Jan Vyšín

Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

Übersetzung und Bearbeitung: Hugo Breuer, Gerlinde Wußing
1972 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 5
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Wie alle Mathematikmethodiker anerkennen, ist das Lösen mathematischer Aufgaben ein sehr wichtiger Teil der Mathematikausbildung. Wer einen bestimmten Abschnitt der Theorie studiert hat, kann erst dann behaupten, dass er ihn beherrscht, wenn er seine Kenntnisse zum Lösen von Aufgaben anwenden kann. Nach diesem Kriterium muss auch der Mathematiklehrer die Erfolge seiner Arbeit in der Klasse beurteilen.

In der gegenwärtigen Schulpraxis wird der erarbeitete Lehrstoff an Aufgaben geübt; bei Wiederholungen werden dann umfangreichem Aufgaben gelöst, welche zusätzliche mathematische Kenntnisse erfordern. Es scheint mir jedoch, dass im Unterricht den mathematischen Aufgaben noch nicht das Interesse entgegengebracht wird, das ihnen ihrer Bedeutung nach zukommt.

Es ist notwendig, auf das eigentliche Ziel des Mathematikunterrichts hinzuweisen:
Der Schüler muss lernen, einfache mathematische Probleme selbständig zu lösen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden ihm theoretische Kenntnisse vermittelt; den Schüler mit dem System der mathematischen Kenntnisse bekannt zu machen ist für die Schule bereits eine zweitrangige Aufgabe.

Wenn also den mathematischen Aufgaben im Schulunterricht eine so große Bedeutung zukommt, so sollten sie die Grundlage sein für die Vorbereitung der Unterrichtsstunden.

Zur Zeit ist das noch nicht genügend der Fall; vielleicht auch deshalb, weil sich die Methodik des Mathematikunterrichts bisher nur wenig mit der Lösung mathematischer Aufgaben beschäftigt hat und weil bisher kein geeignetes System ausgearbeitet wurde. Die Aufgaben werden größtenteils einfach gelöst, man verlässt sich dabei auf die Intuition der Schüler und auf die Hilfe der Eltern und Mitschüler (bei Hausaufgaben).

Die Aufgaben sind oft nicht genügend theoretisch vorbereitet. Die Schüler kennen die Art der Lösung der. einzelnen Aufgabenkategorien nicht, und so gewöhnen sie sich meist daran, dass sie vom Lehrer schrittweise an die Lösung herangeführt werden. Dadurch werden sie zur Unselbständigkeit erzogen.

Um die Ergebnisse des Mathematikunterrichtes zu verbessern und um die Erziehung der Schüler zur Selbständigkeit zu fördern, muss dies verändert werden.

Der erste Schritt dazu besteht meiner Meinung nach darin, dass sich alle Mathematiklehrer mit der Problematik des Lösens mathematischer Aufgaben eingehend vertraut machen, dass sie sich mit der Art und Diskussion der Lösung befassen und dass sie sich daran gewöhnen, alle Arten mathematischer Aufgaben unter dem gleichen Gesichtspunkt zu betrachten. Es ist ferner notwendig, dass sie beim Lösen der Aufgaben die Bedeutung des Experimentierens erkennen und dass sie bei Textaufgaben besonderen Wert auf die Antworten legen.

Das vorliegende Büchlein soll ihnen dabei behilflich sein. Es enthält eine Reihe allgemeiner Grundsätze und konkreter Angaben.

Die Aufgaben stammen alle aus der Elementarmathematik. Die zur Lösung erforderlichen Kenntnisse überschreiten nur selten - und das unbeabsichtigt - den Rahmen des Lehrstoffes der 9. und 10. Klasse. Um die allgemeingültigen Grundsätze zu verdeutlichen, wählte ich einige kombinierte Aufgaben, insbesondere auch einige Aufgaben, die ich in vergangenen Jahren bei Mathematikolympiaden stellte.

Von besonderer Bedeutung sind die Ausführungen in Kapitel 1 über Relationen. Es scheint mir, dass der Begriff der Relation für ein gutes Verständnis des Wesentlichen bei mathematischen Aufgaben und ihrer Lösung erforderlich ist. Obwohl die Relationen, so wie es organisch richtig ist, im ersten Kapitel behandelt werden, kann dieses auch später gelesen werden, gegebenenfalls erst nach Durchlesen des gesamten Buches.

Zum Schluss bitte ich den Leser des Büchleins, dass er sich dessen Aufgabe, einige Beiträge zu einem aktuellen Thema zu bringen, stets vor Augen hält und in ihm kein ausgearbeitetes methodisches System zur Lösung von Aufgaben der verschiedenen Abschnitte des Schullehrstoffes sucht.

Jan Vyšín

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffsdefinitionen

1.1 Relationen

Zu Beginn unserer Ausführungen ist es erforderlich, die Begriffe "mathematische Aufgabe" und "Lösung einer mathematischen Aufgabe" zu erklären. Im Mathematikunterricht verwendet man oft die Einteilung in Beweis-, Berechnungs- und Konstruktionsaufgaben.

Von dieser Einteilung wollen wir jedoch nicht ausgehen. Unser Ziel ist es vielmehr, zu zeigen, dass alle mathematischen Aufgaben unter einem einheitlichen Gesichtspunkt gesehen werden können, und zwar sowohl bezüglich ihrer Darstellung als auch bezüglich des Lösungsweges. Mit der Einteilung der Aufgaben werden wir uns später beschäftigen.

Wir gehen von der umfangreichsten Aufgabengruppe aus. Sie enthält Aufgaben, die wie folgt formuliert sind: Es ist eine Zahl, eine Menge von Zahlen, ein Dreieck, eine Kreislinie u.ä. zu suchen, die gestellten Anforderungen entsprechen. Solche Aufgaben bezeichnen wir in der Regel als Bestimmungsaufgaben.

Wir werden später sehen, dass sich alle anderen mathematischen Aufgaben auf diese Bestimmungsaufgaben zurückführen lassen, so z.B. der Nachweis, dass Figuren mit bestimmten Eigenschaften existieren oder nicht existieren. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel:

Beispiel 1. Es ist folgende Gleichung zu lösen:

$$2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0 \tag{1}$$

Das bedeutet, dass für x sämtliche Zahlen aus einer gegebenen Zahlenmenge, dem Grundbereich Ω, zu suchen sind, die die Gleichung (1) erfüllen. Diese Zahlen bezeichnen wir in der Regel als Wurzeln oder Lösungen der Gleichung und ihre Gesamtheit als Lösungsmenge bezüglich des Grundbereichs Ω.
Ist Ω der Körper der komplexen Zahlen, so hat die Gleichung (1) folgende fünf Wurzeln: $\pm i$, $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$.

Ist der Zahlenbereich der Körper der reellen Zahlen, so besteht die Lösungsmenge der Gleichung (1) nur aus drei verschiedenen Wurzeln: $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$. Ist Ω der Körper der rationalen Zahlen, so hat die Gleichung (1) nur die einzige Wurzel $\frac{1}{2}$.
Und ist schließlich Ω die Menge aller ganzen Zahlen, so hat die Gleichung (1) keine Wurzel; dann ist sie nicht erfüllbar.

Wir bemerken bereits jetzt, dass es zweckmäßiger ist, bei diesen vier Fällen mit den vier verschiedenen Grundbereichen von vier verschiedenen mathematischen Aufgaben zu sprechen, als die Auffassung zu vertreten, dass es sich im wesentlichen nur um eine durch die Gleichung (1) gegebene Aufgabe handelt, deren Lösungen in verschiedenen Grundbereichen zu suchen sind.

Vorläufig erläutern wir den Begriff der Bestimmungsaufgabe wie folgt:

Es ist eine Menge Ω mathematischer Objekte gegeben. Aus den Objekten dieser Menge Ω haben wir alle Objekte herauszusuchen, die gewissen geforderten Bedingungen entsprechen oder die bestimmte Eigenschaften haben.
Die Menge Ω bezeichnen wir als Grundbereich der Aufgabe.

Bei dieser Definition verstehen wir unter "mathematischem Objekt" irgendeinen Begriff, der Gegenstand mathematischer Betrachtungen sein kann. In dem obigen Beispiel war dieses mathematische Objekt eine Zahl, es kann auch ein Zahlentripel sein (wenn wir ein Gleichungssystem mit drei Variablen lösen) oder allgemein eine Zahlenmenge.
Das mathematische Objekt kann auch eine Funktion, eine graphische Darstellung oder eine Menge von Funktionen sein. Ferner kann das Objekt ein Punkt oder eine Menge von Punkten sein, bzw. allgemein ausgedrückt, irgendein geometrisches Gebilde, z.B. eine Kurve, eine Figur, eine Fläche, ein Körper u.ä.
Bei der Formulierung der Aufgabe muss stets genau angegeben werden, welches mathematische Objekt gesucht wird. Dies zeigen wir anhand von zwei Beispielen.

Beispiel 2. Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

erfüllen, wobei a, b und c reelle Zahlen sind und $a \neq 0$ ist.

Diese Aufgabe kann auf zwei Arten interpretiert werden:
1. Es handelt sich um eine Menge von unendlich vielen Gleichungen, d.h. Aufgaben, von denen jede durch freie Wahl der Zahlen a, b, c gegeben ist.
2. Alle gesuchten Objekte sind Funktionen $x = f(a, b, c)$ von drei Variablen. Diese Funktionen sind definiert über der Menge Ω der Zahlentripel (a, b, c), $a \neq 0$, die die Gleichung (2) erfüllen.

Der Grundbereich Ω ist im ersten Fall der Körper der reellen Zahlen, im zweiten Fall die Menge reeller Funktionen von drei reellen Variablen.

Beispiel 3. Mittels der euklidischen Konstruktion (Konstruktion mit Zirkel und Lineal) ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Seiten $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und die Länge der Seitenhalbierenden (Schwerpunktlinie) $s_a = 6$ cm gegeben sind.

Wir zeichnen drei Strecken mit den gegebenen Längen. Es ergeben sich sechs Punkte. Nun handelt es sich darum, mit Hilfe der euklidischen Konstruktion unter diesen sechs Punkten alle Möglichkeiten zu finden, drei nicht in einer Geraden liegende Punkte so darzustellen, dass die entstehenden Dreiecke den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen genügen.
Der Grundbereich Ω ist dann die Menge aller Punkte in der Ebene, die sich aus den sechs Punkten durch die euklidische Konstruktion ergeben. Genauer gesagt, ist Ω die Menge aller nicht kollinearen Zahlentripel solcher Punkte.

Das Beispiel 3 zeigt eindeutig, dass die sog. Konstruktionen mit vorgegebenen (begrenzten) Mitteln nichts anderes sind als das Lösen einer Aufgabe in einem vorgeschriebenen Bereich Ω, d.h. das Finden der Lösungsmenge aus diesem Grundbereich.

Nun kehren wir wieder zur Definition der mathematischen Bestimmungsaufgabe zurück. Die oben gegebene Definition kann noch nicht befriedigen. Es sind in ihr Ausdrücke enthalten wie "das Objekt, das den gegebenen Bedingungen entspricht" oder "Objekt mit gegebenen Eigenschaften", die recht verschwommen und unmathematisch sind.
Dem kann leicht mit dem Begriff der Relation abgeholfen werden. Dabei zeigt sich, dass die Antwort auf die Frage "Was ist eine mathematische Aufgabe?" sehr eng mit der Antwort auf die Frage "Was ist die Lösung einer mathematischen Aufgabe?" zusammenhängt. Daraus ergibt sich folgende Definition für eine mathematische Bestimmungsaufgabe:

Es ist eine Menge Ω (Grundbereich) gegeben, und auf irgendeine "Art", z.B. durch Gleichungen, wird eine Untermenge $\mathfrak{R}_1$ "bestimmt".
Diese Untermenge werden wir im folgenden als Lösungsmenge bezeichnen. So wird z.B. in der Menge Ω aller geordneten Zahlenpaare ganzer Zahlen $(x; y)$ durch die Gleichung $2x + 3y = 1$ die Untermenge $\mathfrak{R}_1$ der Zahlenpaare bestimmt, welche die gegebene Gleichung erfüllen.

In der Regel sind wir mit dieser Art der Ermittlung der Untermenge (s. Beispiel der Gleichung $x + 3y = 1$) nicht "zufrieden", und wir bemühen uns, dieses Verfahren zu verbessern. Das geschieht durch Umformung der gegebenen mathematischen Aufgabe in eine andere Aufgabe.
Diesen Vorgang bezeichnen wir als "Lösen der Aufgabe". Beachten Sie die vielen unklaren Ausdrücke im vorstehenden Text (sie wurden durch Anführungszeichen gekennzeichnet).

Daran erkennt man, dass eine präzise Definition der mathematischen Aufgabe und ihrer Lösung mit Hilfe des Begriffes der Relation notwendig ist. Es könnte jedoch sein, dass die nachstehende Erklärung der Relation für einige Leser zu abstrakt und unverständlich ist. Wir empfehlen, in diesem Falle die folgenden Ausführungen vorerst zu überspringen und sofort das Kapitel 2 zu lesen. Sie sollten jedoch nach dem Lesen des Kapitels 2 zum Begriff der Relation zurückkommen, im ungünstigsten Fall nach dem Lesen des ganzen Büchleins.

Es folgen nun einige der wichtigsten Erkenntnisse zum Begriff der Relation.

Es seien n nichtleere Mengen M_1, M_2, ..., M_n gegeben, wobei $n \geq 1$ ist. Wir bilden ihr Mengenprodukt

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{n} = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$$

es ist dies die Menge aller möglichen geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$, wobei das Element x_i aus der Menge M_i, $i = 1, 2, ..., n$, entnommen ist. Wir bilden weiter beliebige nichtleere oder leere Untermengen $\mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ der Menge $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}$. Die Untermenge $\mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ bezeichnen wir kurz als n-stellige Relation zwischen den Mengen M_1, M_2, ..., M_n.

Die Definition der Relation ist auch für $n = 1$ zulässig. Die einstellige Relation $\mathfrak{R}_1$ ist einfach eine Untermenge der Menge $\mathfrak{M}_1$.
Ferner schließt die Definition der Relation nicht aus, dass einige, gegebenenfalls alle Mengen M_1, M_2, ..., M_n identisch sein können.

Der Begriff der Relation ist nach dieser Definition sehr allgemein, aber man kann leicht zeigen, dass die gebräuchlichen mathematischen Begriffe spezielle Relationen bezeichnen, z.B. der Begriff der Gleichheit, der Begriff der Rechenoperation, der Begriff der Funktion und der graphischen Darstellung oder geometrische Begriffe wie Inzidenz, Parallelität, Kongruenz usw. Es sind dies alles besondere Fälle von Relationen.

Außer der einstelligen Relation - der Untermenge - handelt es sich besonders häufig um zweistellige oder binäre und dreistellige oder ternäre Relationen. Bei komplizierten Zusammenhängen treten auch Relationen zwischen einer größeren Zahl von Mengen auf.

Noch eine Bemerkung zur Terminologie: In der Umgangssprache wird das aus dem Lateinischen stammende Wort "Relation" als Synonym für "Beziehung" verwendet. Im Gegensatz dazu verstehen wir hier und im folgenden unter "Relation" einen bestimmten mathematischen Begriff; aus diesem Grunde werden wir die Bezeichnung "Beziehung" nicht verwenden.
Es folgen nun einige Beispiele für Relationen.

Beispiel 4. a) Die Parallelität von Geraden im Raum ist eine binäre Relation, die zwischen zwei koinzidierenden (d.h. zusammenfallenden) Mengen $M_1 = M_2$ (M_1 ist die Menge aller Geraden im Raum) definiert ist. Aus der Menge $\mathfrak{M}_2$ aller zugeordneten Paare von Geraden wird die Untermenge $\mathfrak{R}_2$ ausgewählt, die nur die zueinander parallelen Paare von Geraden enthält. Diese Relation hat drei bekannte Eigenschaften: sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) Die Homothetie (Ähnlichkeitslage) in der Ebene E ist eine binäre Relation. Sie ist definiert zwischen zwei koinzidierenden Mengen M_1, M_2 (M_1 ist die Menge der Punkte der Ebene). Aus der Menge $\mathfrak{M}_2$ aller Punktpaare $(X; X')$ wird die Untermenge $\mathfrak{R}_2$ der Paare ausgewählt, bei denen sich X' in Ähnlichkeitslage zum Punkt X befindet.

Beispiel 5. a) Die Addition zweier reeller Zahlen ist eine dreistellige Relation zwischen drei koinzidierenden Mengen $M_1 = M_2 = M_3$ (M_1 ist hier der Körper der reellen Zahlen). Aus der Menge $\mathfrak{M}_3$ aller geordneten Zahlentripel (a, b, c) wird die Untermenge $\mathfrak{R}_3$ derjenigen Zahlentripel ausgewählt, für die $c = a + b$ ist.
Die grundlegenden Eigenschaften der Additionsrelation sind durch das kommutative und assoziative Gesetz gegeben. Sie besagen folgendes:
Gehören die Tripel (a, b, c) zur Menge $\mathfrak{R}_3$, so gehören zu ihr auch die Tripel (b, a, c); gehören die Tripel (a, b, d), (d, c, e), (b, c, f) zur Menge $\mathfrak{R}_3$, so gehören zu ihr auch die Tripel (a, f, e).

b) Der Abstand v des Punktes X von der Ebene E ist eine dreistellige Relation. Sie ist definiert zwischen der Menge M_1 aller Punkte des Raumes, der Menge M_2 aller Ebenen des Raumes und der Menge M_3 aller reellen, nicht negativen Zahlen, die die Maßzahlen der Strecken v sind. Aus der Menge $\mathfrak{M}_3$ aller Tripel (X, E, v) wird die Untermenge $\mathfrak{R}_3$ der Tripel mit dem Abstand v des Punktes X von der Ebene E ausgewählt.

Wir werden den Begriff der Relation nicht weiter erläutern. Wir betrachten nur noch zwei für unsere weiteren Ausführungen notwendige Operationen, die man zur Bildung neuer Relationen aus gegebenen Relationen benötigt.

Die erste Operation ist die Bildung des Durchschnitts zweier Relationen. Gegeben seien $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}'_3$, zwei zwischen den Mengen M_1, M_2, M_3 definierte dreistellige Relationen. Da die Relationen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}'_3$ Untermengen der gleichen Menge, nämlich des Mengenproduktes $M_1 \times M_2 \times M_3$ sind, können wir ihren Durchschnitt $\mathfrak{R}''_3 = \mathfrak{R}_3 \cap \mathfrak{R}'_3$ bilden. Dieser ist ebenfalls eine zwischen den Mengen M_1, M_2, M_3 definierte Relation. Wir erläutern diese Definition an einem Beispiel.

Beispiel 6. Jede der Mengen M_1, M_2, M_3 sei die Menge aller reellen Zahlen. Als dreistellige Relation $\mathfrak{R}_3$ wählen wir die Additionsrelation aus Beispiel 5, d. h. die Menge der Tripel $(a, b, a + b)$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind.
Als Relation $\mathfrak{R}'_3$ wählen wir die Multiplikationsrelation; $\mathfrak{R}'_3$ ist die Menge der Tripel (a, b, ab), wobei wieder a, b beliebige reelle Zahlen sind. Der Durchschnitt $\mathfrak{R}''_3 = \mathfrak{R}_3 \cap \mathfrak{R}'_3$ beider Relationen ist die Menge aller derjenigen Tripel, die sowohl zu $\mathfrak{R}_3$ als auch zu $\mathfrak{R}'_3$ gehören. Wir ermitteln sie aus allen reellen Zahlen a, b, für die

$$a + b = ab$$

gilt. Die Ermittlung des Durchschnitts kann in diesem konkreten Falle auf die Lösung einer einfachen Gleichung mit zwei Variablen zurückgeführt werden. Die Lösungsmenge ist durch die Gleichung

$$b = \frac{a}{a - 1}$$

gegeben; sie ist definiert für die Menge aller reellen Zahlen $a \neq 1$.

Die zweite Operation ist die Bildung der sog. induzierten Relation.
Es sei z.B. $\mathfrak{R}_3$ eine zwischen den Mengen M_1, M_2, M_3 definierte dreistellige Relation. Wenn wir zu jedem Tripel $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}_3$, das Zahlenpaar $(x_1; x_2)$ bilden, so bilden diese Zahlenpaare eine Untermenge des Mengenproduktes $M_1 \times M_2$.
Das ist eine zwischen den Mengen M_1, M_2 definierte Relation $\mathfrak{R}_2$. Sie wird als die in die Mengen M_1, M_2 durch die Relation $\mathfrak{R}_3$ induzierte Relation bezeichnet. Ebenso induziert die Relation $\mathfrak{R}_3$ auch in die Mengen M_1, M_2, M_3 eine Relation $\mathfrak{R}'_3 = \mathfrak{R}_3$.
Es sei M_4 eine weitere, von den vorhergehenden verschiedene oder mit einigen von ihnen identische Menge. Wir bilden alle Tripel (x_1, x_2, x_4), wobei $(x_1; x_2)$ ein Zahlenpaar von $\mathfrak{R}_2$ und x_4 ein beliebiges Element von M_4 ist. Die Menge $\mathfrak{R}''_3$ aller dieser Tripel (x_1, x_2, x_4) ist eine in die Mengen M_1, M_2, M_4 durch die Relation $\mathfrak{R}_3$ induzierte Relation.

Dazu zwei Beispiele.

Beispiel 7. a) Es sei M_1 die Menge aller Quadrate in einer Ebene, M_2 die Menge aller Kreise in derselben Ebene und M_3 die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen. Die Relation $\mathfrak{R}_3$ besteht aus den Tripeln (x_1, x_2, x_3), wobei x_3 die Zahl ist, die wir durch Subtraktion der Maßzahl x_2 des Kreisdurchmessers von der Maßzahl x_1 der Seitenlänge des Quadrates erhalten.

Die Relation $\mathfrak{R}_3$ induziert in die Mengen M_1, M_2 die Relation $\mathfrak{R}_2$, die aus allen Zahlen-

paaren $(x_1; x_2)$ besteht, bei denen die Maßzahl des Kreisdurchmessers x_2 der Maßzahl der Seitenlänge des Quadrates x_1 zugeordnet ist.
Entsprechend induziert die Relation $\mathfrak{R}_3$ auch in die Mengen M_2, M_3 die Relation $\mathfrak{R}'_2$, die aus allen Zahlenpaaren $(x_2; x_3)$ besteht, wobei x_2 die Maßzahl eines Kreisdurchmessers und x_3 eine beliebige nichtnegative reelle Zahl ist.

b) Es sei M_1 die Menge aller Schaffner eines Verkehrsunternehmens, M_2 die Menge aller Wagen, M_3 die Menge aller Strecken und M_4 die Menge aller Tage eines Monats. Die zwischen den Mengen M_1, M_2, M_3 definierte Relation $\mathfrak{R}_3$ besteht aus den Tripeln (x_1, x_2, x_3) und gibt an, dass der Schaffner x_1 monatlich im Wagen x_2 auf der Strecke x_3 eingesetzt wird.
Die zwischen den Mengen M_2, M_3, M_4 definierte Relation $\mathfrak{R}'_3$ besteht aus den Tripeln (x_2, x_3, x_4) und gibt an, dass der Wagen x_2 am Tage x_4 auf der Strecke x_3 eingesetzt wird.

Wir bilden die Relationen $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}'_4$, die durch die Relationen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}'_3$ in die Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 induziert werden. Das Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) ist ein Element der Relation $\mathfrak{S}'_4$, weil der Wagen x_2 am Tage x_4 auf der Strecken x_3 eingesetzt wird, wobei x_1 ein beliebiger Schaffner ist. Ähnlich bilden wir die induzierte Relation $\mathfrak{S}_4$.

Die Bedeutung der induzierten Relation ist leicht zu erkennen, wenn wir den Durchschnitt $\mathfrak{S}''_4 = \mathfrak{S}_4 \cap \mathfrak{S}'_4$ bilden. Die Relation $\mathfrak{S}''_4$ besteht offenbar aus allen Quadrupeln (x_1, x_2, x_3, x_4), die sowohl zu $\mathfrak{S}_4$ als auch zu $\mathfrak{S}'_4$ gehören, und gibt an, dass der Schaffner x_1 am Tage x_4 im Wagen x_2 auf der Strecke x_3 eingesetzt wird.

Das Beispiel 7b) zeigt, dass mit Hilfe des Durchschnitts und der induzierten Relation aus gegebenen Relationen neue gebildet werden können. Nachstehend noch zwei Beispiele aus der Mathematik.

Beispiel 8. Beim Lösen algebraischer Gleichungen wird häufig eine Variable aus zwei Gleichungen eliminiert, so z.B. y aus den Gleichungen

$$2x + 3y = 1 \qquad ; \qquad y = x^2 \tag{3a,3b}$$

Die Gleichung (3a) bestimmt eine binäre Relation $\mathfrak{R}_2$, die zwischen den Mengen $M_1, M_2 = M_i$ definiert ist (M_1 ist der Körper der reellen Zahlen). Entsprechend gibt die Gleichung (3b) die zwischen den gleichen Mengen $M_1, M_2 = M_i$ definierte Relation $\mathfrak{R}'_2$ an. Wir bilden den Durchschnitt $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}'_2$.

Diese Relation enthält alle Zahlenpaare $(x; y)$, die beide Gleichungen (3 a) und (3 b) erfüllen. Die durch $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}'_2$ in die Mengen M_1 induzierte Relation $\mathfrak{R}_1$, enthält alle reellen Zahlen x, die die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{4}$$

erfüllen. Die Wurzeln der Gleichung (4) sind die Zahlen $\frac{1}{3}$, -1. Sie bilden die Relation $\mathfrak{R}_1$ eine Untermenge der Menge M_1.

Beispiel 9. Aus der Geometrie ist die Operation des Hintereinanderausführens von Ab-

bildungen bekannt. Auch diese Operation kann als Bildung induzierter Relationen aufgefasst werden. Es seien M_1, M_2, M_3 drei identische Mengen, die aus allen Punkten einer gegebenen Ebene E bestehen. Die Verschiebung (Translation) in der Ebene E ist eine binäre Relation $\mathfrak{R}_2$ zwischen den Mengen M_1 und M_2.
Eine andere Verschiebung in der Ebene sei die Relation $\mathfrak{R}'_2$ zwischen den Mengen M_2 und M_3. Wir bilden,die Relationen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}'_3$, die durch die Relationen $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}'_2$ in die Mengen M_1, M_2, M_3 induziert werden.

Weiter bilden wir den Durchschnitt $\mathfrak{S}''_3 = \mathfrak{S}_3 \cap \mathfrak{S}'_3$ und die binäre Relation $\mathfrak{R}''_2$, die durch den Durchschnitt $\mathfrak{S}''_3$ in die Mengen M_1, M_3 induziert wird.
Die Relation $\mathfrak{R}''_2$ ist dann diejenige Abbildung, die durch Hintereinanderausführen der Translationen $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}'_2$ entsteht. Der Beweis dieser Behauptung ist einfach und kann dem Leser überlassen werden.

1.2 Die mathematischen Bestimmungsaufgaben

Bevor wir den Begriff der mathematischen Aufgabe endgültig definieren und den Begriff ihrer Lösung abgrenzen, zeigen wir noch an einigen Beispielen die Formulierung mathematischer Aufgaben mit Hilfe des Begriffs der Relation. Anhand dieser Beispiele werden wir dann zur endgültigen Definition kommen.

Beispiel 10. Es sind sämtliche rationale Zahlen x zu bestimmen, die die Gleichung

$$ax + b = 0 \tag{5}$$

erfüllen; a und b sind gegebene reelle Zahlen.

Wir bezeichnen mit $\Omega = M_1$ den Körper der rationalen Zahlen. Es ist dies der Grundbereich für die Lösung der Gleichung (5). Die Lösung ist eine bestimmte Untermenge $\mathfrak{R}_1$ der Menge Ω, wobei diese Untermenge durch die Gleichung (5) gegeben ist. Die Untermenge $\mathfrak{R}_1$ kann durch Mengenoperationen folgendermaßen aus anderen Relationen ermittelt werden:

Wir bezeichnen mit M_2 den Körper der reellen Zahlen und bilden zwischen den Mengen M_1, M_2 zwei binäre Relationen, und zwar die Relation $\mathfrak{R}_2$ als Menge aller Zahlenpaare $(x; ax + b)$ und die Relation $\mathfrak{R}'_2$ als Menge aller Zahlenpaare $(x; 0)$.
In beiden Fällen durchläuft x sämtliche rationalen Zahlen. $\mathfrak{R}''_2$ ist der Durchschnitt $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}'_2$ denn die Relation $\mathfrak{R}_1$ ist die in die Menge $\Omega = M_1$ induzierte Relation $\mathfrak{R}''_2$.

Diese Lösung des Problems entspricht der graphischen Lösung der Gleichung (5). Wenn wir dem Zahlenpaar $(x; y)$ aus den reellen Zahlen x, y den Punkt in der Ebene zuordnen, der in dem gegebenen Koordinatensystem die Koordinaten $(x; y)$ hat, so ist die Relation $\mathfrak{R}_2$ die durch den Punkt gehende Gerade $y = ax+b$, wobei die erste Koordinate rational ist.
Die Relation $\mathfrak{R}'_2$ ist durch die Abszisse x (in der Gleichung der Abszissenachse $y = 0$) gegeben, wobei die erste Koordinate rational ist. Die Relation $\mathfrak{R}''_2$ ergibt sich als gemeinsamer Punkt beider Geraden, da beide die rationale Koordinaten: haben.

Beispiel 11. Gesucht werden die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$2x - 3y = 1 \tag{6}$$

Der Grundbereich $\Omega = M_1$ ist in diesem Falle die Menge aller geordneten Paare ganzer Zahlen $(x; y)$. Sie ist eigentlich das Mengenprodukt $M_2 \times M_2$, wobei M_2 die Menge der ganzen Zahlen ist.
Die Relation $\mathfrak{R}_1$ ist eine Untermenge der Menge Ω, die mit Hilfe der Gleichung (6) ermittelt wird. Wir bestimmen $\mathfrak{R}_1$ wieder als einstellige Relation durch die geeignete induzierte binäre Relation.

Aus den Mengen M_1, M_2 bilden wir zuerst die binäre Relation $\mathfrak{R}_2$, die aus allen Zahlenpaaren $((x; y); y + 1)$ besteht. Weiter bilden wir die Relation $\mathfrak{R}'_2$ aller Zahlenpaare $((x; y); z)$, wobei z alle geraden Zahlen und $(x; y)$ alle Zahlenpaare von M_1 durchläuft. Die Relation $\mathfrak{R}_1$ ist der in die Menge M_1 induzierte Durchschnitt $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}'_2$. Wenn schließlich $(x; y)$ die Lösung der Gleichung (6) ist, so ist $y + 1 = (3y + 1) - 2y = 2x - 2y$ eine gerade Zahl. Wenn umgekehrt $y + 1$ eine gerade Zahl ist, sind die Zahlen $x = y + \frac{y+1}{2}$, y die Lösungen der Gleichung (6).

Die mit der Lösung unbestimmter (diophantischer) Gleichungen vertrauten Leser haben sicher erkannt, dass sich die Relationen $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}'_2$ bei der elementaren Lösung der Gleichung (6) dann ergeben, wenn wir nicht den Begriff der Kongruenz verwenden.

Beispiel 12. Es sind alle reellen Funktionen $y = f(a)$ von einer reellen Variablen zu bestimmen, die die Gleichung

$$\frac{1}{x+a} = 1 + \frac{1}{x-a} \tag{7}$$

erfüllen.
Anders ausgedrückt heißt das: die Gleichung (7) soll im Bereich der reellen Zahlen mit einem reellen Parameter a gelöst werden.

Die Menge $\Omega = M_1$ ist in diesem Falle die Menge aller reellen Funktionen $x = f(a)$ einer reellen Variablen a. Die Relation $\mathfrak{R}_1$ ist durch die Gleichung (7) gegeben.
Jede zur Relation $\mathfrak{R}_1$ gehörende Funktion $x = f(a)$ (d.i. jede Lösung der gegebenen Aufgabe) gehört zur Relation $\mathfrak{R}'_1$. Diese ist, wie man leicht aus der Gleichung (7) herleiten kann, durch die Gleichung

$$x^2 = a^2 - 2a \tag{7'}$$

und durch die Menge Ω definiert. Eine Funktion ist bekanntlich eindeutig gegeben durch ihren Definitionsbereich und durch die eindeutige Zuordnung der Werte der abhängigen Variablen zu denen der unabhängigen Variablen. Der Gleichung (7') entsprechen unendlich viele Funktionen der Form

$$x\sqrt{a^2 - 2a} \qquad \text{oder} \qquad x = -\sqrt{a^2 - 2a} \tag{8a,8b}$$

Ihr maximaler Definitionsbereich ist die Menge M aller reellen Zahlen a, für die gilt $a(a-2) \geq 0$ (d.h. $a \leq 0$ oder $a \geq 2$).[1]

Von den Elementen der Menge $\mathfrak{R}_1'$ gehören aber zu $\mathfrak{R}_1$ nur diejenigen, für welche $x+a \neq 0$ und $x-a \neq o$ ist. Es sind dies die durch die Gleichungen (8a) und (8b) gegebenen Funktionen, für die der maximale Definitionsbereich die Menge M
$\{0\}$ (Menge M ohne die Menge, die aus der Zahl 0 besteht) ist.
$\mathfrak{R}_1$ ist dann die gesuchte Untermenge der Menge $\mathfrak{R}_1'$.

Beispiel 13. Es ist die Menge aller Punkte der Ebene E zu bestimmen, die von zwei gegebenen in der Ebene E liegenden und sich schneidenden Geraden p und q den gleichen Abstand haben.
Der Grundbereich $\Omega = M_1$ ist in diesem Falle die Menge aller Punkte der Ebene E. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}_3$ die durch die Mengen $M_1, M_2, M_3 = M_2$ definierte dreistellige Relation.
M_2 ist hierbei die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen. Die Relation $\mathfrak{R}_3$ ist die Menge aller Tripel (X, u, v), wobei X ein Punkt der Ebene E ist und mit u, v die Abstände des Punktes X von den Geraden p, q bezeichnet werden.

Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{R}_2$ die zwischen den Mengen M_2, M_3 definierte Relation, und zwar für gleiche nichtnegative Zahlen $(u = v)$. Schließlich bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_3$ die in die Mengen M_1, M_2, M_3 induzierte Relation $\mathfrak{R}_2$. Die Relation $\mathfrak{R}_3 \cap \mathfrak{S}_3$ induziert in die Menge M_1 die Relation (Untermenge) $\mathfrak{R}_1$, und diese ist der gesuchte geometrische Ort.

Auch in diesem Falle steckt die Methode zur Ermittlung der Relation $\mathfrak{R}_1$ eigentlich schon im Text der Aufgabe. Es muss noch vermerkt werden, dass in Bezug auf den Grundbereich die Formulierungen der Aufgabe geändert werden können.
Es ist z.B. möglich, Ω als Menge bestimmter geometrischer Örter (Untermenge der Ebene E) anzugeben. Wenn wir Ω als Menge aller Kreise wählen, so ist die Aufgabe unlösbar. Mit Ω als Menge aller Kegelschnitte der Ebene hat die Aufgabe eine einzige Lösung, nämlich den ausgearteten Kegelschnitt, der aus einem Paar sich schneidender Geraden besteht.[2]

Beispiel 14. In der Ebene E ist die Strecke AM gegeben. Es ist mittels der euklidischen Konstruktion ein Quadrat $ABCD$ in der Ebene so zu konstruieren, dass der Punkt M der Mittelpunkt der Seite BC ist.

Der Grundbereich $\Omega = M_1$ ist die Menge aller Punkte der Ebene E. Wir bezeichnen mit M_2 die Menge aller nichtnegativen (reellen) Zahlen und bilden drei Relationen: erstens die dreistellige Relation $\mathfrak{R}_3$ zwischen den Mengen $M_1, M_2, M_3 = M_2$, die alle Tripel (X, u, v) enthält, wobei X ein Punkt von M_1, $u = AX$, $v = MX$ ist.

[1] Es muss beachtet werden, dass eine Funktion einerseits durch die Zuordnungsvorschrift (Gleichung), andererseits durch ihren Definitionsbereich gegeben ist. Zwei Funktionen mit derselben Gleichung, aber verschiedenen Definitionsbereichen sind somit verschieden.

[2] Die geänderte Formulierung lautet: Es ist die Menge aller Kreise (Kegelschnitte) der Ebene zu bestimmen, für die jeder Punkt den gleichen Abstand von den sich schneidenden Geraden p und q hat.

Die zweite zu bildende Relation ist die binäre Relation $\mathfrak{R}_2$, zwischen den Mengen M_2, M_3. Sie ist durch die Gleichung $u = 2v$ gegeben. Die dritte Relation ist die binäre Relation $\mathfrak{R}'_2$ zwischen den Mengen M_2, M_3, die durch die Gleichung $u^2 + v^2 = AM^2$ gegeben ist.

Wir bilden die Relationen $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}'_3$, die durch $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}'_2$ in die Mengen M_1, M_2, M_3 induziert werden. Der Durchschnitt $\mathfrak{R}_3 \cap \mathfrak{S}_3 \cap \mathfrak{S}'_3$ induziert in die Menge M_1 die Relation $\mathfrak{R}_1$. Diese Menge enthält den Eckpunkt B aller gesuchten Quadrate.

In allen fünf Beispielen (10 bis 14) waren eine nichtleere Menge Ω (Grundbereich) und eine endliche Zahl von Relationen gegeben. Aus diesen wurde durch gegebene Mengenoperationen die Untermenge $\mathfrak{R}_1$ der Menge Ω gebildet. Dies wird als mathematische Aufgabe bezeichnet.

Es ergibt sich daraus folgende Definition:

Es ist eine nichtleere Menge Ω gegeben. Als mathematische Bestimmungsaufgabe bezeichnen wir die Bildung ihrer Untermenge $\mathfrak{R}_1$ aus einer endlichen Zahl gegebener Relationen mittels gegebener Mengenoperationen.

Die Menge Ω ist der sogenannte Grundbereich, die Menge $\mathfrak{R}_1$ die sogenannte Lösungsmenge. Ist die Menge $\mathfrak{R}_1$ leer, so bezeichnen wir die Aufgabe als unlösbar (oder nicht erfüllbar).

Die mathematische Bestimmungsaufgabe kann von zweierlei Art sein; falls wir uns mit der Bildung der Menge $\mathfrak{R}_1$ "begnügen", ist "die Aufgabe gelöst". Falls uns die Angabe dieser Menge nicht genügt und wir die Bildung der Menge ändern, ist dies eigentlich wieder eine neue mathematische Aufgabe.
Diese hat entweder die gleiche Lösungsmenge $\mathfrak{R}_1$, oder ihr Lösungsbereich enthält $\mathfrak{R}_1$ als Untermenge. Diesen Vorgang, bei dem wir aus einer gegebenen Aufgabe eine neue bilden, bezeichnen wir in der Regel als Lösen der Bestimmungsaufgabe.
Die Bezeichnung "Lösung" drückt somit zweierlei aus, einmal die Bezeichnung für jedes der Elemente der Menge im, andererseits wird als Lösung der schrittweise Übergang von einer gegebenen Aufgabe zu einer anderen Aufgabe verstanden.

Es wäre zweckmäßiger, für beide Sachverhalte verschiedene Begriffe zu wählen. Wir wollen jedoch die im Sprachgebrauch üblichen Ausdrücke nicht ändern. Wenn aber z.B. in der Algebra, andere unterschiedliche Bezeichnungen gebräuchlich sind, werden wir diese verwenden.
In einer Aufgabe, die durch eine Gleichung gegeben ist, werden wir wie üblich die Elemente der Mengen $\mathfrak{R}_1$, also die einzelnen Lösungen, als Wurzeln bezeichnen.

Eine grundsätzliche Frage jedoch ist die, wann eine Aufgabe als gelöst anzusehen ist, d.h., wann keine weitere Umformung mehr vorgenommen werden soll.
Auf diese Frage kommen wir noch im Kapitel 2 zurück. Wir empfehlen jedoch den Lesern, beim Studium der Beispiele aus Kapitel 2 nochmals diese allgemeinen Ausführungen über die Lösung mathematischer Aufgaben zu lesen. Sie werden ihnen dann sicher klarer werden.

Zum Schluss dieses Kapitels noch eine Anmerkung:
Wir haben den Begriff der Relation eingeführt, um allgemein und abstrakt das Wesen einer mathematischen Aufgabe und ihrer Lösung zu erläutern.
In den folgenden Ausführungen werden wir den Begriff der Relation nicht konsequent verwenden. Wir werden, wie es in der Schule üblich ist, häufig von den geforderten Bedingungen sprechen, die die gesuchten Objekte zu erfüllen haben. Auf den Begriff der Relation werden wir jedoch immer dann zurückkommen, wenn es um eine grundsätzliche Erläuterung irgendeines Begriffes oder einer Methode geht.

2 Allgemeiner Lösungsweg für Bestimmungsaufgaben

Wie bereits im Kapitel 1 ausgeführt wurde, erfolgt die Lösung einer mathematischen Aufgabe durch Umformung der gegebenen Aufgabe in eine begrenzte Anzahl anderer Aufgaben. Fraglich ist, bei welcher Aufgabe dieser Vorgang beendet sein soll oder, anders ausgedrückt, welche Lösungsmenge (Menge $\mathfrak{R}_1$) als Endziel anzusehen ist.

Wir setzen im folgenden fest, dass die Lösung beendet ist, wenn wir feststellen können,
1. dass die Lösungsmenge leer ist oder
2. das sie mit dem Grundbereich übereinstimmt, und
3. bezeichnen wir die Aufgabe als gelöst, wenn die Lösungsmenge endlich ist und wir ihre Elemente angeben können.

In allen übrigen Fällen muss eine Festlegung darüber getroffen werden, welche Bestimmung der Relation $\mathfrak{R}$ als ausreichend anzusehen ist. Diese Festlegung hängt von der Art der Aufgabe ab.
Sie gibt in der Regel an, dass die Menge $\mathfrak{R}$ zu einer bestimmten Kategorie von Untermengen der Menge Ω gehört.

Zum Beispiel bezeichnen wir die Aufgabe, den geometrischen Ort aller Punkte zu linden, deren Abstand von zwei sich schneidenden Geraden die gleiche Summe ergibt, als gelöst, wenn wir wissen, dass die Menge $\mathfrak{R}_1$ der Umfang eines Rechteckes ist (Vereinigung von vier Strecken).
Ebenso wird die Aufgabe, alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $10^x = 2$ erfüllen, zu bestimmen, als lösbar bezeichnet (wir bezeichnen die Lösung mit dem Symbol $x = \lg 2$).
Die Aufgabe ist lösbar, da eine ausreichende Anzahl von Eigenschaften der binären Relation $10^x = y$ (Exponentialfunktionen oder zugehörige inverse Funktionen) bekannt ist.

Die Festlegung über die Beendigung der Lösung kann im einzelnen erst bei den verschiedenen Arten der Aufgaben erfolgen.

Jeder Lösungsschritt, d.h. der Übergang von der vorhergehenden zur nachfolgenden Aufgabe, kann auf zweierlei Art vorgenommen werden:

a) Beide Aufgaben haben den gleichen Grundbereich $\Omega = \Omega'$ und die gleiche Lösungsmenge $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}'_1$. Solche Aufgaben bezeichnen wir als äquivalente Aufgaben.

b) Beide Aufgaben haben den gleichen Grundbereich $\Omega = \Omega'$; aber die. Lösungsmenge $\mathfrak{R}_1$ der ersten Aufgabe ist in der Lösungsmenge $\mathfrak{R}'_1$ der zweiten Aufgabe enthalten, d.h., es gilt die Inklusion $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}'_1$. Das ist eine Verallgemeinerung von Fall a).

Falls bei der Lösung jeweils die zwei aufeinanderfolgenden Aufgaben äquivalent sind (Fall a), bezeichnen wir die Lösungsmethode als äquivalente Methode. Ist diese Bedingung nicht erfüllt und liegt Fall b) vor, dann sprechen wir von der inklusiven Methode.

In der Regel ist bei der Lösung nicht vorher bekannt, ob es sich um eine äquivalente oder inklusive Methode handelt. Es ist deshalb besser, immer den allgemeineren Fall der inklusiven Methode vorauszusetzen, auch wenn dadurch bestimmte Komplikationen entstehen.

Die erste Phase der Lösung ist beendet, wenn sich nach einer bestimmten Anzahl von Lösungsschritten eine Relation $\mathfrak{S}_1$ (Untermenge von Ω) ergibt, die hinreichend bestimmt ist und von der wir wissen, dass sie die Lösungsmenge, die Relation $\mathfrak{R}_1$, enthält. Dieser Fall liegt vor, wenn die Menge $\mathfrak{S}_1$ endlich ist und alle ihre Elemente bekannt sind. Ihrem Wesen nach ist die Menge $\mathfrak{R}_1$ eine eingeengte Grundmenge, denn es besteht die Inklusion

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \Omega$$

Der oben beschriebene Teil des Lösungsweges wird gewöhnlich als Analyse der Aufgabe bezeichnet. Die Analyse der Aufgabe ist mit der Bestimmung der eingeengten Grundmenge beendet.

Die Menge $\mathfrak{S}_1$ ist das letzte Glied der Kette von Mengen (Relationen), für die die Inklusion gilt

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_1' \subset \mathfrak{R}_1'' \subset ... \subset \mathfrak{S}_1 \tag{9}$$

In Worten kann das logische Schema der Analyse wie folgt ausgedrückt werden:
Wenn das gesuchte Objekt x zur Menge $\mathfrak{R}_1$ gehört gehört es auch zur Menge $\mathfrak{R}_1'$ und weiter zur Menge $\mathfrak{R}_1''$ usw. bis endlich zur Menge $\mathfrak{S}_1$.
Anders ausgedrückt, wenn das Objekt x die gegebenen Bedingungen erfüllt (die durch die Relation $\mathfrak{R}_1$ gegeben sind), erfüllt es auch weitere Bedingungen (gegeben durch die Relation $\mathfrak{R}_1'$) usw., bis es zum Schluss die Endbedingungen (gegeben durch die Relation $\mathfrak{S}_1$) erfüllt.

Dazu ein Beispiel für die Analyse einer Aufgabe.
Beispiel 15. Es sind alle reellen Zahlen an zu bestimmen, die die Gleichung

$$\sqrt{x+1} = 5 - x \tag{10a}$$

erfüllen.

Wir lösen die Gleichung auf die übliche Art, nämlich durch Quadrieren beider Seiten, und erhalten die Gleichung

$$x + 1 = x^2 - 10x + 25 \tag{10b}$$

Zu dieser Gleichung ist folgendes zu sagen: Wenn die reelle Zahl x (das gesuchte Objekt) die Gleichung (10 a) erfüllt, so erfüllt sie auch die Gleichung (10 b); denn jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}_1$, die durch die Gleichung (10 a) gegeben ist, gehört auch zur Menge $\mathfrak{R}_1'$, die durch die Gleichung (10 b) gegeben ist.
Die Gleichung (10 b) formen wir um in

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \tag{10c}$$

Erfüllt eine reelle Zahl die Gleichung (10 b), so erfüllt sie auch die Gleichung (10 c); denn jede Zahl, die zur Menge $\mathfrak{R}_1'$ gehört, die durch Gleichung (10 b) gegeben ist, gehört auch zur Menge $\mathfrak{R}_1''$, die durch die Gleichung (10 c) gegeben ist. Nach der Formel für die Lösung einer quadratischen Gleichung gilt

$$x_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24} = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} \tag{10d}$$

Das bedeutet, dass jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}_1''$, die durch die Gleichung (10 c) gegeben ist, zur Menge $\mathfrak{S}_1$ gehört, die aus den Zahlen 8 und 3 besteht. Weil $\mathfrak{S}_1$ eine endliche Menge ist, deren Elemente wir kennen, ist damit die Analyse beendet.

Bei der Analyse haben wir schrittweise die gegebene Aufgabe umgeformt, bei der die gesuchte Menge durch die Gleichung (10 a) gegeben war. Dabei ergaben sich neue Aufgaben, deren Lösungsmengen $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_1''$, $\mathfrak{S}_1$ der Reihe nach durch die Gleichungen (10 b), (10 c), (10 d) gegeben waren.

Kehren wir wieder zur allgemeinen Erklärung der Lösung von Bestimmungsaufgaben zurück. Wenn wir die eingeengte Grundmenge $\mathfrak{S}_1$ gefunden haben, so ist es erforderlich, festzustellen, ob $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1$ ist oder, falls $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{R}_1$, welche Elemente aus $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{R}_1$ gehören.
Diesen Teil der Lösung der Aufgabe bezeichnen wir als Kontrolle oder Probe. Ist die Menge $\mathfrak{S}_1$ endlich, so stellen wir nacheinander fest, ob alle ihre Elemente zur Menge $\mathfrak{R}_1$ gehören (deshalb der Ausdruck: Probe).

Ist die Menge $\mathfrak{R}_1$ unendlich, so ist in der Regel ein komplizierteres Vorgehen nötig, das sich nach dem Typ der Aufgabe richtet. Vermuten wir, dass $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1$, sind wir bestrebt, nachzuweisen, dass außer der Inklusion (9) auch die Inklusion

$$\mathfrak{S}_1 \subset ... \subset \mathfrak{R}_1'' \subset \mathfrak{R}_1' \subset \mathfrak{R}_1 \tag{11}$$

gilt.
Diesen Vorgang bezeichnen wir in der Regel als Umkehrung der Analyse. Wir können auch sagen, dass wir zeigen, dass die durch die Analyse gefundenen notwendigen Bedingungen für das gesuchte Objekt x hinreichend sind.

In Ausnahmefällen wird die Analyse mittels Äquivalenzmethode durchgeführt. Dies ist z.B. bei Übungsaufgaben zur Lösung linearer Gleichungen der Fall, deren Koeffizienten Zahlen sind und die keine gebrochen rationalen Ausdrücke enthalten, bei denen die Variable im Nenner auftritt.
Es ist dann von vornherein sicher, dass die Inklusionen (9) und (11) gelten und somit der Fall $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1$, vorliegt. In diesem Fall erübrigt sich die Probe. In jedem anderen Falle aber, wenn wir also bei der Analyse die Inklusionsmethode anwenden, ist die Probe ein unbedingt erforderlicher Teil der Lösung.

Die Probe für Beispiel 15 führen wir aus, indem wir die Zahlen 8 und 3 in die Gleichung (10 a) einsetzen. Wir erhalten

$$\sqrt{8+1} = 3, \quad 5-8 = 3, \quad 3 \neq -3$$
$$\sqrt{3+1} = 2, \quad 5-3 = 2, \quad 2 = 2$$

Es ist also $\mathfrak{S}_1 = \{8, 3\}$, aber $\mathfrak{R}_1 = \{3\}$.

Weitere Beispiele von Analysen und Proben:

Beispiel 16 . Es ist eine Strecke AB und eine zu ihr parallele Gerade p gegeben ($p \neq AB$). Ein Punkt X soll die Gerade p durchlaufen. Es ist die Menge aller Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke ABX zu bestimmen.

Der Grundbereich Ω ist die Menge aller Punkte der euklidischen Ebene pA. Wenn ein Punkt Y Mittelpunkt eines Kreises ist, der dem Dreieck ABX umbeschrieben ist, so liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB.
Anders ausgedrückt, wir bilden zur gegebenen Aufgabe die neue Aufgabe, die Mittelpunkte der Menge aller Kreise zu bestimmen, die durch die Punkte A und B gehen. Diese Relation $\mathfrak{S}_1$ ist aus einem geometrischen Satz bekannt. Die Analyse ist deshalb beendet. Die Mittelsenkrechte o der Strecke E ist der eingeengte Grundbereich $\mathfrak{S}_1$:

Es ist nun erforderlich, eine Probe durchzuführen. Wir wählen einen beliebigen Punkt Y der Geraden o und prüfen, ob er zu der gesuchten Menge $\mathfrak{R}_1$ gehört, d.h., ob der Punkt Y der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreieckes ABX ist.
Wir zeichnen also den Kreis k_y (Mittelpunkt Y, Radius YA), der durch den Punkt B geht, und suchen seine Schnittpunkte mit der Geraden p.
Falls sich wenigstens ein solcher Schnittpunkt ergibt, gehört der Punkt Y zur Menge $\mathfrak{R}_1$.

Liegt der Punkt Y in der zur Halbebene pA entgegengesetzten Halbebene, so schneidet der Kreis k_y die Gerade p in zwei Punkten. Liegt der Punkt Y in der Halbebene pA, so hat der Kreis k_y mit der Geraden p nur dann wenigstens einen gemeinsamen Punkt, wenn $AY \geq YQ$, wobei Q der Schnittpunkt der Geraden o und p ist.
Der Kreis k_y hat also mit der Geraden p dann und nur dann wenigstens einen gemeinsamen Punkt, wenn der Punkt Y auf der Halbgeraden $Y_0(Q)$ liegt, wobei Y_0 der Mittelpunkt des Umkreises des Dreieckes ABQ ist.

Die Menge $\mathfrak{R}_1$ ist somit die Menge aller Punkte der Halbgeraden Y_0Q. Die Probe ist damit beendet.

Damit haben wir auch für Beispiel 16 die Probe gemacht, und zwar durch Aussondern aller der Elemente aus der Menge $\mathfrak{S}_1$ (der Geraden o), die nicht zur Menge $\mathfrak{R}_1$ gehören.

Beispiel 17. Es sind alle reellen Zahlen x, y, z, t zu bestimmen, die folgendes Gleichungssystem erfüllen

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 1 \\ z + t &= 3 \\ t + x &= -1 \end{aligned} \tag{12a}$$

Der Grundbereich Ω ist die Menge aller geordneten Quadrupel (x, y, z, t) von reellen Zahlen.

Das Lösen erfolgt durch schrittweise Elimination der Variablen. Wir eliminieren z.B. zuerst die Variable t aus der dritten und vierten Gleichung von (12a). Die entstehende Gleichung fügen wir mit den ersten zwei Gleichungen von (12a) zu einem neuen System zusammen

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 1 \\ z - x &= 4 \end{aligned} \tag{12b}$$

Das Gleichungssystem (12b) stellt die erste "umgeformte" Aufgabe dar. Jedes Quadrupel (x, y, z, t) aus der Lösungsmenge der Aufgabe (12a) gehört zum Grundbereich $\mathfrak{R}'_1$ der Aufgabe, die wir durch Verbindung der Gleichung $0 \cdot t = 0$ mit den Gleichungen (12b) erhalten.
Einfacher ausgedrückt, enthält die Menge $\mathfrak{R}'_1$ alle Quadrupel (x, y, z, t), bei denen x, y, z reelle Zahlen sind, die die Gleichungen (12b) erfüllen, und t eine beliebige reelle Zahl ist.

Wir eliminieren ferner aus der zweiten und dritten Gleichung von (12b) die Variable z und erhalten eine neue Aufgabe (Gleichungssystem):

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + x &= -3 \end{aligned} \tag{12c}$$

Das Gleichungssystem (12c) ist offensichtlich nicht erfüllbar, weil $x + y = y + x$, aber $2 \neq -3$ ist.
Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}_1$ die Menge, die sich aus allen Quadrupeln (x, y, z, t) zusammensetzt, wobei x, y reelle Zahlen sind, die alle Gleichungen (12c) erfüllen und z, t beliebige reelle Zahlen sind. Die Menge $\mathfrak{S}_1$ ist offensichtlich leer.
Wegen

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}'_1 \subset \mathfrak{S}_1$$

ist auch die Menge $\mathfrak{R}_1$ leer, d. h., die Aufgabe (12a) ist unlösbar. In diesem Falle entfällt die Probe.

Beispiel 18. Wir ändern die Aufgabe 17. Es sind alle Quadrupel reeller Funktionen von vier reellen Variablen $x = f(a, b, c, d)$, $y = g(a, b, c, d)$, $z = h(a, b, c, d)$, $t = f(a, b, c, d)$ zu ermitteln, die folgendes Gleichungssystem erfüllen

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + t &= c \\ t + x &= d \end{aligned} \tag{13a}$$

Der Grundbereich ist in diesem Falle die Menge aller geordneten Quadrupel reeller Funktionen von vier reellen Variablen. Ähnlich wie in Beispiel 17 eliminieren wir 1 aus den Gleichungen (13a). Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z - x &= c - d \end{aligned} \tag{13b}$$

Aus den Gleichungen (13 b) eliminieren wir, ähnlich wie im Beispiel 17 z und erhalten

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + x &= b - c + d \end{aligned} \tag{13c}$$

Wir bezeichnen wieder mit $\mathfrak{R}_1$ die Lösungsmenge der Aufgabe (13a), mit $\mathfrak{S}_1$ die Menge aller geordneten Quadrupel (x, y, z, t) reeller Funktionen der reellen Variablen a, b, c, d, von denen die ersten zwei Funktionen die Gleichungen (13 c) erfüllen und die anderen zwei beliebig sind. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (13 c) erhalten wir die Gleichung

$$a + c = b + d \tag{14}$$

Diese Gleichung sagt zwar nichts über die Funktionen x, y aus, aber sie bestimmt ihre Grundmenge Δ. Ergebnis der Analyse:
Die Relation $\mathfrak{S}_1$ ist die Menge der geordneten Quadrupel reeller Funktionen x, y, z, t von vier reellen Variablen, die in der Menge Δ definiert sind, die sich aus der Gleichung (14) ergibt. Die ersten zwei Funktionen erfüllen hierbei die Gleichungen (13c), die anderen zwei sind beliebig.

Nun führen wir die Probe durch. Wir wählen eine beliebige Funktion x, die in der Menge Δ definiert ist, und bilden die Funktion $y = a - x$. Nach Gleichung (14) ist dann auch die zweite Gleichung von (13 c) erfüllt.
Als Funktionen z, t wählen wir beliebige Funktionen, die in Δ definiert sind. Falls ein derart gebildetes Quadrupel (x, y, z, t) zur Menge $\mathfrak{R}_1$ gehört, muss gelten: $y + z = b$, entsprechend $z = b - y = b - a + x$ und ferner $t + x = d$, entsprechend $t = d - x$.

Die Quadrupel der Funktionen

$$x, \quad y = a - x, \quad z = b - a + x, \quad t = d - x \tag{15}$$

wobei x eine beliebige in der Menge Δ definierte Funktion ist, bilden die Lösungsmenge des Gleichungssystems. Die Lösungsmenge $\mathfrak{R}_1$ ist somit durch die Beziehungen (15) gegeben.
Es kann z.B.

$$x = \frac{a - d}{1 + |a + c| - (b + d)}$$

sein; denn der Nenner des Bruches ist in der Menge Δ immer positiv. Die drei zugehörigen Funktionen ergeben sich wie folgt:

a) Für $a + c \geq 0$ ist $|a + c| = a + c$, d.h.

$$x = a - d, \quad y = d, \quad z = b - d, \quad t = 2d - a$$

b) für $a+c<0$ ist $|a+c| = -(a+c)$, d.h.

$$x = \frac{a-d}{1-2(a+c)} \quad , \quad y = \frac{d-2a(b+d)}{1-2(a+c)}$$
$$z = \frac{b-d+2(b+d)(b-a)}{1-2(a+c)} \quad , \quad t = \frac{2d(1-a-c)-a}{1-2(a+c)}$$

Beispiel 19. Es sind sämtliche reellen Zahlen zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$|x| - |x+| > 1 \tag{16}$$

erfüllen.

Beim Lösen gehen wir so vor, wie es bei derartigen Ungleichungen üblich ist. Die Grundmenge Ω, d. i. die Menge aller reellen Zahlen, unterteilen wir in drei Intervalle $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = [-1, 0)$, $I_3 = [0, \infty)$ und lösen die Ungleichung (16) in jedem dieser Intervalle.

Analyse für das Intervall I_1: Die Ungleichung (16) ersetzen wir durch die Ungleichung $-x - (-x-1) > 1$ oder

$$0 \cdot x + 1 \geq 1 \tag{16a}$$

Da die Ungleichung (16a) offensichtlich nicht erfüllbar ist, entfällt die Probe.

Analyse für das Intervall I_2: Wir ersetzen die Ungleichung (16) durch die Ungleichung $-x - (x+1) > 1$ oder

$$-2x - 1 > 1 \tag{16b}$$

Diese Ungleichung ergibt die eingeengte Grundmenge $x < -1$. Die Probe zeigt, dass keine Zahl zu dieser eingeengten Menge die Ungleichung erfüllt, da alle Zahlen $x < -1$ zum Intervall I_1 gehören.

Analyse für das Intervall I_3: Wir ersetzen die Ungleichung (16) durch die Ungleichung $x - (x+1) > 1$ oder

$$0 \cdot x - 1 > 1 \tag{16c}$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich nicht erfüllbar, und es entfällt deshalb die Probe. Aus den Teilergebnissen ergibt sich zusammengefasst, dass die gegebene Aufgabe unlösbar ist.

Beispiel 20. Es sind sämtliche reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{9x-7}{4-3\sqrt{x+1}} = 2 \tag{17}$$

Wir führen die Analyse mittels der Inklusionsmethode durch. Aus der gegebenen Aufgabe (17) bilden wir schrittweise nachstehende Aufgaben

$$\begin{aligned} 9x-7 &= 8-6\sqrt{x+1} \\ 9x-15 &= -6\sqrt{x+1} \\ 3x-5 &= -2\sqrt{x+1} \\ 9x^2-30x+25 &= 4(x+1) \\ 9x^2-34x+21 &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird durch zwei reelle Zahlen, nämlich 3 und $\frac{7}{9}$, erfüllt. Die Probe zeigt, dass keine der beiden Zahlen Lösung der Gleichung (17) ist, denn $\frac{9\cdot 3-7}{4-3\sqrt{3+1}} = -10 \geq 2$ und der Bruch $\frac{9\cdot\frac{7}{9}-7}{4-3\sqrt{\frac{7}{9}+1}}$ ist nicht definiert.

Beispiel 21. Wir verbinden zwei benachbarte Ecken des Schachbrettes $ABCD$ mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Dadurch entsteht ein Dreieck T (Abb. 1). Es ist festzustellen, wie viele Felder des Schachbrettes keinen Punkt des Dreieckes T in ihrem Inneren enthalten.

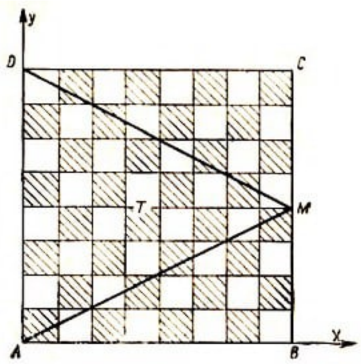


Abb. 1

Das Beispiel 21 ist eine sogenannte Textaufgabe, welche eigentlich mathematisch noch nicht formuliert ist. Mit Textaufgaben bzw. mit der Frage ihrer mathematischen Formulierung werden wir uns im einzelnen im Kapitel 8 beschäftigen.

Wir geben eine mathematische Formulierung der Aufgabe an, die eigentlich bereits die Lösung der Aufgabe beinhaltet, wie das häufig bei Textaufgaben der Fall ist.
In der Aufgabe ist festzustellen, wie viele geschlossene Felder des Schachbretts in die rechtwinkligen Dreiecke ABM und DCM fallen, welche bei der Unterteilung der gesamten Fläche durch das Dreieck $T = \triangle ADM$ entstehen. Da die beiden Dreiecke ABM und DCM kongruent sind, genügt es festzustellen, wie viele Schachfelder in einem von beiden, z.B. im Dreieck ABM, liegen.

Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem. Seine positiven Halbachsen x, y sind die Halbgeraden AB, AD. Die Längeneinheit für beide Achsen ist gleich der Länge eines Schachfeldes.
Da sowohl das Quadrat als auch das Dreieck konvexe Flächen sind, liegt ein bestimmtes Feld des Schachbrettes innerhalb des Dreiecks ABM, wenn die Eckpunkte des Feldes

in diesem Dreieck liegen. Bezeichnet man mit $(x; y)$ die Koordinaten des linken unteren Eckpunktes eines Feldes, so sind die Koordinaten aller vier Eckpunkte dieses Feldes

$$(x; y), \quad (x + 1; y), \quad (x; y + 1), \quad (x + 1; y + 1)$$

Die Gerade durch A und M hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$. Die Bedingungen für die Eckpunkte lauten somit

$$0 \leq x \leq 7, \quad 0 \leq y \leq 7, \quad y \leq \frac{1}{2}x, \quad y + 1 \leq \frac{1}{2}x \tag{18}$$

Die mathematische Formulierung der Aufgabe lautet also wie folgt:
Es sind alle geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen zu suchen, welche die Ungleichungen (18) erfüllen.

Der Grundbereich Ω ist die Menge aller geordneten Paare ganzer Zahlen. Die Relation ist durch die Formulierung der Aufgabe gegeben, d.h. durch das System der Ungleichungen (18). Die Lösungen stellen wir in einer Tabelle zusammen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-	-	0	0	0; 1	0; 1	0; 1; 2	0; 1; 2

Bei der Aufstellung der Tabelle können wir die dritte Ungleichung, die sich aus der vierten ergibt, weglassen. Ferner können wir auf den rechten Teil der zweiten Ungleichung verzichten, da sich dieser schon aus der dritten und ersten Ungleichung ergibt. Es genügt also, die Ungleichung $y \geq 0$ und die erste und die vierte Ungleichung, die in der Form $y \leq \frac{1}{2}x - 1$ angegeben werden kann, beizubehalten.

Wir erhalten zwölf, durch die folgenden unteren linken Eckpunkte bestimmte Quadrate: $(2; 0)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 1)$, $(5; 0)$, $(5; 1)$, $(6; 0)$, $(6; 1)$, $(6; 2)$, $(7; 0)$, $(7; 1)$, $(7; 2)$.
Die gleiche Anzahl Schachfelder liegt im Dreieck DCM. Insgesamt sind es somit 24 Felder.

Mit Beispiel 21 beenden wir vorläufig die Beispiele für Bestimmungsaufgaben. Diese Beispiele zeigten,

a) wie aus dem eingeengten Grundbereich, der sich durch die Analyse ergibt, durch die Probe die Lösungsmenge der Aufgabe entnommen werden kann (Beispiel 15, 16, 18);

b) wie die Unlösbarkeit einer Aufgabe festgestellt werden kann.
Es ist möglich, dass sich durch die Analyse ein leerer Grundbereich ergibt. In diesem Fall ist die Aufgabe unlösbar, und die Probe entfällt (Beispiel 17, 19).
Andererseits kann es vorkommen, dass zwar die eingeengte Lösungsmenge $\mathfrak{S}_1$ nicht leer ist, die Probe jedoch ergibt, dass kein Element von $\mathfrak{S}_1$ Lösung der Aufgabe ist (Beispiel 20).

c) Schließlich kann der Fall eintreten (Beispiel 21), was im ersten Augenblick erstaunlich erscheinen mag, dass die Formulierung der Aufgabe bereits die Lösung ist und dass es nicht notwendig ist, die Aufgabe "umzuformen".

3 Beweis- und Existenzaufgaben

Bei den bisher behandelten Aufgaben waren ausnahmslos Objekte mit gegebenen Eigenschaften zu bestimmen. Außer diesen Bestimmungsaufgaben gibt es in der Mathematik eine Reihe davon anscheinend vollkommen verschiedener Aufgabentypen.
Es sind dies die verschiedenen Beweisaufgaben. Im Abschnitt 1 wurde bereits erwähnt, dass diese auf Bestimmungsaufgaben zurückgeführt werden können. Dazu vorerst einige Beispiele.

Beispiel 22. Es ist die folgende Formel zu beweisen:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} \tag{19}$$

Die Aufgabe ist nicht richtig formuliert; denn die Formel (19) gilt z.B. nicht für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\beta = \frac{\pi}{4}$ u.ä. Richtig formuliert, lautet die Aufgabe:

Es ist nachzuweisen, dass die Formel (19) für alle reellen Zahlen $x = \alpha, \beta$ gilt, die keine für die Funktion $\tan x$ unzulässigen Werte annehmen und für die außerdem $(\alpha+\beta)$ kein unzulässiger Wert ist.
Wir bezeichnen dabei eine reelle Zahl x als zulässigen Wert, wenn sie nicht im Definitionsbereich der Funktion $\tan x$ liegt. Unzulässige Werte sind dabei auch $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, wenn k alle ganzen Zahlen durchläuft.

Diese Formulierung der Aufgabe zeigt deutlich, aus welcher anderen Aufgabe sie entstanden ist, nämlich aus der Aufgabe, alle reellen Zahlen α, β zu bestimmen, für welche die Gleichung (19) gilt. Die beiden Aufgaben unterscheiden sich dadurch, dass in der Beweisaufgabe bereits die Lösungsmenge angegeben wird. Es entfällt deshalb die Analyse, und die Lösung beschränkt sich auf die Durchführung der Probe.

Wir sehen nun klar, aus welchem Grunde der ursprüngliche Wortlaut der Aufgabenstellung von Beispiel 22 fehlerhaft war. Es war gefordert, eine Probe durchzuführen, ohne dass die Lösungsmenge bekannt war.

Beispiel 23. Es ist zu beweisen, dass für beliebige positive Zahlen a, b, c die folgende Ungleichung gilt

$$a+b+c \geq 2\sqrt{c(a+b)} \tag{20a}$$

Offensichtlich handelt es sich dabei eigentlich um eine Bestimmungsaufgabe, bei der alle positiven Zahlen a, b, c zu suchen sind, die die Ungleichung (20a) erfüllen. Aus dem Text der Aufgabe geht unmittelbar hervor, dass der Grundbereich gleichzeitig auch die Lösungsmenge ist.

Wir führen den Beweis auf die übliche Art. Aus der Ungleichung (20a) erhalten wir durch Potenzieren

$$(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b) \tag{20b}$$

und weiter durch Umformen

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc \geq 0 \tag{20c}$$

$$(a+b-c)^2 \geq 0 \tag{20d}$$

Die Ungleichungen (20a), (20b), (20c), (20d) sind eigentlich die Analyse der Aufgabe, alle positiven Zahlen a, b, c festzustellen, die die Ungleichung (20a) erfüllen.
Mit der Ungleichung (20d) ist die Analyse beendet; denn es ist offensichtlich, dass diese Ungleichung von allen reellen Zahlen a, b, c erfüllt wird.
Die Probe - und dies ist der Teil der Lösung, der uns bei der Beweisaufgabe allein interessiert - wird so ausgeführt, dass man die einzelnen Schritte der Analyse in umgekehrter Reihenfolge durchläuft. Wir leiten aus der Ungleichung (20d) die Ungleichung (20c) her, aus dieser (20b) und daraus schließlich (20a).

Beispiel 24. Gegeben sind zwei positive Zahlen als Maßzahlen für die Strecken r und ρ, für die die Beziehung $r \geq 2\rho$ gilt. Es ist zu zeigen, dass ein gleichschenkliges Dreieck existiert, dessen Umkreis den Radius r und dessen Inkreis den Radius ρ hat.

Den Beweis führen wir so, dass wir wenigstens ein solches Dreieck bestimmen. Da es sich um eine weniger bekannte Aufgabe handelt, lösen wir sie in allen Einzelheiten.
Zuerst leiten wir die Formel für den Radius des einem gleichschenkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises her. Es sei ABC das gleichschenklige Dreieck mit der Basis BC (Abb. 2).

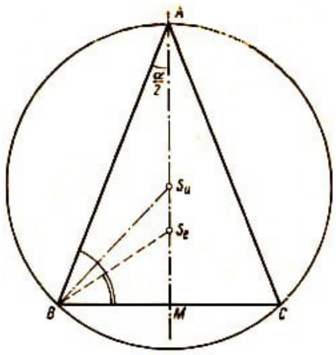


Abb. 2

Wir bezeichnen mit S_u, S_e die Mittelpunkte des umbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises für das Dreieck ABC. Ihre Radien sind r und ρ, der Mittelpunkt der Basis BC wird mit M, der der Basis gegenüberliegende Winkel mit α bezeichnet.
Für $\sin \frac{\alpha}{2}$ setzen wir ε.

Aus dem gleichschenkligen Dreieck ABS_u ergibt sich

$$AB = 2r \cos \frac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

($\angle BAM$ ist ein spitzer Winkel). Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABM folgt

$$BM = AB\varepsilon = 2r\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{22}$$

Wegen $\angle S_eBM = 45° - \frac{\alpha}{4}$, $S_eM = \rho$, ergibt sich weiter

$$\rho = BM \cdot \tan\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = BM\frac{1-\tan\frac{\alpha}{4}}{1+\tan\frac{\alpha}{4}} = BM\frac{\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}}$$
$$= BM\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}} = BM\frac{1 - 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = BM\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Setzen wir BM aus Gleichung (22) ein, so erhalten wir

$$\rho = 2r\varepsilon(1-\varepsilon) \tag{23}$$

Es seien nun zwei Radien r und ρ gegeben, wobei $\rho \geq \frac{r}{2}$ gelte. Falls ein gleichschenkliges Dreieck mit den Radien r und ρ für Umkreis bzw. Inkreis existiert, gilt zwischen dem Sinus des Winkels α und r und rho die Beziehung (23). Die Zahl $\varepsilon = \sin\frac{\alpha}{2}$ ist somit Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + \frac{\rho}{2r} = 0$$

Diese Gleichung hat zwei positive reelle (verschiedene oder zusammenfallende) Wurzeln; denn die Diskriminante $1 - \frac{2\rho}{r}$ ist nicht negativ. Nun wählen wir z.B. die Wurzel

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r}}\right) \tag{24}$$

und bestimmen den zugehörigen spitzen Winkel $\frac{\alpha_0}{2}$ und den Winkel α_0. Das ergibt ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der der Basis gegenüberliegende Winkel α_0 ist und das in den Kreis mit dem Radius r einbeschrieben werden kann. Wir berechnen nun den Radius ρ des Inkreises aus den Formeln (23) und (24). Es ergibt sich

$$\rho' = 2r\varepsilon_0(1-\varepsilon_0) = \frac{r}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r}}\right) = \rho$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel 25. In einer Ebene sind vier verschiedene Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 und ein Punkt A gegeben, der auf keiner dieser Geraden liegt.
Wir wählen elf verschiedene Geraden, die durch den Punkt A gehen. Es ist nachzuweisen, dass mindestens eine dieser elf Geraden die Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 in vier verschiedenen Punkten schneidet.

Für den Beweis suchen wir aus der Menge Ω der gewählten elf Geraden die Geraden aus, die die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen. Wenn irgendeine Gerade des Büschels (A) die Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 nicht in vier verschiedenen Punkten schneidet, so ist sie entweder zu einer Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 parallel, oder sie hat einen gemeinsamen Schnittpunkt mit zwei von ihnen. Im Büschel (A) sind maximal vier verschiedene Geraden der ersten Art und maximal $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ Geraden der zweiten Art möglich; denn dies ist die höchstmögliche Zahl von Schnittpunkten der Geraden p_1, p_2, p_3, p_4.

In einem Büschel (A) können somit höchstens $4 + 6 = 10$ Geraden vorkommen, die die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen. Das gleiche gilt auch für die Menge Ω. Weil die Menge Ω elf verschiedene Geraden enthält, ist darunter mindestens eine Gerade, die die Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 in vier verschiedenen Punkten schneidet.

Beispiel 26. Eine Funktion $f(x)$ von einer reellen Variablen ist im abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ definiert, sie ist jedoch in dem Intervall nicht beschränkt. Das Intervall I ist in eine endliche Anzahl von abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, ..., I_n$ unterteilt.

Es ist zu beweisen, dass die Funktion $f(I)$ in mindestens einem Teilintervall nicht beschränkt ist.

Das gesuchte mathematische Objekt ist in diesem Falle ein Intervall, nämlich eins der Intervalle $I_1, I_2, ..., I_n$, in dem die gegebene Funktion $f(x)$ nicht beschränkt ist. Wir haben somit eigentlich nachzuweisen, dass die Aufgabe im Bereich Ω, der aus den Intervallen $I_1, I_2, ..., I_n$ besteht, lösbar ist.

Der Beweis wird indirekt durchgeführt, indem wir annehmen, die Aufgabe sei unlösbar. Da in jedem der Intervalle $I_1, I_2, ..., I_n$ die Funktion $f(x)$ beschränkt ist, existiert eine positive Zahl α, für die die Beziehung

$$|f(x)| < \alpha \qquad \text{für alle } x \in I_k$$

gilt. Wenn wir mit α die größte der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ bezeichnen, gilt

$$|f(x)| < \alpha \qquad \text{für alle } x \in I_k, k = 1, 2, ..., n$$

Da das Intervall I die Vereinigung der Intervalle $I_1, I_2, ..., I_n$ ist, gilt

$$|f(x)| < \alpha \qquad \text{für alle } x \in I$$

Dies entspricht nicht der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ im Intervall I nicht beschränkt ist.

Beispiel 27. Es ist zu beweisen, dass es keine positive rationale Zahl gibt, deren zweite Potenz gleich drei ist (anders ausgedrückt, dass die Quadratwurzel aus drei keine rationale Zahl ist).

Der Nachweis wird indirekt durchgeführt. Wir setzen voraus, dass eine positive rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, existiert, für die die Beziehung

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \tag{25}$$

gilt, wobei p, q natürliche teilerfremde Zahlen sind.
Aus der Gleichung (25) erhalten wir

$$p^2 = 3q^2 \tag{26}$$

Aus der Gleichung (26) ergibt sich, dass die Zahl 3 ein Teiler der Zahl p^2 und somit auch die Zahl p ist. Es ist somit $p = 3p'$. Nach Einsetzen in (26) erhalten wir $9p'^2 = 3q"2$ oder

$$3p'^2 = q^2 \tag{28}$$

Aus der Gleichung (28) ergibt sich, dass 3 ein Teiler der Zahl q^2 und somit auch der Zahl q ist. Die Zahlen p und q haben also den gemeinsamen Teiler 3. Sie sind somit nicht teilerfremd, und das widerspricht der Voraussetzung.

Bei der obigen Beweisführung setzten wir also voraus, dass die Lösung der Gleichung

$x^2 = 3$ im Bereich der rationalen Zahlen möglich ist und dass die Gleichung eine rationale Wurzel $\frac{p}{q}$ hat. Wir führten die Probe durch, und diese zeigte uns, dass die Voraussetzung falsch war.

Beispiel 28. Es ist zu beweisen, dass es nicht möglich ist, eine Zahlenfolge aufzustellen, die sämtliche reellen Zahlen mit $0 < x < 1$ enthält.
Anders ausgedrückt, es soll bewiesen werden, dass die Menge aller reellen Zahlen aus dem offenen Intervall $(0,1)$ nicht abzählbar ist.

Den Beweis führen wir wieder indirekt, indem wir voraussetzen, dass man eine solche Folge aufstellen kann; und wir zeigen dann, dass diese Voraussetzung falsch ist.

Jede reelle Zahl des Intervalles $(0,1)$ kann im Dezimalsystem ausgedruckt werden

$$0, a_1a_2a_3a_4... \tag{29}$$

wobei $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ die sogenannten Dezimalstellen sind, d.h. Zahlen aus der Menge der Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Andererseits gehört die Dezimalbruchentwicklung

$$1 = 0,9999... = 0,\overline{9} \tag{30}$$

dem Intervall $(0,1)$ an.
Wenn wir daher diese Entwicklung, bei der die Dezimalstellen von einer bestimmten Stelle an immer 9 sind (wie bei der Entwicklung (30)), ausschließen, dann ist jeder Zahl aus dem Intervall $(0,1)$ nur dm Entwicklung (29) zugeordnet und jeder solchen Entwicklung eine einzige Zahl aus dem Intervall $(0,1)$.

Wir setzen voraus, dass sämtliche reellen Zahlen aus dem Intervall $(0,1)$ in der Zahlenfolge $\{\alpha\}$ vorkommen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}... \\ \alpha_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}... \\ \alpha_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}... \\ \alpha_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}... \qquad \text{usw.} \end{aligned} \tag{31}$$

Wir bilden dann die Zahl

$$\beta = 0, b_1b_2b_3b_4...$$

wobei b_i irgendeine der Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ist, jedoch $b_i \neq a_{ii}$ (für $i = 1, 2, 3, 4, ...$).
Wegen der Eindeutigkeit der Dezimalbruchentwicklung ist zu beachten, dass $\beta \neq \alpha_1$, $\beta \neq \alpha_2$, $\beta \neq \alpha_3$, $\beta \neq \alpha_4$, ... ist.
Die Zahl β, welche offensichtlich auch im Intervall $(0,1)$ liegt, kommt also in der Zahlenfolge (31) noch nicht vor, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Auch in diesem Beispiel setzte wir voraus, dass die Aufgabe lösbar ist (dass es also mindestens eine Zahlenfolge mit den geforderten Eigenschaften gibt). Diese Voraussetzung erwies sich dann als falsch.

Beispiel 29. Es ist zu beweisen, dass ein begrenztes ebenes Gebilde nicht zu zwei verschiedenen Symmetriezentren symmetrisch sein kann.

Als ebenes Gebilde bezeichnen wir eine beliebige nichtleere Menge von Punkten, die in der gleichen Ebene liegen. Das ebene Gebilde ist begrenzt, wenn es ganz innerhalb eines geeignet gewählten Kreises untergebracht werden kann.
Der Beweis wird indirekt geführt.

Wir setzen voraus, dass die Aufgabe - ein begrenztes, zu zwei verschiedenen Symmetriezentren symmetrisches ebenes Gebilde zu finden - wenigstens eine Lösung hat. Diese Lösung bezeichnen wir mit U. Entsprechend der Voraussetzung liegt das Gebilde U innerhalb eines bestimmten Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Nach Voraussetzung gibt es ferner zwei verschiedene Symmetriezentren S_1, S_2, deren Entfernung wir mit d bezeichnen ($d > 0$). Wenn A ein beliebiger Punkt des Gebildes U ist, gilt

$$AM < r \tag{32}$$

Wir konstruieren zum Punkt A den in Bezug auf S_1 symmetrischen Punkt A_1 ferner zum Punkt A_1 den in Bezug auf S_2 symmetrischen Punkt A_2. Gemäß der Voraussetzung gehören die Punkte A_1, A_2 zum Gebilde U.
Es lässt sich leicht zeigen, dass der Punkt A_2 diejenige Abbildung des Punktes A ist, die auf der Parallelen zu S_1S_2 liegt, wobei $2S_1S_2 = 2d$ ist (Abb. 3; in dem Dreieck A, A_1, A_2 ist S_1S_2 die Mittelparallele und $A_1A_2 = 2S_1S_2$.

Ist B ein Punkt des Gebildes U, so liegen die Punkte B, B_1, B_2 auf einer Geraden. Es entsteht ein Parallelogramm ABB_2A_2, wobei wieder $BB_2 = AA_2 = 2S_1S_2$ ist).

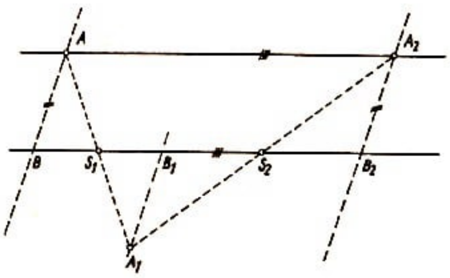


Abb. 3

Führen wir diese Parallelverschiebung n-mal durch, ergibt sich ein bestimmter Punkt A' des Gebildes U, für den die Bedingung

$$AA' = 2dn \tag{33}$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$A'M \geq |AA' - AM| \tag{34}$$

Falls n eine genügend große natürliche Zahl ist, ist $dn > r$. Aus (34), (32), (33) folgt

$$A'M \geq 2dn - AM > 2dn - r > r$$

Das bedeutet aber, dass der Punkt A' nicht innerhalb des Kreises k liegt und somit auch nicht zum Gebilde U gehört. Das aber steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Beispiele 22 bis 29 zeigen deutlich das Wesen der Beweis- und Existenzaufgaben. Die angeführten Beispiele zeigen ferner die Methode ihrer Lösung. Beweis- und Existenzaufgaben ergeben sich aus Bestimmungsaufgaben, wenn die Lösungsmenge teilweise oder vollständig angegeben wird.
In diesem Falle wird nicht eine vollständige Lösung der Aufgabe gefordert (einschließlich Analyse), sondern es ist nur zu beweisen, dass die angegebene Lösungsmenge tatsächlich die Lösungsmenge der Aufgabe ist. Deshalb ist eine vollständige oder teilweise Probe durchzuführen.

Es ist verständlich, dass die Durchführung dieser Probe ohne Analyse oft schwieriger ist als bei der Bestimmungsaufgabe. Wie bereits erwähnt wurde, erfolgt die Probe häufig durch Umkehrung des bei der Analyse angewendeten Vorgehens.
Fehlt die Analyse, so ist dieser Weg nicht möglich, und die Probe muss unabhängig davon durchgeführt werden.

Wir betrachten unter diesem Gesichtspunkt noch einmal die Aufgaben 22 bis 29.
In den Beispielen 22 und 23 war die Lösungsmenge gegeben. Im Beispiel 23 wurde die Probe dadurch erleichtert, dass wir die Analyse durchführten. Ohne diese Analyse, ausgehend von der Ungleichung (20d), wäre ein ausgeklügelter Nachweis für die Gültigkeit der Ungleichung erforderlich. Dieses Vorgehen wird oft völlig unberechtigterweise als synthetisch bezeichnet.

Im Beispiel 24 haben wir durch die Probe festgestellt, dass die Lösungsmenge nicht leer ist. Von dieser Art sind fast sämtliche Existenzaufgaben. Die Probe wird gewöhnlich durch Annahme einer Lösung durchgeführt, wie das im Beispiel 24 der Fall war.
Ganz ähnlich ist auch Beispiel 25. Existenzaufgaben, die durch einen indirekten Beweis gelöst werden, sind sehr selten. In einem solchen Fall setzt man voraus, dass die Lösungsmenge leer ist, und zeigt wie in Beispiel 26, dass diese Voraussetzung falsch ist.

Die letzten drei Beispiele, 27, 28 und 29, sind Muster für Aufgaben, bei denen zu beweisen ist, dass die Lösungsmenge leer ist. Aufgaben dieser Art lösen wir fast ausnahmslos indirekt. Wir setzen voraus, dass mindestens eine Lösung existiert, und stellen einen Widerspruch zu dieser Voraussetzung fest.
Die Lösung einer gegebenen Beweisaufgabe ist eigentlich die Analyse der zugehörigen Bestimmungsaufgabe. Im Beispiel 27 untersuchten wir die möglichen Eigenschaften des Bruches $\frac{p}{q}$ im Hinblick auf die Erfüllung der Gleichung (25).

Durch die Analyse stellten wir fest, dass dieser Bruch in der vorausgesetzten Form nicht Lösung ist, d.h., wir engten den Grundbereich auf die leere Menge ein.

Die Beispiele 22 bis 29 zeigen gleichzeitig, dass kein grundsätzlicher Unterschied zwischen Beweisaufgaben und Bestimmungsaufgaben besteht. Wir können diese wie folgt unterscheiden:
Bei Bestimmungsaufgaben ist ein Teil der Lösungsmenge gegeben, während bei Beweisaufgaben (auch bei Nichtexistenzaufgaben) die gesamte Lösungsmenge bekannt ist.

Nachdem man den engen Zusammenhang zwischen Bestimmungsaufgaben, Beweisaufgaben und Existenzaufgaben erkannt hat, sieht man, dass es überflüssig ist, Unterschie-

de in der Benennung zu machen.
In den folgenden Ausführungen werden wir deshalb nur von Bestimmungsaufgaben sprechen und diese kurz als mathematische Aufgaben bezeichnen.

4 Diskussion einer Menge von mathematischen Aufgaben

Es ergibt sich häufig die Möglichkeit, unendlich viele Aufgaben auf einmal zu lösen. Das ist z.B. dann der Fall, wenn die Methode zur Durchführung der Analyse aller dieser Aufgaben auf eine gemeinsame oder auf zwei bzw. mehrere Arten möglich ist.
In diesen Fällen erfolgt die Einteilung der gegebenen Aufgaben nach der Lösungsmenge. In der Regel ist der Grundbereich aller Aufgaben durch die Mengen $\mathfrak{M}$ und Ω gegeben. Es ist nun erforderlich, die Menge $\mathfrak{M}$ aller Aufgaben so in diejenigen Untermengen $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathfrak{M}_\infty$ zu zerlegen, dass die Menge $\mathfrak{M}_0$ nur die unlösbaren Aufgaben aus $\mathfrak{M}$ enthält und die Menge $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ nur die Aufgaben aus $\mathfrak{M}$ welche n Lösungen haben. Die Menge $\mathfrak{M}_\infty$, enthält nur die Aufgaben mit unendlich vielen Lösungen. Es ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup ... \cup \mathfrak{M}_\infty$$

Diese Klassifikation der Mengen von Aufgaben nach der Lösungsmenge bezeichnen wir als Diskussion der Menge mathematischer Aufgaben.

In der Regel wird der Ausdruck "Diskussion der mathematischen Aufgabe" verwendet; aber die Einzahl ist hier nicht richtig, da es sich eben nicht um eine Aufgabe handelt. In einigen Fällen (s. Beispiel 2) kann man allerdings die Menge der Aufgaben als eine einzige Aufgabe ansehen. Darauf kommen wir später noch zurück. Vorerst führen wir zwei Beispiele an.

Beispiel 30. Im Bereich der reellen Zahlen ist nachstehende Gleichung zu lösen

$$ax^2 + (1 - 2a)x + (a + 1) = 0$$

a eine reelle Variable.

Eine Gleichung der Form (35) bezeichnen wir gewöhnlich als Gleichung mit einer reellen Variablen x und einem (reellen) Parameter a. Genauer ausgedrückt, liefert die Gleichung (35) für allen möglichen reellen Werte von a die Menge $\mathfrak{M}$ aller Gleichungen.
Die Gleichungen sind quadratisch in x, mit einer einzigen Ausnahme; für $a = 0$ liegt eine lineare Gleichung vor. Es bietet sich die gemeinsame Durchführung der Analyse aller quadratischen Gleichungen aus $\mathfrak{M}$ von selbst an. Wir verwenden dazu absichtlich nicht die Lösungsformel für quadratische Gleichungen, sondern arbeiten mit der quadratischen Ergänzung:
Jede reelle Zahl x, welche die Gleichung (35) erfüllt, erfüllt für $a - 1 = 0$ auch die Gleichung

$$a\left(x^2 + \frac{1-2a}{a}x\right) + a + 1 = 0$$

und weiter die Gleichungen

$$a\left(x + \frac{1-2a}{2a}\right)^2 + a + 1 - \frac{(1-2a)^2}{4a} = 0 \quad \text{und} \quad \left(x + \frac{1-2a}{2a}\right)^2 = \frac{1-8a}{4a^2}$$

Bis hierhin haben wir die Analyse für alle Aufgaben von $\mathfrak{M}$, für die $a \neq 0$ ist, gemeinsam durchgeführt. Von nun an ist es erforderlich, die Analyse zu unterteilen:

Ist $(1-8a) \geq 0$, so sind alle möglichen reellen Lösungen der Gleichung (35) durch die Formel

$$x_{1,2} + \frac{1-2a}{2a} = \pm\frac{\sqrt{1-8a}}{2a} \qquad \text{bzw.} \qquad x_{1,2} = \frac{2a-1 \pm \sqrt{1-8a}}{2a} \tag{36a}$$

gegeben.
Ist $(1-8a) < 0$, so existiert keine reelle Zahl x, welche die Gleichung (36) erfüllt, und die Aufgabe (35) ist in diesem Falle unlösbar (die Unlösbarkeit ergab sich eigentlich - wie bereits im Kapitel 3 ausgeführt - dadurch, dass die Lösbarkeit ad absurdum geführt wurde).

Die Analyse ist damit jedoch noch nicht beendet. Es fehlt noch die Analyse für den Fall $a = 0$. Die Gleichung (35) lautet dann $x + 1 = 0$. Ihre einzige mögliche Lösung ist $z = -1$.

Bei der Probe setzen wir den Ausdruck für x aus der Gleichung (36a) in die Gleichung (35) ein. Für $a = 0$ setzen wir $x = -1$ ein.
In allen Fällen stellen wir fest, dass die möglichen Lösungen tat- sächlich zur Lösungsmenge gehören. Daraus folgt bezüglich der Lösbarkeit der Gleichung (35), dass entweder zwei verschiedene Lösungen oder eine einzige auftreten können.

Zur Diskussion, d.h., zur vollständigen Klassifikation der Aufgaben der Menge $\mathfrak{M}$ nach der Anzahl der Lösungen müssen wir noch feststellen, wann die beiden Lösungen von (36a) zusammenfallen. Das geschieht nur für $1 - 8a = 0$ bzw. $a = \frac{1}{8}$. Das endgültige Ergebnis der Diskussion zeigt

Untermenge	Zahl der Lösungen	Parameter a
$\mathfrak{M}_0$	keine	$a > \frac{1}{8}$
$\mathfrak{M}_1$	eine	$a = 0,\ a = \frac{1}{8}$
$\mathfrak{M}_2$	zwei verschiedene	$a < \frac{1}{8}, a \neq 0$

Manchmal verringert sich die Diskussion auf die Unterteilung der Menge $\mathfrak{M}$ in zwei Untermengen, wobei die Untermenge $\mathfrak{M}_0$ nur alle nichtlösbaren, die Untermenge $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ nur alle lösbaren Aufgaben enthält. In unserem Beispiel ergibt sich folgende Tabelle:

Untermenge	Zahl der Lösungen	Parameter a
$\mathfrak{M}_0$	keine	$a > \frac{1}{8}$
$\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$	mindestens eine	$a \leq \frac{1}{8}$

Die Ungleichung $a \leq \frac{1}{8}$, welche die Untermenge $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ charakterisiert, wird in der Regel als Bedingung für die Lösbarkeit der gegebenen Aufgabenmenge bezeichnet.

Die Aufgabe aus Beispiel 30 kann auch anders, und zwar als Aufgabe zur Bestimmung einer unbekannten Funktion formuliert werden. Dazu Beispiel 31.

Beispiel 31. Es sind alle reellen Funktionen $x = f(a)$ von einer reellen Variablen a zu bestimmen, die die Gleichung (35) erfüllen.

Die Analyse der Aufgabe führen wir im Prinzip wie im Beispiel (30) durch. Man erhält zwei Funktionen, die durch die Gleichung (36a) bestimmt sind.
Ihr Definitionsbereich ist der gleiche; er besteht aus den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \frac{1}{8}]$.

Als weitere Lösung finden wir die: Funktion $x = -1$. Ihr Definitionsbereich enthält lediglich die Zahl $a = 0$ (wir überzeugen uns davon, indem wir in (35) $x = -1$ einsetzen. Es ergibt sich $a = 0$). Als Lösung der Aufgabe erhalten wir somit drei Funktionen.

1. $x = \dfrac{2a - 1 + \sqrt{1-8a}}{2a}$ mit dem Definitionsbereich $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{8})$;

2. $x = \dfrac{2a - 1 - \sqrt{1-8a}}{2a}$ mit dem gleichen Definitionsbereich;

3. $x = -1$ mit dem Definitionsbereich $\{0\}$.

Da keine reelle Zahl $a > \frac{1}{8}$ zum Definitionsbereich einer dieser Funktionen gehört, ist die Gleichung (35) für $a > \frac{1}{8}$ unlösbar. Dies ergab sich auch im Beispiel 30.
Entsprechend ermitteln wir auch die Werte von a, für welche die Gleichung (35) eine, d.h. zwei zusammenfallende, oder zwei verschiedene Lösungen hat.

Beispiel 32. Im Bereich der reellen Zahlen ist das Gleichungssystem

$$a^2x + (1-a)y = 0 \qquad , \qquad ax + y = 2a \tag{37}$$

zu lösen, wobei a ein reeller Parameter ist.

Analyse: Wir eliminieren auf übliche Weise y aus beiden Gleichungen (37) und erhalten für x die Gleichung

$$a(2a-1)x = 2a(a-1) \tag{38}$$

Wir müssen nun die Analyse für die verschiedenen Fälle durchführen.
Wenn gleichzeitig $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$ ist, folgt aus der Gleichung (38)

$$x = \frac{2(a-1)}{2a-1} \tag{39a}$$

und aus der zweiten Gleichung von (37) nach Umformung '

$$y = \frac{2a^2}{2a-1} \tag{39b}$$

Für $a = 0$ lautet das Gleichungssystem (37)

$$0 \cdot x + y = 0 \qquad , \qquad 0 \cdot x + y = 0$$

Daraus ergibt sich $y = 0$, während für x jede reelle Zahl eingesetzt werden kann. Ist $a = \frac{1}{2}$, so lautet das Gleichungssystem (37)

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \qquad , \qquad \frac{1}{2}x + y = 1$$

Dieses System ist offensichtlich unlösbar, d.h., auch das Gleichungssystem (37) ist für $a = \frac{1}{2}$ nicht erfüllbar.

Probe. Wenn wir (39a) und (39b) in (37) einsetzen, ist das Gleichungssystem erfüllt. Im Falle $a = 0$ liefert das System (37) alle Zahlenpaare $(x; 0)$.

Aus der Analyse und der Probe ergibt sich folgendes Ergebnis der Diskussion:

Untermenge	Zahl der Lösungen	Parameter a
$\mathfrak{M}_0$	keine	$a = \frac{1}{2}$
$\mathfrak{M}_1$	eine	$a \neq 0, \frac{1}{2}$
$\mathfrak{M}_\infty$	unendlich viele	$a = 0$

Bei dem angegebenen Lösungsweg ergab die Analyse drei Fälle. Jeder von ihnen lieferte eine der Mengen $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_\infty$, und diese sind das Ergebnis der Diskussion. Wählt man einen anderen Lösungsweg für diese Aufgabenmenge, so zeigt sich, dass die Analyse nicht nur auf diese Untermengen der Menge $\mathfrak{M}$ führt.

Wir lösen das Gleichungssystem (37) nach der sogenannten Gleichsetzungsmethode, d.h., wir isolieren y aus der ersten Gleichung von (37)

$$y = \frac{a^2 x}{a-1}$$

Das ist allerdings nur unter der Voraussetzung $a \neq 1$ möglich. Wenn wir y auch aus der zweiten Gleichung von (37) isolieren und beide Ergebnisse gleichsetzen, ergibt sich

$$\frac{a^2 x}{a-1} = 2a - ax$$

Nach Multiplikation mit $a - 1$ und nach Umformung erhalten wir wieder die Gleichung (38). Der weitere Rechengang ist dann der gleiche wie beim ersten Lösungsweg. Zum Schluss untersuchen wir noch den Sonderfall $a = 1$. Das System (37) lautet dafür

$$x + 0 \cdot y = 0 \qquad , \qquad x - y = 2$$

Aus diesem Gleichungssystem erhalten wir $z = 0$, $y = 2$, die eine einzige Lösung, die wir auch aus den Formeln (39), (39b) für $a = 1$ erhalten.

Es ergibt sich somit, dass die Menge $\mathfrak{M}$ der Gleichungen bei der Diskussion wieder in drei disjunkte Untermengen $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_\infty$ zerfällt. Das entspricht dem ersten Lösungsweg. Es ergeben sich keinesfalls vier Untermengen, wie man bei einer oberflächlichen Betrachtung annehmen könnte. Die Unterteilung der Analyse in vier Fälle war lediglich die Folge einer unzweckmäßigen Elimination.

Beispiel 33. ABC ist ein beliebiges Dreieck. Es ist zu beweisen, dass die zum Höhenschnittpunkt V bezüglich der Geraden AB, BC und CA symmetrischen Punkte auf dem Umkreis des Dreieckes ABC liegen.

Diese Beweisaufgabe ergab sich aus der Bestimmungsaufgabe, alle diejenigen Dreiecke zu suchen, bei denen der zum Höhenschnittpunkt bezüglich einer Seite symmetrische Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks liegt. Wir lösen diese Bestimmungsaufgabe.

Es sei ABC das Dreieck, V der Höhenschnittpunkt, V' der in Bezug auf die Gerade AB zu V symmetrische Punkt. Wir setzen voraus, dass der Punkt V' auf dem Umkreis des Dreieckes ABC liegt, und suchen die Bedingungen für dieses Dreieck, bzw. wir analysieren die entsprechende Bestimmungsaufgabe. Die Analyse gliedern wir in drei Fälle:

a) Wenn der Punkt V' mit einem der beiden Eckpunkte A, B zusammenfällt, wenn also z.B. $V' = B$ ist, so ist auch $V = B$, und im Dreieck ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel.

b) Wenn der Punkt V' auf dem Abschnitt des Umkreises liegt, der nicht den Eckpunkt C enthält, und $V' \neq A$, B ist (Abb. 4), so ist (nach dem Satz, dass im Sehnenviereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel stets 180° beträgt) $\angle AV'B = \angle 180° - \angle ACB = 180° - \gamma$.
Da die Punkte V, V' symmetrisch zur Geraden AB sind, ist auch

$$\angle AVB = 180° - \gamma \tag{40}$$

Weil der Punkt V' nicht in der Halbebene ABC liegt, gehört der Punkt V zu dieser Halbebene; α und β sind deshalb spitze Winkel. Daraus ergibt sich

$$\angle VAB = 90° - \beta \quad , \quad \angle VBA = 90° - \alpha \tag{41}$$

Die Zusammenfassung der Gleichungen (40), (41) ergibt

$$\angle VAB + \angle VBA + \angle AVB = 180° \tag{42}$$

und somit die für jedes Dreieck geltende Beziehung.

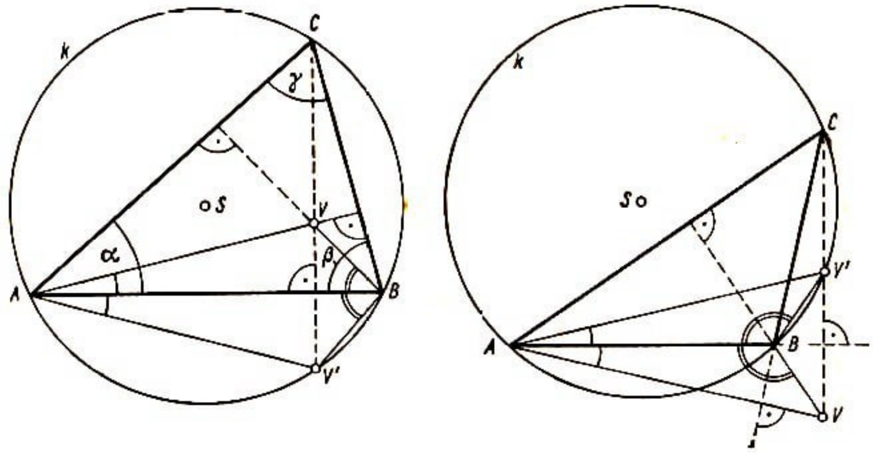


Abb. 4 und 5

c) Liegt der Punkt V' auf demselben Kreisabschnitt wie der Eckpunkt C und ist $V' \neq A, B$ (Abb. 5), so ist $\angle AV'B = \angle ACB = \gamma$ (nach dem Satz, dass Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen gleich sind). Wegen der symmetrischen Lage der Punkte V und V' zur Geraden AB gilt auch

$$\angle AVB = \gamma \tag{43}$$

Weil V' in der Halbebene ABC liegt, gehört V zur anderen Halbebene, und einer der Winkel α, β (in der Abb. 5 ist es der Winkel β) ist ein stumpfer Winkel. Man erhält die Beziehung

$$\angle VAB = \beta - 90^\circ \quad , \quad \angle VBA = 90^\circ + \alpha \tag{44}$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (43), (44) erhalten wir wieder die Gleichung (42).

Wir mussten die Analyse in drei Fälle untergliedern. Da sich aber in keinem Falle einschränkende Bedingungen für das Dreieck ABC ergaben, ist anzunehmen, dass die Lösung der Bestimmungsaufgabe für alle Dreiecke gilt. Davon überzeugen wir uns durch die Probe.
Sie wird durch Umkehrung des Vorgehens bei der Analyse ausgeführt. Diese Umkehrung ist dann die eigentliche Lösung der Beweisaufgabe.

Wir werden am Ende des Kapitels erläutern. warum wir das Beispiel 33 hier einordneten.

Beispiel 34. Bei einem Rechteck sind die Maßzahlen der Seitenlängen a und b, wobei a und b natürliche Zahlen sein sollen. Das Rechteck ist in $a \cdot b$ gleich große Quadrate unterteilt.
Es ist festzustellen, durch wie viele dieser Quadrate die Diagonale des Rechteckes hindurchgeht; dabei muss mindestens ein innerer Punkt eines solchen Quadrates auf der Diagonalen liegen.

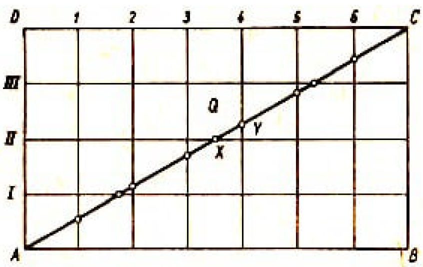


Abb. 6

Die Diagonale AC des Rechteckes $ABCD$ schneidet das Rasternetz in einer endlichen Anzahl von Punkten (in Abb. 6 durch kleine Kreise gekennzeichnet). Zwischen jeweils zwei von diesen Schnittpunkten liegen die inneren Punkte eines der Quadrate (in Abb. 6 liegen zwischen den Punkten X, Y die inneren Punkte des Quadrates Q).
Der erste und der letzte dieser Schnittpunkte sind die Eckpunkte A und C des Rechtecks $ABCD$. Wenn zwischen A und C n Schnittpunkte liegen, so ist die Anzahl der gesuchten Quadrate $n + 1$.

Bis jetzt erfolgte die Lösung aller Aufgaben der Menge $\mathfrak{M}$ gemeinsam (die einzelnen Aufgaben ergeben sich durch verschiedene Werte von a und b). Es ist nun nötig, die Analyse in zwei Fälle aufzugliedern:

a) Auf der Diagonalen AC liegt kein Gitterpunkt des Rasternetzes (als Gitterpunkte bezeichnen wir die Eckpunkte der einzelnen Quadrate). Das ist nur möglich, wenn die Zahlen a und b keinen gemeinsamen Teiler haben.
Die Diagonale AC schneidet dann die senkrechten und die waagerechten Rasterlinien (in Abb.6 bezeichnet mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und I, II, III) immer in von den Gitterpunkten

verschiedenen Punkten. Die Anzahl der Schnittpunkte ist in diesem Falle $n = (a-1)+(b-1) = a+b-2$. Die Anzahl der gesuchten Quadrate ist

$$n + 1 = a + b - 1 \tag{45}$$

b) Die Diagonale AC enthält einige Gitterpunkte des Rasternetzes. Das trifft zu, wenn a und b einen gemeinsamen Teiler haben. Bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler mit δ, so liegen auf der Diagonalen $\delta-1$ innere Gitterpunkte (in Abb. 7 ist $a = 9$, $b = 6$, $\delta = 3$).

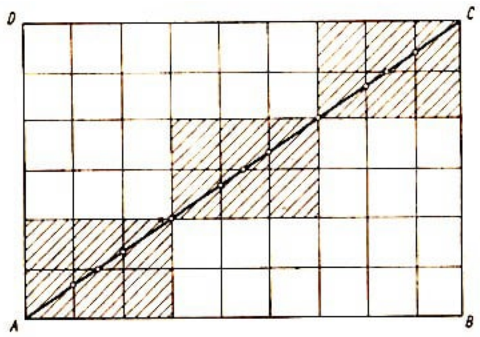


Abb. 7

Die inneren Gitterpunkte, die gleichzeitig Diagonalschnittpunkte sind, unterteilen die Diagonale AC in 6 gleiche Abschnitte, von denen jeder die Diagonale eines Rechteckes mit den Seitenlängen $\frac{a}{\delta}$, $\frac{b}{\delta}$ ist. (In Abb. 7 sind diese Rechtecke schraffiert.) Da die Zahlen $\frac{a}{\delta}$ und $\frac{b}{\delta}$ teilerfremd sind, gilt für jedes der schraffierten Rechtecke das unter Absatz a) ermittelte Ergebnis. Die Gesamtzahl der gesuchten Quadrate beträgt im Fall b) somit

$$\delta\left(\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta} - 1\right) = a + b - \delta \tag{46}$$

Die Formel (45) ist somit ein Sonderfall der Formel (46), nämlich für $\delta = 1$. Obwohl wir die Analyse in zwei Fälle untergliedert haben, ist das Endergebnis durch eine gemeinsame Formel (46) gegeben, wie eine einfache Probe bestätigt. Die Diskussion oder die Unterteilung der Aufgabenmenge nach der Anzahl der Lösungen entfällt in diesem Fall, da jede Aufgabe nur eine Lösung hat.

Beispiel 35. Es ist die Menge $\mathfrak{M}$ der quadratischen Gleichungen

$$y^2 + py + q = 0 \tag{47}$$

mit einer Variablen y gegeben. Die Parameter p und q seien reelle Zahlen. Es sind die Bedingungen dafür zu finden, dass die Gleichung (47) mindestens eine positive Wurzel hat.

Wir ändern die Formulierung der Aufgabe, indem wir die Gleichung (47) mit der Ungleichung $y > 0$ kombinieren. Damit erhalten wir die Menge $\mathfrak{M}'$ der Systeme

$$y^2 + py + q = 0 \qquad , \qquad y > 0 \tag{48}$$

Die Aufgabenstellung besagt, dass jetzt für alle diese Systeme die Lösungen zu bestimmen sind.

Wenn die Zahl y Lösung des Systems (48) ist, so ist y eine reelle Zahl. Infolgedessen ist

$$p^2 - 4q \geq 0 \tag{49}$$

und die Gleichung (47) hat zwei reelle Wurzeln

$$y_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q})$$

Wenn die Gleichung (47) wenigstens eine positive Wurzel hat, so ist entweder $y_2 \leq 0$ und $y_1 > 0$ oder $y_2 > 0$ und gleichzeitig $y_1 > 0$. In jedem Fall ist somit $y_1 > 0$ oder

$$\sqrt{p^2 - 4q} > p \tag{50}$$

Wir haben folgendes bewiesen: Wenn das System (48) lösbar ist, so gelten die Ungleichungen (49) und (50). Umgekehrt, wenn die Ungleichungen (49), (50) erfüllt sind, ist das System (48) lösbar, was leicht gezeigt werden kann.
Damit haben wir eigentlich die Analyse, die Probe und einen Teil der Diskussion für die Menge der Systeme (48) durchgeführt - wir haben die Lösungsmenge bestimmt.
Die gesuchte Bedingung für die Lösbarkeit der Ausgangsaufgabe ist durch das System aus den Ungleichungen (49), (50) gegeben.

Beispiel 36. Es ist ein Dreieck zu konstruieren (mittels der euklidischen Konstruktion), von dem die Seitenlängen a und c und der Winkel α gegeben sind.

Wir führen die Diskussion dieser einfachen Aufgabe durch. Die Analyse, die in jedem Fall gültig ist, sieht folgendermaßen aus:
Wir zeichnen die Strecke $AB = c$. Dann zeichnen wir die Halbgerade AX, die mit der Strecke AB $\angle XAB = \alpha$ einschließt. Danach zeichnen nur um den Punkt B mit dem Radius a den Kreis k. Der Eckpunkt C ist der innere Schnittpunkt der Halbgeraden AX mit dem Kreis k.

Zur übersichtlichen und schnellen Diskussion dieser Aufgabenmenge wenden wir die Koordinatenmethode an. Als Ursprung des kartesischen Koordinatensystems wählen wir den Punkt A, als positive x-Achse die Halbgerade AB, als positive y-Richtung die Halbebene ABX (Abb. 8).

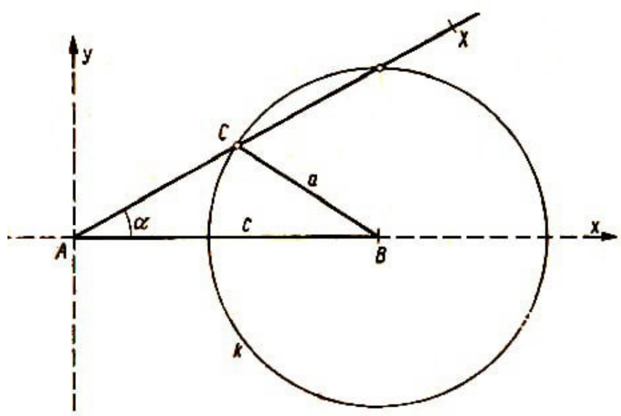


Abb. 8

Für die Halbgerade AX und für den Kreis k gelten folgende Beziehungen aus der analytischen Geometrie

$$x = y\cot\alpha, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 2cx + (c^2 - a^2) = 0$$

Wir eliminieren aus beiden Gleichungen x und erhalten[3]

$$y^2 - 2c\sin\alpha \cdot y\cos\alpha + (c^2 - a^2)\sin^2\alpha = 0 \tag{51}$$

Die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn die Gleichung (51) eine positive Wurzel hat. Verwenden wir das Ergebnis aus Beispiel 35, so erhalten wir folgende Bedingungen für die Lösbarkeit

$$a^2 - c^2\sin^2\alpha \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha} > -c\cos\alpha$$

Wir gehen jetzt nochmals die Beispiele dieses Kapitels durch und erinnern uns der dort gemachten Bemerkungen.

Bei der Lösung einer Menge von Aufgaben führen wir die Analyse für alle Aufgaben der gegebenen Aufgabenmenge entweder gemeinsam durch (s. Beispiel 36), oder es ist erforderlich, die Analyse 2 untergliedern (s. Beispiel 30, 32).
Die Untergliederung kann von der Art der Durchführung der Analyse abhängig sein (s. erste und zweite Art der Lösung des Gleichungssystems in Beispiel 32). Die einzelnen Fälle, die bei der Untergliederung der Analyse auftreten, müssen nicht mit den Untermengen von Aufgaben, die sich aus der Diskussion ergeben, übereinstimmen (s. Beispiel 30).

Für die Untergliederung der Analyse haben wir also nicht, wie dies des öfteren fälschlich geschieht, den Begriff der Diskussion gewählt. Dieser Standpunkt wird durch Beispiel 34 erhärtet; hier ist von vornherein klar, dass jede Aufgabe der gegebenen Menge nur eine Lösung hat, so dass die Diskussion entfällt, trotzdem haben wir die Analyse untergliedert.

Das Beispiel 31 zeigt, dass bei einer funktionalen Auffassung einer Aufgabe mit Parametern die Diskussion durch die Bestimmung des Definitionsbereichs der zugehörigen Funktion ersetzt wird.

Beispiel 33 ist eine Beweisaufgabe. Die "Gliederung des Beweises" in drei Fälle ergibt sich dadurch, dass der "Beweis" eigentlich die Probe einer Bestimmungsaufgabe ist, deren Analyse in drei Fälle zu untergliedern ist.

Das Beispiel 35, in dem die Bedingungen für mindestens eine positive Wurzel einer quadratischen Gleichung ermittelt werden, ist eigentlich ein Teil der Diskussion einer anderen Aufgabe, nämlich der Lösung eines kombinierten Systems aus einer Gleichung und einer Ungleichung.
Dieses Beispiel bestätigt von neuem, dass die Bestimmungsaufgaben den grundlegenden Aufgabentyp darstellen.

[3] $sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$.

Die übrigen Aufgaben erfordern in der Regel nur einen Teil der Lösung irgendeiner Bestimmungsaufgabe.

Wir kommen nochmals auf das Beispiel 36 zurück. Es zeigt, dass bei einer Analyse für eine ganze Aufgabenmenge die Diskussion eine Aufteilung der gegebenen Aufgabenmenge in einzelne Untermengen ergeben kann.
Dieses Beispiel zeigt auch, wie die Diskussion für eine Konstruktion (Ergebnis der Analyse) durchgeführt wird, nämlich mit den Mitteln der analytischen Geometrie.

Auf Probleme der Durchführung der Diskussion für Aufgabenmengen kommen wir in den folgenden Kapiteln noch zurück.

5 Einige allgemeine Bemerkungen zur Methodik

Die ersten Bemerkungen betreffen die Auswahl und Formulierung der Aufgaben.

Aus den bisherigen Ausführungen ist klar ersichtlich, dass die Bestimmungsaufgaben die wichtigste Aufgabengruppe bilden. Wie wir bereits im Kapitel 4 ausführten, ergibt sich im allgemeinen eine Beweis- oder Existenzaufgabe aus irgendeiner Bestimmungsaufgabe, wenn wir deren Lösungsmenge kennen oder zumindestens eine Angabe über die Lösungsmenge machen können.
Wir lösen deshalb im Normalfall eine Beweisaufgabe, indem wir nur einen Teil der zugehörigen Bestimmungsaufgabe lösen.

Es kann jedoch daraus nicht gefolgert werden, dass die Lösung der Beweis- und Existenzaufgaben immer einfacher ist als die Lösung von Bestimmungsaufgaben. Manchmal ist es gerade umgekehrt. Ist z.B. für die Beweisaufgabe nur die Probe der zugehörigen Bestimmungsaufgabe erforderlich, ist es dennoch zweckmäßiger, die Analyse der Bestimmungsaufgabe durchzuführen, denn diese gibt uns den Verlauf der Probe und somit die eigentliche Lösung der Beweisaufgabe an (s. Beispiel 23).

Aus den angeführten Gründen werden wir den Schülern vorwiegend Bestimmungsaufgaben stellen, Beweis- und Existenzaufgaben dienen zu ihrer Ergänzung und bleiben in der Minderzahl.

In Kapitel 4 erläutern wir den Unterschied zwischen der Lösung einer Einzelaufgabe und der Lösung einer Aufgabenmenge. Die Lösung einer Aufgabenmenge, die durch die Diskussion erfolgt, ist begreiflicherweise schwieriger als die Lösung einer einzelnen Aufgabe.
Dies sollte im Unterricht bei der Auswahl der Aufgaben berücksichtigt werden.

Das geschieht auch schon in vollem Maße in der Algebra. Hier lösen wir zuerst Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten und später erst einfache Gleichungen mit einem oder zwei Parametern.
Demgegenüber bleibt dieses Moment in der Geometrie häufig unbeachtet, d.h., es werden sofort Aufgaben mit variablen Elementen gelöst, die in der Regel eine Diskussion erfordern. Aber auch dann, wenn wir eine Aufgabe stellen, zu der eine Diskussion gehört, wenn also eine Aufgabenmenge zu lösen ist, schränken wir zweckmäßigerweise zuerst die Elemente so weit ein, dass die Diskussion nicht zu kompliziert und umfangreich wird.

Ziel der Diskussion im Mathematikunterricht ist es also, die Schüler mit den Methoden der Durchführung der Diskussion bei den verschiedenen Arten von Aufgaben bekannt zu machen (z.B. bei Gleichungen, Ungleichungen, Konstruktionsaufgaben u.ä.).

Niemals jedoch sollten wir in der Mehrzahl triviale Fälle wählen und auch auf keinen Fall zulassen, dass Diskussionen unvollständig ausgeführt oder gänzlich weggelassen werden, da sie ein Bestandteil der Lösung der Aufgabenmenge sind. Wir führen dazu ein Beispiel an.

Beispiel 37. Es ist ein Kreis k und auf diesem ein Punkt A gegeben, außerdem eine Gerade p. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der den Kreis k im Punkt A und gleichzeitig die Gerade p berührt.

Wir bezeichnen mit S den Mittelpunkt des Kreises k und mit t die Tangente im Punkt A. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises liegt auf der Geraden AS, wobei $M \neq A, S$. Außerdem liegt der Punkt M auf der Symmetrieachse o der Geraden p und t (sich schneidende oder parallele Geraden).

Die Probe bestätigt, dass jeder Schnittpunkt der Geraden o und AS, der nicht mit dem Punkt A oder mit dem Punkt S zusammenfällt, ein Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist (Abb. 9).

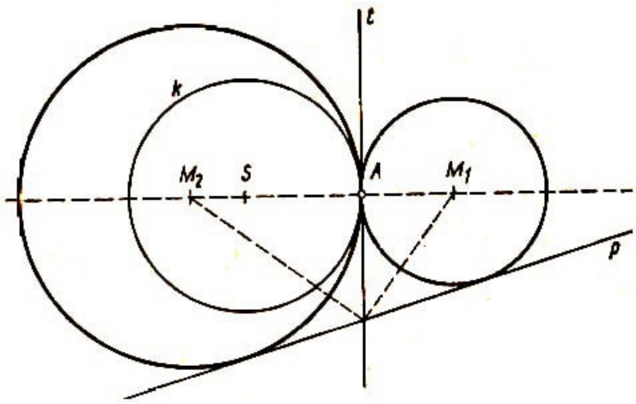


Abb. 9

Bei der Diskussion müssen verschiedene Fälle untersucht werden.

a) Geht die Gerade p durch den Punkt A und ist $p \neq t$, hat die Aufgabe keine Lösung.

b) Wenn die Gerade p identisch mit der Geraden t ist, hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen.

c) Ist die Gerade $p \neq t$ parallel zur Tangente t und auch eine Tangente des Kreises k, ist die Aufgabe wegen $M \neq S$ unlösbar.

d) Wenn die Gerade p parallel zur Tangente t ist, aber nicht Tangente des Kreises k ist, hat die Aufgabe eine einzige Lösung.

e) Sind p und t einander schneidende Geraden und ist p eine Tangente des Kreises k, hat die Aufgabe wegen $M \neq S$ ebenfalls eine einzige Lösung.

f) In allen übrigen Fällen hat die Aufgabe zwei Lösungen.

Alle diese Behauptungen kann der Leser leicht nachprüfen.
Wenn wir die einzelnen Fälle bewerten, stellen wir fest, dass die Fälle a) und b) trivial sind und dass es in den Fällen c) und e) nur deshalb lediglich eine Lösung gibt, weil eine Symmetrieachse der Geraden p und t durch den Punkt S geht. Wir können also die Diskussion dadurch einschränken, dass wir den gegebenen Elementen gewisse Beschränkungen auferlegen. Wir führen dazu einige Möglichkeiten an:

I. Es sind der Kreis k, auf diesem der Punkt A und ferner die Sekante p gegeben, die nicht durch den Punkt A geht.

In diesem Falle erübrigt sich die Diskussion der Fälle a), b) und d).

II. Es sind der Kreis k mit dem Mittelpunkt S, auf k der Punkt A gegeben und außerdem eine Gerade p, welche nicht senkrecht zur Geraden AS ist.
Es erübrigen sich die Fälle b), c) und d).

III. Es sind der Kreis k mit dem Mittelpunkt S und der Punkt A auf dem Kreis gegeben, sowie eine Gerade p, die senkrecht ist zu AS und nicht durch den Punkt A geht.
Es erübrigen sich die Fälle a), b), e) und f).

Weitere Varianten kann der Leser selbst finden.

Bei der Formulierung von Aufgaben ist es notwendig, sehr vorsichtig zu sein mit Ausdrücken wie: "Löst die Gleichung", "konstruiert das Quadrat", "berechnet den Radius des Kreises", "beweist die Formel" u. ä.
Bevor wir diese Ausdrücke verwenden können, müssen wir den Schülern genau erläutern, was sie bedeuten. Aber auch später, wenn sie laufend angewandt werden, müssen wir von Zeit zu Zeit wieder eine genaue Definition ihres Inhaltes fordern.

So z.B. ist der Ausdruck "löst die Gleichung" gleichbedeutend mit "bestimmt alle Zahlen einer gegebenen Zahlenmenge, die eine gegebene Bedingung erfüllen". Der Ausdruck "konstruiert das Quadrat" bedeutet: "bestimmt alle Quadrate, die die geforderten Eigenschaften haben und zeichnet diese mit Hilfe der euklidischen Konstruktion".
Der Ausdruck "berechnet den Radius des Kreises" ist gleichbedeutend mit "berechnet die Radien aller Kreise, die die gegebenen Bedingungen erfüllen".

Der Ausdruck "beweist die Formel" bedeutet "beweist, dass eine bestimmte Gleichung für alle Zahlen einer gegebenen Zahlenmenge erfüllbar ist, z.B. für alle reellen Zahlen mit Ausnahme von 0 und l, u.ä."

Es ist ferner wichtig, besonderen Wert auf die Aufgaben zu legen, in denen mehrere Variablen auftreten. Gemeint sind die Aufgabenmengen. In diesem Falle ist es stets erforderlich, den Grundbereich aller Variablen anzugeben. Es sollte zwar selbstverständlich sein, dass bei jeder Aufgabenmenge eine Diskussion durchgeführt wird, trotzdem halte ich es für zweckmäßig, nochmals darauf hinzuweisen.
So müsste z.B. die unvollständig und ungenau formulierte Aufgabe "löst die Gleichung $\sqrt{x+a} = \sqrt{x} + a$" wie folgt lauten:

Beispiel 38. Es ist die Menge $\mathfrak{M}$ der Gleichungen

$$\sqrt{x+a} = \sqrt{x} + a \tag{52}$$

gegeben, a ist dabei eine reelle Zahl. Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, die die Gleichung (52) bei konstantem a erfüllen. Die gegebene Menge von Gleichungen ist zu diskutieren.

Bei der Analyse gehen wir von der potenzierten und umgeformten Gleichung (52) aus

$$2a\sqrt{x} = a(1-a) \tag{53}$$

Nun muss die Analyse untergliedert werden. Aus (53) erhalten wir für $a \neq 0$ die Gleichungen

$$\sqrt{x} = \frac{1-a}{2} \qquad \text{und ferner} \qquad x = \frac{(1-a)^2}{4} \tag{54}$$

Für $a = 0$ hat die Gleichung (52) die Form $\sqrt{x} = \sqrt{x}$. Daraus folgt $x \geq 0$. Wir machen nun die Probe.

Ist $a \neq 0$, so errechnen wir aus (54) und (52)

$$\sqrt{x+a} = \frac{1}{2}|1+a| \qquad , \qquad \sqrt{x} = \frac{1}{2}|1-a| \tag{55}$$

Wir setzen nun

$$\Phi(x) = \sqrt{x+a} - \sqrt{x} - a = \frac{1}{2}(|1+a| - |1-a| - 2a)$$

Die durch die Formel (54) gegebene Zahl x ist nur dann Lösung der Gleichung (52), wenn $\Phi(x) = 0$ ist. Bei der Berechnung von $\Phi(x)$ unterscheiden wir drei Fälle:

a) $a < -1$. Daraus folgt $1 + a < 0$, $1 - a > 2$, $|1 + a| = -(1 + a)$, $|1 - a| = 1 - a$, $\Phi(x) = -(1 + a) > 0$.
Die Zahl aus (54) ist nicht Lösung der Gleichung (52).

b) $0 < |a| \leq 1$. Daraus folgt $1 + a \geq 0$, $1 - a \geq 0$, $|1 + a| = 1 + a$, $|1 - a| = 1 - a$, $\Phi(x) = 0$.
Die Zahl aus (54) ist Lösung der Gleichung (52).

c) $a > 1$. Daraus folgt $1 + a > 2$, $1 - a < 0$, $|1 + a| = 1 + a$, $|1 - a| = -1 + a$, $\Phi(x) = 1 - a < 0$.
Die Zahl aus (54) ist nicht Lösung der Gleichung (52).

Probe für a = 0: Alle nichtnegativen Zahlen x sind Lösungen de Gleichung (52).

Wie man sieht, war es erforderlich, die Analyse für zwei, die Probe für vier Fälle durchzuführen. Wir haben damit auch gleichzeitig die Diskussion der Menge im der Gleichungen (52) durchgeführt. Das Ergebnis zeigt die folgende Tabelle:

Untermenge	Zahl der Lösungen	Parameter a
$\mathfrak{M}_0$	keine	$\lvert a\rvert > 1$
$\mathfrak{M}_1$	eine	$0 < \lvert a\rvert \leq 1$
$\mathfrak{M}_\infty$	unendlich viele	$a = 0$

Der zweite Teil der methodischen Bemerkungen befasst sich mit der Lösung von Bestimmungsaufgaben. Es ist notwendig, den Schülern an Hand konkreter Beispiele den Sinn der Analyse und der Probe zu erläutern.
Als Beispiele eignen sich dazu am besten Gleichungen oder Gleichungssysteme, sowie geometrische Konstruktionsaufgaben. Sinn der Analyse ist es, alle Lösungen zu erfassen, ihr Ziel ist es, den Grundbereich am besten zu verwerten.[4]

[4] Falls ein Schüler die Lösung einer Aufgabe errät (z.B. eine Konstruktionsvorschrift), soll man sich darüber nicht ärgern, jedoch von ihm verlangen, dass er beweist, dass die Aufgabe keine weitere Lösung hat. Dadurch veranlassen wir ihn, die Analyse nachträglich in irgendeiner Form durchzuführen.

Bei der Durchführung der Analyse setzen wir grundsätzlich voraus, dass die Aufgabe lösbar ist. Ziel der Probe ist es, aus einem eingeschränkten Bereich alle diejenigen mathematischen Objekte auszuwählen, die Lösungen der Aufgabe sind. Dann ist zu überprüfen, ob sie allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Ein treffendes praktisches Beispiel ist das folgende: Als Parallele zur Lösung einer mathematischen Aufgabe kann man die Aufklärung eines Kriminalfalles bzw. die Feststellung des oder der Täter einer verübten Straftat ansehen.

Dem Grundbereich der mathematischen Aufgabe entspricht der verdächtige Personenkreis, der Analyse der mathematischen Aufgabe entspricht die Untersuchung des Kriminalfalles.
Im geeigneten Augenblick wird die Untersuchung (Analyse), deren Ziel es ist, den Kreis der Verdächtigen so weit wie möglich einzuschränken, beendet.
Als Ergebnis der Untersuchung kann z.B. die Verhaftung einer bestimmten Anzahl verdächtiger Personen erfolgen. Begreiflicherweise kann der Kriminalist nicht behaupten, dass alle verhafteten Personen Täter der Straftat sind, genauso wenig kann der Mathematiker vorschnell behaupten, dass sämtliche Objekte eines eingeengten Grundbereiches Lösungen der Aufgabe sind.
So wie der Mathematiker unbedingt die Probe durchführen muss, muss der Kriminalist den Täter unter den verhafteten Personen überführen.

Es kann jedoch auch vorkommen, dass sämtliche verhafteten Personen ein Alibi nachweisen können. Dann ist die Aufgabe, den Täter aus dem Kreis der verdächtigen Personen herauszufinden, unlösbar.

Was unternimmt in diesem Fall der Kriminalist? Etwas ähnliches wie der Mathematiker! Erinnern wir uns z.B. an die Lösung der quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten.
Falls diese Gleichung im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar ist, sucht der Mathematiker die Lösung in einem erweiterten Zahlenbereich - im Bereich der komplexen Zahlen. Ähnlich wird der Kriminalist den Kreis der verdächtigen Personen erweitern und von neuem nach dem Täter fahnden, d.h., er wird von neuem versuchen, seine kriminalistische Aufgabe zu lösen.

Es ist weiter vorteilhaft, die Lösungen einer einfachen algebraischen Aufgabe (Gleichung) und einer geometrischen Konstruktionsaufgabe zu vergleichen und dabei zu zeigen, dass es häufig nicht zweckmäßig ist, nur einen einzigen Lösungsweg bei verschiedenartigen Aufgaben zu verfolgen. Dazu zwei Beispiele.

Beispiel 39. Es sind sämtliche reellen Zahlen x zu bestimmen, die die Gleichung

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{6}{2x^2-x-1} = 2$$

erfüllen.

Die sogenannte "Lösung" der Gleichung ist eigentlich ihre Analyse. Wegen $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$ erfüllt jede Wurzel der Gleichung (56) eine Gleichung, die aus (56) durch Multiplikation mit dem Faktor $(x-1)(2x+1)$ entsteht. Diese neue Gleichung lautet dann (nach Umformung)

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \tag{57}$$

Sie hat Wurzeln $\frac{3}{2}$ und 1; damit ist die Analyse beendet. Die Probe ist sehr einfach. Für die Zahl 1 nehmen beide Nenner den Wert Null an, 1 ist somit nicht Wurzel der Gleichung (56).
Diese hat nur eine einzige Wurzel, nämlich $\frac{3}{2}$. Ohne diese einfache Probe wären wir zu einem falschen Ergebnis gekommen.

Beispiel 40. Es sind zwei aufeinander senkrechte Geraden p und q und ein Punkt A gegeben, dessen Entfernungen von den Geraden p und q im Verhältnis 1:2 stehen. Es ist ein gleichseitiges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Eckpunkt B auf der Geraden p und dessen Eckpunkt C auf der Geraden q liegt.

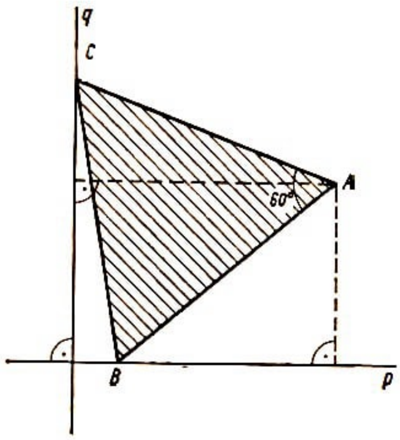


Abb. 10

Nur nach der Skizze (Abb. 10) zu urteilen, entsteht der Punkt C aus dem Punkt B durch Drehung um den Winkel 60° im negativen Sinne mit A als Drehpunkt. Das bedeutet, dass der Punkt C auf ein Geraden p' liegt, die aus der Geraden p durch Drehung entsteht.
Diese Analyse ist jedoch nicht richtig, da eine Lösung verlorengeht.

Es ist nicht zulässig, eine Analyse nur an Hand einer einzigen Abbildung durchzuführen. Es ist vielmehr erforderlich, die notwendigen Bedingungen für die Lösung logisch herzuleiten. Mit A als Drehpunkt kann der Punkt C nicht nur durch Drehung um 60° im negativen Sinne, sondern auch durch Drehung im positiven Sinn entstehen.

Aus diesen beiden Möglichkeiten ergeben sich zwei verschiedene Geraden p' und p'' (Abb. 11), die die Gerade q in zwei verschiedenen Punkten C_1 und C_2 schneiden. Die Probe für diesen Fall ist sehr einfach und ergibt, dass die Aufgabe zwei Lösungen hat.

Außerdem zeigt sich bei der Probe, dass die in der Skizze (Abb. 10) eingezeichnete Lage von B falsch ist. Der Punkt B_1 (und der Punkt B_2) liegt nicht in der Halbebene qA, sondern in der entgegengesetzten Halbebene.

Bei der Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Koordinatenmethode kommen wir zu einem interessanten Ergebnis. Nach Abb. 11 wählen wir das Koordinatensystem so, dass

$A(2;1)$. Die kartesischen Koordinaten der unbekannten Eckpunkte bezeichnen wir mit $B(x;0)$, $C(0;y)$.

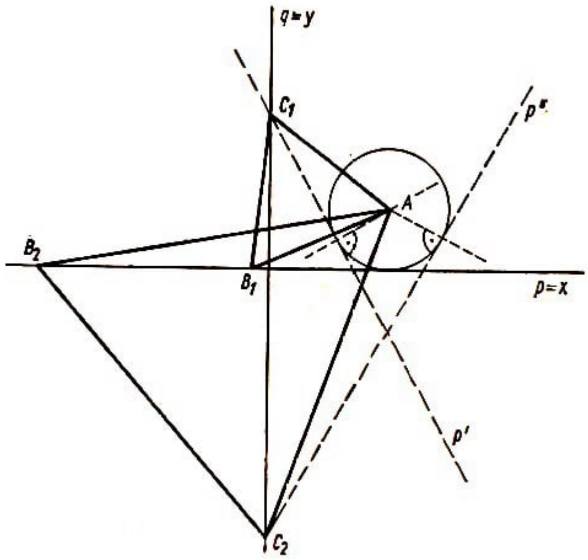


Abb. 11

Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich

$$\begin{aligned} (2-x)^2+1 &= x^2+y^2 \quad (AB=BC) \\ 4+(x-1)^2 &= x^2+y^2 \quad (AC=BC) \end{aligned} \tag{58}$$

Wenn wir aus beiden Gleichungen (58) y eliminieren, erhalten wir für x eine Gleichung vierten Grades

$$x^4-10x^2+16x+5=0 \tag{59}$$

Die Lösung der Aufgabe, d.h. die Koordinaten des gesuchten Eckpunktes B, ist unter den Wurzeln dieser Gleichung zu suchen. Damit können wir die Analyse der Aufgabe beenden.

Die Probe, die im vorangegangenen Beispiel sehr einfach war, ist jetzt viel umständlicher. Es ist nämlich nicht sofort zu erkennen, ob das Polynom auf der linken Seite der Gleichung (59) im Körper der rationalen Zahlen in Faktoren zerlegbar ist. Es ist aber

$$x^4-10x^2+16x+5=(x^2+4x+1)(x^2-4x+5)$$

Die Lösung der Gleichung (59) kann somit auf die Lösung von zwei quadratischen Gleichungen zurückgeführt werden. Die Gleichung

$$x^2-4x+5=0$$

hat keine reelle Wurzeln. Die Lösung der Aufgabe ergibt sich also aus den Wurzeln der zweiten Gleichung

$$x^2+4x+1=0$$

diese sind $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$. Berechnen wir das zugehörige y, erhalten wir die Koordinaten der Punkte B_1,C_1 und B_2,C_2.

Die beiden angeführten Beispiele zeigen, dass die Analyse bei der Lösung einer Gleichung oder eines Systems von Gleichungen und Ungleichungen in der Regel sehr ins einzelne gehen wird und genau durchgeführt werden muss.

Die Lösung von Aufgaben könnte sich häufig auf die Analyse beschränken, und die Probe könnte entfallen; dann nämlich, wenn, wie in vielen Schulbeispielen, die Analyse durch die Äquivalenzmethode erfolgt. Da wir dabei aber nicht schrittweise vorgehen, können wir uns auf die Äquivalenzmethode niemals verlassen, und wir müssen trotzdem die Probe durchführen, auch dann, wenn dies durch den entgegengesetzten Vorgang wie bei der Analyse erfolgt (z.B. wird zur Beseitigung der Nenner von Brüchen in einer Bruchgleichung diese mit einem Term multipliziert, der die Variable enthält).
Die Schüler müssen sich also den Grundsatz zu eigen machen, dass die Probe ein unerlässlicher Bestandteil der Lösung jeder Aufgabe ist und dass man sie in keinem Falle weglassen darf.

Bei geometrischen Konstruktionsaufgaben wird die Analyse oft sehr nachlässig ausgeführt (s. Beispiel 40) oder sogar ganz weggelassen und nur die Konstruktionsvorschrift angegeben. Dadurch begeben wir uns stets in die Gefahr, die Lösung der Aufgabe nicht vollständig auszuführen.

Aus der Algebra kann man noch eine Lehre ziehen. Wenn wir um Unterricht die verschiedenen Arten von Gleichungen (z.B. lineare, quadratische, goniometrische u.ä.) oder Systeme von Gleichungen und Ungleichungen (z.B. das System zweier linearer Gleichungen, das System aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung u.ä.) behandeln, lehren wir die Schüler in jedem speziellen Fall sehr gründlich, wie man die gegebene Aufgabe "löst", d.h., wie man ihre Analyse durchführt.

Dies ist tatsächlich notwendig, denn die Analyse ist bei den einzelnen Aufgabentypen sehr unterschiedlich. Demgegenüber werden in der Geometrie die Aufgaben gewöhnlich nicht klassifiziert, und es wird von Typen überhaupt nicht gesprochen.
Die Lösung wird einfach ausgeführt, und wir verlassen uns dabei häufig auf irgendeine Intuition der Schüler. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn sie dann den vermittelten Lehrstoff nicht beherrschen und wenn z.B. Lösungen und besonders Analysen von Konstruktionsaufgaben nicht "klappen".

Als einzigen Weg zur Abhilfe sehe ich eine Untergliederung der Aufgaben und die Untersuchung ihrer logischen Struktur.
Danach ist es erforderlich, dass die Schüler mit der Art der Durchführung der Analyse für jeden bestimmten Typ von Konstruktionsaufgaben bekannt gemacht werden.

Für die Proben und Diskussionen gilt Ähnliches. Man kann zunächst für die Durchführung der Probe und der Diskussion nur allgemeine Hinweise geben. Bei der Probe untersuchen wir entweder ein Objekt nach dem anderen daraufhin, ob es den Bedingungen der Aufgabe entspricht, oder wir wenden den umgekehrten Vorgang wie bei der Analyse an.
Bei der Diskussion gehen wir Schritt für Schritt die Konstruktionsvorschriften, die sich bei der Analyse ergeben, durch und stellen fest, für welche Fälle der variablen Elemente

(Werte der Parameter) sie durchführbar sind.

Diese allgemeinen Hinweise genügen aber bei weitem nicht, wenn die Schüler die Durchführung der Probe und Diskussion erlernen sollen. Um das zu erreichen, müssen wir mit ihnen die verschiedenen Aufgabentypen getrennt und ganz konkret behandeln.

Auf diese Fragen wird aber in den nächsten Kapiteln im einzelne eingegangen werden.

6 Anwendung der experimentellen Methode bei der Lösung geometrischer Aufgaben

Die mathematischen Experimente haben einen bedeutenden Anteil an der schöpferischen mathematischen Tätigkeit, d.h. an der Suche nach neuen mathematischen Erkenntnissen.
Man kann sogar durchaus sagen, dass für die Entdeckung neuer Erkenntnisse das Experiment oft wichtiger ist als die Deduktion. Deduktive Erwägungen sind dann zum Beweis der aufgestellten Hypothesen nötig, die durch Probieren, also induktiv gefunden wurden. Da das Experiment eine Arbeitsmethode auch des Mathematikers ist, muss auch den Schülern im Mathematikunterricht das Experimentieren gezeigt werden.

Der elementarste Fall von schöpferischer Arbeit in der Mathematik ist die Lösung einfacher mathematischer Aufgaben. Aber auch da kann man manchmal schon die experimentelle Methode anwenden.
Damit ist freilich nicht gesagt, dass wir bei der Lösung jeder mathematischen Aufgabe experimentieren müssen. Es gibt jedoch auch im Bereich der Elementarmathematik eine Kategorie von Aufgaben, bei der sich das Experimentieren lohnt.
Das Experiment kann immer dann zweckmäßig sein, wenn man den Lösungsweg für eine Aufgabe sucht. Solche Versuche können manchmal sogar die Analyse der Aufgabe ersetzen und manchmal zugleich Probe sein. Dazu bringen wir zuerst wieder einige instruktive Beispiele.

Der Aufgabentyp, bei dem es sehr vorteilhaft ist, sich des Experiments zu bedienen, sind Aufgaben zur Bestimmung des geometrischen Ortes von Punkten, Geraden u. ä.
Bei der experimentellen Untersuchung konstruieren wir z.B. eine Reihe von Punkten mit den geforderten Eigenschaften und folgern dann daraus, welches Gebilde sich aus allen Punkten mit den geforderten Eigenschaften ergeben könnte bzw. welche charakteristischen Eigenschaften dieses Gebilde hat. Unsere Hypothese müssen wir natürlich anschließend beweisen oder auch richtigstellen.

Beispiel 41. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden p und q und eine Strecke s. Es ist die Menge aller Punkte zu bestimmen, für die die Summe der Abstände von den Geraden p und q gleich s ist.

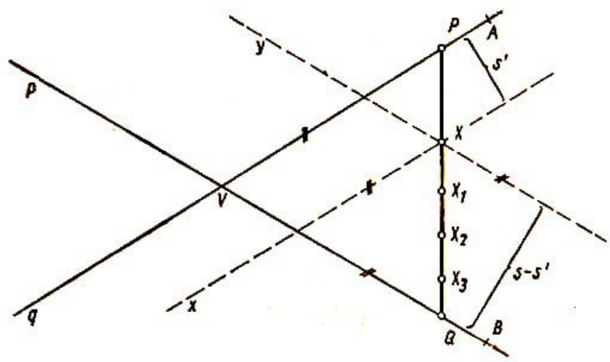


Abb. 12

Experimentelle Untersuchung. Wir wählen einen von den Geraden p und q eingeschlossenen spitzen Winkel, z.B. $\angle AVB$ (Abb. 12).

Zunächst konstruieren wir einen Punkt X des gesuchten geometrischen Ortes wie folgt: Wir wählen eine Strecke $s' < s$. In der Halbebene qB im Abstand s' zeichnen wir die Parallele x zur Geraden q und in der Halbebene pA im Abstand $(s - s')$ die Parallele y zur Geraden p. Der Schnittpunkt X der Geraden x und y gehört zum gesuchten geometrischen Ort.

Auf diese Weise konstruieren wir eine Reihe von Punkten X, X_1, X_2, X_3, ..., darunter auch den Punkt P auf der Halbgeraden VA mit dem Abstand s von der Geraden p und den Punkt Q auf der Halbgeraden VB mit dem Abstand s von der Geraden q.

Aus der Zeichnung entnimmt man, dass alle Punkte P, Q, X, X_1, X_2, X_3,... auf einer Geraden liegen.

Auf Grund des Versuches stellen wir folgende Hypothese auf:
Die Strecke PQ ist der Teil des geometrischen Ortes, der im Winkel AVB liegt. Der gesuchte geometrische Ort ist der Umfang eines Rechteckes, dessen Diagonalen auf den Geraden p und q liegen.

Beweis der Hypothese. Das Dreieck VPQ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis PQ. Falls die aufgestellte Hypothese richtig ist, muss folgender Satz gelten:
Die Summe der Abstände jedes Punktes X der Basis PQ des gleichschenkligen Dreieckes VPQ von den Geraden VP und VQ ist konstant, und zwar ist die gleich der konstanten Summe der Lote auf die Schenkel des Dreieckes VPQ.
Wir müssen nun versuchen, diesen Satz zu beweisen.

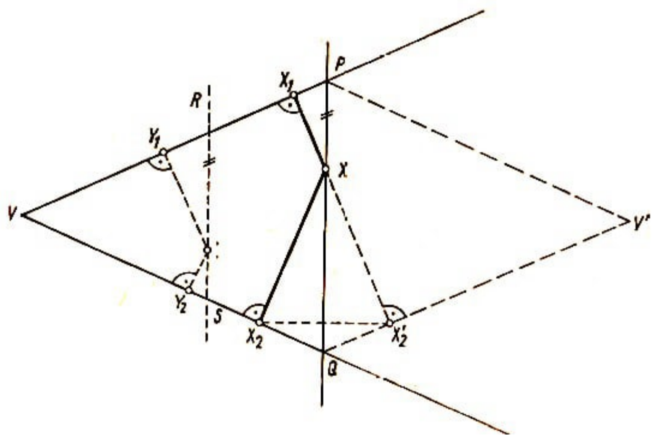


Abb. 13

Aus Abb. 13 entnehmen wir folgendes: Wenn wir die Strecke XX_2 an der Geraden PQ spiegeln, ergibt sich die Strecke $X'X_2'$, wobei die Punkte X, X_1, X_2' auf einer Geraden liegen.
Der zu V in Bezug auf die Gerade PQ symmetrische Punkt ist der Punkt V'. Die Länge der Strecke X_1X_2' ist die Höhe des Rhombus $VPV'Q$. Der Satz über das gleichschenklige Dreieck ist somit bewiesen.

Es ist damit bewiesen, dass jeder Punkt der Strecke PQ die geforderten Eigenschaften hat. Wenn nun irgendein Punkt Y des Winkels AVB, für den die Summe der Abstände von den Geraden p und q gleich $YY_1 + YY_2 = s$ wäre, nicht auf der Strecke PQ läge und wir zeichneten durch den Punkt Y die Strecke $RS \parallel PQ$ (Abb. 13), so wäre die

Summe $YY_1 + YY_2$ zwar gleich dem Abstand des Punktes R von der Geraden p, sie wäre jedoch nicht gleich dem Abstand des Punktes P von der Geraden p, denn $R \neq P$. Und das ist ein Widerspruch.

Beispiel 42. Es sind zwei aufeinander senkrechte Geraden p und q und eine Strecke der Länge d gegeben. Die Strecke soll so verschoben werden, dass der eine Endpunkt X sich auf der Geraden p, der andere Endpunkt Y sich auf der Geraden q bewegt.

a) Welche Figur beschreiben die Mittelpunkte S aller Strecken XY?
b) Welche Figur beschreibt der von X aus im ersten Drittel der Strecke XY gelegene Punkt Z?

a) Experimentelle Untersuchung. Wir zeichnen einigen Lagen der Strecke XY und des zugehörigen Streckenmittelpunktes S. Aus der Zeichnung sieht man, dass alle Streckenmittelpunkte auf einem Kreis k liegen. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt M der Gerade p und q, sein Radius beträgt $\frac{d}{2}$ (Abb. 14).

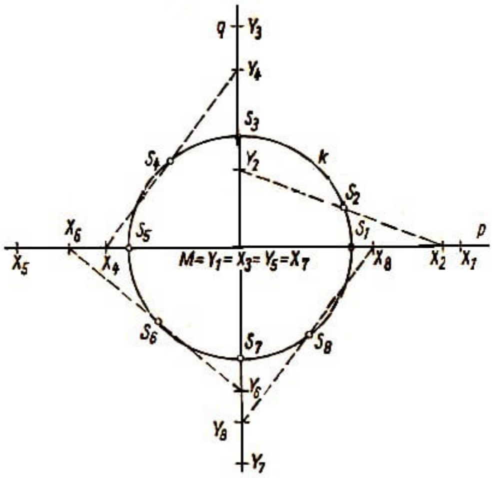


Abb. 14

Beweis der Hypothese. Wenn die aufgestellte Hypothese richtig ist, muss der Abstand jedes Punktes S_i vom Schnittpunkt M gleich $\frac{d}{2}$ sein. Für die Punkte S_1, S_3, S_5, S_7 trifft dies zu.
Für die übrigen Punkte S_i ergibt sich die Behauptung aus dem Satz von Thales. So ist z.B. der Punkt S_2 der Mittelpunkt des dem rechtwinkligen Dreieck MX_2Y_2 umbeschriebenen Kreises, und es ist somit $MS_2 = S_2X_2 = S_2Y_2 = \frac{d}{2}$.

Es kann leicht bewiesen werden, dass jeder Punkt des Kreises k der Mittelpunkt einer Strecke XY ist. Wir wählen z.B. den Punkt S_4, zeichnen um ihn als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius S_4M und ermitteln die Schnittpunkte X_4 und Y_4 des Kreises mit den Geraden p und q.
Nach dem Satz von Thales ist der Punkt S_4 der Mittelpunkt der Strecke $X_4Y_4 = 2MS_4$.

b) Einen ähnlichen Versuch führen wir für die zweite Aufgabe durch. Die Zeichnung (Abb. 15) zeigt, dass sich der Punkt Z auf einer Ellipse e bewegt, deren Achsen auf den Geraden p und q liegen.

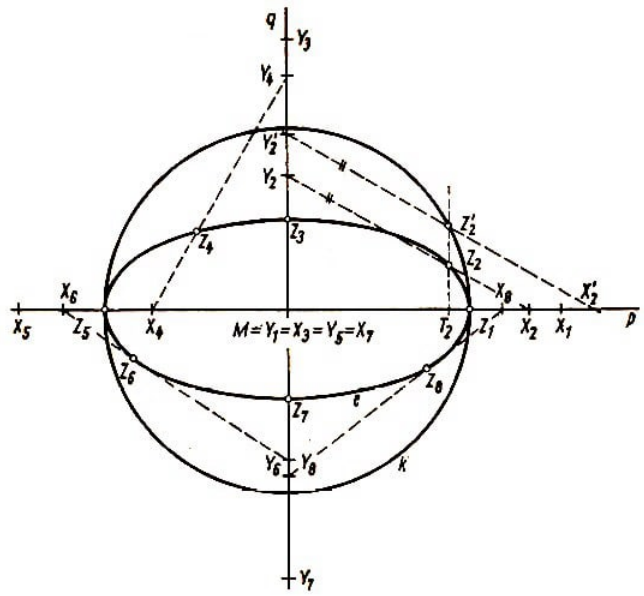


Abb. 15

Der Beweis dieser Hypothese erfolgt mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe a). In Abb. 15 ist das Prinzip des Beweises dargestellt.
Wir wählen einen Punkt Z der Ellipse e und bezeichnen mit T_2 den Fußpunkt des von ihm auf die Gerade p gefüllten Lots. Wir bestimmen ferner auf der Halbgeraden MT_2 einen Punkt X_2', für den die Beziehung gilt $MX_2' = 2MT_2 = 4T_2X_2$.
Durch den Punkt X_2' zeichnen wir eine Parallele zur Geraden X_2Y_2 und bestimmen ihre Schnittpunkte Y_2' und Z_2' mit den Geraden q und T_2Z_2.

Der Beweis, dass $X_2'Z_2' = Y_2'Z_2' = \frac{2}{3}d$, ist einfach. Nach dem Ergebnis der Aufgabe a) liegen die Punkte Z_i' auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{2}{3}d$.
Die Punktmenge Z_i ist eine Figur, die aus dem Kreis k durch eine affine Abbildung ent-Ssteht. Die Affinitätsachse ist die Gerade p, die Affinitätsstrahlen stehen senkrecht auf p und der Affinitätsmaßstab ist $\frac{1}{2}$ (das Teilverhältnis $(Z_iT_iZ_i')$ ist $\frac{1}{2}$). Die Punktmenge Z_i ist somit tatsächlich eine Ellipse e. Einzelheiten der Durchführung des Beweises über lassen wir dem Leser.

Beispiel 43. Es ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Der Mittelpunkt der Seite BC ist E, der Mittelpunkt der Seite CD ist F. Die Strecken AF und DE schneiden einander im Punkt G.
Wir konstruieren alle möglichen, innerhalb des sich ergebende Vierecks $ABEG$ liegenden Kreise, die zwei seiner Seiten berühren. Es ist die Menge ihrer Mittelpunkte zu bestimmen.

Experimentelle Untersuchung. Die Mittelpunkte der Kreise, die das Viereck $ABEG$ in zwei Punkten berühren, die also z.B. die Seiten AB und AG berühren, liegen auf den Winkelhalbierenden der von ihnen eingeschlossenen Winkel. Die Versuche, die entsprechenden Kreise einzuzeichnen, ergeben, dass die gesuchte Menge der Mittelpunkte eine gebrochene Linie ist, die aus den Strecken AM, BO, EO, GM, OM ohne die Punkte A, B, E, G besteht (in Abb. 16 stark ausgezogen).

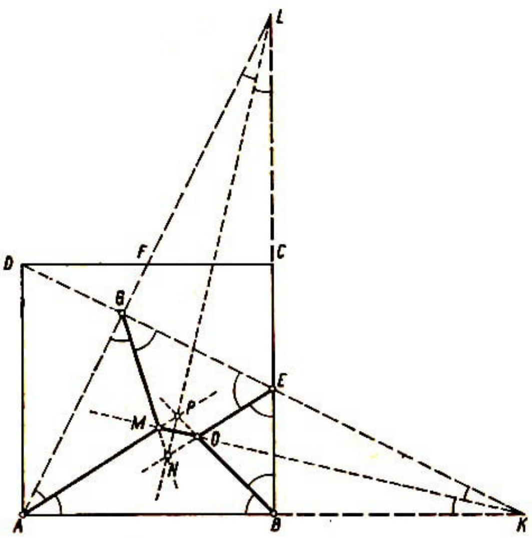


Abb. 16

Die Hypothese lässt sich ganz elementar beweisen. Die Schnittpunkte M, N, O, P der Winkelhalbierenden des Vierecks entsprechen jeweils den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden von Außen- bzw. Innenwinkeln eines Dreiecks. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Punkte der Strecke OM zur gesuchten Punktmenge gehören, die Punkte der Strecke PN dagegen nicht.

Ein Punkt der Strecke OM ist von den Geraden AB und GE gleichweit entfernt, der Abstand ist δ. Die Entfernung von den Geraden BE und AG ist jedoch größer als δ. Der Kreis mit dem Mittelpunkt X und dem Halbmesser δ liegt deshalb innerhalb des Viereckes $ABEG$.
Bei der Strecke PN ist es umgekehrt. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt Y auf der Strecke PN der die Geraden AG und BE berührt, liegt nicht innerhalb des Viereckes $ABEG$. Die Durchführung des Beweises in allen Einzelheiten bleibt dem Leser überlassen.

Eine weitere Gruppe geometrischer Aufgaben, bei denen sich die Lösung mit Hilfe eines Experimentes lohnt, sind Aufgaben, bei denen aus einer gegebenen Menge von Figuren die maximale oder minimale Figur zu suchen ist. Dazu wieder einige Beispiele.

Beispiel 44. Von allen Rechtecken mit einem gegebenen Umfang u ist das Rechteck zu suchen, das den größten Flächeninhalt hat.

Diese Aufgabe ist ein sogenanntes isoperimetrisches Problem, bei dem es darum geht, eine Figur zu finden, die bei einem gegebenen Umfang den maximalen Flächeninhalt hat.
Es handelt sich hier eigentlich um eine arithmetische Aufgabe.
Bei ihrer Analyse wählen wir als Maßzahl für den Umfang eine Zahl u (z. B. $u = 16$) und versuchen, experimentell das Viereck mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Das bedeutet, dass wir die Zahl $\frac{u}{2}$ so in zwei positive Summanden x und $\frac{u}{2} - x$ zu zerlegen haben, dass ihr Produkt u

$$y = x\left(\frac{u}{2} - x\right) \tag{68a}$$

ein Maximum wird. Wir stellen für $u = 16$ nach (68a) eine Wertetabelle auf:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	12	15	16	15	12	7

Wenn wir weitere Lösungsversuche durchführen, erhalten wir z.B. für $x = \frac{3}{2}$, $y = 9\frac{3}{4}$, für $x = \frac{7}{2}$, $y = 15\frac{3}{4}$. Die Versuche zeigen uns, dass das Produkt y den größten Wert für $x = 4$, bzw. für $\frac{u}{4}$ hat. Diese Hypothese wird durch Wiederholung der Versuche für andere Werte der Variablen u bestätigt.

Die Probe besteht im Beweis der aufgestellten Hypothese. Der Beweis (übrigens auch die Analyse) kann sowohl mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik als auch elementar durchgeführt werden. Wir formen die Funktion (68a) um und erhalten

$$y = \frac{u}{2} \cdot x - x^2 = \frac{u^2}{16} - \frac{u^2}{16} + \frac{u}{2}x - x^2 = \frac{u^2}{16} - \left(\frac{u}{4} - x\right)^2 \tag{68b}$$

Die Zahl $\left(\frac{u}{4} - x\right)^2$ ist nicht negativ, die rechte Seite der Gleichung (68b) hat also ihren maximalen Wert für $\frac{u}{4} - x = 0$, und daraus folgt $x = \frac{u}{4}$.

Beispiel 45. Es ist die Figur O gegeben, die nach Abb. 17 durch Anfügen des Kreissegmentes U an das Quadrat $ABCD$ entsteht. Das Segment ist durch den Kreisbogen k begrenzt, der durch die Punkte A und B geht. Der Winkel ASB zwischen den Verbindungslinien des Kreismittelpunktes S mit den Eckpunkten A und B beträgt $120°$.
Zur Figur O gehört auch der Kreisbogen k. Es ist die größtmögliche Strecke, die ganz innerhalb der Figur O liegt, zu konstruieren und ihre Länge zu berechnen.

Wir ersetzen wieder die Analyse durch ein Experiment. Daraus ergibt sich dann die Hypothese, dass die gesuchte Strecke die Strecke CE ist. Sie geht durch den Kreismittelpunkt S.
Die Versuche zeigen schon den Weg für den Beweis der aufgestellten Hypothese und für die Durchführung der Probe. Wir bezeichnen dieses Vorgehen als deduktiven Beweis.

Man kann leicht zeigen, dass jede Strecke, die im Innern der Figur O liegt, kleiner als eine bestimmte Strecke oder gleich dieser Strecke ist, deren Endpunkte auf dem Umfang von O liegen. Es genügt also, die Strecken zu untersuchen, deren Endpunkte auf dem Umfang der Figur O liegen. Die größte Strecke, deren Endpunkte auf den Seiten BC, CD, DA liegen, ist die Diagonale des Quadrates $ABCD$. Wir untersuchen ferner die Strecken, von denen mindestens um Endpunkt auf dem Kreisbogen k liegt.

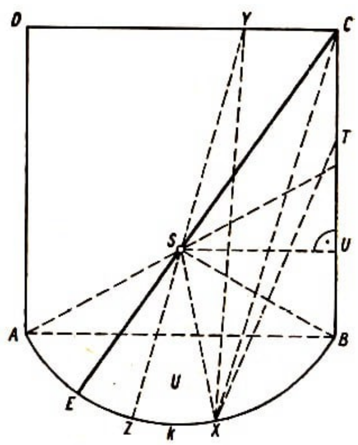


Abb. 17

Falls beide Endpunkte auf dem Kreisbogen liegen, ist die längste Strecke die Sehne AB. Falls auf dem Kreisbogen k nur einer der Endpunkte liegt und der zweite innerhalb der Seiten BC oder DA (s. z.B. Strecke XT in Abb. 17), ist es möglich, die längste Strecke zu finden.
Es ist dies die Verbindungslinie mit einem der Endpunkte C bzw. D (in der Abb. CX). Es genügt somit, nur die Strecken zu untersuchen, von denen ein Endpunkt auf dem Kreisbogen k und der zweite auf der Strecke CD liegt (in Abb. 17 die Strecke XY).

Wir zeichnen die Strecke YZ, die durch den Kreismittelpunkt S geht. Wegen $SZ = SX$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$XY \leq YS + SX = YS + SZ = YZ$$

Die längere von den beiden Strecken ist somit YZ. Für den maximalen Streckenabschnitt $YS = CS$ erhält man die Strecke CE.

Wir berechnen die Länge der Strecke CE. Es genügt dazu die Berechnung der Entfernung CS aus dem rechtwinkligen Dreieck CSU. Bezeichnen wir die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit a, so ist die Entfernung des Punktes S von der Geraden AB gleich $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, was man leicht aus dem Dreieck ABS berechnen kann. Es ist somit

$$BU = \frac{a}{2\sqrt{3}} \qquad , \qquad SU = \frac{a}{2}$$

und ferner

$$CS^2 = CU^2 + SU^2 = \left(a - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$$

daraus folgt

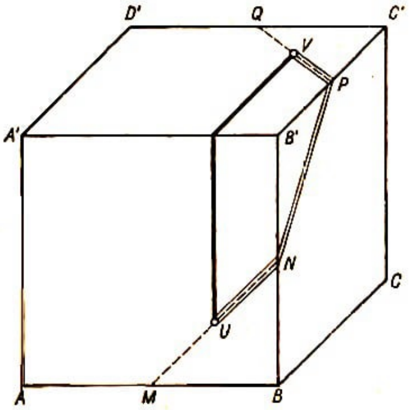
$$CS = a\sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{3}} \qquad \text{und somit} \qquad CE = \frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{4-\sqrt{3}}+1)$$

numerisch ergibt sich $CE \approx 1,4469a$.

Die Länge der Diagonalen $AC = \sqrt{2}a = 1,4142a$ ist somit kleiner als CE, und CE ist also tatsächlich die längste Strecke, die innerhalb der Figur möglich ist. Damit ist die Probe beendet.

Beispiel 46. In einem Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (Abb. 18) sind M, N, P, Q die Mittelpunkte der Seiten AB, BB', $B'C'$, $C'D'$ und U bzw. V die Mittelpunkte der Strecken MN bzw. PQ.
Es ist festzustellen, ob die kürzeste Verbindung der beiden Punkte U und V auf der Oberfläche des Würfels die gebrochene Linie über die obere und vordere Würfelfläche oder die gebrochene Linie von der oberen über die rechte zur vorderen Würfelfläche ist.

Wir ersetzen wieder die Analyse durch ein Experiment. Die kürzeste Verbindung der Punkte U und V können wir entweder experimentell z.B. mittels eines Fadens oder planimetrisch auf eine Würfelnetz ermitteln.



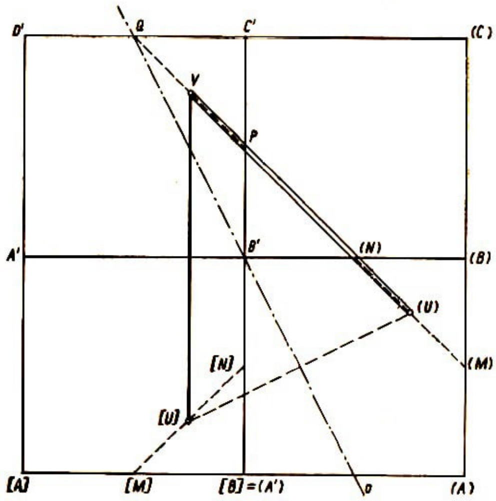


Abb. 18 und 19

Die zweite Art ist vorteilhafter, denn sie zeigt uns auch den Weg, wie das gefundene Ergebnis bewiesen werden kann bzw. wie die Probe durchzuführen ist. Das Experiment führt zu folgender Hypothese:
Die kürzere der beiden Verbindungsmöglichkeiten der Punkte U und V ist die gebrochene Linie über die rechte Würfelfläche $BCC'B'$.

Die Probe führen wir anhand des Netzes durch. Wir klappen einmal die vordere Fläche in die Ebene der oberen Fläche, dann dieselbe vordere Fläche in die Ebene der rechten Fläche und anschließend diese beiden rechten Flächen in die Ebene der oberen Fläche. Das zeigt die Abb. 19. Die erste Umklappung ist durch eckige Klammern, die zweite durch runde Klammern gekennzeichnet.
Die fraglichen Streckenzüge sind im Netz die Strecken $[U]V$ und $(U)V$. Da der Punkt (U) aus dem Punkt $[U]$ durch Drehung um den Punkt B' um einen rechten Winkel im positiven Drehsinn entsteht, so ist $B'[U] = B'(U)$.
Die Mittelsenkrechte o der Strecke $[U](U)$ geht deshalb durch den Punkt B'.

Wir zeigen ferner, dass die Gerade o durch den Punkt Q geht. Es genügt dazu, mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes die Entfernungen $Q[U]$ und $Q(U)$ zu berechnen. Es ergibt sich in beiden Fällen $\frac{5}{4}\sqrt{2a}$, wobei a die Länge einer Würfelkante ist. Weil der Punkt V in der Halbebene $o(U)$ liegt, ist $V(U) < V[U]$. Damit ist die Hypothese bewiesen.

7 Anwendung der experimentellen Methode bei der Lösung arithmetischer Aufgaben

Eine andere Aufgabenkategorie, bei der sich die experimentelle Lösung lohnt, sind arithmetische Aufgaben mit ganzen Zahlen. Es sind dies z.B. Aufgaben, bei denen ein unvollständiger Algorithmus ergänzt werden soll, oder Aufgaben, in denen gewisse Zahlen durch Buchstaben ersetzt sind. Es handelt sich hierbei eigentlich um Aufgaben mit einer Reihe Variabler. Dazu zwei Beispiele.

Beispiel 47. Es ist nachstehender Additions-Algorithmus gegeben

$$\begin{array}{cccccc} \text{S} & \text{O} & \text{M} & \text{M} & \text{E} & \text{R} \\ \text{O} & \text{S} & \text{T} & \text{S} & \text{E} & \text{E} \\ \hline \text{F} & \text{E} & \text{R} & \text{I} & \text{E} & \text{N} \end{array}$$

Jeden Buchstabe bedeutet eine ganze Zahl aus dem Intervall $[0, 9]$, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

Die Analyse der Aufgabe ist eine Kombination von Deduktion und Experiment. Nachstehend der Lösungsweg:

Aus der Spalte der Zehner ergibt sich für $E + E = E$ entweder $0 + 0 = 0$ oder $1 + 9 + 9 = 19$. Wegen $R \neq N$ ist $E = 0$ nicht möglich; also ist $E = 9$.

Aus $R + 9 = N + 10$ ergibt sich $R = N + 1$ oder $N = R - 1$ und damit $R \neq 0$.

Wegen $S + O \neq 9$ und $1 + O + S = 9$ ist $M + T > 9$ und damit $M \neq 0$ und $T \neq 0$ sowie $S + 0 = F = 8$ (wegen $E = 9$).

Für die beiden Buchstaben S und O ergeben sich nur sechs Kombinationsmöglichkeiten, denn wegen $F = 8$ fallen die Kombinationen $8 + 0$ bzw. $0 + 8$ weg, und wegen $S \neq O$ kann keiner der Buchstaben für 4 stehen:

1. $S = 1$, $O = 7$	2. $S = 2$, $O = 6$	3. $S = 3$, $O = 5$
4. $S = 5$, $O = 3$	5. $S = 6$, $O = 2$	6. $S = 7$, $O = 1$

Unter Berücksichtigung der bisher gefundenen Bedingungen

$$\begin{array}{llll} E = 9 & F = 8 & R \neq 0 & M \neq 0 \\ T \neq 0 & N = R - 1 & M + T > 9 & \end{array}$$

untersuchen wir nun die sechs Möglichkeiten für S und O.
Zunächst wird I berechnet. Dann wird ein R beliebig gewählt, wobei zu berücksichtigen ist, dass $M + T > 9$ und $R \neq 0$. Die bereits belegten Ziffern werden bei der Untersuchung jeweils ausgelassen: Mit dem R ergibt sich gleichzeitig $N = R - 1$. Aus M und R lässt sich T berechnen.

Auf diese Weise werden alle möglichen Fälle erfasst. Sobald für einen Buchstaben eine Ziffer auftritt, die schon für einen anderen Buchstaben verwendet wurde, oder sobald $T > 9$ sein müsste, ist gezeigt, dass für diese Ziffernkombination keine Lösung vorliegt.

Aus den nachstehenden Berechnungsübersichten erkennen wir, dass nur in drei Fällen die Ziffernkombinationen den erforderten Bedingungen genügen.

1. $S = 1$, $O = 7$

$$\begin{array}{lllll}
M = 2 & I = 4 & R = 3 & N = 2 = M & \\
 & & R = 5 & N = 4 = I & \\
 & & R = 6 & N = 5 & T = 13 \\
M = 3 & I = 5 & R = 2 & N = 1 = S & \\
 & & R = 4 & N = 3 = M & \\
 & & R = 6 & N = 5 = I & \\
M = 4 & I = 6 & R = 2 & N = 1 = S & \\
 & & R = 3 & N = 2 & T = 9 = E \\
 & & R = 5 & N = 4 = M &
\end{array}$$

2. $S = 2$, $O = 6$

$$\begin{array}{lllll}
M = 1 & I = 4 & R = 3 & N = 2 = S & \\
 & & R = 5 & N = 4 = I & \\
 & & R = 7 & N = 6 = O & \\
M = 3 & I = 6 = O & & & \\
M = 4 & I = 7 & R = 1 & N = 0 & T = 7 = I \\
 & & R = 3 & N = 2 = S & \\
 & & R = 5 & N = 4 = M & \\
 & & R = 7 & N = 6 = O & \\
M = 5 & I = 8 = F & & & \\
M = 7 & I = 0 & R = 1 & N = 0 = I & \\
 & & R = 3 & N = 2 = S & \\
 & & R = 4 & N = 3 & T = 6 = O \\
 & & R = 5 & N = 4 & T = 7 = M
\end{array}$$

3. $S = 3$, $O = 5$

$$\begin{array}{lllll}
M = 1 & I = 5 = O & & & \\
M = 2 & I = 6 & R = 1 & N = 0 & T = 9 = E \\
 & & R = 4 & N = 3 = S & \\
 & & R = 7 & N = 6 = I & \\
M = 4 & I = 8 = F & & & \\
M = 6 & I = 0 & R = 1 & N = 0 = I & \\
 & & R = 2 & N = 1 & T = 5 = O \\
 & & R = 4 & N = 3 = S & \\
 & & R = 7 & N = 6 = M & \\
M = 7 & I = 1 & R = 2 & N = 1 = I & \\
 & & R = 4 & N = 3 = S & \\
 & & R = 6 & N = 5 = O &
\end{array}$$

4. $S = 5$, $O = 3$

$$\begin{array}{lllll}
M = 1 & I = 7 & R = 2 & N = 1 = M & \\
 & & R = 4 & N = 3 = O & \\
 & & R = 6 & N = 5 = S & \\
M = 2 & I = 8 = F & & & \\
M = 4 & I = 0 & R = 1 & N = 0 = I & \\
 & & R = 2 & N = 1 & T = 7 \\
M = 6 & I = 2 & R = 1 & N = 0 & T = 4 \\
M = 7 & I = 3 = O & & &
\end{array}$$

5. $S = 6$, $O = 2$

$$\begin{array}{lllll}
M = 1 & I = 8 = F & & & \\
M = 3 & I = 0 & R = 1 & N = 0 = I & \\
 & & R = 4 & N = 3 = M & \\
 & & R = 5 & N = 4 & T = 11 \\
M = 4 & I = 1 & R = 3 & N = 2 = O & \\
 & & R = 5 & N = 4 = M & \\
 & & R = 7 & N = 6 = S & \\
M = 5 & I = 2 = O & & & \\
M = 7 & I = 4 & R = 1 & N = 0 & T = 3
\end{array}$$

6. $S = 7$, $O = 1$

$$\begin{array}{lllll}
M = 2 & I = 0 & R = 3 & N = 2 = M & \\
 & & R = 4 & N = 3 & T = 11 \\
M = 3 & I = 1 = O & & & \\
M = 4 & I = 2 & R = 3 & N = 2 = I & \\
 & & R = 5 & N = 4 = M & \\
 & & R = 6 & N = 5 & T = 11 \\
M = 5 & I = 3 & R = 2 & N = 1 = O & \\
 & & R = 4 & N = 3 = I & \\
 & & R = 6 & N = 5 = M & \\
M = 6 & I = 4 & R = 2 & N = 1 = O & \\
 & & R = 3 & N = 2 & T = 6 = M \\
 & & R = 5 & N = 4 = I &
\end{array}$$

Die drei Lösungen sind:

$$\begin{array}{llll}
1. & E = 9 & O = 3 & R = 2 \\
 & F = 8 & M = 4 & N = 1 \\
 & S = 5 & I = 0 & T = 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
534492 \\
357599 \\ \hline
892091
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2. & E = 9 & O = 3 & R = 1 \\
 & F = 8 & M = 6 & N = 0 \\
 & S = 5 & I = 2 & T = 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
536691 \\
354599 \\ \hline
891290
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
3. & E = 9 & O = 2 & R = 1 \\
 & F = 8 & M = 7 & N = 0 \\
 & S = 6 & I = 4 & T = 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
627791 \\
263699 \\ \hline
891490
\end{array}$$

Beispiel 48. Ein Divisions-Algorithmus ist durch folgende Darstellung gegeben

$$\begin{array}{l}
AAAAAA : JHO = JOD \\
\;\; ORBA \\
\;\;\;\; RADA \\
\;\;\;\;\;\;\;\; 0
\end{array}$$

Jeder Buchstabe bedeutet wieder eine ganze Zahl aus dem Intervall $[0, 9]$. Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt ähnlich wie im Beispiel 47. Der Divisionsrest $AAAA$: $JHOHO$ ist ORB, also ist $ORB < JHO$, d.h., $O < J$. Wegen $AAAA = JHO \cdot J+$ Rest und $ORBA = JHO \cdot O +$ Rest ist $AAAA > ORBA$, d.h. $A > 0$. In der folgenden Tabelle sind die möglichen Zahlenkombinationen zusammengestellt. (Wir wissen also, dass $D \cdot O$ eine Zahl ist, die mit A endet; bei der Aufstellung der Tabelle gehen wir von der Parität der Zahlen D und J aus.)

Fall	I	II	III	IV
A	gerade	gerade	gerade	ungerade
O	gerade	ungerade	gerade	ungerade
D	ungerade	gerade	gerade	ungerade
$XA - O^{25}$	gerade	ungerade	gerade	gerade

Aus der zweiten Teildivision ergibt sich, dass D die letzte Ziffer der Differenz $XA - O^2$ ist. Die Fälle I, II und IV sind deshalb nicht möglich, und es bleibt nur der Fall III.

Aus dem vorletzten Rest ergibt sich $O \neq 0$. Da O gerade ist, ist $O \geq 2$ und ferner $A > O$: Weil A gerade ist, ist $A = 4$, 6 oder 8. Wir überprüfen diese die Fälle:

a) Für $A = 4$ ist $O = 2$ ($O < A$, O ist gerade). Nach der obigen Tabelle folgt daraus $D = 0$, was nicht möglich ist (s. letzte Teildivision).

b) Für $A = 6$ ist $O = 2$ oder $O = 4$. Für $O = 2$ erhalten wir an der letzten Zeile der Tabelle $D = 2 = O$, was nicht möglich ist.
Für $O = 4$ ergibt sich aus der letzten Zeile der Tabelle $D ==$, was ebenfalls nicht möglich sein kann.
Für A verbleibt damit nur als einzige Möglichkeit $A = 8$.

Wäre $J < 9$, ergäbe sich $JHO \cdot JOD < 900^2 = 810000$, somit $JHO \cdot JOD < AAAAAA = 888888$; und das widerspricht der gegebenen Bedingung.

Es ist also $J = 9$.

Für O und D erhalten wir folgende Möglichkeiten ($O < A$, $O \neq D$; D und O gerade):

O	2	4	2	6	4	6
D	4	2	6	2	6	4

Die letzten vier Fülle widersprechen der Beziehung $YA = O \cdot D$. Für $O = 4$, $D = 2$ hat die Multiplikation $RADA = JHO \cdot D$ das Ergebnis $H = 1$, $R = 1$, was nicht möglich ist.
Aus der letzten Tabelle ergibt sich somit $O = 2$, $D = 4$.

Daraus erhalten wir $B = 0$ (aus dem Produkt $JHO \cdot J$) und ferner $9H + 1 + R = 58$, und damit $H = 6$, $R = 3$. Die Aufgabe hat also (wie die Probe bestätigt) nur eine einzige Lösung nämlich:

$$\begin{array}{l} 888888 : 962 = 924 \\ \;\;2308 \\ \;\;\;\;3848 \end{array}$$

Beispiel 49. Es sind alle Tripel ganzer positiver Zahlen zu bestimmen, die die Gleichung

$$9x + 10y + 11z = 400 \tag{60}$$

erfüllen.

Die Analyse ist wieder eine Kombination von Deduktion und Experiment. Setzen wir $400 - 11z = t$, so lautet die Gleichung (60)

$$9x = t - 10y \tag{61}$$

Addieren wir zu beiden Seiten $9y$, so erhalten wir auf der rechten Seite ein Vielfaches von 9, denn die Zahl $t - 10y$ ist - wie aus der Gleichung (61) hervorgeht - durch neun teilbar. Es existiert somit eine ganze Zahl u, für die die Beziehung gilt

$$9u = t - y \tag{62}$$

Wenn wir in diese Gleichung $t = 400 - 11z$ einsetzen und nach y auflösen, ergibt sich

$$y = 400 - 11z - 9u \tag{63a}$$

Setzen wir das y von (63a) in (61) ein, so erhalten wir nach Umformung

$$x = 11z + 10u - 400 \tag{63b}$$

Jede Lösung ist somit durch die Gleichungen (63a) und (63b) gegeben: z und u sind dabei geeignete ganze Zahlen, außerdem ist $z > 0$. Wegen $x > 0$ und $y > 0$ ist auch $x + y > 0$ und damit $u > 0$.
Aus den Gleichungen (63a) und (63b) erhalten wir ferner

$$\frac{10}{9}(400 - 11z) > 10u > 400 - 11z \tag{64}$$

Wegen $u \geq 1$ gilt nach (63a) $11z < 400 - 9 \cdot 1 = 391$ bzw. $z < 35\frac{6}{11}$.
Wir müssen nun überprüfen, d.h. Experimente machen, um zu ermitteln, welche u für $z = 1, 2, ..., 35$ zulässig sind. Wir stellen eine Tabelle (nächste Seite) auf, deren vierte Spalte mit Hilfe der Ungleichung (64) ermittelt wird.
Wir berechnen nach den Formeln (63a) und (63b) zu jedem z, u die zugehörigen x, y und erhalten 76 Möglichkeiten. Die Probe ergibt, dass tatsächlich 76 Lösungen möglich sind; z.B. für $z = 13$, $u = 27$ erhalten wir: $x = 13$, $y = 14$; für $z = 14$ ist $x = 14; y = 12$.

Die Beispiele 47 bis 49 (besonders Beispiel 49) zeigten die Bedeutung des Experimentes bei der Analyse der Aufgabe. Wir verwenden es zu einer weiteren Einengung des Grundbereichs. Würden wir diese Einengung nicht schon bei der Analyse vornehmen, müsste sie ein Teil der Probe sein.

Eine weitere Aufgabengruppe, bei der in der Schule die Anwendung der experimentellen Methode vorteilhaft sein kann, bilden die Kurvendiskussionen.

Wir verstehen darunter die Untersuchung einiger wichtiger Eigenschaften einer Funktion, z.B. die Grenzwerte, die Stetigkeit, die Maxima und Minima (Extremwerte), die Feststellung von Nullstellen usw.

Es ist verständlich, dass wir uns hauptsächlich auf ganze rationale Funktionen beschränken und nur elementare Hilfsmittel verwenden wollen. Zur experimentellen Methode gehört auch die Herstellung einer graphischen Darstellung (eines Diagramms) mit Hilfe einiger zusammengehöriger und geeignet gewählter Werte der unabhängigen und abhängigen Variablen.
Dazu wieder einige Beispiele.

z	$400-11z$	$\frac{10}{9}(400-11z)$	$10u$ (u ganze Zahl)
1	389	432, ...	390, 400, 410, 420, 430
2	373	420,0	380, 390, 400, 410
3	367	407, ...	370, 380, 390, 400
4	356	395, ...	360, 370, 380, 390
5	345	383, ...	350, 360, 370, 380
6	334	371, ...	340, 350, 360, 370
7	323	353, ...	330, 340, 350
8	312	346, ...	320, 330, 340
9	301	334, ...	310, 320, 330
10	290	322, ...	300, 310, 320
11	279	310,0	280, 290, 300
12	268	297, ...	270, 280, 290
13	257	235, ...	260, 270, 280
14	246	273, ...	250, 260, 270
15	235	261, ...	240, 250, 260
16	224	243, ...	230, 240
17	213	236, ...	220, 230
18	202	224, ...	210, 220
19	191	212, ...	200, 210
20	180	200,0	190
21	169	187, ...	170, 180
22	158	175, ...	160, 170
23	147	163, ...	150, 160
24	136	151, ...	140, 150
25	125	138, ...	130
26	114	126, ...	120
27	103	114, ...	110
28	92	102, ...	100
29	81	90,0	-
30	70	77, ...	-
31	59	65, ...	60
32	48	53, ...	50
33	37	41, ...	40
34	26	23, ...	-
35	15	16, ...	-
36	4	4, ...	-

Beispiel 50. Es ist die graphische Darstellung der folgenden Funktion gesucht:

$$y = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

Wir stellen eine Werttabelle auf (65a)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	1	1	-3	-5	1

Dann tragen wir die den Wertepaaren entsprechenden Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein (Abb. 20).
Die Einheiten auf den Achsen wählen wir im Verhältnis 2 : 1. Wir erhalten so sechs Punkte A, B, C, D, E, F, die, wie man sieht, noch nicht zur Darstellung des Kurvenverlaufes ausreichen. Es ist erforderlich, weitere Wertepaare in die Wertetabelle (65a) aufzunehmen. Wir wählen zusätzlich $x = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ und erhalten eine neue Wertetabelle (65 b):

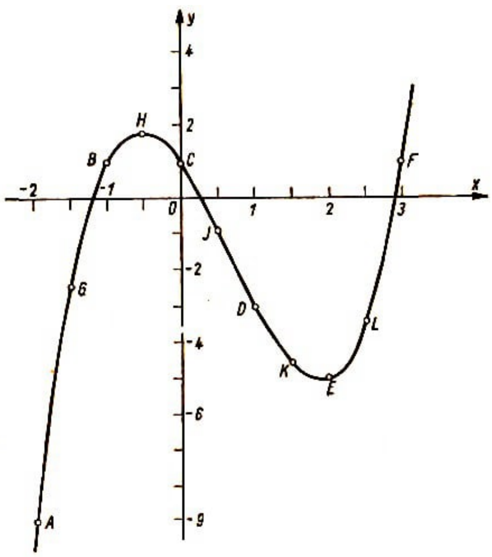


Abb. 20

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	-9	$-\frac{19}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	1	$-\frac{7}{8}$	-3	$-\frac{37}{8}$	-5	$-\frac{27}{8}$	1

Mit ihrer Hilfe erhalten wir in Abb. 20 die weiteren Punkte G, H, J, K, L. Diese Punkte genügen zur graphischen Darstellung, die uns wesentlichen Eigenschaften der gegebenen Funktionen zeigt.

Beispiel 51. Es sind die Nullstellen der Funktion aus Beispiel 50 zu bestimmen. (Die geforderte Genauigkeit beträgt zwei Zehntel.) Es sind also die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0 \tag{66}$$

gesucht.

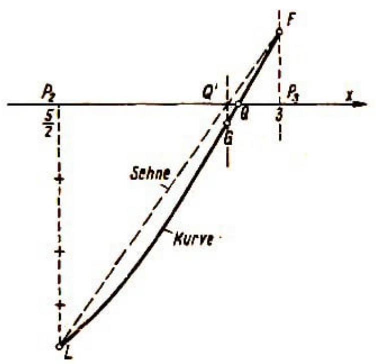


Abb. 21

Aus der graphischen Darstellung und aus der Tabelle (65h) sieht man, dass die Gleichung (66) drei reelle Wurzeln hat. Sie liegen in den Intervallen $(-2,-1)$, $(0,1)$ und $(2,3)$, dabei stützen wir uns eigentliche auf einen der Sätze von Weierstraß über stetige Funktionen.
Die Grenzen der Intervalle für die einzelnen Wurzeln können wir (versuchsweise) durch Experimente weiter einengen. Wir zeichnen dazu den Teil der graphischen Darstellung, der zwischen den Punkten L und F liegt, in einem größeren Maßstab heraus und erhalten die Abb. 21.

Die gesuchte Wurzel ist die Abszisse des Schnittpunktes Q der Funktionskurve mit der x-Achse. Die Sehne LF schneidet die x-Achse im Punkt Q', dessen Abszisse annähernd gleich der gesuchten Wurzel ist.
Wir berechnen sie nicht genau, sondern nur angenähert bis auf eine Dezimalstelle.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle Q'P_2L \sim \triangle Q'P_3F$ folgt die Beziehung $P_2Q' : P_3Q' = P_2L : P_3F = \frac{27}{8}$ (nach der Tabelle (65)). Es ist somit

$$P_2Q' = \frac{27}{35} \cdot P_2P_3 \approx \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0,4$$

Wir berechnen.nun den y-Wert für $x = 2,5 + 0,4 = 2,9$ mit Hilfe der folgenden Tabelle

x^3	+24,39
$-2x^2$	-16,82
$-3x$	-8,70
$+1$	+1,00
y	-0,13

Es ist somit $Q'G = 0,13$, $P_3F + Q'G = 1 + 0,13$. Den Bogen GQF ersetzen wir wieder durch eine Sehne. Da $0,13 : (0,13+1) \approx \frac{1}{9}$ ist, wiederholen wir die Berechnung für $x = 2,5 + 0,4 + 0,01 = 2,91$ und erhalten $y = -0,014$.
Die gesuchte Wurzel x (die Abszisse des Punktes Q) ist somit annähernd $x_1 = 2,91$.

Durch diese Methode bestimmen wir eigentlich experimentell die Dezimalbruchentwicklung der Wurzel. Es handelt sich hierbei im wesentlichen um die bekannte Methode von Leibnitz, die sogenannte "regula falsi".

Die übrigen zwei Wurzeln der Gleichung (66) bestimmen wir annähernd entweder auf

ähnliche Art wie oben oder durch Zerlegung des Polynoms (66) in ein Produkt von Linearfaktoren.
Wie man aus der Algebra weiß, kann man das Polynom als Produkt schreiben,

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x - 2,91)(x^2 + \alpha x + \beta) \tag{67}$$

wobei α und β reelle Zahlen sind. Die Beziehung (67) gilt für alle reellen x. Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus folgende Gleichungen

$$\alpha - 2,91 = -2, \qquad \beta - 2,91\alpha = -3, \qquad 1 = -2,91\beta \tag{68}$$

Aus der ersten Gleichung (68) ergibt sich $\alpha = 0,91$ und aus der zweiten $\beta = -0,35$. Die rechte Seite der dritten Gleichung ergibt $-2,91 \cdot \beta = 1,0185$. Das bedeutet einen Fehler von nicht ganz zwei Hundertsteln. Die zwei noch fehlenden Wurzeln der Gleichung (66) sind nach (67) die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 0,91x - 0,35 = 0$$

Für diese Gleichung findet man nach Anwendung der Lösungsformel mit Hilfe einer Quadrattafel die Wurzeln 0,29 und -1,20.
Die gefundenen Werte 2,91, 0,29 und -1,20 sind natürlich nur Näherungswerte für die Wurzeln. Wie man sieht, passen sie sowohl in die graphische Darstellung (Abb. 20) als auch in die Tabelle (65h).

Die Experimente haben bei der Lösung von Aufgaben einen viel weiteren Anwendungsbereich, als das aus den angeführten Beispielen hervorgeht. Von ganz besonderer Bedeutung sind dabei noch die sogenannten Gegenbeispiele.

Beispiel 52. Es ist zu entscheiden, ob sämtliche Zahlen, die man für nicht negatives ganzzahliges n aus der Formel

$$f_n = 2^{2^n} + 1$$

errechnen kann, Primzahlen sind, oder ob es darunter auch zusammengesetzte Zahlen gibt.

Fermat stellte die Hypothese auf, dass alle Zahlen f_n Primzahlen sind. Diese Hypothese ergibt sich auf Grund von Probeuntersuchungen für einige Werte von n. Wir bezeichnen dieses Vorgehen als unvollständige (naturwissenschaftliche) Induktion. Das Ergebnis der Probeuntersuchungen stellen wir in einer Tabelle zusammen.

n	0	1	2	3	4
2^n	1	2	4	8	16
2^{2^n}	2	4	16	256	65536
f_n	3	5	17	257	65537

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind die Zahlen f_0, f_1, f_2, f_3 und f_4. tatsächlich Primzahlen. Eine weitere Untersuchung ist wegen der Größe der folgenden Zahlen schwieriger.
Die Vermutung von Fermat kann aber dadurch widerlegt werden, dass man wenigstens eine zusammengesetzte Zahl f_n findet. Ein solches Beispiel wird im Hinblick auf die

aufgestellte Hypothese als Gegenbeispiel bezeichnet.

Im Falle der Fermatschen Vermutung ist das Gegenbeispiel verhältnismäßig leicht zu finden. Für $n = 5$ ist $2^n = 32$, $2^{2^n} = 4294967296$, $f_5 = 4294967297$.
Die Zahl f_5 ist keine Primzahl, sie hat den Teiler 641.

8 Textaufgaben

8.1 Allgemeine Bemerkungen

Als 'Textaufgaben werden in der Regel arithmetische oder algebraische Aufgaben bezeichnet, die nicht durch mathematische Symbole, sondern in Worten formuliert sind. Außerdem sind Textaufgaben Aufgaben aus der Praxis, deren Lösung mittels einer arithmetischen oder algebraischen Aufgabe erfolgt. Geometrische Aufgaben bezeichnet man meist nicht als Textaufgaben.

Die Aufgabe: "Es ist diejenige Zahl x zu bestimmen, deren Dreifaches vermehrt um eins sieben ergibt" wird z B. als Textaufgabe angesehen, während man die Aufgabe $[x]+[2x]=7$ nicht als Textaufgabe bezeichnet. ($[x]$ bedeutet für eine reelle Zahl x die Zahl $g=[x]$ mit der Eigenschaft: g ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der Zahl x ist.)

Man muss jedoch darauf aufmerksam machen, dass auch bei Aufgaben, die durch Gleichungen oder Ungleichungen gegeben sind, ein erklärender Text unumgänglich notwendig ist. Wir wissen, dass eine Aufgabe wie z.B. "Löst die Ungleichung $\frac{x+2}{2x-1} < 1$" unvollständig ist und dass man sie z.B. folgendermaßen präzisieren muss:
"Bestimmt alle ganzen Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+2}{2x-1} < 1$ erfüllen."

Prinzipiell können die sogenannten Textaufgaben in zwei Gruppen unterteilt werden:

Zur ersten Gruppe gehören mathematische Aufgaben, die zum größten Teil in Worten formuliert sind und nur einen minimalen Aufwand an mathematischen Symbolen enthalten. Zu dieser Gruppe gehören z.B. geometrische Konstruktionsaufgaben.

Zur zweiten Kategorie gehören Aufgaben mathematischen Charakters, deren Themen aus dem täglichen Leben, der technischen Praxis und aus den Naturwissenschaften stammen. Jede solche Aufgabe muss zuerst in eine mathematische Aufgabe umformuliert werden.

Das ist oft auf mehrere Arten möglich. Zu dieser zweiten Kategorie gehört die Mehrzahl der Textaufgaben, die in der Schule in der Arithmetik und in der Algebra gelöst werden, z.B. Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben usw.
Eine feste Abgrenzung zwischen den beiden Aufgabengruppen gibt es jedoch nicht.

Wenden wir uns zuerst den Aufgaben der ersten Kategorie zu. Das ist der einfachere Fall, denn die mathematische Aufgabe ist hier bereits gegeben und muss nicht erst ermittelt werden. Erforderlich ist lediglich ihre Lösung. Wir werden deshalb mit den Schüler zuerst Textaufgaben dieser Art lösen und dann erst zu den Aufgabe der zweiten Kategorie übergehen.

Die Methodiker unterscheiden bei der Lösung von Textaufgabe zwei Möglichkeiten, einmal das Lösen durch "logisches Schließen" und zum anderen das Lösen durch "Gleichungen".

Diese Klassifikation erfasst jedoch nur den engen Bereich der Aufgaben, die mit algebraischen Mitteln gelöst werden können. Ich glaube jedoch, dass eine Verallgemeinerung möglich ist, da es im Prinzip darum geht, ob wir bei der Lösung einer Aufgabe bzw. bei ihrer Analyse irgendeinen Algorithmus verwenden können oder ob so etwas nicht zur Verfügung steht (Algorithmus hier gemeint als Lösungsvorschrift im weitesten Sinne).
In jedem Falle ist ein gutes Verstehen des Textes der Schlüssel zur Lösung der Aufgabe, d.h. die Kenntnis nicht nur der mathematischen Terminologie, sondern auch gewisser fachspezifischer Redeweisen. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 53. Es ist eine natürliche Zahl n gegeben. Zu bestimmen ist ein Bruch, der folgende Bedingung erfüllt:
Wenn der Bruch von der Zahl n subtrahiert wird, so erhalten wir das gleiche Ergebnis, wie bei der Multiplikation des Bruches mit n.

a) Lösung durch "logisches Schließen".
Der Text der Aufgabe lautet anders ausgedrückt wie folgt (wir gehen von der Definition der Subtraktion als der zur Addition inversen Operation aus): Wenn wir das n-fache des gesuchten Bruches zu dem gesuchten Bruch addieren, erhalten wir die Zahl n. Der Bruch, der sich durch Addition aus dem gesuchten Bruch und dem n-fachen dieses Bruches ergibt, ist das $(n+1)$-fache des ursprünglichen Bruches.

Wir schließen daraus, dass der gesuchte Bruch nur die Zahl $\frac{n}{n+1}$ sein kann. Eine einfache Probe ergibt, dass dies tatsächlich die Lösung der Aufgabe ist.

b) Lösung "durch eine Gleichung":
Wir bezeichnen den gesuchten Bruch mit x. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich

$$n - x = n \cdot x$$

Daraus berechnen wir $x = \frac{n}{n+1}$ und führen die Probe durch.

Beispiel 54. Es ist festzustellen, welche zeichnerische Darstellung durch die Zusammensetzung einer Drehung (Rotation) und einer Verschiebung (Translation) entsteht (durch welche einzige Bewegung kann die Nacheinanderausführung einer Drehung und einer Verschiebung ersetzt werden).

Die Lösung dieser Aufgabe setzt in jedem Falle gewisse Kenntnisse über Kongruenzabbildungen voraus. Man muss wissen, dass die Drehung als Kongruenzabbildung mit einem einzigen Fixpunkt betrachtet werden kann.
Ferner können für die Lösung der Aufgabe Kenntnisse über die Zerlegung von Kongruenzabbildungen von Vorteil sein und ebenso die Darstellung dieser Abbildungen durch Funktionen komplexer Variabler.

Es folgen drei Lösungswege für die gegebene Aufgabe.

a) Lösung "durch logisches Schließen".
Eine Drehung **R** sei durch das Drehzentrum S und ein Punktepaar (A und sein Bild A' mit $SA = SA'$) gegeben. Die Verschiebung **T** sei durch ein Punktepaar (A' und sein Bild A'') gegeben (s. Abb. 22).

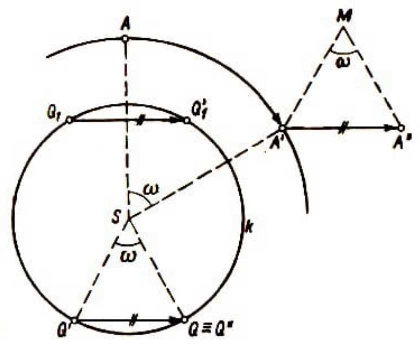


Abb. 22

Wir suchen die Fixpunkte der resultierenden Abbildung. Wenn Q der Fixpunkt der resultierenden Abbildung ist und Q' das Bild von Q bei der Drehung **R**, so ist $Q'' = Q$ das Bild des Punktes Q' bei der Verschiebung **T**.
Es ist $QQ' = A'A''$, $\angle QSQ' = \angle ASA' = \omega$ (ω ist der zur Drehung gehörige Winkel), ferner ist $QQ' \parallel A'A''$, und der Drehsinn von A nach A' ist der gleiche wie von Q nach Q'.

Aus dieser Analyse ergibt sich die Konstruktion. Wir zeichnen das gleichschenklige Hilfsdreieck $A'A''M$ mit $\angle A'MA'' = \omega$, ferner den Kreis k mit dem Mittelpunkt S und dem Radius $MA' = MA''$. Dann zeichnen wir in den Kreis k die Sehnen QQ' und Q_1Q_1' der Länge $A'A''$ parallel zu $A'A''$ ein.
Die Bezeichnung der Endpunkte der Sehnen wählen wir so, dass Q' das Bild von Q und Q_1' das Bild von Q_1 bei der Drehung **R** ist. Von den beiden Strecken QQ' und Q_1Q_1' ist eine parallel, aber entgegengesetzt orientiert zur Strecke $A'A''$ (in der Abb. 22 ist dies die Strecke QQ').

Durch die Verschiebung **T** kommt der Punkt Q' nach $Q'' = Q$. Die resultierende Abbildung hat somit nur den einzigen Fixpunkt Q. Sie ist also die Drehung um das Drehzentrum Q (und bringt Punkt A nach Punkt A'').

b) Lösung mittels Algorithmus.
Es wird die Kenntnis folgender Sätze vorausgesetzt.

α) Jede Drehung kann in zwei Spiegelungen zerlegt werden, deren Symmetrieachsen durch das Drehzentrum der Drehung geben. Als erste oder zweite Symmetrieachse kann eine beliebige Gerade durch den Mittelpunkt gewählt werden.

β) Jede Verschiebung kann in zwei Spiegelungen zerlegt werden, deren Symmetrieachsen parallel und senkrecht zur Verschiebungsrichtung sind. Als erste oder zweite Symmetrieachse kann eine beliebige zur Verschiebungsrichtung senkrechte Gerade gewählt werden.

γ) Die Zusammensetzung von zwei beliebigen Spiegelungen mit einander schneidenden Symmetrieachsen ergibt eine Drehung.

Wir zerlegen die gegebene Drehung **R** und die gegebene Verschiebung **T** in Spiegelungen. Mit o_2 bezeichnen wir die Gerade, die durch das Drehzentrum S der Drehung **R** geht und senkrecht zur Verschiebungsrichtung **T** ist. Die zugehörige Spiegelung bezeichnen wir mit $\mathbf{O}_2$.

Die Zerlegungen der Abbildungen **R** und **T** sind dann

$$\mathbf{R} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \qquad , \qquad \mathbf{T} = \mathbf{O}_2\mathbf{O}_3 \tag{69}$$

o_1, o_2 sind einander schneidende, o_2, o_3 parallele Symmetrieachsen. Nach erfolgter Zusammensetzung der Abbildungen gilt das Assoziativgesetz und damit nach (69)

$$\mathbf{RT} = (\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2)(\mathbf{O}_2\mathbf{O}_3) = [\mathbf{O}_1(\mathbf{O}_2\mathbf{O}_3)]\mathbf{O}_3 \tag{70}$$

Es ist ferner $\mathbf{O}_2\mathbf{O}_2 = \mathbf{J}$ (**J** ist die identische Abbildung), $\mathbf{O}_1\mathbf{J} = \mathbf{O}_1$. Aus (70) ergibt sich

$$\mathbf{RT} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_3$$

da $o_1 o_3$ einander schneidende Geraden sind, ist die Abbildung $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_3$ nach dem Satz γ) eine Drehung.

c) Lösung mit der Koordinatenmethode. In der komplexen Zahlenebene wird eine Drehung **R** durch die Funktion

$$z' = \varepsilon z + k \tag{71}$$

ausgedrückt. Dabei ist $\varepsilon \neq 1$ die komplexe Einheit, k eine komplexe Zahl, z und z' sind die Koordinaten vor und nach der Drehung (man kann $k = 0$ erzielen, wenn das Drehzentrum der Drehung **R** als Ursprung des Koordinatensystems gewählt wird). Die Verschiebung **T** ist durch die Funktion

$$z'' = z' + m \tag{72}$$

gegeben; $m \neq 0$ ist eine komplexe Zahl, z' und z'' sind die Koordinaten vor und nach der Verschiebung. Die resultierende Abbildung **RT** erhalten wir, wenn wir für z' in Gleichung (72) z' aus (71) einsetzen. Es ergibt sich

$$z - \varepsilon z + (k + m) \tag{73}$$

Die Gleichung (73) beschreibt eine Drehung. Wir überzeugen uns davon, indem wir die Fixpunkte suchen. Wir erhalten nur einen einzigen Fixpunkt mit der Koordinate $\frac{k+m}{1-\varepsilon}$.

Aus den Beispielen 53 und 54 ziehen wir folgende Schlüsse.
Zur Lösung mathematischer Textaufgaben verwenden wir entweder einen geeigneten Algorithmus, oder wir kommen durch "logisches Schließen" zur Lösung.

Der erste Lösungsweg ist ökonomischer und in der Regel einfacher, er verlangt jedoch, dass die notwendigen Voraussetzungen geschaffen werden. Der zweite Lösungsweg ermöglicht es uns gewöhnlich, die Grundgedanken der Aufgabe besser zu erfassen. Dies gilt besonders für geometrische Aufgaben (s. Beispiel 54). Er eignet sich aber in der Regel nicht zur Lösung kombinierter Aufgaben.

Es ist deshalb unvorteilhaft, im Unterricht sie so lange zurückzustellen, bis alle erforderlichen algebraischen Kenntnisse für den ersten Weg vorhanden sind.
Die Lösung durch logisches Schließen besteht oft in der Anwendung der Umkehrung einfacher algebraischer Operationen. Für geometrische Konstruktionsaufgaben liegt der

Fall jedoch anders, sie müssen in der Schule immer durch "logisches Schließen" gelöst werden.

Es ist ferner notwendig, kurz auf die Begriffe synthetische und analytische Methode einzugehen, die in fast jeder Unterrichtsmethodik bei Textaufgaben angeführt werden. Die analytische Methode ist in der Regel dadurch charakterisiert, dass von der Frage der Aufgabe ausgegangen wird und zusätzlich Angaben, die zur Beantwortung der Frage erforderlich sind, gesucht werden. Dies geschieht so lange, bis Zahlen zur Verfügung stehen, die durch eine einzige Rechenoperation aus den im Text der Aufgabe gemachten Angaben ermittelt werden können.

Bei der synthetischen Methode hingegen ermitteln wir aus den im Text gemachten Angaben weitere Angaben, bis die Frage der Aufgabe beantwortet ist.
Diese Beschreibung der beiden "Methoden" bezieht sich vor allem auf Textaufgaben aus der Praxis, die mittels einiger Grundrechenoperationen gelöst werden können und die gewöhnlich noch nicht als mathematische Aufgaben formuliert sind.

Gegen die sogenannte synthetische Methode sind nachstehende ernstliche Einwände zu erheben:

1. Mit der Lösung der Aufgabe wird oft bereits begonnen, bevor die Aufgabe als mathematisches Problem umformuliert wurde, was grundsätzlich vermieden werden muss.

2. Bei Anwendung der sogenannten synthetischen Methode kann es geschehen, dass von vielen möglichen Lösungen nur eine gefunden wird. Es ist jedoch unzulässig, von vornherein vorauszusetzen, dass eine gegebene Aufgabe nur eine Lösung hat.
Es wäre z.B. falsch, wenn wir uns bei der Lösung einer Konstruktionsaufgabe schon mit einer experimentell gefundenen Konstruktion eines Objektes, das die geforderten Bedingungen erfüllt, zufrieden geben.
Ein solches Verhalten steht im Widerspruch zum eigentlichen Sinn der Lösung einer mathematischen Aufgabe.

3. Die synthetische Methode ist darüber hinaus für die Lehre ungeeignet. Die Mathematik soll die Schüler zu selbständiger, genau geplanter Arbeit erziehen.
Das kann nur die analytische Methode leisten, weil bei ihr durch die Analyse in der Regel der Lösungsweg ermittelt wird. Eine Lösung mit der "synthetischen Methode" ist: meist ein Hin- und Herprobieren.

Aus den angeführten Gründen können wir die sogenannte synthetische Methode überhaupt nicht als echte Methode werten, sie ist höchstens für gewisse Experimente, von denen in den Kapiteln 6 und 7 die Rede war, geeignet. Das Ergebnis des Experimentierens muss jedoch stets durch eine ordnungsgemäße Lösung der Aufgabe, die eine vollständige Analyse einschließt, bestätigt werden.

Wir wenden uns nun der zweiten Kategorie von Textaufgaben zu.
Es sind die Textaufgaben mathematischen Charakters, aus denen wir aber erst eine mathematische Aufgabe machen müssen. Wir finden uns dabei ausschließlich mit der Frage der Aufstellung der mathematischen Aufgabe befassen, denn hierin besteht der

Zusammenhang der Mathematik mit ihren Anwendungen und somit der eigentliche Schlüssel zur Anwendung der Mathematik auf die Lösung von Problemen des täglichen Lebens.

Wir stellen folgenden Grundsatz auf:

Eine Textaufgabe kann nur gelöst werden, wenn sie klar als mathematische Aufgabe formuliert ist.

Dieser Grundsatz erscheint selbstverständlich; trotzdem wird oft gegen ihn verstoßen, besonders dann, wie wir noch sehen werden, wenn Textaufgaben durch "logisches Schließen" gelöst werden.
Eine mathematische Aufgabe enthält bereits, wie im Kap. 1 ausgeführt wurde, irgendeine Relation zwischen mathematischen Objekten (z.B. quantitative oder räumliche Beziehungen). Bevor wir solche Relationen feststellen, d.h., bevor wir aus der Textaufgabe eine mathematische Aufgabe machen, müssen wir uns eingehend über das Wesen des Problems informieren.

Konkret bedeutet das, dass wir den Schülern vor der Aufstellung der mathematischen Aufgabe bestimmte naturwissenschaftliche oder technische Kenntnisse, die zum Verständnis der Textaufgabe erforderlich sind, in das Gedächtnis zurückrufen müssen.
Es ist ferner notwendig, das gesuchte mathematische Objekt genau festzulegen, wobei wir von der in der Aufgabe gestellten Frage ausgehen.

Im weiteren Verlauf der Erarbeitung der Aufgabenstellung kann es sich weiterhin als notwendig erweisen, zusätzliche Hilfsgrößen einzuführen. In einem solchen Falle müssen wir die im Text gegebenen Bedingungen vom praktischen Sachverhalt her in besonders konkreter Form erläutern, natürlich unter Berücksichtigung des Alters und des Ausbildungsgrades der Schüler.
Für nicht sehr glücklich halten wir den Gedanken, Zahlenangaben durch Strecken zu veranschaulichen. Für jüngere Schüler ist diese Art der Darstellung zu abstrakt und meist wertlos, da ihnen die geometrische Veranschaulichung der Rechenergebnisse auf einer Zahlengeraden noch fremd ist.

Fortgeschrittene Schüler verdeutlichen sich die Aufgaben und Relationen lieber gleich durch algebraische Ausdrücke. Bei geometrischen Aufgaben erfolgt eine konkrete Darstellung direkt durch eine Skizze (Hilfsfigur).

Aus der mathematischen Formulierung der im Text angegebenen Bedingungen erhalten wir eine mathematische Aufgabe, die wir dann zu lösen haben. Es kann jedoch vorkommen, dass einige der Bedingungen nicht mathematisch ausdrückbar sind (manchmal sagt auch der Text nichts darüber aus).
In einem solchen Falle sind nicht alle Lösungen, die wir durch Lösung der mathematischen Aufgabe erhalten, auch Lösungen der Textaufgabe. Es muss deshalb bei Textaufgaben stets noch auf eine andere Art die Probe gemacht werden, nämlich an Hand des Textes, um festzustellen, ob die aufgestellte und gelöste mathematische Aufgabe dem konkreten durch den Text gegebenen Sachverhalt entspricht. Wenn sich danach die Lösung als richtig erweist, formulieren wir den Antwortsatz auf die Frage der Text-

aufgabe.

8.2 Beispiele

Wir erläutern die Grundsätze für die Aufstellung von mathematischen Aufgaben anhand einiger Beispiele.

Beispiel 55. Das Gesamtgewicht von frischen Pilzen besteht zu 90% aus Wasser, das von getrockneten Pilzen nur zu 12%. Wieviel getrocknete Pilze erhalten wir aus 10 kp frischen Pilzen?

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.
Zur Feststellung der Relation für das gesuchte Objekt gehen wir von folgender Überlegung aus: Bei der Trocknung von Pilzen wird lediglich Wasser abgegeben. Der Gewichtsanteil der sogenannten Trockensubstanz, nicht zu verwechseln mit dem Rauminhalt, ändert sich nicht. Diese Tatsache ist im Text nicht erwähnt.
Da sich das Gewicht des Wasseranteiles bei der Trocknung ändert, werden wir bei den weiteren Überlegungen mit der unveränderlich bleibenden Gewichtskomponente, dem Gewicht der Trockensubstanz, arbeiten.

Aus dem Text der Aufgabe ergibt sich:
a kp frische Pilze enthalten $\frac{9}{10} \cdot a$ kp Wasser und $\frac{1}{10} \cdot a$ Trockensubstanz, b kp getrocknete Pilze enthalten $\frac{12}{100} \cdot b$ kp Wasser und $\frac{88}{100} \cdot b$ kp Trockensubstanz.

Die Frage der Aufgabe richtet sich auf das Gewicht der getrockneten Pilze. Dieses Gewicht betrage x kp. Die gesuchte Menge von x kp getrockneter Pilze enthält nach den Angaben des Textes somit 88 % Trockensubstanz. Bei der Trocknung von 10 kp frischen Pilzen erhält man $\frac{1}{10} \cdot 10$ kp Trockensubstanz. Wie wir anfangs feststellten, ändert sich die Gewichtsmenge der Trockensubstanz nicht. Also ergibt sich

$$\frac{88}{100} \cdot x = \frac{1}{10} \cdot 10 \tag{74}$$

Damit ist die mathematische Aufgabe aufgestellt. Sie ist in Form einer Gleichung gegeben, sie kann aber auch wieder als eine Textaufgabe formuliert werden, nämlich: 88% von x ergeben eine Zahl, die genauso groß ist wie 10% von der Zahl 10.

Als Lösung der Gleichung (74) erhalten wir $x = \frac{25}{22} \approx 1,14$ (gerundet auf zwei Dezimalstellen). Die Probe für die Gleichung (74) lassen wir weg.
Wir überprüfen jedoch, ob die gefundene Zahl $\frac{25}{22}$ den Bedingungen der Textaufgabe entspricht, indem wir das Gewicht der Trockensubstanz von $\frac{25}{22}$ kp getrockneten Pilzen und von 10 kp irischen Pilzen ausrechnen. In beiden Fällen erhalten wir 1 kp Trockensubstanz.

Beispiel 56. Ein Gang von der Breite a (in Metern) hat einen rechtwinkligen Knick. Welches ist die größte Länge, die ein Balken haben darf, damit er in waagerechter Lage durch den Gang transportiert werden kann? (Abb. 23)

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.

Als erstes ist es notwendig, sich die beschriebene Situation an Hand einer Skizze zu verdeutlichen. Da der Balken in waagerechter Lage transportiert werden soll, können wir von der Darstellung im Grundriss ausgehen (Abb. 23).
Den Grundriss des Ganges kann man folgendermaßen beschreiben:

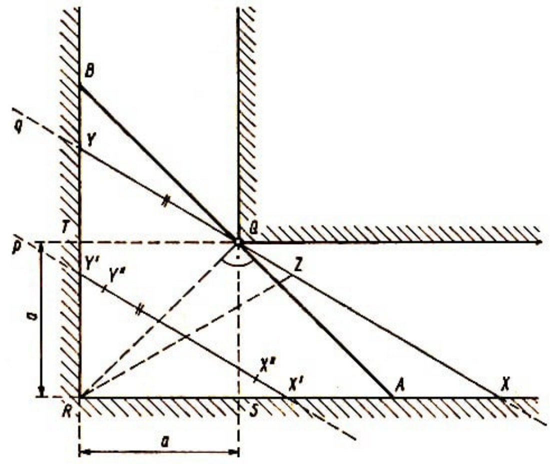


Abb. 23

Es sind ein Quadrat $RSQT$ mit der Seitenlänge a gegeben, sowie die Verlängerungen der Quadratseiten über die Punkte S, Q und T hinaus (Halbgeraden RS, RT, SQ und TQ).
Der Ausdruck "den Balken durch den Gang transportieren" muss nun mathematisch formuliert werden. Da der Balken in waagerechter Lage bleiben soll, können wir uns vorstellen, dass er auf Grundfläche des Ganges verschoben wird.
Das entspricht der Verschiebung einer Strecke im Grundriss. Wenn während des Transportes die Richtung des Balkens gleich der Richtung einer bestimmten Geraden p ist, die nicht durch den Eckpunkt Q geht, so ist seine Länge durch die Strecke $X'Y'$ begrenzt, denn $X''Y'' < X'Y'$.

Wenn beim Transport der Balken die Richtung einer bestimmten Geraden q hat, die durch den Punkt geht, so ist seine Länge durch die Strecke XY begrenzt, weil $X'Y' < XY$ ist.
Die größte zulässige Länge des Balkens ist somit gleich der kleinsten Länge aller Strecken XY, die durch den Eckpunkt Q gehen. Wir formulieren die mathematische Aufgabe wie folgt:

Es ist ein Quadrat $RSQT$ mit der Seitenlänge a gegeben. Eine Strecke XY geht durch den Eckpunkt Q des Quadrates. Der Endpunkt X der Strecke liegt auf der Halbgeraden RS, der Endpunkt Y auf der Halbgeraden RT. Es ist die kleinstmögliche Länge der Strecke XY zu bestimmen.

Lösung der mathematischen Aufgabe.
Zur Lösung der Aufgabe bedienen wir uns zweckmäßigerweise des Experiments, von dem im Kapitel 6 die Rede war. Dieses Experiment ersetzt die Analyse.

Durch Anschauung oder Messen gelangen wir zur Hypothese, dass die kürzeste von allen Strecken XY die Strecke AB ist, die senkrecht auf der Diagonalen RQ steht.

Diese Vermutung muss nun bewiesen werden. Dazu sind die Hypotenusen XY und AB der rechtwinkligen Dreiecke RXY und RAB zu vergleichen.
Wir können auch die Strecken RQ und RZ vergleichen, wobei Z der Mittelpunkt der Hypotenuse XY ist. Das ist zulässig, da nach dem Satz von Thales folgende Beziehungen gelten:

$$RQ = \frac{1}{2}AB \qquad , \qquad RZ = \frac{1}{2}XY$$

Liegt der Punkt X (s. Abb. 23) so, dass $RX > RA$, so ist $QX > QY$, und der Punkt Z liegt zwischen den Punkten Q und X, also auf der Halbgeraden OX. Weil der Punkt A zwischen R und X liegt, ist

$$\angle RQX = \angle RQA + \angle AQX$$

Ist $\angle RQA$ ein rechter, so ist $\angle RQX = \angle RQZ$ ein stumpfer Winkel. Er ist somit im Dreieck RQZ der größte Innenwinkel, $RZ > RQ$ folgt, was zu beweisen war.

Der obige Beweis erscheint zunächst sehr gekünstelt, aber er ist es gar nicht. Überlegen wir uns einmal, auf welche Weise in der Elementargeometrie zwei Strecken miteinander verglichen werden:
Entweder berechnen wir ihre Längen, oder wir führen den Vergleich der Strecken auf einen Vergleich von Winkeln zurück (Lehrsatz: Im Dreieck liegt dem größten Winkel die größte Seite gegenüber).

Und diese Vergleichsmöglichkeit haben wir gewählt. Es war dann nur noch nötig, die Situation zu finden, in der die zu vergleichenden Strecken bzw. die zu ihnen proportionalen Strecken vom gleichen Punkt ausgehen, so dass ein Dreieck ($\triangle RQZ$) entsteht.
Da wir die Analyse nicht deduktiv durchgeführt, sondern durch ein Experiment ersetzt haben, konnten wir die Probe nicht durch Umkehrung der Analyse ausführen. Die Aufgabe ist damit gelöst.

Beispiel 57. An einem Bahnsteig von der Länge d Meter fährt ein Zug mit konstanter Geschwindigkeit vorbei. Die Zeit für die Vorbeifahrt am Bahnsteig beträgt t_1 Sekunden. Auf dem Bahnsteig steht der Fahrdienstleiter. An ihm fährt der Zug in t_2 Sekunden vorbei.
Wie lang ist der Zug und wie groß ist seine Geschwindigkeit?

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.
Die Situation ist in Abb. 24 dargestellt. Die Formulierung "die Zeit für die Vorbeifahrt am Bahnsteig beträgt t_1 Sekunden" bedeutet folgendes:
Von dem Augenblick an, in dem die Lokomotive den Anfang des Bahnsteiges erreicht, bis zu dem Zeitpunkt, wo der letzte Wagen des Zuges das Ende des Bahnsteiges verlässt, vergehen t_1 Sekunden.

Die Formulierung "der Zug fährt am Fahrdienstleiter in t_2 Sekunden vorbei" bedeutet, dass vom Eintreffen der Lokomotive beim Fahrdienstleiter bis zu dem Zeitpunkt, wo der letzte Wagen an ihm vorbeigefahren ist, t_2 Sekunden vergehen. Man braucht außerdem noch die Form für die Berechnung des Weges bei konstanter Geschwindigkeit.

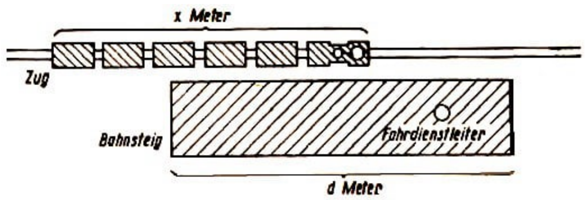


Abb. 24

Unbekannte Objekte: Zuglänge: x Meter, Zuggeschwindigkeit v Meter in der Sekunde. Während der Vorbeifahrt des Zuges am Bahnsteig legt die Lokomotive (und jeder Wagen) einen Weg von $(d + x)$ Metern zurück; der von der Lokomotive (und von jedem Wagen) während der Vorbeifahrt am Fahrdienstleiter zurückgelegt Weg beträgt x Meter.
Nach der Formel für den Weg bei konstanter Geschwindigkeit ist

$$d + x = vt_1 \quad , \quad x = vt_2 \tag{75}$$

Das Gleichungssystem (75) ist die Formulierung der Textaufgabe als mathematische Aufgabe.

Weil in dieser Aufgabe zwei Variablen für gesuchte Zahlen, nämlich x und v auftreten, ist die Lösung mittels des Gleichungssystems zweckmäßiger als durch "logisches Schließen". Ohne Verwendung der Kenntnisse über das Lösen von Gleichungssystemen müssten wir nämlich eine mathematische Aufgabe verwenden, die nur aus einer Gleichung besteht, und dazu müssten wir aus dem Gleichungssystem (75) die Variable: eliminieren. Das ergäbe die Gleichung $d = v(t_1 - t_2)$.

Die zugehörige Textaufgabe erhalten wir durch Transformation der ursprünglichen Textaufgabe. Die erste Formulierung lautete: Die Zeit, in der die Lokomotive einen Weg, der gleich der Länge des Zuges ist, zurücklegt, beträgt $t2$ Sekunden; die Zeit in der sie einen Weg gleich der Länge des Zuges vermehrt um d Meter zurücklegt, beträgt t_1 Sekunden. Es sind die Länge des Zuges und seine Geschwindigkeit zu berechnen.

Die zweite Formulierung lautet: Die Lokomotive legt einen Weg von d Metern in $(t_1 - t_2)$ Sekunden zurück; die Zeit, in der sie einen Weg gleich der Länge des Zuges zurücklegt, beträgt t_2 Sekunden. Es sind die Geschwindigkeit und die Länge des Zuges zu berechnen.

Man sieht, dass diese Umformung der Textaufgabe eigentlich die Analyse ist. Weil aber die Aufgabe nicht als mathematische Aufgabe formuliert ist, kann man den Lösungsweg nicht präzisieren. Aus diesem Grunde halte ich die Lösung "durch logisches Schließen" nicht für zweckmäßig.

Die Lösung des Beispieles 57 bleibt dem Leser überlassen. Weil es sich dabei um eine Aufgabe mit Parametern handelt, muss eine Diskussion durchgeführt werden.

Beispiel 58. Ein Betrieb soll seine Produktion jährlich um p Prozent der Produktion des Vorjahres steigern und zwar so, dass er den Fünfjahrplan a) in drei Jahren, b) in vier Jahren erfüllt. Wieviel Prozent muss die jährliche Produktionssteigerung betragen?

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.

Wenn die Produktion im ersten Jahr des Fünfjahrplanes durch die Zahl a gegeben ist (das ist die Maßzahl für die jährlich erzeugte Stückzahl oder das Gewicht des verarbeiteten Materials), so ist die Produktion nach dem zweiten Jahr des Fünfjahrplanes durch $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, nach dem dritten Jahr durch $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, nach dem vierten Jahr durch $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ gegeben.
Für $1+\frac{p}{100}=x$ lautet die mathematische Formulierung der Aufgabe a) $a+ax+ax^2=5a$, $1<x$ oder

$$x^2+x-4=0, \qquad 1<x \tag{76}$$

Die Formulierung der Aufgabe b) ist entsprechend $a+ax+ax^2+ax^3=5a$, $1<x$ oder

$$x^3+x^2+x-4=0, \qquad 1<x \tag{77}$$

Die Bedingung $1<x$ ergibt sich aus der Bedingung $p>0$.

Lösung der Aufgabe: a) Die Gleichung (76) hat die Wurzel

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Von diesen beiden Wurzeln erfüllt nur die erste die Bedingung $x>1$, damit ist

$$x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\approx\frac{4,12-1}{2}=1,56$$

Die Probe wird an Hand des folgenden Antwortsatzes durchgeführt. Um die gegebene Auflage zu erreichen, muss die Produktion jährlich um etwa 56% gesteigert werden.

Lösung der Aufgabe b). Wir kommen auf die Ausführungen über die Lösung von Gleichungen höheren Grades in Kapitel 7 zurück. Uns interessieren nur die Wurzeln x der Gleichung (77), für die $x>1$. Es ist

$$y=x^3+x^2+x-4$$

Für $x=1$ ist $y=-1$, für $x=2$ ist $y=10$, für $x>2$ ist $y>0$, denn es ist $y=x^3+x+(x+2)(x-2)$.
Es kommt also nur eine einzige Wurzel in Frage, für die $1<x<2$ ist. Aus den Werten $y=-1$ und $y=10$ schließen wir, dass die gesuchte Wurzel etwa $1+\frac{1}{11}$ ist. Wir berechnen (unter Verwendung von Tabellen für Potenzen):

x	1,1	1,2
y	-0,359	0,368

Für die gesuchte Wurzel gilt also $1,1<x<1,2$. Aus den Werten $y=-0,359$ und $y=0,368$ schließen wir, dass die gesuchte Wurzel etwa $1,1+0,05$ ist. Die Berechnung (mit Hilfe von Tabellen) ergibt.

x	1,15	1,16
y	-0,007	0,067

Für die gesuchte Wurzel gilt $1,15 < x < 1,16$. Aus den Werten $y = -0,007$ und $y = 0,067$ schließen wir, dass die gesuchte Wurzel etwa $1,15 + 0,001$ ist. Runden wir das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen ab, so erhalten wir $x = 1,15$.
Für die Probe legen wir folgenden Antwortsatz zu Grunde: Zur Erfüllung der Planauflage muss in diesem Falle die jährliche Produktionssteigerung etwa 15% betragen.

Beispiel 59. Wir haben zwei Sorten von Konserven, die verschieden schwer sind, und ein Einkilopondgewicht. Wir stellen fest, dass eine kleine Konserve weniger als ein Kilopond, eine große mehr als ein Kilopond wiegt.
Zwei kleine Konserven zusammen mit dem Einkilopondgewicht sind schwerer als zwei große Konserven. Elf kleine Konserven haben das gleiche Gewicht wie sechs große Konserven zusammen mit dem Einkilopondgewicht.
Das Gewicht beider Konservenarten ist zu bestimmen und in vollen Zehnpondgewichten anzugeben.

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.
Wir bezeichnen mit x die Maßzahl des Gewichts einer kleinen Konserve, mit y die Maßzahl des Gewichts einer großen. Beide Gewichte werden gemäß dem Text der Aufgabe in vollen Zehnpondgewichten angegeben. x und y sind also ganze positive Zahlen.
Aus dem Text ergeben sich folgende Bedingungen

$$x < 100, \qquad y > 100, \qquad 2x + 100 > 2y, \qquad 11x = 6y + 100$$

und nach geringfügiger Umformung

$$11x - 6y = 100, \qquad x + 50 > y, \qquad x < 100, \qquad y > 100 \tag{78}$$

x, y ganze positive Zahlen.

Die Bedingungen (78) sind die mathematische Formulierung der Aufgabe. In Worten ausgedrückt würde diese mathematische Aufgabe wie folgt lauten:

Es sind alle Paare von natürlichen Zahlen x, y zu bestimmen, die die Gleichung (78) und die drei Ungleichungen (78) erfüllen.

Lösung der Aufgabe. Wir lösen zuerst die Gleichung von (78) auf elementare Weise in ganzen Zahlen. Wenn die ganzen Zahlen x und y die Gleichung $11x - 6y = 100$ erfüllen, so ist

$$6y = 11x - 100 \tag{78a}$$

d.h., die Zahl $11x - 100$ ist durch sechs teilbar. Addiert man zu dieser Zahl beliebiges Vielfaches von sechs, z.B. $102 - 12x$, so ergibt sich wieder eine durch sechs teilbare Zahl. Es existiert somit eine Zahl z für die die Gleichung

$$6z = (11x - 100) + (102 - 12x) = 2 - x$$

gilt. Daraus folgt

$$x = 2 - 6z \tag{79a}$$

Setzt man das in die Gleichung (78) ein, so erhält man nach Umformung

$$y = -13 - 11z \tag{79b}$$

Jede ganzzahlige Lösung der Gleichung (78a) ist somit durch die Beziehungen (79a) und (79b) gegeben, in denen z eine ganze Zahl ist. Die Probe zeigt, dass die Formeln (79a) und (79b), in denen z den Bereich der ganzen Zahlen durchläuft, alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (78a) ergeben.

Es muss nun die Probe für das System (78) durchgeführt werden, bzw. es müssen solche ganzen Zahlen z bestimmt werden, die auch alle Ungleichungen erfüllen. Aus den Bedingungen $x > 0, y > 0$ folgt $z < \frac{1}{3}$, $z < -\frac{13}{11}$. Durch Zusammenfassung dieser beiden Werte erhalten wir (da z eine ganze Zahl ist)

$$z \leq -2 \tag{80a}$$

Aus der Bedingung $x < 100$ ergibt sich $z > -\frac{98}{6}$, bzw. $z \geq -16$.
Aus der Bedingung $y > 100$ erhalten wir $z < -\frac{113}{11}$ bzw. $z \leq -11$.
Aus der Zusammenfassung dieser beiden Ergebnisse folgt

$$-16 \leq z \leq -11 \tag{80b}$$

Jede Zahl z, die die Bedingung (80b) erfüllt, erfüllt auch (80a). Wir können somit die Bedingung (80a) weglassen. Aus der Bedingung $x + 50 > y$ erhalten wir nach Umformung[6]

$$z > -13 \tag{80c}$$

Aus den beiden Beziehungen (80b) und (80c) folgt, dass als Lösung des Gleichungssystems mit den Gleichungen (79a) und (79b) nur $z = -11$ und $z = -12$ in Frage kommen. Wir stellen folgende Tabelle auf:

z	x	y	$x+50$
-11	68	108	118
-12	74	119	124

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass beide Zahlenpaare (68; 108) und (74; 119) das System (78) erfüllen, sie sind somit die gesuchten Maßzahlen für die Gewichte der beiden Konserven (in ganzen Zehnpondgewichten angegeben).

Das mathematische Problem hat also zwei Lösungen. Für die gegebene Textaufgabe ist dieses Ergebnis unbefriedigend. Wir wollen die Gewichte der Konserven eindeutig bestimmen. Das geht nur, wenn wir dem System noch eine weitere Bedingung hinzufügen.

Diese wird durch Abwiegen gefunden. Grundsätzlich geht es darum zu entscheiden, ob

[6] Die Analyse konnte bis zur Herleitung der Bedingung (80c) fortgesetzt werden. Dieses Beispiel zeigt klar, dass bei der Durchführung der Lösung festgestellt werden kann, wenn die Analyse beendet ist, d.h., mit welchem eingeengten Grundbereich man sich zufrieden geben kann.

der Gewichtsunterschied beider Konserven $y - x$ entweder $108 - 68 = 40$ (Zehnpondgewichte) oder $119 - 74 = 45$ (Zehnpondgewichte) beträgt.
Im ersten Fall ist $5 \cdot x + 100 > 4 \cdot y$, d.h. $5 \cdot 68 + 100 = 440 > 4 \cdot 108 = 432$; im zweiten Fall ist $5 \cdot x + 100 < 4 \cdot y$, d.h. $5 \cdot 74 + 100 = 470 < 4 \cdot 119 = 476$.

Wir führen die Wägung durch: Auf eine Waagschale legen wir 5 kleine Konserven und das 1 kp-Gewicht, auf die zweite Waagschale 4 große Konserven, und stellen fest, welche Seite schwerer ist.

Wenn wir bei der Aufstellung der mathematischen Aufgabe eine der Ungleichungen aus dem System (78) vernachlässigten, z.B. die Ungleichung $y > 100$, so würde die Probe zeigen, welche von allen Bedingungen der Textaufgabe erfüllt sind. So z.B. erfüllt das Zahlenpaar $x = 62, y = 97$ alle Bedingungen bis auf eine, es ist nämlich das Gewicht einer großen Konserve nicht größer als ein Kilopond.
Auf ähnliche Weise stellen wir bei einem Vergleich des Ergebnisses mit dem Text der Aufgabe fest, dass wir als Lösung ganze Zahlen erhalten haben.

Beispiel 60. Eine Dachfläche hat die Form eines Rechteckes. Die Abmessungen betragen 6 m und 15 m, der Dachanstieg ist 3:4. Das anfallende Regenwasser wird durch ein einziges zylinderförmiges Abflussrohr abgeleitet. Die maximale Abflussgeschwindigkeit beträgt 5 m/s.
Wie groß muss der Durchmesser des Abflussrohres sein, damit das gesamte Regenwasser bei einer Regendichte von μ mm/min abfließen kann?

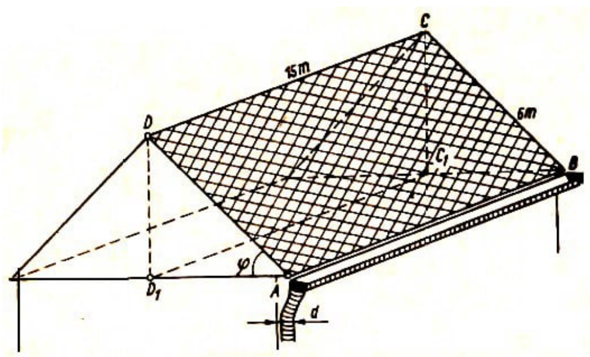


Abb. 25

Aufstellung der mathematischen Aufgabe.
Zuerst müssen einige Ausdrücke und Angaben erläutert werden. Als Dachanstieg wird Tangens des Anstiegwinkels des Daches, das ist der Winkel zwischen einer waagerechten Ebene und der Ebene der Dachfläche, bezeichnet.
Er beträgt $\tan \phi = \frac{3}{4}$ (s. Abb. 25). Wenn durch das zylinderförmige Abflussrohr Wasser mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s strömt, bildet die in einer Sekunde durch den gegebenen Querschnitt fließende Wassermenge einen Zylinder mit einem Rauminhalt von $\pi r^2 \cdot 500$ cm^3 $= \pi d^3 \cdot 125$ cm^3, wobei $d(r)$ Maßzahl des Durchmessers (Radius) des Abflussrohres in Zentimetern ist.

Die Zahl der Kubikzentimeter entspricht gleichzeitig der Abflussmenge in einer Sekunde. Die Regendichte μ mm/min gibt die Regenmenge an, die in einer Minute auf eine waagerechte Fläche fällt. Sie bildet (soweit sie nicht versickert oder verdampft) eine Schicht in Höhe von μ Millimetern.

Das unbekannte mathematische Objekt dieser Aufgabe ist die Maßzahl des Durchmessers (in Zentimetern) des Abflussrohres. Die Regenmenge, die auf das schräge Rechteck $ABCD$ fällt, ist gleich der Niederschlagsmenge auf das waagerechte Rechteck ABC_1D_1.
Da

$$AD_1 = BC_1 = AD\cos\phi = 6\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}\text{ m}$$

ist der Rauminhalt dieser Regenmenge pro Minute

$$15\cdot 10^2\cdot\frac{24}{5}\cdot 10^2\cdot\frac{\mu}{10}\text{ cm}^3 = 72\cdot 10^3\mu\text{ cm}^3$$

In einer Sekunde regnet es also auf die Dachfläche

$$V = 12\cdot 10^2\mu\text{ cm}^3$$

Wasser. Das Abflussrohr leitet, wie oben ausgeführt, in dieser Zeit

$$V' = 125\pi d^2\text{ cm}^3$$

Wasser ab. Nach den Bedingungen der Aufgabe muss $V' \geq V$ sein, d.h.

$$125\pi d^3 \geq 1200\mu$$

Die Lösung ist einfach, ihre Durchführung bleibt dem Leser überlassen. Es ergibt sich

$$d \geq 1,748\sqrt{\mu}$$

9 Die Lösung von Aufgaben mit Hilfe von Formeln

Ein großer Teil der in der Schule gestellten algebraischen und geometrischen Berechnungsaufgaben wird mit Hilfe von Formeln gelöst. Diese weiß der Schüler entweder auswendig, oder er entnimmt sie Lehrbüchern oder Formelsammlungen.
Es handelt sich dabei eigentlich um die Lösung von Mengen von algebraischen und geometrischen Aufgaben, wobei die gegebenen und gesuchten Elemente als variabel vorausgesetzt werden. Das gesuchte Objekt ist dann durch eine oder mehrere Funktionen bestimmt.
Die gefundenen Funktionen sind das Ergebnis der Lösung der gesamten Aufgabenmenge. Die Lösung spezieller Aufgaben aus dieser Menge erhält man durch Einsetzen von speziellen Werten für die unabhängigen Variablen und durch Berechnung der Werte für die abhängigen Variablen.

Es wäre offensichtlich vorteilhaft, diese Art der Behandlung auch auf andere Aufgabenmengen zu übertragen, z.B. auf Konstruktionsaufgaben.
Das wesentliche dieser Methode besteht darin, dass die gegebenen und gesuchten Elemente Variablen sind und dass die Zuordnung ermittelt wird. Es ist dabei gleichgültig, ob es sich um Funktionen, d.h. um die eindeutige Zuordnung der Elemente zweier Zahlenmengen handelt oder um eine Zuordnung zwischen den Elementen beliebiger Mengen.

Wir werden deshalb im folgenden eine solche Lösung nicht als "Lösung mittels Formeln" bezeichnen, sondern den Begriff "funktionale Lösung von Aufgaben" oder "Lösung nach Algorithmus" verwenden.

In Kapitel 2 wurde bereits die Lösung von Aufgaben, in denen die unbekannten Objekte Funktionen sind, erwähnt. Wir führten bereits an, dass der Teil der Lösung, den wir üblicherweise als Diskussion bezeichnen, sich bei der funktionalen Lösung auf die Bestimmung der Definitionsbereiche der zugehörigen Funktionen beschränkt. Diese Definitionsbereiche müssen stets zusammen mit den Funktionen angegeben bzw. dargestellt werden.
Wir zeigen dies an Beispielen.

Beispiel 61. Es ist eine Kugel mit dem Radius $r > 0$ gegeben. Es ist das Volumen y eines Kugelsegmentes (mit der Höhe $v \leq r$) als Funktion der Oberfläche x dieses Segmentes anzugeben.

Lösung. Wenn wir mit ρ den Radius des Grundkreises des Segmentes bezeichnen, erhalten wir folgende Beziehungen:

$$x = 2\pi rv + \pi\rho^2, \qquad y = \frac{2}{3}\pi r^2 v - \frac{1}{3}\pi\rho(r - v), \qquad \rho^2 = v(2r - v)$$

oder nach Umformung

$$x = 4\pi rv - \pi v^2 \qquad , \qquad y = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v) \qquad \text{(81a,81b)}$$

Setzen wir πv^2 aus der Gleichung (81a) in (81b) ein, so ergibt sich

$$3y = (4\pi r - x)(3r - v) = 12\pi r^2 v + 3rx + vx - 4\pi r v^2$$

Nach neuerlichem Einsetzen von πv^2 erhält man

$$3y = rx + vx - 4\pi r^2 v \tag{82}$$

Die Funktion (81a) ist für v im Intervall $(0, r]$ steigend. Ihr größter Wert beträgt $x = 3\pi r^2$ für $v = r$. Aus (82) erhalten wir

$$v(x - 4\pi r^2) = 3y - rx \tag{83}$$

Der Koeffizient von $v$ist für alle x im Intervall $(0, 3\pi r^2]$ von Null verschieden (negativ). Wir können deshalb die Variablen v aus (83) wie folgt ausdrücken

$$v = \frac{3y - rx}{x - 4\pi r^2}$$

Setzen wir in (81a) für v diesen Term ein, so erhalten wir nach Umformung für y3 die quadratische Gleichung

$$9\pi y^2 + 6\pi r(8\pi r^2 - 3x)y + x^2(x - 3\pi r^2) = 0 \tag{84}$$

Die Diskriminante der Gleichung (84) ist

$$D = 36\pi^2 r^2 (64\pi^2 r^4 - 48\pi r^2 x + 9x^2) - 36\pi x^2 (x - 3\pi r^2)$$

und nach Umformung

$$D = 36\pi(4\pi r^2 - x)^3$$

Für x im Intervall $(0, 3\pi r^2]$, das für unsere Aufgabe in Frage kommt, ist $D > 0$, und die Gleichung (84) hat zwei reelle Wurzeln, die in folgender Form angegeben werden können

$$y_{1,2} = rx - \frac{8}{3}\pi r^3 \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(4\pi r^2 - x)^3}{\pi}} \tag{85}$$

Es sind dies eigentlich zwei im Intervall $(0, 3\pi r^2]$ definierte Funktionen. Es muss ermittelt werden, welche von ihnen den Rauminhalt y des Kugelsegmentes ausdrückt.

Da $x \leq \frac{8}{3}\pi r^2$ gilt, ist $rx - \frac{8}{3}\pi r^3 \leq 0$ Wir müssen also in der Gleichung (85) das Minuszeichen wählen.

Es bleibt noch der Wert von x im Intervall $I = \left(\frac{8}{3}\pi r^2, 3\pi r^2\right)$ zu bestimmen. Wir setzen $u = rx - \frac{8}{3}\pi r^3$, $t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(4\pi r^2 - x)^3}{\pi}}$; für alle x im Intervall I ist $u > 0$, $t > 0$. Wir berechnen

$$t^2 - u^2 = \frac{1}{3} r^2 x^2 - \frac{\pi^3}{9\pi} = \frac{x^3}{9\pi}(3\pi r^2 - x)$$

Für alle x im Intervall I ist $t^2 - u^2 \geq 0$, d.h. $t \geq u$ bzw. $u - t \leq 0$. Es ist deshalb nicht $y = u - t$, sondern $y = u + t$. Somit gilt für alle x im Intervall $(0, 3\pi r^2]$ die Formel

$$y = rx - \frac{8}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(4\pi r^2 - x)^3}{\pi}} \tag{86}$$

Man kann zeigen, dass die Formel (86) auch für x im Intervall $(3\pi r^2, 4\pi r^2)$ gilt, also ein Kugelsegment, dessen Höhe v sich im Intervall $(r, 2r)$ ändert.

Beispiel 62. Es sind alle Paare natürlicher Zahlen $(x; y)$ zu bestimmen, deren Produkt xy durch die Summe $x + y$ teilbar ist.

Lösung. Man muss überlegen, welche Form das Ergebnis etwa haben wird, wenn man die Aufgabe funktional betrachtet. Es ist anzunehmen, dass es unendlich viele solcher Zahlenpaare gibt.
Die Zahlen x und y der gesuchten Paare sind deshalb vermutlich durch Funktionen anzugeben.

Wir setzen voraus, dass die natürlichen Zahlen x und y die Lösung der Aufgabe sind und dass ihr größter gemeinsamer Teiler $\delta > 0$ ist. Dann gilt

$$x = \delta \cdot x' \qquad , \qquad y = \delta \cdot y' \tag{87}$$

x', y' sind hierbei teilen-fremde natürliche Zahlen. Weiter ist

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{\delta^2 x'y'}{\delta(x'+y')} = \delta \cdot \frac{x'y'}{x'+y'} \tag{88}$$

Wenn die Zahlen x', y' teilerfremd sind, so sind auch die Zahlen $x'y'$ und $x' + y'$ teilerfremd. Diese Behauptung kann man leicht beweisen.

Es sei $p > 1$ der gemeinsame Primfaktor der Zahlen $x'y'$ und $x' + y'$. Weil p ein Teiler des Produktes $x'y'$ ist, ist p ein Teiler von x' oder von y'.
Weil p ein Teiler der Summe $x' + y'$ und z.B. der Zahl x' ist, so ist p auch ein Teiler der Zahl y'. Dies steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit der Zahlen x' und y'.

Weil der Quotient (88) eine ganze Zahl ist und weil die Zahlen $x'y'$ und $x'+y'$ teilerfremd sind, ist

$$\delta = k(x' + y') \tag{89}$$

k ist eine geeignete natürliche Zahl. Setzen wir (89) in (87) ein. so ergibt sich

$$x = kx'(x' + y') \qquad , \qquad y = ky'(x' + y') \tag{90}$$

x' und y' sind teilerfremde natürliche Zahlen, k ist eine natürliche Zahl. Damit ist die Analyse der Aufgabe beendet.

Probe. Wenn wir in den Formeln (90) für x' und y' beliebige teilerfremde natürliche Zahlen einsetzen und für k eine beliebige natürliche Zahl wählen, ist

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{k^2 x'y'(x'+y')^2}{kx'(x'+y') + ky'(x'+y')} = kx'y'$$

$kx'y'$ ist eine natürliche Zahl. Die sich aus den Formeln (90) ergebenden Zahlen x und y sind somit die Lösung der Aufgabe.
Der Definitionsbereich der Funktionen (90) ist durch die Voraussetzungen für die Zahlen k, x', y' bestimmt.

Beispiel 63. Es ist eine Menge von Gleichungen gegeben durch

$$3x + ay = 1 \tag{91}$$

wobei a den Bereich der ganzen Zahlen durchläuft. Es sind sämtliche dieser Gleichungen, in denen x und y ganze Zahlen sind, zu lösen.

Lösung. In Bezug auf den Parameter a unterscheiden wir drei Fälle, und zwar 1. $a = 3\alpha$, 2. $a = 3\alpha + 1$, 3. $a = 3\alpha + 2$. α ist ein ganze Zahl.[7]

Im Fall 1. ist die linke Seite der Gleichung (91) durch drei teilbar; die Gleichung (91) ist somit unlösbar.

Im Fall 2. ist

$$3x = 1 - 3\alpha y - y$$

Es existiert somit zu jeder ganzzahligen Lösung $(x; y)$ der Gleichung (91) eine ganze Zahl z, für die gilt

$$3z = 1 - y \tag{92}$$

Aus den Gleichungen (91) und (92) berechnen wir nacheinander

$$y = 1 - 3z \qquad , \qquad x = \frac{1-a}{3} + az \tag{93}$$

Dabei ist $\frac{1-a}{3}$ eine ganze Zahl. Die Probe ergibt, dass die Gleichungen (93) im Fall 2. alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (91) liefern, wenn z den Bereich aller ganzen Zahlen durchläuft.

Im Fall 3. erhalten wir auf ähnliche Weise

$$3x = 1 - 3\alpha y - 2y$$

Es existiert also eine ganze Zahl t, für die gilt $3t = 1 + y$, daraus folgt

$$y = 3t - 1 \qquad , \qquad x = \frac{1+a}{3} - at \tag{94}$$

wobei $\frac{1+a}{3}$ eine ganze Zahl ist. Die Gleichungen (94) liefern alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (91) für den Fall 3. Wenn wir in (94) $t = -z$ einsetzen, erhalten wir die Gleichungen in der Form

$$y = -1 - 3z \qquad , \qquad x = \frac{1+a}{3} + az \tag{95}$$

Die Funktionen (95) und (93) sind verschieden. Aus diesem Beispiel sehen wir, dass die sogenannte Formel durch zwei Paare von Funktionen (93) und (95) bestimmt ist.

Auch die Definitionsbereiche dieser Funktionenpaare sind verschieden. Der Definitionsbereich der Funktion (93) ist die Menge der Zahlenpaare $(a; z)$, wobei a alle zu 1 (mod 3)[8] kongruenten Zahlen und z alle ganzen Zahlen durchläuft.

[7] Bekanntlich kann jede ganze Zahl auf eine dieser drei Arten angegeben werden.

[8] Anstelle von "die Zahl p ist kongruent zu 1 (mod 3)" kann man auch $a = 3k + 1$ schreiben, wobei k eine geeignete ganze Zahl ist.

Der Definitionsbereich der Funktionen (95) ist die Menge der Zahlenpaare $(a;t)$, wobei a alle ganzen Zahlen, die kongruent 2 (mod 3) sind, durchlaufen kann und z alle ganzen Zahlen.

Beispiel 64. In einer Ebene sind zwei verschiedene Punkte A und V und eine Gerade p gegeben, die nicht durch den Punkt A geht. Es ist die euklidische Konstruktion aller Dreiecke ABC durchzuführen, deren Eckpunkte B auf der Geraden p liegen und für die der Punkt V der Höhenschnittpunkt ist.

Die Konstruktion wird, wie sich der Leser leicht überzeugen kann, wie folgt durchgeführt:
Wir wählen auf der Geraden p einen Punkt $B \neq A$, vom Punkt V fällen wir das Lot m auf die Gerade AB, und vom Punkt B das Lot n auf die Gerade AV.
Wenn die Geraden m und n einen gemeinsamen Punkt C haben, der außerhalb der Geraden AB liegt, ergibt sich das Dreieck ABC als Lösung der Aufgabe. Das ist immer dann der Fall, wenn der Punkt B nicht auf der Geraden AV liegt (Abb. 26 a). In diesem Falle erhalten wir nur ein Dreieck ABC.
Ist $B = V$, so erhalten wir unendlich viele Dreiecke ABC (Abb. 26b). Ist B ein Punkt der Geraden AV, aber verschieden von V und A, so lässt sich kein Dreieck konstruieren (Abb. 26c).

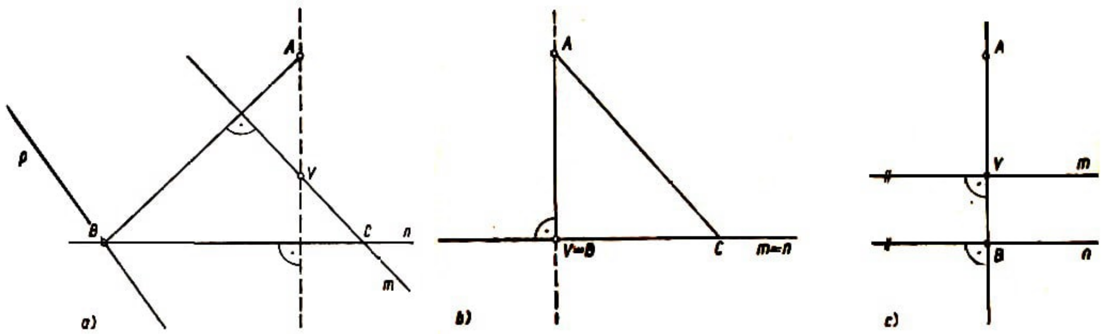


Abb. 26a, b und c

Die obige Konstruktionsbeschreibung können wir durch eine "geometrische Konstruktionsformel" ersetzen. Eigentlich sind dies zwei Formeln für verschiedene Definitionsbereiche, die unabhängig vom veränderlichen Punkt B sind.

Die angegebene Konstruktionsvorschrift ist jedoch wenig geeignet für eine Aufgabe, in der gefordert wird, aus allen Dreiecken ABC diejenigen mit zusätzlichen Eigenschaften auszuwählen. Dazu müssen wir die Menge aller Eckpunkte C kennen, so wie es bei einer ähnlichen algebraischen Aufgabe notwendig ist, Funktionen zu kennen, die zusammenfassend alle Zuordnungen für die Variablen angeben.

Den geometrischen Ort der Eckpunkte C finden wir mit den Methoden der analytischen Geometrie. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem, in dem der Punkt A die Koordinaten $(1;0)$ und der Punkt V die Koordinaten $(0;0)$ hat (Abb. 27).

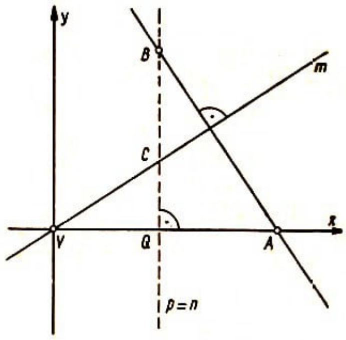


Abb. 27

Die Gerade p sei durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ gegeben. Für $B(\xi;\eta)$ gilt

$$a\xi + b\eta + c = 0 \tag{96}$$

Da der Punkt A nicht auf der Geraden p liegt, ist $a + c \neq 0$. Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat die Koordinaten $(\xi - 1;\eta)$, der zu ihm senkrechte Vektor die Koordinaten $(\eta; 1 - \xi)$.
Die Gleichung der Geraden m lautet somit

$$(1 - \xi)x - \eta y = 0 \tag{97}$$

Die Gleichung für die Gerade n ist offensichtlich

$$x = \xi \tag{98}$$

Die Koordinaten $(x;y)$ des Eckpunktes C erfüllen die beiden Gleichungen (97) und (98). Durch Eliminieren von ξ und η aus den Gleichungen (96), (97) und (98) erhalten wir

$$axy - bx^2 + bx + cy = 0 \tag{99}$$

Weil mindestens eine der Zahlen a, b verschieden von Null ist, ist (99) die Gleichung eines Kegelschnittes k. Wir haben damit gezeigt, dass jeder Eckpunkt C auf einer Kegelschnittlinie k liegt.

Ist $b = 0$, so ist der Kegelabschnitt k durch die aufeinander senkrechten Geraden p und AV gegeben. In diesem Fall ist leicht einzusehen, dass zur Menge der Punkte C nicht alle Punkte des Kegelabschnitts k gehören, sondern nur die Gerade p mit Ausnahme des Schnittpunktes Q der Geraden p und AV (Abb. 27). Die Punkte der Geraden AV gehören nicht zur Menge der Punkte C.

Ist $b \neq 0$, so wählen wir zuerst auf dem Kegelschnitt einen Punkt $(x;y)$, wobei $y \neq 0$ sein soll. Wir bestimmen $\xi = x, \eta = \frac{(1-x)x}{y}$.
Die Zahlen x, y und ξ, η erfüllen dann alle drei Gleichungen (96), (97), (98). Der Punkt $(x;y)$ ist einer der Eckpunkte C. Es sind nun noch die Punkte des Kegelschnittes k für $y = 0$ festzustellen. Es sind dies die Punkte A und V. Der Punkt A kann nicht der Eckpunkt C sein; der Punkt V ist der Eckpunkt eines bestimmten rechtwinkligen Dreieckes AVB, wenn die Gerade p nicht durch den Punkt V geht.

In diesem Fall enthält die Menge der Punkte C der Kegelschnittlinie k nicht den Punkt A, gegebenenfalls nicht die Punkte A, V.

Die Diskriminante und der Hauptminor des Kegelschnitts k sind somit

$$D = \begin{vmatrix} -2b & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2bc(a+c) \qquad , \qquad M = \begin{vmatrix} -2b & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a^2$$

Wegen $-a^2 \leq 0$ ist der Kegelschnitt entweder eine Hyperbel (für $a \neq 0$ und $p \parallel AV$) oder eine Parabel (für $a = 0$ und $p \nparallel AV$).
Ausnahmen sind nur zwei Fälle, und zwar $b = 0$ ($p \perp AV$) und $c = 0$ (p geht durch den Punkt V). Der Fall $a + c = 0$ ist ausgeschlossen, da wir voraussetzten, dass die Gerade p nicht durch den Punkt A geht.

Das obige Beispiel kann auch zur Lösung der folgenden Konstruktionsaufgabe dienen: Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem ein Eckpunkt und der Höhenschnittpunkt gegeben sind und dessen andere Eckpunkte auf gegebenen Geraden liegen.

Es folgen weitere Beispiele, in denen die "Formel" wie üblich oder durch Funktionen angegeben wird.

Beispiel 65. Im Bereich der reellen Zahlen x ist das System der Ungleichungen

$$x^2 + px + q > 0 \qquad , \qquad x > 0 \tag{100}$$

zu lösen, wobei p und q reelle Zahlen sind, $p < 0$, $q > 0$.

Lösung. Das Trinom $x^2 + px + q$ formen wir in der üblichen Form um:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Wenn $x^2 + px + q > 0$ ist, so gilt

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \frac{p^2}{4} - q \tag{101}$$

Wir unterscheiden drei Fälle: 1) $\frac{p^2}{4} - q < 0$, 2) $\frac{p^2}{4} - q = 0$, 3) $\frac{p^2}{4} - q > 0$.

Im Fall 1) ist die Ungleichung (101) für alle reellen x erfüllt, das System (100) ist also für alle positiven reellen x erfüllt.

Im Fall 2) ist die Ungleichung für alle reellen $x \neq -\frac{p}{2}$, das System (100) für alle positiven reellen $x \neq -\frac{p}{2}$ erfüllt.

Im Fall 3) ist die Ungleichung (101) für alle reellen x erfüllt, für welche $\left(x + \frac{p}{2}\right) > \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ gilt, oder für alle reellen x, für die folgende Beziehungen gelten

$$x > -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad , \qquad x < -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{102a,102b}$$

Aus den Voraussetzungen für die Zahl p und q folgt

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}>0 \quad , \quad -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<0 \tag{103}$$

Das System (100) erfüllen bei Berücksichtigung der Ungleichungen (103) alle reellen x, für die gilt

$$0<x<-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad \text{oder} \qquad x>-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Wir fanden so eine "Formel" zum Lösen des Systems (100). Um einen besseren Überblick zu erhalten, wählen wir eine räumliche Darstellung im kartesischen Koordinatensystem (Abb. 28). Wir wählen drei aufeinander senkrechte Achsen p, q, x. Das Paar der reellen Zahlen $(p; q)$ wird durch einen Punkt $(p, q, 0)$ dargestellt, der in der Ebene $x = 0$ liegt.

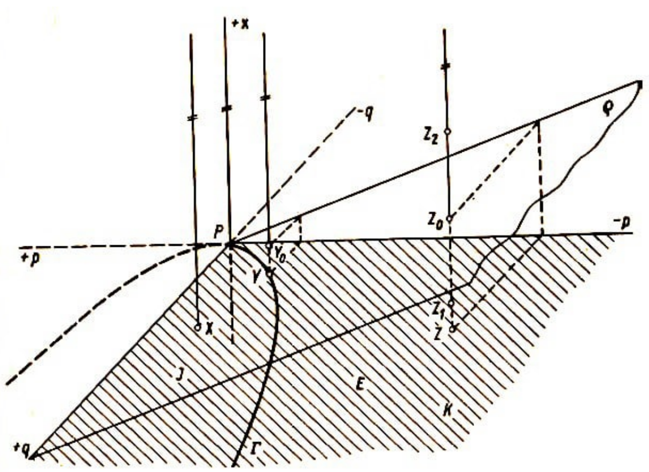


Abb. 28

Das Paar $(p; q)$ für $p < 0$, $q > 0$ entspricht dem in Abb. 28 schraffierten Quadranten K. Die Punkte $(p, q, 0)$, für die $\frac{p^2}{4} - q = 0$, $p < 0$ ist, liegen auf dem in Abb. 28 stark ausgezogenen Teil der Parabel Γ mit dem Scheitelpunkt p und der Achse q.

Der Fall 1) ist durch den Teil J innerhalb der Parabel Γ, die im Quadranten K liegt, veranschaulicht. Die zugehörigen Lösungen sind alle Punkte (p, q, x) einer zur x-Achse parallelen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt X, wobei X das Gebiet J durchläuft (s. Abb. 28).
Alle Paare $(p; q)$ sind somit unendlich vielen "Funktionswerten" x zugeordnet.

Der Fall 2) ist durch den Bogen der Kurve veranschaulicht. Die zugehörigen Lösungen sind durch alle Punkte (p, q, x) einer zur x-Achse parallelen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt Y gegeben, wobei Y den Bogen Γ durchläuft (s. Abb. 28).
Von jeder Halbgeraden ist der Punkt Y_0 in der Ebene ρ mit der Gleichung $x = -\frac{p}{2}$ auszuschließen.

Der Fall 3) ist durch den Teil E außerhalb der Parabel Γ, die im Quadranten K liegt, veranschaulicht. Die zugehörigen Lösungen sind alle Punkte (p, q, x) einer zur x-Achse

parallelen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt Z, wobei Z den Bereich E durchläuft (s. Abb. 28).
Von jeder Halbgeraden ist eine bestimmte Strecke Z_1Z_2 auszuschließen, deren Mittelpunkt Z_0 in der Ebene ρ liegt. Die Punkte Z_1, Z_2 könnten wir als Schnittpunkte der Halbgeraden ZZ_0 mit einem hyperbolischen Paraboloid bestimmen, dessen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

ist. Diesen Zusammenhang werden wir nicht weiter untersuchen.

Zu den funktionalen Lösungen von Aufgaben gehören alle Algorithmen für Rechenoperationen, alle in Worten formulierten Vorschriften für verschiedene Berechnungen, z.B. für die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers mehrerer Zahlen, für die lineare Interpolation einer Funktion u.ä.
Es gehören dazu auch verschiedene Kriterien für die Konvergenz von Reihen, für die Teilbarkeit ganzer Zahlen durch gegebene Divisoren, für die Kongruenz geometrischer Örter u.ä. Dazu noch zwei Beispiele.

Beispiel 66. Es ist das folgende Kriterium für die Kongruenz zweier Sehnenvierecke herzuleiten.
Wenn $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei Sehnenvierecke sind und wenn $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ und $DA = D'A'$ sind, so ist $ABCD \cong A'B'C'D'$.
Kurz: Zwei Sehnenvierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten übereinstimmen.

Lösung. Das Kriterium ist dann und nur dann bewiesen, wenn wir beweisen, dass $AC = A'C'$ ist.[9] Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass z.B. $A'C' > AC$ sei.
Weil $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ ist, stimmen in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ nur zwei Seiten überein, die dritte jedoch nicht. Es ist deshalb nach einem bekannten Satz aus der Planimetrie $\angle A'B'C' > \angle ABC$.
Entsprechend beweisen wir, dass $\angle C'D'A' > \angle CDA$.

Weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, ist $\angle ABC + \angle CDA$ ein gestreckter Winkel. Aus den obigen Ungleichungen folgt jedoch, dass $\angle A'B'C' + \angle C'D'A'$ ein über- stumpfer Winkel ist. Also ist $A'B'C'D'$ kein Sehnenviereck, was der Voraussetzung widerspricht. Wir haben also bewiesen, dass $A'C' > AC$ nicht möglich ist. Durch Vertauschen beider Vierecke stellen wir fest, dass auch $AC > A'C'$ nicht zutrifft. Es ist somit $A'C' = AC$, was zu beweisen war.

Beispiel 67. In einer Ebene sind n verschiedene Punkte A_1, A_2, ..., A_n $(n \geq 2)$ gegeben. Durch diese Punkte sind n zueinander konzentrische Kreise zu zeichnen, wobei der Punkt A_1 auf dem innersten Kreis liegen soll.[10]

Lösung. Der Mittelpunkt S der gesuchten Kreise darf nicht auf der Mittelsenkrechten einer der Strecken A_iA_k liegen $(i, k = 1, 2, ..., n,\ i \neq k)$. Wäre dies der Fall, so würden die zugehörigen Punkte A_i und A_k auf demselben Kreis mit dem Mittelpunkt S liegen.

Wenn der Punkt A_1 auf dem innersten Kreis liegt, gilt die Beziehung $SA_1 < SA_i$ $(i =$

[9] Jedes Sehnenviereck ist konvex.
[10] Das ist der Kreis mit dem kleinsten Durchmesser.

$2, 3, ..., n$). Die Punktmenge X, für die die Beziehung $XA_1 < XA_i$ gilt, ist die offene Halbebene $o_{1i}A_1$; o_{1i} ist dabei die Symmetrieachse der Strecke A_1A_i, $(i = 2, 3, ..., n)$.

Der Durchschnitt Q dieser offenen Halbebenen $o_{1i}A_1$ enthält mindestens einen Punkt A_1 und ist somit nicht leer, er enthält sogar unendlich viele Punkte, denn der Punkt A_1 ist der innerste Punkt aller $(n-1)$ Halbebenen.
Der Durchschnitt Q ist offensichtlich ein konvexes Gebilde, er kann eine offene Halbebene oder ein offener Winkelraum oder eine offene Zone einer Ebene oder ein offenes konvexes $(n-1)$- Eck u. ä. sein.

Jede der Symmetrieachsen o_{ik} der Strecken A_iA_K hat mit diesem Durchschnitt Q weder eine Gerade noch eine Halbgerade noch eine Strecke gemeinsam; denn die Achse und der Durchschnitt haben keinen gemeinsamen Punkt. Das Gebilde Q enthält somit unendlich viele Punkte, die nicht auf einer der Achsen o_{ik} liegen. Einen von diesen Punkten können wir als den gesuchten Mittelpunkt S wählen.

Der letzte Satz gibt die Konstruktionsvorschrift an, d.h. eine: "Formel", mit der die gegebene Aufgabe in jedem konkreten Fall gelöst werden kann.

Die obigen Beispiele haben den allgemeinen Vorgang bei der Lösung von Aufgaben "nach einer Formel" vielleicht schon genügend erläutert.
Abschließend halte ich es für notwendig, darauf hinzuweisen, dass man in der Schule die Lösung von Aufgaben nach einem Algorithmus im gleichen Maße sowohl in der Arithmetik und Algebra als auch in der Geometrie und Trigonometrie anwenden sollte.

Das bedeutet, dass während der gesamten Zeit des Mathematikunterrichtes und besonders in der konstruktiven Geometrie ein System von Algorithmen ausgearbeitet werden sollte. Man sollte also auch dort Vorschriften zur Lösung bestimmter grundlegender einfacher Aufgaben erarbeiten, und diese Vorschriften sollten die Schüler dann als fertige Ergebnisse so anwenden, wie sie z.B. in der Algebra und in der Trigonometrie Formeln benutzen.
Es ist unrationell, diese grundlegenden Konstruktionen immer wieder von neuem herzuleiten.

10 Konstruktionsaufgaben

Die letzte Aufgabenkategorie, mit der wir uns in diesem allgemeinen Teil der Erläuterung mathematischer Aufgaben beschäftigen, umfasst Konstruktionsaufgaben.
Bekanntlich bereiten diese Aufgaben in der Schule größere Schwierigkeiten als andere Aufgaben. Dafür gibt es mehrere Gründe.

Einer davon resultiert daraus, dass die Konstruktionsaufgaben nicht systematisiert sind und dass es keine ausgearbeiteten Methoden zur Lösung der einzelnen Aufgabentypen gibt. Eine weitere Ursache für die Schwierigkeiten ist darin zu suchen, dass jede Konstruktionsaufgabe eigentlich eine Textaufgabe ist, die durch logisches Schließen gelöst werden muss, da für die konstruktive Geometrie kein Kalkül, wie z.B. in der Algebra, zur Verfügung steht.

Im Kapitel 1 und Kapitel 5 haben wir in den allgemeinen methodischen Bemerkungen die Konstruktionsaufgaben am Rande erwähnt. Wir betonen nochmals, dass die Lösung von Konstruktionsaufgaben mit der allgemeinen Methode zur Lösung mathematischer Bestimmungsaufgaben genau übereinstimmt, obzwar Ausführungen einiger älterer Methodiker den Eindruck erwecken, dass für diese Aufgabenkategorie eine spezifische Lösungsmethode, die von den Methoden für andere Aufgaben abweicht, erforderlich ist.

In den Kapiteln 1 und 5 haben wir bereits kurz ausgeführt, wie die Lösung von Konstruktionsaufgaben mit gegebenen Mitteln zu betrachten ist.
Wir kommen jetzt darauf ausführlich zurück.

Vor allem muss wieder betont werden, dass die Lösung von Konstruktionsaufgaben nicht identisch ist mit der zeichnerischen Ausführung.
Das eigentliche Lösen einer Konstruktionsaufgabe ist ein deduktiver Vorgang mit dem Ziel, bestimmte geometrische Objekte festzustellen. Diese werden durch Relationen bestimmt, jedoch in enger Verbindung mit der zeichnerischen Ausführung, vor allem mit dem gewählten Zeichengerät.

In der Schule werden wir allerdings niemals eine Konstruktionsaufgabe ohne zeichnerische Ausführung lösen. Das ist schon deshalb notwendig, damit die Schüler einerseits für den ganzen Lösungsvorgang eine klare geometrische Vorstellung erhalten und sich andererseits im Zeichnen üben.

Im Geometrieunterricht wird in der Regel von euklidischen Konstruktionen und von "Konstruktionen mit begrenzten Mitteln" gesprochen. Es wäre vielleicht besser, den gemeinsamen Begriff Konstruktionen "mit gegebenen Mitteln" zu verwenden.
Die "gegebenen Mittel" sind eigentlich die Zeichengeräte, mit denen die Konstruktion durchgeführt wird. In der Theorie der geometrischen Konstruktionen wurden für das Zeichnen mit vorgeschriebenen Zeichengeräten Konstruktionsvorschriften abgesprochen, durch die die verschiedenen Konstruktionen "mit gegebenen Mitteln" charakterisiert sind. So sind z.B. die euklidischen Konstruktionen durch folgende fünf Festlegungen charakterisiert:

1. Die Konstruktion einer Geraden gilt als durchgeführt, wenn zwei verschiedene Punkte

der Geraden konstruktiv ermittelt wurden.

2. Ein Kreis gilt als konstruiert, wenn sein Mittelpunkt konstruktiv ermittelt wurde und wenn sein Radius durch zwei konstruierte Punkte festgelegt ist.

3. Die Konstruktion eines Punktes gilt als beendet, wenn er der Schnittpunkt von zwei nicht parallelen Geraden ist.

4. Ein Punkt gilt als konstruiert, wenn er der gemeinsame Punkt einer konstruierten Geraden und eines Kreises ist.

5. Ein Punkt ist konstruiert, wenn er der gemeinsame Punkt zweier Kreise ist.

Diese Absprachen resultieren aus der Verwendung des Lineals und des Zirkels als "gegebene Mittel" zum Zeichnen von Geraden und Kreisen.

Wir haben bereits im Kapitel 1 kurz erläutert, dass die Lösung einer Aufgabe "mit gegebenen Mitteln" eigentlich die Lösung einer Aufgabe in einem gegebenen Grundbereich ist. Nachstehend dafür ein Beispiel.

Beispiel 68. Es sind ein Quadrat $ABCD$ durch seine vier Eckpunkte und ein Punkt E gegeben. E liegt zwischen A und D. Es ist lediglich mit Hilfe eines Lineals der Mittelpunkt des Kreises zu ermitteln, der durch die Punkte D und E geht und die Gerade AB berührt.

Lösung. Durch Konstruktion mit dem Lineal können aus den fünf Punkten A, B, C, D, E unendlich viele weitere Punkte hergeleitet werden. Zu diesen gehören z.B. der Schnittpunkt S der Geraden AC und BD, der Schnittpunkt F der Geraden AC und BE (s. Abb. 29), der Schnittpunkt G der Geraden BC und DF, der Schnittpunkt H der Geraden AB und CE, der Schnittpunkt J der Geraden AD und CH u.a.

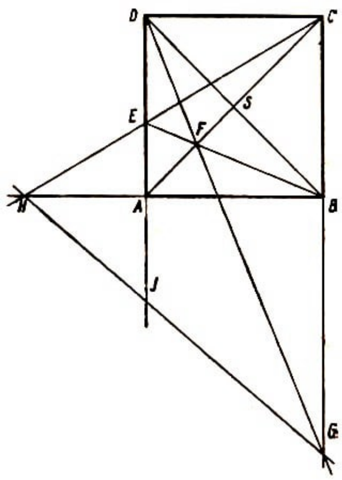


Abb. 29

Alle Punkte der Ebene, die durch die Konstruktion mit dem Lineal aus den Punkten A, B, C, D, E dargestellt werden können, bilden eine bestimmte Menge Ω. Diese ist der Grundbereich unserer Aufgabe.
Unter den Punkten der Menge Ω müssen wir diejenigen heraussuchen, die Mittelpunkte von Kreisen sind, die den Forderungen der Aufgabe entsprechen.

Die Analyse der Aufgabe ist einfach. Der Mittelpunkt jedes gesuchten Kreises muss auf der Mittelsenkrechten o der Strecke DE und auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt D und dem Radius r liegen. Der Radius r muss gleich der Entfernung der parallelen Geraden AB und o sein.
Diese Analyse nützt uns jedoch nur wenig, da sie sich auf die Lösung der Aufgabe mittels der euklidischen Konstruktion bezieht (da einer der geometrischen Orte der Kreis k ist).

Um die Lösung der Aufgabe mittels Lineal zu erleichtern, bedienen wir uns der Koordinatenmethode. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit den Halbgeraden AB und AD als positive x- und y-Achse. Die Maßzahlen der Längen der Strecken AB bzw. DE bezeichnen wir mit a bzw. b. Damit hat die Gerade o die Gleichung

$$y = a - \frac{b}{2} \tag{104}$$

der Kreis k hat die Gleichung

$$x^2 + (y-a)^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \tag{105}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir die Gleichung für die Abszisse des Mittelpunktes M des gesuchten Kreises

$$x^2 = a^2 - ab$$

Da $b < a$ ist, hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{a(a-b)} \tag{106}$$

Wenn a und b rationale Zahlen sind, so sind die Koordinaten aller Punkte von Ω rationale Zahlen. Das ist leicht einzusehen, wenn wir uns vergegenwärtigen, wie wir die Gleichung einer Geraden aufstellen, die durch zwei Punkte mit rationalen Koordinaten geht, und wie wir den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen, deren Gleichungen als Koeffizient rationale Zahlen haben.
Wenn sich also nach der Formel (106) eine irrationale Zahl für x ergibt, ist die Aufgabe durch Konstruktion mit dem Lineal nicht lösbar, das gilt z.B. für $a = 2$, $b = 1$.

Für einige Werte a und b kann jedoch die Aufgabe mittels der Konstruktion mit dem Lineal gelöst werden. Wenn wir z.B. $a = 4$, $b = 3$ einsetzen, erhalten wir nach (106) $x_{1,2} = \pm 2$.
Der zugehörigen Konstruktion wird die sogenannte harmonische Eigenschaft eines Trapezes zugrunde gelegt, die wie folgt lautet: Die Verbindungslinien des Schnittpunktes der Diagonalen eines Trapezes und des Schnittpunktes der verlängerten Schenkel halbiert beide Basisseiten.

Mit Hilfe dieses Satzes ermitteln wir zuerst den Mittelpunkt K der Strecke DE (Trapez $DEXC$), dann zeichnen wir durch den Punkt K die Gerade $o \parallel AB$ (Trapez $AYZD$,

$YAKU$), bestimmen den Schnittpunkt L mit der Geraden BC und konstruieren endlich den Mittelpunkt M_1 der Strecke KL (Trapez $AKLV$). Der Punkt M_1 ist eine Lösung der Aufgabe.

Die zweite Lösung M_2 konstruieren wir mit K als Mittelpunkt der Strecke M_1M_2. Die Durchführung ist aus Abb. 30 ersichtlich.

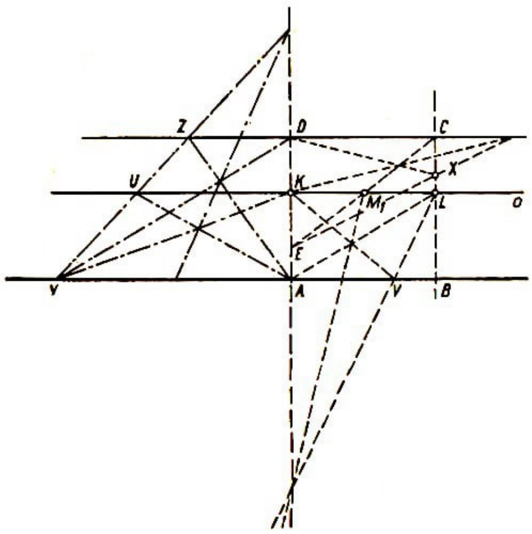


Abb. 30

Es muss beachtet werden, dass die Diskussion der Aufgabenmengen aus Beispiel 68 davon abhängig ist, welche Konstruktion, d.h. "welche gegebenen Mittel" zur Lösung der Aufgabe vorgeschrieben sind.

Wenn die Konstruktion mittels Lineal gefordert wird, enthält die Aufgabenmenge lösbare Aufgaben (z.B. $a = 4$, $b = 3$) und unlösbare (z.B. $a = 2$, $b = 1$).
Bei der euklidischen Konstruktion dagegen hat jede Aufgabe der Menge zwei voneinander verschiedene Lösungen, denn der Kreis K schneidet die Gerade o immer in zwei verschiedenen Punkten, deren Koordinaten durch die Formel (106) gegeben sind.

Aber nicht nur die Diskussion einer Konstruktionsaufgabe hängt von den "gegebenen Mitteln" ab, sondern auch ihre Analyse. Das zeigt nachstehendes Beispiel.

Beispiel 09. Es sind eine Gerade p und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden liegt, gegeben. Es ist von dem Punkt A das Lot auf die Gerade p zu fällen. Die Konstruktion ist durchzuführen
a) euklidisch, b) mit einem Parallelenlineal.

Erläuterung. Bei einer Konstruktion mit einem Parallelenlineal wird nur ein einziges Zeichengerät verwendet, und zwar ein Lineal mit zwei parallelen geraden Kanten, deren Abstand v gegeben ist.

Es gelten nachstehende Festlegungen für diese Konstruktion:

1. Die Konstruktion eines Punktes wird als Konstruktion von zwei sich schneidenden Geraden durchgeführt. Ihr Schnittpunkt ist der zu konstruierende Punkt.

2. Eine Gerade gilt als konstruiert, wenn zwei Punkte der Geraden konstruiert wurden.

3. Eine Gerade gilt als konstruiert, wenn eine zu ihr parallele Gerade im Abstand v konstruiert ist.

4. Eine Gerade gilt als konstruiert, wenn sie zu einem Paar paralleler Geraden gehört, deren Abstand v ist und von denen jede durch einen von zwei ermittelten Punkten geht.

Analyse der Aufgabe a). Wenn wir um den Mittelpunkt A einen Kreis κ zeichnen, der die Gerade p in zwei verschiedenen Punkten U und V schneidet, ist das gesuchte Lot q die Symmetrieachse der Strecke UV.

Es genügt also, nur einen Punkt $A' \neq A$ der Symmetrieachse der Strecke UV zu konstruieren. Es ist dann $q = AA'$. Daraus folgt die bekannte Konstruktion des Lotes von dem Punkt A auf die Gerade p. Analyse der Aufgabe b). Wir konstruieren einen Rhombus $ABCD$ derart, dass die Diagonale BD auf der Geraden p liegt. In diesem Rhombus ist die Diagonale AC das gesuchte Lot q.
Wir wissen, dass die spitzen Winkel zwischen der Geraden p und der Geraden AB und AD gleich sind. Wenn wir durch den Punkt A schräg zur Geraden p eine beliebige Gerade m zeichnen und zu dieser zwei parallele Geraden m', m'' im Abstand v und $2v$, erhalten wir mit der Geraden p die Schnittpunkte B, X, Y (Abb. 31).

Durch die Punkte X, Y gehen außer den Geraden m', m'' nur noch zwei Parallelen, deren Abstand v ist. Sie bestimmen die Richtung der Seite AD des gesuchten Rhombus.

Wir zeichnen durch den Punkt A die Parallele zu den Geraden n', n'' und bestimmen ihren Schnittpunkt D mit der Geraden p. Der Mittelpunkt S der Strecke BD ist der Fußpunkt des Lots von A auf die Gerade p.

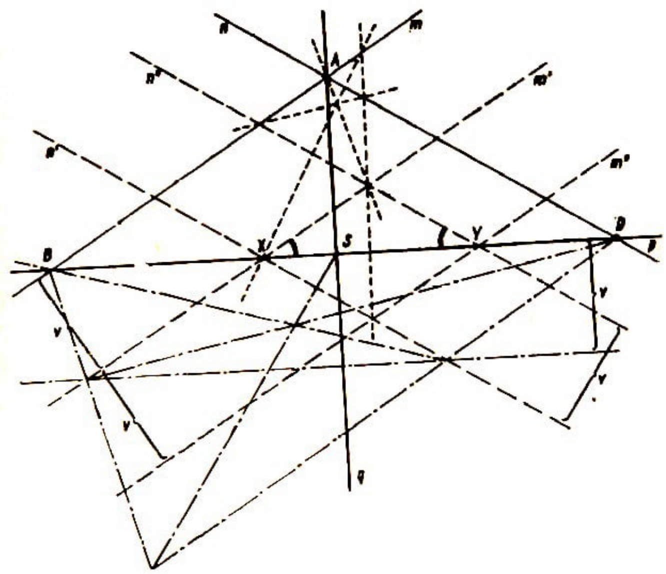


Abb. 31

Beide letztgenannten Konstruktionen - die Konstruktion der Parallelen n durch den Punkt A und die Konstruktion des Mittelpunktes S der Strecke BD - können mit einem Parallelenlineal durchgeführt werden. Hierbei wenden wir den Satz über die harmonischen Eigenschaften eines Trapezes an.

Die Durchführung zeigt Abb.31. Überlegungen von Einzelheiten der Konstruktion überlassen wir dem Leser.

In Lehrbüchern wird die Lösung einer Konstruktionsaufgabe gewöhnlich in vier Schritte unterteilt: Analyse, Konstruktion, Beweis der Konstruktion und Diskussion oder Determination. Die Analyse entspricht dem mit dem gleichen Ausdruck bezeichneten Teil der Lösung mathematischer Aufgaben.
Die sogenannte Konstruktion ist eigentlich die Beschreibung des eingeengten Grundbereiches:
Der Beweis der Konstruktion entspricht der Probe; dabei rührt der nicht sehr treffende Ausdruck "Beweis der Konstruktion" daher, dass bei der Mehrzahl einfacher Aufgaben der eingeengte Grundbereich schon die Lösungsmenge ist.

Ist dies nicht der Fall, so muss die Konstruktionsvorschrift, die sich aus der Analyse ergibt, nach dem Ergebnis der Probe aufbereitet bzw. ergänzt werden. Wenn es sich um eine Menge von Aufgaben handelt, ist diese aufbereitete und kontrollierte Konstruktionsvorschrift der Algorithmus (die Formel) zur Lösung der Aufgabe. Damit haben wir uns in Kapitel 9 beschäftigt.

Beispiel 70. Gegeben ist ein Dreieck APQ ($AP = 4$ cm, $PQ = 7$ cm, $QA = 9$ cm) und eine Strecke $a = 10$ cm.
Mittels der euklidischen Konstruktion ist ein Trapez $ABCD$ zu konstruieren, dessen Grundlinie (längere parallele Seite) die Länge a hat, dessen Diagonalenschnittpunkt der Punkt P ist und dessen verlängerte Schenkel sich im Punkt Q schneiden.

Lösung (1) Analyse (Abb. 32). Der Mittelpunkt M der Grundlinie AB liegt auf der Geraden PQ und auf einem Kreis κ mit dem Mittelpunkt A und mit dem Radius $\frac{a}{2}$. Der Eckpunkt B liegt auf der Halbgeraden AM, es ist $AB = a$. Der Eckpunkt C liegt auf der Strecke BQ und auf der Geraden AP. Analog liegt der Eckpunkt D auf der Strecke AQ und auf der Geraden BP. Dies ist die Analyse für die gesamte Menge von Aufgaben.

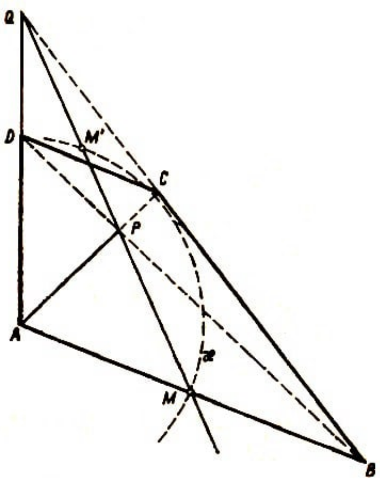


Abb. 32

Lösung b) Probe. Aus der Analyse ergibt sich die Konstruktion:
Wir ermitteln den Punkt M als gemeinsamen Punkt der Geraden PQ und des Kreises κ, ferner den Punkt B auf der Halbgeraden AM sowie die Eckpunkte C und D auf den Strecken BQ und AQ.

Wenn die Strecke AB die längere Parallelseite des Trapezes ist, zeigt es sich beim "Beweis der Konstruktion", dass der Punkt M außerhalb der Strecke PQ liegt, und zwar auf der entgegengesetzten Halbgeraden von PQ. Es muss deshalb die Konstruktionsvorschrift wie folgt angegeben werden:

Wir konstruieren den gemeinsamen Punkt des Kreises κ mit der zu PQ entgegengesetzt gerichteten Halbgeraden.
Dadurch entfällt in unserer zahlenmäßig gegebenen Aufgabe einer der Schnittpunkte des Kreises κ und der Geraden PQ (in Abb. 32 der Punkt M'.)

In der Mehrzahl der Konstruktionsaufgaben ist das unbekannte und zu bestimmende mathematische Objekt entweder ein Punkt (z.B. der Mittelpunkt eines gesuchten Kreises) oder eine Menge von Punkten in bestimmter Anordnung (z.B. die Eckpunkte eines gesuchten n-Eckes).
Wir können somit die Konstruktionsaufgaben nach diesem Gesichtspunkt, also nach der Anzahl der unbekannten Punkte, unterteilen. Dies entspricht der Einteilung von algebraischen Gleichungen. Eine solche Einteilung erfordert jedoch bestimmte Absprachen.

Es gibt Konstruktionsaufgaben, in denen unter den gegebenen Bedingungen (außer "Form" und "Größe") auch die Lage des gesuchten Gebildes festgelegt ist; das sind z.B. die Aufgaben in den Beispielen 67 und 69. Wir bezeichnen solche Aufgaben als Aufgaben mit gegebener Lage.[11]

Eine zweite Gruppe sind Aufgaben, in denen die Lage keines Punktes (oder keines Gebildes) festgelegt ist. Die Lage des gesuchten Objektes ist somit nicht bestimmt. Wir bezeichnen diese Aufgaben als Aufgaben ohne gegebene Lage.[12]

Bei den Aufgaben ohne gegebene Lage müssen wir als erstes die Lage eines der gegebenen Elemente (eine Strecke, einen Winkel u.ä.) festlegen. Die Aufgabe erstreckt sich dann auf die Bestimmung weiterer unbekannter Punkte, d.h., die Aufgabe ohne gegebene Lage wird auf eine Aufgabe mit gegebener Lage zurückgeführt. Wir bezeichnen dies als Lokalisieren der Aufgabe.

Eine und dieselbe Aufgabe ohne gegebene Lage kann in der Regel auf mehrere Arten lokalisiert werden. Es ist erforderlich, sich klar zu machen, dass von der Lokalisierung der gesamte Lösungsweg, insbesondere die Analyse der Aufgabe, abhängig ist.
Um den günstigsten Lösungsweg zu finden müssen wir verschiedene Möglichkeiten der Lokalisierung prüfen. Dazu wieder ein Beispiel.

Beispiel 71. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren[13], von dem die Längen der Seitenhalbierenden s_a, s_c und die Länge der Höhe h_b gegeben sind.
(Gewöhnlich wird durch diese Formulierung ausgedrückte, dass alle Dreiecke mit diesen Eigenschaften zu konstruieren sind.)

Lösung. Es handelt sich um eine Menge von Konstruktionsaufgaben, deren Analyse wir gemeinsam durchführen. Wir bezeichnen in der gegebenen Reihenfolge mit A' und C'

[11] Anm. d. Übers.: wörtlich: Lageaufgaben oder Positionsaufgaben
[12] Anm. d. Übers.: wörtlich: Nichtlageaufgaben.
[13] Falls "die gegebenen Mittel" nicht angegeben werden, ist die euklidische Konstruktion gemeint.

die Mittelpunkte der Seiten BC und AB ferner mit P den Fußpunkt der Höhe h_b und mit Q den Fußpunkt des Lots vom Punkt A' auf die Gerade AC.

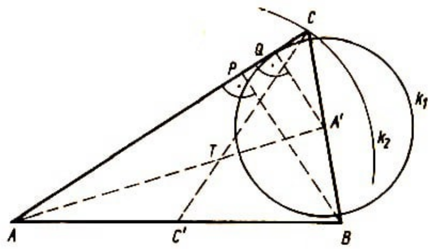


Abb. 33

a) Wir legen die Lage der Strecke $AA' = s_a$ fest und konstruieren auf ihr den Punkt T so, dass $AT = 2A'T$. Unbekannt sind dann die zwei Punkte B und C. Konstruieren wir jedoch einen von ihnen, z.B. den Punkt C, lässt sich auch der Eckpunkt B konstruktiv leicht festlegen.
Er liegt auf zwei geometrischen Örtern, nämlich auf der Tangente vom Punkt A an den Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt A' und dem Radius $\frac{1}{2}h_b$ ($A'Q = \frac{1}{2}BP$) und ferner auf den Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt T und dem Radius $\frac{2}{3}s_c$ ($CT = \frac{2}{3}s_c$). Damit ist die Analyse beendet.

b) Festlegung der Lage der Strecke $BP = h_b$.
Die beiden unbekannten Eckpunkte A und C liegen auf einer Geraden durch den Punkt P, die senkrecht zu BP ist.
Wir nehmen noch die unbekannten Punkte A', C' und T als Hilfspunkte hinzu. Die Punkte A' und C' liegen auf der Symmetrieachse o der Strecke BP. Der Punkt T liegt auf einer Geraden $p \parallel m$, die die Strecke BP im Verhältnis 2:1 teilt.

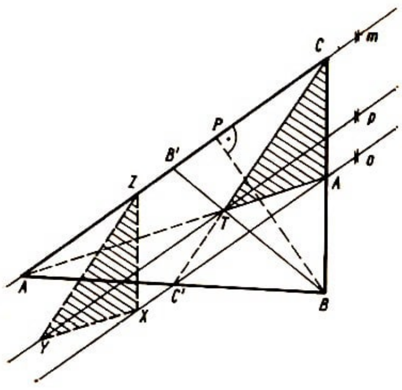


Abb. 34

Wenn wir die unbekannten Punkte T, C und A' konstruiert haben, lassen sich leicht die Punkte A und C' bestimmen. Hierbei handelt es sich eigentlich um die Konstruktion des Dreieckes $A'CT$, dessen Eckpunkte A', T, C der Reihenfolge nach auf den Geraden o, p, m liegen und dessen Seitenlängen $TA' = \frac{1}{3}s_a$, $TC = \frac{2}{3}s_c$ sind.

Wir konstruieren alle Dreiecke XYZ, deren Eckpunkte X ein gewählter Punkt der Geraden o ist. Die Eckpunkte X, Y und Z liegen der Reihenfolge nach auf den Geraden o, p und m, für die Seitenlängen gilt $XY = \frac{1}{3}s_a$, $YZ = \frac{2}{3}s_c$.
Wir verschieben nun jedes dieser Dreiecke so, dass die Parallele zu XZ durch den Punkt B geht. So erhalten wir alle möglichen Dreiecke $A'TC$. Dadurch ist die Analyse für die

zweite Lokalisierung beendet.

Wir führen die Lösung der Aufgabe nicht zu Ende, weitere Überlegungen bleiben dem Leser überlassen. Es ist zu beachten, dass bei der ersten Lokalisierung die Lösung einfacher ist, es sind (außer dem bekannten Punkt T) keine unbekannten Hilfspunkte erforderlich.

Es ist jetzt einfach, Konstruktionsaufgaben in einer Ebene nach der Anzahl der unbekannten Punkte einzuteilen. Dabei überrascht es nicht, dass man z.B. bei Aufgaben mit nicht gegebener Lage bei verschiedenen Lokalisierungen zu Aufgaben mit einer unterschiedlichen Anzahl unbekannter Punkte kommt.
Eine ähnliche Situation ergibt sich auch in der Algebra, besonders bei Textaufgaben. Konstruktionsaufgaben sind ja, wie bereits erwähnt, ebenfalls Textaufgaben mathematischen Charakters.

Die einfachsten Aufgaben sind zweifellos Aufgaben mit einem unbekannten Punkt. Das Lösungsprinzip besteht in der Regel darin, zwei geometrische Örter (Punktmengen) zu finden, zu denen der gesuchte Punkt gehört. Die Lösungsmenge gehört dann zum Durchschnitt beider Mengen. Sie ist in der Regel damit identisch.

Beispiel 72. Es sind eine Strecke AB von der Länge c und zwei Strecken der Länge v bzw. $d > c$ gegeben. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, bei dem die Summe der Seiten AC und BC gleich d ist und für das nachstehende Bedingungen gelten:

a) Die Höhe auf die Seite AB hat die Länge v.
b) Für die Seiten AC und BC gilt die Beziehung $AC > 2BC$.

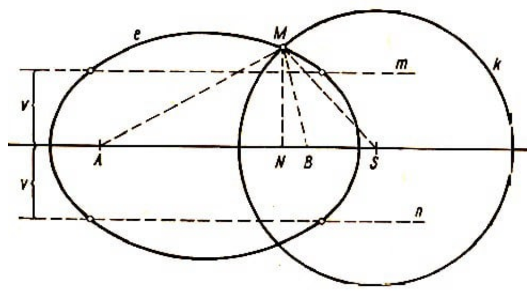


Abb. 35

Lösung. Analyse. Der Eckpunkt C gehört in beiden Fällen zu einer Punktmenge, für deren Punkte die Summe der Entfernungen von den gegebenen Punkten A und B stets gleich d ist. Diese Menge ist eine Ellipse e mit den Brennpunkten A und B; ihre Hauptsache hat die Länge d.
Im Fall a) gehört der Eckpunkt C außerdem zu zwei Parallelen zur Geraden AB im Abstand v. Im Fall a) können die Lösungen nur die gemeinsamen Punkte der Ellipse e mit diesen beiden Geraden sein.

Im Fall b) liegt der Ellipsenpunkt innerhalb des Apollonischen Kreises k. Dieser Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte X, für die die Beziehung gilt $AX = 2BX$. Wir beweisen diese Behauptung.

Als bekannt wird der Satz vorausgesetzt, dass eine Punktmenge, für die $AX = 2BX$

gilt, ein zur Geraden AB symmetrischer Kreis ist der sogenannte Kreis des Apollonius). Der Punkt A liegt außerhalb, der Punkt B innerhalb dieses Kreises (Abb. 36).

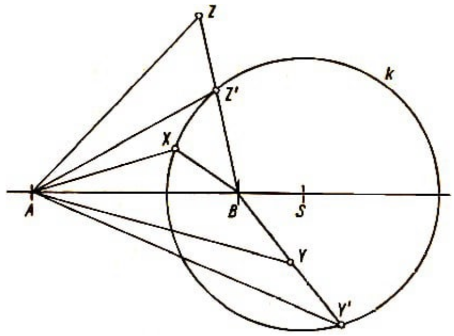


Abb. 36

Wir bezeichnen nun einen Punkt innerhalb k mit Y, ferner den Schnittpunkt der Halbgeraden BY mit dem Kreis k mit Y'. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$AY \geq AY' - YY' = 2BY' - YY' > 2BY' - 2YY' = 2(BY' - YY') = 2BY \quad \text{(107a)}$$

Es sei ferner Z ein beliebiger Punkt außerhalb k. Den Schnittpunkt der Strecke BZ mit dem Kreis k bezeichnen wir mit Z'. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$AZ < AZ' + Z'Z = 2BZ' + Z'Z < 2BZ' + 2Z'Z = 2(BZ' + Z'Z) = 2BZ \quad \text{(107b)}$$

Die Ungleichungen bestätigen die aufgestellte Behauptung.

Im Fall b) können die Lösungen der Aufgabe nur die Punkte der Ellipse innerhalb des Kreises k sein. Diese Punkte bilden entweder einen offenen Bogen, oder es existiert überhaupt kein Punkt, der der Aufgabe genügt (Abb. 35), denn die Kurven e und k schneiden sich in zwei Punkten, oder sie berühren sich in einem Punkt, oder sie haben überhaupt keinen gemeinsamen Punkt. Diese Behauptung beweisen wir nicht.

Sowohl die Aufgabe a) als auch die Aufgabe b) ist mittels der euklidischen Konstruktion lösbar, da sowohl die Konstruktion der Schnittpunkte einer Ellipse mit einer Geraden als auch die Konstruktion der Schnittpunkte einer Ellipse mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse der Ellipse liegt, möglich ist.

Wir geben beide zugehörigen Konstruktionen an; die erste als Muster für eine konstruktive "Formel" oder einen Algorithmus, die zweite als Muster für die Konstruktion anhand einer Berechnung.

Die Schnittpunkte einer Geraden $m \parallel AB$ mit einer Ellipse e bestimmen wir z.B. mit Hilfe der Affinität. Wir verwenden die senkrechte Affinität mit der Affinitätsachse AB, die die Ellipse e in den Kreis e' überführt, der der Ellipse umschrieben ist (Abb. 37). Bei dieser Affinität ist dem Punkt C der Ellipse e der Punkt C' des Kreises e' zugeordnet.

Wir ermitteln nach der in Abb. 37 angegebenen Konstruktion die Abbildung m' der Geraden m, bestimmen die Schnittpunkte der Geraden m' mit dem Kreis e' und finden mittels Affinität aus diesen die Schnittpunkte der Geraden m mit der Ellipse e.

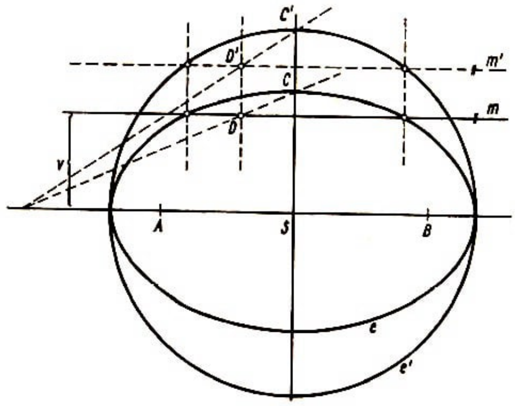


Abb. 37

Bei der zweiten Konstruktion verwenden wir die Berechnung.
Die Bezeichnung der Punkte wählen wir nach Abb. 35. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Ellipse e mit dem Kreis k mit M, die senkrechte Projektion von M auf die Gerade AB mit N und den Mittelpunkt des Kreises k mit S. Der Punkt N liegt wegen der Eigenschaften des Kreises k auf der Halbgeraden AB. Wir bezeichnen ferner die Länge der Strecken mit $AN = x$, $MN = v$.
Bereits früher wurde die Bezeichnung $AB = c$ gewählt. Weiterhin gilt $AM + BM = d$, $AS = \frac{4}{3}c$. Der Radius des Kreises k ist $\frac{2}{3}c$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken AMN, BMN, SMN erhalten wir mit $BN = |c - x|$, $SN = \frac{4}{3}|c - x|$.

$$\sqrt{x^2 + v^2} + \sqrt{|c - x|^2 + v^2} = d \tag{108}$$

$$|\frac{4}{3}c - x|^2 + v^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \tag{109}$$

Aus der Gleichung (109) ergibt sich

$$x^2 + v^2 = \frac{4}{3}(2cx - x^2)$$

Eingesetzt in die Gleichung (108) erhalten wir durch Quadrieren und Umformen $3(2cx - c^2) = d^2$ bzw.

$$x = \frac{3c^2 + d^2}{6c} \tag{110}$$

Die euklidische Konstruktion einer Strecke von der Länge x ist einfach:
Wir konstruieren zuerst eine Strecke von der Länge $y = \sqrt{3}c^2 + d^2$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten $c\sqrt{3}$ und d. Dann konstruieren wir die Strecke x als Hypotenusenabschnitt eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Höhe y und dem zweiten Hypotenusenabschnitt $6c$.[14]

Die geometrischen Örter sind bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben offensichtlich das wichtigste Hilfsmittel. Je nachdem, in welchem Maße im Unterricht darauf eingegangen wird, besteht die Möglichkeit, mehr oder weniger Konstruktionsaufgaben zu lösen.

[14] Eine andere Konstruktion der Strecke x ergibt sich aus der Gleichung $x = \frac{c}{2} + \frac{d^2}{6c}$.

Wenn wir die Methode der geometrischen Örter zur Lösung einer Konstruktionsaufgabe anwenden, so muss diese Punktmenge eine Kurve (oder Teil einer Kurve) sein, die wir mit Hilfe der "gegebenen Mittel" darstellen können, da ihr Durchschnitt mit anderen geometrischen Örtern wiederum mit diesen gegebenen Mitteln ermittelt werden muss. Bei der Anwendung der geometrischen Örter genügt es nicht, wenn wir mit den gegebenen Mitteln nur einen Punkt konstruieren.

Beispiel 73. Gegeben sind eine Gerade p, ein Punkt A (der sowohl auf der Geraden p als auch nicht auf dieser liegen kann) und eine Strecke $s > d$. d ist der Abstand des Punktes A von der Geraden p.

a) Es ist ein Punkt X zu konstruieren, für den die Summe der Abstände von der Geraden p und dem Punkt A gleich s ist.
b) Es ist der geometrisch Ort aller dieser Punkte X zu bestimmen.

Lösung a). Die euklidische Konstruktion des Punktes X ist einfach:
Wir wählen eine beliebige Strecke $x < s$, zeichnen im Abstand x von der Geraden p die Parallelen p' und p'' und zeichnen um den Mittelpunkt A einen Kreis k mit dem Halbmesser $s - x$.
Die gemeinsamen Punkte des Kreises und der beiden Parallelen p', p'' sind die Lösungen der Aufgabe.

Die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen.
Liegt der Punkt A auf der Geraden p, ist diese Behauptung klar. Liegt der Punkt A nicht auf der Geraden p und hat die Parallele p' von der Geraden p in der Halbebene pA vom Mittelpunkt des Kreises k den Abstand $x - d$, gilt immer $|x - d| \leq s - x$, weil $x - d \leq s - x$ oder $x \leq \frac{1}{2}(d + s)$.

Lösung b) Wenn wir den geometrischen Ort aller Punkte X bestimmen wollen, zeichnen wir zur Geraden p zwei Parallelen q, r im Abstand s (Abb. 38). Der Punkt X des gesuchten geometrischen Ortes in der Halbebene pq liegt zwischen den Geraden p und q oder auf der Geraden p.

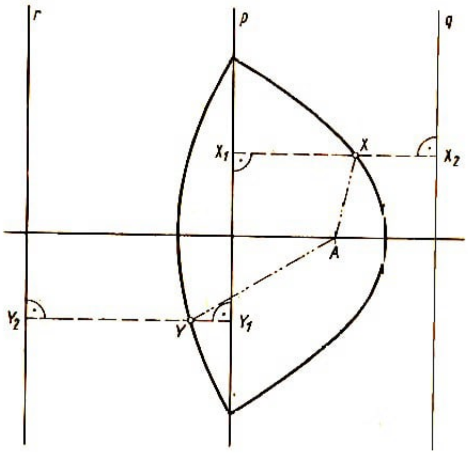


Abb. 38

Wenn wir X_1 und X_2 gemäß Abb. 38 bezeichnen, ist

$$x_1X + X_2X = s \quad , \quad X_1X + AX = s$$

somit $X_2X = AX$.
Der Punkt X ist also ein Punkt des Parabelbogens mit dem Brennpunkt A und mit der Leitlinie q in der Halbebene pq.
Umgekehrt ist jeder Punkt dieses Bogens ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes.
Die analoge Überlegung gilt für die Halbebene pr.
Wir stellen fest, dass der gesuchte geometrische Ort aus zwei Parabeln besteht, die sich auf der Geraden p schneiden (s. Abb. 38).

Nachstehend einige Bemerkungen zur Lösung von Konstruktionsaufgaben mit mehreren unbekannten Punkten. Das Prinzip ist das gleiche wie in der Algebra, wenn wir z.B. ein System von Gleichungen oder Ungleichungen mit einer größeren Anzahl von Variablen zu lösen haben.

Wir eliminieren schrittweise die Variablen, bis wir zu einer Aufgabe mit nur einer Variablen kommen. Ähnlich verfahren wir bei einer Konstruktionsaufgabe. Die Methoden des Eliminierens sind mannigfaltig und hängen von der Art der Aufgabe ab, ähnlich wie in der Algebra die Methode von der Art des Systems der Gleichungen und Ungleichungen abhängt.
Beim Eliminieren bedienen wir uns sehr häufig einer geometrischen Abbildung. In der Literatur wird dieses Vorgehen deshalb häufig als "Abbildungs-Methode" bezeichnet.
Dazu Beispiele:

Beispiel 74. Es ist ein Trapez $ABCD$ mit der Grundlinie AB zu konstruieren, von dem die Längen aller vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ gegeben sind.

Lösung. Wir legen die Lage der Strecke AB mit der Länge a fest und wählen eine Halbebene mit der Grenzgeraden AB. In dieser Halbebene sollen die zwei übrigen Eckpunkte C und D des Trapezes liegen. Für die beiden unbekannten Punkte haben wir folgende Angaben:

1. Der Punkt C liegt auf einem Kreis k_1 (Mittelpunkt B, Radius b).

2. Der Punkt D liegt auf einem Kreis k_2; (MittelpunktA, Radius d).

3. Die Richtung der Strecke CD ist die gleiche wie die Richtung der parallelen Strecke M.

4. Die Entfernung der Punkte C und D ist durch die Strecke c gegeben.

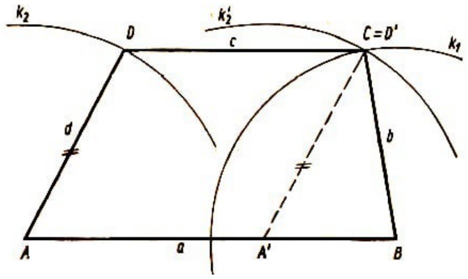


Abb. 39

Die Elimination des unbekannten Punktes D erfolgt durch Parallelverschiebung. Durch die Verschiebung T um die Strecke c in der Richtung AB fällt der Punkt D mit dem Punkt C zusammen.

Weil der Punkt D auf dem Kreis k_2 liegt, liegt der Punkt $D' = C$ auf dem Kreis k_2'. Dieser ist das Bild des Kreises k_2 bei der Verschiebung T. Der Mittelpunkt A' des Kreises k', ist das Bild des Punktes A bei der Verschiebung T.

Die Radien der Kreise k_2 und k_2' sind beide gleich der Strecke d. Den Punkt A' konstruieren wir durch Ergänzung des Dreieckes ADC zum Parallelogramm $ADCA'$, indem wir auf der Halbgeraden AB von A aus eine Strecke von der Länge c abtragen.

Durch dieses Vorgehen (durch Elimination des Punktes D) ist die Aufgabe auf eine Aufgabe mit nur einem unbekannten Punkt C zurückgeführt. Dieser gehört zu zwei bekannten geometrischen Örtern, zu den Kreisen k_1 und k_2'.

Eigentlich haben wir das übliche "Hilfsdreieck" $A'BC$ mit den gegebenen Seitenlängen $A'B = a - c$, $BC = b$, $A'C = d$ konstruiert.
Lediglich die Bedeutung der Konstruktion ist eine andere. Durch den Kunstgriff vermeiden wir die Konstruktion der Parallelen zur Seite AD durch den Punkt C. Diese Art der Konstruktion passt besser in das System der Lösung von Konstruktionsaufgaben.

Die letzte Bemerkung bezieht sich auf die Feststellung der Anzahl der Lösungen einer Konstruktionsaufgabe. Soweit es sich um eine Aufgabe mit gegebener Lage handelt, ist sie eindeutig bestimmt.
Zum Beispiel hat die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei verschiedene gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt, so viele Lösungen, wieviele verschiedene solcher Kreise man konstruieren kann.

Anders ist dies bei Aufgaben mit nicht gegebener Lage, die auf unendlich viele verschiedene Arten lokalisiert werden können. Wenn eine solche Aufgabe überhaupt lösbar ist, dann existieren unendlich viele Objekte, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Der Charakter der Aufgabe (er ist nicht durch die Lage der gegebenen Elemente festgelegt) erfordert jedoch, dass wir nicht alle diese Objekte als verschiedene Lösungen werten.
Dazu muss man allerdings eine genaue Festlegung darüber treffen, welche Objekte als ein und dieselbe Lösung gelten sollen und welche als verschiedene Lösungen.

Diesen Hinweis auf die Festlegung macht man beim Dreieck, das in Aufgaben mit nicht gegebener Lage das am häufigsten gesuchte Objekt ist.

Festlegung. Es seien zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ Lösungen einer Aufgabe mit nicht festgelegter Lage. Diese Lösungen nehmen wir nur dann als identisch an, wenn eine kongruente Abbildung in einer Ebene existiert, die die Punkte A_1, B_1, C_1 der Reihenfolge nach in die Punkte A_2, B_2, C_2 überführt.
Zur Illustration dazu wenigstens ein Beispiel.

Beispiel 75. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren mit der Seitenlänge $a = 8$ cm, mit der Seitenhalbierenden $s_a = 5$ cm und mit der Höhe $h_a = 4$.

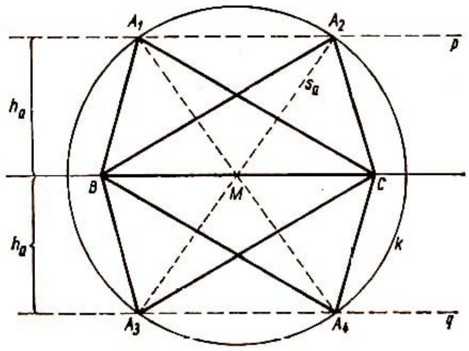


Abb. 40

Lösung a) Wir legen die Lage der Strecke $BC = a$ fest und bezeichnen ihren Mittelpunkt mit M. Als einziger Punkt ist der Eckpunkt A des gesuchten Dreieckes unbekannt.
Der Eckpunkt A liegt einerseits auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius s_a und andererseits auf den zwei Parallelen p und q zur Geraden BC.
Der Abstand dieser beiden Parallelen von BC ist h_a. In unserem Fall schneidet jede der Geraden p und q den Kreis k in zwei verschiedenen Punkten.

Wir erhalten somit insgesamt vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 (Abb. 40). Die Probe zeigt, dass alle diese vier Dreiecke A_iBC Lösungen der Aufgabe sind.
Dabei ist $\triangle A_1BC \cong \triangle A_3BC$, $\triangle A_2BC \cong \triangle A_4BC$, $\triangle A_1BC$ ist jedoch nicht kongruent zu $\triangle A_2BC$ (die bestehende Kongruenz dieser Dreiecke entspricht nicht der obigen Vereinbarung. Es ist $\triangle A_1BC \cong \triangle A_2CB$.

Die zugehörige Kongruenzabbildung ist die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke BC, die zwar den Punkt A_1 in den Punkt A_2 überführt, aber die Punkte B, C vertauscht).
Demgegenüber werden bei der Spiegelung an der Geraden BC beide Eckpunkte B, C reproduziert, aber die Punkte A_1 und A_3 bzw. A_2 und A_4 vertauscht. Die Aufgabe hat somit zwei verschiedene Lösungen.

Lösung b) Wir gehen von einer anderen Lokalisation aus.
Wir legen die Strecke $AM = s_a$ fest und konstruieren ein Dreieck AMP, wobei P der Fußpunkt der vom Eckpunkt A ausgehenden Höhe h_a ist.
Die Aufgabe enthält dann die zwei unbekannten Punkte B und C.

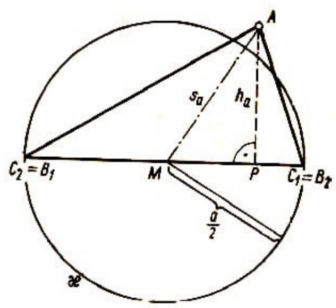


Abb. 41

Jeder dieser Punkte liegt einerseits auf der Geraden MP und andererseits auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{a}{2}$. Die Gerade MP schneidet den Kreis in zwei verschiedenen Punkten, und wir erhalten nur ein einziges Dreieck. Es hat also den Anschein, dass es nur eine Lösung gibt. Dies stimmt aber nicht.

Wenn wir nach Abb. 41 die Eckpunkte doppelt bezeichnen, sehen wir, dass das eine gezeichnete Dreieck für zwei Lösungen steht, denn das Dreiecke AB_1C_1 ist nicht kongruent mit dem Dreieck AB_2C_2 (es gilt $AB_1C_1 \cong AC_2B_2$).

Wir erhalten also wieder zwei verschiedene Lösungen.

Mit diesem Hinweis beenden wir die Ausführung über Konstruktionsaufgaben. Die Methodik zur Lösung dieser Aufgaben würde, ähnlich wie die Methodik zur Lösung anderer Aufgabenkategorien (z.B. Gleichungen, Ungleichungen, Aufgaben der Funktionentheorie, der Trigonometrie, räumlichen Konstruktionsaufgaben u.ä.) eine systematische Bearbeitung erfordern.

Dies ist jedoch nicht die Aufgabe dieses Büchleins.

11 Literaturverzeichnis

Im vorliegenden Buch werden zahlreiche Aufgaben der Elementarmathematik aus verschiedenen Gebieten in ihrem Lösungsweg ausführlich behandelt. Dabei werden vom Verfasser an vielen Stellen Tatsachen aus der Algebra, der elementaren Analysis oder der Funktionenlehre, der Zahlentheorie und Geometrie herangezogen.

Im folgenden Literaturverzeichnis sind Bücher - hauptsächlich aus der Mathematischen Schülerbücherei - zusammengestellt, in denen sich der Leser über die vom Autor verwendeten Definitionen und Sätze näher informieren kann.

Zur Algebra

1. Belkner, H., Determinanten, 2. Aufl., MSB Bd. 33, Leipzig 1970

2. Belkner, H., Matrizen, 2. Aufl., MSB Bd. 48, Leipzig 1973

3. Gelfond, A. O., Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen, 5. Aufl., MSB Bd. 22, Berlin 1973

4. Korowkin, P. P., Ungleichungen, 6. Aufl., MSB Bd. 9, Berlin 1970

5. Miller, M., Rechenvorteile, 5. Aufl., MSB Nr. 14, Leipzig 1975

G. Schafarewitsch, J. R., Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades, 3. Aufl., MSB Bd. 23, Berlin 1968

7. Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3, G. Kleinfeld, Ungleichungen, 2. Aufl., MSB Bd. 38, Leipzig 1973

Zur Mengenlehre, mathematischen Logik und Funktionenlehre

1. Gelfand, I.M., E.G. Glagolewa, E.E. Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung, 2. Aufl., MSB Bd. 58, Leipzig 1974

2. Hasse, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, 6. Aufl., MSB Bd. 2, Leipzig 1974

3. Markuschewitsch, A.I., Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen, 3. Aufl., MSB Bd. 42, Berlin 1966

4. Natanson, I. P., Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben, 5. Aufl., MSB Bd. 15, Berlin 1972

5. Varga, T., Prädikatenlogik, MSB Bd. 62, Berlin 1972

G. Wilenkin, N.J., Unterhaltsame Mengenlehre, 2. Aufl., MSB Bd. 64, Leipzig 1973

7. Zich O., A. Kolman, Unterhaltsame Logik, 3. Aufl., MSB Bd. 51, Leipzig 1975

Zur Zahlentheorie

1. Dynkin, E.B., W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen, Band II, Aufgaben

aus der Zahlentheorie, II. Aufl., MSB Bd. 20, Berlin 1968

2. Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1, E. Lehmann, Zahlentheorie 2. Aufl., MSB Bd. 36, Leipzig 1970

3. Worobjow, N. N., Teilbarkeitskriterien, MSB Bd. 52, Berlin 1972

Zur Geometrie

1. Gelfand, I.M., E.G. Glagolewa, A.A. Kirillow, Die Koordinatenmethode, MSB Bd. 41, Leipzig 1968

2. Hajos, G., Einführung in die Geometrie, Leipzig 1970

3. Hameister, E., Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, 3. Aufl., MSB Bd. 4, Leipzig 1970

4. Lietzmann, W., Altes und Neues vom Kreis, 4. Aufl., MSB Bd. 12, Leipzig 1966

5. Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2, G. Grosche, Elementargeometrie, 2. Aufl., MSB Bd. 37, Leipzig 1973