine Menge, die aus genau den Punkten der Ebene bzw. des Raumes besteht, die die in dem geometrischen Ort genannte Eigenschaft besitzen.

1.4 Verabredung über Bezeichnungen

Wir führen folgende Verabredungen ein und bezeichnen:

- Punkte mit großen lateinischen Buchstaben: A, B, ...;
- die durch zwei (verschiedene) Punkte A und B eindeutig bestimmte Verbindungsgerade mit $g(AB)$;
- die Strecke mit den Endpunkten A und B mit $\overline{AB}$[2];
- die Länge der Strecke AB mit EF.

Daneben verwenden wir auch kleine lateinische Buchstaben zur Bezeichnung von Geraden und Strecken. Die Länge solcher Strecken wird dann wieder durch Überstreichen gekennzeichnet.
$\triangle ABC$ bedeutet ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C. Andere Figuren werden durch große Frakturbuchstaben im Text genannt.

Wir bezeichnen ferner:
Winkel durch kleine griechische Buchstaben: α, β, ...; einen Winkel mit dem Scheitel A, auf dessen Schenkeln die Punkte B bzw. C liegen, mit $\angle BAC$;
die Größe eines Winkels durch Überstreichen seines Zeichens: $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ...[3]
Das Zeichen $\equiv$ bedeutet Identität von Figuren, das Zeichen $\cong$ Kongruenz von Figuren, das Zeichen $=$ Gleichheit von Größen.

Unter einem Berührungsradius MA eines Kreises verstehen wir die vom Mittelpunkt M und

[2] In dieser LaTex-Abschrift werden Strecken nur mit AB gekennzeichnet. St. Polster

[3] In dieser LaTex-Abschrift werden die Größen von Winkeln ohne Überstreichung gekennzeichnet, da dies i.A. eindeutig ist und nicht zu Verwechslungen führt. St. Polster

einem Punkt A der Peripherie des Kreises begrenzte Strecke. Hingegen bedeutet der Radius r eines Kreises die Länge eines beliebigen seiner Berührungsradien.

1.5 Zusammenstellung elementarer geometrischer Zusammenhänge in der Ebene

Wir setzen die Kenntnis folgender elementarer geometrischer Zusammen- hänge voraus:
Zwei Figuren heißen kongruent genau dann, wenn es eine Bewegung oder Umlegung gibt, die die eine Figur auf die andere abbildet. Eine Bewegung lässt sich aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung zusammensetzen, eine Umlegung aus einer Bewegung und einer Spiegelung (an einer Geraden).
Lässt sich die eine Figur mittels einer Bewegung auf die andere abbilden, so heißen beide Figuren gleichsinnig kongruent, ist eine Umlegung erforderlich, so heißen sie ungleichsinnig kongruent.
Kongruente Winkel haben die gleiche Größe, kongruente Strecken die gleiche Länge.

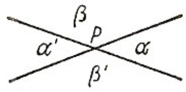


Bild 1

Schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt P, so entstehen vier Winkel mit dem gemeinsamen Scheitel P. Bezeichnen wir einen davon mit α (Bild 1), so heißt derjenige Winkel, dessen Schenkel mit Ausnahme des gemeinsamen Scheitels punktfremd mit den Schenkeln des Winkels α sind (in Bild 1 mit α' bezeichnet), Scheitelwinkel zu α.
Die anderen beiden Winkel β und β', die mit α je einen Schenkel gemeinsam haben, heißen Nebenwinkel zu α. Es gilt dann:

Jeder Winkel ist mit seinem Scheitelwinkel kongruent.
Die Summe der Maße eines Winkels und eines seiner Nebenwinkel beträgt 180°.

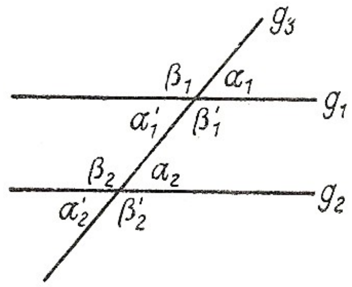


Bild 2

Werden zwei parallele Geraden g_1 und g_2 von einer dritten Geraden g_3 geschnitten (Bild 2), so entstehen acht Winkel. Fassen wir je zwei zu einem Paar zusammen, wenn die Schenkel parallel und gleich orientiert verlaufen, so finden wir vier Paare, die in Bild 2 mit α_1 und α_2 bzw. α' und α_2' bzw. β_1 und β_2 bzw. β_1' und β_2' bezeichnet sind.

Jeder der beiden Winkel eines Paares heißt Stufenwinkel des anderen. Ersetzt man in einem solchen Paar von Stufenwinkeln einen von beiden Winkeln durch seinen Scheitelwinkel, so entsteht ein neues Paar, in dem jeder Wechselwinkel des anderen heißt (in Bild 2 α_1 und α_2' bzw. β_1 und β_2' bzw. α_1' und α_2 bzw. β_1' und β_2).

Es gilt dann:

Die Winkel eines Paares von Stufenwinkeln sind kongruent.

Die Winkel eines Paares von Wechselwinkeln sind kongruent.

Zum Nachweis der Kongruenz von Dreiecken gibt es gewisse Kriterien, die man als Kongruenzsätze bezeichnet:

1. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Längen der Seiten des einen Dreiecks gleich den Längen der Seiten des anderen sind.

2. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Längen von zwei Seiten des einen Dreiecks gleich den Längen von zwei Seiten des anderen sind und in beiden Dreiecken der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel die gleiche Größe hat.

3. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Größen von zwei Winkeln des einen Dreiecks gleich den Größen von zwei Winkeln des anderen sind und in beiden Dreiecken die von den Scheiteln dieser beiden Winkel begrenzte Seite gleiche Länge hat.

4. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Längen von zwei Seiten des einen Dreiecks gleich den Längen von zwei Seiten des anderen sind und in beiden Dreiecken der der größeren dieser beiden Seiten gegenüber- liegende Winkel gleiche Größe hat.

Bemerkung: Haben beide Seiten gleiche Länge, so ist die Einschränkung bezüglich der Lage des Winkels gegenstandslos.

Zwei Figuren heißen ähnlich genau dann, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die eine Figur auf die andere abbildet. Jede Ähnlichkeitsabbildung lässt sich aus einer Bewegung oder Umlegung und einer zentralen Streckung zusammensetzen. Auch für den Nachweis der Ähnlichkeit von Dreiecken gibt es Ähnlichkeitssätze. Man erhält sie aus den Kongruenzsätzen, indem man statt Gleichheit der Längen von Seiten Proportionalität dieser Längen setzt. Speziell folgt dann aus dem dritten Kongruenzsatz der wichtigste Ähnlichkeitssatz:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Größen zweier Winkel des einen gleich den Größen zweier Winkel des anderen sind.

Die Proportionalität der Länge einer Seite des einen Dreiecks zur Länge einer Seite des anderen ist trivial, so dass diese Bedingung wegfallen kann.

Ferner setzen wir die Strahlensätze als bekannt voraus:

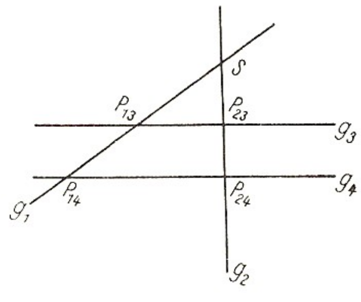


Bild 3

1. Werden die Geraden g_1 und g_2 von den parallelen Geraden g_3 und g_4 in den Punkten P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24} geschnitten (Bild 3), so gelten folgende Aussagen:

a) ist g_1 parallel zu g_2, so gilt

$$P_{13}P_{14} = P_{23}P_{24} \qquad \text{und} \qquad P_{13}P_{23} = P_{14}P_{24}$$

b) schneiden sich g_1 und g_2 in S, so gilt:

$$SP_{13} : SP_{14} = SP_{23} : SP_{24} \qquad \text{und} \qquad SP_{13} : SP_{14} = P_{13}P_{23} : P_{14}P_{24}$$

2. Werden die sich in S schneidenden Geraden g_1 und g_2 von den Geraden g_3 und g_4 in den von S verschiedenen Punkten P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24} geschnitten (Bild 3) und gilt:

$$SP_{13} : SP_{14} = SP_{23} : SP_{24}$$

und S liegt nicht zwischen P_{13} und P_{14}, S liegt nicht zwischen P_{23} und P_{24} oder S liegt zwischen P_{13} und P_{14}, S liegt zwischen P_{23} und P_{24} so ist g_3 parallel zu g_4.

Bemerkung: Wir setzen den Begriff der Parallelität von Geraden so fest, dass er reflexiv ist, d.h., jede Gerade ist zu sich selbst parallel. Demnach sind zwei Geraden genau dann parallel, wenn sie entweder identisch sind oder in einer Ebene liegen und keinen Schnittpunkt haben. Dann bleibt die Aussage 2. auch richtig und sinnvoll, wenn etwa $P_{13} \equiv P_{14}$ gilt.

Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

wobei s die Länge einer Seite und h die Länge der zugehörigen Höhe bedeutet.

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises.
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises.
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks. Dieser teilt jede Seitenhalbierende innen im Verhältnis 2 : 1, so dass der längere Abschnitt den zugehörigen Eckpunkt enthält.
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Jede Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem Berührungsradius in ihrem Berührungspunkt.

Zwei Sehnen eines Kreises besitzen genau dann gleiche Länge, wenn sie den gleichen Abstand vom Mittelpunkt des Kreises haben. Ist AB Sehne eines Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt M (Bild 4), so teilt die Gerade $g(AB)$ die Ebene in zwei Halbebenen und die Peripherie von $\mathfrak{K}$ in zwei Kreisbögen.

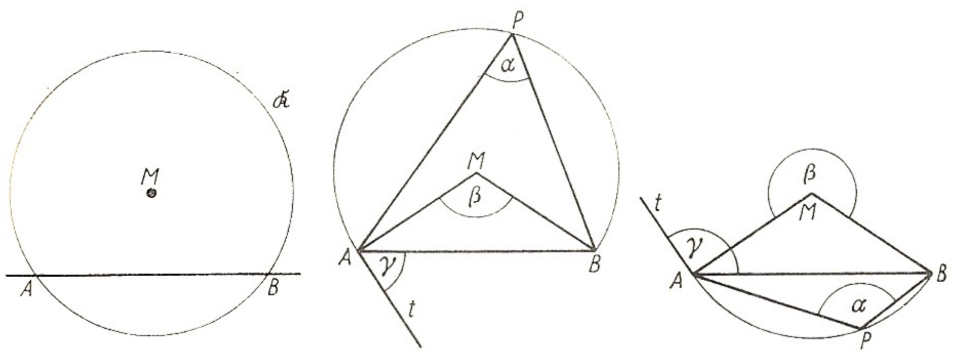


Bild 4-6

Wir denken uns die Figur in diese beiden Kreisbögen zerlegt (Bild 5 und 6). Wir wählen auf einem der beiden Kreisbögen einen von A und B verschiedenen Punkt P und ziehen in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden $g(AB)$, die nicht den Kreisbogen enthält, die von A (oder B) ausgehende Halbgerade t, die den Kreisbogen in A (oder B) berührt.

Dann heißt jeder Winkel ($\angle APB \equiv \alpha$) Peripherie- oder Umfangswinkel dieses Bogens, derjenige Winkel ($\angle AMB \equiv \beta$), der nicht im Innern des vom Kreisbogen und den Berührungsradien in A und B begrenzten Sektors liegt, Mittelpunktswinkel dieses Bogens, der von der Halbgeraden t und der durch A und B bestimmten Sehne gebildete Winkel γ mit der Bedingung

$0 < \gamma < 180°$ Sehnentangentenwinkel dieses Bogens.

Offenbar ist dann ein solcher Bogen durch Angabe der Sehne, der Halbebene und des zugehörigen Mittelpunktswinkels eindeutig bestimmt. Es gelten folgende Sätze:

Alle Umfangswinkel des gleichen Bogens haben die gleiche Größe α, und es ist $2\alpha = \beta$ und $\alpha = \gamma$, wenn β den zugehörigen Mittelpunktswinkel und γ den zugehörigen Sehnentangentenwinkel bezeichnen.

Die Scheitel aller in einer Ebene liegenden Winkel gegebener Größe α, deren einer Schenkel durch A und deren anderer Schenkel durch B geht, liegen auf Kreisbögen über der Sehne AB mit dem Umfangswinkel der Größe α.
Es gibt genau zwei derartige Bögen bei gegebener Strecke AB und gegebenen Größe α, nämlich in jeder Halbebene bezüglich der Geraden $g(AB)$ je einen.

Ist speziell $\alpha = 90°$, so bilden beide Kreisbögen über AB einen Kreis (Kreis des Thales [4]), und AB ist Durchmesser dieses Kreises.
Schneidet eine Gerade g_1 einen Kreis $\mathfrak{K}$ in P_{11} und P_{12}, eine Gerade g_2 diesen Kreis $\mathfrak{K}$ in P_{21} und P_{22}, und schneiden sich diese beiden Geraden in S, so gilt:

$$SP_{11} \cdot SP_{12} = SP_{21} \cdot SP_{22}$$

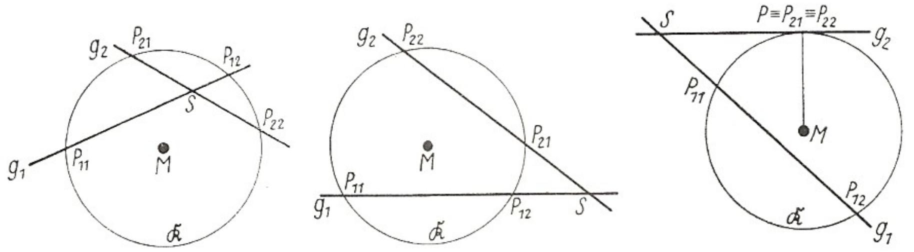


Bild 7-9

Liegt S im Innern von $\mathfrak{K}$, so heißt dieser Satz Sehnensatz (Bild 7), liegt S außerhalb von $\mathfrak{K}$, so heißt er Sekantensatz (Bild 8).
Ist eine der beiden Geraden Tangente an den Kreis $\mathfrak{K}$, so zählt der Berührungspunkt P als doppelter Schnittpunkt (Bild 9), und das Produkt ist durch SP^2 zu ersetzen (Sekanten-Tangentensatz).
Der Beweis dieses Satzes erfolgt über die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle SP_{12}P_{22} \sim \triangle SP_{21}P_{11}$.

[4]Thales von Milet, griechischer Mathematiker, um 600 v.u.Z.

2 Dreieckskonstruktionen

2.1 Dreieckskonstruktionen mittels Fundamentalkonstruktionen

2.1.1 Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Größe γ des Winkels γ $(0° < \gamma < 180°)$, die Länge der zugehörigen Winkelhalbierenden w_γ, der Radius ρ des Inkreises gegeben sind.

Lösung

Lösungsplan:
Wir nehmen an, $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke (Bild 10). U, V, W seien die Berührungspunkte des Inkreises, O sein Mittelpunkt und R der Schnittpunkt von w_γ mit c. Da w_γ Winkelhalbierende ist, ist $\angle ACR \cong \angle RCB \cong \frac{\gamma}{2}$ und O liegt auf w_γ.

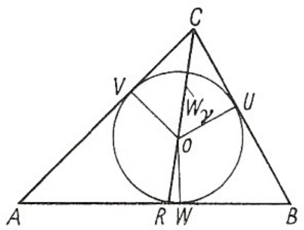


Bild 10

Ziehen wir noch die Berührungsradien, so erkennen wir, dass das Teildreieck $\triangle OVC$ (oder auch $\triangle OUC$) konstruierbar ist aus:

$$OV = \rho \qquad , \qquad \angle OVC = 90° \qquad , \qquad \angle VCO = \angle ACR = \frac{\gamma}{2}$$

Der Punkt U liegt:
1. auf dem Kreis um O mit Radius ρ,
2. auf dem Kreis um C mit Radius CV. (Die von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang!)

Die genannten beiden Kreise besitzen zwei Schnittpunkte. Da einer von beiden bereits vorher bestimmt war (nämlich V), ist U eindeutig bestimmt.

Der Punkt R liegt:
1. auf der Verlängerung von CO über O,
2. auf dem Kreis um C mit Radius w_γ.

Da ein Kreis eine von einem seiner inneren Punkte ausgehende Halbgerade in genau einem Punkt schneidet, ist B auch eindeutig bestimmt.

Die Punkte A bzw. B liegen:
1. auf den Verlängerungen von CV über V bzw. von CU über U,
2. auf einer von R an den Kreis um O mit Radius ρ gezogenen Tangente.

Ist $OR > \rho$, so gibt es zwei solche Tangenten, und wir erhalten außer A und B noch zwei weitere Punkte A' und B' auf den genannten Verlängerungen. Da aber bei einer Spiegelung an der Geraden durch C und B beide Schenkel des Winkels γ miteinander vertauscht werden und beide Tangenten von B an den Inkreis ebenfalls miteinander vertauscht werden, sind A und B' sowie A' und B einander zugeordnete Punkte bei dieser Spiegelung.

Daher ergeben sich in diesem Falle zwei ungleichsinnig kongruente Dreiecke, die durch die genannte Spiegelung aufeinander abgebildet werden. Ist $OR = \rho$, so gibt es nur eine Tangente in B an den Inkreis.

Konstruktion:

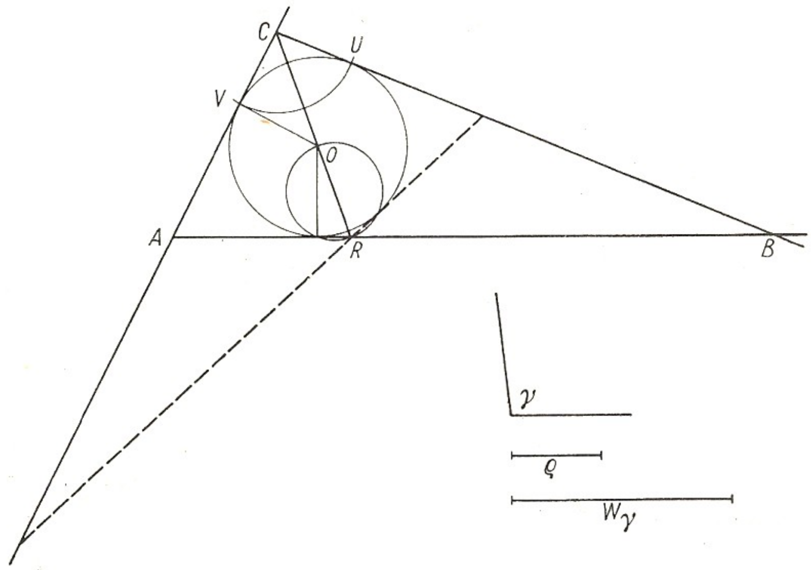


Bild 11

Beschreibung der Konstruktion:
Zeichne OV mit $OV = \rho$ und trage an OV in V einen rechten Winkel und in O einen Winkel der Größe $90° - \frac{\gamma}{2}$ an, dass beide freien Schenkel in genau einer der beiden durch die durch O und V gelegten Geraden bestimmten Halbebene liegen.
Der wegen $0° < \gamma < 180°$ existierende Schnittpunkt beider freien Schenkel werde C genannt.

Schlage um O mit ρ und um C mit CV die Kreise, die sich außer in V in einem zweiten Punkt schneiden. Dieser heiße U. Verlängere CO über O und trage von C aus auf dieser Halbgeraden die Strecke CR mit $CR = w_\gamma$ ab. Von R aus lege an den Kreis um O mit ρ eine der beiden Tangenten, die die Verlängerungen von CV über V bzw. von CU über U in A bzw. B schneidet. ABC ist ein gesuchtes Dreieck.

Determination
Ist $0° < \gamma < 180°$, so ist das Teildreieck $\triangle OVC$ bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar (Kongruenzsätze). Diese Bedingung ist auch notwendig. Dann existiert aber auch genau ein Punkt U mit den geforderten Eigenschaften. Um von R aus an den Kreis um O mit Radius ρ Tangenten legen zu können, so dass dieser Kreis Inkreis wird, ist hinreichend und notwendig, dass R nicht zwischen C und O liegt und außerdem $CO > OR \geq \rho$ gilt.
Beide Aussagen lassen sich zusammenfassen zu

$$2 \cdot CO > w_\gamma = CR = CO + OR \geq CO + \rho$$

Wegen

$$CO = \frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \text{ist} \qquad 2 \cdot \frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}} > w_\gamma \geq \frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \rho$$

bzw. wegen

$$\sin\frac{\gamma}{2} > 0 \qquad \text{auch} \qquad 2\rho > w_\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \geq \rho \cdot \left(1 + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

neben $0° < \gamma < 180°$ hinreichend und notwendig für die Lösbarkeit der Aufgabe.
Aus den im Lösungsplan enthaltenen Angaben folgt weiter, dass es dann bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das den gestellten Bedingungen genügt.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $\angle ACR = \angle RCB = \frac{\gamma}{2}$ und $\angle ACB = \gamma$ und CR somit Winkelhalbierende mit $CD = w_\gamma$.
Ferner sind die drei Seiten des Dreiecks gleichfalls nach Konstruktion Tangenten an den Kreis um O mit Radius ρ. Da R so konstruiert wurde, dass O im Innern des Dreiecks liegt, ist der genannte Kreis Inkreis des Dreiecks $\triangle ABC$.

2.1.2. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Größe des Winkels γ, $(0° < \gamma < 180°)$, der Radius r des Umkreises, die Länge der Seitenhalbierenden s_b gegeben sind.

Anleitung: Man beachte die Beziehung, die zwischen Umfangs- und Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens besteht. Das vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne dieses Kreises gefällte Lot halbiert diese Sehne.

2.1.3. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Größe des Winkels α, $(0° < \alpha < 90°)$, die Länge c der Seite AB gegeben sind.
Außerdem sollen die gesuchten Dreiecke die Eigenschaft haben, dass der Höhenschnittpunkt V die Höhe h_a halbiert.

2.1.4. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Längen der drei Höhen h_a, h_b, h_c gegeben sind.

2.2 Dreieckskonstruktionen mit speziellen Hilfsfiguren

2.2.1. Ist verlangt, ein Dreieck mit vorgeschriebenem Umfang (d.h. Summe der Längen seiner drei Seiten) zu konstruieren, so ist es oft zweckmäßig, zunächst ein gewisses Hilfsdreieck zu betrachten.

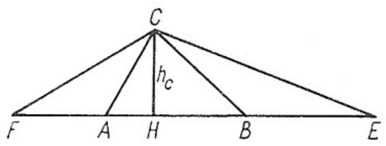


Bild 12

In Bild 12 ist $BE \cong BC \equiv a$ und $AF \cong AC \equiv b$, so dass $FE = a + b + c$ gilt. Außerdem ist im Dreieck $\triangle FEC$:

$$\angle AFC \cong \angle FCA \cong \frac{\alpha}{2} \qquad , \qquad \angle BEC \cong \angle ECB \cong \frac{\beta}{2}$$

Wegen

$$\angle FCE = \angle FCA + \angle ACB + \angle BCE = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2}$$

folgt

$$\angle FCE = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma + \beta) + \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$$

Die Höhe h_c des Dreiecks $\triangle ABC$ ist zugleich Höhe im Hilfsdreieck $\triangle FEC$. Aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke $\triangle FAC$ und $\triangle CBE$ folgt weiter, dass A bzw. B auf der Mittelsenkrechten zu FC bzw. CE liegen.

2.2.2. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Umfang $a + b + c = 2s$, die Größe des Winkels γ, $(0° < \gamma < 180°)$, die Länge der Höhe h_c gegeben sind.

Lösungsplan :

Wir nehmen an, das in Bild 12 dargestellte Dreieck $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke, und konstruieren das Hilfsdreieck $\triangle FEC$ in der beschriebenen Weise.
Ausgehend von der Strecke FE mit der Länge $FE = 2s$ können wir für C folgende beiden geometrischen Örter angeben: C liegt

1. auf einer der beiden Parallelen zu FE im Abstand h_c,
2. auf einem Kreisbogen über der Sehne FE mit einem Umfangswinkel der Größe $90° + \frac{\gamma}{2}$ (vgl. 1.5.).

Ferner finden wir: A bzw. B liegen
1. auf FE, 2. auf der Mittelsenkrechten zu FC bzw. CE.

Konstruktion:

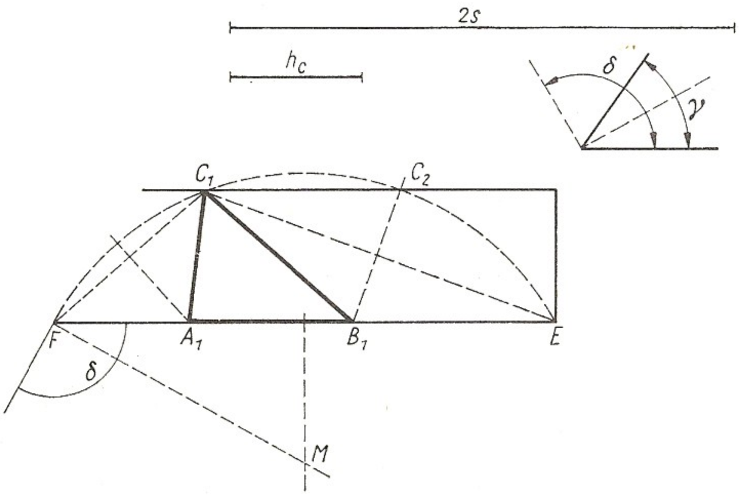


Bild 13

Beschreibung der Konstruktion:
Zeichne FE mit der Länge $2s$ und ziehe zu FE im Abstand h_c eine Parallele. Trage an EF in F den Winkel δ mit der Größe $90° + \frac{\gamma}{2}$ so an, dass der freie Schenkel dieses Winkels und die vorher gezogene Parallele in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden $g(FE)$ liegen.

Errichte auf FE die Mittelsenkrechte und auf dem freien Schenkel des in F angetragenen Winkels die Senkrechte in F. Beide Geraden schneiden sich in M (wegen $0° < \gamma < 180°$ ist $90° + \frac{\gamma}{2} < 180°$, daher sind beide Geraden nicht parallel).
Schlage um M den Kreis mit MF als Radius, der die Parallele zu FE in C_1 und C_2 schneidet. Ziehe zu FC_1 und EC_1 die Mittelsenkrechten, die FE in A_1 bzw. B_1 schneiden. $\triangle A_1B_1C_l$ ist ein gesuchtes Dreieck.

Determination:

Ist $0° < \gamma < 180°$, so ist die Konstruktion bis zum Ziehen der Parallelen und Schlagen des Kreises um M immer durchführbar. Für die Existenz der Schnittpunkte C_1 und C_2 ist hinreichend und notwendig, dass

$$h_c \leq s \cdot \tan\left(45° + \frac{\gamma}{4}\right) \tag{1}$$

gilt.
Ist (1) eine Gleichung, so fallen beide Schnittpunkte zusammen. Da es zur Geraden $g(EF)$ zwei Parallelen mit dem Abstand h_c gibt (in jeder der beiden Halbebenen eine) erhält man zwei kongruente Dreiecke, die symmetrisch zu FE liegen. Ist in (1) dagegen h_c kleiner als die

rechte Seite, so ergeben sich aus der Konstruktion vier kongruente Dreiecke, von denen je zwei symmetrisch zu FE und je zwei symmetrisch zur Mittelsenkrechten zu FE liegen.

Ist also (1) richtig, so gibt es genau eine Klasse untereinander kongruenter Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften.

Beweis:

Nach Konstruktion ist:

$$FE = 2s, \qquad HC_1 = h_c, \qquad \angle FC_1E = 90° + \frac{\gamma}{2}$$

Da A_1 bzw. B_1 auf der Mittelsenkrechten zu FC_1 bzw. EC_1 liegen, ist $FA_1 \cong A_1C_1$ und $EB_1 \cong B_1C_1$, so dass

$$C_1A_1 + A_1B_1 + B_1C_1 = FA_1 + A_1B_1 + B_1E = 2s$$

gilt. Somit besitzt Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$ den geforderten Umfang und wegen $HC_1 = h_c$ auch eine Höhe mit der verlangten Länge.
Wegen $\angle FC_1A_1 = \frac{1}{2}\alpha$ und $\angle B_1C_1E = \frac{1}{2}\beta$ (Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken sind halb so groß wie der Außenwinkel an der Spitze) folgt weiter:

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle FC_1E - \angle FC_1A_1 - \angle EC_1B_1 = 90° + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha - \beta) = \gamma$$

Damit hat das konstruierte Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$ alle in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.

2.2.3. Ist verlangt, ein Dreieck mit vorgegebener Länge einer Seitenhalbierenden zu konstruieren, so führt oft folgende Hilfskonstruktion (Bild 14) zum Ziel:

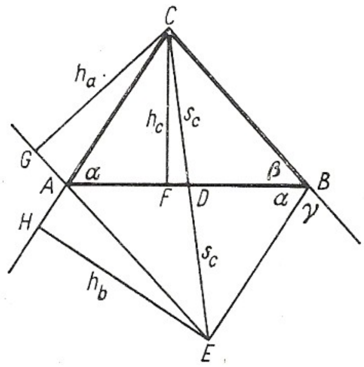


Bild 14

Verlängert man die Seitenhalbierende CD über D um sich selbst, so ist $DE = s_c$ und das Viereck $AEBC$ ein Parallelogramm.
Man erkennt leicht, dass das von E auf die Gerade $g(AC)$ gefällte Lot EH die Länge h_b und das von C auf die Gerade $g(AE)$ gefällte Lot CG die Länge h_a besitzt.
Ferner erkennt man, dass der Winkel $\angle CBE$ die Größe $\angle EBA + \angle ABC = \alpha + \beta$ hat.

Demnach hat der Außenwinkel bei B im Dreieck $\triangle EBC$ die Größe γ.
Von Interesse ist noch das rechtwinklige Dreieck $\triangle DCF$, dessen Hypotenuse die Länge s_c und dessen eine Kathete die Länge h_c besitzt. Bezeichnen wir die Längen der Projektionen der Seiten AC bzw. BC auf AB mit $AF = q$ und $BF = p$ und beachten, dass $AD = \frac{1}{2}c$ gilt, so folgt:

$$FD = AD - AF = \frac{1}{2}(q + p) - q = \frac{1}{2}(p - q)$$

unter der Voraussetzung $0° < \alpha \leq 90°$ und $p \geq g$ gemacht.
Ist $\triangle ABC$ spitzwinklig und $q > p$, so erhält man $FD = \frac{1}{2}(q-p)$.
Ist $\triangle ABC$ bei A oder B stumpfwinklig, so gilt $c = |p-q|$ und es folgt $FD = \frac{1}{2}(p+q)$.

Ist $\gamma = 90°$, so ist $s_c = \frac{1}{2}c$ (Thaleskreis).
Sind die Längen von zwei Seitenhalbierenden gegeben, so beachte man, dass sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden und dieser jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 teilt.

2.2.4. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Länge h_b der Höhe durch B, die Länge s_c der Seitenhalbierenden durch C und die Größe γ des Winkels γ gegeben sind.

2.2.5. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Länge h_a der Höhe durch A, die Länge h_b der Höhe durch B und die Länge s_c der Seitenhalbierenden durch C gegeben sind.

2.2.6. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Längen s_a, s_b, s_c der drei Seitenhalbierenden gegeben sind.

2.2.7. Manchmal sind die in 2.2.3. angestellten Überlegungen nicht direkt auf die gesuchten Dreiecke anwendbar, sie können aber mitunter für Teildreiecke verwendet werden, wie es bei der Aufgabe 2.2.6. der Fall ist. Auch bei der folgenden Aufgabe werden wir so verfahren.

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Länge c der Seite AB, die Länge h_c der Höhe durch C und die Differenz $\alpha - \beta$ der Größen der Winkel bei A und bei B gegeben sind. Es werde vorausgesetzt, dass $0° < \alpha - \beta < 90°$ gelte.

Lösungsplan:

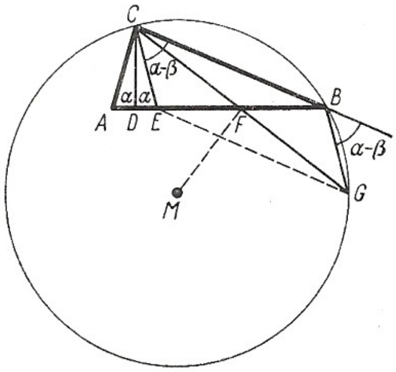


Bild 15

Wir nehmen an, $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke (Bild 15). Bezeichnet CD die durch C gehende Höhe und ist D Mittelpunkt von AE, so ist: $\angle AEC = \angle EAC = \alpha$ und daher $\angle ECB = \alpha - \beta$.

Ferner sei F Mittelpunkt von EB. Wegen $AD = DE$ und $EF = FB$ gilt:

$$c = AD + DE + EF + FB = 2(DE + EF) \qquad \text{also} \qquad DF = \frac{c}{2}$$

Das rechtwinklige Teildreieck $\triangle DFC$ ist daher konstruierbar aus $DC = h_c$, $DF = \frac{c}{2}$, $\angle CDF = 90\circ$. Da CF im Teildreieck $\triangle EBC$ Seitenhalbierende ist, lassen sich auf dieses Teildreieck die Überlegungen von 2.2.3. anwenden.
Wir verlängern CF über F und tragen auf der Verlängerung $FG \cong CF$ ab. Wegen $\angle ECB = \alpha - \beta$ ist dann $\angle GBC = 180° - (\alpha - \beta)$.

Damit ergeben sich nach Konstruktion des Teildreiecks $\triangle DFC$ folgende geometrischen Örter für die Bestimmung der noch fehlenden Punkte:

Der Punkt G liegt:
1. auf der Verlängerung von CF über F,
2. auf dem Kreis um F mit Radius FC.

Der Punkt B liegt:
1. auf der Verlängerung von DF über F,
2. auf dem Kreisbogen über der Sehne CG mit einem Peripheriewinkel der Größe $180° - (\alpha - \beta)$, der nicht mit D in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden $g(CG)$ liegt.

Der Punkt E liegt:
1. auf DF,
2. auf der Parallelen zu GB durch C.

Der Punkt A liegt:
1. auf der Verlängerung von FD über D,
2. auf dem Kreis um D mit Radius DE.
Der restliche Teil der Lösung bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr.

2.3 Dreieckskonstruktionen mit In- und Umkreisradius

2.3.1. Ist von einem gesuchten Dreieck der Radius r des Umkreises bekannt (d.h. des Kreises, der durch die drei Ecken des Dreiecks geht), so ist es oft nützlich, folgende Beziehungen zu beachten.
Es bezeichnen:

M den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ (Bild 16),
CD die durch C gehende Höhe,
CE die durch C gehende Winkelhalbierende,
MC den nach der Ecke C gezogenen Berührungsradius,
CMC' einen Durchmesser des Umkreises,
F den Schnittpunkt der Verlängerung der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis.

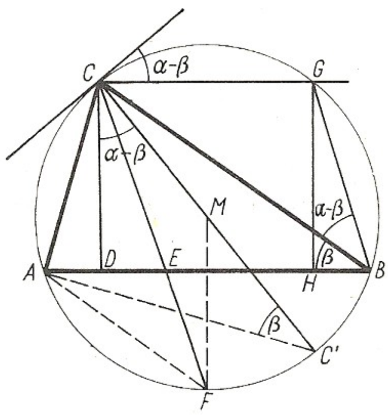


Bild 16

Da $\angle AC'C$, $\angle AFC$ und $\angle ABC$ Peripheriewinkel des gleichen Kreisbogens sind, folgt:

$$\angle AC'C = \angle AFC = \angle ABC = \beta \tag{1}$$

Weil CC' Durchmesser des Umkreises ist, steht CA auf AC' senkrecht und es ist: $\angle ACC' = 90° - \beta$. Außerdem ist $\angle ACD = 90° - \alpha$ und:

$$\angle DCC' = \angle ACC' - \angle ACD = \alpha - \beta \tag{2}$$

(Entsprechende Überlegungen lassen sich auch durchführen, wenn $\beta > \alpha$ gilt. Man erhält dann die Größe $\beta - \alpha$ für diesen Winkel. Ist das Dreieck $\triangle ABC$ bei A bzw. B stumpfwinklig, so ist ebenfalls $\alpha - \beta$ bzw. $\beta - \alpha$ die Größe für den angegebenen Winkel, allerdings verläuft dann der Beweis etwas anders.)

Da CE Winkelhalbierende ist, folgt weiter: $\angle ACE = \frac{\gamma}{2}$- und

$$\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \frac{1}{2}(\gamma - 180° + 2\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

also wegen (2):

$$\angle DCE = \angle ECC' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \tag{3}$$

Aus der Kongruenz der Umfangswinkel $\angle ACF$ und $\angle FCB$ (beide haben die Größe $\frac{\gamma}{2}$) folgt die Kongruenz der zugehörigen Mittelpunktswinkel $\angle AMF$ und $\angle FMB$ und weiter, zusammen mit $MA = MF = MB$, die Kongruenz der Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle FMB$. Deshalb gilt:

$$AF \cong FB \tag{4}$$

Daher steht FM senkrecht auf AB, d.h., die Verlängerung der Winkelhalbierenden durch C schneidet den Umkreis in einem Punkt F, der den Bogen zwischen A und B halbiert.

Betrachten wir noch die Dreiecke $triangleAFC$ und $\triangle EFA$.
Wegen $\angle AFC = \angle EFA$ und $\angle ACF = \angle BCF = \angle BAF = \frac{\gamma}{2}$ ($\angle BCF$ und $\angle BAF$ sind Peripheriewinkel des gleichen Bogens mit der Sehne FB) sind diese beiden Dreiecke ähnlich.
Daher gilt: $FE : FA = FA : FC$, also:

$$FA^2 = FC \cdot FE \qquad \text{und} \qquad FC - FE = w_\gamma \tag{5}$$

Zieht man noch eine Parallele zu AB durch C, die den Umkreis außer in C noch in G schneidet, und fällt von G auf AB das Lot, dessen Fußpunkt H sei, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle DAC$ und $\triangle HBG$:

$$AC = BG = b \qquad \text{und} \qquad \angle CBG = \alpha - \beta \tag{6,7}$$

Da $\angle CBG$ Peripheriewinkel in einem Umkreisbogen mit der Sehne CG ist, hat auch der Sehnentangentenwinkel zu diesem Bogen im Punkt C die Größe $\alpha - \beta$.
Kennt man also neben dem Radius r auch noch die Differenz $\alpha - \beta$, so ist bei getroffener Wahl von M und C die Richtung der Seite AB und die der Höhe CD bekannt.

2.3.2. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Radius r des Umkreises, die Länge der durch C gehenden Höhe h_a und die Länge der durch C gehenden Winkelhalbierenden w_γ gegeben sind.

2.3.3. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Radius r des Umkreises, die Länge c der Seite AB und die Länge der durch C gehenden Winkelhalbierenden w_γ gegeben sind.

Lösungsplan:

Offenbar ist das gleichschenklige Teildreieck $\triangle ABM$ aus $AM = MB = r$ und $AB = c$ konstruierbar (Bild 17). Damit ist auch der Punkt F bekannt, denn F liegt:
1. auf dem Kreis um M mit Radius r,
2. auf der Mittelsenkrechten zu AB.

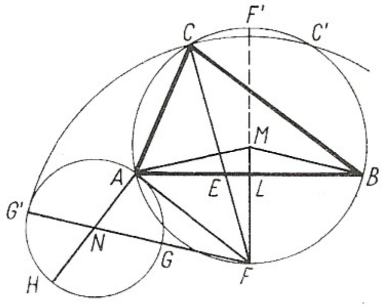


Bild 17

Wegen der Beziehung (5) in 2.3.1. lassen sich FC und FE konstruieren. Zu diesem Zweck errichten wir auf AF in A die Senkrechte und tragen auf dieser AH mit der Länge $AH = w_\gamma$ ab. Über AH als Durchmesser schlagen wir den Kreis, sein Mittelpunkt sei N. Die Gerade $g(NF)$ schneidet diesen Kreis um N in G und G'. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz:

$$FG \cdot FG' = AF^2 \qquad \text{und} \qquad FG' - FG = GG' = AH = w_\gamma$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$x \cdot y = k^2, \quad k^2 > 0 \qquad ; \qquad x - y = g, \quad g > 0$$

besteht aus den beiden Paaren:

$$x_1 = \frac{g}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{g^2}{4}} \quad , \quad y_1 = -\frac{g}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{g^2}{4}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -y_1 \quad , \quad y_2 = -x_1$$

Von beiden Paaren enthält genau eines, nämlich x_1, y_1, nur positive reelle Zahlen, so dass unter den zusätzlichen Voraussetzungen $x > y > 0$ die Unbekannte x und die Unbekannte y eindeutig bestimmt sind.
Da nun sowohl FG' und FG mit $FG' > FG > 0$ als auch FC und FE mit $FC > FE > 0$ (wegen 2.3.1. (5)) Lösungen dieses Gleichungssystems sind, folgt:

$$FC = FG'$$

Der Punkt C liegt daher:
1. auf dem Kreis um M mit Radius r,
2. auf dem Kreis um F mit Radius FG'.

Bemerkung zur Determination: Für die Existenz eines Dreiecks $\triangle ABM$ ist hinreichend und notwendig, dass $c \leq 2r$ erfüllt ist, wobei wir noch zulassen, dass das Dreieck in eine Strecke entartet.
Bei der Konstruktion des Punktes F ist zu beachten, dass man zwei Punkte F und F' erhält. Mit F' werde derjenige Punkt bezeichnet, der mit M in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden $g(AB)$ liegt. Liegt M auf AB, so braucht zwischen F und F' nicht unterschieden zu werden.

Offenbar müssen dann alle gesuchten Dreiecke rechtwinklig sein. Da F bzw. F' jeweils von dem dritten Eckpunkt C durch die Gerade $g(AB)$ getrennt wird, bewirkt die Wahl von F, dass man spitzwinklige Dreiecke betrachtet, während die Wahl von F' stumpfwinklige Dreiecke in die: Überlegung einbezieht.

Für die Existenz eines Punktes C ist hinreichend und notwendig, dass $FG' = x \leq 2r$ gilt (bzw. $F'G'' = x' \leq 2r$, wobei G'' der dem Punkt G' entsprechende Punkt bei der Konstruktion mit Benutzung von F' statt F ist). Nun ist aber:

$$x(x - w_\gamma) = AF^2 \qquad \text{(bzw. } x'(x' - w_\gamma) = AF'^2\text{)}$$

Um AF^2 bzw. AF'^2 zu bestimmen, errechnet man zunächst $ML^2 = k^2$ (L ist Mittelpunkt von AB). Aus dem Dreieck $\triangle AEM$ folgt:

$$k = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

Damit erhält man:

$$AF^2 = \frac{1}{4}c^2 + (r-k)^2 = 2r^2 - 2rk \qquad \text{bzw.} \qquad AF'^2 = \frac{1}{4}c^2 + (r+k)^2 = 2r^2 + 2rk$$

Also gilt:

$$x^2 - xw_\gamma = 2r^2 - 2rk \qquad \text{und} \qquad x'^2 - x'w_\gamma = 2r^2 + 2rk$$

so dass schließlich folgt:

$$x = \frac{1}{2}w_\gamma + \sqrt{\frac{1}{4}w_\gamma^2 + 2r^2 - 2rk} \qquad \text{bzw.} \qquad x' = \frac{1}{2}w_\gamma + \sqrt{\frac{1}{4}w_\gamma^2 + 2r^2 + 2rk}$$

Durch Einsetzen in die weiter oben angegebenen Ungleichungen $x \leq 2r$ bzw. $x' \leq 2r$ erhält man mittels Umformungen schließlich folgendes Ergebnis:
Genau dann, wenn

$$c \leq 2r \qquad \text{und} \qquad r - k < w_\gamma < r + k, \qquad k = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

gilt, gibt es (bis auf Kongruenz) genau ein Dreieck mit den verlangten Eigenschaften. (Dass der Kreis um F den Umkreis i.a. in zwei Punkten C und C' schneidet, ändert daran nichts, da $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ kongruent sind.) Dieses Dreieck ist spitzwinklig, falls $c < 2r$ gilt, und rechtwinklig, falls $c = 2r$ ist. Genau dann, wenn

$$c < 2r \qquad \text{und} \qquad w_\gamma \leq r - k$$

gilt, gibt es (bis auf Kongruenz) genau ein spitzwinkliges und genau ein stumpfwinkliges Dreieck mit den verlangten Eigenschaften.
Dieses Ergebnis lässt sich auch bei Betrachtung des Bildes 17 erwarten.

2.3.4. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Länge c der Seite AB, die Größe des Winkels $\gamma \equiv \angle BCA$ und die Länge der Winkelhalbierenden w_γ, durch den Punkt C gegeben sind.

2.3.5. Zwischen dem Radius r des Umkreises eines Dreiecks, dem Radius ρ seines Inkreises und dem Abstand e der Mittelpunkte beider Kreise besteht die Gleichung:

$$e^2 = r(r - 2\rho)$$

Beweis:
Bezeichnet M den Mittelpunkt des Umkreises, O den Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ (Bild 18), so sei E der Schnittpunkt der Verlängerung von CO mit dem Umkreis, D der Fußpunkt des von O auf AB gefällten Lotes und E' der zweite Schnittpunkt der Geraden $g(EM)$ mit dem Umkreis. EE' schneidet außerdem AB im Punkt F, G sei der Fußpunkt des von O auf EE' gefällten Lotes und H und H' die Schnittpunkte der durch M und O gelegten Geraden mit dem Umkreis.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ECE'$ und $\triangle EGO$ sind ähnlich, da sie bei E den gleichen Winkel haben. Daher gilt:

$$EC : EE' = EG : EO \qquad \text{oder} \qquad EG \cdot EE' = EC \cdot EO$$

Wegen $EG = EF + FG$ und $EC = EO + OC$ folgt daraus:

$$(EF+FG)\cdot EE' = (EO+OC)\cdot EO \qquad \text{oder} \qquad EF\cdot EE'+FG\cdot EE' = EO^2+OC\cdot EO \quad (1)$$

Das Dreieck $\triangle EBO$ ist aber gleichschenklig; denn $\angle OBE$ hat die Größe $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ ($\angle ABE \cong \angle ACE$ als Peripheriewinkel des gleichen Bogens mit der Sehne AE), und $\angle BOE$ hat als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle BOC$ ebenfalls die Größe $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Folglich gilt:

$$EO = EB \quad (2)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle EE'B$ (EE' ist Durchmesser des Umkreises) finden wir mittels des Kathetensatzes:

$$EB^2 = EF \cdot EE' \qquad \text{und wegen (2)} \qquad EO^2 = EF \cdot EE'$$

Damit können wir die Gleichung (1) umformen:

$$FG \cdot EE' = OC \cdot EO \quad (3)$$

Nach dem Sehnensatz folgt weiter:

$$OC \cdot OE = OH' \cdot OH$$

Tragen wir das in (3) ein, so finden wir:

$$FG \cdot EE' = OH' \cdot OH \quad (4)$$

Beachten wir, dass

$$FG = DO = \rho, \quad EE' = 2r, n \quad OH = r + e \quad OH' = r - e \quad (5)$$

ist, so geht (4) über in:

$$\rho \cdot 2r = (r + e)(r - e) \qquad \text{oder} \qquad e^2 = r^2 - 2r\rho$$

Wir können noch eine weitere interessante Beziehung aus Bild 18 ablesen.
Bezeichnet x die Länge der von A an den Inkreis gelegten Tangenten (in Bild 18 ist also $AD = x$), y die Länge der Tangenten von B an den Inkreis und z die Länge der Tangenten von C an den Inkreis, so ist, wenn $AB = c$, $BC = a$ und $CA = b$ gesetzt wird:

$$x + y = c$$
$$y + z = a$$
$$x + z = b$$

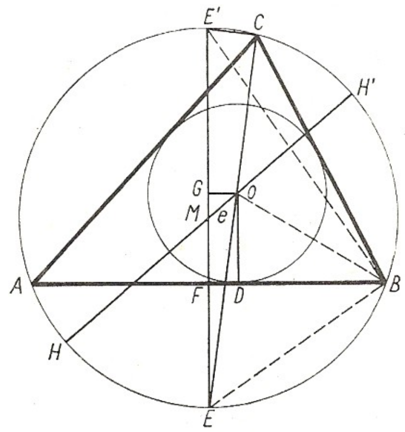


Bild 18

Durch Elimination von z folgt hieraus:

$$x + y = c \qquad , \qquad x - y = b - a$$

und durch Elimination von x: $y = BD = \frac{1}{2}(a - b + c)$. Weiter gilt: $OG = DF$ und $DF = BF - BD$, also:

$$OG = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(a - b + c) \qquad \text{d.h.} \qquad OG = \frac{1}{2}(b - a)$$

Bemerkung: Unter einem Ankreis an ein Dreieck versteht man einen Kreis, der eine Seite dieses Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berührt. Durch seinen Mittelpunkt gehen jeweils eine Winkelhalbierende eines Winkels dieses Dreiecks und zwei Winkelhalbierende der beiden nicht zu diesem Winkel gehörenden Außenwinkel des Dreiecks.

Es gibt demnach drei Ankreise zu jedem Dreieck. Bezeichnen wir den Mittelpunkt des die Seite $BC \equiv a$ berührenden Ankreises mit O_a, seinen Radius mit ρ_a und MO_a mit e_a so gilt:

$$e_a^2 = r(r + 2\rho_a)$$

Es wird empfohlen, den Beweis hierzu als Übung durchzuführen. Entsprechende Gleichungen gelten natürlich auch für die beiden anderen Ankreise.

2.3.6. Wir beweisen nun folgende Existenzaussage:
Sind zwei Kreise mit den Radien r und ρ gegeben, und gilt für den Abstand e ihrer Mittelpunkte die Gleichung

$$e^2 = r(r - 2\rho)$$

so gibt es Dreiecke, deren Ecken auf der Peripherie des Kreises mit Radius r liegen und deren Seiten den Kreis mit Radius ρ berühren. Jeder Punkt der Peripherie des Kreises mit Radius r ist Eckpunkt eines solchen Dreiecks.

Beweis:
In Bild 19 bezeichne M den Mittelpunkt des Kreises mit Radius r und O den Mittelpunkt des Kreises mit Radius ρ. Nach Voraussetzung gilt:

$$MO^2 = e^2 = r(r - 2\rho) \tag{1}$$

Aus Gleichung (1) und der Bedeutung von r und ρ folgt: $r \geq 2\rho > 0$.

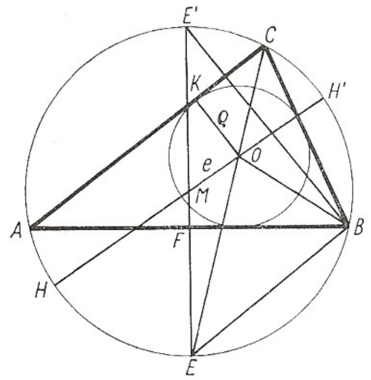


Bild 19

Da e das geometrische Mittel der beiden nicht negativen Zahlen r und $r - 2\rho$ ist, und da das geometrische Mittel höchstens gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Zahlen ist (diese Tatsache wird sofort klar, wenn man beachtet, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörende Höhe geometrisches Mittel der Längen der beiden Höhenabschnitte und der Radius des Umkreises arithmetisches Mittel dieser Längen ist), folgt weiter:

$$e = \sqrt{r(r-2\rho)} \leq \frac{1}{2}(r + (r - 2\rho)) = r - \rho$$

Da aber Gleichheit nur für $\rho = 0$ eintritt, gilt wegen $\rho > 0$ sogar:

$$e < r - \rho \qquad \text{oder} \qquad e + \rho < r$$

Damit ist gezeigt, dass von zwei Kreisen, für die die Gleichung (1) gilt, stets derjenige mit dem Radius r den anderen echt einschließt. Es tritt also immer der in Bild 19 gezeichnete Fall ein.
Wir wählen auf dem Kreis um M mit Radius r einen Punkt C beliebig und ziehen von C an den Kreis um O die Tangenten, die den Kreis um M in A und B zum zweiten Mal schneiden. Der Berührungspunkt auf der Tangente CA sei K.

Wir haben nun zu zeigen, dass AB ebenfalls Tangente an den Kreis um O mit Radius ρ ist. Zu diesem Zweck fällen wir von M auf AB das Lot, welches AB in F und den Kreis um M in E und E' schneidet.
Dreieck $\triangle EBF$ ist ähnlich dem Dreieck $\triangle OCK$, denn beide Dreiecke sind rechtwinklig und es gilt: $\angle KCO \cong \angle ACE \cong \angle ABE \cong \angle FBE$ (Umfangswinkel im gleichen Bogen über der Sehne AE.). Also gilt:

$$OC : \rho = EB : EF \qquad \text{oder} \qquad OC \cdot EF = EB \cdot \rho \tag{2}$$

Wir verlängern CO über O bis zum Schnitt mit dem Kreis um M und nennen diesen Schnittpunkt zunächst E''. Da nach der Konstruktion $\angle ACO \cong \angle OCB$ gilt, gilt auch $\angle ACE'' \cong \angle E''CB$. Aus der Kongruenz der zugehörigen Mittelpunktswinkel $\angle AME''$ und $\angle E''MB$ schließt man auf $AE'' \cong E''B$.
Deshalb gilt $E'' \equiv E$, d.h. die Punkte C, O und E liegen auf einer Geraden und es gilt: $AE \cong EB$.

Die beiderseitige Verlängerung von MO schneide den Kreis um M in den Punkten H und H'. Dann gilt nach dem Sehnensatz:

$$OC \cdot OE = OH \cdot OH' = (r + e)(r - e) = r^2 - e^2$$

Beachten wir die Gültigkeit der Gleichung (1), so finden wir:

$$OE \cdot OC = r^2 - (r^2 - 2r\rho) = 2r\rho \tag{3}$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (2) mit OE:

$$OE \cdot OC \cdot EF = OE \cdot EB \cdot \rho$$

Substituieren wir auf der linken Seite mittels Gleichung (3) und dividieren beide Seiten durch $\rho > 0$, so finden wir:

$$2r \cdot EF = OE \cdot EB \tag{4}$$

Weiter finden wir aus Bild 19, dass auch die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle EE'B$ und $\triangle EBF$ ähnlich sind, denn es ist: $\angle EE'B \cong \angle ECB \cong \angle ECA \cong \angle EBA$. Also gilt:

$$EE' : EB = EB : EF$$

oder umgeformt und $EE' = 2r$ eingesetzt:

$$2r \cdot EF = EB^2$$

Substituieren wir dieses Ergebnis in (4) und dividieren beide Seiten der Gleichung durch $EB \neq 0$, so folgt:

$$EB = EO$$

Daher ist das Dreieck $\triangle OEB$ gleichschenklig und

$$\angle EBO = \angle EOB \tag{5}$$

Bezeichnen wir die Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ in gewohnter Weise mit α, β, γ, so finden wir wieder nach dem Satz über Peripheriewinkel:

$$\angle BEO = \angle BEC = \angle BAC = \alpha$$

und unter Beachtung von (5) folgt weiter:

$$\angle EBO = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Nun war aber $\angle EBA = \angle ECA = \frac{\gamma}{2}$, also wird:

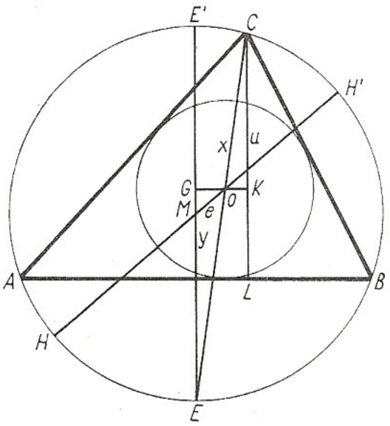
$$\angle ABO = \angle EBO - \angle EBA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - (\alpha + \gamma))$$

Das bedeutet aber, dass $\angle ABO = \frac{\beta}{2}$ gilt. Somit halbiert BO den Winkel β und BA ist Tangente an den Kreis um O, weil nach Konstruktion BC Tangente an den gleichen Kreis ist.

Bemerkung: Statt von einem Punkt C auf dem Kreis um M auszugehen, hätte man auch K auf dem Kreis um O beliebig wählen können und dort zunächst die Tangente konstruieren können. Daraus folgt, dass auch jeder beliebige Punkt des Kreises um O als Berührungspunkt einer Dreiecksseite gewählt werden kann.

2.3.7. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Radius r des Umkreises, der Radius ρ des Inkreises und die Länge der Höhe h_c durch den Punkt C bekannt sind.

Bemerkung zum Lösungsplan:



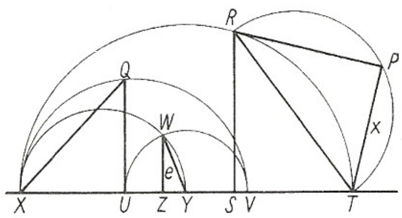


Bild 20 und 21

Wir übernehmen für Bild 20 die Bezeichnungen aus Bild 18 und ziehen noch die Höhe CL, die die Verlängerung von GO in K schneidet. Weil LC parallel zu EE' verläuft, folgt dann unmittelbar, dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle OKC$ und $\triangle E'CE$ ähnlich sind. Setzen wir

$$KC = u = h_c - \rho, \quad CO = x, \quad OE = y, \quad EE' = 2r$$

so folgt:

$$x : u = 2r : (x+y) \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + xy = 2r \cdot u$$

Beachten wir, dass nach dem Sehnensatz gilt:

$$x \cdot y = OH' \cdot OH = (r-e)(r+e) \qquad \text{so folgt} \qquad x^2 = 2ru - (r-e)(r+e) \tag{1}$$

Da nach 2.3.5. mit r und ρ auch e bekannt ist, kann man mittels (1) x konstruieren. Wir werden also so verfahren, dass wir zunächst eine Hilfskonstruktion durchführen (Bild 21). Ist $XY = r$, $XZ = 2\rho$, so folgt aus dem Kathetensatz:

$$WY^2 = r(r-2\rho) \qquad \text{, d.h.} \qquad WY = e$$

Wir schlagen nun um Y den Kreis mit Radius e, der die Gerade $g(XY)$ in U und V schneidet. Der Kreis über XV als Durchmesser und die Senkrechte auf XY in U schneiden sich in Q. Dann ist:

$$XQ^2 = XU \cdot XV = (r-e)(r+e)$$

Ferner schlagen wir um Y den Kreis mit Radius $YX = r$, der die Gerade $g(XY)$ zum zweiten Mal in T schneidet. Von T aus tragen wir auf TX die Strecke TS mit der Länge $TS = u = h_c - \rho$ ab und errichten in S die Senkrechte auf XT, die den zuletzt genannten Kreis in H schneidet. Dann gilt:

$$TR^2 = TX \cdot TS = 2r \cdot u$$

Schlagen wir noch über RT als Durchmesser den Halbkreis und um R mit Radius XQ den Kreis, beide Kreise mögen sich in P schneiden, so folgt:

$$PT^2 = TR^2 - RP^2 = 2r \cdot u - (r-e)(r+e) \qquad \text{also} \qquad PT = x$$

Damit kann die Konstruktion in folgender Weise durchgeführt werden:
Wir schlagen um die Endpunkte M und O einer Strecke der Länge $MO = e$ die Kreise mit den Radien r und ρ und um O zusätzlich einen Kreis mit Radius x. Einer der beiden Schnittpunkte des Kreises um O mit Radius x mit dem Kreis um M mit Radius r sei C. Die Konstruktion des Dreiecks folgt dann weiter, wie es in 2.3.6. gezeigt wurde.

Bemerkung zur Determination: Schneidet der Kreis um O mit Radius x den Kreis um M mit Radius r in zwei Punkten C und C', so erhält man offensichtlich zwei an der Geraden durch M und O gespiegelte Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$.
Damit überhaupt die Konstruktion durchführbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass $0 < 2\rho < r$ gilt, um die Überlegungen von 2.3.5. und 2.3.6. anwenden zu können und

$$r - e \geq x \geq r + e$$

gilt, damit Schnittpunkte C und C' existieren.

Bemerkung zum Beweis: Beim Beweis sind die Ergebnisse von 2.3.6. heranzuziehen, da erst dadurch gesichert wird, dass der Kreis um O mit Radius ρ zum Inkreis des konstruierten Dreiecks wird.

2.4 Dreieckskonstruktionen mit dem Kreis des Apollonius

2.4.1. Die folgenden Überlegungen führen auf einen interessanten geometrischen Ort und zeigen weitere bemerkenswerte Eigenschaften von Dreiecken.
Diese Dinge waren schon dem bedeutenden griechischen Mathematiker Apollonius[5] bekannt. Er entwickelte auch eine Theorie der Kegelschnitte die schon gewisse Züge der erst in der Neuzeit entstandenen projektiven Geometrie trägt.

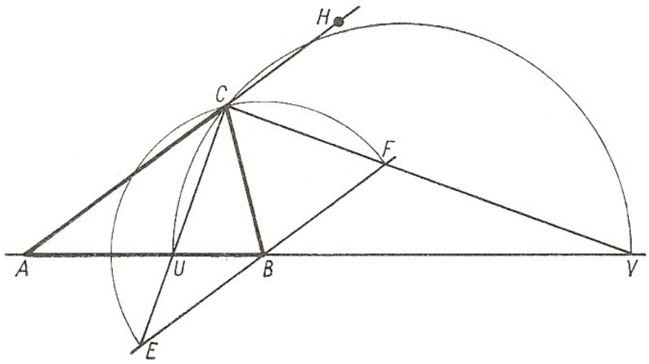


Bild 22

Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, U und V seien die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden und der Außenwinkelhalbierenden der Winkel bei C mit der Geraden durch A und B (Bild 22). Die Parallele zu AC durch B schneide, die beiden Winkelhalbierenden bzw. deren Verlängerungen in E und F. Dann gilt:

$$\angle BEC = \angle ECA = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{und} \qquad \angle BFC = \angle FCH = \frac{\gamma'}{2}$$

Da CU und CV die Winkel zwischen den Geraden $g(CA)$ und $g(CB)$ nach Voraussetzung halbieren, folgt, dass die Dreiecke $\triangle EBC$ und $\triangle FBC$ gleichschenklig sind. Also gilt:

$$EB = BC = a \qquad \text{und} \qquad BF = BC = a$$

Somit erhalten wir mit Hilfe des Strahlensatzes:

$$AU : UB = b : a \qquad \text{und} \qquad AV : VB = b : a$$

Wir haben folgenden Satz gefunden:

[5]Apollonius von Perge lebte und lehrte um 200 v.u.Z. erst in Alexandria und später in Pergamon.

In jedem Dreieck teilen die durch eine Ecke gehenden Halbierenden des Innen- und des Außenwinkels die gegenüberliegende Seite innen und außen im Verhältnis der beiden Längen der übrigen Seiten. Dabei sind die Teilabschnitte jeweils der Seite zugeordnet, mit der sie einen Endpunkt gemeinsam haben.

Da nun die beiden Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen ($\gamma + \gamma' = 180°$, also $\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma'}{2} = 90°$), liegt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser UV.
Dieser Sachverhalt legt folgende Vermutung nahe:

Teilt man eine Strecke AB innen und außen im Verhältnis $p : q$, die Teilpunkte seien U und V, so besitzt jeder Punkt C des Kreises mit dem Durchmesser UV die Eigenschaft, dass

$$CA : CB = p : q$$

gilt.

Beweis dieser Vermutung:
Wir denken uns in Bild 22 die Strecke AB gegeben und durch die Punkte U und V innen und außen im Verhältnis $p : q$ geteilt. Wir setzen zunächst $1 < \frac{p}{q}$ voraus.
Daraus folgt, dass U zwischen B und dem Mittelpunkt von AB und V auf der Verlängerung von AB über B hinaus liegt.

Auf der Peripherie des Kreises über UV als Durchmesser wählen wir einen beliebigen Punkt C. Für $C \equiv U$ bzw. $C \equiv V$ ist die Behauptung nach Voraussetzung richtig, so dass wir C als von U und V verschieden annehmen dürfen.
Dann bilden aber die Punkte A, B, C ein Dreieck, in dem durch B zu AC die Parallele gezogen werden kann. Diese Parallele schneide die Geraden $g(CU)$ und $g(CV)$ in E bzw. F.
Nach Konstruktion gilt dann:

$$AC : BF = p : q \qquad , \qquad AC : BE = p : q \tag{1}$$

woraus sich unmittelbar

$$BF = BE \tag{2}$$

ergibt. Da ferner nach Konstruktion das Dreieck $\triangle ECF$ bei C rechtwinklig ist (C auf Kreis über UV als Durchmesser), liegt C auch auf dem Kreis über EF als Durchmesser. Also:

$$BC = \frac{1}{2}EF \tag{3}$$

Aus (2) und (3) schließen wir: $BF = BE = BC$. Unter Berücksichtigung von (1) folgt dann:

$$AC : BC = p : q$$

Damit ist die Behauptung für $1 < \frac{p}{q}$ bewiesen.
Gilt $0 < \frac{p}{q} < 1$, so ist sicher $1 < \frac{q}{p}$; und der Beweis lässt sich auch so durchführen, man hat lediglich die Rollen von A und B zu vertauschen.

Im Falle $\frac{p}{q} = 1$ ist U Mittelpunkt von AB und V existiert nicht. Dann liegen aber alle Punkte C der Ebene, die von den Punkten A und B jeweils gleichen Abstand haben, auf der Mittelsenkrechten zu AB; und jeder Punkt der Mittelsenkrechten zu AB besitzt auch diese Eigenschaft.
Wir wollen daher in diesem Zusammenhang die Mittelsenkrechte zu AB als eine Entartung des Kreises über UV als Durchmesser ansehen. Diese Entartung tritt genau dann ein, wenn

$\frac{p}{q} = 1$ gilt.

Damit haben wir einen geometrischen Ort gefunden, der als Kreis des Apollonius bezeichnet wird:

Die Menge der Punkte C einer Ebene, die von zwei festen Punkten A und B ein konstantes Abstandsverhältnis $p : q$ besitzen:

$$CA : CB = p : q$$

liegen im Falle $p \neq q$ auf dem Kreis mit Durchmesser UV, wobei U und V die Strecke AB innen und außen im Verhältnis $p : q$ teilen:

$$AU : UB = AV : VB = p : q$$

Ist $p = q$, so ist der Kreis durch die Mittelsenkrechte zu AB zu ersetzen.

Bemerkung 1: Bei unserer Betrachtung treten vier Punkte auf, die auf einer Geraden liegen: A, B, U, V, wobei gilt (Bild 23):

$$AU : UP = p : q \qquad , \qquad AV : VB = p : q$$

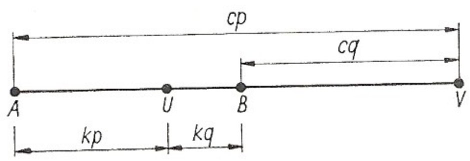


Bild 23

Wir können daher setzen:

$$AU = kp, UB = kq \qquad \text{und} \qquad AV = cp, VN = cq$$

wobei k und c passend gewählte positive Konstanten sind.
Bilden wir nun:

$$UB : VB = (kq) : (cq) = k : c \qquad \text{und} \qquad AU : AV = (kp) : (cp) = k : c$$

so erkennen wir, dass auch die Strecke UV durch die Punkte B und A innen und außen im gleichen Verhältnis, diesmal $k : c$, geteilt wird. Zwei Punktpaare A, B und U, V, die in dieser Beziehung zueinander stehen, heißen harmonische Punktpaare.

Bemerkung 2: Für Konstruktionsaufgaben ist manchmal noch folgende Überlegung nützlich: Aus Bild 22 folgt unmittelbar, dass auch

$$UC : UE = b : a$$

gilt. Sind also etwa von einem Dreieck die Längen der Seiten AC und BC und die Länge der Winkelhalbierenden CU bekannt, so ist auf der Verlängerung von CU über U der Punkt E konstruierbar.
Wegen $EB = BC = a$ ist aber dann auch B und damit A bekannt.

2.4.2. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem folgende Angaben bekannt sind: die Länge der Seite AB, die Länge der durch B gehenden Seitenhalbierenden s_b, die Länge der durch A gehenden Seitenhalbierenden s_a soll doppelt so groß sein wie die Länge der durch C gehenden Seitenhalbierenden s_c, also $s_a = 2s_c$.

3 Kreiskonstruktionen

3.1 Konstruktionen mittels der Kreispotenz

3.1.1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ den Kreis mit Radius r und dem Mittelpunkt M (Bild 24). Es sei P ein beliebiger Punkt unserer Ebene. Wir definieren die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$:

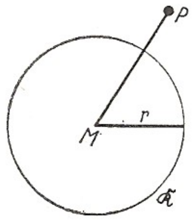


Bild 24

Definition: Die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$ mit Radius r und Mittelpunkt M - wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{K}(P)$ - ist die reelle Zahl:

$$\mathfrak{K}(P) = MP^2 - r^2$$

Aus der Definition ergeben sich sofort folgende Eigenschaften:

1. Für die Potenz $\mathfrak{K}(P)$ eines Punktes P gilt die Ungleichung

$$\mathfrak{K}(P) \geq -r^2$$

für alle Punkte P der Ebene.
Das ergibt sich einfach daraus, dass MP^2 als Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist.
2. Alle Punkte P, die auf einem Kreis $\mathfrak{K}'$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r' liegen, haben bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$ die gleiche Potenz:

$$\mathfrak{K}(P) = r'^2 - r^2$$

Insbesondere gilt:

$$-r^2 \leq \mathfrak{K}(P) < 0$$

für alle Punkte P im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$,

$$\mathfrak{K}(P) = 0$$

für alle Punkte P auf dem Kreis $\mathfrak{K}$,

$$\mathfrak{K}(P) > 0$$

für alle Punkte P außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$.

3. Wir betrachten einen Punkt P außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ (Bild 25). Eine Gerade durch P schneide den Kreis $\mathfrak{K}$ in A_1 und B_1, eine weitere Gerade durch P und M schneide ihn in A und B, und die Tangente von P an $\mathfrak{K}$ habe den Berührungspunkt T. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz:

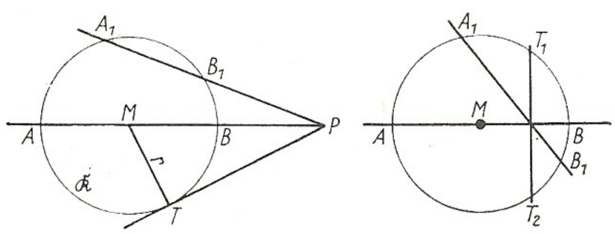


Bild 25 und 26

$$PA_1 \cdot PB_1 = PT^2 = PA \cdot PB$$

Andererseits gilt aber auch:

$$PA \cdot PB = (PM + r) \cdot (PM - r) = PM^2 - r^2 = \mathfrak{K}(P)$$

Insbesondere stellen wir fest:
Liegt P außerhalb von $\mathfrak{K}$, so ist die Potenz $\mathfrak{K}(P)$ des Punktes P bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$ gleich dem Quadrat der Länge der von P an den Kreis gelegten Tangente.

4. Der Punkt P liege im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$. Wir ziehen durch P eine Gerade, die den Kreis $\mathfrak{K}$ in A_1 und B_1 schneidet, den Durchmesser AB und die zu AB senkrechte Sehne T_1T_2. Dann ist $PT_1 = PT_2$ (Bild 26) und nach dem Sehnensatz folgt:

$$PA_1 \cdot PB_1 = PT_1^2 = PA \cdot PB$$

Andererseits gilt aber auch: ,

$$PA \cdot LB = (PM + r)(r - PM) = r^2 - PM^2 = -\mathfrak{K}(P)$$

Der Unterschied im Vorzeichen zu 3. lässt sich leicht merken, wenn man beachtet, dass bei außerhalb liegenden Punkten die Strecken PA_1 und PA_2 gleich orientiert sind, dagegen sind sie bei innerhalb liegenden Punkten entgegengesetzt orientiert.

3.1.2. Gegeben seien zwei nicht konzentrische Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2. Auf der Geraden $g(M_1M_2)$ sind alle Punkte P zu bestimmen, die bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz haben: $\mathfrak{K}_1(P) = \mathfrak{K}_2(P)$.

Lösungsplan: Zunächst können wir voraussetzen, dass die Bezeichnung so gewählt ist, dass $r_1 \geq r_2$ gilt. Bezeichnet P einen der gesuchten Punkte, so setzen wir:

$$PM_1 = x \qquad \text{und} \qquad PM_2 = y$$

Dann folgt aus der Forderung $\mathfrak{K}_1(P) = \mathfrak{K}_2(P)$ die Gleichung:

$$x^2 - r_1^2 = x^2 - r_2^2 \tag{1}$$

Damit also P einer der gesuchten Punkte ist, müssen die Längen der Strecken PM_1 bzw. PM_2 die Gleichung (1) erfüllen. Die Gleichung (1) ist aber gleichwertig mit

$$x^2 - y^2 = r_1^2 - r_2^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x + y)(x - y) = r_1^2 - r_2^2 \tag{2}$$

Wegen unserer Voraussetzung $r_1 \geq r_2 \geq 0$ und $x \geq 0$, $y \geq 0$ schließen wir, dass dann auch

$$x - y \geq 0 \tag{3}$$

gilt. Da andererseits der Punkt P auf der Geraden durch M_1 und M_2 liegen soll, so sind zwei Fälle möglich (Bild 27 und 28):

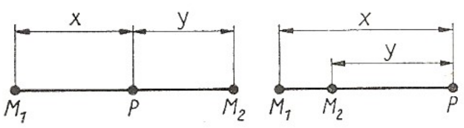


Bild 27 und 28

1. P liegt zwischen M_1 und M_2, dann folgt:

$$x + y = M_1M_2 \tag{4a}$$

2. P liegt nicht zwischen M_1 und M_2, dann gilt:

$$x - y = M_1M_2 \tag{4b}$$

Bezeichnen wir daher den von M_1M_2 verschiedenen Faktor in dem Produkt auf der linken Seite von (2) mit z, so folgt aus (2):

$$M_1M_2 \cdot z = r_1^2 - r_2^2 \tag{5}$$

Da $M_1M_2 \neq 0$, r_1 und r_2 mit $r_1 \geq r_2 \geq 0$ gegeben sind, ist $z \geq 0$ aus (5) eindeutig bestimmbar. Damit ergibt sich aber wegen $x > 0$ und $y \geq 0$ (denn nach (3) gilt $x \geq y$ und wegen (4a) bzw. (4b) und $M_1M_2 \neq 0$ ist $x = y = 0$ ausgeschlossen) aus (4a) bzw. (4b) und der Festlegung von z:

$$x = \frac{1}{2}(M_1M_2 + z) \qquad ; \qquad y = \frac{1}{2}|M_1M_2 - z| \tag{6}$$

Wegen zu $x \geq y$ kann M_1 nicht zwischen M_2 und P liegen, so dass P durch x auf der Geraden $g(M_1M_2)$ eindeutig bestimmt ist.

Wir verzichten bei dieser Aufgabe auf die Durchführung der Konstruktion, da wir mittels der Ergebnisse der nächsten beiden Aufgaben bequemere Konstruktionsmöglichkeiten erhalten werden. Wir wollen nur noch zeigen, dass der nach dem Lösungsplan konstruierte Punkt P bezüglich beider Kreise gleiche Potenz hat.

Beweis:
Nach Voraussetzung ist $r_1 \geq r_2 \geq 0$ und $M_1M_2 \neq 0$. Nach Konstruktion liegt M_1 nicht zwischen M_2 und P und. es gilt:

$$M_1P = x \qquad , \qquad M_2P = y$$

wobei für x und y die Gleichungen (6) und für z die Gleichung (5) erfüllt sind.
Bild 29 zeigt den Fall, bei dem P zwischen M_1 und M_2 liegt, also:

$$x + y = M_1M_2$$

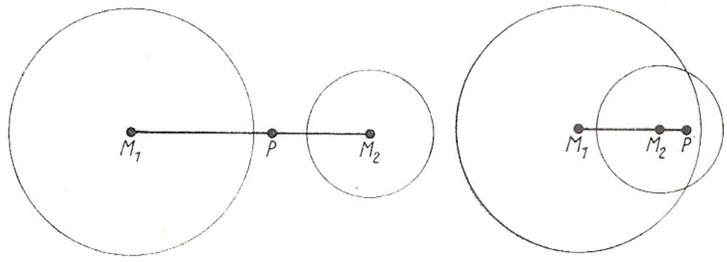


Bild 29 und 30

Bild 30 zeigt den Fall, bei dem M_2 zwischen M_1 und P liegt, also:

$$x - y = M_1M_2 > 0$$

Es gilt dann unter Beachtung von (6):

$$\mathfrak{K}_1(P) = x^2 - r_1^2 = \frac{1}{4}(M_1M_2^2 + z^2) + \frac{1}{2}M_1M_2 \cdot z - r_1^2$$
$$\mathfrak{K}_2(P) = y^2 - r_2^2 = \frac{1}{4}(M_1M_2^2 + z^2) + \frac{1}{2}M_1M_2 \cdot z - r_2^2$$

Nun ist aber wegen (5): $\frac{1}{2}M_1M_2 \cdot z = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)$ woraus folgt:

$$\mathfrak{K}_1(P) = \mathfrak{K}_2(P) = \frac{1}{4}(M_1M_2^2 + z^2) - \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

Bemerkung: In der Aufgabe war vorausgesetzt worden, dass $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht konzentrisch sind. Man kann sich leicht überlegen, dass es für zwei konzentrische und verschiedene Kreise überhaupt keinen Punkt Q geben kann, der bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz hat. Angenommen, Q wäre ein solcher Punkt mit

$$\mathfrak{K}_1(Q) = \mathfrak{K}_2(Q) \tag{7}$$

Da beide Kreise konzentrisch sind, gilt $QM_1 = QM_2 = x$, und da es Zwei verschiedene Kreise sind, gilt $r_1 \neq r_2$.
Dann wäre aber wegen (7):

$$x^2 - r_1^2 = x^2 - r_2^2 \qquad \text{d.h.} \qquad r_1^2 = r_2^2$$

woraus wegen $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$ sofort $r_1 = r_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r_1 \neq r_2$ folgt.

3. 1. 3. Gegeben seien zwei nicht konzentrische Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2.
Es sind alle Punkte Q der Ebene zu bestimmen, die bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz haben.

Lösungsplan:
Wir nehmen an, Q sei einer der gesuchten Punkte. Wir fällen von Q auf die Gerade $g(M_1M_2)$ das Lot, der Fußpunkt sei P. Bild 31 zeigt als Beispiele verschiedene Möglichkeiten der gegenseitigen Lage beider Kreise und des Lotes.

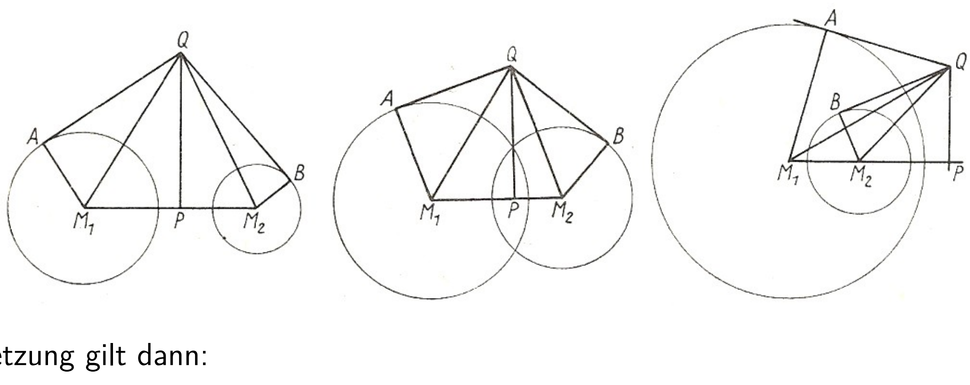


Bild 31

Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\mathfrak{K}_1(Q) = \mathfrak{K}_2(Q) \qquad \text{d.h.} \qquad M_1Q^2 - r_1^2 = M2Q^2 - r_2^2 \tag{1}$$

Unabhängig von der gegenseitigen Lage bilden stets die Punkte M_1, P, Q und M_2, P, Q je ein bei P rechtwinkliges Dreieck. Es gilt daher:

$$M_1Q^2 - QP^2 = M_1P^2 \qquad \text{und} \qquad M_2Q^2 - QP^2 = M_2P^2 \tag{2}$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) QP^2 und beachten die Gleichungen (2), so folgt:

$$M_1P^2 - r_1^2 = M_2P^2 - r_2^2 \qquad \text{d.h.} \qquad \mathfrak{K}_1(P) = \mathfrak{K}_2(P) \tag{3}$$

Der Fußpunkt P dieses Lotes ist also der in 3.1.2. untersuchte Punkt und durch die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ eindeutig bestimmt. Somit liegen notwendig alle Punkte Q mit der genannten Eigenschaft $\mathfrak{K}_1(Q) = \mathfrak{K}_2(Q)$ auf der Senkrechten zu M_1M_2 durch P.

Ist umgekehrt Q ein Punkt auf der Senkrechten zu M_1M_2 durch P, und gilt für P: $\mathfrak{K}_1(P) = \mathfrak{K}_2(P)$; so folgt aus (3) und (2) auch (1), d.h. jeder Punkt dieser Senkrechten hat bezüglich beider Kreise gleiche Potenz.
Diese Senkrechte finden wir dadurch, dass wir zunächst einen beliebigen der Punkte Q konstruieren und von diesem das Lot auf M_1M_2 fällen. Schneiden sich beide Kreise nicht, so wählen wir dazu einen Punkt Q, der außerhalb beider Kreise liegt. Dann ist (Bild 32):

$$\mathfrak{K}_1 = M_1Q^2 - r_1^2 = AQ^2 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K}_2 = M_2Q^2 - r_2^2 = BQ^2$$

Gibt man sich also $AQ = BQ = c$ beliebig vor, so lässt sich M_1Q und M_2Q konstruieren.
Schneiden sich beide Kreise, so gehören offensichtlich die Schnittpunkte zu der gesuchten Punktmenge, da für beide Schnittpunkte S_1 und S_2 gilt:

$$\mathfrak{K}_1(S_1) = \mathfrak{K}_2(S_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K}_1(S_2) = \mathfrak{K}_2(S_2) = 0$$

In diesem Fall ist also das gesuchte Lot die Gerade $g(S_1S_2)$.
Konstruktion:

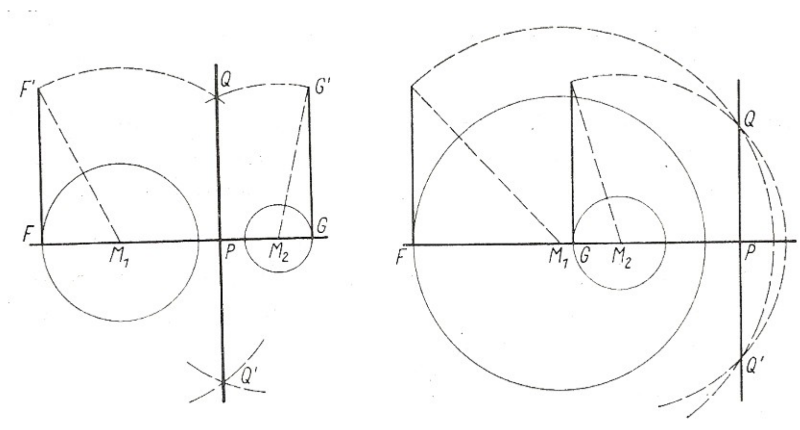


Bild 32

Beschreibung der Konstruktion:
Sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so ziehe die Gerade $g(M_1M_2)$. Einer der beiden Schnittpunkte dieser Geraden mit $\mathfrak{K}_1$ sei F, einer der beiden Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_2$ sei G. In F und G errichte auf der Geraden $g(M_1M_2)$ die Senkrechten und trage auf diesen von F bzw. G die Strecke FF' mit $FF' = c$ bzw. GG' mit $GG' = c$ ab. Die Länge c muss dabei so gewählt werden, dass

$$M_1F' < M_2G' + M_1M_2 \qquad \text{und} \qquad M_1F' + M_2G' > M_1M_2$$

erfüllt ist. Schlage um M_1 bzw. M_2 mit M_1F' bzw. M_2G' die Kreise, die sich bei hinreichend großem c (vgl. obenstehende Bedingung) schneiden; Die Schnittpunkte seien Q und Q'. Die Gerade $g(QQ')$ ist die gesuchte Senkrechte.

Beweis:

Nach Konstruktion ist dann:

$$M_1Q = M_1F' = \sqrt{c^2 + r_1^2} \qquad \text{und} \qquad M_2Q = M_2G' = \sqrt{c^2 + r_2^2}$$

Demnach gilt:

$$\mathfrak{K}_1(Q) = M_1Q^2 - r_1^2 = c^2 \qquad , \qquad \mathfrak{K}_2(Q) = M_2Q^2 - r_2^2 = c^2$$

Q ist daher einer der gesuchten Punkte, so dass wegen der Überlegungen im Lösungsplan genau die Punkte des Lotes von Q auf die Gerade $g(M_1M_2)$ die gesuchten Punkte sind.

Bemerkung: Man nennt diese Gerade, auf der genau die Punkte liegen, die bezüglich zweier nicht konzentrischer Kreise gleiche Potenz haben, die Potenzlinie der beiden Kreise. Konzentrische Kreise besitzen keine Potenzlinie.

3.1.4. Es seien $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ drei Kreise mit drei verschiedenen Mittelpunkten.
Die Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ werde mit $\mathfrak{P}_{12}$, die der Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ mit $\mathfrak{P}_{23}$, die der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ mit $\mathfrak{P}_{13}$ bezeichnet. Man beweise, dass die drei Potenzlinien entweder parallel sind oder sich in einem Punkt R schneiden. Man nennt R dann das Potenzzentrum dieser drei Kreise.
Welche Möglichkeit der Konstruktion einer Potenzlinie für zwei Kreise folgt hieraus?

3.1.5. Es seien $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei Kreise, die sich in A und B schneiden (Bild 33). Aus der Symmetrie der Figur zur Zentralen $g(M_1M_2)$ folgt sofort, dass die von den Berührungsradien M_1A und M_2A bzw. M_1B und M_2B gebildeten Winkel kongruent sind: $\alpha \cong \beta$.

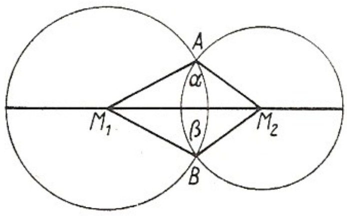


Bild 33

Ist $\alpha = \beta = 90°$, so sagt man, dass sich beide Kreise rechtwinklig schneiden. In diesem Fall sind also die zu den Schnittpunkten gezogenen Berührungsradien des einen Kreises Tangenten des anderen Kreises.
Gegeben seien drei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$. Es ist ein Kreis $\mathfrak{K}_4$ gesucht, der die drei gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet.

3.1.6 Gegeben sei ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ und zwei Punkte P_2 und P_3. Es ist ein Kreis $\mathfrak{K}_4$ gesucht, der $\mathfrak{K}_1$ rechtwinklig schneidet und durch P_2 und P_3 geht.

3.2 Berührungsproblem des Apollonius

Die folgenden Aufgaben (3.2.1. bis 3.2.10.) werden unter dem Namen "Berührungsproblem des Apollonius" (vgl. 2.4.1.) zusammengefasst.
Die gestellte Aufgabe besteht darin, Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei ist zugelassen, dass die gegebenen Kreise in Punkte oder auch Geraden entartet sind, so dass sich zehn verschiedene Fälle ergeben.

3.2.1. Der einfachste Fall ist der, dass drei Punkte gegeben sind, durch die ein Kreis gelegt werden soll. Bilden die drei Punkte ein Dreieck, so ist der Umkreis dieses Dreiecks die einzige Lösung.

Liegen dagegen die drei Punkte auf einer Geraden, so gibt es keinen Kreis durch diese drei Punkte.

3.2.2. Auch der Fall, dass drei Geraden gegeben sind, lässt sich sofort übersehen. Schneiden sich die gegebenen Geraden in drei Punkten, so bilden diese ein Dreieck. Dann gibt es vier Kreise, die diese drei Geraden berühren:
den Inkreis und die drei Ankreise (Bild 34).

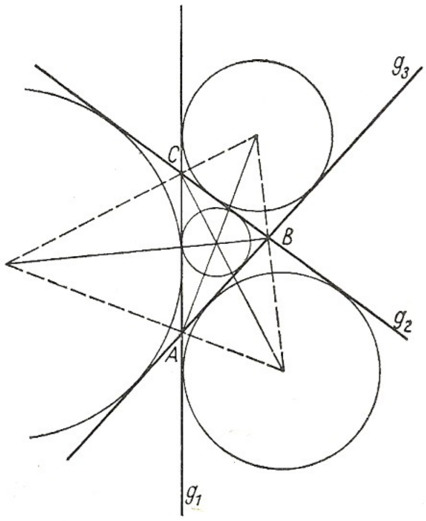
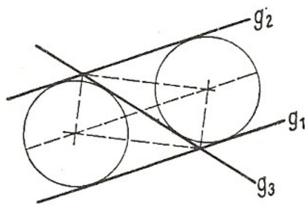


Bild 34

Es lässt sich leicht beweisen, dass der Mittelpunkt des Inkreises zugleich Höhenschnittpunkt des von den drei Mittelpunkten der Ankreise gebildeten Dreiecks ist.
Schneiden sich dagegen die Geraden nur in zwei Punkten, so gibt es nur zwei Kreise, die die Geraden berühren (Bild 35).



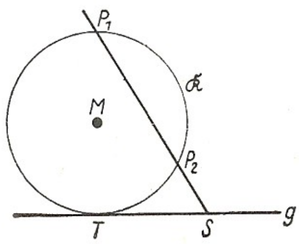


Bild 35 und 36

Schneiden. sich die Geraden in nur einem Punkte oder sind sie parallel, so gibt es keinen Kreis, der die drei Geraden berührt.

3.2.3. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Gerade g. Gesucht sind Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen und die Gerade g berühren.

Lösungsplan:
Wir nehmen an, $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt M sei einer der gesuchten Kreise (Bild 36). $\mathfrak{K}$ berühre die Gerade g in T, die durch P_1 und P_2 gelegte Gerade $g(P_1P_2)$ schneide g in S.

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt dann: $SP_1 \cdot SP_2 = ST^2$, so dass ST konstruierbar ist. (Man legt dazu etwa durch P_1 und P_2 einen Hilfskreis $\mathfrak{K}'$ und zieht von S an $\mathfrak{K}'$ die Tangente ST'; dann ist $ST' = ST$.)
Damit ist die Aufgabe auf eine in 3.2.2. besprochene zurückgeführt.

Bemerkung zur Determination: Existiert S und liegt S nicht zwischen P_1 und P_2, so ist offenbar die angegebene Konstruktion möglich. Da man eine Strecke der Länge ST von S aus auf g

nach zwei Seiten abtragen kann, erhält man zwei Punkte T_1 und T_2, so dass es zwei solche Kreise gibt.
Liegt S zwischen P_1 und P_2, so schneidet g jeden durch P_1 und P_2 gehenden Kreis. Daher hat die Aufgabe in diesem Fall keine Lösung.
Existiert S nicht, d.h. ist $g(P_1P_2)$ parallel zu g, so lässt sich die angegebene Konstruktion nicht durchführen (Dann liegt aber T auf der Mittelsenkrechten zu P_1P_2 und ist eindeutig bestimmt. Es gibt in diesem Fall genau einen Kreis der verlangten Art.

3.2.3. Wie findet man Lösungen, wenn einer oder beide der gegebenen Punkte auf g liegen?

3.2.4. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 und ein Punkt P. Gesucht sind Kreise, die g_1 und g_2 berühren und durch P gehen.

3.2.5. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 und ein Kreis $\mathfrak{K}_3$. Gesucht sind Kreise, die g_1 und g_2 und $\mathfrak{K}_3$ berühren.

3.2.6. Gegeben sind eine Gerade g_1,ein Punkt P_2 und ein Kreis $\mathfrak{K}_3$. Gesucht sind Kreise, die g_1 und $\mathfrak{K}_3$ berühren und durch P_2 gehen.

Lösungsplan:
$\mathfrak{K}$ mit Mittelpunkt M sei einer der gesuchten Kreise (Bild 37 und 38). Der Berührungspunkt mit g_1 sei S, der mit $\mathfrak{K}_3$ sei T. Die durch S und T gelegte Gerade $g(ST)$ schneide $\mathfrak{K}_3$ nochmals in U. Die durch U und M_3 gelegte Gerade $g(U_1M_3)$ treffe $\mathfrak{K}_3$ in W und g_1 in V. Schließlich schneide die Gerade $g(UP_2)$ den Kreis $\mathfrak{K}$ nochmals in P_2'. Dann folgt aus

$$\angle MST \cong \angle MTS \cong \angle M_3TU \cong M_3UT$$

dass UV parallel zu MS ist. Daher gilt:

$$\angle UVS = 90° \qquad (1)$$

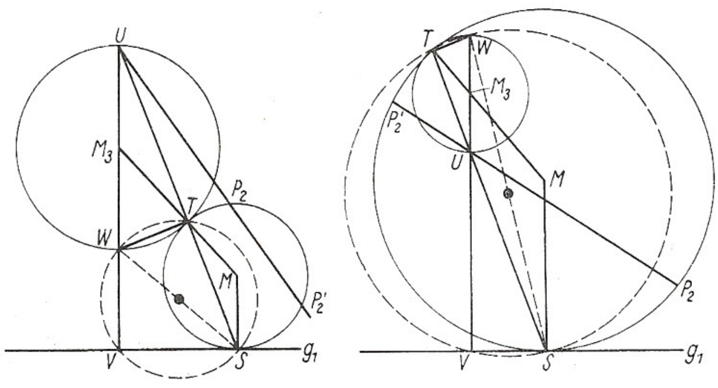


Bild 37 und 38

Da T auf einem Halbkreis über UW liegt, erkennt man: $\angle UTW = 90°$.
Hieraus und aus (1) schließen wir, dass die Punkte V und T auf dem Kreis mit dem Durchmesser WS liegen (in Bild 37 und 38 gestrichelt gezeichnet). Dann gilt aber nach dem Sekantensatz bzw. Sehnensatz bezüglich dieses Kreises

$$UW \cdot UV = UT \cdot US \qquad (2)$$

und bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$:

$$UT \cdot US = UP_2 \cdot UP_2'$$

Unter Verwendung von (2) finden wir weiter:

$$UW \cdot UV = UP_2 \cdot UP_2' \tag{3}$$

(Man kann (3) sofort hinschreiben, wenn man beachtet, dass U auf der Potenzlinie $g(ST)$ des Kreises $\mathfrak{K}$ und des gestrichelt gezeichneten Kreises liegt.) Die Gleichung (3) besagt, dass P_2' auf dem durch W, V und P_2 eindeutig bestimmten Kreis liegt, der durch diese drei Punkte geht. Die Punkte W und V sind durch das von M_3 auf g_1 gefällte Lot bekannt. Also lässt sich P_2' konstruieren.

Da man zwei Möglichkeiten hat, einen der beiden Schnittpunkte des Lotes mit $\mathfrak{K}_3$ mit W zu bezeichnen, ergeben sich zwei Möglichkeiten zur Konstruktion von P_2'. Durch diese Überlegung ist die Aufgabe auf 3.2.3. zurückgeführt.
Es gibt zu 3.2.3. im allgemeinen zwei Lösungen, deshalb lassen sich hier maximal vier Kreise mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften finden.

3.2.7. Gegeben sind eine Gerade g_1 und zwei Kreise $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$. Gesucht sind Kreise, die g_1, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ berühren.

3.2.8. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 und ein Kreis $\mathfrak{K}_3$. Gesucht sind Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen und $\mathfrak{K}_3$ berühren.

Lösungsplan:
Wir nehmen an, $\mathfrak{K}$ mit Mittelpunkt M sei einer der gesuchten Kreise (Bild 39). Wir legen einen Hilfskreis $\mathfrak{K}'$ durch P_1 und P_2, der den gegebenen Kreis $\mathfrak{K}$ in A und B schneidet. Dann ist die Gerade $g(P_1P_2)$ Potenzlinie von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, und die Gerade $g(AB)$ ist Potenzlinie von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}_3$.

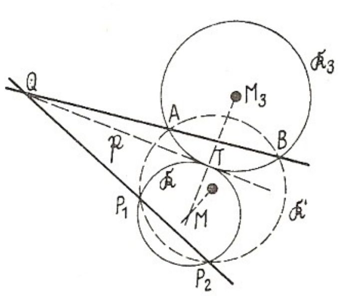


Bild 39

Schneiden sich beide Geraden in Q, so ist Q Potenzzentrum von $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}$. Daher muss die Potenzlinie $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_3$ ebenfalls durch Q gehen (vgl. 3.1.4.).
Da der Berührungspunkt T von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_3$ bezüglich beider Kreise die Potenz null hat, liegt T auf $\mathfrak{P}$. Da aber $\mathfrak{P}$ auf der Geraden $g(MM_3)$ senkrecht steht, ist $\mathfrak{P}$ eine von Q an $\mathfrak{K}_3$ gezogene Tangente, deren Berührungspunkt T ist.

Sollten die Geraden $g(P_1P_2)$ und $g(AB)$ parallel sein, so ist auch $\mathfrak{P}$ zu diesen Geraden parallel und daher ebenfalls konstruierbar. Somit sind mit P_1, P_2 und T drei Punkte auf $\mathfrak{K}$ bekannt.

Bemerkung zur Determination: Da man von Q an $\mathfrak{K}_3$ im allgemeinen zwei Tangenten ziehen kann, ergeben sich zwei Punkte T_1 und T_2, so dass man zwei Lösungen erhält. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn P_1 und P_2 durch die Peripherie von $\mathfrak{K}_3$ getrennt werden.

3.2.9. Gegeben sind zwei Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ und ein Punkt P_3. Gesucht sind Kreise, die durch P_3 gehen und $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ berühren.

Lösungsplan:

Wir nehmen an, $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt M sei einer der gesuchten Kreise (Bild 40). Die Berührungspunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien T und R. Die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien M_1 und M_2.

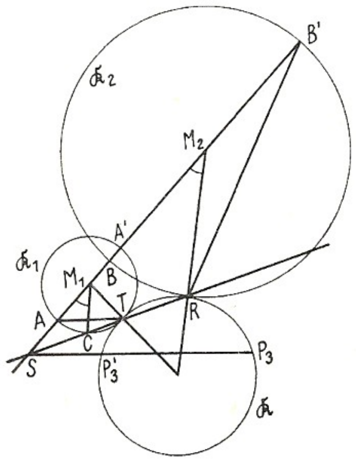


Bild 40

Wir ziehen die Geraden $g(M_1M_2)$ und $g(TR)$, die sich in S schneiden mögen. Außerdem schneide $g(TR)$ den Kreis $\mathfrak{K}_1$ nochmals in C, und die Schnittpunkte von $g(M_1M_2)$ mit $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ seien A und A' bzw. B und B'.
Schließlich ziehen wir noch die Gerade $g(SP_3)$, die $\mathfrak{K}$ nochmals in P_3' trifft. Wegen

$$\angle TRM \cong \angle RTM \cong CTM_1 \cong TCM_1 \qquad \text{gilt} \qquad MM_2 \text{ ist parallel zu } CM_1 \qquad (1)$$

Bezeichnen r_1 bzw. r_2 die Radien von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so folgt daraus weiter:

$$SM_1 : SM_2 = CM_1 : RM_2 = r_1 : r_2$$

Damit ist aber S als äußerer Teilpunkt von M_1M_2 im Verhältnis $r_1 : r_2$ bekannt. Aus (1) folgt weiter: $\angle SM_1C \cong \angle SM_2R$.
Nun ist aber $\angle ATS = \frac{1}{2}\angle SM_1C$ (Peripheriewinkel - Mittelpunktswinkel) und $\angle SB'R = \frac{1}{2}\angle SM_2R$, also: $\angle ATS = \angle SB'R$.
Da die Dreiecke $\triangle SAT$ und $\triangle SRB'$ außerdem noch den Winkel $\angle AST$ gemeinsam haben, sind sie ähnlich: $\triangle SAT \sim \triangle SRB'$.
Also gilt:

$$SA : ST = SR : SB' \qquad \text{oder} \qquad ST \cdot SR = SA \cdot SB' \qquad (2)$$

Weil nach dem Sekantensatz weiter folgt:

$$SP_3' \cdot SP_3 = ST \cdot SR$$

ergibt sich unter Beachtung von (2):

$$SP_3' \cdot SP_3 = SA \cdot SB' \qquad (3)$$

Daher liegt P_3' auf dem durch P_3, A und B' bestimmten Kreis und ist, weil auch S bekannt ist, konstruierbar. Man kennt also nun zwei Punkte von $\mathfrak{K}$, so dass die Aufgabe auf 3.2.8. zurückgeführt ist.

Da übrigens nach dem Sekanten-Tangentensatz

$$ST^2 = SA \cdot SA' \qquad \text{und} \qquad SR^2 = SB \cdot SB'$$

gilt, folgt unter Beachtung von (2), dass außer (3) auch

$$SP_3' \cdot SP_3 = SA' \cdot SB \qquad (3')$$

erfüllt ist, so dass auch die Punkte P_3', P_3, A' und B auf einem Kreis liegen.

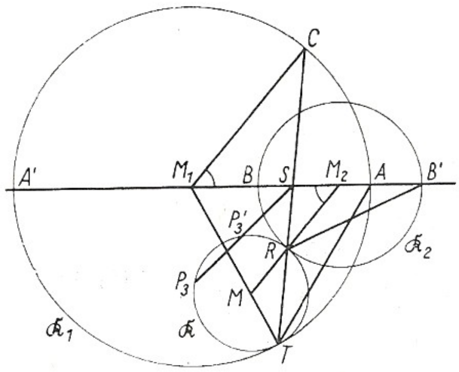


Bild 41

Bild 41 zeigt einen Fall, bei dem S innerer Teilpunkt von M_1M_2 im Verhältnis $r_1 : r_2$ ist. Die Bezeichnungen sind so gewählt, dass die gleichen Beziehungen wie oben gelten. Man beachte aber jetzt die gegenseitige Lage der Punkte A, A', B und B' im Vergleich zu Bild 40.

Bemerkung zur Determination: Da man den äußeren und den inneren Teilpunkt von M_1M_2 im Verhältnis $r_1 : r_2$ benutzen kann, um die Aufgabe auf 3.2.8. zurückzuführen, kann man maximal vier Kreise finden, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

3.2.10. Gegeben sind drei Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und den Radien r_1, r_2, r_3. Gesucht sind Kreise, die die drei gegebenen Kreise berühren.

Lösungsplan:
$\mathfrak{K}$ mit Mittelpunkt M sei einer der gesuchten Kreise (Bild 42). Wir schlagen um M einen zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}'$, der durch M_1 geht.

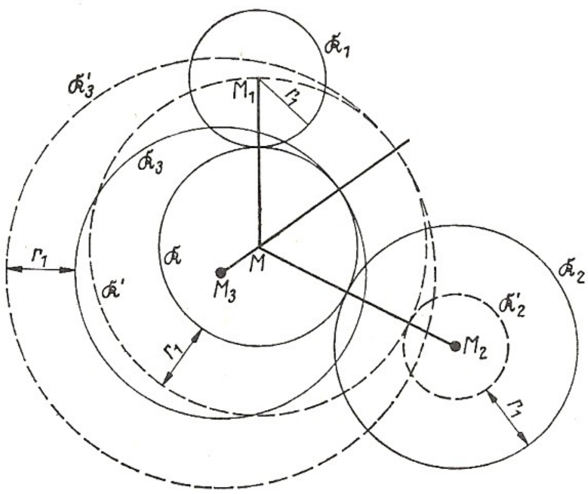


Bild 42

Dieser Kreis berührt dann im gezeichneten Fall den zu $\mathfrak{K}_2$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}_2'$ mit dem Radius $|r_2 - y_1|$ und den zu $\mathfrak{K}_3$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}_2'$ mit dem Radius $r_3 + r_1$.
Demzufolge sind die Mittelpunkte M der gesuchten Kreise unter den Mittelpunkten der Kreise zu finden, die durch M_1 gehen und sowohl einen der Kreise um M_2 mit Radius $|r_2 - r_1|$ oder $r_2 + r_1$ als auch einen der Kreise um M_3 mit Radius $|r_3 - r_1|$ oder $r_3 + r_1$ berühren. Damit

ist die Aufgabe auf 3.2.9. zurückgeführt.

Die Determination dieser Aufgabe ist sehr umfangreich, weil eine große Zahl von Fallunterscheidungen nötig sind. Es sei hier nur bemerkt, dass man im günstigsten Fall acht Lösungen erhalten kann (z.B. wenn alle drei gegebenen Kreise ein gemeinsames Flächenstück einschließen).

Bemerkung: Neben den hier angegebenen Lösungswegen gibt es noch andere, die die Theorie der Polaren benutzen. Auch mit Hilfe der Spiegelung am Kreis lassen sich diese Aufgaben lösen. Eine Geradenabbildung von E. Laguerre[6] ermöglicht in manchen Fällen dieser Aufgaben eine sehr elegante konstruktive Lösung.

[6] E. Laguerre, Französischer Mathematiker (1834-1886)

4 Verschiedene Konstruktionsaufgaben

4.1. Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken auf je einer der Parallelen liegen.

Bemerkung zum Lösungsplan: Bei dieser Aufgabe ist es zweckmäßig, mit einer geeignet gewählten Drehung zu arbeiten, d.h. man untersucht Beziehungen, die zwischen Elementen der gedrehten Figur und Elementen der ursprünglichen Figur bestehen.

Nehmen wir an, g_1, g_2, g_3 seien die drei gegebenen parallelen Geraden (Bild 43), $\triangle ABC$ eines der gesuchten Dreiecke.

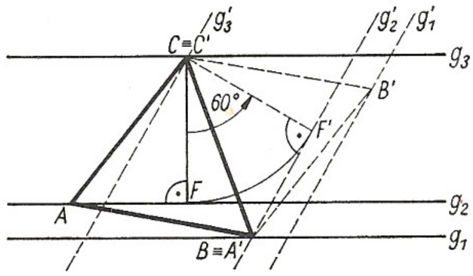


Bild 43

Wir drehen die Figur um das Zentrum C um einen Winkel von 60°, so dass der Punkt A in den Punkt $A' \equiv B$ über geht. Dann wird auch die gedrehte Gerade g_2' nach der Drehung durch den gedrehten Punkt A' gehen.
Da dieser aber mit B identisch ist, schneiden sich g_2' und g_1 im Punkt $B \equiv A'$. Wählt man daher C beliebig auf g_3 und dreht die Gerade g_2 um das Zentrum C um 60° (das lässt sich mit Hilfe des Lotes CF leicht ausführen), so findet man im Schnittpunkt B von g_2' und g_1 einen zweiten Eckpunkt.

Da man die Drehung sowohl im positiven als auch im negativen Drehsinn ausführen kann, gehören zu jedem Punkt C auf g_3 zwei derartige Dreiecke, die axialsymmetrisch zur Senkrechten auf g_3 in C liegen.

4.2. Gesucht ist ein (konvexes) Sehnenviereck (d.h. ein konvexes Viereck, das einen Umkreis besitzt), von dem die Länge a der Seite AB, die Länge b der Seite BC, die Länge c der Seite CD und die Länge d der Seite DA gegeben sind.

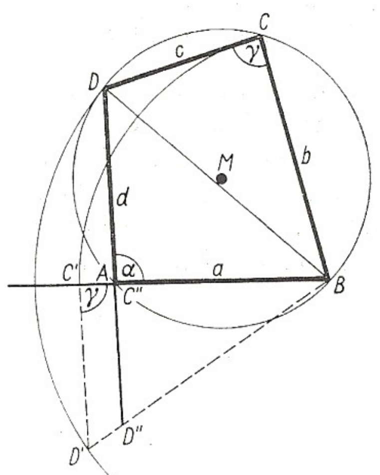


Bild 44

Bemerkung zum Lösungsplan: Auch bei dieser Aufgabe kann man mit einer Drehung und einer anschließend daran ausgeführten zentralen Ähnlichkeitstransformation zu einer Lösung gelangen. Wir erinnern uns zunächst daran, dass Sehnenvierecke auch dadurch charakterisiert sind, dass die Summe der Größen von je zwei gegenüberliegenden Viereckswinkeln 180° beträgt. Das nutzen wir für die Wahl der Drehung aus (Bild 44).

Wir nehmen an, $ABCD$ sei eines der gesuchten Vierecke. Wir ziehen die Diagonale BD und drehen zunächst das Teildreieck $\triangle BCD$ um das Zentrum B so, dass der gedrehte Punkt C' (Bildpunkt von C bei dieser Drehung) auf der Geraden $g(BA)$ liegt.
Bezeichnet D' den Bildpunkt von D, so ist $C'D'$ parallel zu DA, da die Summe der Größen der Winkel $\angle BAD$ und $\angle BC'D'$ gleich der Summe von α und γ also 180° ist.
Durch eine zentrale Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum B gehe C' nach $C'' \equiv A$ und D' nach D'' über. Dann liegen D, $C'' \equiv A$ und D'' auf einer Geraden.
Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$BC' = BC = b \quad , \quad C'D' = CD = c$$

$$AD'' : C'D' = BA : BC' = a : b \quad \text{d.h.} \quad AD'' : c = a : b \tag{1}$$

Damit ist AD'' mit Hilfe der gegebenen Längen konstruierbar. Ferner ist:

$$BD = BD' \quad \text{und} \quad BD' : BD'' = BD' : BA = b : a \quad \text{d.h.} \quad BD : BD'' = b : a \tag{2}$$

Wir betrachten nun das Dreieck $\triangle D''BD$. Von diesem Dreieck ist bekannt: die Länge der Seite DD'' wegen $DA = d$ und (1), die Lage des Punktes A auf DD'' und der Abstand $BA = a$ und das Verhältnis der Längen der Seiten BDund BD'' nach (2).
Damit ist dieses Dreieck aber mit Hilfe der Überlegungen in 2.4.1; konstruierbar. Der noch fehlende Eckpunkt C ist dann leicht zu finden.

4.3. Gegeben sind zwei Punkte A und B, eine Gerade g und die Länge s einer Strecke. Gesucht sind alle Punkte P auf der Geraden g; für die $AP + PB = s$ gilt.

Lösungsplan:

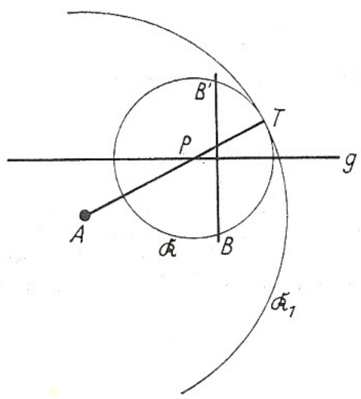


Bild 45

Wir nehmen an, P sei einer der gesuchten Punkte auf g (Bild 45). Wir schlagen um P einen Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Radius PB und um A einen Kreis $\mathfrak{K}_1$ mit Radius $AP + PB = s$. Die Verlängerung von AP schneide den Kreis $\mathfrak{K}$ in T. Wegen $PT = PB$ gilt $AP + PT = s$, daher liegt T auch auf $\mathfrak{K}_1$.
Weil aber T auf der Geraden $g(AP)$ liegt, berühren sich beide Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ in T. P liegt auf g, deshalb liegt der an g gespiegelte Punkt B (in Bild 45 mit B' bezeichnet) auf $\mathfrak{K}$.

Nun ist der Kreis $\mathfrak{K}_1$ und der Punkt B' aus den gegebenen Stücken konstruierbar, so dass jeder

der gesuchten Punkte P notwendig Mittelpunkt eines Kreises $\mathfrak{K}$ ist, der durch B und B' geht und $\mathfrak{K}_1$ berührt.
Diese Aufgabe wurde aber in 3.2.8. gelöst.

Bemerkung zur Determination: Damit die Aufgabe überhaupt Lösungen erwarten lässt, muss offenbar $AB < 4$ gelten, d.h. B liegt im Innern von $\mathfrak{K}_1$.
Für die Existenz von Kreisen, die $\mathfrak{K}_1$ berühren und durch B und den Spiegelpunkt B' gehen, ist hinreichend und notwendig, dass B' entweder im Innern von $\mathfrak{K}_1$ oder auf $\mathfrak{K}_1$ liegt. Liegt B' im Innern, so existieren genau zwei Punkte der gesuchten Art auf g, liegt B' auf $\mathfrak{K}_1$, so existiert genau ein Punkt mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist gleichwertig mit der Aufgabe, die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden g mit einer Ellipse zu konstruieren, von der die Brennpunkte A und B und die große Halbachse $\frac{s}{2}$ bekannt sind.

4.4. Gegeben sind zwei Punkte A und B, eine Gerade g und die Länge s einer Strecke. Gesucht sind alle Punkte P auf g, für die $|AP - PB| = s$ gilt.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist gleichwertig mit der Aufgabe, die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden g mit einer Hyperbel zu konstruieren, von der die Brennpunkte A und B und die halbe Hauptachse $\frac{s}{2}$ bekannt sind.

4.5. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht sind auf der Geraden $g(AC)$ Punkte X und auf der Geraden $g(BC)$ Punkte Y, so dass $AX = XY = YB$ gilt.

Lösungsplan.
$\triangle ABC$ sei das gegebene Dreieck, X und Y seien Punkte der gesuchten Art. In Bild 46 ist der Fall dargestellt, bei dem X und Y in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden $g(AB)$ liegen, in Bild 47 liegen X und Y in verschiedenen Halbebenen bezüglich dieser Geraden.

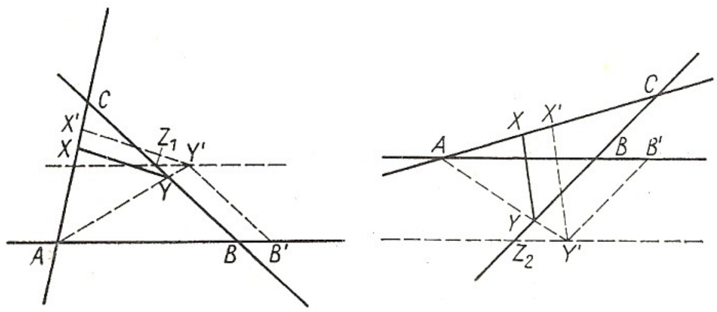
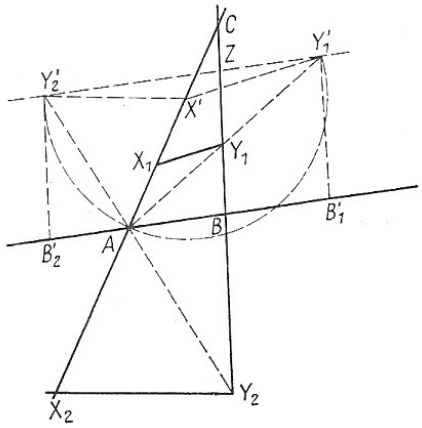


Bild 46 und 47

Von dem Viereck $ABYX$ ist bekannt, dass $AX = XY = YB$ gilt und dass AX auf der Geraden $g(AC)$ und BY auf der Geraden $g(BC)$ liegen. Mittels einer zentralen Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum A können wir das Viereck $ABYX$ auf das Viereck $AB'Y'X'$ abbilden, wobei $AX' = X'Y' = Y'B' = y$ gilt, und y eine beliebig vorgegebene Länge bedeutet. Das nutzen wir zur Konstruktion eines solchen Vierecks $AB'Y'X'$ aus.

Wir wählen auf der Geraden $g(AC)$ den Punkt $X' = A$ beliebig und tragen auf der Geraden $g(BC)$ von B aus die Strecken BZ_1 und BZ_2 mit $BZ_1 = BZ_2 = AX' = y$ ab.
Dabei liege Z_1 auf der gleichen und Z_2 auf der anderen der beiden Halbebenen bezüglich der Geraden $g(AB)$ wie der Punkt X'. Y' liegt auf einer der Parallelen zu $g(AB)$ durch Z_1 bzw. durch Z_2 und auf dem Kreis um X' mit Radius y.
Y ist der Schnittpunkt der Geraden $g(BC)$ und $g(AY')$ und X der Schnittpunkt der Geraden $g(AC)$ und der Parallelen zu $g(X'Y')$ durch Y.

Konstruktion:
Die Bilder 48, 49 und 50 zeigen verschiedene Fälle.



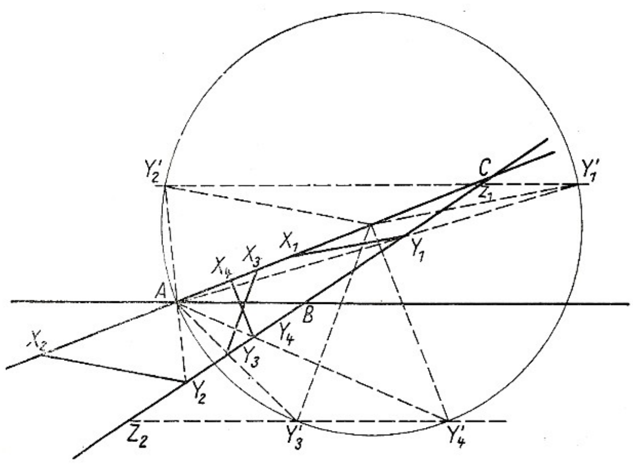


Bild 48 und 49

Bemerkung zur Determination: Damit Lösungen vorhanden sind, muss der Kreis um X' mit Radius y die Parallelen zu $g(AB)$ schneiden. Der Abstand beider Parallelen von $g(AB)$ ist $2y \cdot \sin\beta$. Schnittpunkte mit den Parallelen sind genau dann vorhanden, wenn der Abstand der Parallelen vom Kreismittelpunkt kleiner oder gleich dem Radius ist. Da der Abstand des Punktes X' von der Geraden $g(AB)$ $y \cdot \sin\alpha$ ist, folgt für die Parallele durch Z_1:

$$|y \cdot \sin\alpha - y \cdot \sin\beta| = y \cdot |\sin\alpha - \sin\beta| \leq y$$

d.h. wegen $y > 0$:

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq 1 \qquad (1)$$

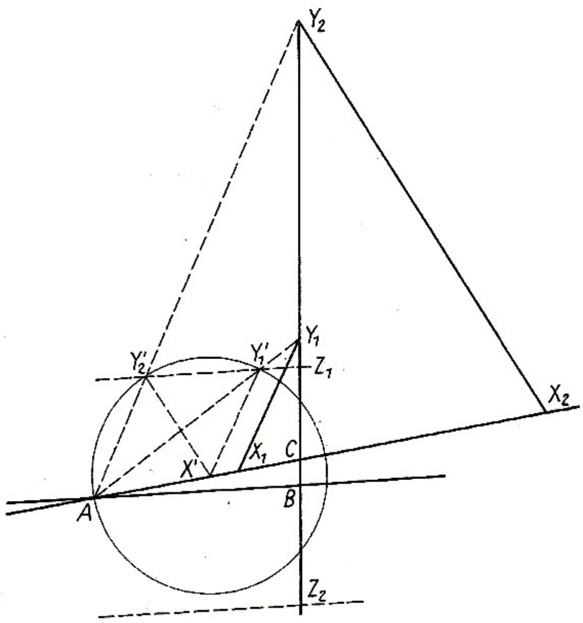


Bild 50

Schnittpunkte mit der Parallelen durch Z_2 sind genau dann vorhanden, wenn

$$y \cdot \sin\alpha + y\sin\beta = y \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) \leq y \quad \text{d.h.} \qquad \sin\alpha + \sin\beta \leq 1 \qquad (2)$$

gilt. Wegen

$$0 < \sin\alpha < 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < \sin\beta < 1$$

(α und β sind Winkel eines Dreiecks!) gilt stets

$$|\sin\alpha - \sin\beta| < 1$$

so dass (1) immer erfüllt ist. Das trifft aber nicht für (2) zu. Demnach existieren für

$$\sin\alpha + \sin\beta > 1$$

zwei Lösungen, für

$$\sin\alpha + \sin\beta = 1$$

drei Lösungen und für

$$\sin\alpha + \sin\beta < 1$$

vier Lösungen.

Stets liegen bei zwei der Lösungen die Punkte X und Y auf der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden $g(AB)$.

5 Einige Konstruktionsaufgaben im Raum

5.1. Im Raum unterscheiden wir drei Arten von geometrischen Grundgebilden: Punkte, Geraden und Ebenen.
Es gibt eine und nur eine Gerade, die durch zwei (verschiedene) Punkte des Raumes geht, und es gibt eine und nur eine Ebene, die durch drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte geht.

Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt die Gerade in dieser Ebene. Zwei Geraden liegen entweder in einer Ebene oder nicht.
Gibt es keine Ebene durch zwei Geraden, so heißen die Geraden windschief.

Liegen zwei Geraden in einer Ebene, so schneiden sie sich entweder in genau einem Punkt oder haben keinen Punkt gemeinsam. In diesem Falle heißen sie parallel.
Sind g_1 und g_2 zwei Geraden, die sich schneiden, so gibt es genau eine Ebene, in der g_1 und g_2 liegen. In dieser Ebene liegen auch alle die Geraden, die zu g_2 parallel sind und g_1 schneiden.

Haben zwei verschiedene Ebenen einen Punkt gemeinsam, so schneiden sie sich in genau einer Geraden. Sind zwei Ebenen punktfremd, so heißen sie parallel. Eine Ebene und eine nicht in dieser Ebene liegende Gerade schneiden sich entweder in genau einem Punkt oder sind punktfremd; dann heißen sie parallel.

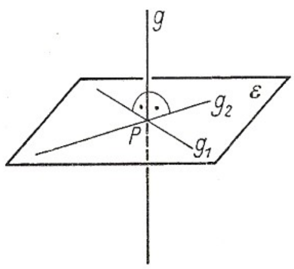


Bild 51

Es seien g_1 und g_2 zwei in einer Ebene ε liegende und sich im Punkte P schneidende Geraden. Die Gerade g gehe durch P und sei senkrecht zu g_1 und g_2 (Bild 51). Dann steht g senkrecht auf jeder durch P gehenden und in ε liegenden Geraden.

Wir sagen dann: g steht senkrecht auf ε.
Alle auf einer Ebene senkrecht stehenden Geraden sind zueinander parallel. Zu jedem Punkt P und zu jeder Ebene ε gibt es genau eine Gerade, die durch P geht und auf ε senkrecht steht. Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P gibt es genau eine Ebene, die durch P geht und auf der g senkrecht steht.

Steht die Gerade g senkrecht auf der Ebene ε, so steht g auch senkrecht auf jeder zu ε parallelen Ebene. Steht die Gerade g senkrecht auf der Ebene ε_1, so heißt jede durch g gehende Ebene ε_2 senkrecht zu ε_1. Offenbar ist dann auch ε_1 senkrecht zu ε_2.

Unter der Projektion eines Punktes P auf eine Ebene ε verstehen wir den Fußpunkt des von P auf die Ebene ε gefällten Lotes (d.h. den Schnittpunkt der durch P gehenden und auf ε senkrecht stehenden Geraden mit ε).
Die Länge der von P und diesem Fußpunkt begrenzten Strecke heißt Abstand des Punktes P von der Ebene ε.

Die Projektion einer Figur auf eine Ebene ist die Menge der Projektionen der Punkte der Figur auf diese Ebene. Demnach ist die Projektion einer auf einer Ebene ε senkrecht stehende Geraden auf die Ebene ε der Schnittpunkt dieser Geraden mit ε.

Die Projektion einer nicht auf ε senkrecht stehenden Geraden auf die Ebene ε ist eine in ε liegende Gerade, die zugleich Schnittgerade der durch g gehenden und auf ε senkrecht stehenden Ebene mit ε ist.

Schneidet eine Gerade g eine Ebene ε im Punkt P, so nennen wir die von g und der Projektion g' von g auf ε gebildeten Winkel Neigungswinkel der Geraden g mit der Ebene ε (Bild 52).

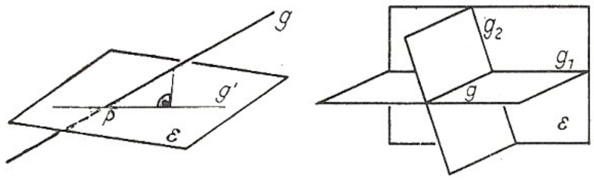


Bild 52 und 53

Steht g auf ε senkrecht, so wird zur Bestimmung der Neigungswinkel eine beliebige in ε liegende und durch die Projektion von g gehende Gerade benutzt.

Jede Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume. Zwei sich schneidende Ebenen zerlegen den Raum in zwei Paare von kongruenten Teilen. Jeder dieser Teile heißt Ebenenwinkel. Es sind jeweils die beiden Ebenenwinkel kongruent, die bezüglich beider Ebenen in verschiedenen Halbräumen liegen.

Wir schneiden beide Ebenen noch mit einer dritten Ebene ε, die auf der Schnittgeraden beider Ebenen senkrecht steht (Bild 53). Die Schnittgeraden von ε mit den beiden Ebenen seien g_1 und g_2.
Der Durchschnitt der von beiden Ebenen gebildeten Ebenenwinkel mit der Ebene ε ist identisch mit den von den Geraden g_1 und g_2 in ε gebildeten Winkeln. Insbesondere sei die Größe eines Ebenenwinkels gleich der Größe des ihm entsprechenden von den Geraden g_1 und g_2 gebildeten Winkels.
Genau dann, wenn die vier Ebenenwinkel untereinander kongruent sind, stehen beide Ebenen aufeinander senkrecht.

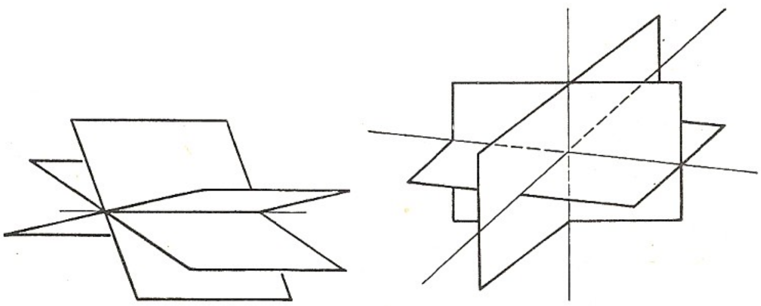


Bild 54 und 55

Haben drei Ebenen zwei Punkte gemeinsam, so schneiden sie sich in der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte (Bild 54). Haben drei Ebenen nur einen Punkt gemeinsam, so schneiden sich je zwei von ihnen in einer Geraden, und die drei Schnittgeraden gehen durch den gemeinsamen Punkt (Bild 55).

Haben drei Ebenen keinen Punkt gemeinsam, so verlaufen vorhandene Schnittgeraden von je zwei der drei Ebenen parallel. Dabei ist es möglich, dass drei, zwei oder keine solche Schnittgerade vorhanden sind (Bild 56).

Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von einem Punkt M einen konstanten Abstand r haben, ist die Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

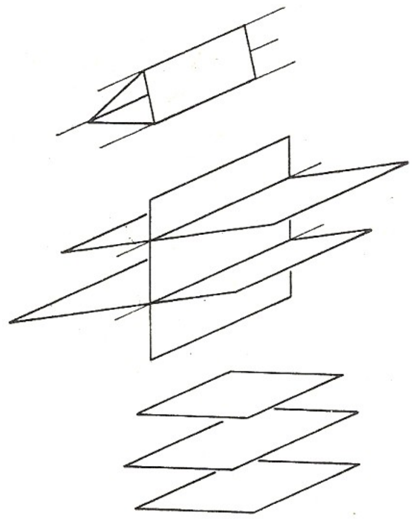


Bild 56

Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von einer Ebene ε konstanten Abstand r haben, besteht aus zwei zu ε parallelen Ebenen, die beide von ε den Abstand r haben. In jedem der beiden Halbräume bezüglich ε liegt genau eine der beiden genannten parallelen Ebenen.

Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von zwei Punkten Q und R jeweils den gleichen Abstand haben, ist eine Ebene, auf der die Gerade $g(QR)$ senkrecht steht und die durch den Mittelpunkt von QR geht.
Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von zwei sich schneidenden Ebenen ε_1 und ε_2 jeweils gleichen Abstand haben, sind zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen η_1 und η_2, die die vier von ε_1 und ε_2 gebildeten Ebenenwinkel halbieren. Die Ebenen ε_1, ε_2, η_1, η_2 schneiden sich sämtlich in einer Geraden.

5.2. Es ist eine Ebene zu konstruieren, die einen gegebenen Würfel in einem regulären Sechseck schneidet.

Lösungsplan:
Ein reguläres Sechseck ist ein konvexes[7] Sechseck mit gleich langen Seiten, dessen Ecken auf einem Kreis liegen. Wir bezeichnen mit ε eine Ebene, die den Würfel schneidet.
Jede Seite der Schnittfigur ist Schnitt von ε mit einer der Seitenebenen des Würfels, jede Ecke der Schnittfigur ist Schnittpunkt von ε mit einer Kante des Würfels. Da die Schnittfigur sechs Seiten haben soll, muss jede der sechs Seitenebenen von ε in höchstens einer Geraden geschnitten werden.

Hätte nämlich ε drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte mit einer der Seitenebenen des Würfels gemeinsam, so wäre ε mit dieser Seitenebene identisch. Da die Seiten der Schnittfigur gleich lang sein sollen, wählen wir versuchsweise die Mittelpunkte von sechs Würfelkanten als Eckpunkte einer Schnittfigur (Bild 57).

Wir haben nun nachzuweisen, dass

1. die sechs Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 in einer Ebene liegen,

[7]Eine ebene [räumliche] Figur heißt konvex, wenn ihre Berandung $\mathfrak{R}$ alle von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Punkte der Ebene [des Raumes] in zwei punktfremde Mengen (Klassen) teilt, so dass (wenigstens) eine dieser Klassen folgende Eigenschaft hat:

Sind P und Q zwei beliebige Punkte dieser Klasse, so gehören auch alle Punkte der Strecke PQ dieser Klasse an. Gibt es genau eine solche Klasse, so heißt sie das Innere der konvexen Figur. Beispiele für ebene konvexe Figuren sind: Quadrat, Kreis, Parabel, jeder einzelne der beiden Äste einer Hyperbel.

2. diese sechs Punkte auf einem Kreis liegen.

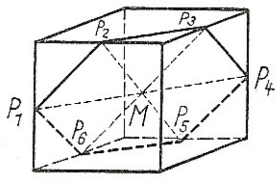


Bild 57

Da nach Konstruktion P_2P_3 zu P_5P_6 parallel ist, gibt es eine Ebene ε, in der diese vier Punkte liegen. In dieser Ebene liegt auch der Schnittpunkt M von P_2P_5 und P_3P_6. Da aber die Gerade $g(P_1P_4)$ ebenfalls durch M geht und zu P_5P_6 parallel ist, liegt auch $g(P_1P_4)$ und damit P_1 und P_4 in dieser Ebene.

Bezeichnen wir mit a die Länge der Würfelkante, so ist:

$$MP_1 = MP_2 = MP_3 = MP_4 = MP_5 = MP_6 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Daher liegen diese sechs Punkte auf dem Kreis um $M1$ mit diesem Radius.
Da nach Konstruktion die Seiten der Schnittfigur gleich lang sind, bilden die gewählten sechs Punkte ein reguläres Sechseck.

Bemerkung zur Konstruktion: Wir führen die Konstruktion in schräger Parallelprojektion aus, wählen zwei Achsen parallel zur Zeichenebene, die dritte Achse sei gegen die Horizontale um 45° geneigt, das Verkürzungsverhältnis sei 1 : 2 (Kavalierperspektive); Bild 58.

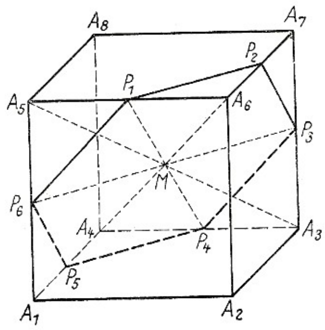


Bild 58

Beschreibung der Konstruktion:
Es seien $A_1, A_2, ..., A_8$ die Ecken des gegebenen Würfels (Bild 58). Der Schnittpunkt M zweier räumlicher Diagonalen des Würfels, etwa A_4A_6 und A_3A_5, ist dann Mittelpunkt der dem Würfel um- und einbeschriebenen Kugeln.
Wir konstruieren ferner die Mittelpunkte zweier in einer Ecke zusammenstoßenden Würfelkanten, etwa P_1 als Mittelpunkt von A_5A_6 und P_2 als Mittelpunkt von A_6A_7. Dann liegen die drei Punkte P_1, P_2 und M nicht auf einer Geraden und bestimmen eindeutig eine Ebene ε.

Wir konstruieren nun die Schnittpunkte der Ebene ε mit den übrigen Würfelkanten. P_4 liege auf der Verlängerung von P_1M über M, so dass $MP_1 \cong MP_4$ gilt, P_5 auf der Verlängerung von P_2M über M, so dass $MP_2 \cong MP_5$ gilt. Dann liegen P_4 und P_5 in ε und, weil der Würfel zentralsymmetrisch bezüglich M ist, auch auf den Würfelkanten A_3A_4 bzw. A_4A_1.

Wegen dieser Symmetrien sind P_4 und P_5 auch Mittelpunkte der durch sie hindurchgehenden Würfelkanten. Die zur Flächendiagonalen A_5A_7 parallele Gerade durch M schneidet die Würfelkanten A_1A_5 und A_3A_7 in deren Mittelpunkten P_6 bzw. P_3. Da diese Gerade auch parallel zu P_1P_2 verläuft und M in ε liegt, liegt sie ebenfalls in ε, so dass P_6 und P_3 weitere

Schnittpunkte sind.

Damit sind auf jeder Seitenfläche des Würfels zwei Schnittpunkte gefunden. Da nach Konstruktion keine der Seitenflächen in ε liegt, kann es außerhalb der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte keine weiteren Schnittpunkte einer Seitenfläche mit der Ebene ε geben, so dass die Schnittfigur durch $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$ gegeben ist.

Determination :
Die Konstruktion ist immer ausführbar, da die drei Punkte P_1, P_2 und M bei gegebenem Würfel stets konstruierbar sind und stets genau eine durch sie gehende Ebene bestimmen. Offenbar lassen sich in der angegebenen Weise vier verschiedene derartige Ebenen finden.

Beweis:
Wie schon in der Konstruktionsbeschreibung gezeigt wurde, ist das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$ die vollständige Schnittfigur der Ebene ε mit dem Würfel. Aus den Überlegungen des Lösungsplanes folgt aber, dass diese sechs Mittelpunkte der Würfelkanten ein ebenes reguläres Sechseck bilden.
Somit ist ε eine der gesuchten Ebenen.

5.3. Gesucht ist der Schnittpunkt der durch die Würfelecken A_4 und A_8 in Bild 58 gehenden Geraden mit der durch P_1, P_2 und M gehenden Ebene ε.

5.4. Es ist eine Ebene zu konstruieren, die einen gegebenen Würfel in einem regulären Fünfeck schneidet.

5.5. Gegeben sind vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, die nicht in einer Ebene liegen. Es ist zu zeigen, dass die Mittelpunkte der Strecken A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 in einer Ebene liegen.

5.6. Man beweise, dass eine Fläche $\mathfrak{F}$, bei der jeder ebene Schnitt ein Kreis ist, eine Kugel ist.

Bemerkung: Hierbei werde ein Punkt als Entartung einer Kugel bzw. eines Kreises mit dem Radius null angesehen.

Beweis:
Wir betrachten zunächst den Sonderfall, dass jede Ebene mit $\mathfrak{F}$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat. Dann besteht $\mathfrak{F}$ offenbar nur aus einem Punkt P: $\mathfrak{F} \equiv P$, und jede Ebene durch P schneidet $\mathfrak{F}$ in P, jede andere Ebene ist punktfremd zu $\mathfrak{F}$. In diesem Fall ist $\mathfrak{F}$ eine entartete Kugel mit dem Radius null.

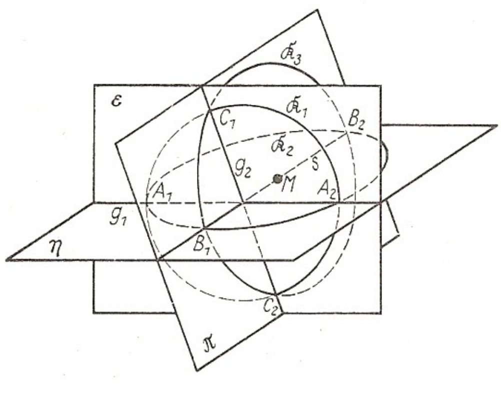


Bild 59

Wir können also jetzt voraussetzen, dass es wenigstens eine Ebene ε gibt, die $\mathfrak{F}$ nicht nur in einem Punkt schneidet. Darin ist nach Voraussetzung die Schnittfigur ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ (Bild 59).

Der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ sei M_1. Wir errichten in M_1 auf ε die Senkrechte s und legen durch s eine beliebige Ebene η, die ε in g_1 schneidet. g_1 ist senkrecht zu s und schneidet $\mathfrak{K}_1$ in A_1 und A_2; die Existenz dieser Punkte ist gesichert, weil g_1 als Schnittgerade von ε und η durch den Durchstoßpunkt M_1 von s und ε geht und M_1 Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ ist.

Außerdem folgt daraus, dass sicher A_1 und A_2 verschiedene Punkte sind. Da A_1 und A_2 sowohl auf η als auch auf $\mathfrak{K}_1$ und damit auf $\mathfrak{F}$ liegen, hat η mit $\mathfrak{F}$ diese beiden Punkte gemeinsam.
Daher schneidet nach Voraussetzung $\mathfrak{F}$ die Ebene η in einem Kreis $\mathfrak{K}_2$, der notwendig durch A_1 und A_2 gehen muss.
Der Mittelpunkt M von $\mathfrak{K}_2$ liegt deshalb auf der in η verlaufenden Mittelsenkrechten zu A_1A_2, also auf s. $\mathfrak{K}_2$ schneidet s in B_1 und B_2. Wir bezeichnen den Radius von $\mathfrak{K}_2$ mit r und zeigen: Jeder Punkt P von $\mathfrak{F}$ hat von M den Abstand r.

1. Es sei P ein Punkt von $\mathfrak{F}$, der in η liegt. Dann liegt er nach Voraussetzung auf $\mathfrak{K}_2$, hat also von M den Abstand r.

2. Es sei P ein Punkt von $\mathfrak{F}$, der nicht in η liegt. Dann liegt P speziell auch nicht auf der Geraden s. Daher gibt es genau eine Ebene π, die durch s und P geht.
Die Schnittgerade von π und ε sei g_2. Genau wie im Falle der Ebene η folgt dann, dass g_2 den Kreis $\mathfrak{K}_1$ in zwei Punkten C_1 und C_2 schneidet, $\mathfrak{F}$ die Ebene π in einem Kreis $\mathfrak{K}_3$ schneidet und dass der Mittelpunkt M_3 von $\mathfrak{K}_3$ auf s liegen muss.

Da aber die Punkte B_1 und B_2 der Fläche $\mathfrak{F}$ auf s und daher auch auf π liegen, muss $\mathfrak{K}_3$ durch B_1 und B_2 gehen. Nun hatten wir gezeigt, dass M_3 auf s liegt, also ist B_1B_2 Durchmesser von $\mathfrak{K}_3$ und M_3 mit M identisch.
$\mathfrak{K}_3$ hat den Radius r. Weil P auf $\mathfrak{F}$ und in π liegt, liegt P auf $\mathfrak{K}_3$ und hat von M den Abstand r.

Damit ist bewiesen:
Jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ ist Punkt der Kugel um M mit Radius r.

Wir haben noch zu beweisen:
Jeder Punkt der Kugel um M mit Radius r ist Punkt von $\mathfrak{F}$. Jeder Punkt P der Kugel um M liegt zugleich in (wenigstens) einer Ebene π, die durch die Gerade s geht. Daher liegt P auch auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ um M mit Radius r, der in π liegt.

Dieser Kreis $\mathfrak{K}$ geht durch B_1 und B_2 und schneidet den Kreis $\mathfrak{K}_1$ (in der Ebene ε) in zwei Punkten D_1 und D_2. Da B_1, B_2 und die Punkte von $\mathfrak{K}_1$, also speziell D_1 und D_2, nach Konstruktion auf $\mathfrak{F}$ liegen, hat $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F}$ diese vier Punkte gemeinsam. Nach Voraussetzung schneidet π dann $\mathfrak{F}$ in einem Kreis $\mathfrak{K}'$.
Da aber $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Punkte B_1, B_2, D_1, D_2 gemeinsam haben und da jeder Kreis bereits durch drei seiner Punkte eindeutig bestimmt ist, ist $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}'$ identisch, d.h., P liegt auf $\mathfrak{F}$. Damit ist der Satz bewiesen.

5.7 Es sei $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des Raumes. Für jede beliebige Ebene ε sei jeweils genau eine der drei folgenden Aussagen wahr:

1. der Durchschnitt von ε und $\mathfrak{M}$ ist leer,
2. der Durchschnitt von ε und $\mathfrak{M}$ ist eine Gerade,
3. der Durchschnitt von ε und $\mathfrak{M}$ ist ε.

Was kann man dann über $\mathfrak{M}$ aussagen?

6 Lösungen der Übungsaufgaben

zu 2.1.2

Lösungsplan:
Wir nehmen an, $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke (Bild 60). D sei Mittelpunkt der Seite AC, M der Mittelpunkt des Umkreises. Da $\angle AMB$ Mittelpunktswinkel und $\angle ACB \equiv \gamma$ Umfangswinkel des gleichen Bogens über der Sehne AB sind, ist $\angle AMB = 2\gamma$.

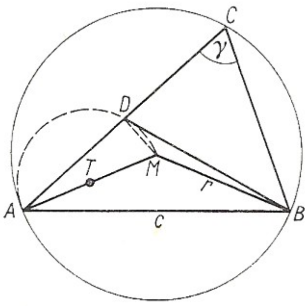


Bild 60

Demnach ist das Teildreieck $\triangle ABM$ konstruierbar aus:

$$AM = BM = r \qquad , \qquad \angle AMB = 2\gamma$$

Weil D Mittelpunkt der Sehne AC ist, trifft das von M auf AC gefällte Lot die Sehne in D. Also gilt:
Der Punkt D liegt:
1. auf dem Kreis mit dem Durchmesser AM,
2. auf dem Kreis um B mit Radius s_b.
Der Punkt C liegt:
1. auf der Verlängerung von AD über D,
2. auf dem Kreis um D mit Radius $AD = \frac{1}{2}b$.
Die Konstruktion und Beschreibung ist nun leicht auszuführen.

Bemerkung zur Determination: Wegen der in der Aufgabe angegebenen Bedingung für γ ist das Teildreieck $\triangle ABM$ stets konstruierbar. Ist $\gamma < 90°$, so ist der Winkel $\angle AMB$ Innenwinkel in diesem Teildreieck, ist $\gamma > 90°$, so ist er der Ergänzungswinkel des Innenwinkels zu 360°.
Damit ein Schnittpunkt D zwischen dem Kreis über AM als Durchmesser und dem Kreis um B mit Radius s_b existiert, muss s_b gewissen Bedingungen genügen. Bezeichnet T den Mittelpunkt von AM, so ist der Abstand BT nach dem Kosinussatz:

$$BT = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2 - r^2 \cos 2\gamma} = \frac{r}{2}\sqrt{5 - 4\cos 2\gamma}$$

Soll also ein Schnittpunkt D vorhanden sein, so muss gelten (weil $\frac{r}{2}$ Radius des Kreises um T ist):

$$BT - \frac{r}{2} \leq s_b \leq BT + \frac{r}{2}$$

Existiert ein solcher Punkt D, so ist auch immer der zugehörige Punkt C konstruierbar. Demnach ist hinreichend und notwendig für die Durchführbarkeit der Konstruktion, dass

$$\frac{r}{2}(\sqrt{5 - 4\cos 2\gamma} - 1) \leq s_b \frac{r}{2}(\sqrt{5 - 4\cos 2\gamma} + 1) \qquad (1)$$

erfüllt ist. Gilt in (1) eines der beiden Gleichheitszeichen, so existiert genau ein Schnittpunkt D, so dass dann bis auf Kongruenz nur ein Dreieck mit den gesuchten Eigenschaften durch die Konstruktion geliefert wird.
Gelten hingegen in (1) die Zeichen der Ordnungsrelation, so ergeben sich zwei Schnittpunkte D und D', die die Existenz von zwei inkongruenten Dreiecken mit den gesuchten Eigenschaften zur Folge haben.

Zu 2.1.3.

Lösungsplan:
Wir nehmen an, $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke (Bild 61), G sei der Fußpunkt von h_a, H der Fußpunkt von h_b, V der Höhenschnittpunkt.
Wir ziehen zu BC eine Parallele durch V, die die Seite AB in E und die Seite AC in F schneidet. Nach dem Strahlensatz gilt dann:

$$AV : VG = AE : EB$$

Wegen $AV = VG$ (vgl. Aufgabe) ist daher E Mittelpunkt der Seite AB.

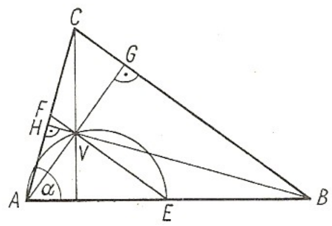


Bild 61

Ferner ist

$$\angle AVE = \angle AGB = 90° \qquad \text{und} \qquad \angle ABH = 90° - \alpha$$

Ist also AB bekannt, so liegt V:
1. auf dem Kreis über AE als Durchmesser,
2. auf dem freien Schenkel des Winkels $\angle ABH$ mit der Größe $90° - \alpha$.
Der dritte Eckpunkt C liegt:
1. auf dem freien Schenkel des Winkels $\angle BAC$ mit der Größe α,
2. auf der Senkrechten zu AB durch V.

Bemerkung zur Determination: Da V h_a halbiert, liegt V im Innern des Dreiecks, also muss das Dreieck notwendig spitzwinklig sein. Folglich ist die in der Aufgabe gemachte Voraussetzung $BZ < 90°$ notwendig für die Existenz solcher Dreiecke.
Außerdem muss der freie Schenkel BH des Winkels $\angle ABH$ den Kreis mit dem Durchmesser AE treffen. Es werden sich dann im allgemeinen zwei Schnittpunkte V und V' ergeben. Im Grenzfall tritt Berührung ein.

Im Falle der Berührung sei $\angle ABV = 90° - \alpha_0$. Dann sind Schnittpunkte V nur für Winkel α vorhanden, für die $0\circ < 90° - \alpha \leq 90° - \alpha_0$, also

$$\alpha_0 \leq \alpha < 90°$$

gilt. α_0 lässt sich durch

$$\sin(90° - \alpha_0) = \frac{c}{4} : \frac{3c}{4} = \frac{1}{3}$$

bestimmen, d.h.

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{3}, \qquad 0° < \alpha_0 < 90°$$

Da $\cos x$ im Intervall $0° < x < 90°$ monoton fallend ist, folgt aus $\alpha_0 \leq \alpha < 90°$: $\cos \alpha_0 \geq \cos \alpha > 0$, d.h.

$$0 < cos\alpha \leq \frac{1}{3}$$

als notwendig und hinreichend für die Existenz von Dreiecken mit den geforderten Eigenschaften.
Im Falle $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ gibt es genau eine Klasse kongruenter Dreiecke der gesuchten Art, gilt dagegen $0 < \cos \alpha < \frac{1}{3}$, so gibt es zwei inkongruente derartige Dreiecke.

Zu 2.1.4.

Lösungsplan:
Der doppelte Flächeninhalt $2A$ eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und den Höhen h_a, $h - b$, h_c ist gegeben durch:

$$2A = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c \tag{1}$$

Aus (1) folgt nach Division mit einem positiven Faktor m:

$$\frac{2A}{m} = \frac{a}{m} \cdot h_a = \frac{b}{m} \cdot h_b = \frac{c}{m} \cdot h_c \tag{2}$$

Denken wir uns m so gewählt, dass

$$\frac{2A}{m} = k^2$$

wird, wobei k eine beliebige, aber fest gewählte Strecke ist, so lassen sich aus (2) die Längen

$$\frac{a}{m} = a', \qquad \frac{b}{m} = b', \qquad \frac{c}{m} = c'$$

bestimmen. Bild 62 gibt eine Möglichkeit einer solchen Konstruktion an.

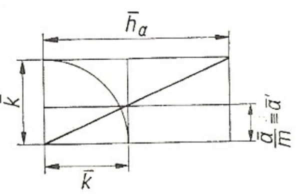


Bild 62

Damit ist es möglich, aus a', b', c' ein zum gesuchten Dreieck ähnliches Dreieck $\triangle A'B'C'$ zu konstruieren. Bezeichnet H' den Fußpunkt von h'_c, so tragen wir von C' auf $C'H'$ bzw. der Verlängerung von $C'H'$ über H' die Strecke $C'H$ mit der Länge h_c ab und ziehen durch H zur Geraden $g(A'B')$ die Parallele, die die Geraden $g(C'A')$ bzw. $g(C'B')$ in A bzw. B schneidet. $\triangle ABC'$ ist dann ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften.

Konstruktion:

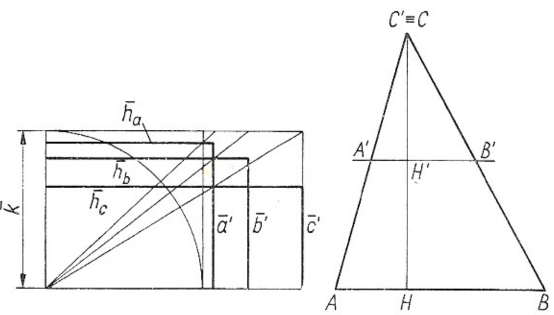


Bild 63

Bemerkung zur Determination: Die Längen der Höhen h_a, h_b, h_c müssen so gegeben sein, dass die Längen der Seiten a', b', c' den Ungleichungen

$$|a' - b'| < c' < a' + b'$$

genügen. Das ist hinreichend und notwendig für die Existenz eines Dreiecks mit den Seiten a', b', c'. Aus (2) folgert man hieraus als hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines Dreiecks mit den geforderten Eigenschaften:

$$\left|\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h-b}\right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h-b} \tag{3}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so sind alle Dreiecke, deren Höhen die in der Aufgabe geforderten Längen haben, kongruent.

Bemerkung: Gilt außer (3) auch noch

$$|h_a - h_b| < h_c < h_a + h_b$$

so kann man ein Dreieck konstruieren, dessen drei Seiten die Längen h_a, h_b, h_c haben. Die Höhen dieses Dreiecks sind Seiten eines zum gesuchten ähnlichen Dreiecks.

Zu 2.2.4.

Bemerkung zum Lösungsplan: Bezeichnet H den Fußpunkt der durch B gehenden Höhe, so ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle HBC$ aus $HB = h_b$, $\angle HCB = \gamma$, $\angle CHB = 90°$ konstruierbar. Mittels der Betrachtungen von 2.2.3. findet man dann den in Bild 14 mit E bezeichneten Punkt (EB parallel zu CH, $CE = 2s_c$). Anschließend lassen sich die in Bild 14 mit D und A bezeichneten Punkte leicht finden.

Zu 2.2.5.

Bemerkung zum Lösungsplan: Aus Bild 14 erkennt man, dass EG Tangente von E an den um C mit Radius h_a geschlagenen Kreis ist.
Das Entsprechende gilt für CH bezüglich des Kreises um E mit Radius h_b. Die Zentrale CE beider Kreise hat die Länge $CE = 2s_c$, der Schnittpunkt beider Tangenten ist A. D und B lassen sich dann leicht bestimmen.

Zu 2.2.6.

Bemerkung zum Lösungsplan: Bezeichnet S den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, D den Fußpunkt der durch C gehenden Seitenhalbierenden, so ist:

$$AS = \frac{2}{3}s_a, \qquad BS = \frac{2}{3}s_b, \qquad CS = \frac{2}{3}s_c$$

Im Dreieck $\triangle ABS$ sind also die Längen zweier Seiten und die Länge der zur dritten Seite gehörenden Seitenhalbierenden gegeben. Daher lassen sich auf dieses Dreieck die Betrachtungen von 2.2.3. anwenden. Anschließend findet man leicht den Punkt C.

Zu 2.3.2.

Bemerkung zum Lösungsplan: Offenbar ist das in Bild 16 mit DEC bezeichnete rechtwinklige Teildreieck aus $CD = h_c$ und $CE = w_\gamma$ konstruierbar.
Aus der in 2.3.1. (3) angegebenen Beziehung und der Kenntnis von r kann man leicht M und damit auch A und B bestimmen.

Zu 2.3.4.

Bemerkung zum Lösungsplan: Beachtet man, dass in Bild 17 der Winkel $\angle BMA$ als Mittelpunktswinkel zu γ bekannt ist, so ist das gleichschenklige Dreieck $\triangle ABM$ unmittelbar konstruierbar. Danach verläuft die Lösung wie bei der Aufgabe in 2.3.2.

Bemerkung zur Determination: Da γ bekannt ist, ist eindeutig bestimmt, ob der in Bild 17 mit F oder der mit F' bezeichnete Punkt zur Konstruktion zu benutzen ist. Lediglich im Fall $\gamma = 90°$ ist keine Entscheidung möglich, dann ergeben aber auch beide Möglichkeiten kongruente Dreiecke.

Zu 2.4.2.

Bemerkung zum Lösungsplan: Nehmen wir an, $\triangle ABC$ sei eines der gesuchten Dreiecke. S sei der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Dann ist bekanntlich:

$$DS = \frac{1}{3}s_c \quad \text{und} \quad AS = \frac{2}{3}s_c \qquad \text{also gilt} \qquad AS : DS = \left(\frac{2}{3}s_c\right) : \left(\frac{1}{3}s_c\right)$$

Wegen $s_a = 2s_c$ folgt daraus:

$$AS : DS = 4 : 1$$

Damit sind aber wegen $SB = \frac{2}{3}s_b$ und $AD = DB = \frac{c}{2}$ zwei geometrische Örter für den Punkt S bekannt, wenn man sich AB vorgibt.

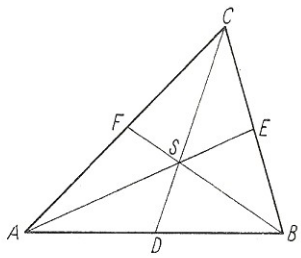


Bild 64

Bemerkung zur Determination: Die Durchführbarkeit der Konstruktion hängt nur davon ab, ob der Kreis um B mit Radius $\frac{2}{3}s_b$ den Kreis des Apollonius schneidet oder nicht. Daraus ergeben sich für c und s_b zwei Ungleichungen, die ein Kriterium für die Durchführbarkeit der Konstruktion ergeben.

Zu 3.1.4.

Beweis:
Wir nehmen zunächst an, die Potenzlinien $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathfrak{P}_{23}$ schneiden sich im Punkte R. Dann gilt:

$$\mathfrak{K}_1(R) = \mathfrak{K}_2(R) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K}_2(R) = \mathfrak{K}_3(R)$$

Daraus folgt aber, dass dann auch

$$\mathfrak{K}_1(R) = \mathfrak{K}_3(R)$$

gilt, d.h., R liegt auf $\mathfrak{P}_{13}$. Die drei Potenzlinien schneiden sich im Punkte R.
Nun setzen wir voraus: die Potenzlinien $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathfrak{P}_{23}$ sind parallel. Nehmen wir an, dass $\mathfrak{P}_{13}$ nicht zu $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathfrak{P}_{23}$ parallel ist, so gibt es einen Schnittpunkt R von $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathfrak{P}_{13}$.

Nach den vorher angestellten Überlegungen geht dann aber auch $\mathfrak{P}_{23}$ durch R, d.h., $\mathfrak{P}_{12}$ und

$\mathfrak{P}_{23}$ schneiden sich in R im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher kann es keinen solchen Schnittpunkt R geben, $\mathfrak{P}_{13}$ ist parallel zu $\mathfrak{P}_{12}$ und damit auch zu $\mathfrak{P}_{23}$.
Da die Potenzlinien senkrecht auf den zugehörigen Zentralen stehen, tritt der zweite Fall genau dann ein, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise auf einer Geraden liegen.

Konstruktionsmöglichkeit einer Potenzlinie:

Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 zwei gegebene Kreise, so schlägt man einen Hilfskreis $\mathfrak{K}_3$, der beide Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ schneidet und dessen Mittelpunkt M_3 nicht auf der Geraden $g(M_1M_2)$ liegt.

Die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_3$ mit $\mathfrak{K}_1$ seien A_1 und A_2, die von $\mathfrak{K}_3$ mit $\mathfrak{K}_2$ seien B_1 und B_2.
Dann ist $\mathfrak{P}_{13} \equiv g(A_1A_2)$ und $\mathfrak{P}_{23} \equiv (B_1B_2)$. Bezeichnet S den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_{13}$ und $\mathfrak{P}_{23}$ (S existiert, da der Hilfskreis so gewählt wurde, dass die drei Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen), so ist das Lot von S auf die Gerade $g(M_1M_2)$ die gesuchte Potenzlinie $\mathfrak{P}_{12}$ (Bild 65).

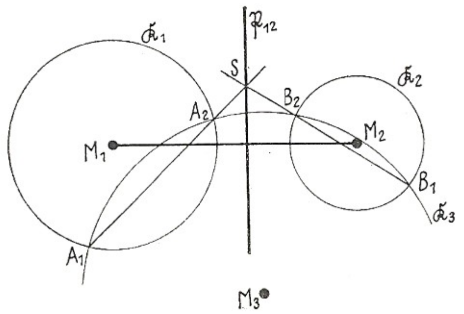


Bild 65

Zu 3.1.5.

Lösungsplan: Ist M_4 Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise, so sind die Berührungsradien zu den Schnittpunkten mit den drei gegebenen Kreisen Tangenten an diese Kreise. M_4 hat also die Eigenschaft, dass die von M_4 an $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ gezogenen Tangenten gleiche Länge haben. Da andererseits das Quadrat dieser Länge gleich der Potenz von M_4 bezüglich des entsprechenden Kreises ist, ist M_4 Potenzzentrum der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$.

M_4 ist also eindeutig bestimmt und existiert genau dann, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht auf einer Geraden liegen. Jede von M_4 an einen der gegebenen Kreise gezogene Tangente ist Berührungsradius des gesuchten Kreises.

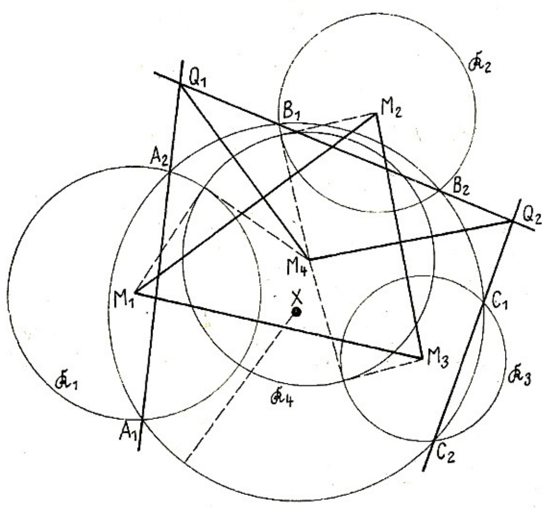


Bild 66

Bemerkung zur Konstruktion: Wählt man einen Kreis mit Mittelpunkt X so, dass er die drei gegebenen Kreise in A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 schneidet (Bild 66) und bezeichnet mit Q_1 den Schnittpunkt der Geraden $g(A_1A_2)$ und $g(B_1B_2)$, mit Q_2 den Schnittpunkt der Geraden $g(B_1B_2)$ und $g(C_1C_2)$ und mit Q_3 den Schnittpunkt der Geraden $g(A_1A_2)$ und $g(C_1C_2)$, so ist Q_1 ein Punkt der Potenzlinie $\mathfrak{P}_{12}$, Q_2 ein Punkt von $\mathfrak{P}_{23}$ und Q_3 ein Punkt von $\mathfrak{P}_{13}$ (vgl. 3.1.4.). Diese drei Potenzlinien schneiden sich im Potenzzentrum M_4.

Bemerkung zur Determination: Eine Lösung existiert offenbar dann und nur dann nicht, wenn

1. kein Potenzzentrum existiert, d.h., wenn M_1, M_2 und M_3 auf einer Geraden liegen, oder
2. vom Potenzzentrum keine Tangente an einen der gegebenen Kreise gezogen werden kann.

Der zweite Fall tritt dann ein, wenn M_4 etwa im Innern von $\mathfrak{K}_1$ liegt. In diesem Fall ist $\mathfrak{K}_1(M_4)$ negativ und daher auch $\mathfrak{K}_2(M_4)$ und $\mathfrak{K}_3(M_4)$.
Deshalb liegt M_4 in diesem Falle auch im Innern von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$, also im Durchschnitt dieser drei Kreisscheiben. Wir können also feststellen, dass die Aufgabe genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die drei Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 nicht auf einer Geraden liegen und das Potenzzentrum außerhalb der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ liegt. Anderenfalls existiert keine Lösung.

Zu 3.1.6.

Bemerkung zum Lösungsplan: Fasst man die Punkte P_2 und $P3$ als Kreise mit Radius null auf (Nullkreise), so lässt sich diese Aufgabe auf 3.1.5. zurückführen.
Die Berechtigung dazu ist darin zu sehen, dass die Überlegungen 3.1.1. bis 3.1.5. auch dann gelten, wenn die betrachteten Kreise zu Punkten entarten.

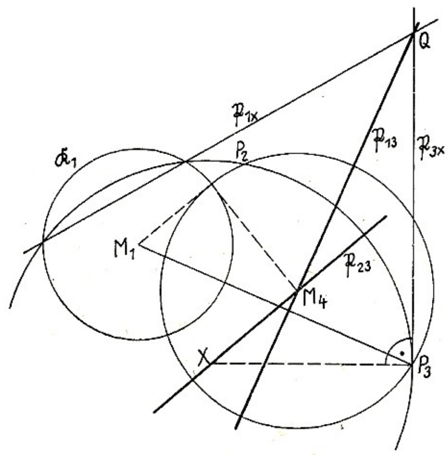


Bild 67

Unter der Potenz eines Punktes bezüglich eines Punktes ist dann das Quadrat des Abstandes beider Punkte zu verstehen. Bild 67 zeigt die Konstruktion. $\mathfrak{P}_{23}$ ist in diesem Fall die Mittelsenkrechte zu P_2P_3. X ist Mittelpunkt eines Hilfskreises, der durch P_2 und P_3 geht und $\mathfrak{K}_1$ schneidet.

$\mathfrak{P}_{1\mathfrak{x}}$ die Potenzlinie des Hilfskreises und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{P}_{3\mathfrak{x}}$ die Potenzlinie des Hilfskreises und des Punktes P_3, der Schnittpunkt Q beider Potenzlinien ist ein Punkt der Potenzlinie $\mathfrak{P}_{13}$ von $\mathfrak{K}_1$ und P_3, die auf M_1P_3 senkrecht steht.
M_4 als Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_{13}$ und $\mathfrak{P}_{23}$ ist Potenzzentrum von $\mathfrak{K}_1$, P_2, P_3 und Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Zu 3.2.3.

Liegt etwa P_2 auf g, so ist $P_2 \equiv T$. M liegt dann auf der Mittelsenkrechten zu P_1P_2 und auf der Senkrechten zu g in P_2. Es gibt genau eine Lösung. Liegen beide Punkte auf g, so gibt es keine Lösung.

Zu 3.2.4.

Lösungsplan :
Wir setzen zunächst voraus, dass g_1 und g_2 nicht parallel sind. $\mathfrak{K}$ sei einer der gesuchten Kreise (Bild 68), M sein Mittelpunkt. S sei der Schnittpunkt von g_1 und g_2. M liegt dann auf der Winkelhalbierenden desjenigen von g_1 und g_2 gebildeten Winkels, in dessen Inneren P liegt.

Da die Figur symmetrisch zu dieser Winkelhalbierenden ist, liegt der Spiegelpunkt P' von P in Bezug auf die Winkelhalbierende gleichfalls auf dem Kreis. P und P' sind verschieden, wenn P nicht auf der Winkelhalbierenden liegt.

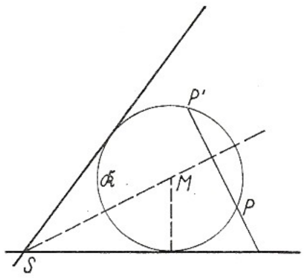
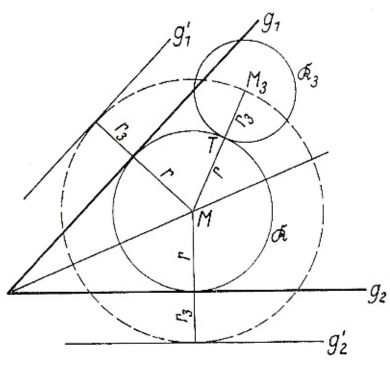


Bild 68

Ist $P \equiv P'$, so berührt $\mathfrak{K}$ die Senkrechte zur Winkelhalbierenden in P. Damit ist die Aufgabe auf eine der in 3.2. besprochenen zurückgeführt.

(Es ist aber zu beachten, dass dann nur die durch P gehenden Kreise Lösungen sind.) Liegt P entweder auf g_1 oder g_2, so liegt M auf der Senkrechten zu g_1 bzw. g_2 in P.
Sind g_1 und g_2 parallel, so ist im Lösungsplan die Winkelhalbierende durch die Mittelparallele zu ersetzen. Lösungen existieren dann nur, wenn P zwischen den Parallelen oder auf einer der Geraden liegt.

Bemerkung zur Determination: Es gibt zwei Lösungen, wenn beide Geraden sich schneiden und P auf keiner der beiden Geraden liegt oder wenn beide Geraden parallel sind und P zwischen beiden Geraden liegt.
Es gibt eine Lösung, wenn P auf genau einer der beiden Geraden liegt. Es gibt keine Lösung, wenn P Schnittpunkt der beiden Geraden ist oder wenn beide Geraden parallel sind und P nicht zwischen oder auf den Geraden liegt.



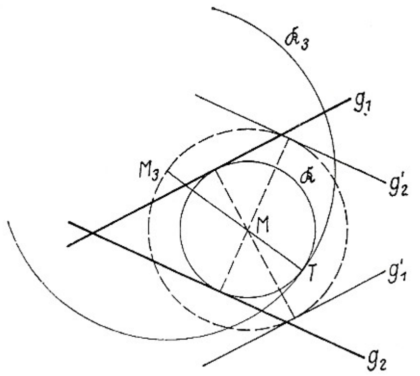


Bild 69 und 70

Zu 3.2.5.

Bemerkung zum Lösungsplan und zur Determination: $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt M und dem

Radius r sei einer der gesuchten Kreise. Nehmen wir an, $\mathfrak{K}$ berühre den gegebenen Kreis $\mathfrak{K}_3$ mit Radius r_3 von außen (Bild 69), so schlagen wir um M einen Kreis mit Radius r_3+r, dieser geht durch M_3 und berührt je eine der zu g_1 und g_2 im Abstand r_3 gezogenen Parallelen. Berührt der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis $\mathfrak{K}_3$ von innen (Bild 70), so schlagen wir um A_4 einen Kreis mit Radius $|r_3-r_1|$, dieser geht dann ebenfalls durch M_3 und berührt ebenfalls je eine der im Abstand r_3 zu g_1 und g_2 gezogenen Parallelen.

Damit ist die Aufgabe auf 3.2.4. zurückgeführt. Es ist zu beachten, dass es zu jeder der Geraden g_1 und g_2 je zwei Parallelen im Abstand r_3 gibt, so dass insgesamt vier verschiedene Zusammenstellungen "Punkt - Gerade - Gerade" möglich sind. Demzufolge erhält man im günstigsten Fall acht Kreise, die den Forderungen der Aufgabe genügen. (Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn sich g_1 und g_2 im Innern von $\mathfrak{K}_3$ schneiden.)
Es ist aber stets zu prüfen, ob ein auf diese Weise ermittelter Kreis $\mathfrak{K}$ wirklich Lösung der Aufgabe ist, da er nur mittels notwendiger Bedingungen aufgesucht wurde.
Sind beide Geraden parallel und liegt $\mathfrak{K}_3$ außerhalb dieses Streifens, so gibt es keine Lösungen.

Zu 3.2.7.

Bemerkung zum Lösungsplan: Ist $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt M und Radius r einer der gesuchten Kreise (Bild 71 und 72), so schlagen wir um M einen Kreis $\mathfrak{K}'$, der durch den Mittelpunkt M_2 von $\mathfrak{K}_2$ geht. $\mathfrak{K}'$ berührt eine der Parallelen g_1' zu g_1 im Abstand r_2, falls r_2 der Radius von $\mathfrak{K}_2$ ist.

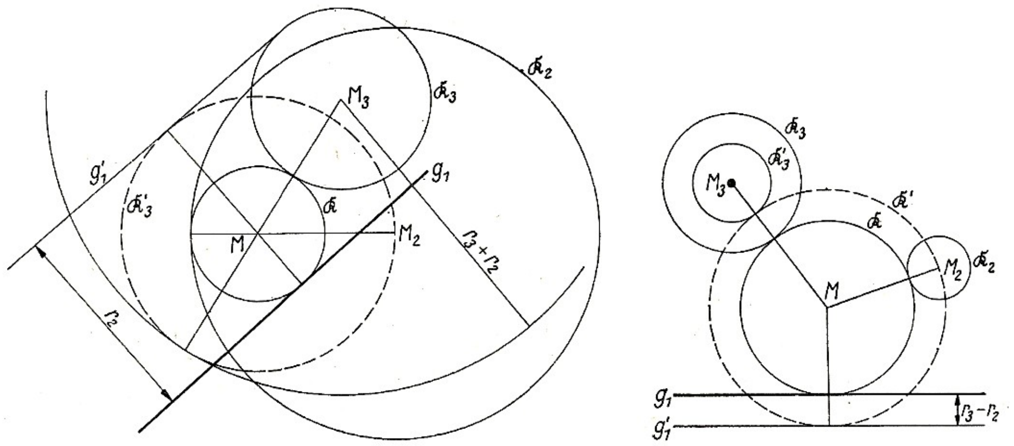


Bild 71 und 72

Außerdem berührt $\mathfrak{K}'$ einen zu $\mathfrak{K}_3$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}_3'$, der entweder den Radius r_3+r_2 (Abb. 68.1) oder den Radius $|r_3-r_2|$ (Bild 72) hat, falls r_3 der Radius von $\mathfrak{K}_3$ ist. Auch hier ist zu beachten, dass es neben den beiden Kreisen $\mathfrak{K}_3'$, zwei Parallelen im Abstand r_2 zu g_1 gibt. Damit ist diese Aufgabe auf 3.2.6. zurückgeführt.

Die Anzahl der Kreise, die den Forderungen der Aufgabe genügen, ist kleiner oder gleich acht. Man erhält z.B. acht Kreise, wenn sich $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ schneiden und g_1 durch diesen Durchschnitt beider Kreisscheiben geht.

Zu 4.4.

Bemerkung zum Lösungsplan: Der Lösungsplan verläuft völlig analog zu dem von 4.3. Lediglich ist jetzt zu beachten, dass weder B noch B' im Innern von $\mathfrak{K}$ liegen dürfen, wenn eine Lösung existieren soll (Bild 73).

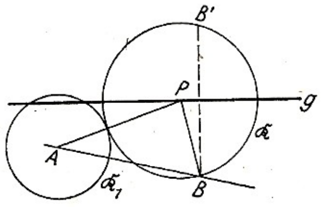


Bild 73

Zu 5.3.

Bemerkung zum Lösungsplan: Wie in der Konstruktionsbeschreibung zu 5.2. bemerkt, liegen alle Schnittpunkte der Ebene ε mit der durch A_4, A_8 und A_7 gehenden Ebene η auf der Geraden $g(P_3P_4)$. Da auch die Gerade $g(A_4A_8)$ in η liegt und nicht zur Geraden $g(P_3P_4)$ parallel ist, schneiden sich beide Geraden in einem Punkt S, der sowohl in ε als auch auf der Geraden $g(A_4A_8)$ liegt.
Entsprechend folgt, dass auch die Gerade $g(P_6P_5)$ durch S geht.

Zu 5.4.

Bemerkung zum Lösungsplan: Eine solche Ebene müsste fünf Seitenflächen eines Würfels schneiden.
Unter fünf Seitenflächen eines Würfels gibt es aber immer wenigstens zwei, die in parallelen Ebenen liegen. Da jede Ebene, die zwei parallele Ebenen schneidet, diese in parallelen Geraden schneidet, hat die Schnittfigur stets wenigstens zwei zueinander parallele Seiten, kann also niemals ein reguläres Fünfeck sein.
Eine solche Ebene, wie sie in der Aufgabe gesucht ist, gibt es nicht.

Zu 5.5.

Beweis: Da die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, liegen auch nicht drei von ihnen auf einer Geraden. Wäre das nämlich der Fall, so könnte man durch diese Gerade und den vierten Punkt eine Ebene legen, in der dann die vier Punkte liegen würden. Daher bilden die vier Punkte ein (unebenes) Viereck $A_1A_2A_3A_4A_1$ (Bild 74).

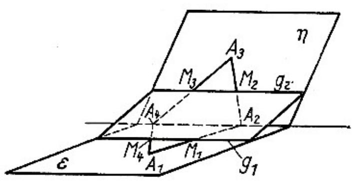


Bild 74

Wir legen durch die drei Punkte A_1, A_2, A_4 eine Ebene ε und durch A_2, A_3, A_4 eine Ebene η. Beide Ebenen schneiden sich in der Geraden $g(A_4A_2)$.
Wir ziehen zur Geraden $g(A_4A_2)$ durch den Mittelpunkt M_1 von A_1A_2 die Parallele g_1, die, weil sie zu einer in ε liegenden Geraden parallel ist und mit ε einen Punkt gemeinsam hat, in ε liegt.

Die Gerade g_1 schneidet deshalb die Gerade $g(A_1A_4)$ in einem Punkt M_4, der nach dem Strahlensatz Mittelpunkt von M_4M_1 ist. Aus dem gleichen Grund schneidet die in η liegende Parallele g_2 zur Geraden $g(A_4A_2)$ durch den Mittelpunkt M_2 von A_2A_3 die Strecke A_3A_4 in deren Mittelpunkt M_3.
Daher liegen M_1 und M_4 auf g_1 und die Punkte M_2 und M_3 auf g_2. Nun ist aber auch g_1 parallel zu g_2, da beide Geraden parallel zur Geraden $g(A_4A_2)$ sind. Es gibt also eine Ebene π, in der g_1 und g_2 und damit auch die Mittelpunkte der Strecken A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 liegen.

Zu 5.7.

Lösungsplan:
Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:
a) Es gelte für alle Ebenen ε die Aussage 1). Dann ist $\mathfrak{M}$ offenbar die leere Menge.
Denn gäbe es einen Punkt P aus $\mathfrak{M}$, so könnte man durch P eine Ebene ε legen, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{M}$ nicht leer ist.
Umgekehrt ist der Durchschnitt der leeren Menge mit jeder Ebene ε leer.

b) Es gelte für alle Ebenen ε die Aussage 3). Dann ist $\mathfrak{M}$ offenbar der ganze Raum. Denn gäbe es einen Punkt Q, der nicht in $\mathfrak{M}$ liegt, so könnte man durch Q eine Ebene ε legen, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{M}$ nicht ε ist. Umgekehrt ist der Durchschnitt aller Punkte des Raumes mit jeder Ebene ε stets die Ebene ε.

c) Es sei also $\mathfrak{M}$ weder leer noch der ganze Raum. Dann gibt es wenigstens einen Punkt P aus $\mathfrak{M}$ und einen Punkt Q, der nicht in $\mathfrak{M}$ liegt.
Wir legen durch P und Q eine Ebene ε_1. Der Durchschnitt von ε_1 mit $\mathfrak{M}$ ist dann weder leer (wegen der Wahl von P) noch ε_1 (wegen der Wahl von Q). Daher ist der Durchschnitt nach Aussage 2) eine Gerade g_1: g_1 liegt in $\mathfrak{M}$ und in ε_1.

Da P diesem Durchschnitt angehört, liegt P auf g_1, dagegen liegt Q nicht auf g_1. Wir errichten auf ε_1 in Q die Senkrechte s und betrachten diejenige eindeutig bestimmte Ebene ε_2, die durch P und s geht. s hat mit ε_1 nur den Fußpunkt Q gemeinsam, da $P \neq Q$ in ε_1 liegt, liegt P nicht auf s.

Daher ist ε_2 eindeutig bestimmt und von ε_1 verschieden. Für ε_2 gilt gleichfalls, dass der Durchschnitt mit $\mathfrak{M}$ weder leer (wegen P) noch ε_2 (wegen Q) sein kann. Daher ist der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und ε_2 eine Gerade g_2: g_2 liegt in $\mathfrak{M}$ und in ε_2.

Da P diesem Durchschnitt angehört, liegt P auf g_2, dagegen liegt Q nicht auf g_2.
Die beiden (verschiedenen) Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden sich in der Geraden $g(PQ)$, da sowohl P als auch Q in beiden Ebenen liegen. Da Q weder auf g_1 noch g_2 liegt, ist weder g_1 noch g_2 mit der Schnittgeraden $g(PQ)$ identisch. Da außerdem beide Geraden in verschiedenen Ebenen liegen und den Punkt P gemeinsam haben, sind g_1 und g_2 zwei verschiedene sich in P schneidende Geraden.

Es sei η diejenige eindeutig bestimmte Ebene, in der g_1 und g_2 liegen. Dann ist der Durchschnitt von η und $\mathfrak{M}$ weder leer noch eine Gerade, also nach Aussage 3) gleich η:
η gehört zu $\mathfrak{M}$.

Wir behaupten nun: η ist mit $\mathfrak{M}$ identisch.

Der Beweis erfolgt indirekt. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt R aus $\mathfrak{M}$, der nicht in η liegt, und leiten daraus einen Widerspruch her.
Von den drei Punkten P, Q, R liegen in $\mathfrak{M}$ die Punkte P und R und in η nur der Punkt P. Es sei ζ eine Ebene, in der P, Q und R liegen. Dann ist wegen der Wahl von R ζ nicht mit η identisch. Der Durchschnitt von ζ und η enthält P, daher schneiden sich beide Ebenen in einer Geraden h: h liegt in ζ und η, R liegt nicht auf h.

Da eta in $\mathfrak{M}$ liegt, enthält der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und ζ die Punkte der Geraden h und den nicht auf h liegenden Punkt R. Daher trifft auf ζ weder die Aussage 1) noch die Aussage 2) zu, d.h., der Durchschnitt von ζ mit $\mathfrak{M}$ wäre ζ. Weil aber Q auf ζ liegt, ist das ein Widerspruch, Q gehört nicht zu $\mathfrak{M}$. Damit haben wir gefunden:

Die Menge $\mathfrak{M}$ ist leer oder der ganze Raum, oder sie besteht aus den Punkten von genau einer Ebene.

7 Literaturhinweise

Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966, MSB Nr. 4

Danilowa, Wege zur Lösung geometrischer Aufgaben, Berlin 1964.

Krötenheerdt, Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen, Wiss. Z. Halle XV 66, M.H.4, S. 677-700.