AKADEMIE DER PÄDAGOGISCHEN WISSENSCHAFTEN DER DDR
Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen
Unterricht
Forschungsgruppe Physik/Astronomie

Physik, Ergänzungen für Klassen 9 und 10

Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung

Lösungsheft

Herausgeber: Dr. Christian Hache

(Als Manuskript gedruckt)

- 1988 -

1. Elektrizitätslehre

1.1. Gleichstromkreis

1.1.1. Für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes gilt:

$R = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$

$R = 120(1+0{,}0039 \cdot 50)\,\Omega$

$\underline{\underline{R = 144\,\Omega}}$

Da der Querschnitt relativ stärker zunimmt als die Länge, müßte R sogar kleiner werden.

1.1.2. Im Stromkreis fließt der Strom $I = U_o/(R_i + R_K + R_{Cu})$.

Wegen $R_i \ll R_K$ und $R_i \ll R_{Cu}$ gilt $I = U_o/(R_K + R_{Cu})$.

Damit erhält man für die Spannungsabfälle:

$U_K = U_o \cdot R_K/(R_K + R_{Cu})$ und $U_{Cu} = U_o - U_K$

$$U_K = \frac{U_o}{\frac{R_{Cu}}{R_K} + 1}$$

$\underline{\underline{U_K = 4{,}54\ \mathrm{V}}}$ und $\underline{\underline{U_{Cu} = 5{,}46\ \mathrm{V}}}$

Bei 100 °C ist zu berücksichtigen, daß für die Widerstände jeweils $R = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$ gesetzt werden muß.
Man erhält jetzt:

$\underline{\underline{U_K = 3{,}89\ \mathrm{V}}}$ und $\underline{\underline{U_{Cu} = 6{,}11\ \mathrm{V}}}$

1.1.3. a) Die drei Widerstände haben den Gesamtwiderstand

$R_g = R_1 + R_2 \cdot R_3/(R_2 + R_3)$

Für U_1 erhält man nach der Spannungsteilerregel

$U_1/U_g = R_1/R_g$ $\underline{\underline{U_1 = 3{,}0\ \mathrm{V}}}$

b) Für I_1 gilt nach dem ohmschen Gesetz $I_1 = U_1/R_1$

oder wegen $I_1 = I_g$ auch $I_1 = U_g/R_g$

$\underline{\underline{I_1 = 0{,}06\ \mathrm{A}}}$

Für I_2 erhält man nach dem ohmschen Gesetz
$I_2 = U_2/R_2$ und nach dem Maschensatz $U_2 = U_g - U_1$, damit

$I_2 = (U_g - U_1)/R_2$ $\quad$ $\underline{\underline{I_2 = 0{,}04\ \mathrm{A}}}$

Nach dem Knotensatz gilt $I_1 = I_2 + I_3$ und damit

$I_3 = I_1 - I_2$ $\quad$ $\underline{\underline{I_3 = 0{,}02\ \mathrm{A}}}$

1.1.4. a) Für den Ersatzwiderstand R_{AB} ergibt sich:
Die Reihenschaltungen $R_1 + R_3$ und $R_2 + R_4$ liegen jeweils parallel zu R_5. Deshalb gilt

$1/R_{AB} = 1/(R_1 + R_3) + 1/(R_2 + R_4) + 1/R_5$

$\underline{\underline{R_{AB} = 33{,}3\ \Omega}}$

b) Zwischen den Punkten B und C ergibt sich:
R_4 liegt parallel zur Reihenschaltung aus R_2 und der Parallelschaltung R_5 mit $(R_1 + R_3)$. Also gilt:

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + \dfrac{R_5 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 + R_5}}$$

$\underline{\underline{R_{BC} = 33{,}3\ \Omega}}$

1.1.5. Für die Ersatzspannungsquelle ergibt sich der Innenwiderstand aus der Parallelschaltung von R_1 und R_2

$R_i = R_1 \cdot R_2/(R_1 + R_2)$ $\quad$ $\underline{\underline{R_i = 33{,}3\ \Omega}}$

U_0 als Leerlaufspannung der Ersatzquelle entspricht dem Spannungsabfall über R_2

$U_0 = R_2 \cdot I$ mit $I = U/(R_1 + R_2)$ ergibt

$$U_0 = \frac{R_2 \cdot U}{R_1 + R_2} \qquad U_0 = \frac{U}{\dfrac{R_1}{R_2} + 1} \qquad \underline{\underline{U_0 = 1{,}0\ \mathrm{V}}}$$

1.1.6. $R_i = R_{i1} \cdot R_{i2}/(R_{i1} + R_{i2})$ $\underline{\underline{R_i = 0{,}33\ \Omega}}$

Die Urspannung der Ersatzquelle entspricht der zwischen den Klemmen A und B auftretenden Leerlaufspannung, die man mit Hilfe des Maschensatzes findet. Dabei wird die Parallelschaltung der beiden realen Quellen als geschlossene Masche betrachtet (Polung der Quellen beachten).

In der Masche fließt der Strom $I = (U_{o1} + U_{o2})/(R_{i1}+R_{i2})$ (mit $U_{o1} = -2{,}0$ V) $\underline{\underline{I = 1{,}33\ A}}$

Im Leerlauf tritt an den Klemmen A B die Spannung U_{o2} vermindert um den Spannungsabfall $R_{i2} \cdot I$ auf:

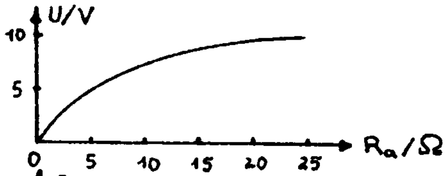
$U_o = U_{o2} - R_{i2} \cdot I$ $\underline{\underline{U_o = 3{,}33\ V}}$

Wird an diese Schaltung der Lastwiderstand R_a angeschlossen, so gilt nach den Gesetzen des Grundstromkreises

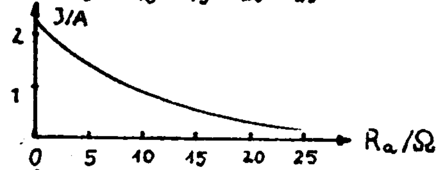
$$U = U_o - \frac{U_o}{R_i + R_1} R_i \qquad \underline{\underline{U = 3{,}12\ V}}$$

1.1.7.

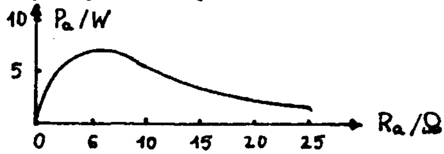
$$U(R_a) = \frac{U_o}{1 + \frac{R_1}{R_a}}$$



$$I(R_a) = \frac{U_o}{R_i + R_a}$$



$$P_a(R_a) = \frac{U_o^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

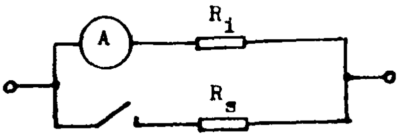


1.1.8. a) Wegen $R_i \ll R_{AE}$ und $R_{iV} \gg R_{AS}$ gilt in guter Näherung

$U_{AS} = \frac{1}{2} U_o$, $\underline{\underline{U_{AS} = 2{,}25\ V}}$

b) Durch Parallelschalten des Widerstandes 100 Ω zu R_{AS} ergibt sich $R_p = 83{,}3\ \Omega$ und nach der Spannungsteilerregel $U_{AS} = (83{,}3/583{,}3) \cdot U_o = \underline{\underline{0{,}64\ V}}$

1.1.9. a)



b) Mit $n = 0{,}1\ A/0{,}01\ A = 10$ folgt aus Stromleiterregel und Knotensatz

$R_s = R_i/(n - 1)$

$R_s = \underline{\underline{22{,}2\ \Omega}}$

Für die Leistung ergibt sich $P = I_s^2 \cdot R_s = \underline{\underline{0{,}18\ W}}$

c) Aus $R = \varrho \cdot l/A$ folgt

$l = R \cdot \pi \cdot d^2/(4 \cdot \varrho)$

$\underline{\underline{l = 34{,}9\ m}}$

1.1.10. Die Ersatzschaltung des aktiven Zweipols (Spannungsquelle) hat den Innenwiderstand $R_i = R_1//R_2 + R_3//R_4$

$= (25 + 33{,}3)\ \Omega$

$= \underline{\underline{58{,}3\ \Omega}}$

und die Leerlaufspannung (Differenzspannung zwischen den Mitten der Spannungsteiler R_1, R_2 und R_3, R_4)

$U_o = 1{,}5\ V - 1{,}0\ V = \underline{\underline{0{,}5\ V}}$

Der gesuchte Strom durch das Amperemeter ist dann:

$I = U_o/(R_i + R_A)$

$= \underline{\underline{8{,}3\ mA}}$

1.2. Elektro- und Magnetostatik

1.2.1. a) $F = \dfrac{e^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$

$\underline{\underline{F = 23\ \text{nN}}}$

b) $E = \dfrac{e}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$

$\underline{\underline{E = 1{,}44 \cdot 10^{11}\ \text{V/m}}}$

1.2.2. $\dfrac{Q^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = k \cdot x$

Daraus folgt

$$Q = r \cdot \sqrt{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot kx}$$

$\underline{\underline{Q = 3{,}34\ \text{nC}}}$

1.2.3. Die Coulombkraft wird um den Faktor 64 größer!

1.2.4. Die Kugeln entfernen sich auf den Abstand 2 l.

1.2.5. Im Vakuum gilt

$$\frac{3\,Q^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1^{\,2}} = F$$

Im Wasser gilt

$$\frac{3\,Q^2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_2^{\,2}} = F$$

Daraus erhält man:

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$\underline{\underline{r_2 = 3{,}33\ \text{cm}}}$

Die Angabe der Wechselwirkungskraft ist nicht nötig!

1.2.6. Es findet ein Ladungsausgleich statt

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

$\underline{Q = 50\ \text{nC}}$

Mit dem Coulombschen Gesetz erhält man

$\underline{\underline{F = 2{,}3\ \text{mN}}}$

1.2.7. $Q = C \cdot U \qquad C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$

$$Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A \cdot U}{d} \qquad \underline{\underline{Q = 1{,}33\ \mu C}}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} QU \qquad \underline{\underline{E_{el} = 99{,}67\ \mu Ws}}$$

1.2.8. $E = \frac{1}{2} C \cdot U^2$ mit $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3+C_4+C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7+C_8+C_9+C_{10}}$

$$\underline{\underline{E_{el} = 50\ \mu Ws}}$$

1.2.9. $U = \frac{Q}{C}$ Gemäß Schaltung ist $C = \frac{2}{3}\ \mu F$

$$\underline{\underline{U = 30\ V}}$$

1.2.10. Es gilt $Q = (C_1 + C_2) \cdot U$

Daraus folgt: $C_2 = \frac{Q}{U} - C_1 \qquad \underline{\underline{C_2 = 4\ \mu F}}$

1.2.11. Es gilt:

$$Q = Q_1 = Q_2 = U \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \qquad \underline{\underline{Q = 120\ \mu C}}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \qquad \underline{\underline{\frac{Q_1}{Q_2} = 1}}$$

$$\underline{\underline{U_1 = 60\ V}} \qquad \underline{\underline{U_2 = 40\ V}}$$

1.2.12. Es gilt: $Q_1 = C_1 \cdot U_1$ und $Q_2 = C_2 \cdot U_2$

Nach dem Zusammenschalten gilt:

$C = C_1 + C_2$, $Q_a = Q_1 + Q_2$ und $Q_b = Q_2 - Q_1$

damit erhält man:

$$U_a = \frac{C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2}{C_1 + C_2} \qquad U_b = \frac{C_2 \cdot U_2 - C_1 \cdot U_1}{C_1 + C_2}$$

$$\underline{\underline{U_a = 132\ V}} \qquad \underline{\underline{U_b = 12\ V}}$$

1.2.13. $Q_1 = C_1 \cdot U_1$, $Q_2 = C_2 \cdot U_2$, $Q_g = Q_1 + Q_2$,

$C_g = C_1 + C_2$

Mit $U = Q_g / C_g$ erhält man:

$U_{M1} = \frac{1}{3}(U_1 + 2U_2)$ $\underline{\underline{U_{M1} = \frac{40}{3}\ V}}$

$U_{M2} = \frac{(U_1 + 2U_2)}{(\varepsilon_r + 2)}$ $\underline{U_{M2} = \frac{10}{3}\ V}$ $\underline{\underline{\Delta U = 10\ V}}$

1.2.14. Es muß gelten

$m \cdot g = U \cdot n \cdot e/d$

mit $m = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \varrho$ erhält man

$n = 4\pi \cdot r^3 \cdot \varrho \cdot g \cdot d/(3eU)$

$\underline{\underline{n = 329}}$

1.2.15. $I = F/(B \cdot l)$ $\underline{\underline{I = 1\ A}}$

1.2.16. $F = e \cdot v \cdot B$

a) $\underline{\underline{F = 9{,}6 \cdot 10^{-16}\ N}}$

b) $Q = n \cdot e$, $F = Q \cdot v \cdot B$

$n = F/(e \cdot v \cdot B)$

$\underline{\underline{n = 10^{12}}}$

1.2.17. $\underline{\underline{H = 15\,000\ A/m}}$ $\underline{\underline{B = 5{,}65\ T}}$

1.2.18. Mit $Q = 2e$, $B = \mu_0 \cdot I \cdot N/l$ und $F = Q \cdot v \cdot B$ erhält man

$v = F \cdot l/(2e \cdot \mu_0 \cdot I \cdot N)$

$\underline{\underline{v = 6{,}24 \cdot 10^6\ m/s}}$

1.3. Elektromagnetische Induktion

1.3.1. Der Metallkörper fällt langsamer, da in ihm ein Induktionsvorgang (Wirbelströme) das Fallen bremst.

1.3.2. Es gilt:

a) $U_i = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot A}{l} \cdot N_2 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$

$\underline{\underline{U_i = 0{,}062 \text{ V}}}$

b) $U_i = - L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$ $\qquad \underline{\underline{U_i = 37 \text{ mV}}}$

1.3.3. $U_i = l \cdot v \cdot B$ $\qquad \underline{\underline{U_i = 0{,}74 \text{ V}}}$

1.3.4. Aus dem Induktionsgesetz folgt:

$A = \frac{U_i \cdot \Delta t}{N \cdot \Delta B}$ $\qquad \underline{\underline{A = 1 \text{ m}^2}}$

1.3.5. Erklärung mittels Induktionsgesetz und Lenzschem Gesetz!

1.3.6. Wirbelströme rufen die Erwärmung hervor.

1.3.7. Aus $U_i = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$ und $L = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{N^2 \cdot A}{l}$ ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{\Delta I \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot A}{l \cdot U_i} \qquad \underline{\underline{\Delta t = 10 \text{ ms}}}$$

1.3.8. Aus

$U_2 = \frac{U_1 \cdot N_2}{N_1}$ folgt $\underline{\underline{U_2 = 66 \text{ V}}}$

und aus

$I_2 = \frac{U_1 \cdot I_1}{U_2 \cdot \eta}$ $\qquad \underline{\underline{I_2 = 6{,}67 \text{ A}}}$

1.3.9. Aus

$$I_1 = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1} \quad \text{ergibt sich} \quad \underline{\underline{I_1 = 112 \text{ mA}}}$$

1.3.10. Es gilt $E_{Verlust} = P_1 \cdot t - P_2 \cdot t$

mit $P_2 = \eta \cdot P_1 = U_1 \cdot I_1$ erhält man

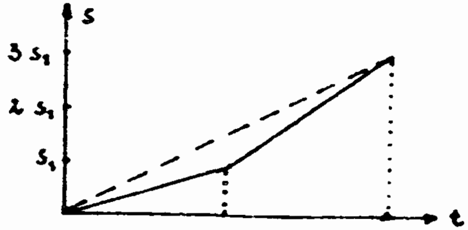
$E_{Verl.} = t \cdot U_1 \cdot I_1(1 - \eta)$

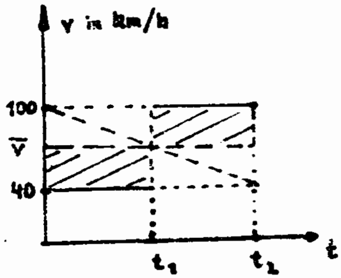
$\underline{\underline{E_{Verl.} = 39{,}6 \text{ kWs}}}$

1.3.11. Beobachten des Amperemeters und Erklären des Verhaltens (Stromabnahme) mittels Induktionsgesetz und Lenzschem Gesetz.

2.1. Kinematik

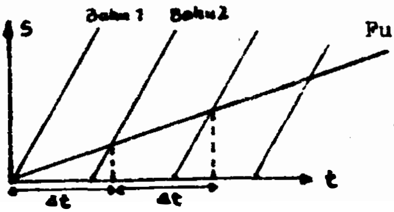
2.1.1. $v = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{s/3v_1 + 2s/3v_2} = \frac{3v_1 \cdot v_2}{v_2 + 2v_1} = \underline{\underline{66,6 \text{ km/h}}}$





Die Fläche zwischen t_1 und t_2 unter $v_2 = 100$ km/h muß doppelt so groß konstruiert werden, wie die Fläche zwischen $t = 0$ und t_1 unter $v_1 = 40$ km/h. Um $\bar{v}$ zu erhalten, müssen die schraffierten Flächen flächengleich konstruiert werden.

2.1.2.



Δt ... Zeitabstände des Begegnens

Aus grafischer Darstellung folgt:

$v_2 \cdot \Delta t = v_1(-t + \Delta t)$ v_1... Geschw. der Bahn

v_2... Geschw. des Fußgängers

Damit gilt für Δt:

$$\Delta t = \frac{v_1 \cdot t}{v_1 - v_2} = 353 \text{ s} = \underline{\underline{5,88 \text{ min}}}$$

Analog gilt für die stadtauswärts fahrenden Bahnen:

$$\Delta t' = \frac{v_1 \cdot t}{v_1 + v_2} = 261 \text{ s} = \underline{\underline{4,35 \text{ min}}}$$

2.1.3. $v_1 + v_2 = s/t_1$

$v_1 - v_2 = s/t_2$

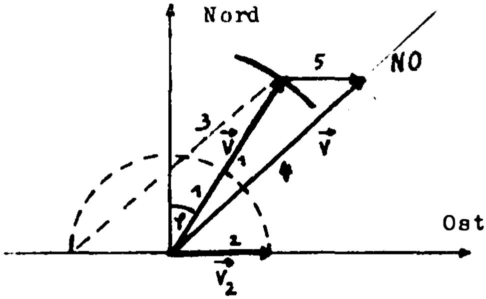
$v_2 = s/t_3$

Mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten folgt

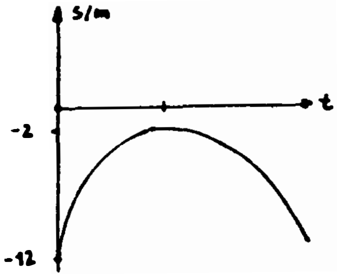
$$t_3 = \frac{2t_1 \cdot t_2}{t_2 - t_1} = \underline{\underline{15,6\ s}}$$

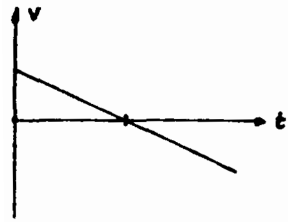
2.1.4. Lösungshinweis: Man zeichne zuerst das Achsenkreuz, dann die nordöstliche Richtung und einen Kreisbogen mit $r = v_1$ um den Koordinatenursprung. Dann trage man nacheinander die Stücke 1, 2, 3, 4 und 5 ein. Dabei ist Stück 3 parallel zur nordöstlichen Richtung.

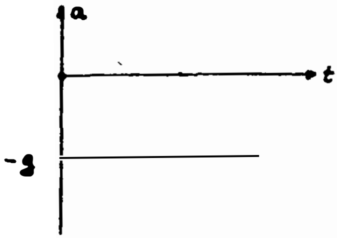
Der Winkel γ zum Meridian beträgt ungefähr 40° und $v = 649$ km/h



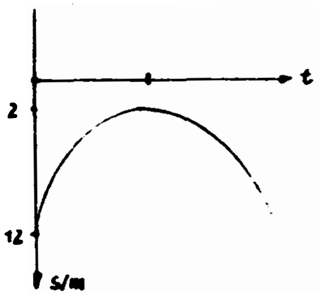
2.1.5. positive Richtung nach oben

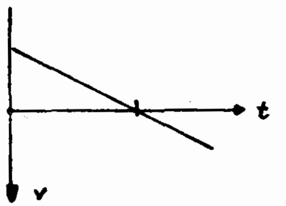


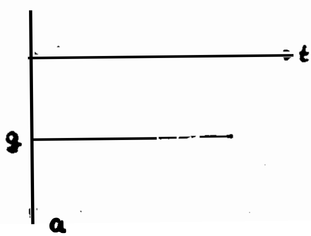




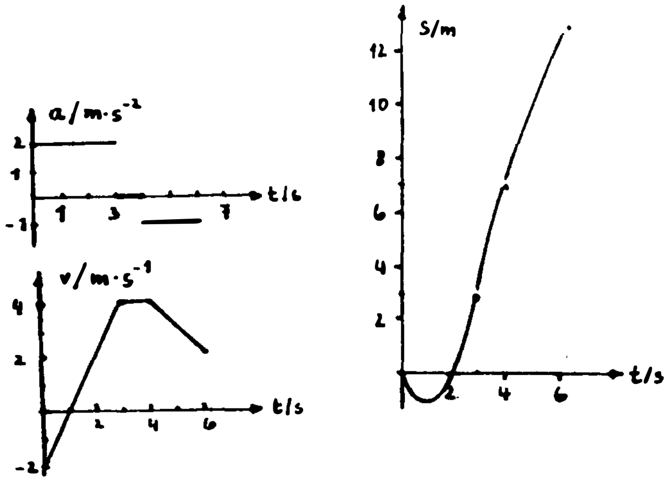
positive Richtung nach unten







2.1.6.



$v = v_0 + a_1 \cdot t$ $\qquad v_0 = -2ms^{-1}$

$x = v_0 \cdot t + \frac{a_1}{2} t^2$ $\qquad a_1 = 2ms^{-2}$

$0 \leqq t \leqq 3s$

$v = konst = v_0'$ $\qquad x_0' = 3\ m$

$x = v_0' \cdot (t - 3s) + x_0'$ $\qquad v_0' = 4\ ms^{-1}$

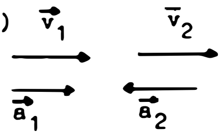
$3s \leqq t \leqq 4s$

$v = v_0' + a_2(t - 4s)$ $\qquad a_2 = -1ms^{-2}$

$x = x_0'' + v_0' \cdot (t - 4s) + \frac{a_2}{2}(t - 4s)^2$ $\qquad x_0'' = 7\ m$

$4s \leqq t \leqq 6s$

2.1.7. a)

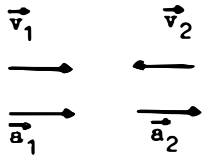


$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ gleichgerichtet

$$v = v_1 + a_1 \cdot t = v_2 - a_2 \cdot t$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a_1 + a_2} \quad ; \quad v_2 > v_1$$

b)



$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ entgegengesetzt gerichtet

$$v = v_1 + a_1 t = -v_2 + a_2 \cdot t$$

$$t = \frac{v_1 + v_2}{a_2 - a_1} \quad ; \quad a_2 > a_1$$

2.1.8. Wenn der Körper aus dem Ballon geworfen wird, hat er eine senkrechte v-Komponente von $v_1 = a_1 \cdot t_1$, $a_1 = 2 ms^{-2}$, $t_1 = 5 s$ und er befindet sich in der Höhe

$$h_1 = (a_1/2) \cdot t_1^2$$

Damit liegt für die Vertikalrichtung ein senkrechter Wurf nach oben aus der Höhe h_1 vor, der nicht durch v_o gestört wird, da v_o keine Komponente in senkrechter Richtung hat.

Es folgt für die Zeit t bis zum Auftreffen auf die Erde:

$$t = \frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{2(h_1 + v_1^2/(2g))}{g}}$$

$$t = \frac{v_1}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{2h_1 g + v_1^2}$$

$$t = \frac{a_1 t_1 + \sqrt{a_1 \cdot t_1^2 \cdot g + (a_1 \cdot t_1)^2}}{g} .$$

$\underline{\underline{t = 3,5 \ s}}$ mit $g = 9,81 \ ms^{-2}$

2.1.9. Im mitbewegten Bezugssystem des 1. Körpers gilt: Körper 2 besitzt eine relative Beschleunigung $a_0 = a_2 - a_1$ und die relative Geschwindigkeit $v_0 = v_1 + v_2$

Damit gilt: $x = x_0 + (-v_0) \cdot t + (a_0/2) \cdot t^2$, $x_0 = 80$ m

Treffen sich die Körper, dann gilt: $x = 0$

Damit folgt für die Treffzeiten

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{a_0} \pm \frac{1}{a_0} \cdot \sqrt{v_0^2 - 2a_0 \cdot x_0}$$

$t_1 = 20$ s , $t_2 = 80$ s

Es gilt: $x_{1,t_1} = v_1 \cdot t_1 + (a_1/2) \cdot t_1^2 = 80 \text{ m} + 20 \text{ m} = 100 \text{ m}$

x_{1,t_1}... Ort zum Zeitpunkt t_1, gerechnet vom 1. Körper aus, wenn dieser einen Abstand von 80 m zum 2. Körper hat.

$$x_{1,t_2} = v_1 \cdot t_2 + (a_1/2) \cdot t_2^2 = 640 \text{ m}$$

Für die zurückgelegten Wege gilt:

$s_{1,t_1} = x_{1,t_1} = 100$ m , $s_{1,t_2} = x_{1,t_2} = 640$ m

Der Körper 2 läuft zuerst dem Körper 1 entgegen, verringert seine Geschwindigkeit bis auf Null und holt dann den 1. Körper wieder bei $x_{1,t_1} = 100$ m und $x_{1,t_2} = 640$ m ein.

Da der 2. Körper um den Weg $s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2} = 2{,}5$ m zurückläuft, ergibt sich für den insgesamt zurückgelegten Weg

$s_{2,t_1} = 25$ m $\qquad s_{2,t_1} = x_{1,t_1} - x_0 + 2s_2$

$s_{2,t_2} = 565$ m $\qquad s_{2,t_2} = x_{1,t_2} - x_0 + 2s_2$

Anmerkung: Bei x_{1,t_1} wird eigentlich der 2. Körper vom ersten Körper erst einmal überholt.

2.1.10. Wenn der Radfahrer auf der Bahn mit r_1 den äußeren auf Bahn 2 mit r_2 einholt, gilt: $\omega_1 > \omega_2$

$\omega' = \omega_1 - \omega_2 \qquad \omega' = \frac{2\pi}{t_1}$, t_1 = 40 min = 240 s

$\omega'' = \omega_1 + \omega_2 \qquad \omega'' = \frac{2\pi}{t_2}$, t_2 = 48 s

Es folgt

$$\frac{\omega' + \omega''}{2} = \omega_1$$

$$\frac{\omega'' - \omega'}{2} = \omega_2$$

Mit $v_1 = \omega_1 \cdot r_1$ folgt $v_1 = \left(\frac{\pi}{t_1} + \frac{\pi}{t_2}\right) \cdot r_1$

$$\underline{\underline{v_1 = 7{,}1\ \mathrm{ms}^{-1}}}$$

Mit $v_2 = \omega_2 \cdot r_2$ folgt $v_2 = \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right) \cdot \pi \cdot r_2$

$$\underline{\underline{v_2 = 5\ \mathrm{ms}^{-1}}}$$

Wenn der Radfahrer auf der Bahn 2 mit r_2 den inneren auf Bahn 1 mit r_1 einholt, gilt: $\omega_2 > \omega_1$

$\omega' = \omega_2 - \omega_1$ und damit $\omega_1 = \frac{\omega'' - \omega'}{2}$

$\omega'' = \omega_1 + \omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{\omega' + \omega''}{2}$

Damit gilt: $\underline{\underline{v_1 = \omega_1 \cdot r_1 = \left(\frac{\pi}{t_2} - \frac{\pi}{t_1}\right) \cdot r_1 = 4{,}7\ \mathrm{ms}^{-1}}}$

und $\underline{\underline{v_2 = \omega_2 \cdot r_2 = \left(\frac{\pi}{t_2} + \frac{\pi}{t_1}\right) \cdot r_2 = 7{,}5\ \mathrm{ms}^{-1}}}$

2.2. Dynamik

2.2.1. Mit $F = m \cdot a$ folgt $a = F/m$ und damit

$$a = \frac{m_3 g - \mu(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}75 \text{ ms}^{-2}$$

Für die Reaktionskraft im Faden folgt

$F_R = m_1 a + \mu \cdot m_1 \cdot g = 4{,}7$ N bzw.

$F_R = m_3(g-a)-(a + \mu g)m_2 = \underline{\underline{4{,}7 \text{ N}}}$

2.2.2. 1. Lösungsweg:

Es gilt: $m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - m_2 g = F_R \approx 0{,}49$ N

$2_{m1} \cdot g \cdot \sin \quad - 2F_R - m_2 \cdot g = a \cdot (2m_1 + m_2)$

damit folgt

$$a = \frac{m_2 \cdot g}{2m_1 + m_2} \qquad \underline{\underline{1{,}4 \text{ ms}^{-2}}}$$

2. Lösungsweg:

Es gilt: $\mu = F_R/F_N = \dfrac{m_1 \cdot g \cdot \sin \quad - m_2 \cdot g}{m_1 \cdot g \cdot \cos} \qquad 0{,}19$

Ferner gilt: $2m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot F_N - m_2 \cdot g =$
$a \cdot (2m_1 + m_2)$

Mit $F_N = 2m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$ und dem obigen Ausdruck für μ folgt

$$a = \frac{m_2 \cdot g}{2m_1 + m_2} = \underline{\underline{1{,}4 \text{ ms}^{-2}}}$$

2.2.3. Die Bewegung durch F kann sowohl hangaufwärts als auch hangabwärts erfolgen, oder der Körper wird durch F nur auf der Ebene gehalten.

Bestimmung der Grenzfälle

a) Berechnung der minimalen Kraft F_{min} bei der der Körper nicht mehr hangaufwärts beschleunigt werden kann.

Es gilt: $F \cdot \cos\alpha - mg \sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) = 0$

$$F_{min} = \frac{mg \cdot \sin\alpha + \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} = 1{,}0056 \cdot 10^2 \text{N} = \underline{\underline{100{,}6 \text{ N}}}$$

b) Berechnung der maximalen Kraft F_{max} die aufgewendet werden muß, um den Körper auf der Ebene zu halten

Es gilt: $F\cos\alpha - mg\sin\alpha + \mu\cdot(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) = 0$

$$F_{max} = \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 0{,}6689\cdot10^2\ \text{N} = \underline{\underline{66{,}89\ \text{N}}}$$

Damit ergibt sich, daß bei $F = 150$ N der Körper nach oben beschleunigt wird und bei $F = 50$ N beschleunigt abwärts gleitet.

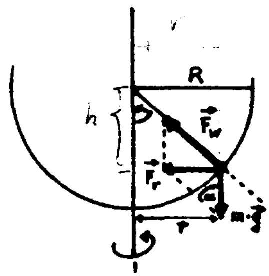
$$F = 150\text{N}:\ a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)}{m}$$

$$\underline{\underline{a = 3{,}5\ \text{ms}^{-2}}}$$

$$F = 50\text{N}:\ a = F_{res}/m = \frac{mg\sin\alpha - F\cos\alpha - \mu\cdot(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)}{m}$$

$$\underline{\underline{a = -1{,}4\ \text{ms}^{-2}}}$$

4. Vom Standpunkt des ruhenden Beobachters aus werden auf die Kugeln folgende Kräfte wirken:
Die Gewichtskraft als Wechselwirkungskraft mit der Erde und eine Wechselwirkungskraft von der Kugelschwebe auf die Kugel.

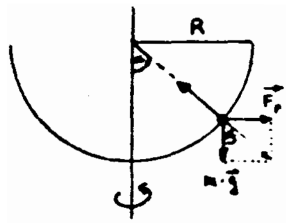


Diese beiden Kräfte müssen die Radialkraft aufbringen, die die Kugel auf die Kreisbahn zwingt. Das heißt, die Vektorsumme von $\vec{F}_W$ und $m\vec{g}$ muß eine horizontale Richtung haben.

Nun gilt: $\tan\alpha = \frac{F_r}{mg} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{mg} = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$

Damit hängt die Höhe nicht von der Masse der Kugeln ab.

Für das mitbewegte Bezugssystem gilt:
Auf die Kugeln wirken die Gewichtskraft $m\vec{g}$ und die Fliehkraft $\vec{F}_F$. Soll die Kugel in Ruhe bleiben, muß die Vektorsumme von Gewichtskraft und Fliehkraft senkrecht auf die Kugelschwebe wirken.

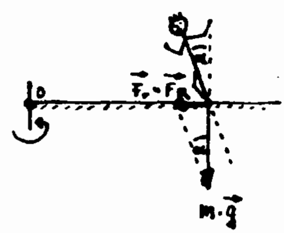


$$F_F = m\cdot\omega^2\cdot r$$

Damit gilt wieder $\tan\alpha = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$

2.2.5. Die Lösung wird vom mitbewegten Bezugssystem aus vorgenommen. Damit wirken die Gewichtskraft und die Fliehkraft auf den Körper. Durch Wechselwirkung mit der Drehscheibe entsteht die Reibungskraft, die das Wegrutschen verhindert, wenn $F_R = \mu mg = m\cdot\omega^2\cdot r$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu\cdot g}{r}} \quad (1)$$



Aus der Abb. ist ersichtlich, daß gilt:

$\tan\alpha = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$ und mit (1) folgt

$$\tan\alpha = \mu$$

$$\alpha \approx 11{,}3^\circ$$

Für eine Winkelgeschwindigkeit $\omega > \sqrt{\frac{\mu\cdot g}{r}} = 0{,}443\ s^{-1}$ kann man sich nicht mehr auf der Drehscheibe halten.
Bewegt man sich bei der Winkelgeschwindigkeit $0{,}443\ s^{-1}$ 2 m nach innen, so nimmt die Fliehkraft ab.
Damit verändert sich auch der Neigungswinkel.
Für das Gleichgewicht gilt:

$$\tan\alpha = \frac{m\,\omega^2\cdot r}{mg} = \frac{\omega^2\cdot r}{g}, \quad \underline{\underline{\alpha \approx 9{,}1^\circ}}$$

bei r = 8 m.

2.2.10. Die Resultierende aus Gewichtskraft und Coulombkraft muß in Fadenrichtung wirken (Skizze). Tangentiale Kräfte verschwinden.

Dann gilt:

$F_G : h = F_C : r'$

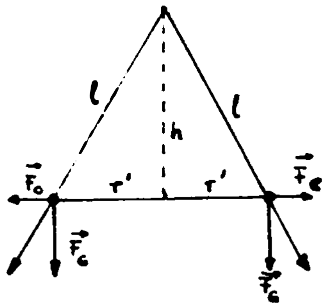
mit $r = 2r'$

$$F_C = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

und $h^2 = l^2 - r'^2$

erhält man:

$$Q = \sqrt{\frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot F_G \cdot r^3}{\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}}}}$$



$$\underline{\underline{Q = 7{,}46\ nC}}$$

2.2.11. Die Resultierende muß in Richtung des Radius wirken (Skizze). Tangentiale Kräfte müssen verschwinden. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt:

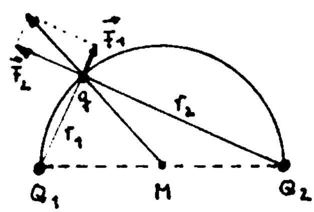
$F_1 : F_2 = r_1 : r_2$

a) $$\frac{2Q_2 \cdot q \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1^2 \cdot Q_2 \cdot q} = \frac{r_1}{r_2}$$

daraus folgt:

$$\underline{\underline{\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2}}}$$

b) $$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{n}$$



2.4. Arbeit, Energie, Leistung

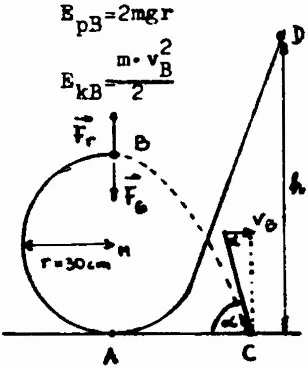
2.4.1. Skizze siehe Beispiel 1

Die Geschwindigkeit im Punkt B kann ungefähr 0 sein, da die Stange die Kugel im Punkt B stützt. Folglich ist $E_{k\,B} = 0$ und $E_{p\,B} = 2\cdot m\cdot g\cdot l$. Dann gilt

$$\frac{m\cdot v_0^2}{2} = 2\cdot m\cdot g\cdot l \;: \qquad v = 2\cdot\sqrt{g\cdot l}$$

$$\underline{\underline{v = 5{,}4\ \mathrm{m/s}}}$$

2.4.2. Energieerhaltungssatz der Mechanik



a)

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB} \qquad (1)$$

$$E_{pD} + E_{kD} = E_{pA} + E_{kA} \qquad (2)$$

Aus (1)

$$\frac{m\cdot v_A^2}{2} = 2m\cdot g\cdot r + \frac{m\cdot v_B^2}{2}$$

und (2)

$$m\cdot g\cdot h = \frac{m\cdot v_A^2}{2} \qquad \text{(s. a. Skizze!)}$$

folgt mit

$$F_G = F_R \quad \text{bzw.} \quad m\cdot g = \frac{m\cdot v_B^2}{r} \qquad (3)$$

$$\frac{m\cdot v_B^2}{r}\,h = 2\,\frac{m\cdot v_B^2}{r}\,r + \frac{m\cdot v_B^2}{2}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{5}{2}\,r}} \;; \qquad \underline{\underline{h = 0{,}75\ \mathrm{m}}}$$

$$E_{pA} = 0$$

$$E_{kA} = \frac{m\cdot v_A^2}{2}$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}\,m\cdot v_C^2$$

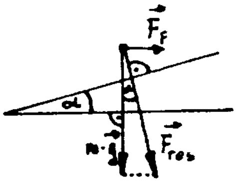
b) $E_{pB} + E_{kB} = E_{kC}$ ergibt $2\cdot m\cdot g\cdot r + \frac{m\cdot g\cdot r}{2} = \frac{m\cdot v_C^2}{2}$ und

$$v_C = \sqrt{5\cdot g\cdot r} \qquad v_B = \sqrt{g\cdot r}$$

$$\underline{\underline{v_C = 3{,}84\ \mathrm{m/s}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{0{,}2} \;; \qquad \underline{\underline{\alpha = 63{,}44^\circ}}$$

2.2.6.



$\vec{F}_{res}$ muß senkrecht auf die Schienen wirken.

$F_F = m \cdot \omega^2 \cdot r$ ... Fliehkraft

mg ... Gewichtskraft

Es gilt: $\tan\alpha = \frac{F_F}{mg} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{mg} = \frac{v^2}{rg}$

Für die Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchfahren werden muß, gilt:

$$v = \sqrt{\tan\alpha \cdot rg}$$

Die Kurvenüberhöhung ist unabhängig von der Masse des Zuges. Alle Züge müssen die Kurve mit gleicher Geschwindigkeit durchfahren.

2.2.7. Für die Kraft F, die am Stab angreift und beide Federn um die gleiche Strecke verlängert, gilt:

$F = F_1 + F_2 = k_1 \cdot \Delta s + k_2 \cdot \Delta s$

Damit folgt: $\frac{F}{\Delta s} = \underline{\underline{k_1 + k_2 = k}}$

Unter Nutzung des Hebelgesetzes folgt

$F_1 \cdot l = F \cdot l_2$

und damit $l_2 = \frac{F_1 \cdot l}{F} = \underline{\underline{\frac{k_1 \cdot l}{k_1 + k_2}}}$

bzw. $F_2 \cdot l = F \cdot l_1$

und damit $l_1 = \frac{F_2 \cdot l}{F} = \underline{\underline{\frac{k_2 \cdot l}{k_1 + k_2}}}$

2.2.8. Auf der Erdoberfläche gilt:

$$g_N = \frac{\gamma \cdot M}{R^2}$$

M ... Masse der Erde
R ... Erdradius

In einer beliebigen Höhe h gilt:

$$g = \frac{\gamma \cdot M}{(R + h)^2}$$

Damit folgt: $\frac{g}{g_N} = \frac{R^2}{(R + h)^2}$

Daraus folgt: $h = - R \pm R \cdot \sqrt{\frac{g_N}{g}}$

Da h nur größer als Null sein kann, folgt

$$h = - R + R\sqrt{\frac{g_N}{g}}$$

Mit $g = (1 - \delta)g_N$; $\delta = 0{,}01$

$$h = - R + R \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \delta}} = \underline{\underline{32 \text{ km}}}$$

In einer Höhe h > 32 km weicht die Erdbeschleunigung mehr als 1 % von der Normalbeschleunigung ab.

2.2.9. Für den geostationären Satelliten muß gelten:

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r$$

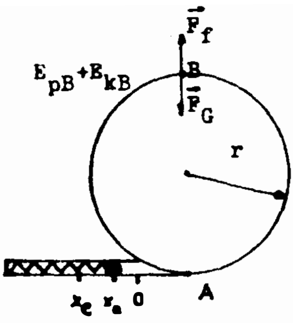
m ... Masse des Satelliten
M ... Masse der Erde
r ... R + h ; R ... Erdradius des Äquators

Damit folgt: $M = \frac{4\pi^2 \cdot (R + h)^3}{\gamma \cdot T^2}$

Mit $R = 6{,}378 \cdot 10^3 \text{km}$

$T = 1 \text{ d} = 86164 \text{ s}$ folgt: $\underline{\underline{M = 5{,}979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$
(Sternentag)

2.4.3. a) Energieerhaltungssatz der Mechanik



$$E_{pF} = E_{pB} + E_{kB} \qquad (1)$$

$$E_{pF} = \frac{k}{2}\,(\,x_e^2 - x_a^2\,) \qquad (2)$$

$$E_{pB} + E_{kB} = 2m\cdot g\cdot r + \frac{m\cdot v_B^2}{2} \qquad (3)$$

$$F_G = F_r \quad \text{ergibt} \quad g\cdot r = v_B^2 \qquad (4)$$

(2), (3) und (4) in (1)

$$\frac{k}{2}\,(\,x_e^2 - x_a^2\,) = \frac{5}{2}\cdot m\cdot g\cdot r$$

Mit $x_e = x_a + \Delta x$

$$(\,\Delta x)^2 + 2\cdot x_a\cdot \Delta x = \frac{5\cdot m\cdot g\cdot r}{k}$$

$$\underline{\underline{\Delta x = 1{,}49\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}5\ \mathrm{cm}}}$$

oder

$$x_e^2 - x_a^2 = \frac{5mgr}{k}$$

$$x_e = \pm\sqrt{x_a^2 + \frac{5mgr}{k}}$$

$$\Delta x = x_e - x_a \qquad \underline{\underline{\Delta x = 1{,}5\ \mathrm{cm}}}$$

b) $E_{kK} = E_{pF}$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_K^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot(\,x_e^2 - x_a^2\,) \qquad v_K = v_o = 4{,}95\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

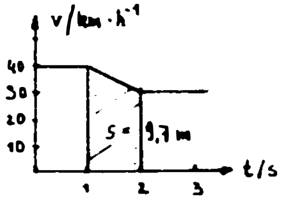
c) $$\frac{(\,E_{p2} - E_{p1}\,)_F}{E_{p2F}} = \delta$$

mit $E_{p1} = E_{kK} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_o^2 \quad = 0{,}25\ \mathrm{Nm}$

und $E_{p2} = \frac{1}{2}\cdot k\cdot(\,x_{e2}^2 - x_a^2\,) = 0{,}36\ \mathrm{Nm}$

folgt $\underline{\underline{\delta = 31\ \%}}$

2.4.4. $\Delta E_k = W_R \rightarrow \frac{1}{2} m (v_o^2 - v_1^2) = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$ (1)



$$s = \frac{v_o + v_1}{2} \cdot t \qquad (2)$$

$$\mu = \frac{v_o - v_1}{g \cdot t} \qquad (1) \text{ und } (2)$$

$\underline{\underline{\mu = 0,28}}$

2.4.5. $m \cdot g \cdot h_2 = (m \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} m \cdot v_o^2) \cdot 0,85$

$$h_2 = \frac{h_3}{0,85}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{2h_3 \cdot g}{0,85^2} - 2gh_1}$$

$\underline{\underline{v_o = 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$

2.4.6. $P_{max} = \frac{2\,W}{t}$, $W = F \cdot s$, $F = m \cdot a$, $a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$

$P_{max} = \frac{4 \cdot m \cdot s^2}{t^3}$ $\underline{\underline{P_{max} = 19,4 \text{ kW}}}$, $\bar{F} = P_{max}/2$

2.4.7. a) $E_p = E_k + W_R$ ergibt $m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + F_R \cdot l$ (1)

$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \frac{G \cdot b}{l}$ mit $b = \sqrt{l^2 - h^2}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$$v = \sqrt{2g \cdot (h - \mu \cdot \sqrt{l^2 - h^2})}$$

$\underline{\underline{v = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$

b) $Q = W_R = \mu \cdot \frac{m \cdot g \cdot \sqrt{l^2 - h^2}}{l} \cdot l = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{l^2 - h^2}$

$Q = 15,23$ J entspricht ca. 96,9 % von E_p

c) $0 < v$ ergibt $0 < 2g(h - \mu \cdot b)$ $0 < (h - \mu \cdot b)$

$\mu \cdot \sqrt{l^2 - h^2} < h$ $\mu^2 \cdot (l^2 - h^2) < h^2$ und

hieraus folgt $l < \sqrt{\frac{h^2 + \mu^2 \cdot h^2}{\mu^2}} = h \cdot \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 1}$

$\underline{\underline{l < 3,89 \text{ m}}}$

2.4.8. $\frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_{max}^2$; $v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_o$

$$\underline{\underline{v_{max} = 6{,}7\ m \cdot s^{-1}}}$$

2.4.9. $\overline{P} = \frac{P_1}{2}$ mit $P_1 = F \cdot v$, $F = m \cdot a$ und $a = \frac{v^2}{2s}$

ergibt sich $\overline{P} = \frac{m \cdot v^3}{4s}$ = $\underline{\underline{15{,}96\ kW}} \approx \underline{\underline{16\ kW}}$

2.4.10. $W = W_H + W_B$

$= m \cdot g \cdot h + m \cdot a \cdot h$, mit $a = \frac{2 \cdot h}{t^2}$

folgt

$t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot h^2}{W - m \cdot g \cdot h}}$ $\underline{\underline{t = 6{,}9\ s}}$

2.4.11. Gefälle (Bahn oder Straße): $h : s$

a) $E_p = E_k + W_R$ und $W_R = \mu \cdot m \cdot g \sqrt{s^2 - h^2}$

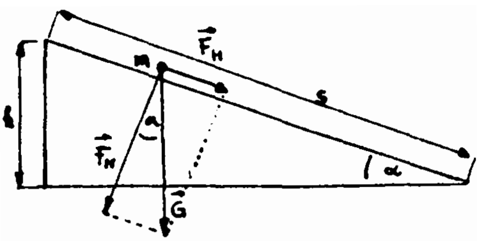
$= \mu \cdot m \cdot g \cdot s \sqrt{0{,}9676}$

ergibt

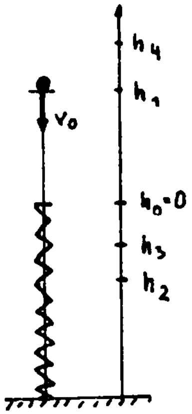
$v = \sqrt{2gs\,(0{,}18 - \mu \cdot \sqrt{0{,}9676})} = \underline{\underline{6{,}9\ m \cdot s^{-1}}}$

b) $P = F_H \cdot v$ $F_H = \frac{G \cdot h}{s} = G \cdot 0{,}18$

$\underline{\underline{P = 0{,}48\ kW}}$



2.4.12. a) $mgh_1 + \frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} k \cdot h_2^2 + mgh_2$; $h_2 < 0$



$$h_2 = -\frac{mg}{k} - \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh_1 + mv_o^2}{k}}$$

$$\underline{\underline{h_2 = -11{,}3 \text{ cm}}} \;;$$

$$W_p = \frac{1}{2} k \cdot h_2^2 = \underline{\underline{4{,}8 \text{ Nm}}}$$

b) $mgh_1 + \frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} kh_3^2 + mg \cdot h_3 + \frac{1}{2} mv_3^2$;

$h_3 \quad 0$

$$\underline{\underline{v_3 = \pm 3{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

c) $(mgh_1 + \frac{1}{2} mv_o^2) \cdot 0{,}95 = mgh_4$;

$$\underline{\underline{h_4 = 0{,}67 \text{ m}}}$$

2.4.13. Energieverlust E_p = Reibungsarbeit W_R

$mg \cdot l \cdot \sin\alpha - mg \cdot s \cdot \sin\alpha = mg \cdot \mu \cdot (s + l) \cdot \cos\alpha$

ergibt mit $\tan\alpha = 0{,}04 \approx \sin\alpha$

$l \cdot \tan\alpha - s \cdot \tan\alpha = \mu \cdot (s+l)$

$$s = \frac{l\,(\tan\alpha - \mu)}{\tan\alpha + \mu} = \underline{\underline{2{,}86 \text{ m}}}$$

2.4.14. a) $\underline{\underline{W = 0}}$

b) $E_k = \frac{2 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot r^2}{t^2}$ $\qquad \underline{\underline{E_k = 5{,}2 \cdot 10^3 \text{ MJ}}}$

2.4.15. 1. Lösungsweg

$E_p = mgh$, $h_2 = \frac{v_o^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$, $\sin 30^o = 1/2$

wird $E_p = \frac{m \cdot v_o^2}{8}$

Energiebilanz: $\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot v_o^2}{2} - \frac{m \cdot v_o^2}{8} = \frac{3}{8} m \cdot v_o^2$

$$\underline{\underline{v = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot v_o}}$$

Bei ballistischer Bahn ist $v_b < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot v_0$ - Luftwiderstand!

2. Lösungsweg

$v = v_x + v_y$, im Gipfelpunkt ist $v_y = 0$, also

$v = v_x$, $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$

2.4.16. $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_{max}$

2.4.17. a) $\frac{m \cdot v_0^2}{2} = 2\,mgh$, es folgt $v_0 = 2\sqrt{g \cdot h}$

$$\underline{\underline{v_0 = 140\ m \cdot s^{-1}}}$$

b) $\underline{\underline{h = 1000\ m}}$

c) Gleichförmige Bewegung und Freier Fall

Aus $s = v \cdot t$ und $t^2 = \frac{2 \cdot h}{g}$

folgt $s = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$\underline{\underline{s = 200\ m}}$$

d) $v_T = \sqrt{2gh + v_0^2}$

$\underline{\underline{v_T = 140{,}7\ m \cdot s^{-1}}}$ (Vergleich!)

2.5. Kraftstoß und Impuls

2.5.1. Unelastischer Stoß mit $v_2 = 0$:

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \frac{9,5 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg} \cdot 3 \ \mathrm{ms}^{-1}}{(9,5 + 3,6)\ 10^3 \ \mathrm{kg}}$$

$$\underline{\underline{u = 2,18 \ \mathrm{m/s}}}$$

2.5.2. Die kinetische Energie des Läufers wird vollständig in Reibungsarbeit umgewandelt:

$$\frac{1}{2} m \cdot u^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \qquad s = \frac{u^2}{2 \mu \cdot g}$$

u ist die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem unelastischen Stoß. Damit erhält man:

$$s = \left(\frac{m_2 \cdot v}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \mu \cdot g} = \left(\frac{0,28 \ \mathrm{kg} \cdot 15 \ \mathrm{ms}^{-1}}{65,28 \ \mathrm{kg}}\right)^2 \cdot \frac{1 \qquad \mathrm{s}^2}{2 \cdot 0,014 \cdot 9,81 \mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{s = 1,5 \ \mathrm{cm}}}$$

2.5.3. a) Unelastischer Stoß, d. h., die Kiste erhält die Geschwindigkeit

$$u = \frac{v_o \cdot m_1}{m_1 + m_2} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \ ,$$

dabei wird der Schwerpunkt gehoben um

$h = l \cdot (1 - \cos \alpha)$. Damit wird

$$v_o = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

$$v_o = \frac{0,05 \ \mathrm{kg} + 60 \ \mathrm{kg}}{0,05 \ \mathrm{kg}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \ \mathrm{ms}^{-2} \cdot 1 \ \mathrm{m} \cdot (1 - \cos 13,7^o)}$$

$$\underline{\underline{v_o = 897 \ \mathrm{m/s}}}$$

b) $\Delta E_k = W_R$, $(m_1 + m_2) \cdot u^2/2 = (m_1 + m_2) \cdot \mu \cdot s \cdot g$

daraus folgt $s = u^2/(2 \mu \cdot g)$, $s = \dfrac{v_o^2 \cdot m_1^2}{2(m_1 + m_2)^2 \cdot \mu \cdot g}$

$$\underline{\underline{s = 0,07 \ \mathrm{m}}}$$

2.5.4. Kraftstoß ist gleich Impulsänderung

$$v = \frac{F \cdot t}{m} = \frac{200\ N \cdot 10^{-2} s}{7\ kg} = 0{,}29\ m/s$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{F^2 \cdot t^2}{2\ m} = 0{,}29\ Ws$$

Nach Energieerhaltungssatz ist

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{F^2 \cdot t^2}{m^2 \cdot 2 \cdot g}$$

$$h = l \cdot (1 - \cos \varphi) \approx l \cdot \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\ h}{l}} = \frac{F^2 \cdot t^2}{g \cdot m^2 \cdot l} = \underline{\underline{0{,}083\ rad = 4{,}8^{\circ}}}$$

2.5.5. Masse des Gewehrs $m_1 = 4{,}2\ kg$

Masse des Geschosses $m_2 = 8{,}9 \cdot 10^{-3} kg$

Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses $v_o = 810\ m/s$

Impulssatz: $m_2 \cdot v_o + m_1 \cdot u = 0$

$$u = \frac{-m_2 \cdot v_o}{m_1} = - \frac{8{,}9 \cdot 10^{-3} kg \cdot 810 ms^{-1}}{4{,}2\ kg}$$

$$\underline{\underline{u = -1{,}72\ m/s}}$$

2.5.6. Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\, m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \cdot v_2^2 = E$$

Impulssatz: $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad ; \quad v_2 = v_1 \cdot \frac{m_1}{m_2}$

$$E = \frac{1}{2}\, m_1 \cdot v_1^2 + \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{2\ m_2}$$

$$E = v_1^2 \cdot \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_1 \cdot m_1}{2\ m_2} \right)$$

$$E = v_1^2\ \frac{m_1 \cdot (m_1 + m_2)}{2\ m_2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\ m_2 \cdot E}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)}}$$

$\underline{\underline{v_1 = 8{,}45\ m/s \quad ; \quad v_2 = 3{,}38\ m/s}}$

2.5.7. Für den waagerechten Wurf gilt: $y = \frac{g \cdot x^2}{2\, v_o^2}$

Die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete läßt sich als Summe errechnen: $v_o = v_P + v_R$.

Aus dem Impulssatz ergibt sich v_R :

$$m_R \cdot v_R = - m_T \cdot v_T \text{ , also}$$

$$v_R = - v_T \cdot \frac{m_T}{m_R} \text{ . Damit wird}$$

$$v_o = v_P - v_T \cdot \frac{m_T}{m_R} \text{ , also}$$

$$y = \frac{g \cdot x^2}{2} \cdot \left(\frac{m_R}{v_P \cdot m_R - v_T \cdot m_T} \right)^2$$

$$\underline{\underline{y = 13{,}55 \text{ km}}}$$

2.5.8. Der gemeinsame Massenmittelpunkt behält die Geschwindigkeit von 80 m/s bei, so daß das größere Stück eine Relativgeschwindigkeit von 120 m/s erhält.
Nach dem Impulssatz gilt:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \quad \text{und damit}$$

$$v_2 = - v_1 \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$\underline{\underline{v_2 = - 222{,}9 \text{ m/s}}}$$

Bezogen auf die Erdoberfläche beträgt die Geschwindigkeit des kleineren Stückes 142,9 m/s entgegen der ursprünglichen Flugrichtung.

2.5.9. $\underline{\underline{m_o = 2088 \text{ kg}}}$

4.1. Mechanische Schwingungen und Wellen

4.1.1. a) $x(t) = x_m \cdot \cos \omega \cdot t \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$

$$x(t) = x_m \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\cos 2\pi \cdot f \cdot t = \frac{x(t)}{x_m}$$

$$f = \frac{\arccos (x(t)/x_m)}{2\pi \cdot t}$$

$$\underline{\underline{f = 1{,}02 \text{ Hz}}} \qquad \underline{\underline{T = 0{,}98 \text{ s}}}$$

b) $f = \frac{\arcsin (x(t)/x_m)}{2\pi \cdot t}$

$$\underline{\underline{f = 1{,}76 \text{ Hz}}} \qquad \underline{\underline{T = 0{,}57 \text{ s}}}$$

4.1.2. $\underline{\underline{f = 0{,}675 \text{ Hz}}}$, $\underline{\underline{T = 1{,}48 \text{ s}}}$

4.1.3. Für elastische Deformationen gilt

(1) $F = k \cdot \Delta s$

Die Deformation wird von der Gewichtskraft verursacht

(2) $F = m \cdot g$

Für die Frequenz eines schwingenden Systems gilt

(3) $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

a) Aus (1) und (2) folgt durch Gleichsetzen

$$k \cdot \Delta s = m \cdot g$$

(4) $k = \frac{m \cdot g}{\Delta s} \qquad \underline{\underline{k = 81{,}8 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}}}}$

b) Mit (4) gilt für die Frequenz (3)

(5) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta s}} \qquad \underline{\underline{f = 4{,}55 \text{ Hz}}}$

Die Federkonstante der Unterlage beträgt 81,8 $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$.

Die Masse m schwingt mit einer Frequenz von 4,55 Hz.

c) Bei Verminderung der Masse m wird gemäß (3) die Frequenz größer.

4.1.4. $m \cdot g = k \cdot \Delta x$

$m = 10{,}2\ g$ $\quad$ $T = 0{,}63\ s$ $\quad$ $x_m = 5{,}0\ cm$

4.1.5. a) $x_m = 1{,}5\ m$

Für die Geschwindigkeit eines schwingenden Körpers gilt

$$v = x_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos \omega \cdot t \qquad (1)$$

Für die Frequenz gilt

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

Für die Schwingungsdauer gilt

$$T = \frac{1}{f} \qquad (3)$$

Mit Hilfe von (2) und (3) kann in (1) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ersetzt werden durch $\frac{2\pi}{T}$

Für v_m muß $\cos \omega \cdot t = 1$ sein.

Somit gilt: $\quad v_m = x_m \cdot \frac{2\pi}{T}$

$$v_m = 0{,}944\ ms^{-1}$$

b) Für die Gesamtenergie des schwingenden Systems gilt

$$E = \frac{1}{2}\,k \cdot x_m^2 \qquad (4)$$

Mit (2) und (3) gilt für k

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}\,m \qquad (5)$$

Durch Einsetzen von (5) in (4) gilt

$$E = \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot x_m^2 \qquad E = 1{,}112\ kJ$$

c) Für eine harmonische Schwingung, bei der $x(t=0) = x_m$ ist, gilt

$$x = x_m \cdot \cos \omega \cdot t \text{ bzw. mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$x_1 = 0{,}463\ m$ $\quad$ $x_2 = -1{,}21\ m$ $\quad$ $x_3 = -1{,}21\ m$

4.1.6. Die Frequenz wird größer.

4.1.7. $\underline{\underline{x_m = 4 \text{ cm}}}$

4.1.8. Bei Annäherung gilt: $f_1 = f_0/(1 - u/v)$,
bei Entfernen gilt:
$f_2 = f_0/(1 + u/v)$ mit $u/v \approx 1/10$ folgt
$\underline{\underline{f_1/f_2 = 1{,}22}}$

4.1.9. Die Schwächung der Lautstärke erfolgt bei Auslöschung der interferierenden Wellen

$$\Delta l = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad v = \lambda \cdot f \qquad n \in N$$

$$\Delta l = (2n + 1) \cdot \frac{v}{2f} \qquad \lambda = \frac{v}{f}$$

$$f(n) = (2n + 1) \cdot \frac{v}{2 \Delta l}$$

$\underline{\underline{f(o) = 275 \text{ Hz}}}$ $\underline{\underline{f(1) = 826 \text{ Hz}}}$ $\underline{\underline{f(2) = 1377 \text{ Hz}}}$ usw.