
J.S. Dubnow

Fehler in geometrischen Beweisen

Übersetzung und Bearbeitung: Gerhard Ränike, Gerhard Tesch

1958 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 17

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalphabet.de>

1 Vorwort

Das vorliegende Bändchen entstand aus Vorträgen und Diskussionen in Arbeitsgemeinschaften, die ich einige Male mit Schülern der VII. bis VIII. bzw. der IX. bis X. Klassen im Rahmen der mathematischen Schulzirkel an der Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität durchgeführt habe.

Mit beiden Teilnehmerkreisen vereinbarte ich im allgemeinen zwei, etwa einen Monat auseinanderliegende Zusammenkünfte. Auf der ersten trug ich den Inhalt der Kapitel I und III vor. Nach einer Einführung wurden hier die fehlerhaften Beweise ohne Kommentare vorgebracht. Am Ende der Vorlesung bat ich die Hörer, die Fehler zu suchen, um bei unserem nächsten Zusammentreffen ihre Einwände gegen die Beweise vorzubringen.

Unser zweites Zusammentreffen war dann mehr ein Seminar. Ich erinnerte noch einmal kurz an den Inhalt der einzelnen Beispiele; dann fragte ich, wer dazu sprechen möchte. Es meldeten sich jedesmal mehrere Hörer.

Einer von ihnen ging an die Tafel, die anderen bat ich, Bemerkungen von ihren Plätzen aus zu machen oder auch an die Tafel zu gehen. Zum Abschluss der Diskussion über jedes Beispiel brachte ich eine kurze Zusammenfassung mit Ergänzungen und Varianten und gab eine kurze Einschätzung.

Es ist kaum anzunehmen, dass alle Schüler, die sich an dieser Arbeit aktiv beteiligten, ohne fremde Hilfe gearbeitet haben. Aber schon die verständliche Darstellung einer nicht selbst erarbeiteten Widerlegung eines Sophismus ist keineswegs immer einfach. Zur Ehre der Moskauer Schüler, die dabei mitwirkten, muss ich sagen, dass sie sich in dieser Beziehung von der besten Seite gezeigt haben; einige waren an der Tafel geradezu hervorragend.

Durch diesen Versuch ermutigt, wende ich mich mit diesem Büchlein an einen größeren Kreis, in der Hoffnung, dass es bei seinen Lesern nicht nur Interesse, sondern auch mathematische Aktivität weckt.

Diese möge sich darin zeigen, dass der Leser den Weg einschlägt, den ich den Teilnehmern meiner Vorträge empfohlen habe:

Zuerst möge er sich mit den in Kapitel I (für Schüler von der VII. Klasse ab) und Kapitel III (für die IX. bis X. Klasse) angeführten fehlerhaften Beweisen beschäftigen und in jedem Fall versuchen, den Fehler selbst zu finden.

Dann erst lese er die Kapitel II und IV, in denen er die Erklärungen zu den einzelnen Beispielen aus den Kapiteln I und III sowie einige Ergänzungen findet.

Die kleingedruckten Abschnitte und ein großer Teil der Fußnoten können übergangen werden; sie sind für fortgeschrittenere Leser bestimmt, aber auch als Hinweise für mathematische Arbeitsgemeinschaften gedacht.

J. Dubnow

2 Einleitung

Vor 40 Jahren schilderte der bekannte Pädagoge und Mathematiker N. A. Iswolski in einem Artikel über den Geometrieunterricht ein charakteristisches Gespräch, das er mit einer Schülerin geführt hatte.

Das Mädchen kam von der V. in die VI. Klasse des Gymnasiums und hatte ein Jahr Geometrieunterricht gehabt. Das Gespräch fand in zwangloser Form während der Ferien statt. Der Lehrer fragte seine Gesprächspartnerin, was sie vom Geometrieunterricht behalten habe.

Das Mädchen dachte lange nach, konnte sich aber an nichts mehr erinnern. Der Lehrer fragte dann: "Was habt ihr denn das ganze Jahr über in den Geometriestunden getan?"

Die Antwort ließ nicht lange auf sich warten: "Wir haben bewiesen."

Die Antwort ist wenig überzeugend, spiegelt aber in ihrer Naivität die Vorstellung vieler Schüler wider: In der Arithmetik löst man Aufgaben, in der Algebra löst man außerdem Gleichungen und leitet Formeln her, aber in der Geometrie werden Sätze bewiesen.

Hierzu ist zu sagen, dass diese Vorstellung vom Aufbau der Mathematik schon längst falsch ist. In modernen mathematischen Arbeiten kann man die Überschrift "Satz" mit darauffolgendem Beweis überall gleich oft finden, ganz gleich, ob dort von Zahlen oder von Figuren die Rede ist. In allen Zweigen der Mathematik werden Aufgaben gelöst.

Auch in der Geometrie ergibt sich die Notwendigkeit, Lösungen von Gleichungen zu finden. Anders war es vor 2000 Jahren, als die sogenannte euklidische Geometrie geschaffen wurde, die bis heute der Schulgeometrie zugrunde liegt.

Bis jetzt wird auch in modernen Schulbüchern die Geometrie (und zwar sie allein und nicht die anderen mathematischen Disziplinen) als Kette von Sätzen dargestellt (von denen einige "Hilfssätze" oder "Folgerungen" genannt werden).

Dies geschieht nach einem so gut bekannten Schema, dass wir nur kurz daran zu erinnern brauchen. Jeder Satz besteht aus Voraussetzung ("Wenn ...") und Behauptung ("dann ...").

Beim Beweis darf man sich nur auf Axiome und auf schon bewiesene Sätze stützen. Man darf sich weder auf die Anschauung berufen, die manchmal trägt, noch auf Sätze, die wohl richtig sind, aber noch nicht bewiesen wurden (diesen könnte nämlich der gerade zu beweisende Satz zugrunde liegen, so dass ein Zirkelschluss entstehen würde).

Es ist bekannt, welche Rolle beim Beweis die Zeichnung spielt:

Sie veranschaulicht nicht nur den Inhalt des Satzes, sondern auch den Beweisgang. Zuweilen muss man zu einem Satz mehrere Zeichnungen anfertigen, da der Beweis sich mit der gegenseitigen Lage der einzelnen Teile der Zeichnung ändert.

Ein Beispiel dafür ist der Peripheriewinkelsatz, bei dessen Beweis man im allgemeinen drei Fälle unterscheidet, je nachdem, ob der Mittelpunkt des Kreises auf einem Schenkel des Winkels, innerhalb oder außerhalb des Winkels liegt.

In solchen Fällen ist es wichtig, dass alle möglichen Fälle berücksichtigt werden. Lässt

man einen Fall aus, für den sich die vorhergehenden Überlegungen nicht wiederholen lassen, so ist der ganze Beweis falsch, da es ja sein könnte, dass der Satz eben in diesem Fall nicht gilt.

Man soll die Bedeutung der Zeichnung weder über- noch unterschätzen. Es wäre eine Überschätzung, würde man annehmen, dass die Zeichnung ein notwendiger Bestandteil eines Beweises sei.

Man kann theoretisch jeden geometrischen Beweis ohne eine Zeichnung führen. Dies hätte sogar den Vorteil, dass man sich dann nicht auf die Anschauung berufen könnte, die manchmal trügt und zu Fehlern führt. Praktisch würde aber ein Verzicht auf die Zeichnung zu Schwierigkeiten führen, wie sie auftreten, wenn wir mit vielstelligen Zahlen im Kopf rechnen wollten (oder, um ein Beispiel aus einem etwas andersartigen Gebiet zu nehmen, wenn wir Schach spielten, ohne auf das Brett zu sehen).

Die Gefahr, hierbei Fehler zu machen, ist sehr groß. Natürlich kann nur eine sorgfältig angefertigte Zeichnung beim Beweis helfen.

Der Schüler denkt zuweilen, dass er mit einer genauen Zeichnung nur dem Lehrer einen Gefallen tut. Mit einer schlechten Zeichnung schadet der Schüler vor allem sich selbst, da sie ihm nicht hilft, sondern ihn behindert. Der Schüler darf sich auch nicht dadurch verleiten lassen, dass es ihm in dem einen oder anderen Fall gelang, einen Beweis mit einer schlechten Zeichnung zu führen; so ist es sicher nicht immer.

In diesem Bändchen wird der Leser richtige und absichtlich falsche Zeichnungen finden. Unser Interesse gilt nämlich fehlerhaften Beweisen, und für diese sind manchmal ungenaue Zeichnungen notwendig (genau so, wie man bei indirekten Beweisen absichtlich falsche Zeichnungen benutzt).

In den Kapiteln I und III findet der Leser eine Reihe von Beispielen für fehlerhafte geometrische Beweise. Über die einzelnen Arten von Fehlern sprechen wir besser später, wenn wir bei diesen Beispielen angelangt sind. Aber schon hier glaube ich, den Leser auf den Charakter der (fehlerhaft) bewiesenen Aussagen hinweisen zu müssen.

Unter diesen Sätzen sind solche, deren falsche Aussage der Leser sofort sieht, zum Beispiel der Satz: "Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen."

In solchen Fällen besteht unsere Aufgabe darin, den Fehler im Beweis zu finden. Solche Beweise für offenbar falsche Behauptungen sind schon aus dem Altertum unter dem Namen "Sophismen" bekannt.

Bei anderen Beispielen weiß der Leser zunächst nicht, ob der zu beweisende Satz falsch oder richtig ist, wenn er nicht schon früher davon gehört hat. Hier ist unsere Aufgabe komplizierter. Wir müssen erstens zeigen, dass der Beweis nicht stichhaltig ist, und zweitens die Unrichtigkeit der Behauptung aufdecken.¹

Schließlich findet man Beweise, deren Fehlerhaftigkeit darauf beruht, dass die zu beweisenden Aussagen einfach nicht mit den zur Verfügung stehenden Mitteln bewiesen

¹Es genügt nicht, nur das erste zu tun: Man kann nämlich für eine richtige Aussage einen falschen Beweis angeben; zum Beispiel kann man aus der falschen Gleichung $3 + 5 = 12$ den richtigen Schluss ziehen, dass $8 + 5$ eine gerade Zahl ist.

werden können. Was hierunter zu verstehen ist, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Bekannt ist folgende Scherzaufgabe:

"Die Position eines Schiffes sei durch Angabe der geographischen Breite φ und der geographischen Länge λ gegeben, und zwar sei $\varphi = 42^\circ 15'$ n.B. und $\lambda = 17^\circ 32'$ w.L. (die Zahlenangaben sind ganz willkürlich, man fügt im allgemeinen noch einige Angaben hinzu, damit die Aufgabe schwieriger erscheint). Wie alt ist dann der Kapitän?"

Für unsere Zwecke ändern wir die Frage etwas und fragen statt dessen: "Stimmt es, dass der Kapitän älter ist als 45 Jahre?"

Es dürfte jedem klar sein, dass diese Frage nicht auf Grund der in der Aufgabe enthaltenen Angaben beantwortet werden kann, dass jeder Versuch, etwas über das Lebensalter des Kapitäns aussagen zu wollen, mit einem Misserfolg enden muss. Man kann sogar beweisen, dass es überhaupt unmöglich ist, einen Beweis für die Behauptung, der Kapitän sei älter als 45 Jahre, zu führen.

Die Schifffahrtsgesellschaft (über die der Aufgabenstellung nichts zu entnehmen ist) kann nämlich die Reiseroute des Schiffes, die durch den angegebenen geographischen Punkt führt, vorschreiben und gleichzeitig einen Kapitän beliebigen Alters auf die Reise schicken (wenn vorausgesetzt wird, dass der Schifffahrtsgesellschaft sowohl junge als auch alte Kapitäne zur Verfügung stehen).

Mit anderen Worten, es ist zugelassen, dass der Kapitän jünger als 45 Jahre ist. Ein derartiges Alter führt keineswegs zu einem Widerspruch mit den Angaben, die den geographischen Ort des Schiffes betreffen. Anders verhält es sich, wenn die Aufgabe noch andere Angaben enthält, etwa den Namen des Schiffes und den genauen Zeitpunkt, in dem dieses den angegebenen Punkt passiert.

Dann könnte man hoffen, aus dem Schiffstagebuch die Personalien des Kapitäns und damit sein Alter zu erfahren.

Es gibt also Behauptungen, deren Richtigkeit man beweisen oder auch nicht beweisen kann, je nachdem, welche Mittel man zur Verfügung hat.

Wir wenden uns nunmehr wieder unserem Interessengebiet, der Geometrie, zu und fragen: "Stimmt es, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich 180° ist?"

Jeder Schüler, der mit den Sätzen über parallele Geraden vertraut ist, kennt den Beweis dieses wichtigen Satzes, aber nur wenigen ist seine zweitausendjährige Geschichte bekannt. Der Beweis beruht auf Eigenschaften der Winkel, die beim Schnitt von zwei parallelen Geraden mit einer dritten Geraden entstehen. Diese Eigenschaften basieren ihrerseits auf dem sogenannten Parallelenaxiom, das besagt:

Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann eine und nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden.²

Seit Euklid, also im Verlauf von mehr als zwei Jahrtausenden, wurde immer wieder der

²Wir weisen hier darauf hin, dass der wesentliche Inhalt des Axioms in den Worten "und nur eine" steckt. Dass man überhaupt eine Parallele ziehen kann, wird schon früher bewiesen, etwa mit Hilfe des Satzes: "Zwei verschiedene Senkrechte zu ein und derselben Geraden sind parallel!"

Versuch gemacht, aus diesem Axiom einen Satz zu machen, d.h. die in diesem Axiom enthaltene Aussage mit Hilfe von Sätzen zu beweisen, die schon bei Euklid und auch in unseren Schulbüchern dem Parallelenaxiom vorangehen. An Stelle dieses Axioms darf hierbei kein anderes Axiom eingeführt werden, wie anschaulich sein Inhalt auch sein mag.

Alle diese Versuche blieben erfolglos und zeigten nur, dass das Parallelenaxiom auf mehrere Arten durch andere Axiome ersetzt werden kann. Wird insbesondere eine der Eigenschaften der Winkel, die von zwei Parallelen und einer sie schneidenden Geraden gebildet werden, oder der Satz über die Winkelsumme im Dreieck als Axiom genommen, so kann das Parallelenaxiom als Satz angesehen werden.

Erst in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts zeigte der berühmte russische Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856), weshalb alle Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, fehlschlagen mussten.³

Lobatschewski schuf hierzu eine umfassende und tiefgründige Theorie, die hier nicht dargestellt werden kann, auch nicht andeutungsweise. Diese Theorie enthält implizit einen Beweis für die Tatsache, dass es unmöglich ist, das Parallelenaxiom so zu beweisen, wie dies vor Lobatschewski (und zu dessen Lebzeiten) von vielen Mathematikern versucht wurde.

Zwei so verschiedene Dinge, wie sie die Lobatschewskischen Geometrie einerseits und die naive Frage nach dem Alter des Kapitäns andererseits darstellen, zeichnen sich doch durch ein gemeinsames Merkmal aus. In beiden Fällen hat nämlich der "Beweis der Unmöglichkeit des Beweises" ein und dieselbe Natur: an Beispielen (Modellen) wird gezeigt, dass ein und dieselben Angaben mit verschiedenen einander widersprechenden Aussagen in Einklang stehen können.

Im Hinblick auf das Parallelenaxiom bedeutet dies: Aus den Tatsachen, die im üblichen Aufbau der Geometrie dem Parallelenaxiom vorangehen, folgt weder die Richtigkeit der in diesem Axiom enthaltenen Aussage noch ihr Gegenteil.

Wir wissen damit von vornherein, dass jeder Beweis des Parallelenaxioms (oder eines äquivalenten Axioms) falsch sein muss, wenn der Beweis nur auf Aussagen beruht, die diesem Axiom vorangestellt werden. Weiter unten sind mehrere einfache Beispiele für derartige fehlerhafte Beweise angegeben.

³Außer Lobatschewski wären noch Johann Bolyai (1802-1860) und Carl Friedrich Gauß (1777-1855) zu nennen, die sich ebenfalls mit dem Problem des Parallelenaxioms beschäftigten und es lösten. Vgl. dazu A. P. Norden, Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie (Übersetzung aus dem Russischen). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958. - Anm. d. Red.

3 Kapitel I - Fehler in elementaren Überlegungen

Wir beginnen mit Beispielen für falsche Beweise. Ihre kritische Besprechung wird in Kapitel II erfolgen. Der Leser sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass einige der Zeichnungen in diesem Büchlein fehlerhaft ausgeführt sind, ohne dass dies sofort auffällt.

Beispiel 1. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 21 cm hat denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck mit den Seiten 34 cm und 13 cm.⁴

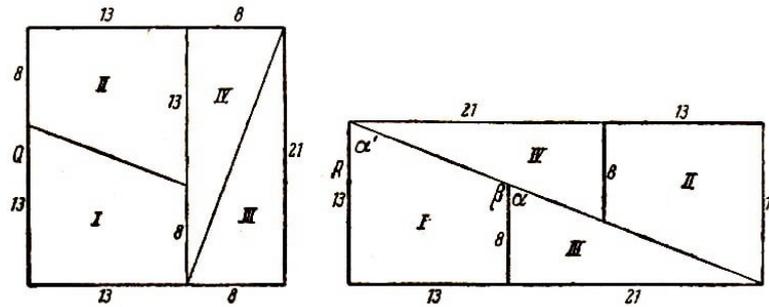


Abb. 1a und b

Das Quadrat Q wird in zwei Rechtecke mit den Maßen $13 \cdot 21 \text{ cm}^2$ und $8 \cdot 21 \text{ cm}^2$ zerlegt (Abb. 1a).

Das erste Rechteck teilen wir in zwei kongruente Trapeze mit den Grundseiten 13 cm und 8 cm auf, während das zweite Rechteck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 8 cm und 21 cm unterteilt wird. Aus den so erhaltenen vier Teilen setzen wir das Rechteck R zusammen (Abb. 1b). Dabei sind gleiche Teilflächen des Quadrates und des Rechteckes mit denselben römischen Ziffern bezeichnet.

An das Trapez I ist das rechtwinklige Dreieck III so angefügt, dass die rechten Winkel an der gemeinsamen Seite der Länge 8 cm Nebenwinkel sind. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 13 cm und $13 + 21 = 34 \text{ cm}$.

Ein gleiches Dreieck wird aus den Teilflächen II und IV gebildet.

Schließlich setzt man aus den beiden so erhaltenen gleichen rechtwinkligen Dreiecken das Rechteck R mit den Seiten 13 cm und 34 cm zusammen. Der Flächeninhalt dieses Rechteckes beträgt $34 \cdot 13 = 442 \text{ cm}^2$; indessen ist der Flächeninhalt des Quadrates Q , das aus denselben Teilflächen besteht, gleich $21 \cdot 21 = 441 \text{ cm}^2$.

Woher kommt der überzählige Quadratzentimeter?

Wir empfehlen dem Leser folgenden Versuch: Er schneide aus kariertem Papier das Quadrat Q aus und zerlege es unter genauer Einhaltung der vorgegebenen Maße in die vier Teile. Dann setze er aus diesen Teilen das Rechteck R zusammen.

Beispiel 2. "Beweis" des Parallelenaxioms.

Gegeben seien eine Gerade AB und ein Punkt C außerhalb dieser Geraden. Es soll bewiesen werden, dass durch den Punkt C genau eine Parallele zu AB gezogen werden kann.

⁴Siehe auch N. N. Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen, Band 1 dieser Reihe, S. 45. - Anm. d. Red.

Wir verwenden die bekannte Konstruktion: Vom Punkt C wird auf die Gerade AB das Lot CD gefällt (Abb. 2).

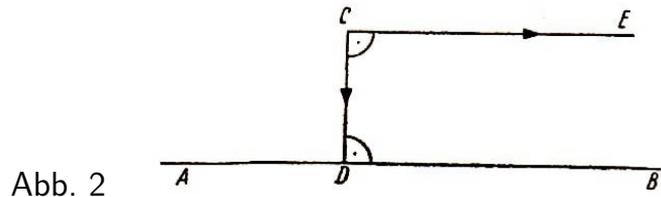


Abb. 2

Auf diesem Lot wird im Punkt C die Senkrechte CE errichtet. Das Lot CE ist nach dem bekannten Satz über zwei Senkrechte einer Geraden parallel zur Geraden AB gerichtet (wir können uns auf diesen Satz hier berufen, weil er vor dem Parallelenaxiom bewiesen wird).

Nun kann man aber von einem Punkt auf eine Gerade genau ein Lot fällen und in einem Punkt einer Geraden genau eine Senkrechte errichten (sowohl das eine als auch das andere lässt sich unabhängig vom Parallelenaxiom beweisen), d.h., die erhaltene Gerade CE ist die einzige.

Beispiel 3. Werden zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, so ist die Summe zweier entgegengesetzter Winkel gleich π (beim Beweis wird das Parallelenaxiom nicht benutzt).

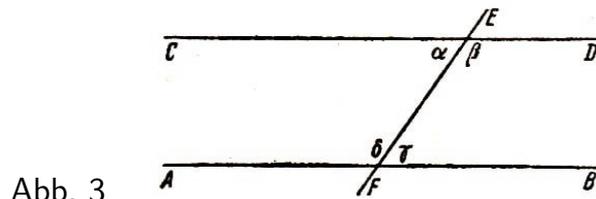


Abb. 3

Es sei $AB \parallel CD$. Die schneidende Gerade werde mit EF bezeichnet (Abb. 3). Es sind drei Fälle möglich⁵):

1. Die Summe zweier entgegengesetzter Winkel ist größer als π .
2. Die Summe zweier entgegengesetzter Winkel ist kleiner als π .
3. Die Summe zweier entgegengesetzter Winkel ist gleich π .

Im ersten Fall haben wir

$$\alpha + \delta > \pi \quad , \quad \beta + \gamma > \pi$$

⁵Wird hier und auch später von möglichen Annahmen oder möglichen Fällen gesprochen, so soll damit keineswegs behauptet werden, dass alle diese Fälle bei den Gegebenheiten des vorliegenden Beispiels wirklich möglich sind. Im Gegenteil, es kommt oft vor, dass sich ein von uns zuerst als möglich angenommener Fall nachträglich als unmöglich erweist, indem er im Widerspruch zu einer Voraussetzung oder einem bereits feststehenden Sachverhalt steht, wie das oft in indirekten Beweisen der Fall ist. Daher ist immer von solchen Möglichkeiten die Rede, die gegebenenfalls nur solange bestehen, wie die übrigen Bedingungen des Problems noch nicht berücksichtigt werden sind.

woraus sich

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta > 2\pi$$

ergibt. Die Summe der betreffenden beiden Paare von Nebenwinkeln ist aber in Wirklichkeit gleich 2π . Der so erhaltene Widerspruch zeigt, dass die erste Annahme falsch war. Aus dem gleichen Grunde müssen wir auch die zweite Annahme verwerfen, weil aus ihr folgt, dass die Summe der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kleiner als 2π ist.

Es verbleibt nur die dritte Annahme. Sie führt auf keinen Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

Beispiel 4. Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich π (der Beweis beruht nicht auf dem Parallelenaxiom).

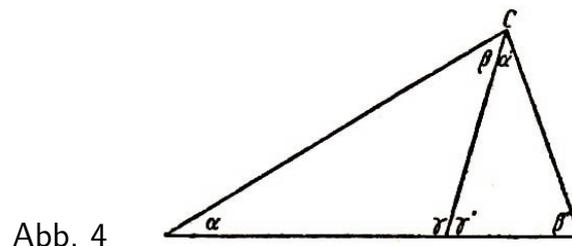


Abb. 4

Wir teilen ein gegebenes Dreieck ABC in zwei Dreiecke mittels einer durch die Ecke C verlaufenden Geraden (Abb. 4). Mit x bezeichnen wir die uns zunächst unbekannte Winkelsumme im Dreieck. Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = x \quad , \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = x$$

Durch Addition erhalten wir

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 2x$$

Nun ist $\alpha + \beta + \alpha' + \beta'$ die Winkelsumme des Dreiecks ABC . Folglich ist $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = x$. Die Winkel γ und γ' liefern als Nebenwinkel die Summe π . Somit haben wir zur Ermittlung von x die Gleichung $x + \pi = 2x$. Aus ihr ergibt sich $x = \pi$.

Beispiel 5. Es existiert ein Dreieck mit der Winkelsumme π (der Beweis beruht nicht auf dem Parallelenaxiom).

Wir beginnen mit einer geschichtlichen Bemerkung. Im 18. Jahrhundert und zu Beginn des 19. Jahrhunderts erkannten mehrere Mathematiker, dass sich über die Winkelsumme im Dreieck etwas aussagen lässt, ohne dass hierbei das Parallelenaxiom benutzt wird, und zwar erkannte man, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht größer als π sein kann.⁶

Es bleiben dann drei Möglichkeiten:

a) Die Winkelsumme ist immer (d.h. für alle Dreiecke) gleich π ;

⁶Neueste geschichtliche Bemerkungen sowie Hinweise auf die Rolle von N.I. Lobatschewski diesen Untersuchungen findet der Leser in dem Artikel von B.L. Laptew, Die Theorie paralleler Geraden in frühen Arbeiten von N.I. Lobatschewski (Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik, Folge IV, Gostechisdat 1951).

- b) sie ist immer kleiner als π ;
 c) sie ist manchmal gleich π und manchmal kleiner als π .

Später stellte man fest, dass der Fall c) entfällt. Man war nun bemüht, ein Dreieck zu finden, bei dem die Winkelsumme gleich π ist. Einer der Versuche, ein solches Dreieck zu konstruieren, soll hier vorgeführt werden. Würde die Konstruktion gelingen, so wäre das Parallelenaxiom überflüssig.

Die Winkelsumme im Dreieck ist niemals größer als π . Es gibt daher mindestens ein Dreieck, dessen Winkelsumme größer als die aller anderen Dreiecke ist. Dies sei das Dreieck ABC (s. Abb. 4) (gibt es mehrere solcher Dreiecke, so nehmen wir irgendeines dieser Dreiecke). Die Winkelsumme in ABC sei gleich x .

Dann ist in keinem anderen Dreieck die Winkelsumme größer als π . Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Abb. 4 erhalten wir

$$\alpha + \beta + \gamma \leq x \quad , \quad \alpha' + \beta' + \gamma' \leq x$$

Hieraus folgt $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' \leq 2x$. Nun war vorausgesetzt, dass $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' = x$ ist. Außerdem gilt noch $\gamma + \gamma' = \pi$. Wir erhalten hieraus $x + \pi \leq 2x$, also $x \geq \pi$.

Da x aber nicht größer als π ist, kann nur $x = \pi$ sein, d.h., die Winkelsumme im Dreieck ABC beträgt π .

Beispiel 6. Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck (Abb. 5, 6 oder 7). Wir ziehen die Winkelhalbierende des Winkels bei C und errichten die Mittelsenkrechte auf der Seite AB .

Da in unseren Überlegungen nur eine Winkelhalbierende und eine Mittelsenkrechte vorkommen, sprechen wir einfach von der Mittelsenkrechten und der Winkelhalbierenden.

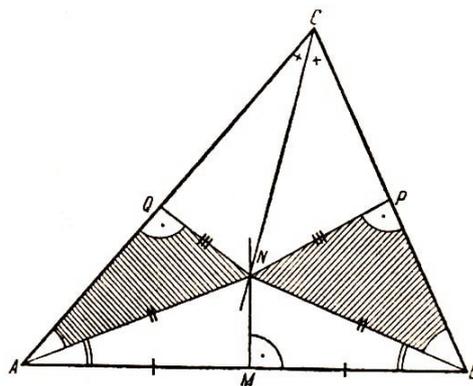


Abb. 5

Varianten:

Fall 1. Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte schneiden sich nicht, d.h., sie sind entweder parallel, oder sie fallen zusammen. Da die Mittelsenkrechte definitionsgemäß senkrecht auf AB steht, steht dann auch die Winkelhalbierende senkrecht auf AB , d.h., sie fällt mit der Höhe zusammen; das Dreieck ist in diesem Fall gleichschenkelig ($CA = CB$).

Fall 2. Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte schneiden sich innerhalb des Dreiecks ABC , etwa im Punkte N (Abb. 5). Da dieser Punkt von den beiden Schenkeln des Winkels ACB gleich weit entfernt ist, ist $NP = NQ$, wenn NP bzw. NQ die vom Punkt N auf die Seite CB bzw. CA gefällten Lote sind.

Der Punkt N ist aber auch von den beiden Endpunkten A und B der Seite AB gleichweit entfernt, d.h., es gilt $NB = NA$. Die rechtwinkligen Dreiecke NPB und NQA stimmen also in einer Kathete und der Hypotenuse überein.

Folglich ist $\angle NAQ = \angle NBP$. Addieren wir zu diesen gleichen Winkeln die gleichen Winkel NAB und NBA (diese Winkel sind gleich, weil sie Basiswinkel in dem gleichschenkligen Dreieck ANB sind), so erhalten wir $\angle CAB = \angle CBA$; das Dreieck ABC ist also gleichschenklig (denn es folgt $CA = CB$).

Fall 3. Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte schneiden sich auf der Seite AB , also im Mittelpunkt M dieser Seite. Dies bedeutet, dass im Dreieck ABC die Mittellinie und die Winkelhalbierende zusammenfallen. Hieraus folgt, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

Hinweis. Der Leser sei vor möglichen Fehlern gewarnt. Bekannt ist der Satz, dass in einem gleichschenkligen Dreieck Mittellinie und Winkelhalbierende zusammenfallen. Wir berufen uns hier allerdings nicht auf diesen Satz, sondern auf dessen Umkehrung:

Fallen in einem Dreieck die durch eine Ecke gezogene Mittellinie und Winkelhalbierende zusammen, so ist das Dreieck gleichschenklig. In dieser Form ist die Umkehrung des Satzes richtig. Der Beweis könnte dem Leser schwerfallen. Man kann ihn etwa so führen:

Es sei CM gleichzeitig Mittellinie und Winkelhalbierende im Dreieck ABC . Wir fällen vom Punkt M aus die Lote MP und MQ auf die Seiten CB bzw. CA (es kann Abb. 5 benutzt werden, wenn angenommen wird, dass M und N zusammenfallen; die Strecke MN verschwindet dann), erhalten so die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MPB und MQA und können dann aus der Gleichheit der Winkel MBP und MAQ schließen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Diese Überlegung wäre unvollständig, wenn wir nicht zeigen würden, dass P und Q auf den Seiten CB bzw. CA und nicht auf deren Verlängerungen liegen. Einer dieser Punkte könnte auf der Verlängerung der entsprechenden Seite gelegen sein, wenn einer der Winkel bei A oder B stumpf ist.

Es sei z.B. der Winkel bei B stumpf, so dass P auf der Verlängerung der Seite CB liegt.

Wie früher gilt wieder $\angle MAQ = \angle MBP$. Diese Beziehung führt jetzt aber zu einem Widerspruch, weil $\angle MAQ$ Innenwinkel, $\angle MBP$ dagegen Außenwinkel und folglich dem Winkel MAQ nicht benachbart ist.

Fall 4. Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte schneiden sich außerhalb des Dreiecks ABC . Die vom Punkt N auf die Seiten CB und CA gefällten Lote mögen diese Seiten und nicht ihre Verlängerungen treffen (Abb. 6).

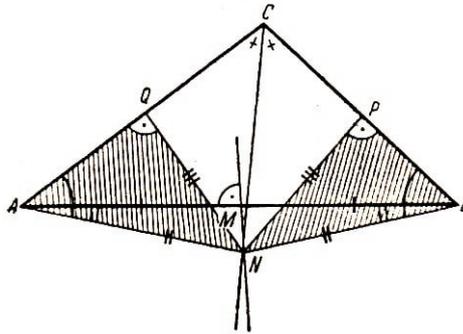


Abb. 6

Wie früher ergeben sich die kongruenten Dreiecke NPB und NQA und das gleichschenklige Dreieck ANB , nur sind jetzt die Winkel CAB und CBA gleich der Differenz (und nicht gleich der Summe wie bei Fall 2) der entsprechenden gleichen Winkel.

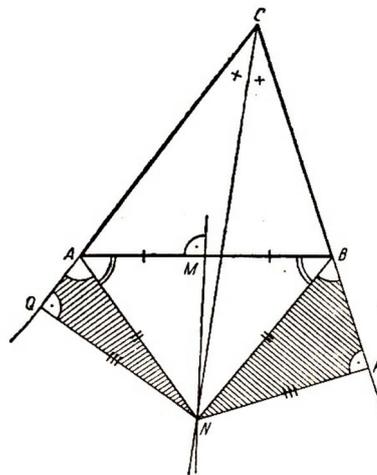


Abb. 7

Fall 5. Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte schneiden sich außerhalb des Dreiecks ABC . Die von N auf die Seiten CB und CA gefällten Lote mögen die Verlängerungen dieser Seiten treffen (Abb. 7). Dieselben Überlegungen wie oben führen hier zu dem Schluss, dass die Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A und B gleich sind. Hieraus folgt wieder $CA = CB$.

Beispiel 7. Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen.

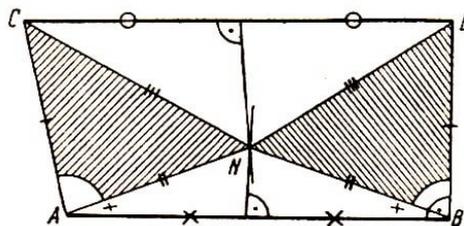


Abb. 8

In den Endpunkten der Strecke AB (Abb. 8 oder 9) errichten wir zwei Strecken AC und BD gleicher Länge, und zwar so, dass beide auf ein und derselben Seite von AB liegen und mit AB den rechten Winkel DBA bzw. den stumpfen Winkel CAB bilden.

Wir werden beweisen, dass diese beiden Winkel gleich sind. Hierzu verbinden wir C mit D und erhalten so das Viereck $ABCD$. Die Seiten AC und BD sind ebenso wie

die Seiten AB und CD nicht parallel (andernfalls wäre $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit ungleichen Basiswinkeln).

Auf AB und CD errichten wir jetzt die Mittelsenkrechten. Da die Strecken AB und CD nicht parallel sind, sind auch die auf ihnen errichteten Senkrechten nicht parallel. Sie werden sich daher etwa im Punkt N schneiden. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1. Der Punkt N liegt oberhalb der Strecke AB oder, genauer gesagt, auf derselben Seite von AB , auf der das Viereck $ABCD$ liegt (Abb. 8; der Punkt N liegt hier innerhalb des Vierecks). Wir verbinden N mit allen Ecken des Vierecks. Da N von den Endpunkten der Strecken AB bzw. CD gleich weit entfernt ist, stimmen die Dreiecke NAC und NBD in den drei Seiten überein.

Hieraus folgt $\angle NAC = \angle NBD$. Addieren wir zu dem Winkel NAC den Winkel NAB und zu dem Winkel NBD den Winkel NBA , so erhalten wir, da $\angle NAB$ und $\angle NBA$ als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABN gleich sind, $\angle CAB = \angle DBA$.

Fall 2. Der Punkt N liegt auf AB , d.h., er ist Mittelpunkt von AB . Der obige Beweis führt dann wegen der Gleichheit der Dreiecke NAC und NBD sofort zu der Gleichung $\angle CAB = \angle DBA$.

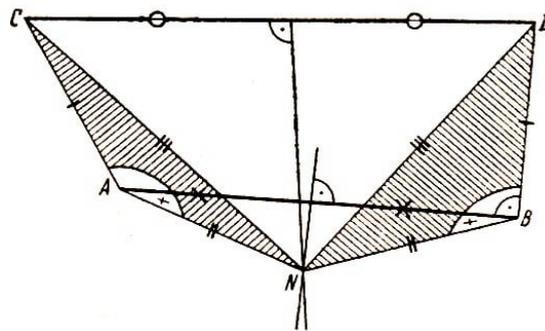


Abb. 9

Fall 3. Der Punkt N liegt unterhalb von AB , d.h. nicht auf derselben Seite von AB , auf der das Viereck $ABCD$ liegt (Abb. 9). Aus der Gleichheit der Dreiecke folgt wieder $\angle NAC = \angle NBD$.

Jetzt müssen von diesen Winkeln die Winkel NAB bzw. NBA , die einander gleich sind, abgezogen werden. Also ist wieder $\angle CAB = \angle DBA$.

Beispiel 8. Sind von den einzelnen Stücken eines Dreiecks zwei Seiten und ein Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber liegt, den entsprechenden Stücken eines anderen Dreiecks gleich, so sind diese Dreiecke kongruent.

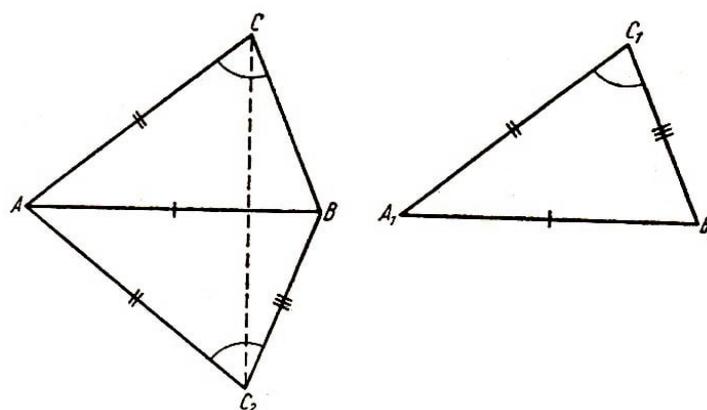


Abb. 10

Von den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ (Abb. 10 bzw. 11 bzw. 12) seien die Beziehungen $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ und $\angle\gamma = \angle\gamma_1$ bekannt.

Um die Kongruenz der Dreiecke zu beweisen, erinnern wir uns an das Verfahren, das beim Beweis der Kongruenz von Dreiecken, deren drei Seiten miteinander übereinstimmen, üblicherweise angewandt wird. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ wird mit dem Dreieck ABC so zusammengelegt, dass die gleichen Seiten AB und A_1B_1 , die gegenüber den nach Voraussetzung gleichen Winkeln liegen, mit den entsprechenden Endpunkten zusammenfallen (A mit A_1 , B mit B_1). Dann hat das Dreieck $A_1B_1C_1$ die Lage ABC_2 . Wir verbinden nun die Punkte C und C_2 und untersuchen die drei möglichen Fälle.

Fall 1. Die Gerade CC_2 schneidet die Seite AB in einem inneren Punkt (Abb. 10). Das Dreieck ACC_2 ist gleichschenkelig, und folglich $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$. Ziehen wir diese gleichen Winkel von den nach Voraussetzung gleichen Winkeln ACB und AC_2B ab, so erhalten wir $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$.

Diese letzte Gleichung besagt aber, dass das Dreieck CBC_2 ebenfalls gleichschenkelig ist, d.h., es ist $CB = C_2B$. Demzufolge ist $CB = C_1B_1$, so dass die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in allen drei Seiten übereinstimmen.

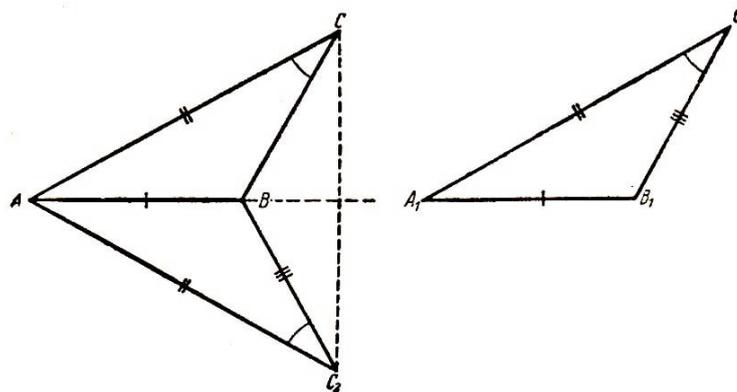


Abb. 11

Fall 2. Die Gerade CC_2 schneidet die Verlängerung der Seite AB rechts vom Punkt B (Abb. 11). Die Überlegung bleibt im wesentlichen erhalten, nur hat man hier von den gleichen Winkeln ACC_2 und AC_2C die gleichen Winkel ACB und AC_2B abzuziehen.

Fall 3. Die Gerade CC_2 schneidet die Verlängerung der Seite AB links vom Punkt A (Abb. 12). Die Überlegung verläuft wieder wie oben, nur ist die Subtraktion durch eine Addition zu ersetzen; zu den gleichen Winkeln ACC_2 und AC_2C werden die gleichen Winkel ACB bzw. AC_2B addiert.

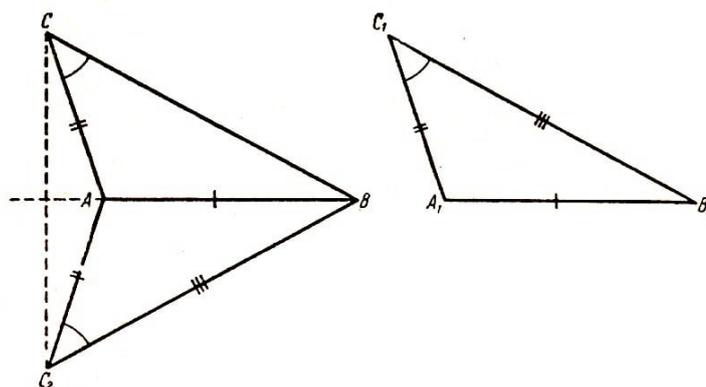


Abb. 12

Beispiel 9. Ein Rechteck, das einem Quadrat einbeschrieben ist, ist ebenfalls ein Quadrat.⁷

Genauer gesagt: Wird ein Rechteck $MNPQ$ (Abb. 13) in ein Quadrat $ABCD$ so eingezeichnet, dass auf jeder Seite des Quadrates eine Ecke des Rechtecks liegt (in der Zeichnung liegt M auf AB , N auf BC , P auf CD und Q auf DA), so ist dieses Rechteck selbst ein Quadrat.

Zum Beweis fällen wir von P und Q aus die Lote PR und QS auf AB bzw. BC . Diese Lote sind genau so lang wie die Seiten des Quadrates $ABCD$.

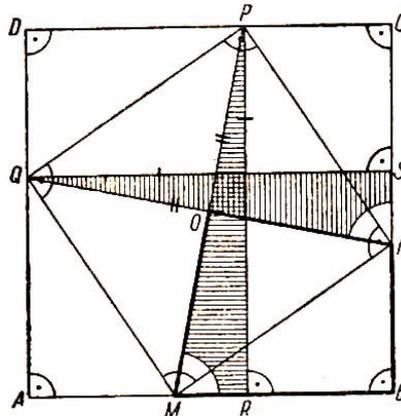


Abb. 13

Sie bilden Katheten in den Dreiecken PRM und QSN . Die in beiden Dreiecken gleichen Hypotenusen sind die Diagonalen des Rechtecks $MNPQ$. Hieraus folgt die Kongruenz der in Abb. 13 schraffierten Dreiecke. Es gilt also $\angle PME = \angle QNS$.

Wir betrachten nun das Viereck $MBNO$ (in der Zeichnung stark umrandet; O ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $MNPQ$). Der Außenwinkel bei N ist gleich dem Innenwinkel bei M , d.h., die beiden Innenwinkel bei M und N ergänzen sich zu π . Dasselbe muss dann für die Summe der Innenwinkel bei B und O gelten. Da aber einer von ihnen (der Winkel bei B) ein rechter Winkel ist, muss der Innenwinkel bei O auch ein rechter Winkel sein, d.h., die Diagonalen des Rechtecks stehen aufeinander senkrecht. Unser Rechteck ist also ein Quadrat, was zu beweisen war.

Beispiel 10. Zwei Geraden, die eine dritte Gerade schneiden, wobei der Schnittwinkel einmal ein rechter und einmal kein rechter Winkel ist, schneiden sich nicht.

Diese Behauptung ergibt sich durch Modifikation aus einem alten Sophismus, der von dem griechischen Philosophen und Mathematiker Proklos (410-485) überliefert wurde.⁸

Wir präzisieren den Inhalt der Behauptung folgendermaßen: In den Punkten A und B der Strecke AB (Abb. 14) werden nach einer Seite hin zwei Strahlen angetragen (um hervorzuheben, dass es sich um Strahlen handelt, ist ihre Richtung in der Zeichnung durch einen Pfeil angedeutet).

⁷Wir hoffen, dass der Leser nicht schon in der Ausdrucksweise "Ein Rechteck ... ist ein Quadrat" einen Widerspruch entdeckt. Natürlich sind nicht alle, sondern nur gewisse Rechtecke zugleich auch Quadrate.

⁸Über die Behandlung dieses Sophismus bei Proklos siehe R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, 3. Auflage, Leipzig und Berlin 1921.

AQ bildet mit AB den spitzen Winkel BAQ , während BP senkrecht auf AB steht. Wir werden beweisen, dass sich diese Strahlen nicht schneiden.

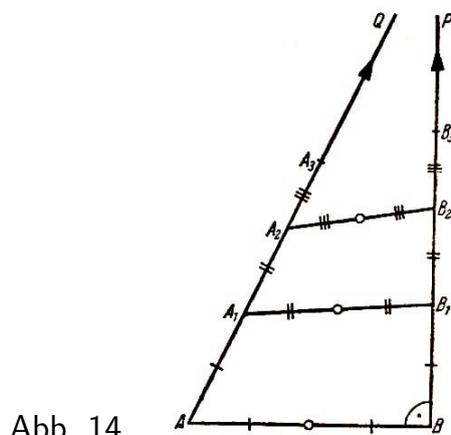


Abb. 14

Hierzu halbieren wir AB und tragen auf jedem der Strahlen AQ und BP die Strecke $\frac{1}{2}AB$ ab. Somit ist $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$.

In dem Bereich von AA_1 und BB_1 können sich die beiden Strahlen nicht schneiden, d.h., AA_1 und BB_1 haben keinen gemeinsamen Punkt. Würde nämlich ein solcher gemeinsamer Punkt K existieren, so erhielte man ein Dreieck AKB , bei dem die Summe $AK + KB$ zweier Seiten kleiner oder gleich der dritten Seite AB wäre. Dies ist jedoch unmöglich.

Nun verbinden wir die Punkte A_1 und B_1 und wiederholen die Konstruktion. Von den Punkten A_1 und B_1 aus tragen wir auf jedem der Strahlen AQ und BP die Strecke $\frac{1}{2}A_1B_1$ ab und erhalten $A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$.

Aus denselben Gründen wie oben haben A_1A_2 und B_1B_2 keinen gemeinsamen Punkt, insbesondere kann A_2 nicht mit B_2 zusammenfallen.

Dieses Verfahren setzen wir fort, indem wir die Strecke A_2B_2 halbieren und auf beiden Strahlen die Strecken $A_2A_3 = B_2B_3 = \frac{1}{2}A_2B_2$ abtragen usw.

Hierbei sollen die Strecken $A_nA_{n+1} = B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n$ immer in Pfeilrichtung abgetragen werden.

Das Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden, es sei denn, eine der Strecken A_nB_n hätte die Länge Null. Dies würde bedeuten, dass die Punkte A_n und B_n für ein n zusammenfielen; dies ist aber, wie wir sahen, nicht möglich.

(Übrigens hätte man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse AA_n gleich der Kathete BB_n ist, sofern A_n und B_n zusammenfielen. Schon allein daraus folgt, dass A_n und B_n nicht zusammenfallen können.)

Es tritt also nach keinem Schritt dieses unbegrenzt fortsetzbaren Verfahrens ein Schnittpunkt des senkrechten Strahls mit dem geneigten auf, d.h., die beiden Strahlen schneiden sich überhaupt nicht.

Wir haben bei den vorhergehenden Beispielen eine Reihe von Überlegungen kennengelernt, die mitunter nicht weniger überzeugend erscheinen als die Beweise aus einem Lehrbuch der Geometrie.

Zuweilen dienen diese Überlegungen zum Beweis offensichtlicher Unsinnigkeiten, in anderen Fällen ist die Unsinnigkeit des Bewiesenen nicht sogleich zu erkennen. Mindestens ein Fehler steckt aber in allen diesen Beweisen.

Bevor wir uns in Kapitel II mit der Besprechung dieser zehn Beispiele beschäftigen, möchten wir den Leser eindringlich bitten, in jedem einzelnen Fall den Fehler selbstständig zu suchen. Es kann sein, dass es nicht immer und nicht in allen Fällen restlos gelingt, aber auch dann, wenn die eigenen Gedanken bei irgendeinem Beispiel nicht zum Ziel führen, tragen sie noch zum Verständnis des in Kapitel II über dieses Beispiel Gesagten bei.

Gelingt es dem Leser, den Fehler selbst zu finden, so wird er wahrscheinlich wünschen, seine Ergebnisse mit den in Kapitel II durchgeführten Überlegungen zu vergleichen. Wir schlagen diese Arbeitsweise, mit der die meisten Leser nicht vertraut sein werden, vor, möchten aber einleitend hierzu noch einige Hinweise und Ratschläge erteilen.

1. Um einen falschen geometrischen Beweis zu widerlegen, muss man zeigen, dass er einen logischen Fehlschluss enthält. Die Schwierigkeit besteht darin, dass ein solcher Beweis nahezu richtig ist; der Fehlschluss steckt an einer bestimmten Stelle und muss dort entdeckt werden.

2. Oft zeigt es sich, dass ein scheinbarer Beweis auf einer falschen Zeichnung beruht. Das ist keine genaue Formulierung; es genügt in keinem Falle, sich auf diesen Hinweis zu beschränken.

Sagt man zum Beispiel, dass die Zeichnung A falsch sei und durch die Zeichnung B ersetzt werden muss, so wird dadurch gewöhnlich nur folgender Sachverhalt verschleiert: Im Beweis werden nicht alle möglichen Fälle betrachtet (dies ist logisch falsch!).

Von diesen stellt sich dann heraus, dass sie der Voraussetzung des Satzes widersprechen, während genau diejenigen Fälle unberücksichtigt blieben, die mit der Voraussetzung übereinstimmen. Nicht also die Zeichnung, sondern die unvollständige Aufzählung der möglichen Fälle ist hier als Fehlerquelle anzusehen.

3. Führt der in Zeichnung A dargestellte Fall auf ein unsinniges Resultat, so genügt es zu zeigen, dass Zeichnung B nicht zu diesem Ergebnis führt. Die Notwendigkeit, einen direkten Beweis zu führen, besteht allerdings nicht. (Muster für einen solchen Beweis findet man in Kapitel II.)

4. Obwohl eine Zeichnung weder die Richtigkeit noch die Unrichtigkeit der zugehörigen Behauptung erkennen lässt, empfiehlt es sich doch, nach Möglichkeit genaue Zeichnungen (mit Hilfe von Zirkel und Lineal) anzufertigen.

Dort, wo wir es mit offensichtlichen Sophismen zu tun haben, macht man die Zeichnung zweckmäßig so, dass die Fehlerhaftigkeit des Beweises besonders hervorgehoben wird (den stumpfen Winkel in Beispiel 7 wähle man nahe bei 180° ; in Beispiel 10 zeichne man die beiden Strahlen so, dass sie sich schon am Rande der Zeichnung schneiden usw.).

Eine solche Zeichnung kann dann auf die Stelle hinweisen, an der der Fehler zu suchen ist.

5. Zuweilen steht der begangene Fehler in keiner Beziehung zu der angefertigten Zeichnung. Statt dessen könnte er etwa in folgenden Umständen begründet liegen:

Es wird in Wirklichkeit nicht die zu beweisende Behauptung, sondern eine andere verwendete Aussage bewiesen (und zwar richtig), wobei derjenige, der den Beweis führt, die Verwechslung entweder selbst nicht bemerkt oder aber damit rechnet, dass andere sie nicht bemerken.

6. Ist nicht bekannt, ob der bewiesene Satz richtig ist, so ist es besser (aber nicht notwendig), zunächst diese Frage zu untersuchen. Wir erinnern daran, dass eine Behauptung bereits dann widerlegt ist, wenn nur ein einziges ihr widersprechendes Beispiel konstruiert wurde.

Der Leser wird den Sinn dieser Hinweise erst dann richtig verstehen, wenn er die einzelnen Beispiele selbständig durchdacht und das folgende Kapitel gelesen hat. Darum empfiehlt es sich, während der Lektüre des zweiten Kapitels diese Hinweise zu berücksichtigen und sie noch einmal zu durchdenken, nachdem das zweite Kapitel gelesen worden ist.

4 Kapitel II - Diskussion der Beispiele aus Kapitel I

Zu Beispiel 1.

Bei der Behauptung, das Rechteck könne aus den Teilen I, II, III und IV des Quadrates zusammengesetzt werden, verließen wir uns auf einen anschaulich offenbar vorhandenen Tatbestand, der in Wirklichkeit gar nicht besteht.

Was das Ausschneiden der Figur aus Papier betrifft, so ist dieser Versuch zu ungenau, um irgendeine Beweiskraft zu besitzen. Wir haben nämlich keinen Grund anzunehmen, dass die aneinandergelegten Teile I und III (oder II und IV) ein Dreieck bilden, d.h., dass die betreffende Seite des Trapezes I und die Hypotenuse des Dreiecks III eine Gerade ergeben.

Statt dessen tritt ein Knick auf.

Die Tatsache, dass wir diesen Knick in der Zeichnung nicht sehen und ihn auch nicht bei einem Papiermodell feststellen können, beweist natürlich nicht, dass er nicht vorhanden ist. Im Gegenteil, wir stellen fest, dass unsere Anschauung bei geometrischen Konstruktionen unzulänglich, d.h. für strenge geometrische Beweise nicht zu gebrauchen ist.⁹

Es genügt, diesen Mangel zu erkennen, um den ganzen Beweis als nicht stichhaltig zu verwerfen und die weitere Beweisführung aufzugeben. solange dieser Mangel nicht beseitigt ist. Wir wollen aber hierbei nicht stehenbleiben und uns bemühen, die Frage nach dem Knick vollständig zu klären.

Würde es etwa gelingen zu beweisen, dass die Winkel α und β in Abb. 1 die Summe π haben oder dass die Winkel α und α' einander gleich sind, so wäre kein Knick vorhanden und der Beweis richtig. Ist dies aber tatsächlich der Fall ?

Schließen wir indirekt, so können wir diese Frage sofort mit Nein beantworten, d.h., es muss gelten $\alpha + \beta \neq \pi$ bzw. $\alpha \neq \alpha'$. Wäre nämlich $\alpha + \beta = \pi$ bzw. $\alpha = \alpha'$, so würde daraus die falsche Beziehung $441 = 442$ folgen.

Übrigens kann man sich auch auf direktem Wege davon überzeugen, dass die Winkel α und α' voneinander verschieden sind, und zugleich feststellen, welcher von ihnen größer ist. Die nächsten Zeilen werden dem Leser, der einige Kenntnisse der Trigonometrie besitzt, verständlich sein (an Stelle der trigonometrischen Überlegungen könnten auch Eigenschaften ähnlicher Dreiecke benutzt werden).

Aus dem Dreieck III in Abb. 1 finden wir

$$\tan \alpha = \frac{21}{8}$$

Fällen wir im Trapez I das Lot von der Spitze bei β auf die größere der beiden parallelen

⁹Die Wissenschaft hat dies in ihren Anfängen nicht so bald erkannt. Bei den Ausgrabungen an einem altindischen Tempel, der etwa 1000 Jahre alt war, wurden beispielsweise auch einige mathematische Aufzeichnungen entdeckt, darunter eine geometrische Figur an der Wand des Tempels. Die Zeichnung bezog sich augenscheinlich auf eine Regel zur Ermittlung des Flächeninhalts eines Kreises. Statt eines Beweises stand neben der Figur: "Siehe".

Seiten von I (dieses Lot ist in Abb. 1 nicht eingezeichnet), so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 13 cm und $13 - 5 = 8$ cm lang sind. Hieraus ergibt sich

$$\tan \alpha' = \frac{13}{5}$$

Es ist $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$, weil $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$ ist. Also ist $\tan \alpha > \tan \alpha'$. Hieraus folgt $\alpha > \alpha'$, $\alpha + \beta > \pi$.

Man kann also die Teile I, II, III und IV des Quadrates tatsächlich in dem Rechteck unterbringen. Dabei wird dessen Fläche jedoch nicht vollständig von den einzelnen Teilen bedeckt, sondern es bleibt ein Parallelogramm unbedeckt, dessen größere Diagonale mit der Diagonalen des Rechtecks zusammenfällt.

Diese Fläche war kaum zu bemerken, denn der Inhalt des Parallelogramms beträgt nur 1 cm^2 , obwohl die Diagonale des Rechtecks $36,4 \dots \text{ cm}$ lang ist. Dies ist genau der Flächeninhalt, der beim Übergang vom Quadrat Q zum Rechteck R zusätzlich auftrat.

Wer sich ein noch anschaulicheres Bild machen möchte, kann die Zahlenwerte in Abb. 1 ändern, etwa so, wie es Abb. 15 zeigt.

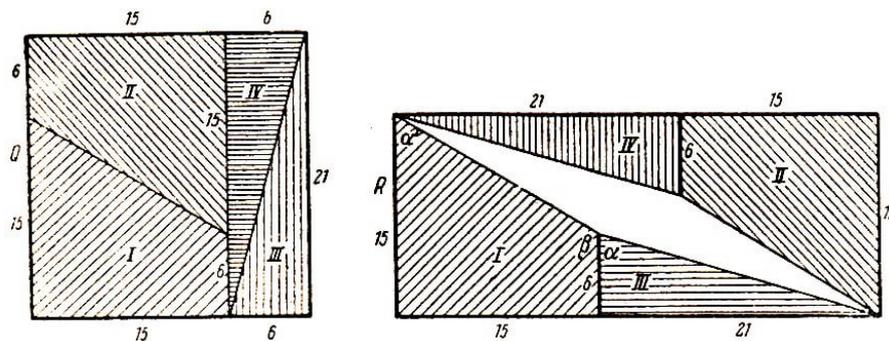


Abb. 15

Hier hat das Parallelogramm einen Flächeninhalt von 99 cm^2 , Während der gesamte Inhalt des Rechtecks 540 cm^2 beträgt.

Zu Beispiel 2.

Fehlschlüsse dieser Art kommen häufig vor.

Die klassische Logik prägte dafür bereits die Bezeichnung *ignoratio elenchi*, was in freier Übersetzung soviel bedeutet wie "das Bewiesene nicht verstehen". Wir fragen uns zunächst, was überhaupt durch die Überlegung, auf die sich Abb. 2 bezieht, bewiesen wird.

Offenbar wurde doch nur folgende Tatsache gezeigt: Wird die parallele Gerade mit Hilfe des dort beschriebenen Verfahrens konstruiert (mit Hilfe von zwei Senkrechten), so ist diese hierdurch eindeutig bestimmt. Ist nun aber das Verfahren selbst eindeutig bestimmt?

Das ist gewiss nicht der Fall, da wir andere Verfahren kennen, die zum gleichen Ziel führen. Beispielsweise könnten wir statt des Fußpunktes D der Senkrechten CD (Abb. 2) einen beliebigen anderen Punkt D' (Abb. 16) auf der Geraden AB nehmen, ihn mit C durch die Gerade $D'F$ verbinden und an CF im Punkt C den Winkel FCE' antragen, der gleich dem Winkel $CD'B$ ist.

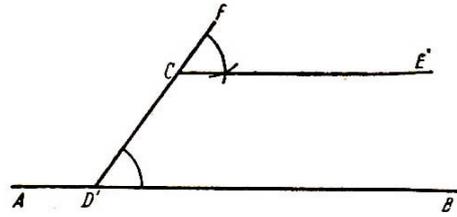


Abb. 16

(Die Strahlen CE' und $D'B$ sollen hierbei auf einer Seite von FD' liegen.) Nun gilt aber der Satz:

Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden so geschnitten, dass ein Paar von Gegenwinkeln gleich ist, so sind die geschnittenen Geraden parallel (dieser Satz kann ohne das Parallelenaxiom bewiesen werden).

Folglich sind die Geraden CE' und AB zueinander parallel. Wer garantiert nun, dass die Gerade CE aus Abb. 2 und die Gerade $C'E'$ aus Abb. 16 zusammenfallen?

Einfach zu behaupten, die verschiedenen Konstruktionen führten auf ein und dieselbe Gerade,¹⁰ würde bedeuten, ohne Beweis das anzunehmen, was gerade bewiesen werden sollte.

Zu Beispiel 3.

Unsere Fallunterscheidung lässt sich genauer so formulieren: Für je zwei parallele Geraden, für jede Schnittgerade und jedes Paar von entgegengesetzten Winkeln ist die Summe dieser Winkel entweder immer größer als π oder immer kleiner als π oder immer gleich π .

Nur bei oberflächlicher Betrachtung sind hiermit alle möglichen Fälle erschöpft. Unberücksichtigt blieb beispielsweise der durchaus mögliche Fall, dass die Summe eines Paares von entgegengesetzten Winkeln größer und die des anderen Paares kleiner als π sein könnte.

Diese Annahme führt zu keinem Widerspruch. Nehmen wir etwa an, dass $\alpha + \gamma > \pi$, aber $\beta + \delta < \pi$ ist (Abb. 3), so widerspricht dies nicht im geringsten der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$.

Es sei bemerkt, dass man, ohne überhaupt tiefer in den Beweis einzudringen, von vornherein seine Unzulänglichkeit erkennen kann. Der Beweis verwendet nämlich in keiner Weise die Parallelität der Geraden AB und CD .

Wäre der Beweis richtig, so hätte man folgenden Satz bewiesen: Beim Schnitt zweier beliebiger Geraden mit einer dritten Geraden ist die Summe zweier entgegengesetzter Winkel gleich π , was offenbar falsch ist.

Wird die Parallelität der Geraden AB und CD nicht vorausgesetzt, so wird im allgemeinen gerade die vierte Möglichkeit vorliegen, die in dem von uns widerlegten Beweis außer acht gelassen wurde:

Auf einer Seite der schneidenden Geraden ist die Summe der Winkel größer, auf der anderen Seite kleiner als π .

Zu Beispiel 4.

¹⁰In der Lobatschewskischen Geometrie kann der Fall eintreten, dass die Geraden CE und CE' nicht zusammenfallen.

Wir haben uns daran gewöhnt, dass die Winkelsumme im Dreieck für alle Dreiecke unabhängig von ihrer Form und Größe gleich π ist. Daher werden die meisten Leser nichts dagegen einzuwenden haben, wenn gesagt wird: "Wir bezeichnen mit α die Winkelsumme in einem (beliebigen) Dreieck".

Nun ist aber bei Beginn des Beweises nichts über die Winkelsumme im Dreieck bekannt. Demzufolge liegt auch kein Grund vor, anzunehmen, dass sie für alle Dreiecke dieselbe ist. Natürlich könnten wir ohne Beweis die Gleichheit der Winkelsumme annehmen.

Wir hätten dann mit der durchgeführten Überlegung bewiesen, dass die Summe gleich π ist. Dies würde allerdings nur bedeuten, dass wir an Stelle des Parallelenaxioms ein anderes Axiom eingeführt hätten. Letzteres zeichnet sich durch keinerlei Vorzüge vor dem ersteren aus.

Zu Beispiel 5.

Die Geschichte der Mathematik kennt eine Reihe von Fällen, in denen immer wieder der gleiche Fehler auftritt: Unbegründet wird angenommen, dass unter den Zahlen einer gegebenen unendlichen Menge eine größte bzw. eine kleinste Zahl existiert.

Betrachtet man aber die Reihe aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..., so gibt es unter ihnen sicher keine größte, weil auf jede natürliche Zahl stets noch eine größere folgt. Ähnlich verhält sich die Menge der Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

bei denen der Zähler um 1 kleiner als der Nenner ist. Aus irgendeinem dieser Brüche erhält man den nächstfolgenden, indem man zu Zähler und Nenner jeweils 1 addiert, wodurch stets ein größerer echter Bruch entsteht. Demzufolge gibt es unter diesen Brüchen keinen größten.

Betrachten wir noch ein geometrisches Beispiel: Der Innenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks¹¹ ist gleich $\frac{\pi(n-2)}{n}$ und somit kleiner als π . Aus dem gleichen Grund wie oben existiert kein regelmäßiges Vieleck mit einem größten Innenwinkel.

In dem zur Diskussion stehenden Beweis erkennen wir nun als ungerechtfertigte Behauptung, dass unter den Dreiecken, von denen lediglich bekannt ist, dass die Winkelsumme in jedem von ihnen nicht größer als π ist, ein Dreieck mit einer größten Winkelsumme existieren soll; diese nicht bewiesene Behauptung könnten wir allenfalls an Stelle des Parallelenaxioms als neues Axiom anerkennen.

Die Ergebnisse aus den Beispielen 4 und 6 führen zu folgendem Schluss:

Man kann beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich π ist, ohne hierbei das Parallelenaxiom zu benutzen, wenn man nur eine der folgenden Behauptungen als Axiom annimmt:

- a) Alle Dreiecke haben die gleiche Winkelsumme oder b) es existiert ein Dreieck mit einer größten Winkelsumme.

¹¹Man nennt ein n -Eck den regelmäßig, wenn sowohl alle Seiten als auch alle Winkel einander gleich sind.

Zu Beispiel 6.

Es sind nicht alle möglichen Fälle untersucht werden (vgl. S. 13). Unberücksichtigt blieb nämlich der Fall, dass von den beiden Loten NP und NQ eines auf eine Seite des Dreiecks ABC trifft, während das andere nur die Verlängerung der entsprechenden Dreiecksseite schneidet (Abb. 17).

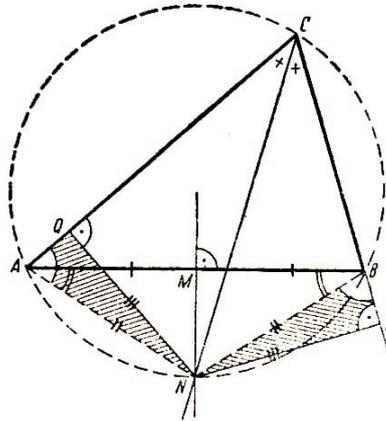


Abb. 17

Tritt dieser Fall ein, so erkennt man lediglich, dass einer der Basiswinkel bei AB im Dreieck ABC gleich der Differenz von zwei Winkeln ist, deren Summe mit dem Nebenwinkel des anderen Basiswinkels übereinstimmt.

Natürlich lässt sich hiermit nichts weiter über das Verhältnis der Basiswinkel zueinander aussagen, so dass auch nicht behauptet werden kann, die Seiten AC und CB wären gleichlang.

Damit ist aber der Beweis als nicht stichhaltig erkannt. Schließen wir indirekt, so können wir sogar behaupten, dass alle behandelten Fälle nicht Abb. 17 eintreten können.

Vielmehr tritt stets der in Abb. 17 dargestellte Fall ein, sofern das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig ist.¹²

Wir wollen jetzt noch beweisen, dass im Falle eines ungleichschenkligen Dreiecks die einzelnen Stücke der Figur so zueinander liegen, wie Abb. 17 zeigt.

Hierzu nehmen wir an, dass $CA > CB$ ist; sollte $CA < CB$ sein, so ändern wir die Bezeichnung entsprechend ab.

Zunächst zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks ABC . Nach dem Satz vom Peripheriewinkel muss die Halbierende des Winkels bei C durch den Mittelpunkt N des

¹²Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als sei auch noch der Fall unberücksichtigt gelassen worden, dass der Punkt N innerhalb des Dreiecks oder auf AB liegt, während die Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten von AB liegen (dies kann natürlich nur dann sein, wenn das eine der von N aus gefüllten Lote auf die Verlängerung der betreffenden Seite trifft; man braucht sich hier nur an das stumpfwinklige Dreieck zu erinnern).

Diese Bedenken sind jedoch unbegründet, weil in den folgenden Zeilen bewiesen wird, dass bei einem ungleichschenkligen Dreieck der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Winkelhalbierenden nur außerhalb des Dreiecks liegen kann. Der Leser, der den Satz, dass die Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt, kennt, möge versuchen, diese Eigenschaft des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden mit der Mittelsenkrechten auf anderem Wege zu beweisen.

Bogens AB gehen. Natürlich geht auch die Mittelsenkrechte der Sehne AB durch N . Somit liegt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Mittelsenkrechten auf der Peripherie des Umkreises, d.h. außerhalb des Dreiecks ABC .

Die Lote von N auf CB und CA treffen auf diese Seiten oder auf ihre Verlängerungen, je nachdem, ob die Winkel NAC bzw. NBC spitz oder stumpf sind.

An Stelle dieser Winkel betrachten wir die zu ihnen gehörigen Bogen. Da wir voraussetzen, dass $CA > CB$ ist, muss auch $\widehat{CA} > \widehat{CB}$ sein. Hieraus folgt mit $\widehat{AN} = \widehat{BN}$, dass $\widehat{CAN} > \widehat{CBN}$ ist, d.h., der Bogen \widehat{CAN} ist größer und der Bogen \widehat{CBN} ist kleiner als ein Halbkreis.

Folglich ist der Winkel CBN stumpf und der Winkel CAN spitz, und das Lot NP trifft auf die Verlängerung der Seite CB , während das Lot NQ die Seite AC selbst trifft. (Wir schlagen dem Leser vor, zur Übung zu beweisen, dass die drei Punkte P , M und Q auf einer Geraden liegen.)

Zu Beispiel 7.

Der Beweis scheint auf den ersten Blick richtig zu sein, jedenfalls so lange, wie man die Illusion hat, alle möglichen Fälle seien berücksichtigt worden, nämlich:

1. N liegt oberhalb AB ;
2. N liegt unterhalb AB ;
3. N liegt auf AB .¹³

Indessen kommt es hier nicht allein darauf an, ob N oberhalb, unterhalb oder auf AB liegt. Wird nämlich im dritten Fall zu dem rechten Winkel ABD der spitze Winkel ABN addiert, so ergibt sich der stumpfe Winkel DBN ; was den stumpfen Winkel CAB betrifft, so ergibt sich durch Addition des spitzen Winkels NBA wieder ein stumpfer Winkel (Abb. 9), der unter Umständen "überstumpf" ist (d.h. größer als 180°). Letzteres ändert den Sachverhalt wesentlich.

Somit zerfällt der dritte Fall in zwei weitere Fälle: Der stumpfe Winkel CAB und das Dreieck CAN liegen a) auf ein und derselben Seite (Abb. 9) oder b) auf verschiedenen Seiten von AC (Abb. 18; die gestrichelten Linien sind vorerst nicht zu beachten). Der Fall a), bei dem der Winkel CAB ein Teil des Winkels CAN ist, wurde bereits untersucht, wobei sich die Gleichheit der Winkel DBA und CAB ergab.

Betrachten wir nun den Fall b), so sehen wir, dass der rechte Winkel DBA wie vordem als Differenz der Winkel DBN und ABN auftritt, während der stumpfe Winkel CAB die Summe der Winkel CAN und BAN zu 2π ergänzt.

Somit stellt sich der Fall b) als einzig möglicher Fall heraus; denn jeder andere führt ja zu dem Widerspruch, dass ein stumpfer Winkel gleich einem rechten ist.

Wir vervollständigen nun die Figur, um einen besseren Überblick zu gewinnen. In A errichten wir die Senkrechte zu AB (in Abb. 18 gestrichelt) und tragen auf ihr die Strecke $AE = BD$ ab. Offenbar ist auch $AE = AG$.

¹³Zwei Fälle sind dann als wesentlich verschieden anzusehen, wenn ein Beweis, der für den einen Fall gültig ist, für den anderen Fall nicht wörtlich wiederholt werden kann.

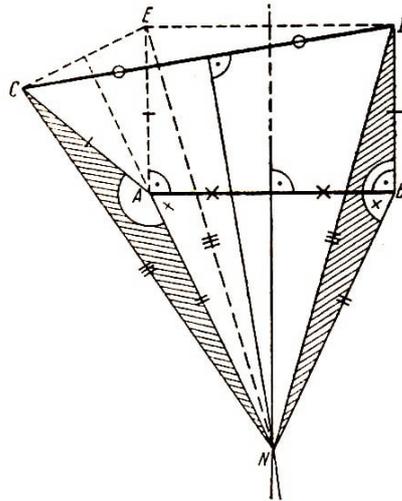


Abb. 18

Wir verbinden dann E mit D und N mit C . Da $ABDE$ ein Rechteck ist, muss die Mittelsenkrechte von AB auch Mittelsenkrechte von ED sein. Folglich ist $NE = ND$.

Hieraus ergibt sich $NE = NC$. Somit ist $CA = EA$ und $CN = EN$, d.h., die durch die Punkte N und A verlaufende Gerade NA ist die Mittelsenkrechte von CE . Die Dreiecke DBN und EAN gehen daher durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten von AB auseinander hervor, während das Dreieck CAN aus dem Dreieck EAN durch Spiegelung an AN hervorgeht.

Somit erhält man das Dreieck CAN aus dem Dreieck DBN einfach durch Drehung im Punkt N um den Winkel $BNA = EAC$, d.h., der Drehwinkel ist gleich der Differenz zwischen dem bei A angetragenen stumpfen Winkel und einem rechten.

Zu Beispiel 8.

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, dass der Satz falsch ist. Hierzu genügt es, ein "Gegenbeispiel" anzugeben, d.h. ein Beispiel, das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, bei dem aber die im Satz ausgesprochene Behauptung nicht stimmt.

Ein solches Beispiel liegt vor, wenn wir ein gleichschenkliges Dreieck LMN ($LN = MN$; Abb. 19) durch eine Strecke NP , die von der Spitze des Dreiecks ausgeht, in zwei Teile zerlegen. Hierbei soll NP nicht mit der Mittellinie zusammenfallen. Die beiden so erhaltenen Dreiecke LPN und PMN haben die Seite NP gemeinsam, außerdem ist $LN = MN$ und $\alpha = \beta$.

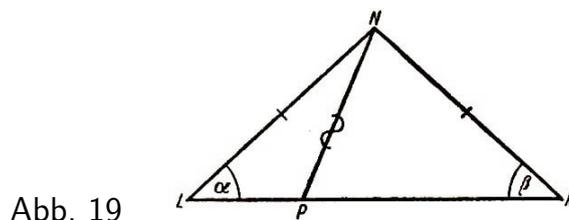


Abb. 19

Die Voraussetzungen unseres Satzes sind dann erfüllt, während die beiden Dreiecke nicht kongruent sind.

Wir wollen jetzt die Lücke im Beweis suchen. Offenbar könnte die Gerade CC_2 , (Abb.

10 bis 12) doch auch durch einen der Endpunkte (A oder B) der Strecke AB verlaufen, d.h., die Seiten CA und C_2A (oder CB und C_2B) könnten sich gegenseitig verlängern.

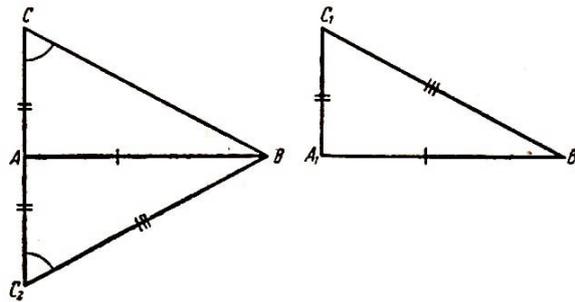


Abb. 20

Liegen die gleichlangen Seiten AC und AC_2 , auf einer Geraden (Abb. 20), so ist die Aussage des Satzes vollkommen richtig:

Durch Hinzufügen des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zu ABC entsteht das Dreieck BC_2C , das gleichschenkelig ist, weil die Winkel bei C und C_2 gleich sind. Folglich gilt $BC = BC_2 = B_1C_1$. Dieser Fall tritt aber nur bei rechtwinkligen Dreiecken auf (in Abb. 20 stimmen die Winkel bei A miteinander überein).¹⁴

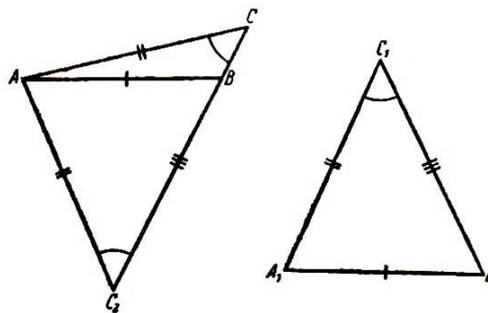


Abb. 21

Ein anderes Bild ergibt sich, wenn die Seiten, über die in den Voraussetzungen unseres Satzes nichts gesagt wird (BC und BC_2 ; Abb. 21), auf einer Geraden liegen. Das Dreieck AC_2C ist wieder gleichschenkelig, jedoch lässt sich nichts über die Seiten CB und C_2B aussagen.

Der Leser wird sich sofort an das in Abb. 19 gezeichnete Dreieck erinnern, das in zwei ungleiche Teile zerfiel. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind in diesem Fall nicht kongruent (es sei denn, die Winkel bei B und B_1 wären rechte Winkel).

Bemerkung 1. Aus dem vorhergehenden geht hervor, wie der Satz "berichtigt" werden kann, d. h., durch welche richtigen Sätze wir ihn ersetzen können. Wir bringen zwei Beispiele dafür.

a) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüberliegt, überein, so sind bei den Dreiecken die Winkel, die dem anderen Seitenpaar gegenüberliegen (in Abb. 10, 11, 12, 20 und 21 sind dies die Winkel bei B und B_1), entweder gleich (dann sind die Dreiecke kongruent; Abb. 10, 11, 12, 20), oder sie

¹⁴Dieser Fall (C , A und C_2 liegen auf einer Geraden) muss auch beim allgemeinen Beweis für die Kongruenz von Dreiecken mit drei gleichen Seiten behandelt werden. Hier wie auch dort gelingt der Kongruenzbeweis, wobei sich obendrein herausstellt, dass die kongruenten Dreiecke in diesem Falle rechtwinklig sind.

ergänzen sich zu π (Abb. 21).

b) Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Hier ist nämlich der in Abb. 21 dargestellte Fall ausgeschlossen worden: Weder der Winkel bei B noch der bei B_1 kann ein stumpfer oder ein rechter sein, da keiner gegenüber der größeren Seite liegt.

Dieser Satz wird in den Lehrbüchern der Geometrie als "4. Kongruenzsatz für Dreiecke" bezeichnet.

Bemerkung 2. Der Fall der Kongruenz kann dem Fall der Nichtkongruenz in bekannter Weise nahekommen, eine Tatsache, die auf den ersten Blick hin etwas befremdet.

Vergleichen wir etwa die Abb. 10 und 21. In Abb. 10 kann der Punkt B beliebig nahe an der Geraden CC_2 liegen. Wie schmal hierbei auch das Dreieck CBC_2 ist, stets ist es gleichschenkelig, und der Beweis für die Kongruenz der Dreiecke bleibt gültig.

Liegt der Punkt B jedoch genau auf der Geraden CC_2 (Abb. 21), so brauchen die Strecken CB und C_2B nicht mehr gleichlang, die Dreiecke also nicht kongruent zu sein. Die folgenden Überlegungen sollen diesen Sachverhalt klären.

Oft erweist es sich als zweckmäßig, drei auf einer Geraden liegende Punkte P , Q und R als Ecken eines entarteten Dreiecks anzusehen. Liegt hierbei Q zwischen P und R , so sollen nach Vereinbarung die Winkel bei P und R beide gleich Null und der Winkel bei Q gleich π sein. Der Sinn dieser Vereinbarung ist klar:

Solange die drei Punkte nicht genau auf einer Geraden liegen, bestimmen sie ein Dreieck mit zwei kleinen Winkeln und einem dritten Winkel, der nahe bei π liegt. Nun deformieren wir die Figur so, dass die drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Werden die früheren Bezeichnungen für diesen Fall beibehalten, so gelten gewisse Sätze gleichzeitig für nichtentartete und entartete Dreiecke, beispielsweise der Satz, dass die Winkelsumme im Dreieck π beträgt.

Andere Sätze sind dagegen nicht auf entartete Dreiecke übertragbar.

Hierzu gehört der Satz: Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenkelig. Dieser Satz ist sinnvoll und richtig, wenn die beiden gleichen Winkel von Null verschieden sind; jedoch folgt bei einem entarteten Dreieck PQR , wenn die Winkel bei P und R gleich Null sind, keineswegs $PQ = QR$; der Punkt Q braucht nicht in der Mitte von PR zu liegen. Dieses Beispiel hängt eng mit der uns interessierenden Frage zusammen.

Solange der Punkt B in Abb. 10 oder 11 nicht auf der Geraden CC_2 liegt (Dreieck CBC_2), folgt aus der Gleichheit der Winkel bei C und C_2 stets $CB = C_2B$, wie klein diese Winkel auch immer sein mögen. Ist aber wie in Abb. 21 das Dreieck CBC_2 entartet, so sind die beiden betreffenden Winkel gleich Null. Man kann dann nicht mehr schließen, dass das Dreieck CBC_2 gleichschenkelig ist. Unser Satz lässt sich in diesem Fall also nicht beweisen.

Zu Beispiel 9.

Die Behauptung des Satzes ist natürlich falsch, da man in ein Quadrat leicht ein Recht-

eck einzeichnen kann, dessen Seiten verschieden sind. Hierzu wählt man die Seiten des Rechtecks einfach so, dass sie parallel zu den Diagonalen des Quadrates verlaufen und die Seiten des Quadrates nicht halbiert werden.

Genauer gesagt: Von zwei gegenüberliegenden Ecken des Quadrates, z.B. von A und C , tragen wir auf den angrenzenden Seiten vier gleiche Strecken $AM = AQ = CN = CP$ ab, deren Länge nicht gleich $\frac{a}{2}$ ist (Abb. 22; a bezeichnet den Umfang des Quadrates).

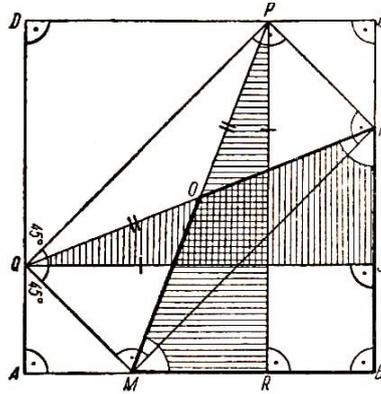


Abb. 22

Die übrigen Abschnitte auf den Seiten des Quadrates stimmen dann ebenfalls miteinander überein, $MB = BN = PD = DQ \neq \frac{a}{2}$.

Verbinden wir nacheinander die Punkte M, N, P, Q und M , so erhalten wir vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke, die paarweise kongruent sind, $\triangle AMQ \cong \triangle CPN$, $\triangle BNM \cong \triangle DQP$. Hieraus folgt $QM = PN$ und $MN = QP$, d.h., das Viereck $MNPQ$ ist ein Parallelogramm und überdies ein Rechteck, da zum Beispiel $\angle MPQ = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ist.

Außerdem verlaufen die Seiten des Vierecks $MNPQ$, die gegen die Quadratseiten um 45° geneigt sind, zu den (stets aufeinander senkrecht stehenden) Diagonalen des Quadrates parallel. Damit haben wir einen weiteren Beweis dafür, dass $MNPQ$ ein Rechteck ist.

Unabhängig von dieser Konstruktion bemerken wir folgenden Trugschluss in dem auf S. 20 geführten Beweis.

Wir hielten die Figur in Abb. 13 für richtig und nahmen stillschweigend an, dass von den beiden Projektionen (P auf AB und Q auf BC) die eine (R) auf einer Seite des Vierecks $MBNO$ und die andere (S) auf der verlängerten Seite liegt.

Dies würde bedeuten, dass von den beiden gleichen Winkeln OMR und ONS einer ein Innenwinkel, der andere ein Außenwinkel des Vierecks $MBNO$ ist.

Diese Annahme war jedoch völlig unbegründet (in Abb. 22 handelt es sich bei den fraglichen Winkeln um zwei Innenwinkel).

Wir entnehmen den obigen Überlegungen an Stelle der als falsch erkannten Behauptung beispielsweise folgende zwei Sätze:

1. Ist ein Rechteck einem Quadrat so einbeschrieben, dass eine der Rechteckseiten zu keiner Diagonalen des Quadrates parallel verläuft, so ist das Rechteck ein Quadrat.
2. Ist ein Rechteck, das kein Quadrat ist, einem Quadrat einbeschrieben, so verlaufen

die Seiten des Rechtecks zu den Diagonalen des Quadrates parallel.

Zu Beispiel 10.

Hier wurde der gleiche logische Fehler begangen wie in Beispiel 2. Die zu beweisende Behauptung wird als Folgerung aus einem sicher richtigen Satz angesehen, obgleich sie dies tatsächlich nicht ist. Wir vergegenwärtigen uns noch einmal den Gang der Überlegungen.

Hierbei erleichtern wir uns die Fehlersuche, indem wir Abb. 14 durch Abb. 23 ersetzen, in der sich die Strahlen AQ und BP schneiden (um dem Vorwurf zu entgehen, dass die Zeichnung die Lösung der Frage nach dem Vorhandensein eines Schnittpunktes vorwegnimmt, sind die Strahlen AQ und BP unterbrochen gezeichnet).

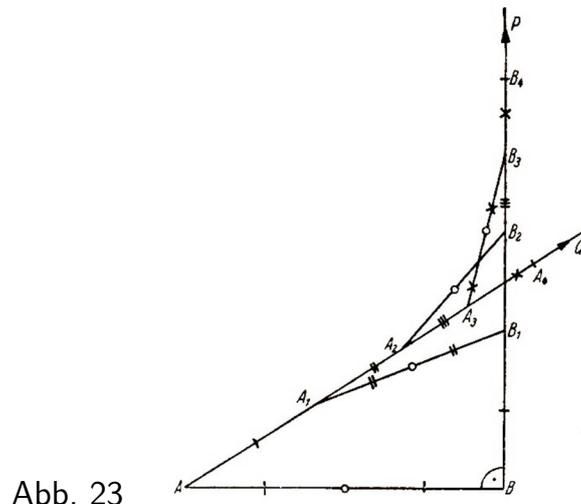


Abb. 23

Bezeichnen AA_1, AA_2, AA_3, \dots die Abschnitte auf dem geneigten Strahl und BB_1, BB_2, BB_3, \dots die Abschnitte auf dem senkrechten Strahl, so entnehmen wir den obigen Überlegungen folgende sicher richtige Tatsachen:

1. Das Abtragen der Abschnitte nimmt kein Ende, d.h., es ergeben sich Abschnitte beliebig hoher Nummern;
2. Abschnitte gleicher Nummern schneiden sich nicht, d.h., der i -te Abschnitt auf dem senkrechten Strahl hat mit dem i -ten Abschnitt auf dem geneigten Strahl keinen Punkt gemeinsam.

Wenn wir aber behaupten, dass senkrechter und geneigter Strahl sich niemals schneiden, so müssen wir darüberhinaus zeigen, dass keiner der Abschnitte auf dem senkrechten einen gemeinsamen Punkt mit irgendeinem Abschnitt auf dem geneigten Strahl hat, was durchaus denkbar wäre.

Wir dürfen uns also keinesfalls, wie es oben geschah, mit dem Beweis begnügen, dass kein Abschnitt auf dem senkrechten Strahl einen Abschnitt gleicher Nummer auf dem geneigten schneidet. Betrachten wir Abb. 23 (die Bezeichnungen von Abb. 14 sind übernommen worden; beide Zeichnungen sind frei von absichtlichen Fehlern), so sehen wir, dass sich der zweite Abschnitt des senkrechten Strahls und der vierte Abschnitt des geneigten Strahls schneiden.¹⁵

¹⁵Ist der Winkel bei A bekannt, so kann man die Nummern der sich schneidenden Abschnitte trigo-

Unser Beispiel enthält einen bemerkenswerten Widerspruch, der sich darin äußert, dass der begangene Fehler eigentlich recht einfacher Natur ist, während es doch einige Mühe kostete, ihn überhaupt zu entdecken.

Bemerkung. Wie in der Fußnote auf S. 15 bereits angedeutet wurde, wird hier nur der Grundgedanke des von Proklos angegebenen Sophismus benutzt.

Proklos betrachtete zwei beliebige Geraden (genauer zwei Strahlen, die nicht auf einer Geraden liegen und verschiedene Anfangspunkte haben) und "beweist", dass diese Geraden sich nicht schneiden, indem er in der oben beschriebenen Art und Weise unendlich viele Abschnitte auf der Geraden abträgt.

Proklos charakterisiert den in dieser sophistischen Überlegung begangenen logischen Fehler richtig, wenn er bemerkt, dass lediglich die Unmöglichkeit aufgezeigt wurde, mit dieser Konstruktion den Schnittpunkt zu erhalten, was aber keineswegs bedeute, dass es keinen Schnittpunkt gäbe. Sieht man die Untersuchungen Bonolas als begründet an, so kann man nicht sicher sein, dass Proklos tiefer in das geometrische Wesen dieses Fehlers eindrang.

Der italienische Mathematiker irrt sich aber, wenn er behauptet, dass die Unerreichbarkeit des Schnittpunktes und der berühmte Sophismus von "Achilles und der Schildkröte" von gleicher Natur sind. Bonola will hiermit folgendes sagen:

Der Schnittpunkt K der Strahlen AQ und BP ist mit der Konstruktion deshalb unerreichbar, weil die Punkte A_n und B_n für wachsendes n wohl gegen K streben, ihn aber niemals erreichen.

In unserem Falle ist diese Behauptung jedoch falsch, weil aus der Gültigkeit der Gleichung $AA_n = BB_n$ für jedes n folgen würde, dass $AK = BK$ sei, d.h., die Hypotenuse wäre gleich einer Kathete.

Nicht anders ist es bei der Konstruktion von Proklos-Bonola, abgesehen von dem Fall, dass das Dreieck AKB gleichschenkelig ist. Somit schneiden sich auch hier im allgemeinen verschieden nummerierte Abschnitte, während sich die Endpunkte dieser Abschnitte keinem gemeinsamen Punkt nähern.

Schlussbemerkungen. Der Leser könnte nun fragen: Wenn die Fehler in mathematischen Überlegungen manchmal so gut versteckt sind, dass sie erst nach längerer Untersuchung gefunden werden, wie kann dann die Mathematik ein zuverlässiges Fundament für Physik, Technik usw. sein?

Natürlich garantiert eine wissenschaftliche Methode allein noch keine richtigen Ergebnisse, es ist außerdem notwendig, diese Methode richtig anzuwenden. Dies bedeutet, dass man die Quellen für mögliche Fehler kennen und strenger bei der Begründung der Behauptungen vorgehen muss. Um zu erkennen, wie groß tatsächlich die Gefahr ist, unbemerkt einen Fehler zu machen, ist es zweckmäßig, sich mit der Geschichte der Mathematik zu beschäftigen.

Immer wieder treten in mathematischen Arbeiten Fehler auf; dennoch wurde durch keinen dieser Fehler die Entwicklung der Mathematik aufgehalten. Das eindrucksvollste

nometrisch berechnen.

Beispiele sind die schon erwähnten jahrhundertelangen Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen.

Zu diesem Axiom schrieb Lobatschewski im Jahre 1823:

"Ein strenger Beweis ist bis jetzt nicht zu finden. Die vorhandenen kann man nur als Erklärungen bezeichnen, aber nicht als vollständige mathematische Beweise."

Zu dieser Überzeugung kam Lobatschewski einige Jahre vor seiner berühmten Entdeckung. In der Geschichte der Geometrie stellte sie den neuen Abschnitt dar, in dem es zuerst Lobatschewski und später der gesamten mathematischen Welt klar wurde, dass selbst die kompliziertesten Beweise für das Parallelenaxiom falsch waren.

Weiteres zu diesen Schlussbemerkungen findet der Leser in den Kapiteln III und IV.

5 Kapitel III - Fehler in Überlegungen, die mit dem Begriff des Grenzwertes zusammenhängen

Die Beispiele dieses Kapitels sind nur den Schülern der beiden obersten Klassen verständlich. Benutzt werden hier die Formel für den Kreisumfang, der Begriff des Grenzwertes, die Trigonometrie und in einem Beispiel die Stereometrie.

Beispiel 11. Alle Kreise haben den gleichen Umfang.

Es handelt sich dabei um einen Sophismus, der schon von dem griechischen Philosophen Aristoteles (IV. Jahrhundert v.u.Z.) erwähnt wurde und das "Rad des Aristoteles" genannt wird.

Wir erinnern uns zunächst an die Aufgabe, den von einem Fahrzeug zurückgelegten Weg zu bestimmen, wenn der Umfang der Räder des Fahrzeuges bekannt ist (der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sämtliche Räder des Fahrzeuges denselben Umfang haben).

Als Grundlage für die Lösung dieser Aufgabe dient die offenbar selbstverständliche Tatsache, dass ein rollendes Rad bei jeder vollständigen Umdrehung einen Weg zurücklegt, dessen Länge gerade gleich dem Umfang des Rades ist.

Beträgt der Radumfang zum Beispiel 2 m und führt das Rad 30 volle Umdrehungen aus, so hat es einen Weg von 60 m zurückgelegt.

Verläuft die Bewegung auf einer Geraden und wird keine besondere Genauigkeit gefordert, so werden diese Rechnungen durch das Experiment bestätigt. Den Radumfang kann man mit einem Bandmaß messen.

Die vollen Umdrehungen des Rades kann man dadurch zählen, dass man bei der Bewegung an irgendeiner Stelle des Umfangs eine Marke anbringt, die nach jeder vollen Umdrehung einen Abdruck auf der Fahrbahn hinterlässt. (Kilometerzähler, wie sie in Fahrzeugen verwendet werden, zählen die Umdrehungen und zeigen gleichzeitig die Anzahl der zurückgelegten Kilometer an; ist der Kilometerzähler mit einem Tachometer gekoppelt, so kann die Geschwindigkeit direkt abgelesen werden.)

Natürlich besteht dieser einfache Zusammenhang zwischen Radumfang und zurückgelegtem Weg nur dann, wenn das Rad "normal"rollt, d.h., solange es nicht springt oder gleitet. In der Mechanik spricht man von einem Rad, das "ohne Schlupf" rollt.

Wir wenden uns nun unserer Behauptung zu.

Hierzu betrachten wir zwei miteinander verbundene Kreise C und C_1 mit verschiedenen, aber sonst beliebigen Radien (Abb. 24). Gleichzeitig stellen wir uns als Modell zwei Räder vor, die auf einer gemeinsamen Achse befestigt sind. Die Achse möge horizontal liegen.

Nun legen wir an C und C_1 in Punkten M und M_1 , die auf demselben Radius OM liegen, die Tangenten MN und M_1N_1 . Da die beiden Kreise miteinander verbunden sind, bewegen sie sich als Ganzes:

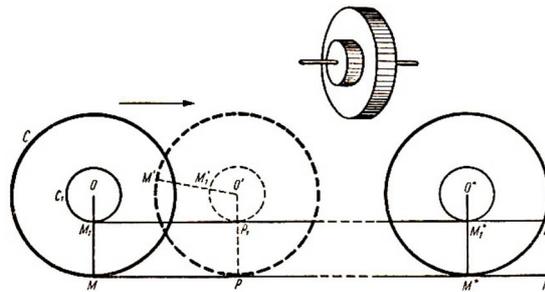


Abb. 24

Dreht sich der eine um einen bestimmten Winkel, so dreht sich der andere um denselben Winkel. Rollt C etwa auf der Geraden MN ab, so rollt C_1 auf der Geraden M_1N_1 ab. (In Abb. 24 ist durch einen Pfeil angedeutet, in welcher Richtung die Kreise rollen. Eine der möglichen Zwischenstellungen ist gestrichelt gezeichnet. In dieser Stellung sind M und M_1 in M' bzw. M'_1 übergegangen.)

Diesen Bewegungsablauf hat man sich im Hinblick auf unser Modell entsprechend so vorzustellen, dass unter jedem Rad eine horizontale Schiene angebracht ist. Rollt das große Rad auf seiner Schiene ab, so zwingt es das kleinere, auf seiner Schiene abzurollen.

Angenommen, der auf MN abrollende Kreis C mache eine volle Umdrehung, und der Punkt M gelange in die Lage M^* . Der Kreis C_1 führt hierbei ebenfalls eine volle Umdrehung aus, wobei M_1 die Lage M_1^* bekommt. M_1^* liegt auf dem Radius O^*M^* , der parallel zu OM ist, da beide Radien senkrecht auf MN stehen. Hieraus folgt $MM^* = M_1M_1^*$, d.h., beide Kreise haben bei einer vollen Umdrehung denselben Weg zurückgelegt, so dass die Umfänge der beiden Kreise miteinander übereinstimmen. Da C und C_1 ganz beliebige Kreise waren, ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Hinweis. Mit diesem Hinweis soll keinesfalls die Absicht verfolgt werden, dem Leser einen bestimmten Ausweg aus dem offenbar vorhandenen Widerspruch vorzuschreiben (die diesbezügliche Überlegung findet man in Kapitel IV). Dieser Hinweis wird vielmehr in jedem Falle zur Lösung des Problems beitragen.

Eine Kreislinie wird häufig als Grenzwert einer Folge einbeschriebener (oder umbeschriebener) regelmäßiger Vielecke angesehen. Wächst die Seitenzahl dieser Vielecke unbegrenzt, so nähern sich die Vielecke beliebig der Kreislinie.¹⁶ Dies führt zu folgenden Gedanken:

Um eine nähere Vorstellung vom Abrollen der Kreislinie zu bekommen, lassen wir statt der Kreislinie ein regelmäßiges Vieleck abrollen. Je größer hierbei die Anzahl der Seiten

¹⁶Wir sprechen absichtlich von "Grenzwert" an Stelle des häufiger verwendeten Ausdrucks "Grenzlage"; hierunter soll genauer der folgende Tatbestand verstanden werden:

Ist R der Radius eines gegebenen Kreises, so gibt es zu jedem Kreisring, der von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien $R - \varepsilon$ und $R + \varepsilon$ gebildet wird und den gegebenen Kreis umschließt, eine Zahl n derart, dass alle einbeschriebenen (und umbeschriebenen) regelmäßigen Vielecke, deren Seitenzahl gleich oder größer n ist, ganz im Inneren des Ringes liegen.

Dieser Tatbestand darf keinesfalls verwechselt werden mit dem bekannten Satz, dass der Umfang eines Kreises gleich dem Grenzwert der Umfänge einer Folge einbeschriebener (umbeschriebener) regelmäßiger Vielecke ist, deren Seitenzahl unbegrenzt wächst. Die Aussage dieses Satzes wird zuweilen geradezu als Definition des Kreisumfangs benutzt. Wir werden sehen (Beispiel 12, 13 und 14), dass die Bezeichnung "Grenzwert" in beiden Fällen nicht dieselbe Bedeutung hat.

des Vielecks ist, desto genauer wird das Abrollen des Kreises dargestellt.

Wir wollen aber zunächst genau sagen, was wir unter der Redewendung "ein (konvexes) Vieleck rollt auf einer Geraden ab" verstehen wollen.

Hierzu legen wir zunächst einen bestimmten Durchlaufungssinn fest, indem wir etwa die Ecken (bzw. Seiten) des Vielecks entgegengesetzt zum Uhrzeigersinne durchlaufen und hierbei nummerieren. In der Anfangslage liege die Seite A_1A_2 auf der Geraden. Dann drehen wir das Vieleck um die Ecke A_2 die zwischen dieser und der nächstfolgenden Seite A_2A_3 liegt, und zwar so lange, bis die Seite A_2A_3 auf der Geraden liegt. Anschließend drehen wir das Vieleck um die Ecke A_3 usw. Kurz gesagt:

Wir rollen das Vieleck jeweils von einer Seite auf die folgende Seite ab, indem wir es jedesmal um die Ecke, die diesen Seiten gemeinsam ist, drehen. Hierdurch wird das Vieleck in einer bestimmten Richtung längs der Geraden verschoben.

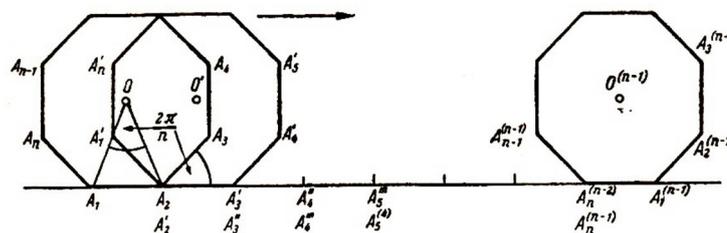


Abb. 25

Gegeben sei nun ein regelmäßiges n -Eck (etwa das in Abb. 25 gezeichnete Achteck). $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ seien seine Ecken. In der Anfangslage möge die Seite A_1A_2 auf der Geraden liegen, auf der das Vieleck in der Richtung A_1A_2 (in Abb. 25 deutet der Pfeil diese Richtung an) abgerollt werden soll.

Das n -Eck muss beim ersten Male um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gedreht werden, damit die Seite A_2A_3 auf der Geraden liegt. Nach dieser Drehung hat der Mittelpunkt O die neue Lage O' angenommen.

Die Ecken $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ mögen jetzt entsprechend in den Punkten $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}, A'_n$ liegen. Hierbei ist $A'_2 = A_2$.

Die folgende Drehung um den Punkt A'_3 und den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ führt das Vieleck $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}, A'_n$ in die Lage $A''_1, A''_2, \dots, A''_{n-1}, A''_n$ über.

Nach $n - 1$ Drehungen habe das Vieleck die Lage $A_1^{(n-1)}, A_2^{(n-1)}, \dots, A_{n-1}^{(n-1)}, A_n^{(n-1)}$, wobei sich der Mittelpunkt in $O^{(n-1)}$ befinde.

Nunmehr liegt die Seite $A_n^{(n-1)}A_1^{(n-1)}$ auf der Geraden. Hierbei ist die Ecke A_1 zur Geraden zurückgekehrt. Daher braucht die Bewegung nicht weiter fortgesetzt zu werden. Offenbar ist die Länge der Strecke $A_1A_1^{(n-1)}$ gleich dem Umfang des Vielecks.

Der Leser erkennt, dass die Lage jeder Ecke durch zwei Indizes markiert wird; der untere Index gibt an, welchen Platz die Ecke in der Ausgangslage hatte, während der obere Index (anfänglich waren es senkrechte Striche, später eine eingeklammerte Zahl) die Zahl der ausgeführten Drehungen angibt.

Mit $A_6^{(4)}$ wird also die Lage der Ecke A_6 nach der vierten Drehung bezeichnet.

In Abb. 25 erkennt man neben den wesentlichen Eigenschaften der beschriebenen Bewegung auch einige rein zufällige, die mit dem dort für gewählten Wert zusammenhängen.

Es empfiehlt sich daher, für einen anderen Wert von n eine entsprechende Zeichnung anzufertigen, zum Beispiel für die ungerade Seitenzahl $n = 5$.

Wir kommen jetzt auf den oben betrachteten Sophismus zurück und nehmen an Stelle von zwei konzentrischen Kreisen zwei regelmäßige Vielecke, von denen sich eines durch Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitszentrum im Mittelpunkt des anderen Vielecks ergibt. Die Vielecke sollen fest miteinander verbunden sein. Das größere lassen wir auf einer Geraden abrollen und versuchen uns darüber Klarheit zu verschaffen, wie sich das kleine Vieleck bewegt.

Wird dieses hierbei ebenfalls von einer Seite auf die nächstfolgende abgerollt und wird der Umfang des kleineren Vielecks ebenso auf die Gerade abgewickelt, wie der Umfang des großen Vielecks? Natürlich können wir auch von dem kleinen Kreis ausgehen und die entsprechenden Fragen für den großen Kreis stellen.

Wir formulieren jetzt eine Aufgabe, bei der aus einem anderen Grunde der rollende Kreis durch ein Vieleck ersetzt wird. Mit unseren Überlegungen hat diese Aufgabe gemeinsam, dass sie ebenfalls gewisse Grenzübergänge enthält, die einer Begründung bedürfen (siehe die folgenden Beispiele).

Bekanntlich beschreibt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden jeder Punkt der Kreisperipherie eine Zykloide. Verfolgen wir die Bewegung desjenigen Punktes, der in der Anfangslage mit dem Berührungspunkt von Kreis und tangierender Geraden zusammenfällt, so beschreibt dieser Punkt im Verlaufe einer vollen Drehung zwischen M und M^* einen Zykloidenbogen (Abb. 26).

Mit den Mitteln der höheren Mathematik lässt sich leicht zeigen, dass die Länge dieses Bogens gleich dem achtfachen Radius des abrollenden Kreises ist, während der Inhalt der von der Geraden und dem Zykloidenbogen begrenzten Fläche dreimal so groß ist wie der Inhalt des Kreises.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diese Ergebnisse auf elementarem Wege herzuleiten. Hierzu erweist es sich als zweckmäßig, den Kreis (R sei sein Radius), durch ein einbeschriebenes regelmäßiges n -Eck zu ersetzen.

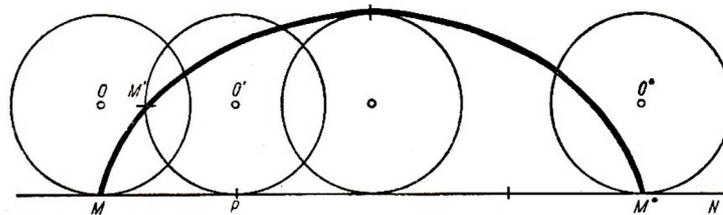


Abb. 26

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen aus Abb. 25. Die Bahnkurve des Punktes A_1 setzt sich aus $n - 1$ Kreisbögen zusammen (in Abb. 25 sind diese Bögen nicht eingezeichnet):

$\widehat{A_1 A_1'}$ mit dem Zentrum A_2 , $\widehat{A_1' A_1''}$ mit dem Zentrum A_3 , ..., $\widehat{A_1^{(n-2)} A_1^{(n-1)}}$ mit dem Zentrum $A_n^{(n-2)}$. Aneinandergereiht ergeben diese Bögen eine Kurve, die von A_1 nach $A_1^{(n-1)}$ verläuft und im Gegensatz zur Zykloide Knickstellen hat.

Je größer wir n wählen, desto mehr glättet sich die Kurve an den Knickstellen, und die

aus den einzelnen Kreisbögen zusammengesetzte Kurve nähert sich einem Zykloidenbogen. Man wird daher erwarten, dass der Zykloidenbogen dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ entspricht.

Mit den Mitteln der elementaren Trigonometrie kann man nun leicht für jedes n die Länge der aus den Kreisbögen zusammengesetzten Bahnkurve finden, die von einer Ecke des Vielecks bei einer vollen Umdrehung zurückgelegt wird.

Auch die von dem Zykloidenbogen und der Strecke $A_1 A_1^{(n-1)}$ umschlossene Fläche lässt sich berechnen. Geht man dann in den so erhaltenen Ausdrücken für die Länge und die eingeschlossene Fläche zur Grenze für $n \rightarrow \infty$ über, so finden wir $8R$ bzw. $3\pi R^2$, d.h. die richtigen Ergebnisse.¹⁷ Jedoch hat man erst dann einen vollständigen Beweis, wenn der Grenzübergang gerechtfertigt ist, d.h., wenn bewiesen werden ist, dass für $n \rightarrow \infty$ die für das Vieleck gefundene Bogenlänge und der Flächeninhalt ihrerseits gegen die Bogenlänge und den Flächeninhalt der Zykloide streben. Dies zu zeigen, ist im Rahmen der Elementarmathematik wohl möglich, aber nicht leicht.

Unsere Aufgabe lässt noch eine Erweiterung zu, die darin besteht, dass man beim Abrollen des Kreises auch solche Punkte betrachtet, die innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen und fest mit ihm verbunden sind.

Man erhält dann sogenannte "verlängerte" und "verkürzte" Zykloiden. Bei der Untersuchung dieser Kurven kann man ebenfalls so vorgehen, dass man den Kreis durch ein einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck ersetzt und dann für $n \rightarrow \infty$ zur Grenze übergeht.

Beispiel 12. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse gleich der Summe der Längen der Katheten.

Es sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC gegeben (Abb. 27).

Wir fällen vom Mittelpunkt D der Hypotenuse die Lote DE und DF auf die Katheten. Hierdurch entsteht der Streckenzug $BEDFA$, dessen Länge offensichtlich gleich der Summe der Längen der Katheten ist.

Wir wiederholen diese Konstruktion nun für jedes der Dreiecke DBE und ADF , d.h., wir fällen von der Mitte der Hypotenuse DB bzw. AD die Lote auf die Katheten. Dieser Prozess kann unendlich oft wiederholt werden.

¹⁷Bei dem vom Verfasser eingeschlagenen Lösungsweg kommen außer Formeln, die aus dem Schulunterricht bekannt sind, noch folgende Formeln vor:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin k\alpha &= \frac{\sin k\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(k+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2 k\alpha &= \frac{2k+1}{4} - \frac{\sin(2k+1)\alpha}{4 \sin \alpha} \\ 2(\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \dots + \sin(k-1)\alpha \sin k\alpha) &= k \cos \alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2 \sin \alpha} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega}{\omega} &= 1 \quad \omega \text{ im Bogenmaß.} \end{aligned}$$

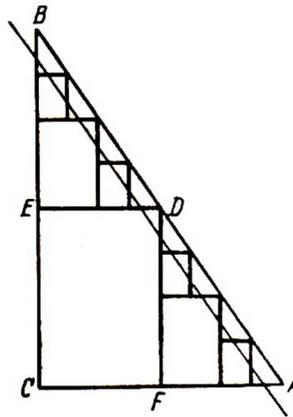


Abb. 27

Die Hypotenuse wird dabei nacheinander in 2, 4, 8, 16, ... gleiche Teile geteilt, wobei eine Folge von Streckenzügen entsteht, die die Punkte A und B verbinden und entsprechend aus 4, 8, 16, 32, ... Abschnitten bestehen.

Für jeden dieser Streckenzüge hat die aus den Längen sämtlicher Abschnitte gebildete Summe denselben Wert, und zwar stimmt dieser Wert mit der Summe der Längen der Katheten überein. Wird die Anzahl der Abschnitte immer größer, so nähert sich der Streckenzug immer mehr der Hypotenuse AB .

Ist die Anzahl der Abschnitte hinreichend groß, so wird es demnach schwer sein, den Streckenzug überhaupt noch von der Geraden (der Hypotenuse) zu unterscheiden (ebenso wie es schwer ist, einen Kreis von einem einbeschriebenen regelmäßigen Vieleck mit hinreichend großer Seitenzahl zu unterscheiden).

Für diese anschauliche Vorstellung sagen wir genauer: Die Folge der Streckenzüge strebt gegen die Strecke AB , d.h., der maximale Abstand zwischen den Punkten der Streckenzüge und denen der Geraden strebt bei unbegrenztem Anwachsen der Anzahl der Abschnitte gegen Null; dieser größte Abstand ist gleich der Länge der Höhe in irgendeinem der untereinander gleichen Dreiecke, aus denen sich der Streckenzug zusammensetzt.

Die Länge der Höhe in einem solchen Dreieck ist sicher kleiner als die gegen Null strebende Hypotenuse. Mit anderen Worten:

Wie schmal der Streifen zwischen der Hypotenuse AB und einer zu ihr parallelen Geraden auch immer ist (Abb. 27), stets gibt es in der Folge der Streckenzüge einen solchen, der mit allen darauffolgenden ganz in diesem Streifen liegt. Alle Streckenzüge haben aber die gleiche Länge, d.h., die Folge der Längen besteht aus lauter gleichen Zahlen und hat somit als Grenzwert eben diese Zahl, nämlich die Summe der Katheten.

Andererseits erscheint die Hypotenuse als Grenzlage der Streckenzüge, so dass die Länge der Hypotenuse gleich dem Grenzwert ist, gegen den die aus den Längen der Streckenzüge gebildete Folge strebt. Eine Folge kann nun aber nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung 1. Es ist unwesentlich, dass wir ein rechtwinkliges Dreieck genommen haben (der einzige Vorteil besteht darin, dass die Seiten einen bestimmten Namen (Kathete, Hypotenuse) haben). Bei einem schiefwinkligen Dreieck konstruiert man entsprechend

eine Folge von Streckenzügen, indem man eine Seite des Dreiecks auszeichnet und durch einen Punkt dieser Seite die Parallelen zu den beiden anderen Seiten zieht usw.

Hier wie auch oben ist es ganz unwesentlich, dass die Seite gerade in 2, 4, 8, ... gleiche Teile zerlegt wird. Statt dessen könnte man die Seite auch in 2, 3, 4, 5, ... gleiche Teile, ja sogar in ungleiche Teile zerlegen.

Wesentlich ist nur, dass ihre Anzahl unbegrenzt wächst und die maximale Abschnittslänge gegen Null strebt.

Bemerkung 2. Der Leser könnte die Fehlerquelle unter Umständen darin zu erkennen glauben, dass sämtliche Streckenzüge ein und dieselbe Länge haben und dass man deshalb nicht von dem Grenzwert der aus den Längen gebildeten Folge sprechen kann. Hierauf muss erwidert werden, dass in der Mathematik auch Folgen untersucht werden, die aus lauter gleichen Zahlen bestehen.

Die Zahl selbst ist dann der Grenzwert der Folge im genauen Sinne des Begriffes "Grenzwert". Übrigens könnten wir auch durch eine geringfügige Änderung unserer Konstruktion erreichen, dass die Länge der Streckenzüge veränderlich wird, während alles andere so wie vorher bleibt.

Beispiel 13. Die Zahl π ist gleich 2.

Es sei AB der Durchmesser eines Halbkreises (Abb. 28). Wir halbieren AB und schlagen über jeder Hälfte einen Halbkreis, und zwar den einen nach oben, den anderen nach unten.

Diese beiden Halbkreise bilden eine wellenförmige Kurve, die an eine Sinuskurve erinnert. Die Länge der Kurve von A bis B ist gleich der Länge des ursprünglichen Halbkreises, d.h. gleich $\frac{\pi}{2}AB$. Die Länge jedes der kleinen Halbkreise ist nämlich halb so lang wie die des großen, da der Durchmesser der kleinen Halbkreise nur halb so lang ist wie der des großen.

Nun zerlegen wir AB in vier gleiche Teile und konstruieren die aus vier Halbkreisen bestehende wellenförmige Kurve (Abb. 28). Ihre Länge ist wieder gleich $\frac{\pi}{2}AB$. Dieses Verfahren setzen wir fort, indem wir AB in 8, 16, ... gleiche Intervalle unterteilen und über jedem dieser Intervalle Halbkreise schlagen, die abwechselnd oberhalb und unterhalb von AB liegen.

Wir erhalten so eine Folge von Wellenzügen, die sich immer mehr AB nähern und AB in dem Sinne zum Grenzwert haben, dass der maximale Abstand (dieser ist offenbar gleich dem Radius der Halbkreise, die den Wellenzug bilden) der Punkte der Wellenzüge von AB mit immer feiner werdender Unterteilung von AB gegen Null strebt (in Abb. 28 ist ein zwischen zwei zu AB parallelen Geraden eingeschlossener Streifen eingezeichnet; wie schmal ein solcher Streifen auch immer ist, stets gibt es in der Folge von Wellenzügen einen solchen Wellenzug, von dem ab alle darauf folgenden Wellenzüge ganz in diesem Streifen Platz finden).

Die Länge aller dieser Wellenzüge ist gleich $\frac{\pi}{2}AB$. Genauso lang muss auch der Grenzwert der Folge AB dieser Wellenzüge sein. Aus der Gleichung $\frac{\pi}{2}AB = AB$ folgt schließ-

lich $\pi = 2$.

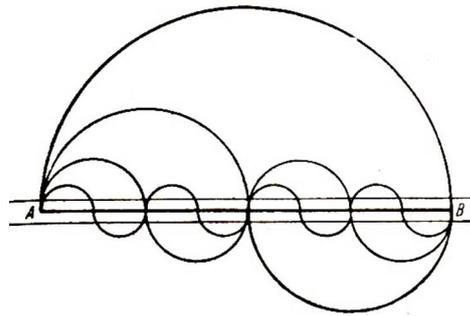


Abb. 28

Bemerkung. Man kann hier übrigens dasselbe hinzufügen wie bei Beispiel 12. Analog den Bemerkungen 1 und 2 gilt hier:

Weder die Art der Zerlegung der Strecke AB in einzelne Intervalle noch die Unveränderlichkeit der Länge der einzelnen Wellenzüge ist wesentlich. Man kann, ähnlich wie im Beispiel 12, einen der Halbkreise in den Wellenzügen jedesmal durch seinen Durchmesser ersetzen ; damit ist die Länge der Wellenzüge veränderlich.

Wir schlagen dem Leser vor, andere Konstruktionen zu verwenden:

An Stelle von Halbkreisen, d.h. an Stelle von Segmenten, deren Peripheriewinkel ein rechter ist, kann man Segmente mit anderen Peripheriewinkeln antragen. (Diese Peripheriewinkel können immer die gleichen sein, oder sie können sich abhängig von der Anzahl der Teilintervalle ändern, sie dürfen aber nicht gegen 180° streben.) Man erhält dann für π andere Werte.

Beispiel 14. Der "Schwarzsche Zylinder".

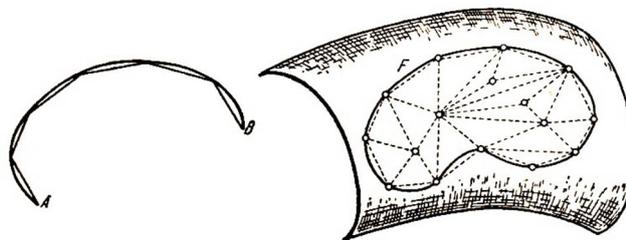


Abb. 29

Will man die Länge AB einer Kurve messen (Abb. 29a), so verfährt man ähnlich wie bei der Messung des Kreisumfangs:

Man wählt auf der Kurve irgendwelche Punkte und verbindet diese durch Geraden (Sehnen). Wird die Anzahl dieser Punkte unbegrenzt vergrößert, so entsteht auf diese Weise eine unendliche Folge von Polygonzügen (die im allgemeinen natürlich keinesfalls zu regelmäßigen Polygonen (Vielecken) gehören).

Wird hierbei gefordert, dass die maximale Länge der Sehnen mit wachsender Anzahl der Punkte gegen Null strebt, so strebt die Folge der Längen dieser Polygonzüge gegen die Länge der Kurve.

Wird die Dimension um 1 vergrößert, so gelangt man zu einer Aufgabe, die mit der oben betrachteten vieles gemeinsam hat. Gemeint ist die Bestimmung des Flächeninhaltes einer Figur F , die auf einer gekrümmten Fläche liegt (Abb. 29b).

In Analogie zur Ermittlung der Länge einer Kurve wird man hier folgendermaßen vorgehen. Man wählt innerhalb von F und auf dem Rand von F mehrere Punkte und verbindet diese derart durch Geraden, dass lauter Dreiecke entstehen, von denen je zwei keine inneren Punkte gemeinsam haben und drei niemals eine gemeinsame Seite besitzen.

Diese Dreiecke bilden zusammen eine der Figur F einbeschriebene Polyederfläche.¹⁸ Aus solchen einbeschriebenen Polyederflächen konstruieren wir nun eine Folge $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die maximale Länge der Kanten der Polyederflächen (d.h. der Seiten der Dreiecke, aus denen sich diese zusammensetzen) strebt gegen Null für $n \rightarrow \infty$;
2. jeder Punkt von F ist der Grenzwert einer bestimmten Folge von Punkten, die entsprechend auf $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ liegen.

Nun wird man annehmen, dass die aus den Flächeninhalten der Polyederflächen $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ gebildete Folge gegen den Flächeninhalt der Figur F strebt, eine Annahme, die auf der anschaulich gewonnenen Vorstellung beruht, dass sich eine gekrümmte Fläche von einer ihr einbeschriebenen Polyederfläche "praktisch nicht unterscheidet", wenn die maximale Länge der Kanten hinreichend klein ist. H.A. Schwarz¹⁹ zeigte jedoch, dass die Anschauung hier trügt. Wir wollen dieses Beispiel jetzt untersuchen.

Hierzu betrachten wir einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe H (Abb. 30) und versuchen, den Inhalt seiner Mantelfläche in der oben beschriebenen Weise zu ermitteln.

Wir teilen zu diesem Zweck die Höhe in n gleiche Teile und legen durch die Teilpunkte Ebenen, die parallel zu den Grundflächen verlaufen. Die dabei auf dem Zylindermantel entstehenden $n - 1$ Kreise liefern zusammen mit den Grundkreisen n aufeinanderstehende kleine Zylinder.

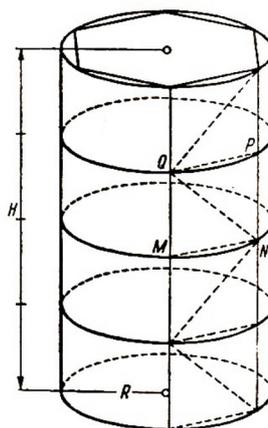


Abb. 30

Einem dieser Kreise schreiben wir ein regelmäßiges m -Eck ein. Durch jede Ecke dieses m -Ecks ziehen wir die Parallele zur Höhe, so dass alle übrigen Kreisumfänge in m gleiche Bögen zerlegt werden.

¹⁸Man sagt, eine Polyederfläche sei einer anderen Fläche einbeschrieben, wenn alle Ecken der Polyederfläche auf dieser Fläche liegen.

¹⁹Deutscher Mathematiker (1848-1921).

Durch diese Konstruktion entstehen $m \cdot n$ gleiche Rechtecke, eines davon (das Rechteck $MNPQ$) ist in Abb. 30 eingezeichnet worden.

Die Ecken dieser Rechtecke liegen auf der Oberfläche des Zylinders. Wir unterteilen nun noch jedes Rechteck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so dass wir eine dem Zylindermantel einbeschriebene Polyederfläche erhalten, die aus $2 \cdot m \cdot n$ gleichen Dreiecken besteht.

Lassen wir die Zahlen m und n unbegrenzt wachsen, so streben die Seiten dieser Dreiecke sowie der Abstand der auf ihnen liegenden Punkte vom Zylindermantel gegen Null.²⁰

Die einbeschriebenen Polyederflächen werden jeweils durch zwei Indizes m und n gekennzeichnet. Wir können nun aber beliebig viele Folgen von Polyederflächen definieren, indem wir einen Index als Funktion des anderen auffassen (selbstverständlich muss dies so geschehen, dass beide Indizes natürliche Zahlen sind und gleichzeitig gegen unendlich streben).

Wir können zum Beispiel $m = n$, $n = 3m$ oder $m = n^2$ usw. setzen.

Der Leser hat wahrscheinlich schon bemerkt, dass unsere Polyederflächen praktisch mit den Mantelflächen von regelmäßigen m -seitigen Prismen übereinstimmen, die dem Zylinder einbeschrieben sind. Die Aufteilung jeder rechteckigen Seitenfläche eines derartigen Prismas in $2n$ Dreiecke hatte lediglich den Zweck, die hier durchgeführte Zerlegung dem in Abb. 29 dargestellten allgemeinen Verfahren anzupassen.

Uns steht nun noch die nicht ganz einfache Aufgabe bevor, die für den Flächeninhalt eines Zylindermantels geltende Formel mit Hilfe einbeschriebener Prismen und anschließendem Grenzübergang herzuleiten. Wir betonen, dass bis jetzt alle Schlüsse richtig waren.

Wir ändern hierzu die Konstruktion der einbeschriebenen Polyederflächen etwas ab, und zwar teilen wir wie vorher die Höhe H in n gleiche Intervalle. Mit Hilfe der durch die Teilpunkte gelegten und zu den Grundkreisen parallelen Ebenen erhalten wir $n - 1$ Kreise, so dass wir zusammen mit den beiden Grundkreisen insgesamt $n + 1$ Kreise haben.

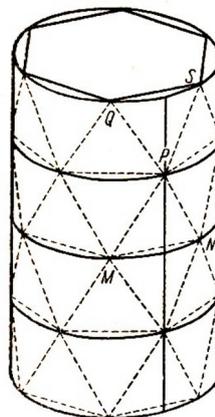


Abb. 31

²⁰Der Abstand eines Punktes vom Zylindermantel wird durch die Differenz zwischen dem Zylinderradius und dem Abstand dieses Punktes von der Zylinderachse gegeben.

Jedem dieser Kreise schreiben wir auf sogleich näher beschriebene Weise ein regelmäßiges m -Eck ein. Während bei der alten Konstruktion ein Vieleck, das irgendeinem der Kreise einbeschrieben war, aus dem benachbarten einfach durch Parallelverschiebung in Richtung der Höhe um den Betrag $\frac{H}{n}$ hervorging, soll jetzt zu dieser Parallelverschiebung eine Drehung um den halben Zentriwinkel, d.h. um $\frac{\pi}{m}$, mit dem Mittelpunkt des Vielecks als Drehpunkt hinzukommen.

Zieht man also durch die Ecke eines der Vielecke eine Parallele zur Höhe, so trifft diese Parallele beim nächsten Vieleck nicht wieder auf eine Ecke, sondern genau auf den Mittelpunkt des über der entsprechenden Vieleckseite aufgespannten Kreisbogens (in Abb. 31 halbiert die durch den Punkt P zur Höhe H gezogene Parallele die Bogen MN und QS).

Werden die eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke in dieser Weise angeordnet, so lässt sich eine (nichtkonvexe) aus Dreiecken bestehende Polyederfläche konstruieren, indem jede Ecke mit den beiden nächstliegenden auf dem benachbarten Kreis verbunden wird. Diese Polyederfläche (sie erinnert im Aussehen an einen auseinandergefalteten Papierlampion), die aus $2 \cdot m \cdot n$ gleichen gleichschenkligen Dreiecken besteht (je $2m$ liegen auf einem Teilzylinder)', ist dem Mantel des Zylinders einbeschrieben.

Um den Flächeninhalt der Polyederfläche zu ermitteln, betrachten wir das Dreieck MNP (Abb. 31 und 32); MN ist eine Seite des regelmäßigen m -Ecks, K und L sind die Mittelpunkte des Bogens \widehat{MN} bzw. der Sehne MN , PK ist die Höhe des kleinen Zylinders.

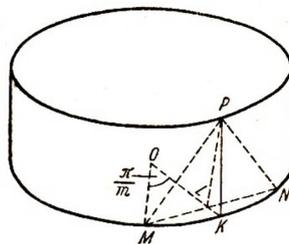


Abb. 32

Das Dreieck MNP ist gleichschenkelig ($PM = PN$, weil die Projektionen KM und KN dieser Seiten auf die Ebene der Grundfläche mit dem Mittelpunkt O gleich sind). Die Höhe PL des Dreiecks MNP erhalten wir aus dem Dreieck PKL . In diesem Dreieck ist der Winkel bei K gleich einem rechten. Es ist weiterhin $PK = \frac{H}{n}$,

$$KL = R - OL = R - R \cos \frac{\pi}{m} = 2R \sin^2 \frac{\pi}{2m}$$

Hieraus folgt

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

Da $\frac{1}{2}MN = R \sin \frac{\pi}{m}$ ist, erhalten wir für die Fläche S des Dreiecks MNP

$$S_{\triangle MNP} = R \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

Bezeichnen wir nun mit $S_{m,n}$ den Flächeninhalt der ganzen Polyederfläche, so finden wir demnach

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= 2mnR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \\ &= 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 4n^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \end{aligned}$$

Wie schon bemerkt wurde, kann man unendlich viele verschiedene Zahlenfolgen $S_{m,n}$ konstruieren, indem man einen Index als Funktion des anderen ansetzt. Wir untersuchen derartige Fälle.

a.) $n = m^2$. Zerlegen wir den Kreis nacheinander in 3, 4, 5, ... Teile, so müssen wir die Höhe H entsprechend in 9, 16, 25, ... Strecken zerlegen. Der Flächeninhalt des Polyeders wird hier zweckmäßigerweise mit S_m bezeichnet, weil er nur noch von m abhängt. Es ist

$$S_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 4m^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

Wir müssen nun den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ausführen. Hierbei gehen $\frac{\pi}{m}$ und demzufolge auch $\sin \frac{\pi}{m}$; und $\sin \frac{\pi}{2m}$ gegen Null. Um die letzte Formel aus der Fußnote von S. 32 benutzen zu können, formen wir den Ausdruck für S_m etwas um:

$$S_m = 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4}$$

Hieraus erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2}$$

Dieser Grenzwert ist offenbar größer als $2\pi RH$, d.h. größer als der allgemein bekannte Ausdruck für den Flächeninhalt eines Zylindermantels. Wir können als Grenzwert durchaus auch andere beliebig große Zahlen erhalten.

Setzen wir zum Beispiel $n = k - m^2$ (k sei eine positive ganze Zahl), so erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{k^2}{4} \pi^4 R^2}$$

b) $n = m^3$. Im Vergleich zu Fall a) wächst die Anzahl der Strecken, in die die Höhe H zu unterteilen ist, noch schneller.

Beim zweiten Summanden unter der Wurzel steht jetzt noch zusätzlich der Faktor m^2 . Demzufolge strebt jetzt S_m für $m \rightarrow \infty$ gegen den Wert Unendlich.

Dies bedeutet, dass man dem Zylinder Polyederflächen einbeschreiben kann, deren Flächeninhalte mit zunehmender Verfeinerung unbegrenzt anwachsen, insbesondere also gegen keinen bestimmten endlichen Wert streben, so dass die Mantelfläche des Zylinders keinen Flächeninhalt hat.

Unsere Überlegungen haben damit zu einem vollkommen unsinnigen Ergebnis geführt.

Es wird darauf ankommen, den begangenen Fehler zu entdecken.

Beispiel 15. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R ist $\pi^2 R^2$.

Wir betrachten eine Halbkugel (Abb. 33) mit dem Mittelpunkt O , dem Äquator q und dem Pol P (der Radius OP steht also senkrecht auf der Äquatorialebene). Der Äquator wird in n gleiche Bogen unterteilt (n soll hinreichend groß sein) und der Pol P mit allen Teilpunkten durch Großkreisbögen (Viertelmeridiane) verbunden.

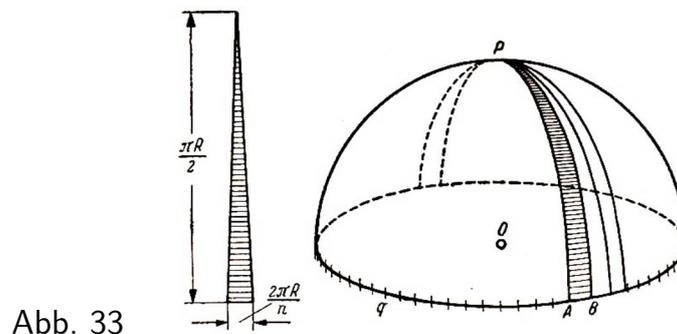


Abb. 33

Damit wird die Oberfläche der Halbkugel in n sehr schmale sphärische Dreiecke unterteilt (einige dieser Dreiecke sind in Abb. 33b dargestellt, eines davon, das Dreieck PAB , ist schraffiert). Lassen wir n beliebig groß werden, so werden diese sphärischen Dreiecke beliebig schmal.

Nun lässt sich aber ein unendlich schmales sphärisches Dreieck auf eine Ebene legen (oder, wie man manchmal sagt, auf eine Ebene abwickeln), ohne dass es verzerrt wird (Längen und Winkel bleiben erhalten).

So entsteht ein gleichschenkliges ebenes Dreieck, dessen Basis die Länge $\frac{2\pi R}{n}$ hat und dessen Höhe gleich dem vierten Teil des Äquators, d.h. gleich $\frac{\pi R}{2}$ ist (ein solches Dreieck ist in Abb. 33a dargestellt). Sein Flächeninhalt ist gleich

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi R}{n} \frac{\pi R}{2} = \frac{1}{2n} \pi^2 R^2$$

Folglich ist der Flächeninhalt aller n Dreiecke gleich $\frac{1}{2} \pi^2 R^2$ und die Oberfläche der ganzen Kugel gleich $\pi^2 R^2$. Diese Formel stimmt nicht mit der allgemein bekannten Formel $4\pi R^2$ für die Kugeloberfläche überein, denn es ist $\pi \neq 4$.

6 Kapitel IV - Diskussion der Beispiele aus Kapitel III

Zu Beispiel 11.

In seiner klassischen Form bezieht sich dieser Sophismus eigentlich nicht auf die Geometrie, sondern auf die Mechanik (genauer gesagt, auf die Kinematik, d.h. auf die Lehre von der Bewegung), da von einem Rad gesprochen wird, das sich in besonderer Weise bewegt.

Man sieht aber sogleich, dass die kinematische Form, in die der Sophismus gekleidet ist, keine Bedeutung hat, da die Zeit hier keine wesentliche Rolle spielt (es ist z.B. gleichgültig, ob sich das Rad schnell oder langsam dreht).

Das Problem kann also wie oben als geometrische Aufgabe aufgefasst werden.

Gewiss liegt die schwache Seite unserer Überlegungen bei der Verschwommenheit der Ausdrucksweise "der Kreis rollt (ohne Schlupf) auf der Geraden". Wir brauchen nur den genauen Sinn dieser Aussage festzulegen, um sofort festzustellen, dass nur einer der beiden miteinander verbundenen Kreise ohne Schlupf rollt, womit dann die Haltlosigkeit des Beweises gezeigt ist.

Die Aussage, dass der Kreis ohne Schlupf auf der Geraden rollt, besagt in der Sprache der Kinematik:

Der Kreis bewegt sich so, dass er in jedem Zeitpunkt von der Geraden tangiert wird, wobei der Punkt auf der Kreisperipherie, in dem die Berührung stattfindet, in diesem Augenblick die Geschwindigkeit Null hat.

Mit anderen Worten: Der Punkt der Kreisperipherie, der in dem betreffenden Augenblick mit dem Berührungspunkt zwischen Kreis und Gerade zusammenfällt, ist für den Kreis das "momentane Drehzentrum".

Letzteres bedeutet, dass die Winkelgeschwindigkeit eines beliebigen Punktes, der mit dem Kreis fest verbunden ist (es ist nicht erforderlich, dass dieser Punkt auf der Peripherie liegt), in jedem Augenblick so groß ist, als würde sich der Kreis um seinen momentanen Berührungspunkt drehen.

Die Bahngeschwindigkeit jedes Punktes steht senkrecht auf der Geraden, die diesen Punkt mit dem momentanen Drehpunkt verbindet.

Verwenden wir die Bezeichnungen aus Abb. 24, so steht die Bahngeschwindigkeit des Punktes, der die Lage M' hat, senkrecht auf $M'P$ (somit ist $M'P$ die Normale der Zykloide aus Abb. 26 im Punkte M').

Hat ein Punkt der Kreisperipherie, der in einem bestimmten Augenblick "unten" liegt, eine von Null verschiedene Geschwindigkeit, so sagen wir, die Bewegung habe einen "positiven Schlupf", falls diese Geschwindigkeit die gleiche Orientierung hat wie die Bewegung, während von einem "negativen Schlupf" gesprochen wird, wenn diese Geschwindigkeit genau entgegen der Bewegung orientiert ist.

Nur dann, wenn kein Schlupf vorhanden ist, kann behauptet werden, dass der in einem beliebigen Zeitabschnitt auf der Geraden zurückgelegte Weg gleich der Länge des

Kreisbogens ist, der dem Zentriwinkel entspricht, um den sich in diesem Zeitabschnitt irgendein Radius des Kreises gedreht hat.

Zum Beispiel ist in Abb. 24 und 26 tatsächlich $MP = \widehat{PM'}$, insbesondere ist MM^* gleich dem Kreisumfang. Bei positivem Schlupf ist $MP > \widehat{PM'}$, bei negativem Schlupf dagegen $MP < \widehat{PM'}$.

Wir sind nun in der Lage, rein geometrisch die verschiedenen Arten des Rollens zu beschreiben. Dennoch werden wir der Anschaulichkeit halber zuweilen kinematische Begriffe benutzen.

Hierzu betrachten wir (Abb. 24 und 26) die Strecke $MM^* = 2\pi R$ und konstruieren in jedem Punkt P den tangierenden Kreis vom Radius R mit dem Mittelpunkt O' .

Alle Kreise liegen dabei auf einer Seite von MM^* .

Auf der Peripherie jedes dieser Kreise tragen wir den Bogen PM' ab, dessen Länge gleich der Länge von PM ist. Wird diese Konstruktion für alle Punkte P auf MM^* ausgeführt, so sagen wir (in kinematischer Sprechweise, aber, was das Wesentliche betrifft, in geometrischem Sinne), dass sich die Gesamtheit aller tangierenden Kreise als Ergebnis einer Umdrehung des Kreises vom Radius R ergibt, indem dieser auf der Geraden MN ohne Schlupf entlangrollt.

Der geometrische Ort der Punkte M' , die den einzelnen Lagen des Punktes P entsprechen, heißt Bahnkurve des Punktes M .

Kann die Gleichung $MP = \widehat{PM'}$ durch die Gleichung $MP = k \cdot \widehat{PM'}$ ersetzt werden (k sei ein von 1 verschiedener Faktor), so sagen wir, der Kreis bewege sich mit "konstantem Schlupffaktor k " fort, wobei der Schlupf selbst positiv oder negativ ist, je nachdem, ob die Differenz $k - 1$ positiv oder negativ ist.

Mit diesen exakten Definitionen kehren wir nun zum "Rad des Aristoteles" zurück. Kinematisch gesehen gilt folgendes:

Rollt der größere der beiden in Abb. 24 dargestellten Kreise ohne Schlupf auf der Geraden MN ab, so kann der kleinere offenbar nicht ohne Schlupf auf der Geraden M_1N_1 abrollen.

Würde nämlich der kleinere Kreis ebenfalls ohne Schlupf rollen, so würden, wenn sich der für beide Kreise gemeinsame Mittelpunkt etwa bei O' befindet, gleichzeitig zwei momentane Drehzentren existieren.

Dies würde aber bedeuten, dass die Bahngeschwindigkeit des Punktes M' sowohl auf PM' als auch auf P_1M' senkrecht steht. Dies ist aber unmöglich. Überdies stellen wir fest, dass der kleinere Kreis mit positivem Schlupf abrollt, weil immer die Beziehung $M_1P_1 = MP = \widehat{PM'}$ gilt und somit $M_1P_1 > \widehat{P_1M'_1}$ ist.

Würden wir voraussetzen, dass der kleinere Kreis auf M_1N_1 ohne Schlupf abrollt, so rollt der mit ihm gekoppelte große Kreis mit negativem Schlupf.

Zu denselben Ergebnissen gelangen wir ganz einfach auch folgendermaßen. Rollt der große Kreis in Abb. 24 so, dass bei einer beliebigen Lage $MP = \widehat{PM'}$ ist, so gilt für

den kleineren Kreis $M_1P_1 > \widehat{P_1M'_1}$.

Es besteht nämlich die Beziehung $M_1P_1 = \frac{R}{r}\widehat{P_1M'_1}$, wobei R der Radius des großen und r der Radius des kleinen Kreises ist. Somit rollt der kleinere Kreis mit positivem Schlupf ab (der Schlupffaktor ist gleich $\frac{R}{r} > 1$).

Würde der kleine Kreis ohne Schlupf abrollen, so müsste der größere mit einem negativen Schlupf rollen (hier ist der Schlupffaktor gleich $\frac{r}{R} < 1$).

Zu dem Hinweis auf S. 30. Wir betrachten zwei konzentrische und durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehende n -Ecke $A_1A_2\dots A_n$ und $a_1a_2\dots a_n$ mit dem gemeinsamen Mittelpunkt O (Abb. 34; hier ist $n = 8$; für das größere n -Eck sind die Bezeichnungen von Abb. 25 beibehalten worden).

Angenommen, das große n -Eck werde so gedreht, wie es beschrieben wurde: Zuerst bleibt die Ecke A_2 fest, indem sie solange als Drehzentrum auftritt, bis sich das n -Eck um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gedreht hat (wir erinnern uns vergleichsweise daran, dass bei der Drehung des Kreises der untere Punkt ebenfalls Drehzentrum war, wenn auch nur für einen gewissen Zeitpunkt). Nach dieser Drehung liegt die Seite A_2A_3 des großen Vielecks auf der Geraden (sie ist in Abb. 34 mit $A_2A'_3$ bezeichnet) und schließt sich an die Anfangslage von A_1A_2 an. Auf diese Weise wird schließlich der Umfang des n -Ecks auf die Gerade "abgewickelt".

Ganz anders bewegt sich dabei das mit dem großen verbundene kleine n -Eck: Es dreht sich ebenfalls mit A_2 als Drehzentrum um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$. Die Seite a_2a_3 geht hierbei in die Lage $a'_2a'_3$ über, schließt sich aber nicht an die Seite a_1a_2 an.

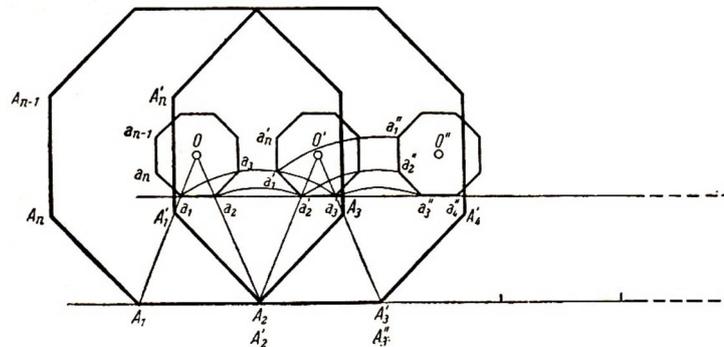


Abb. 34

Im Gegensatz zum n -Eck $A_1A_2\dots A_n$, das nur abrollt, "springt" und "rollt" das n -Eck $a_1a_2\dots a_n$ gleichzeitig. Abb. 34 zeigt zwei Lagen des großen und drei des kleinen n -Ecks. Dabei sind die Anfangsbogen der Bahnkurven für die Ecken a_1 , a_2 und a_3 eingezeichnet.

Jeder der eingezeichneten Teile der Bahnkurve wird durch zwei Kreisbögen der Länge $\frac{2\pi}{n}$ gebildet. Betrachten wir z.B. die Ecke a_2 .

Hier haben wir die Bögen $\widehat{a_2a'_2}$ mit dem Zentrum A_2 und $\widehat{a'_2a''_2}$ mit dem Zentrum A'_3 . Wie bei Abb. 25 raten wir dem Leser, auf gewisse Besonderheiten der Abb. 34, wie sie sich aus dem dort gewählten speziellen Wert $n = 8$ ergeben, nicht zu achten. Es ist vielmehr zweckmäßig, eine andere Zeichnung anzufertigen, etwa für $n = 5$.

Infolge der erwähnten Sprünge "bedeckt" das Vieleck $a_1a_2\dots a_n$ bei seiner Bewegung

längs der Geraden $a_1 a_1^{(n-1)}$ insgesamt eine Strecke, die größer als sein Umfang ist. Die Bewegung des kleinen n -Ecks kann somit näherungsweise als Beispiel für ein Abrollen mit positivem Schlupf angesehen werden.

Der Leser mag selbst klären, wie sich das große n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$ bewegen würde, wenn vorausgesetzt wird, dass das kleine n -Eck $a_1 a_2 \dots a_n$ ohne Schlupf auf der Geraden abrollt.

Man sieht sofort, dass bei jeder Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ (mit einer Ecke des kleinen n -Ecks als Drehpunkt) die entsprechende Seite des großen n -Ecks teilweise die vorhergehende überdeckt, so dass schließlich der bei einer vollen Drehung zurückgelegte Weg kleiner als der Umfang ist. Damit haben wir ein angenähertes Modell für ein Rollen mit negativem Schlupf.

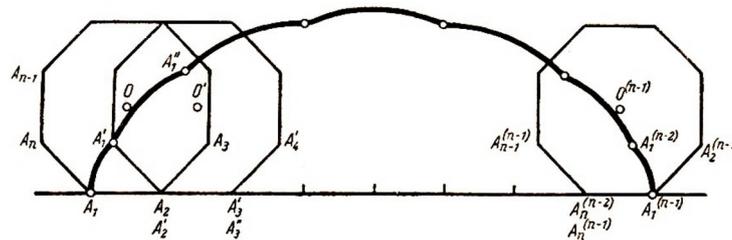


Abb. 35

Zu der gestellten Aufgabe ist zu sagen, dass es genügt, eine Zeichnung und einige Zwischenresultate anzugeben.

In Abb. 35 ist die Bahnkurve $A_1 A_1' A_1'' \dots A_1^{(n-1)}$ der Ecke A_1 des sich drehenden n -Ecks dargestellt, und zwar für den Spezialfall $n = 8$. Die Länge einer solchen aus Kreisbögen zusammengesetzten Kurve ist

$$\frac{2\pi}{n} 2R \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \frac{4\pi R \cos \frac{\pi}{2n}}{n \sin \frac{\pi}{2n}}$$

Die von der Kurve und der Strecke $A_1 A_1^{(n-1)}$ umschlossenen Fläche setzt sich aus den Kreissektoren $A_2 A_1 A_1', A_3 A_1 A_1'', \dots, A_n^{(n-2)} A_1^{(n-2)} A_1^{(n-1)}$ (mit den Zentriwinkeln $\frac{2\pi}{n}$), deren Summe gleich

$$\frac{4\pi R^2}{n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = 2\pi R^2$$

ist, und aus den Dreiecken $A_1' A_2 A_3, A_1'' A_3 A_4, \dots, A_1^{(n-2)} A_{n-1} A_n^{(n-3)}$ zusammen, deren Summe gleich

$$2R^2 \sin \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \sin \frac{(n-2)\pi}{n} \right) = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

ist.

Zu Beispiel 12.

Der logische Fehler ist in der letzten Phase des Beweises enthalten (vor der Bemerkung 1), und zwar besteht der Fehler in der zweifachen Benutzung der Bezeichnung

"Grenzwert". Einmal wird eine Folge von Kurven betrachtet (Streckenzüge mit verschieden vielen Abschnitten), deren Punkte sich unbeschränkt einer gewissen festen Kurve (Grenzkurve) nähern.

Zum anderen ist von einer Zahlenfolge die Rede (die Längen der Streckenzüge), die gegen eine bestimmte feste Zahl konvergiert.

Aus der Tatsache, dass eine Folge von Kurven gegen eine bestimmte Kurve strebt (im Sinne der Annäherung ihrer Punkte), kann nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass die Längen dieser Kurven gegen die Länge der Grenzkurve streben (im Sinne der Konvergenz einer Zahlenfolge).

Sind die einzelnen Abschnitte eines Streckenzuges hinreichend klein, so unterscheidet sich der Streckenzug praktisch kaum noch von einer geradlinigen Strecke. Wir dürfen uns hiervon jedoch nicht verwirren lassen, da es sich keinesfalls um einen geometrischen, sondern um einen physikalischen oder, noch genauer, physiologischen Tatbestand handelt, der von den Eigenschaften unseres Sehvermögens abhängt (ein starkes Mikroskop würde einen ganz anderen Eindruck vermitteln).

Geht man schon einmal vom Standpunkt der Anschauung aus vor, so muss man die Überlegung folgendermaßen genauer fassen. Zweifellos wird in jedem kleinen Dreieck die Differenz zwischen der Summe der Katheten einerseits und der Hypotenuse andererseits beliebig klein. Demgegenüber nimmt die Anzahl dieser kleinen Differenzen fortwährend zu.

Aus hinreichend vielen, wenn auch kleinen Zahlen lässt sich nun aber jede noch so große Zahl erreichen, so dass die Gesamtsumme der Differenzen keinesfalls beliebig klein wird. Um tiefer in das Wesen der Sache einzudringen, hat man zu berücksichtigen, dass die Streckenzüge der Geraden AB wohl hinsichtlich des Abstandes, aber nicht hinsichtlich der Richtung beliebig nahekommen; die einzelnen Abschnitte liegen ja, wie klein sie auch sind, stets horizontal bzw. vertikal, während die Hypotenuse eine dazwischen liegende, schräge Neigung hat.

Zu Beispiel 13.

Der Fehler ist im Prinzip der gleiche wie im vorhergehenden Beispiel. Die Folge der Wellenzüge kommt der Strecke AB beliebig nahe, während die Längen der Wellenzüge nicht gegen die Länge von AB streben.

Wie früher wird hier der Abstand zwischen zwei Kurven beliebig klein, in der Richtung gleichen sie sich aber nicht einander an. Ist AB horizontal, so schwankt die Richtung eines Wellenzuges, wie klein die Kreise auch sind, beständig zwischen der horizontalen und der vertikalen Richtung.

Zu Beispiel 14.

Wenn auch der Sachverhalt hier komplizierter ist als in den letzten beiden Beispielen, so beruht doch dieser Sophismus auf demselben logischen Fehler.

Die Polyeder kommen dem Zylindermantel wohl beliebig nahe, woraus aber keineswegs folgt, dass die Folge der Flächeninhalte der Polyederflächen gegen den Flächeninhalt des

Zylindermantels strebt. Um uns besser den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Approximationen klar zu machen, zeigen wir, dass sich die richtige Formel für den Flächeninhalt ergibt, wenn wir genau dieselbe Konstruktion für die Polyederflächen beibehalten, aber z.B. $n = m$ oder $n = 10m$ setzen.

Allgemein gilt die Behauptung dann, wenn n und m einander proportional sind. Für $n = 10m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} S_m &= 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 400m^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \\ &= 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{25\pi^4 R^2}{m^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4} \end{aligned}$$

so dass sich durch den Grenzübergang für $m \rightarrow \infty$ die richtige Formel

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 2\pi RH$$

ergibt.

Wie lässt es sich erklären, dass für $n = m^2$ bzw. $n = m^3$ die Flächeninhalte S_m der Polyederflächen gegen einen Grenzwert streben, der größer als $2\pi RH$ bzw. sogar unendlich groß ist?

Wir wollen die Antwort hierauf nicht in der präzisen Sprache der Mathematik geben und keinen Beweis führen. Vielmehr begnügen wir uns mit einer mehr anschaulichen Darstellung der Zusammenhänge (die nach einer Übertragung in die mathematische Sprache durchaus als Grundlage eines Beweises dienen könnte).

Ist $n = m$ oder $n = 10m$ usw., so wächst die Dichte der Teilpunkte auf dem Kreis genauso schnell wie die Dichte der Teilpunkte auf der Höhe; daher besitzt die Polyederfläche, die nicht konvex ist, immerhin nahezu senkrechte Seitenflächen (wenn der Zylinder selbst senkrecht steht!).

Dem Leser empfehlen wir, unter Benutzung von Abb. 32 zu beweisen, dass die Fläche MNP mit der horizontalen Ebene MKN einen Winkel einschließt, der mit $m \rightarrow \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt.

So nähern sich die Polyederflächen nicht nur hinsichtlich des Abstandes, sondern auch hinsichtlich der Richtung dem Zylindermantel.

Ein ganz anderes Bild entsteht demgegenüber für $n = m^2$ und $n = m^3$ usw. Hier ist die Unterteilung der Höhe bei weitem feiner als die des Kreisumfangs. Demzufolge ist die Polyederfläche stärker "gefaltet", wodurch zusätzliche Flächeninhalte entstehen.

Die Dreiecke streben nun nicht mehr gegen die senkrechte Lage. Ist $n = m^2$, so lässt sich zeigen, dass für $m \rightarrow \infty$ der Winkel PLK (Abb. 32) gegen einen bestimmten spitzen Winkel strebt, während er bei $n = m^3$ gegen Null geht (die Grenzlage der Dreiecke ist hier horizontal).

Zum Abschluss wollen wir noch eine Frage untersuchen, die sich naturgemäß ergibt. Weshalb findet der einer Kurve einbeschriebene Polygonzug nicht sein Analogon in

einem einer krummen Fläche einbeschriebenen Polyeder, d.h., weshalb ist im ersten Fall durch das Zusammenrücken der Ecken die Annäherung der Kanten sowohl in Bezug auf den Abstand als auch in Bezug auf die Richtung gewährleistet, während im zweiten Fall der Abstand beliebig klein wird, ohne dass eine Angleichung der Richtungen stattfindet ?

Ohne weiter auf Einzelheiten einzugehen, wollen wir hier folgendes sagen.

Strebt auf einer "glatten" Kurve²¹ ein beweglicher Punkt gegen einen festen, so hat die diese beiden Punkte verbindende Sehne als Grenzlage die Tangente im festen Punkte an die Kurve. Streben auf einer gekrümmten Fläche zwei Punkte gegen einen festen dritten, und zwar so, dass die drei Punkte niemals auf einer Geraden liegen, so strebt die durch diese drei Punkte festgelegte Ebene nicht notwendig gegen die tangierende Ebene.

Um dies einzusehen, betrachten wir einen beliebigen ebenen Schnitt einer Kugel. Die Schnittkurve ist offenbar ein Kreis. Auf diesem Kreis denken wir uns einen festen Punkt und zwei andere Punkte, die sich dem festen Punkt unbegrenzt nähern. Die durch diese drei Punkte festgelegte Ebene ist dann sicher die Schnittebene, die keinesfalls Tangentialebene an die Kugel zu sein braucht.

Zu Beispiel 15.

Es liegt hier der Fall vor, dass Begriffe benutzt wurden, die keinen mathematischen Sinn haben ("sehr große Zahl", "sehr schmales Dreieck", "kleiner Bogen", "unendlich schmales Dreieck").

Vor der Benutzung eines solchen Begriffes braucht man sich nicht zu scheuen, wenn eine geometrische Figur anschaulich beschrieben werden soll (was im Vorhergehenden keinesfalls der Zweck war), sicher aber darf er dann nicht benutzt werden, wenn ein Satz zu beweisen oder eine Formel herzuleiten ist.

Der Fehler besteht in der Behauptung, dass man ein unendlich schmales gekrümmtes Dreieck ohne Verzerrung auf eine Ebene legen kann. Tatsächlich kann man kein sphärisches Dreieck, wie klein es auch sei, im oben beschriebenen Sinne auf eine Ebene abwickeln. Das ist schon daraus zu ersehen, dass die Summe der Winkel im ebenen Dreieck immer gleich π ist, während sie bei einem sphärischen Dreieck immer größer als π ist.

Bei unserem Beispiel sind im sphärischen Dreieck PAB (Abb; 33 b) die Winkel bei A und B rechte; würde man ein solches Dreieck ohne Verzerrung auf eine Ebene legen können, so erhielte man ein ebenes gleichschenkliges Dreieck (Abb. 33a) mit zwei rechten Basiswinkeln.

²¹Unter "glatten" Kurven versteht man Kurven, bei denen die Grenzlage der Sekante als Tangente stets existiert; der allgemeine Kurvenbegriff ist viel umfassender. - Anm. d. Herausgebers.