E.B. Dynkin / W.A. Uspenski

Mathematische Unterhaltung I
Mehrfarbenprobleme

Übersetzung und Bearbeitung: Peter Friedel, Brigitte Mai
1966 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 18
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Diesem Buch[1] liegen Arbeiten einer Sektion eines mathematischen Schulzirkels an der Moskauer Staatlichen M. W. Lomonossow-Universität aus den Studienjahren 1945/46 und 1946/47 zugrunde. Der eine der Autoren war Leiter dieser Sektion, der andere gehörte zu den Teilnehmern.
Diese Sektion nannte sich Sektion allgemeinen Typs. Man beschäftigte sich darin mit Fragen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik. Dabei war es grundsätzlich nicht das Ziel, den Teilnehmern neue Erkenntnisse zu vermitteln; es ging vielmehr darum, ihre Aktivität zu wecken und ihnen zu einem schöpferischen Verhältnis zur Mathematik zu verhelfen. Mehrere Disziplinen wurden dabei mit großem Erfolg behandelt.

In dem vorliegenden Buch sind Themen aus drei dieser Disziplinen - in gründlicher Überarbeitung und erweiterter Form - enthalten: Aufgaben über das Mehrfarbenproblem, Aufgaben aus der Zahlentheorie und Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit den sogenannten Irrfahrten zusammenhängen.

Jedem dieser Themen waren mehrere aufeinanderfolgende Zusammenkünfte gewidmet. Im allgemeinen begannen diese mit einem Problem, das zu seiner Formulierung keiner neuen Begriffe bedurfte, mit dessen Lösung die Teilnehmer jedoch in den neuen Fragenkreis eingeführt wurden.
Auch im weiteren Verlauf hingen die Vorträge des Leiters eng mit Aufgaben zusammen, die sich im Laufe der Unterhaltungen ergaben; manchmal wurden sie gleich an Ort und Stelle gelöst, meistens aber als Hausaufgabe bis zur nächsten Sitzung gestellt.

Ein bedeutender Teil des gesamten Stoffes war in Gruppen zusammenhängender Aufgaben angeordnet. Bei jeder Sitzung der Sektion war eine gewisse Zeit der Besprechung der Lösungen gewidmet, die dann anschließend dem Leiter als Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen und Folgerungen dienten. In seinem Vortrag ging der Leiter auch auf schwierigere Fragen ein, die sich weniger in einzelne Aufgaben zergliedern ließen.

In dem vorliegenden Buch wurde die Form der durch Aufgaben unterbrochenen Darlegung beibehalten, wobei die Lösung der Aufgaben für das Folgende wesentlich ist.

Für die Lektüre der ersten beiden Abschnitte genügen die Kenntnisse der 7. Klasse der Oberschule, der dritte Abschnitt erfordert nicht viel mehr Kenntnisse. Das Buch ist in seiner Konzeption für Schüler der Oberklassen gedacht, kann jedoch auch für Arbeitsgemeinschaften von Studenten der ersten Semester benutzt werden.

Wir benutzen hier die Gelegenheit, A.N. Kolmogoroff unseren Dank auszusprechen; seine Ratschläge haben bedeutend zur Verbesserung dieses Buches beigetragen. Wir sagen auch E.E. Balasch Dank, dessen Aufgaben den Paragraphen 2 und 3 in Kap. IV des zweiten Abschnittes zugrunde liegen. Schließlich danken wir M.A. Neumark und I.M. Jaglom, die das Manuskript durchgesehen und eine Reihe von Hinweisen gegeben haben.

Abschließend möchten wir auch noch die sorgfältige Arbeit unseres Redakteurs A.S. Rywkin würdigen.

März 1952 E. Dynkin , W. Uspenski

[1] In der deutschen Ausgabe erscheinen die Abschnitte I, II, III des Originals als einzelne Bändchen (Anm. d. Red).

Hinweise zur Benutzung dieses Buches

Alle drei Abschnitte[2] sind voneinander unabhängig; daher kann der Leser sie in beliebiger Reihenfolge lesen; es ist dabei jedoch zu beachten, dass der erste Abschnitt der leichteste und der dritte der schwierigste ist.
Der Anhang zum ersten Abschnitt enthält die Lösung einer Aufgabe, die sich ihrem Charakter nach der Thematik dieses Abschnittes anschließt; dieser Anhang kann übrigens unabhängig vom ersten Abschnitt gelesen werden, da für sein Verständnis nichts weiter notwendig ist als die Definition der regulären Färbung.

Jeder Abschnitt ist einem bestimmten Thema gewidmet; die einzelnen Teile eines Abschnittes stehen untereinander in engem Zusammenhang. Daher muss jeder Abschnitt lückenlos von Anfang bis Ende durchgelesen werden.
Eine Ausnahme bilden nur die Kap. II und. IV des zweiten Abschnittes, die mit einem Sternchen versehen sind. Sie weichen etwas von der Grundlinie des Abschnittes ab und können bei der ersten Lektüre ohne Nachteil, für das Verständnis des Folgenden ausgelassen werden (das Kap. II ist im wesentlichen eine Ergänzung zu Kap. I und Kap. IV eine Ergänzung zu Kap. III).

Das Buch ist zur Aktivierung der Arbeit des Lesers gedacht.
Jeder Abschnitt enthält daher als organischen Bestandteil eine Reihe von Aufgaben. Die meisten Aufgaben sind in Gruppen zusammengefasst; jede derartige Gruppe ist in sich abgeschlossen.

Oft führen diese einzelnen Aufgaben, von denen eine auf der anderen aufbaut, den Leser zu einem abschließenden Resultat, das in der letzten Aufgabe einer jeden Gruppe enthalten ist (so beispielsweise die Aufgaben 21-27, 38-41 des ersten Abschnittes, die Aufgaben 28-32, 71-75 des zweiten Abschnittes u.a.m.).

Manchmal verdichten sich die Lösungen einer derartigen Gruppe nicht zu einem bestimmten Resultat, sondern führen eine neue Methode ein (beispielsweise die Aufgaben 11-14 des ersten Abschnittes). Schließlich sind einige Aufgaben bloße Übungen, mit deren Hilfe der Leser sich mit den neuen Begriffen vertraut machen kann (wie etwa die Aufgaben 1-8 des zweiten Abschnittes oder die Aufgaben 1-3 des dritten Abschnittes u.a.m.).

Es empfiehlt sich, die Formulierung aller Aufgaben einer vorliegenden Gruppe zu betrachten, bevor man die einzelnen Aufgaben löst. Wir empfehlen dem Leser, sich erst dann die am Ende des Buches angeführten Lösungen anzusehen, wenn er alle Aufgaben einer Gruppe gelöst hat; die von uns angegebenen Lösungen werden alle auf einem bestimmten Weg gewonnen, während der Leser durch selbständiges Überlegen eigene Beweismethoden finden kann.

Die Praxis der mathematischen Schulzirkel hat nämlich gezeigt, dass dabei manchmal einfachere und elegantere Lösungen gefunden werden, als sie vom Autor für die jeweilige Aufgabe gedacht waren.
Die einzelnen Gruppen von Aufgaben unterscheiden sich nach ihrem Schwierigkeitsgrad in bedeutendem Maße voneinander. Nach den Erfahrungen der Arbeitsgemeinschaft an der Universität kann man jedoch im Mittel eine Woche als Arbeitszeit für eine bis zwei Gruppen von Aufgaben ansehen.

Wahrscheinlich wird dem Leser die selbständige Lösung sämtlicher Aufgaben einer Gruppe

[2] In der deutschen Ausgabe erscheinen die Abschnitte I, II, III des Originals als einzelne Bändchen (Anm. d. Red).

nicht in allen Fällen gelingen. Sollte er nach Lösung einer Aufgabe bei der zweiten auf Schwierigkeiten stoßen, die er nicht überwinden kann, so sei ihm empfohlen, die erste, bereits gelöste Aufgabe noch einmal zu überlesen.

Manchmal genügt dies bereits, um die Lösung zu finden, auch wenn es vorher beim besten Willen nicht gelingen wollte. Erweisen sich aber die Schwierigkeiten als unüberwindlich, so sehe man zunächst die Lösung dieser schwierigen Aufgabe nach und fahre erst dann mit der Lösung der folgenden Aufgaben fort.

Trotz der fundamentalen Rolle, welche die Aufgaben in diesem Buch spielen, ist es keineswegs eine Aufgabensammlung. Ebenso wichtig wie die Aufgaben ist der in dem Buch gebotene theoretische Stoff.

Das Verhältnis zwischen den Aufgaben und diesem Stoff ist in den einzelnen Kapiteln verschieden. Manchmal liegt das Wesentliche in den Voraussetzungen der Aufgaben, und die Rolle des Textes ist darauf beschränkt, neue Begriffe einzuführen und Folgerungen zu ziehen (wie beispielsweise im § 1 des ersten Abschnittes, im Kap. V des zweiten Abschnittes usw.). In anderen Fällen (wie im Kap. II des zweiten Abschnittes und dem gesamten dritten Abschnitt) liegt das Wesentliche im theoretischen Stoff, und die Aufgaben haben untergeordnete Bedeutung.
In allen Fällen stehen Text und Aufgaben in engem Zusammenhang und müssen in der Reihenfolge gelesen werden, in der sie im Buch angeführt sind.

Einen wesentlichen Teil dieses Buches bilden die Lösungen der Aufgaben, denen sich oft Folgerungen und Anmerkungen grundsätzlichen Charakters anschließen. Daher sollte man die Lösungen auch dann studieren, wenn man selbständig mit den Aufgaben fertig wurde.

Schließlich raten wir dem Leser, die Zeit für die Lösung von Aufgaben nicht zu scheuen. Jede Gruppe von Aufgaben, ja jede Aufgabe, die selbständig gelöst wurde, bereichert den Vorrat an Kenntnissen, die dem Leser zur Verfügung stehen. Ein selbständig erarbeiteter Gedanke ersetzt zehn Gedanken, die man mit fremden Worten erlernt hat.

Sogar dann, wenn der Versuch der Lösung einer Aufgabe nicht gelingt, ist die aufgewendete Zeit nicht umsonst: Nach gründlicher Durcharbeitung der Aufgabe wird man ihre Lösung mit ganz anderen Augen lesen; man wird die Ursachen seines Misserfolges suchen und verstehen, aus den Hilfsbetrachtungen jene grundsätzlichen Ideen herauszufinden, die zum Erfolg führen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Auf einer Landkarte werden der Zweckmäßigkeit halber verschiedene Länder verschieden gefärbt. Dabei ist es gewöhnlich nicht nötig, jedes Land besonders zu färben. Es genügt, wenn benachbarte Länder, d.h. Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben wie z.B. die Länder S_1 und S_2 in Abb. 1[3], verschieden gefärbt sind. Eine solche Färbung wollen wir als regulär bezeichnen.

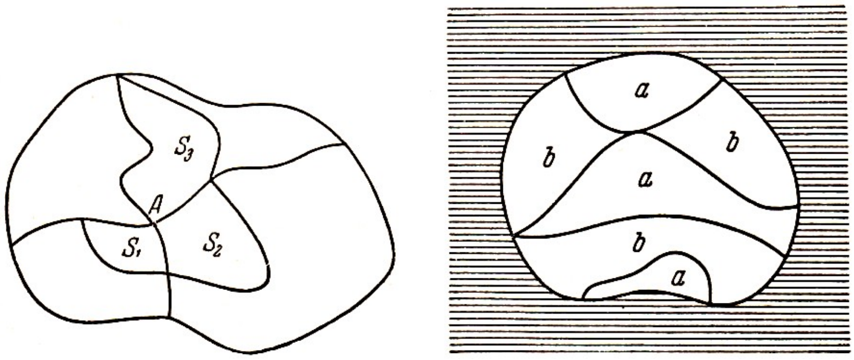


Abb. 1 und 2

Naturgemäß entsteht die Frage, wieviel Farben man braucht, um eine gegebene Karte regulär färben zu können. Selbstverständlich kommt man mit ebensoviel Farben aus, wie es Länder gibt. Mit diesem Ergebnis wollen wir uns jedoch nicht zufrieden geben:
Uns interessiert die minimale Anzahl Farben, die zur regulären Färbung einer gegebenen Karte ausreicht. Es ist leicht, eine Karte zu konstruieren, bei der man mit zwei Farben auskommt (Abb. 2).

Die Karte in Abb. 2 ist die Karte einer Insel. Diese Insel liegt im Meer, das wir durch Schraffur gekennzeichnet haben. Das Meer haben wir weder mit der Farbe a noch mit der Farbe b gefärbt.
Gewöhnlich ist jedoch das Meer auf einer Karte ebenfalls gefärbt, wodurch es notwendig wird, am Meeresstrand gelegene Länder, d.h. Länder, deren eine Grenze mit dem Ufer zusammenfällt, anders zu färben als das Meer. Folglich unterscheidet sich das Meer für uns durch nichts von einem gewöhnlichen Land.

Es ist für uns nicht wesentlich, dass ein Teil der Grenzen des Meeres nicht mehr innerhalb der Karte liegt, dass also das Meer auf unserer Karte gewissermaßen unbegrenzt ist. Im folgenden werden wir daher das Meer nicht gesondert betrachten, sondern in die Zahl der Länder einbeziehen.

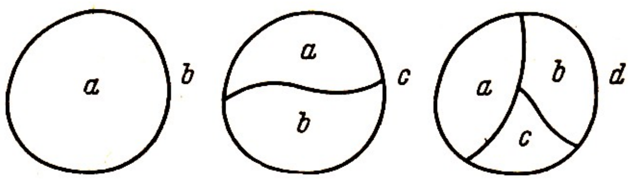


Abb. 3a, b, c

Die Karten, die wir betrachten, werden also nicht Karten von Inseln sein; wir wollen annehmen, dass sie sich über die ganze Ebene erstrecken. Von diesem Gesichtspunkt aus kann die Karte in Abb. 2 mit zwei Farben nicht mehr regulär gefärbt werden.

[3] Die Länder S_1 und S_2 gelten nicht als benachbart, obgleich sie sich im Punkt A berühren (sie haben keine gemeinsame Grenzlinie).

Kehren wir nun zu der Frage nach der minimalen Anzahl der zur regulären Färbung einer Karte notwendigen Farben zurück.
In Abb. 3 sind Karten dargestellt, für welche diese Anzahl 2 bzw. 3 und 4 ist. Darüber hinaus können wir keine weiteren Beispiele angeben. Es ist bis jetzt noch keine Karte gezeichnet worden, für welche die minimale Anzahl der Farben fünf oder größer ist, die man also nicht mit vier Farben hätte regulär färben können.

Es besteht die Vermutung, dass man jede Karte mit vier Farben regulär färben kann. (Darin besteht das berühmte "Vierfarbenproblem".) Es ist aber bis heute durch niemanden bewiesen; andererseits ist bewiesen, dass man jede Karte mit fünf Farben regulär färben kann. (Wir werden es in § 4 beweisen.)
Wir können also nur folgende zwei Aussagen machen, wobei wir die unangenehme Lücke zwischen ihnen nicht schließen können:

Nicht jede Karte kann mit drei Farben regulär gefärbt werden (Abb. 3c).
Jede Karte kann mit fünf Farben regulär gefärbt werden.

In den folgenden Paragraphen werden wir uns mit der Frage beschäftigen, für welche Karten zwei Farben ausreichen (§ 1) und für welche drei Farben genügen (§ 2). In § 3 wollen wir versuchen, einige Kriterien dafür anzugeben, wann vier Farben genügen; in § 4 beweisen wir den Satz über die fünf Farben.

1 Aufgaben über zwei Farben

1. In der Ebene seien n Geraden gezogen. Man beweise, dass die dadurch entstehende Karte mit zwei Farben regulär gefärbt werden kann (Abb. 4).

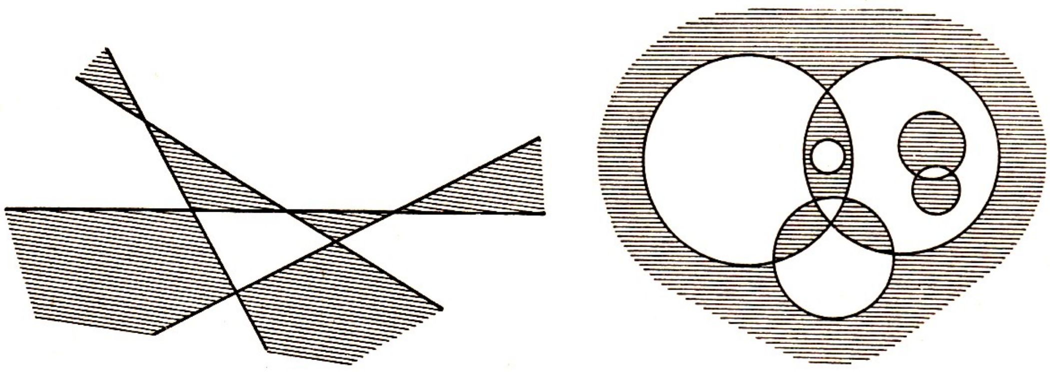


Abb. 4 und 5

2. In der Ebene liegen n Kreise. Man beweise, dass die Karte, die durch sie gebildet wird, mit zwei Farben regulär gefärbt werden kann (Abb. 5).

3. Eine Ebene sei in Dreiecke zerlegt. Dabei mögen je zwei beliebige Dreiecke entweder keinen Punkt oder einen Eckpunkt oder eine Seite gemeinsam haben[4].
Die Eckpunkte dieser Dreiecke seien so mit den Ziffern 0, 1, 2 bezeichnet, dass die Eckpunkte ein und derselben Seite durch verschiedene Ziffern gekennzeichnet sind (eine solche Kennzeichnung wollen wir als regulär bezeichnen) (Abb. 6).

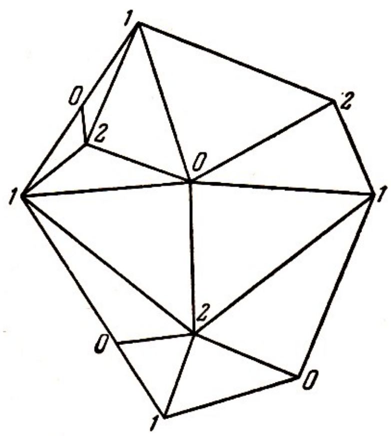


Abb. 6

Man beweise, dass die so erhaltene Karte mit zwei Farben regulär gefärbt werden kann.

4. Ist auf einer Karte ein Land vorhanden, für welches die Anzahl der "Grenzen" nicht durch m teilbar ist, während die Anzahl der Grenzen aller anderen Länder durch m teilbar ist, so kann diese Karte nicht mit zwei Farben regulär gefärbt werden.

[4] Eine solche Zerlegung in Dreiecke heißt Triangulation. Beispiele von Zerlegungen, die keine Triangulationen sind, zeigt Abb. 7.

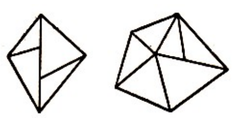


Abb. 7

Aufgaben auf dem Schachbrett.

Die gewöhnliche Einteilung des Schachbrettes in farbige Quadrate kann als Beispiel für die reguläre Färbung dienen (wenn man vom Außengebiet absieht). Die Aufgaben auf dem Schachbrett, die wir hier anführen, werden uns im folgenden bei der Lösung des allgemeinen Zweifarbenproblems helfen.

Ein Rössel (Springer) kann durch einen Zug vom Feld S auf jedes der Felder S_1 bis S_8 gelangen (Abb. 8). Der Turm kann nach den Regeln des Schachspieles mit einem Zug vom Feld S auf jedes Feld der entsprechenden Vertikale oder Horizontale gelangen (Abb. 9). Wir verabreden, bei der Lösung der Aufgaben anzunehmen, ein vom Feld S auf das Feld S' ziehender Turm (Abb. 9) berühre auch alle dazwischenliegenden Felder.

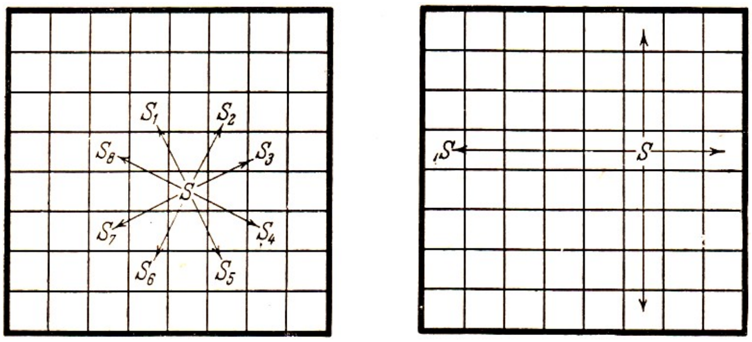


Abb. 8 und 9

5. Es sind mit einem Rössel alle Felder eines aus 5 $\times$ 5 Feldern bestehenden "Schachbrettes" zu durchlaufen, wobei keines der Felder zweimal berührt werden darf.

6. Man nummeriere alle Felder eines aus 25 Quadraten bestehenden "Schachbrettes" in der Reihenfolge, in der sie in der vorhergehenden Aufgabe von dem Rössel betreten worden sind. Alle Felder, die dabei eine gerade Nummer erhalten haben, sind zu schraffieren. Man gebe an, welche Färbung entsteht, wenn dieselbe Konstruktion auf einem Schachbrett mit einer beliebigen Anzahl von Quadraten, bei welcher obengenannte Operation möglich ist, ausgeführt wird.

7. Man untersuche, ob man mit einem Rössel alle Felder eines Schachbrettes mit 49 Quadraten bestreichen kann, und zwar so, dass jedes Feld nur einmal berührt wird und der letzte Zug auf ein dem Ausgangsfeld benachbartes Feld führt.

8. Man beweise, dass es unmöglich ist, mit einem Rössel vom Feld S (Abb. 10) aus alle Felder des Schachbrettes mit 49 Quadraten so zu bestreichen, dass jedes Feld nur einmal berührt wird.

9. Ein Rössel habe n Züge gemacht und sei auf sein Ausgangsfeld zurückgekehrt. Man beweise, dass n eine gerade Zahl ist.

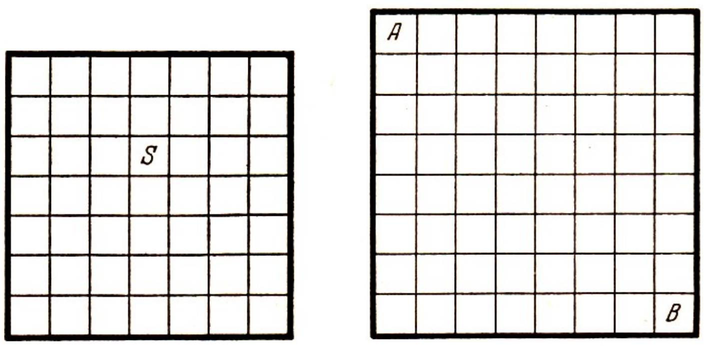


Abb. 10 und 11

10. Man beweise, dass es unmöglich ist, mit einem Turm aus der Ecke A eines aus 64 Quadraten bestehenden Schachbrettes so in die diagonal gegenüberliegende Ecke B zu gelangen, dass alle Felder berührt werden, keines jedoch zweimal (Abb. 11).

11. Kann man alle 28 Steine eines Dominospieles derart zu einer Kette zusammenlegen, dass an einem Ende der Kette die Zahl 6 liegt und am anderen die Zahl 5?

12. Jeder Mensch, der je gelebt hat, hat in seinem Leben eine bestimmte Zahl Händedrucke gewechselt. Man beweise, dass die Anzahl der Menschen, bei denen die Anzahl der Händedrucke eine ungerade Zahl ist, gerade ist[5].

13. Auf einer Versammlung waren 225 Menschen anwesend. Jeder begrüßte seine Bekannten mit Händedruck. Man beweise, dass mindestens einer der Anwesenden einer geraden Zahl von Bekannten die Hand gedrückt hat.

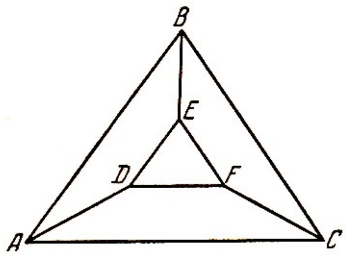


Abb. 12

14. In Abb. 12 sind 6 Punkte A, B, C, D, E, F gegeben, und jeder dieser Punkte ist mit je drei der übrigen fünf verbunden.
Man beweise folgendes: Sind an Stelle von sechs nur fünf Punkte gegeben, so ist es unmöglich, Verbindungslinien (die nicht unbedingt Geraden zu sein brauchen) in der Weise zu ziehen, dass jeder der fünf Punkte mit genau drei der übrigen verbunden ist.

Wir zeichnen in einer Ebene ein beliebiges Netz von Kurven.
Wenn von einem bestimmten Punkt dieses Netzes die dazugehörigen Kurven in k verschiedenen Richtungen verlaufen, so sagen wir, die Wertigkeit dieses Punktes sei gleich k.

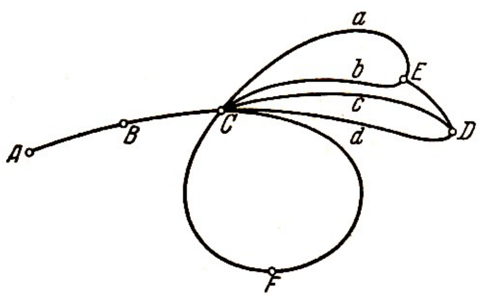


Abb. 13

Für das Netz in Abb. 13 ist beispielsweise die Wertigkeit des Punktes A gleich 1. Die Wertigkeiten der Punkte B und F sind gleich 2, für D und E gleich 3 und für den Punkt C gleich 7.
Wir wollen als Eckpunkte diejenigen Punkte des Netzes bezeichnen, deren Wertigkeit von 2 verschieden ist.

Das Netz, das wir als Beispiel angeführt haben, hat insgesamt vier Eckpunkte: A, C, D, E.

[5] Null ist eine gerade Zahl, so dass ein Mensch, der niemanden die Hand gedrückt hat, eine gerade Anzahl Händedrucke gewechselt hat.

Das Stück einer Kurve des Netzes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eckpunkten heißt Grenze. Auf jeder Grenze liegen folglich zwei Eckpunkte. (In einzelnen Fällen können diese zwei Eckpunkte zusammenfallen.)
In unserem Netz (Abb. 13) gibt es sieben Grenzen: ABC, ED, CaE, CbE, CcD, CdD und CFC.
Im letzten Fall fallen die beiden Eckpunkte, welche die Grenze CFC einschließen, zusammen. Die Anzahl der Eckpunkte werden wir immer mit v, die Anzahl der Grenzen mit g bezeichnen.

15. Man konstruiere ein Kurvennetz, für welches
a) $v = 3$, $g = 5$; b) $v = 7$, $g = 11$
gilt.

16. Ein Kurvennetz habe genau g Grenzen und v Eckpunkte mit den Wertigkeiten $k_1, k_2, ..., k_v$. Man beweise die Beziehung

$$k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_v = 2g$$

17. Man beweise, dass für jedes Kurvennetz die Anzahl der Eckpunkte, die eine ungerade Wertigkeit haben, gerade ist.

Nicht jedes Kurvennetz kann als Karte bezeichnet werden.
Auf einer Landkarte trennt jede Grenze unbedingt zwei benachbarte Länder. Daher kann es keine Eckpunkte mit der Wertigkeit 1 geben. (In Abb. 13 trennt die Grenze ABC, die vom Eckpunkt A mit der Wertigkeit 1 ausgeht, keine zwei Länder voneinander.) Die Anzahl der Länder einer Karte wollen wir immer mit s bezeichnen.

18. Es ist eine Karte zu konstruieren, für die
a) $v = 5, g = 8, s = 5$; b) $v = 22, g = 19, s = 10$; c) $v = 6, g = 12, s = 9$
gilt.

19. Eine Karte habe g Grenzen und s Länder, welche bzw. $n_1, n_2, n_3, ..., n_s$ Grenzen haben. Man beweise die Beziehung

$$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_s = 2g$$

20. Man beweise, dass bei jeder beliebigen Karte die Anzahl der Länder, die eine ungerade Anzahl von Grenzen haben, gerade ist.

Wir hatten verabredet, als Eckpunkte diejenigen Punkte eines Kurvennetzes zu bezeichnen, deren Wertigkeit von 2 verschieden ist. Es ist aber bisweilen zweckmäßig, auch einige Punkte der Wertigkeit 2 als Eckpunkte zu bezeichnen.
Unter Grenze verstehen wir nach wie vor den Abschnitt einer beliebigen Netzkurve, der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eckpunkten liegt.

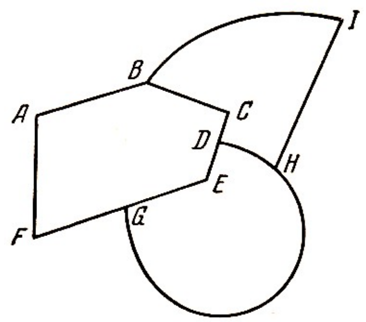


Abb. 14

Die Karte in Abb. 14 hat beispielsweise die 9 Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H, I und die 11 Grenzen AB, BC, CD, DE, EG, GF, FA, BI, IH, HD, HG.

Es ist leicht zu beweisen, dass die Behauptungen und Lösungen der vorangegangenen Aufgaben auch bei der neuen Definition des Begriffes "Eckpunkt" erhalten bleiben.

Aufgaben über reguläre Färbung beliebiger Karten mit zwei Farben.
Analog zum Schachbrett führen wir einen Turm für eine beliebige Karte ein. Der Turm wandert durch die Länder, wobei er mit einem Zug aus jedem Land in jedes benachbarte Land hinüberbewegt werden kann (in Abb. 15 aus S nach $S_1, ..., S_5$).

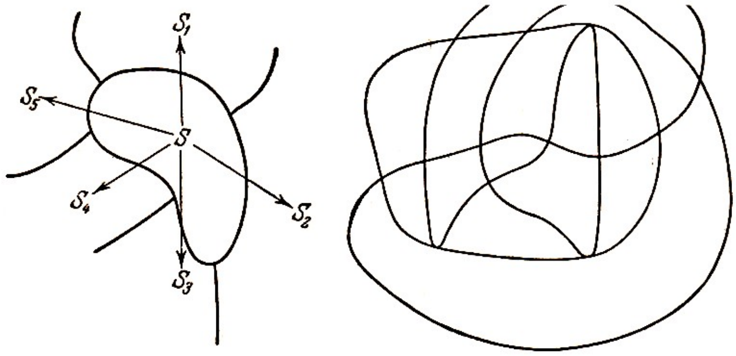


Abb. 15 und 16

21. Man durchlaufe mit einem Turm alle Länder der Karte in Abb. 16, ohne ein Land dabei zweimal zu berühren. Dabei nummeriere man alle Länder in der Reihenfolge, in der sie betreten werden,und schraffiere diejenigen, die dabei eine gerade Nummer erhalten.

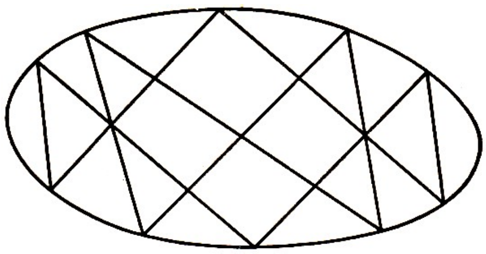


Abb. 17

22. Man beweise, dass es unmöglich ist, alle Länder der Karte in Abb. 17 mit einem Turm zu betreten, ohne dabei ein Land zweimal zu berühren.

23. Eine Karte sei mit zwei Farben regulär gefärbt. Man beweise, dass alle ihre Eckpunkte gerade Wertigkeit haben.

24. Alle Eckpunkte einer Karte mögen gerade Wertigkeit haben. Ein Turm habe einige Länder dieser Karte betreten, ohne dabei eines zweimal berührt zu haben, und sei zum Ausgangsland zurückgekehrt. Man beweise, dass er eine gerade Anzahl von Zügen ausgeführt hat.

25. Alle Eckpunkte einer Karte mögen gerade Wertigkeit haben. Ein Turm habe einige Länder dieser Karte betreten und sei in sein Ausgangsland zurückgekehrt. (Dabei seien eventuell, einige Länder auch mehr als einmal berührt werden.) Man beweise, dass er eine gerade Anzahl von Zügen ausgeführt hat.

26. Alle Eckpunkte einer Karte mögen gerade Wertigkeit haben. Der Turm sei aus dem Land S_0 auf einem bestimmten Wege mit p Zügen in das Land S_1 hinübergewandert, auf einem anderen mit q Zügen. Man beweise, dass p und q entweder beide gerade oder beide ungerade

sind.

27. Alle Eckpunkte einer Karte mögen gerade Wertigkeit haben. Man beweise, dass zur regulären Färbung dieser Karte zwei Farben genügen. (Vgl. Aufgabe 23.)

Die Aufgaben 23 und 27 ergeben folgenden Satz, der das Problem der regulären Färbung mit zwei Farben vollständig löst:

Eine Karte kann dann und nur dann mit zwei Farben regulär gefärbt werden, wenn alle ihre Eckpunkte gerade Wertigkeit haben.

2 Färbung mit drei Farben

28. In einer Ebene liegen n Kreise.
In jedem Kreis ist je eine Sehne derart gezogen, dass Sehnen von zwei verschiedenen Kreisen höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Es ist zu beweisen, dass die so erhaltene Karte stets mit drei Farben regulär gefärbt werden kann (ein Beispiel einer solchen Karte ist Abb. 18).

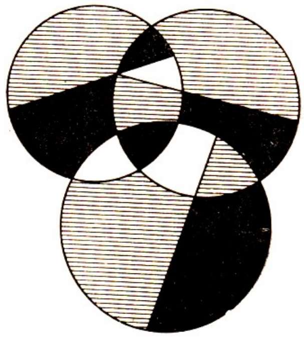


Abb. 18

Aufgaben im Wabenmuster. Das in Abb. 19 dargestellte Wabenmuster hat für Dreifarbenprobleme dieselbe Bedeutung wie das Schachbrett für Zweifarbenprobleme.
Im Gegensatz zum Schachbrett besteht es nicht aus Quadraten, sondern aus regelmäßigen Sechsecken und lässt sich mit drei Farben, etwa in weiß, rot und schwarz, regulär färben (Abb. 20)[6].

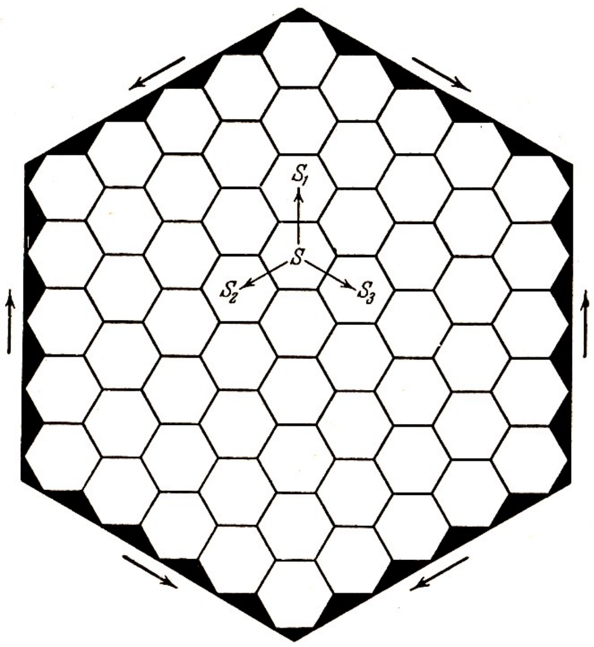


Abb. 19

Man könnte auf einem solchen Brett Spielregeln erfinden; die denen auf dem Schachbrett analog wären. Wir beschränken uns darauf, eine Spielfigur einzuführen, die wir "Kamel" nennen wollen[7].
Mit einem Zug kann das Kamel auf ein Feld in einer der drei in Abb. 19 durch Pfeile angedeuteten Richtungen übergeben: nach oben, nach links unten oder nach rechts unten.

Beispielsweise kann es vom Feld S auf eines der Felder S_1, S_2 und S_3 hinübergehen. In Abb.

[6]In Abb. 20 ist die rote Farbe durch Schraffur angedeutet.
[7]Diesen Namen bekam die Figur in unserem mathematischen Schulzirkel.

20 ist der Weg eines Kameles aus der unteren Ecke des Brettes in die obere und aus der oberen in die untere eingezeichnet.

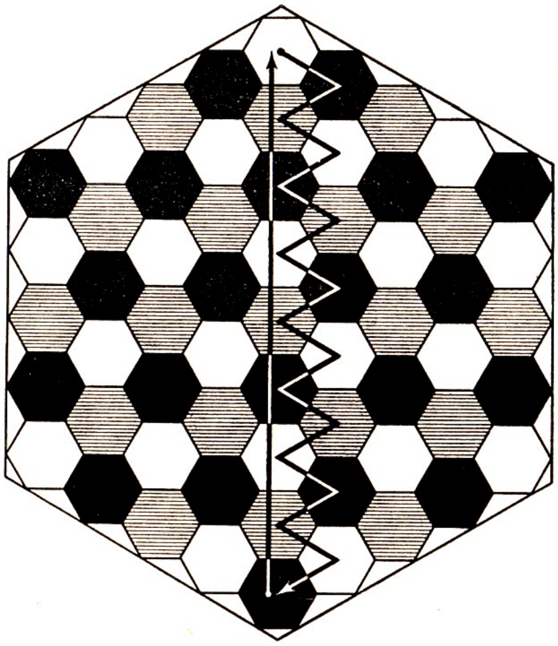


Abb. 20

Unser Wabenmuster besitzt selbst die Form eines Sechseckes. Ein Randstreifen dieses Brettes kann aus verschieden vielen sechseckigen Feldern bestehen. (In Abb. 19 besteht eine Brettseite aus fünf sechseckigen Feldern.)

29. Man bestimme die Anzahl der Felder eines sechseckigen Brettes, dessen Seiten aus je fünf, sechs oder n Feldern bestehen.

30. Man zeichne ein Wabenmuster mit einer Seite aus drei Feldern. Vom Mittelfeld dieses Brettes aus soll ein Kamel alle Felder betreten, ohne eines zweimal zu berühren.

31. Man nummeriere alle Felder des sechseckigen Brettes in der Reihenfolge, in der sie in Aufgabe 30 vom Kamel betreten wurden.
Alle Felder, deren Nummern Vielfache von 3 sind, sind schwarz zu färben; alle Felder, deren Nummern durch 3 dividiert den Rest 1 lassen, sind rot zu färben.
Welche Art der Färbung ergibt das? Welche Färbung erhält man, wenn man das gleiche auf einem anderen Brett, das man mit einem Kamel in der oben genannten Form durchwandern kann, ausführt ?

32. Ein Kamel habe n Schritte gemacht und sei auf das Ausgangsfeld zurückgelangt. Man zeige, dass n durch 3 teilbar ist.

33. Man beweise, dass es unmöglich ist, mit einem Kamel alle Felder eines sechseckigen Brettes mit einer Seite aus drei Feldern je einmal zu betreten, wenn man von einem Eckfeld ausgeht.

34. Ist es möglich, mit einem Kamel alle Felder eines sechseckigen Brettes mit einer Seite aus m Feldern je einmal zu betreten und mit dem letzten Zug auf ein dem Ausgangsfeld benachbartes Feld zu gelangen?

Wir kennzeichnen den Mittelpunkt jedes Feldes unseres sechseckigen Brettes (Abb. 19). Wir verbinden die Mittelpunkte je zweier benachbarter Felder durch eine Strecke. Wenn man jetzt die Konturen der Felder auslöscht und nur die von uns gezeichneten Zentren und Strecken stehen lässt, so ergibt sich das in Abb. 21 gezeichnete Schema.

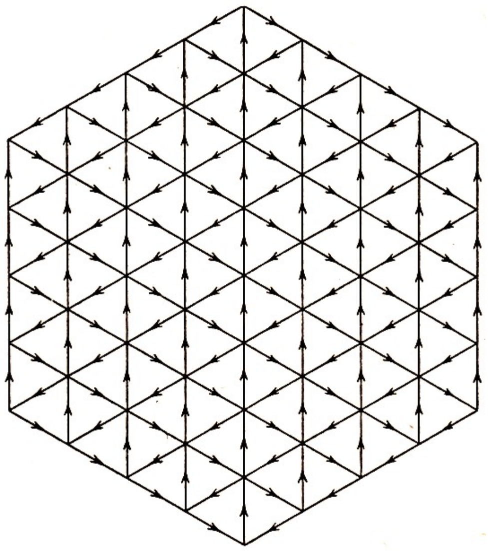


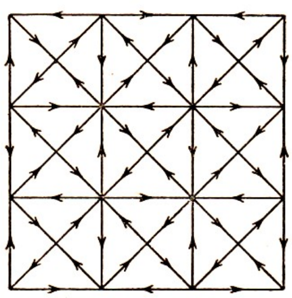
Abb. 21

Punkte in Abb. 21 entsprechen den Feldern in Abb. 19. Das Schema, das wir damit gezeichnet haben, ist für die Lösung von Aufgaben über den Weg eines Kameles sehr bequem. (Die Richtungen, in denen sich das Kamel bewegen kann, sind durch Pfeile angedeutet.)

35. Man beweise, dass es unmöglich ist, mit einem Kamel alle Felder des sechseckigen Brettes in Abb. 19 (oder gleichermaßen alle Punkte des Schemas in Abb. 21) zu betreten, ohne dabei ein Feld zweimal zu berühren.

In Abb. 22 ist ein System von 25 Punkten, die durch gerichtete Strecken verbunden sind, abgebildet. Wir bezeichnen jetzt eine Figur als Kamel, die sich von einem Punkt zu einem benachbarten auf einer Strecke in der angedeuteten Richtung fortbewegt.

Wir haben gesehen, dass es gleichgültig ist, ob ein Kamel sich auf den Feldern eines sechseckigen Brettes oder auf den Punkten eines Schemas wie in Abb. 21 fortbewegt.



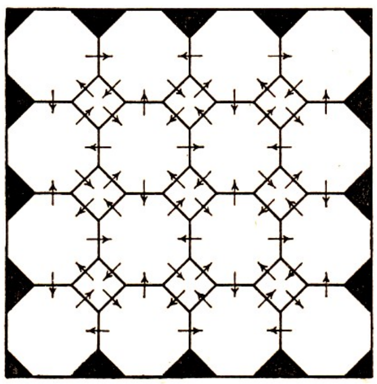


Abb. 22 und 23

In diesem Sinne sind das Schema in Abb. 21 und das Brett in Abb. 19 zueinander dual. In Abb. 23 ist ein Brett dargestellt, das zu dem Schema in Abb. 22 dual ist.

Dieses Brett besteht aus Feldern zweierlei Art, nämlich aus Achtecken und aus Quadraten. Wenn man die Mittelpunkte eines jeden Achtecks und eines jeden Quadrates kennzeichnet, die Mittelpunkte benachbarter Felder verbindet und danach die Umrisse der Felder auslöscht, so ergibt sich das in Abb. 22 dargestellte Schema.

36. Es sind alle Punkte des Schemas in Abb. 22 mit einem Kamel zu betreten, wobei kein

Punkt zweimal berührt werden darf. Die Punkte des Schemas sind in der Reihenfolge zu nummerieren, in der sie betreten wurden. Jede Nummer ist durch ihren Rest bei der Division durch 3 zu ersetzen.
Alle Felder des Brettes in Abb. 23, denen Punkte mit der Nummer 0 im Schema Abb. 22 entsprechen, sind schwarz zu färben; alle Felder, denen Punkte mit der Nummer 1 entsprechen, sind rot zu färben.

37. Man beweise, dass es unmöglich ist, mit einem Kamel alle Felder des Brettes in Abb. 23 hintereinander (jedes nur einmal) zu betreten, wenn man ein achteckiges Feld als Ausgangsfeld wählt.

Man kann ein Kamel auf Brettern betrachten, die viel allgemeiner sind als die in Abb. 21 und 22 dargestellten Muster.
Erinnern wir uns daran, dass als Triangulation eines Vieleckes eine solche Zerlegung in Dreiecke bezeichnet Wird, in der je zwei Dreiecke einen Eckpunkt, eine Seite oder überhaupt keinen Punkt gemeinsam haben. Nehmen wir einmal an, irgendein Vieleck sei trianguliert (wir können dies auch von der ganzen Ebene annehmen) und die Dreiecke, in die es (bzw. die Ebene) zerlegt ist, seien mit zwei Farben, nämlich in Weiß und in Schwarz regulär gefärbt (siehe Abb. 24).

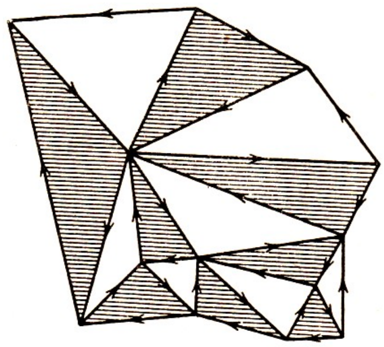


Abb. 24

Als Kamel wollen wir eine Figur bezeichnen, die sich über Seiten und Eckpunkte der Dreiecke fortbewegt, indem sie mit einem Zug von einem Eckpunkt zu einem benachbarten hinüberwandert[8].
Die Richtung der Bewegung soll dabei derart sein, dass in Bezug auf die bei der Bewegung durchlaufene Seite Stets rechts das schwarze und links das weiße Dreieck liegen. (In Abb. 24 sind die möglichen Bewegungsrichtungen durch Pfeile gekennzeichnet.)

Im Gegensatz zu den vorhergehenden Aufgaben beziehen sich die folgenden vier Aufgaben nicht auf ein spezielles, sondern auf beliebige Schemata des von uns beschriebenen Typs.

38. Man beweise, dass ein Kamel von einem beliebigen Eckpunkt eines Schemas zu jedem anderen gelangen kann.

39. Ein Kamel habe n Schritte getan und sei zum Ausgangseckpunkt zurückgekehrt. Man beweise, dass n durch 3 teilbar ist (siehe Aufgabe 4).

40. Es seien A und B zwei beliebige Eckpunkte eines Schemas. Das Kamel kann von Punkt A zu Punkt B auf verschiedenen Wegen gelangen.
Für einen dieser Wege sei die Zahl der notwendigen Züge r, für einen anderen q (Abb. 25). Man beweise, dass $p - q$ durch 3 teilbar ist.

[8]Zwei Eckpunkte heißen benachbart, wenn sie zur gleichen Seite gehören.

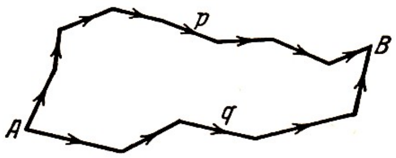


Abb. 25

41. Ein Vieleck (oder die Ebene) sei trianguliert, und die erhaltenen Dreiecke seien mit zwei Farben regulär gefärbt.
Man beweise, dass die Eckpunkte aller Dreiecke mit den Ziffern 0, 1, 2 derart nummeriert werden können, dass je zwei benachbarte Eckpunkte mit verschiedenen Ziffern versehen sind[9] (vgl. Aufgabe 3).

Die für eine reguläre Färbung notwendige Anzahl der Farben ist offenbar nicht von der Größe des Landes, der Form und der Länge der Grenzen abhängig. Sie wird nur durch die gegenseitige Lage der Länder, Grenzen und Eckpunkte bestimmt. Wenn man eine Karte auf eine Gummiplatte zeichnet und diese beliebig ungleichmäßig dehnt (ohne sie jedoch zu zerreißen), so sind alle Karten, die dabei aus der Anfangskarte entstehen, von unserem Standpunkt aus vollkommen gleichwertig. Die zwei Karten in Abb. 26 und 27 sind zum Beispiel so beschaffen.

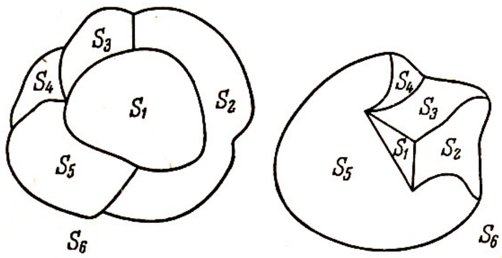


Abb. 26 und 27

In der Formulierung der Aufgaben 3 und 41 wurde von Karten gesprochen, die aus Dreiecken mit geradlinigen Seiten bestehen. Die Lösung dieser Aufgaben ändert sich aber nicht, wenn man statt Karten mit geradlinigen Grenzen solche mit gekrümmten betrachtet. Daher kann das Resultat der Aufgabe 41 folgendermaßen formuliert werden:

Eine Karte bestehe aus Ländern mit je drei Grenzen[10]. Kann diese Karte mit zwei Farben regulär gefärbt werden, so kann man die Eckpunkte jedes Landes dieser Karte mit drei Nummern regulär nummerieren.

Auf die gleiche Weise lässt sich das Resultat der Aufgabe 3 verallgemeinern. Die Lösung bleibt weiter bestehen, da zwei benachbarte Dreiecke nach wie vor verschiedene Orientierung haben, obwohl sie nunmehr auf zwei verschiedene Arten (Abb. 28a und b) aneinandergrenzen können.

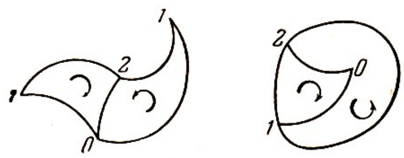


Abb. 28a und b

Duale Karten.
Wir betrachten die Karte in Abb. 29 und kennzeichnen in jedem Land die Hauptstadt durch einen Punkt. Die Hauptstädte von je zwei benachbarten Ländern verbinden wir durch eine

[9] Wir erinnern an die Verabredung, eine solche Nummerierung als regulär zu bezeichnen.
[10] Solche Länder werden wir als Dreiecke bezeichnen; im allgemeinen bezeichnen wir ein Land als n-Eck, wenn es n Grenzen hat.

Eisenbahnlinie (punktierte Linien in Abb. 29), die außer diesen beiden Ländern kein anderes berührt und durch keinen Eckpunkt geht.
Wenn zwei Länder mehrere Grenzen gemeinsam haben, wie zum Beispiel die Länder S_1 und S_2 in Abb. 29, so verbinden wir die beiden Hauptstädte durch mehrere Eisenbahnlinien, und zwar ziehen wir je eine durch jede gemeinsame Grenze.
Dabei achten wir darauf, dass sich verschiedene Eisenbahnlinien nicht kreuzen.

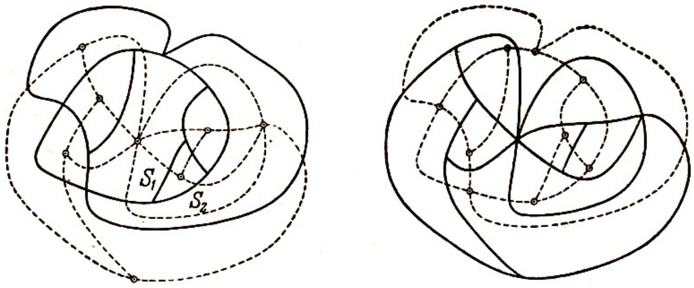


Abb. 29 und 30

Wenn wir nun in unserer Karte die punktierten Linien ausziehen und die "Grenzen" punktieren, so erhalten wir die Karte in Abb. 30.
Dabei vertauschen die ursprüngliche Karte und die Karte der Eisenbahnlinien ihre Rolle: Die ursprüngliche Karte wird zur Eisenbahnkarte ihrer Eisenbahnkarte.

Folglich sind die beiden Karten in Abb. 29 (bzw. in Abb. 30), in der die eine punktiert, die andere ausgezogen gezeichnet ist, einander völlig symmetrisch: Jede von ihnen ist die Eisenbahnkarte der anderen. Wir wollen solche Karten als duale Karten bezeichnen[11].

Zwischen dualen Karten gelten folgende wichtige Beziehungen:

1. Jede Grenze einer dieser Karten schneidet genau eine Grenze der dualen Karte.

2. In jedem Land der einen Karte ist genau ein Eckpunkt der dualen Karte enthalten.

Damit ist zwischen den Elementen (Ländern, Grenzen, Eckpunkten) zweier dualer Karten eine eineindeutige Zuordnung hergestellt[12], wobei den Ländern der einen Karte die Eckpunkte der dualen entsprechen, den Eckpunkten die Länder und den Grenzen wiederum die Grenzen.

3. Benachbarten Ländern der einen Karte entsprechen benachbarte Eckpunkte der dualen Karte und umgekehrt.

4. Ist die Wertigkeit eines Eckpunktes einer der Karten gleich k, so hat das entsprechende Land in der dualen Karte k Grenzen, d.h., es ist nach Vereinbarung ein k-Eck.

Unternehmen wir den Versuch, Eisenbahnlinien für beliebige Karten zu konstruieren, so stoßen wir dabei auf Schwierigkeiten zweierlei Art:

a) Es ist möglich, dass das Schema der Eisenbahnlinien überhaupt keine Karte in unserem Sinne darstellt. Wir betrachten beispielsweise die Karte der Eisenbahnlinien in Abb. 31 (dieses Schema ist in Abb. 32 zu sehen). In diesem Schema gibt es "Grenzen" (AB und AC), die nichts begrenzen; auf beiden Seiten erstreckt sich dasselbe Land.

[11] Die Methode, mit deren Hilfe wir aus der Karte in Abb. 19 die Karte in Abb. 21 erhalten haben, unterscheidet sich von der Methode, die wir eben benutzten, nur dadurch, dass wir dort die Außenflächen nicht berücksichtigten. Um zur Karte in Abb. 19 die entsprechende duale Karte zu bekommen, genügt es daher, zur Karte in Abb. 21 einen einzigen Eckpunkt hinzuzufügen, den man mit allen äußeren Eckpunkten dieser Karte verbinden muss. Das gleiche kann von den Karten in Abb. 22 und 23 gesagt werden.
[12] D.h., jedem Element der einen Karte entspricht ein wohlbestimmtes Element der dualen Karte.

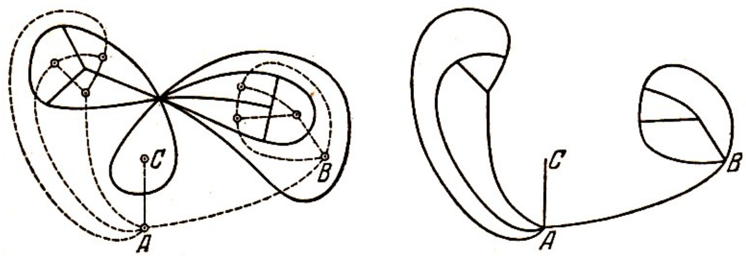


Abb. 31 und 32

b) Das Schema der Eisenbahnlinien in Abb. 33 stellt eine echte Karte dar, jedoch enthält das äußere Land der Eisenbahnkarte die beiden Eckpunkte A und B der ursprünglichen Karte. In diesem Fall liegt daher zwischen der ursprünglichen Karte und der Karte der Eisenbahnlinien keine Dualität vor.

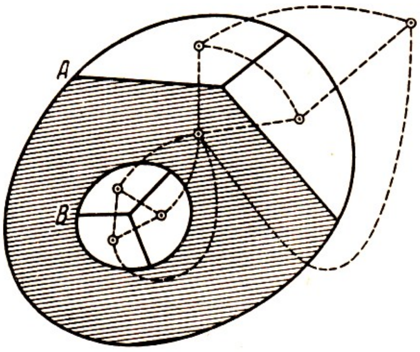


Abb. 33

Die Schwierigkeit b) kann vermieden werden, indem man nur zusammenhängende Karten betrachtet. Wir wollen als zusammenhängende Karten solche Karten bezeichnen, bei denen kein Land die anderen Länder in zwei oder mehr einander nicht berührende Teile trennt. Mit anderen Worten:

Zeichnen wir eine Karte auf einen Bogen Papier, so darf, wenn ein Land aus dieser Karte ausgeschnitten wird, der restliche Teil nicht in einzelne Stücke zerfallen.
Die Karte in Abb. 33 ist keine zusammenhängende Karte. (Das "trennende" Land ist schraffiert.)

Eine zusammenhängende Karte kann man auch folgendermaßen definieren: Von jedem Eckpunkt der Karte kann man, wenn man sich auf den Grenzen fortbewegt, zu jedem anderen Eckpunkt gelangen.

Die Schwierigkeit a) können wir auf dem gleichen Weg vermeiden wie die Schwierigkeit b), indem wir nämlich diejenigen Karten aus der Betrachtung ausschließen, bei denen diese Schwierigkeit auftritt. Wir gehen hier aber den entgegengesetzten Weg:
Wir führen Karten ein, die der Karte in Abb. 32 entsprechen, d.h. Karten mit nichttrennenden Grenzen. Im folgenden werden wir solche Karten nicht antreffen. Sie werden hier nur eingeführt, damit unser Dualitätsprinzip nicht verletzt wird.
Wir formulieren jetzt das Dualitätsprinzip für zusammenhängende Karten:

a) Das Schema der Eisenbahnlinien einer zusammenhängenden Karte ist wieder eine Karte, und zwar eine zusammenhängende Karte.

b) Jede zusammenhängende Karte ist; das Schema der Eisenbahnlinien für die zugehörige Karte der Eisenbahnlinien.

Somit sind eine zusammenhängende Karte und die zugehörige Karte der Eisenbahnlinien stets zueinander dual, wobei für sie die Beziehungen gelten, die wir in 1. bis 4. genannt haben.

Wir können nunmehr folgenden Satz aufstellen, der unmittelbar aus der Eigenschaft 3 der dualen Karten folgt:

Falls die Länder einer Karte regulär mit n Farben gefärbt werden können, kann man die Eckpunkte in der zugehörigen dualen Karte regulär mit n Ziffern nummerierten; falls die Eckpunkte in einer Karte regulär mit n Ziffern nummeriert werden können, kann man die zugehörige duale Karte mit n Farben regulär färben.[13]

Anmerkung:
Es ist nicht schwer einzusehen, dass jede nicht trennende Grenze doppelt gezählt werden muss, damit Eigenschaft 4. gültig bleibt. So ist beispielsweise das Land in Abb. 34 ein Achteck (die Wertigkeit des Eckpunktes A der dualen Karte ist 8).

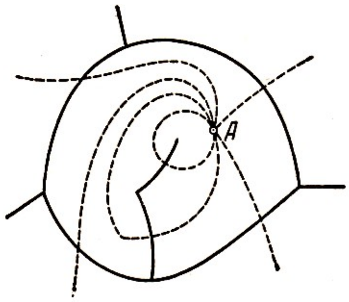


Abb. 34

Mit diesem Vorbehalt bleiben alle Aufgaben, in denen die Anzahl der Grenzen von Ländern bestimmt werden soll, wie zum Beispiel die Aufgaben 19 und 20, gültig.

Färbung normaler Karten mit drei Farben.
Unter einer normalen Karte verstehen wir eine Karte, bei der jeder Eckpunkt die Wertigkeit 3 hat. Ein Beispiel einer normalen Karte zeigt die Abb. 35. Die Bedeutung der normalen Karte wird in § 3 geklärt werden.

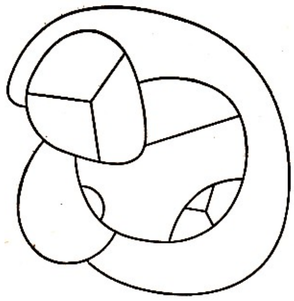


Abb. 35

42. Man beweise, dass eine normale Karte genau dann mit drei Farben regulär gefärbt werden kann, wenn die Anzahl der Eckpunkte jedes ihrer Länder (bzw. die Anzahl ihrer Grenzen) gerade ist.
Es sei darauf hingewiesen, dass der in Aufgabe 42 formulierte Satz nicht die Aufgabe der regulären Färbung mit drei Farben löst, da er nur für normale Karten gilt.

[13]Wir weisen darauf hin, dass es unsinnig ist, von der regulären Färbung einer Karte, die nichttrennende Grenzen enthält, zu sprechen. Tatsächlich findet sich in dieser Karte ein Land, das sich auf beiden Seiten einer seiner Grenzen erstreckt, d.h. ein Land, das sich selbst benachbart ist.

Nach dem genauen Sinn der Definition der regulären Färbung müsste es mit einer Farbe gefärbt sein, die ungleich der Farbe ist, mit der es gefärbt ist. Ebenso unsinnig ist es, von der regulären Nummerierung der zugehörigen dualen Karte zu sprechen: Eine solche Karte enthält unbedingt einen Eckpunkt, der gleichzeitig Anfang und Ende einer der Grenzen ist, d.h. einen Eckpunkt, der sich selbst benachbart ist.

3 Das Vierfarbenproblem. Der Satz von Wolynski.

In diesem Paragraphen werden wir die Färbung von Karten mit vier Farben betrachten. (Es gelingt uns selbstverständlich nicht, diese Frage erschöpfend zu beantworten.)

Zur Lösung des allgemeinen Vierfarbenproblems genügt es, normale Karten zu betrachten; denn wenn man mit vier Farben normale Karten regulär färben kann, können auch alle anderen Karten mit vier Farben regulär gefärbt werden.
Legen wir nämlich um jeden Eckpunkt einer beliebigen Karte, dessen Wertigkeit größer als 3 ist, einen kleinen Kreis, entfernen alle Grenzen im Inneren dieses Kreises und schließen ihn einem der anliegenden Länder an, so erhalten wir tatsächlich eine normale Karte (Abb. 36).

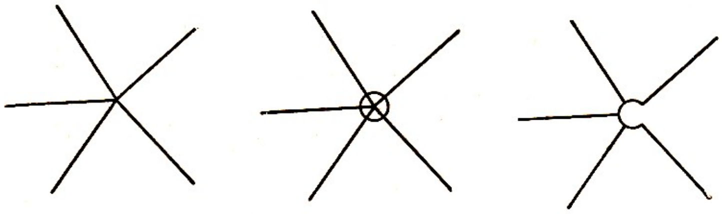


Abb. 36

Wenn man diese mit vier Farben regulär färben kann, so gilt dies offensichtlich auch für die ursprüngliche Karte. Darum werden wir im folgenden nur normale Karten betrachten.

Wir haben bisher bei Karten nur die reguläre Färbung der Länder und die reguläre Nummerierung der Eckpunkte betrachtet. Wir führen jetzt die reguläre Nummerierung der Grenzen ein:

Zwei Grenzen heißen benachbart, wenn sie einen gemeinsamen Eckpunkt haben.
Eine Nummerierung der Grenzen heißt regulär, wenn je zwei benachbarte Grenzen verschiedene Nummern erhalten.

Ein Beispiel für eine reguläre Nummerierung von Grenzen zeigt Abb. 37.

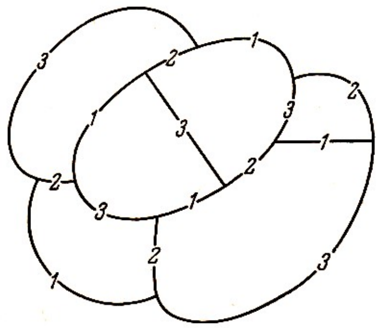


Abb. 37

Das Vierfarbenproblem ist der Aufgabe der regulären Nummerierung von Grenzen mit 3 Ziffern äquivalent. Diese Äquivalenz kommt im Satz von Wolynski zum Ausdruck[14]:

Eine normale Karte kann genau dann mit vier Farben regulär gefärbt werden, wenn ihre Grenzen mit drei Ziffern regulär nummeriert werden können.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich aus den Aufgaben 43 bis 45 folgern. Für uns ist es bequemer, an Stelle der vier Farben künftig vier Nummern zu benutzen; als Nummern wählen wir die Zahlenpaare (0,0), (0,1), (1,0), und (1,1).

[14] Wladimir Viktorowisch Wolynski (1923-1943) war ein talentierter junger Mathematiker. Von 1939 bis 1942 studierte er an der mechanisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität. 1943 fiel er an der Front des zweiten Weltkrieges.

Diese Paare kann man gliedweise addieren. Um dabei keine anderen Ziffern benutzen zu müssen, kann man die Resultate der Addition durch ihren Rest bei der Division durch 2 ersetzen. zum Beispiel

$$(1,0)+(1,0)=(0,0) \qquad , \qquad (0,1)+(1,1)=(1,0)$$

43. Man beweise, dass die Grenzen einer normalen Karte, die mit vier Farben regulär gefärbt werden kann, mit drei Ziffern regulär nummeriert werden können.

44. Die Grenzen einer normalen Karte seien regulär mit den drei Zahlenpaaren (0,1), (1,0), (1,1) nummeriert. Ein Turm habe eine Reihe Felder dieser Karte betreten und sei zum Ausgangsfeld zurückgekehrt.
Man beweise, dass die Summe der Nummern aller Grenzen, die der Turm passiert hat, gleich (0,0) ist.

45. Die Grenzen einer normalen Karte seien mit drei Zahlenpaaren regulär nummeriert. Man beweise, dass diese Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann.

46. Bei einer normalen Karte möge die Anzahl der Grenzen jedes Landes durch 3 teilbar sein. Unter Benutzung des Satzes von Wolynski ist zu beweisen, dass diese Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann.

Am Ende des folgenden Paragraphen, nachdem der Leser den Satz von Euler kennengelernt hat, wird das Vierfarbenproblem für Karten mit weniger als zwölf Ländern gelöst werden.

4 Der Satz von Euler. Der Satz über fünf Farben

Die Grenzen eines Landes können in einzelne, unzusammenhängende Stücke zerfallen (Abb. 38a und b). In diesem Fall handelt es sich aber - wie aus den Abbildungen ersichtlich ist - um ein trennendes Land. Folglich sind es nichtzusammenhängende Karten.

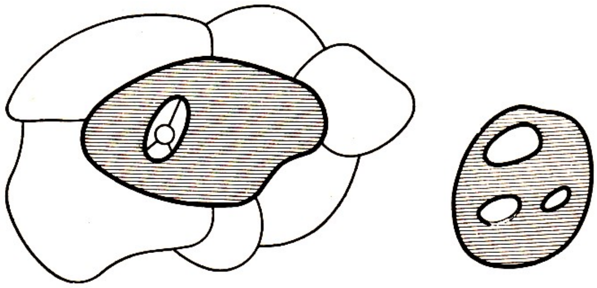


Abb. 38a und b

Beschränkt man sich jedoch auf zusammenhängende Karten, so bilden die Grenzen jedes Landes einen Rand, der dem Umriss eines geradlinigen Vieleckes bis auf den Unterschied gleicht, dass die Stücke zwischen den Eckpunkten - im allgemeinen - krummlinig sind. (In einzelnen Fällen kann dieser Rand sich selbst berühren, wie es in Abb. 39 gezeigt ist.)

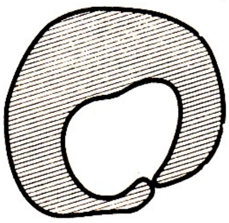


Abb. 39

Unter Benutzung dieser Ähnlichkeit zwischen den Ländern einer zusammenhängenden Karte und gewöhnlichen Vielecken beweisen wir den berühmten Eulerschen Satz.[15]

Ist s die Anzahl der Länder, v die Anzahl der Eckpunkte und g die Anzahl der Grenzen einer zusammenhängenden Karte, so ist

$$s + v = g + 2$$

Wir beweisen zuerst diesen Satz für Karten, deren Länder Vielecke mit geradlinigen Seiten sind.
Das Meer ist in einer solchen Karte der äußere Teil eines Vieleckes (in Abb. 40 ist das Meer schraffiert).

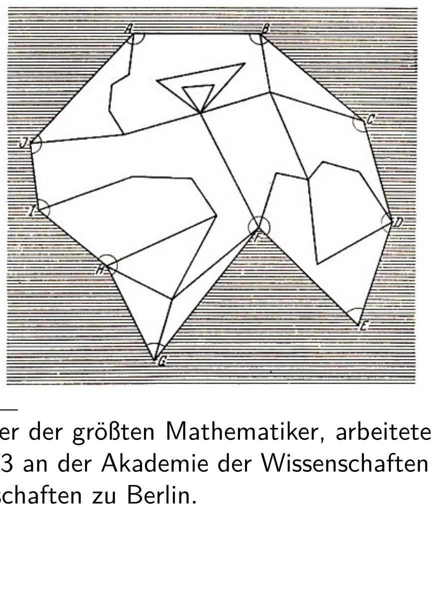


Abb. 40

[15] Leonhard Euler, geb. 1707 in Basel, einer der größten Mathematiker, arbeitete von 1727 bis 1741 und von 1766 bis zu seinem Tode im Jahre 1783 an der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, von 1741 bis 1766 an der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Wir berechnen die Summe der inneren Winkel aller Vielecke, aus denen unsere Karte besteht. Die Anzahl dieser Vielecke ist $s-1$ (alle Länder außer dem Meer). Hat ein Vieleck n Seiten, so ist die Summe seiner inneren Winkel gleich $2R(n-2)$, wobei R ein rechter Winkel ist. Daher ist die Summe der inneren Winkel aller Vielecke gleich

$$T = 2R(n_1 - 2) + 2R(n_2 - 2) + ... + 2R(n_{s-1} - 2)$$

wobei $n_1, n_2, n_3, ..., n_{s-1}$ die Anzahlen der Seiten unserer Vielecke sind. Diese Summe ist gleich

$$T = 2R[n_1 + n_2 + ... + n_{s-1} - 2(s-1)]$$

Wir bezeichnen mit g_a die Zahl der äußeren (am Meere liegenden) und mit g_i alle inneren (nicht am Meere liegenden) Grenzen. Dann ist $g = g_i + g_2$ (in Abb. 40 ist $g_i = 32, g_a = 10$). Nach Aufgabe 19 ist

$$n_1 + n_2 + ... + n_{s-1} + g_a = 2g \qquad , \qquad n_1 + n_2 + ... + n_{s-1} = 2g - g_a$$

Daher ist

$$T = 2R[2g - g_a - 2(s-1)]$$

Wir berechnen jetzt diese Summe T auf anderem Wege. Sei v_i die Anzahl der inneren Eckpunkte, v_a die Anzahl der Eckpunkte, die zum Meer gehören (in Abb. 40 ist $v_i = 19, v_a = 10$). Offenbar ist $v = v_a + v_i$ und $g_a = v_a$.
Die Summe der Winkel, die zu einem inneren Eckpunkt der Vielecke gehören, ist $4R$. Daher ist die Summe aller Winkel, die zu inneren Eckpunkten gehören, gleich $4Rv_i$.

Um T zu erhalten, muss man alle am Meer liegenden Winkel (sie sind in Abb. 40 gekennzeichnet), mit anderen Worten, die Summe aller Innenwinkel des Vieleckes A, B, C, ..., J, also $2R(v_a - 2)$ hinzuaddieren. Somit ist

$$T = 4Rv_i + 2R(v_a - 2) = 4R(v - v_a) + 2R(v_a - 2) = 2R(2v - v_a - 2)$$

Indem wir die beiden Ausdrücke für T gleichsetzen, erhalten wir

$$2R[2g - g_a - 2(s-1)] = 2R[2v - v_a - 2] \quad , \quad 2g - g_a - 2(s-1) = 2v - v_a - 2$$

Aus $g_a = v_a$ folgt

$$2g - 2(s-1) = 2v - 2 \qquad , \qquad s + v = g + 2$$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, in dem die Länder auch krummlinige Grenzen haben können. Es seien nach wie vor v die Anzahl der Eckpunkte, s die Anzahl der Länder und g die Anzahl der Grenzen. Auf den Grenzen führen wir neue Hilfseckpunkte der Wertigkeit zwei ein (in Abb. 41 sind A, B, C, D, E, F, G, H, I solche Eckpunkte).

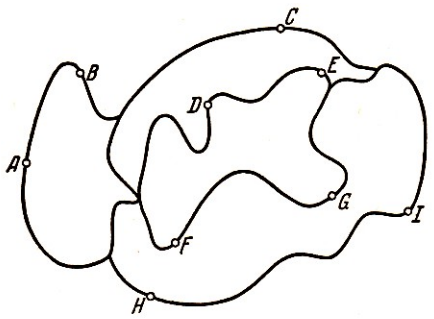


Abb. 41

Dadurch erhalten wir neue Grenzen (die Teile der alten Grenzen zwischen den neuen Eckpunkten), deren Anzahl gleich der der neuen Eckpunkte sein wird.
Nunmehr ersetzen wir in der neuen Karte jede krummlinige Grenze durch eine gerade Strecke mit den gleichen Endpunkten. Wenn man die Hilfseckpunkte genügend dicht wählt (wir können beliebig viele dieser Punkte einführen), so werden sich diese Strecken nicht schneiden. Wir erhalten eine neue Karte (punktierte Linien in Abb. 42), deren sämtliche Länder geradlinige Vielecke sind.
Wenn die Anzahl der Hilfseckpunkte gleich v' und die der neu entstandenen Grenzen gleich g' ist, so wird die Gesamtanzahl der Eckpunkte in der neuen Karte gleich $v' + v$ und die der Grenzen gleich $g' + g$ sein.

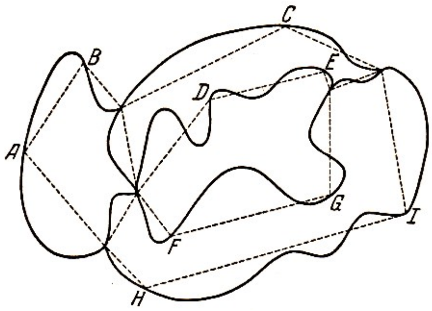


Abb. 42

Die Anzahl der Länder bleibt konstant. Wie bewiesen wurde, gilt für diese Karte der Eulersche Satz, d.h., es ist

$$(v + v') + s = (g + g') + 2$$

Aus $v' = g'$ folgt $v + s = g + 2$, was zu beweisen war.

47. In einer Ebene seien sechs Punkte gegeben. Jeder Punkt sei mit jeweils vier anderen Punkten durch sich paarweise nicht schneidende Kurven verbunden. Man beweise, dass auf der erhaltenen Karte alle Länder Dreiecke sind.

48. In einer Ebene seien sieben Punkte gegeben. Man beweise, dass es unmöglich ist, jeden Punkt mit vier anderen durch sich paarweise nicht schneidende Kurven zu verbinden. (Hierbei ist das Ergebnis von Aufgabe 4 zu benutzen.)

49. Es seien drei Häuser und drei Brunnen gegeben. Man beweise, dass es unmöglich ist, jedes Haus mit jedem Brunnen durch Wege zu verbinden, die sich nirgends schneiden.

50. In der Ebene seien fünf Punkte gegeben. Man beweise, dass es unmöglich ist, jeden Punkt mit jedem anderen durch sich paarweise nicht schneidende Kurven zu verbinden.

51. Man beweise, dass es keine Karte gibt, in der fünf Länder jeweils paarweise aneinandergrenzen.

Die Aufgabe 51 legt die Vermutung nahe, dass vier Farben zur regulären Färbung einer jeden Karte genügen. Auf dem Resultat dieser Aufgabe basiert der Satz über die fünf Farben. Offensichtlich kann man beim Beweis dieses Satzes alle Eckpunkte mit der Wertigkeit zwei ausschließen.
In den Aufgaben 52 bis 54 werden wir annehmen, dass die Wertigkeit jedes Eckpunktes mindestens gleich drei ist.

52. Man beweise, dass in jeder beliebigen Karte, in der die Eckpunkte sämtlich eine Wertigkeit von mindestens drei haben, ein Land existiert, das weniger als sechs Grenzen besitzt.

53. Man beweise, dass man jede Karte mit sechs Farben regulär färben kann[16].

54. Der Fünffarbensatz. Man beweise, dass man jede Karte mit fünf Farben regulär färben kann. (Man benutze das Ergebnis von Aufgabe 51.)

Man kann mit Methoden, die den bei der Lösung der Aufgabe über fünf Farben angewandten analog sind, für einen Spezialfall das Vierfarbenproblem lösen. Dies wird in den Aufgaben 55 und 56 getan.
Genau wie bei der Aufgabe über fünf Farben setzen wir voraus, dass die betrachtete Karte keine Eckpunkte mit der Wertigkeit zwei enthält.

55. Man beweise, dass für eine zusammenhängende Karte, in der die Eckpunkte eine Wertigkeit von mindestens drei haben. die Ungleichung $g \leq 3s - 6$ gilt.

56. Man beweise, dass jede Karte mit weniger als zwölf Ländern mit vier Farben regulär gefärbt werden kann.

Schlussbemerkungen
Die Aufgaben über das Verhalten und die Eigenschaften von Figuren und Körpern bei beliebigen Deformationen, bei denen die Figuren und Körper nicht zerlegt und anders zusammengefügt werden (solche Aufgaben sind insbesondere die über das Mehrfarbenproblem), gehören zum Problemkreis eines besonderen Gebietes der Mathematik, der Topologie.

Die Topologie ist einer der jüngsten Zweige der Mathematik. Sie hat sich um die letzte Jahrhundertwende zu einer selbständigen mathematischen Disziplin entwickelt. Eine bedeutende Rolle in der Weiterentwicklung der Topologie spielt in den letzten dreißig Jahren die sowjetische topologische Schule, deren hervorragendste Vertreter Pawel S. Urysohn (1898-1924), Pawel S. Alexandroff (geb. 1896) und Lew S. Pontrjagin (geb. 1908) sind. In der letzten Zeit wurden auf dem Gebiet der Topologie hervorragende Ergebnisse von französischen Mathematikern erzielt (J. Leray, J.P. Serre u.a.).

Darstellungen der Fragen, die mit dem Eulerschen Satz und dem Vierfarbenproblem zusammenhängen und die sich von der Darlegung in diesem Buch unterscheiden, findet der Leser in folgenden Büchern:

G. Rademacher und O. Toeplitz, "Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik". Springer-Verlag, Berlin 1930, Kap. 13.

D. Hilbert und S. Conn-Vossen, "Anschauliche Geometrie". Springer-Verlag, Berlin 1932, Kap. VI.

Im letztgenannten Buch werden Aufgaben über Färbung von Karten auf komplizierteren Flächen gelöst. Darin findet der Leser auch die Anfangsgründe der Topologie. Für das weitere Studium der Topologie können folgende Bücher empfohlen werden:

P.S. Alexandroff und W.A. Jefremowitsch, "Über die einfachsten Begriffe der modernen Topologie". ONTI, M.-L. 1935, sowie "Abriss der grundlegenden Begriffe der Topologie"). ONTI, M.-L. 1936.

O.K- Shitomirski, W.D. Lwowski und W.I. Milinski, "Aufgaben zur höheren Geometrie". Teil I, ONTI, M.-L. 1935, Abschnitt I.

[16] Es wird bei dieser und den nachfolgenden Aufgaben vorausgesetzt, dass die Karte keine nichttrennenden Grenzen hat.

5 Über die Färbung der Sphäre mit drei Farben

Eine Sphäre[17] sei in eine bestimmte Anzahl Gebiete zerlegt, d.h., auf der Sphäre sei eine Karte gezeichnet. Wir untersuchen die Frage, ob hier ein Land existiert, das Antipoden, d.h. zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Sphäre. enthält.
Ist die Zahl der Länder gleich vier, so ist es möglich, dass kein Land existiert, das Antipoden besitzt (Abb. 43).

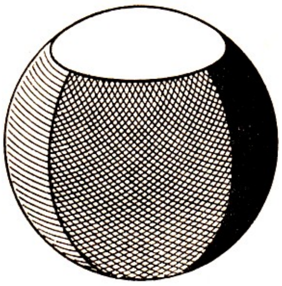


Abb. 43

Ein derartiges Land braucht also bestimmt nicht zu existieren, wenn die Anzahl der Länder größer als vier ist. Umgekehrt, wenn die Karte nur aus zwei Ländern besteht, so enthält ein Land bestimmt die beiden Endpunkte eines Durchmessers der Sphäre[18] (es kann allerdings der Fall eintreten, dass diese Punkte gerade zur Grenze zwischen beiden Ländern gehören. Als Beispiel wählt man eine Sphäre, die in zwei Hemisphären geteilt ist).

Es entsteht nun die Frage, wie sich Abb. 43 die Sache verhält, wenn die Karte aus drei Ländern besteht. Wir werden beweisen, dass bei drei ebenso wie bei zwei Ländern stets ein Land zu finden ist, das ein Paar diametral gegenüberliegender Punkte enthält; man kann Sogar eine viel allgemeinere Behauptung beweisen:

Ist eine Sphäre in eine beliebige Anzahl von Gebieten unterteilt und sind diese Gebiete auf beliebige Weise zu drei Gruppen zusammengefasst, so finden sich stets zwei diametral gegenüberliegende Punkte, die zu Ländern der gleichen Gruppe gehören.[19]

Der Anschaulichkeit halber wollen wir uns vorstellen, dass die Länder einer Gruppe mit einer Farbe gekennzeichnet sind, zum Beispiel die Länder der ersten Gruppe mit blauer, die der zweiten mit schwarzer und die der dritten mit roter Farbe.

1. Wir beweisen diesen Satz indirekt. Angenommen, die Karte K auf der Sphäre sei mit drei Farben gefärbt und kein Paar diametral gegenüberliegender Punkte würde in Ländern gleicher Farbe liegen (wir wollen solche Paare einfarbig nennen).

Diese Annahme führen wir auf folgende Art zum Widerspruch:
Wir beweisen, dass aus jeder Karte, die keine einfarbigen Punktepaare enthält, eine neue Karte konstruiert werden kann, die wiederum keine einfarbigen Punktepaare enthält, jedoch aus einer geringeren Anzahl Länder besteht als die erste. Indem wir also von der Karte K ausgehen, deren Existenz wir vorausgesetzt hatten, konstruieren wir die Karte K_1 mit einer kleineren Anzahl Länder, die keine einfarbigen Punktepaare enthält.

[17] Unter Sphäre verstehen wir die Oberfläche der Kugel.

[18] Es genügt zum Beweis, einen beliebigen Punkt A zu betrachten, der nur Grenze zwischen den beiden Ländern gehört. Sein Antipode A' gehört zu einem der beiden Länder. Da A zu demselben Land gehört (ein Punkt der Grenze gehört beiden Ländern an), bilden A und A' das gesuchte Punktepaar.

[19] Dieser Satz wurde (in viel allgemeinerer Formulierung) von den beiden sowjetischen Mathematikern L.A. Ljusternik und L.G. Schnirelman abgeleitet.

Aus der Karte K_1 können wir aber dann nach der gleichen Methode eine Karte K_2 konstruieren usw. Wir erhalten eine unendliche Folge von Karten

$$K, K_1, K_2, K_3, ..., K_m, ...$$

wobei keine von ihnen einfarbige Punktepaare enthält.
Bezeichnet man die Anzahl der Länder der Karte K mit n und die der Karte K_i mit n_i so ergibt sich

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > ... > n_m > ...$$

Damit erhalten wir eine monoton fallende unendliche Folge ganzer positiver Zahlen, was jedoch unmöglich ist und somit einen Widerspruch darstellt. Die hier benutzte Methode eines indirekten Beweises, bei dem man eine monoton fallende unendliche Folge positiver ganzer Zahlen erhält, heißt Deszendenz-Methode.

Es sei also eine beliebige Karte K gegeben, die keine einfarbigen Punktepaare enthält. Es soll eine Karte K_1 konstruiert werden, die ebenfalls keine einfarbigen Punktepaare enthält, jedoch aus einer geringeren Anzahl Länder als die Karte K besteht.

2. Falls die Karte K nicht regulär ist, d.h., wenn es in ihr Grenzen gibt, die Länder gleicher Farbe trennen, so wollen wir hier bemerken, dass man sofort die geforderte Karte erhält, indem man diese Grenzen entfernt. Im folgenden werden wir deshalb nur solche Fälle betrachten, in denen die Karte K regulär gefärbt ist.

Wir beweisen folgenden Hilfssatz:

Ein zu einem Grenzpunkt diametral entgegengesetzt liegender Punkt ist ein innerer Punkt, d.h., er liegt echt im Inneren eines Landes.

Tatsächlich gehört in einer regulär gefärbten Karte jeder Grenzpunkt mindestens zwei verschieden gefärbten Ländern an. Der Grenzpunkt A gehöre beispielsweise zu einem roten und einem blauen Land.
Dann kann sein Antipode A' weder dem blauen noch dem roten Land angehören, d.h., er liegt echt im Inneren eines schwarzen Landes.

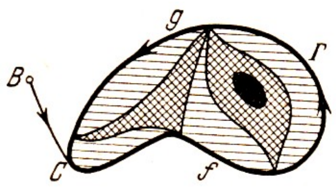


Abb. 44

3. Es sei B ein Punkt, der auf der Grenze eines roten Landes liegt. Wir bewegen uns von Punkt B aus auf den Grenzen der Karte derart fort, dass sich links von uns nur rote Länder befinden (Abb. 44)[20]. Diese Bewegung setzen wir so lange fort, bis wir zu einem Punkt C gelangen, den wir schon einmal berührt hatten.

Betrachten wir jetzt die geschlossene doppelpunktfreie Kurve $CfgC$ (Abb. 44), welche wir mit Γ bezeichnen wollen. Die Karte auf der Sphäre werden wir einzeln für die "nördliche" und "südliche" Halbkugel zeichnen.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir der Anschaulichkeit halber voraus, dass die Kurve Γ vollständig in der nördlichen Halbkugel liegt (Abb. 45).

[20]In den Abb. 44, 46 und 47 ist die rote Farbe schraffiert, die blaue kariert dargestellt.

Wir konstruieren jetzt die Kurve Γ', die aus den Punkten besteht, welche zu den Punkten von Γ diametral entgegengesetzt liegen. Die Kurve Γ' besteht nach dem Hilfssatz nur aus inneren Punkten, d.h., sie schneidet nirgends die Grenzen der Karte.
Insbesondere schneidet sie nicht die aus Grenzen bestehende Kurve Γ.

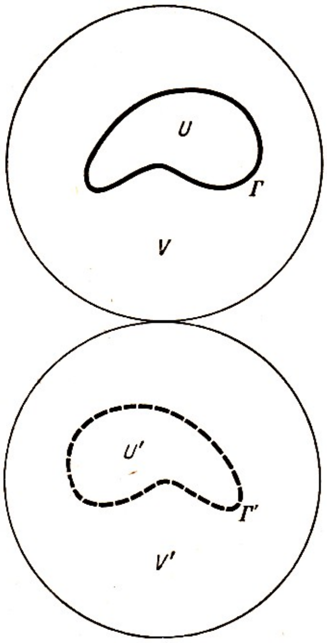


Abb. 45

Die Kurve Γ teilt die Sphäre in die beiden Teile U und V (Abb. 45). Genauso teilt Γ' die Sphäre in die beiden Teile U' und V', wobei U' aus Punkten, die denen von U diametral gegenüberliegen, besteht, und V' aus Punkten, die denen von V diametral gegenüberliegen.

Da Γ und Γ' sich nicht schneiden, liegt Γ' in einem der Teile U oder V, beispielsweise in V. Dann befindet sich Γ in V'.

4. Da Γ' keine Grenzen der Karte schneidet, liegt sie vollständig im Inneren eines Landes. Alle Punkte von P gehören roten Ländern an; daher gehört kein Punkt von Γ' einem roten Land an, und das Land, in dem Γ' liegt, kann nicht rot gefärbt sein.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass dieses Land schwarz gefärbt sei (Abb. 46). In diesem Falle kann kein Punkt von Γ einem schwarzen Land angehören, d.h., alle Grenzen, aus denen Γ besteht, sind Grenzen zwischen blauen und roten Ländern.

[21] Da auf der einen Seite von Γ nur rote Länder liegen, liegen auf der anderen nur blaue (die Karte ist regulär gefärbt).
Es sollen beispielsweise - wie in unserer Abbildung 46 - auf der Seite U rote und auf der Seite V blaue Länder liegen.

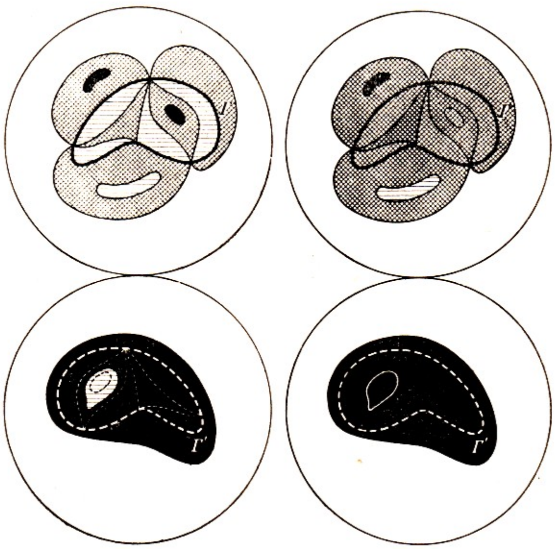


Abb. 46 und 47

Wir färben nun alle Länder in U blau und gleichzeitig alle Länder in U' schwarz. Dann wird aber Γ von beiden Seiten durch Länder ein und derselben Farbe berührt, nämlich von blauen (Abb. 47).

[21] In Abb. 46 sind die Linien angegeben, welche aus den Punkten bestehen, die den Grenzpunkten im Gebiet U diametral gegenüberliegen.

Bei dieser Umfärbung sind, wie wir bemerken wollen, keine einfarbigen Punktepaare aufgetreten, da erstens die Punkte in U blau geworden sind und ihre Antipoden in U' schwarz und zweitens alle anderen Punkte sowie ihre Antipoden die Farbe nicht gewechselt haben. Nunmehr entfernen wir Γ und alle Länder, die innerhalb von U und U' liegen. Dabei verringert sich die Gesamtzahl der Länder unserer Karte (da Γ sicher mindestens zwei Länder voneinander getrennt hat).

Damit haben wir für eine beliebige Karte K, die keine einfarbigen Punktepaare enthält, eine Karte K_1 konstruiert, die eine geringere Anzahl Länder hat und ebenfalls keine einfarbigen Punktepaare enthält. Wie schon in Nummer 1 festgestellt wurde, ist unser Satz damit bewiesen.

6 Lösungen

1. Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion[22] Eine Karte, die durch eine Gerade gebildet wird, kann mit zwei Farben regulär gefärbt werden. Der Satz sei für n Geraden bewiesen. Wir zeigen, dass er dann auch für $n+1$ Geraden gilt.

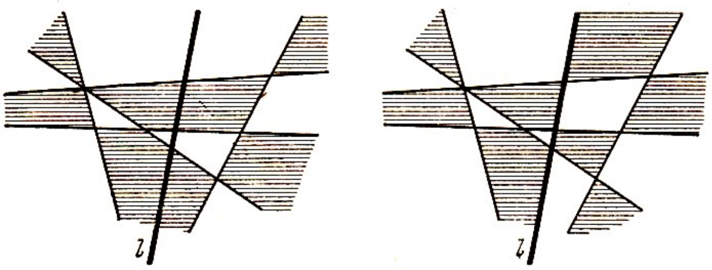


Abb. 48a und b

Wir betrachten eine Karte K, die aus $n+1$ Geraden gebildet wird, und entfernen eine Gerade, etwa die Gerade l. Dann erhalten wir eine Karte K^*, die nach Voraussetzung mit zwei Farben regulär gefärbt werden kann.

Wir färben diese Karte in schwarze und weiße Länder. Hiernach nehmen wir die vorher entfernte Gerade l wieder hinzu. Sie teilt die Karte in zwei Hälften, von denen jede mit zwei Farben regulär gefärbt ist (siehe Abb. 48a).
Wir behalten nun in einer der beiden Hälften die Farben aller Länder bei und ersetzen in der anderen Hälfte weiß durch schwarz und schwarz durch weiß (siehe Abb. 48b).

Hierbei bleibt jede der Halbebenen regulär gefärbt; falls sich zwei benachbarte Länder der Karte K in verschiedenen Halbebenen befinden, so bedeutet das, dass sie längs eines Stückes der Geraden aneinandergrenzen und aus der Zerlegung irgendeines Landes der Karte K^* durch die Gerade entstanden sind.
Dieses Land der Karte K^* war mit irgendeiner Farbe gefärbt; nach seiner Teilung in zwei Länder hatten wir die Farbe einer der Hälften geändert.

Es sind also in der Tat auch in diesem Fall zwei benachbarte Länder der Karte K mit verschiedenen Farben gefärbt, d. h., wir haben eine reguläre Färbung erhalten. Der Satz gilt für $n=1$, nach dem Bewiesenen gilt er auch für 1 + 1 = 2 Geraden, für 2 + 1 = 3 Geraden usw., also für eine beliebige Anzahl von Geraden.

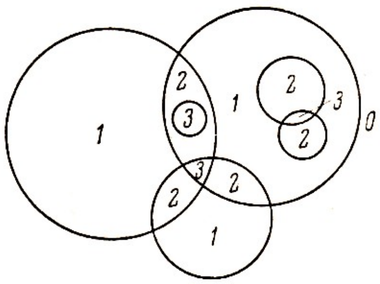


Abb. 49

2. Diese Aufgabe kann genau wie die vorhergehende durch vollständige Induktion gelöst werden. Wir werden jedoch nicht so verfahren (wir empfehlen dies aber dem Leser als nützliche Übung), sondern nach folgender Überlegung vorgehen.

[22] Vergleiche hierzu das Bändchen Nr. III dieser Reihe: I.S. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (Anm. d. Red).

Wir zählen für jedes der Gebiete, in welche die Ebene zerlegt wird, von wie vielen unserer Kreislinien es umfasst wird (für die Karte der Abb. 5 ist das Resultat dieser Zählung in Abb. 49 angegeben).
Wir bemerken, dass sich die Zahlen, die benachbarten Gebieten entsprechen, stets um 1 unterscheiden.
In der Tat, wenn zwei benachbarte Gebiete A und B durch einen Bogen eines Kreises C getrennt werden, so liegt eines der Gebiete im Inneren von C, das andere im Äußeren von C; in Bezug auf jeden anderen von C verschiedenen Kreis aber liegen beide Gebiete A und B gleichzeitig entweder im Inneren oder im Äußeren.
Mit der einen Farbe färben wir nun alle Länder mit gerader Nummer und mit der anderen Farbe die Länder mit ungerader Nummer, womit wir eine reguläre Färbung unserer Karte erhalten.

3. Bei dieser Nummerierung sind die Ecken jedes beliebigen Dreiecks mit den Ziffern 0, 1, 2 bezeichnet. Wir zeichnen längs der Seiten des Dreiecks Pfeile, und zwar in der Richtung von 0 nach 1, von 1 nach 2 und von 2 nach 0. Hierdurch erhält jedes Dreieck eine bestimmte Orientierung (einen Umlaufsinn).

Unter diesen Dreiecken kann man zwei Typen unterscheiden: Dreiecke mit Orientierung im Uhrzeigersinn und Dreiecke mit dem Uhrzeiger entgegengesetzter Orientierung (Abb. 50 und 51). Wir färben die Dreiecke des ersten Typus weiß und. die des zweiten Typus schwarz. Da zwei benachbarte Dreiecke stets entgegengesetzte Orientierung haben (siehe Abb. 52), erhalten wir eine reguläre Färbung.

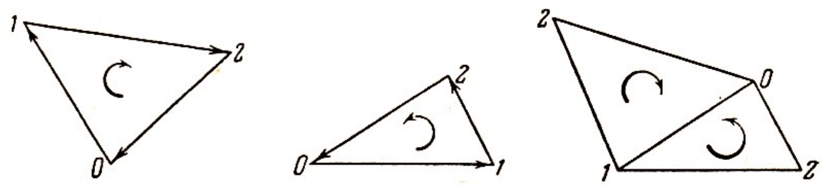


Abb. 50, 51, 52

4. Wir nehmen das Gegenteil an und färben unsere Karte regulär in schwarz und weiß. Dabei mögen wir k weiße Länder mit $n_1, n_2, ..., n_k$ und l schwarze Länder mit $n'_1, n'_2, ..., n'_l$ Grenzen erhalten. Jede Grenze gehört zu genau einem weißen und einem schwarzen Land; wird die Gesamtzahl der Grenzen mit g bezeichnet, so gilt

$$g = n_1 + n_2 + ... + n_k + n'_1 + n'_2 + ... + n'_l$$

Ist von den Zahlen $n_1, n_2, ..., n_k, n'_1, n'_2, ..., n'_l$ bekannt, dass davon $k + l - 1$ durch m teilbar sind, so folgt aus dieser Gleichung, dass alle durch m teilbar sind.

5. In Abb. 53 sind die Felder in der Reihenfolge, in der sie betreten wurden, nummeriert.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

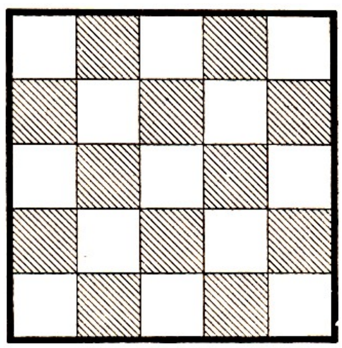


Abb. 53 und 54

6. Hierzu siehe Abb. 53 und 54. Wir erhielten eine reguläre Färbung des aus 25 Quadraten bestehenden Schachbrettes. Auf jedem beliebigen anderen Schachbrett erhalten wir ebenfalls eine reguläre Färbung. Es möge nämlich ein Schachbrett mit zwei Farben regulär gefärbt sein. Das Rössel springt dann bei jedem Zug von einem Feld der einen Farbe auf ein Feld der anderen Farbe.

Werden alle Felder in der Reihenfolge nummeriert, in der sie betreten wurden, so erhalten aus diesem Grund die Felder mit gerader Nummer die eine Farbe (beispielsweise schwarz) und alle Felder mit ungerader Nummer die andere Farbe (beispielsweise weiß). Wenn wir umgekehrt die Felder mit gerader Nummer schwarz färben, so kommen wir folglich lediglich auf die frühere Färbung zurück, d.h., wir erhalten eine reguläre Färbung.

7. Nein, das ist unmöglich. Wir färben das Brett regulär mit zwei Farben und nummerieren seine Felder in der Reihenfolge, in der sie betreten wurden. Das erste Feld erhält die Nummer 1, das letzte die Nummer 49; sie werden daher die gleiche Farbe erhalten (da es Felder mit ungerader Nummer sind - man vergleiche die Lösung der vorhergehenden Aufgabe). Zwei benachbarte Felder sind jedoch stets verschieden gefärbt.

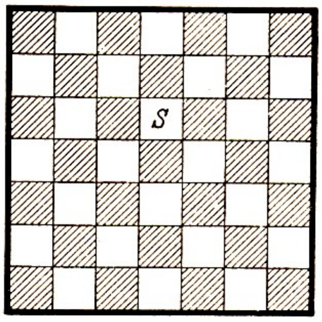


Abb. 55

8. Wir färben unser Brett regulär mit zwei Farben. Dabei erhalte das Feld S die Farbe weiß (siehe Abb. 55).
Würde das Rössel von diesem Feld aus das Brett durchlaufen und würden alle Felder in der Reihenfolge, in der sie betreten werden, nummeriert, so erhielten die Felder mit ungerader Nummer weiß (vergleiche mit der Lösung der Aufgabe 6). Es wären dies die Felder 1, 3, 5, ..., 49. Demnach müsste die Zahl der weißen Felder 25 sein und nicht, wie aus Abb. 55 ersichtlich, 24.

9. Bei jedem Sprung des Rössels wechselt die Farbe des Feldes, auf das es gelangt. Wenn es auf ein Feld mit der gleichen Farbe wie das Ausgangsfeld gelangt (im gegebenen Fall auf das Ausgangsfeld selbst), hat es daher eine gerade Anzahl Sprünge getan.

10. Jeder Schritt des Turmes kann durch eine Serie kleiner Schritte ersetzt werden, bei denen sich der Turm von einem Feld zu einem Nachbarfeld bewegt. Bei jedem derartigen einfachen Schritt des Turmes wechselt die Farbe des Feldes, auf dem er sich befindet.

Beim Überstreichen des Schachbrettes macht er 63 einfache Schritte, also eine ungerade Anzahl einfacher Schritte. Demgemäß erreicht er schließlich ein Feld, das anders gefärbt ist als das Ausgangsfeld. Die Felder A und B haben jedoch die gleiche Farbe.

11. Nein, das ist unmöglich. Ein Dominostein ist in zwei Hälften aufgeteilt, wobei auf jeder eine der 7 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 dargestellt ist. Es gibt soviel Steine wie Paare dieser Zahlen.

Daher kommt jede der Zahlen sechsmal in einer Kombination mit anderen Zahlen vor; außerdem gibt es einen Stein, auf dessen beiden Hälften die gleiche Zahl steht.

Insgesamt kommt also jede Zahl achtmal vor.

Beim Zusammenlegen der Kette der Dominosteine fügt man stets Hälften mit gleicher Zahl aneinander; daher erscheint jede Zahl im Inneren der Kette n mal, wobei n eine gerade Zahl ist, und an den Enden $8 - n$ mal, d.h. wiederum eine gerade Zahl von Malen. Folglich erscheint eine Zahl entweder an keinem Ende (Null ist eine gerade Zahl) oder gleichzeitig an beiden Enden.

12. Es sei N die Zahl der Menschen, die irgendwann auf der Erde leben, und m die Anzahl der von ihnen gewechselten Händedrucke. Wir nummerieren alle Leute und bezeichnen mit n_k die Anzahl Händedrucke, die von dem k-ten Menschen gewechselt wurden.
Wenn der k-te Mensch dem l-ten die Hand gedrückt hat, so ist dieser Händedruck sowohl in der Zahl n_k als auch in der Zahl n_l enthalten. Daher ist auch in der Summe

$$S = n_1 + n_2 + ... + n_N \qquad (N \text{ Summanden})$$

jeder Händedruck zweimal enthalten und

$$S = 2m$$

Wenn jedoch die Summe irgendwelcher Zahlen gerade ist, so ist die Anzahl der ungeraden Summanden gerade.

13. Falls alle Teilnehmer der Versammlung einer ungeraden Anzahl Bekannter die Hand gedrückt hätten, so würde folgen, dass jeder der 225 Menschen (225 ist eine ungerade Zahl) eine ungerade Anzahl Händedrucke gewechselt hat.
Das steht jedoch im Widerspruch zur vorhergehenden Aufgabe (wenn man dort $N = 225$ setzt).

14. Falls dies möglich wäre, so müssten in jedem Punkt drei Verbindungslinien beginnen. Multiplizieren wir die Anzahl der Punkte (fünf) mit 3, so müssten wir, da jede Linie zwei Endpunkte hat, das Doppelte der Anzahl der Linien, also eine gerade Zahl, erhalten.
Es ist aber $5 \cdot 3 = 15$ eine ungerade Zahl.

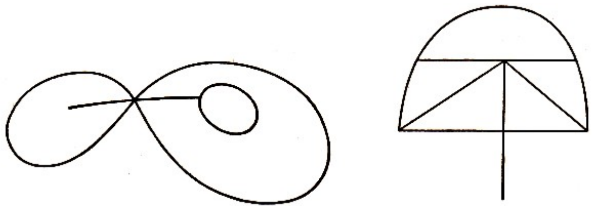


Abb. 56 und 57

15. Eine der möglichen Lösungen für a) ist aus Abb. 56 und für b) aus Abb. 57 ersichtlich.

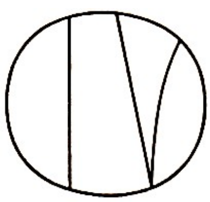


Abb. 58

16. In der Summe $k_1 + k_2 + ... + k_v$ ist jede Grenze zweimal gezählt, da sie in der Wertigkeit jedes ihrer Endpunkte berücksichtigt ist (falls die Endpunkte zusammenfallen, so wird diese Grenze beim Zählen der Wertigkeiten der entsprechenden Eckpunkte doppelt gezählt).

17. Die Behauptung folgt aus Aufgabe 16. Falls die Summe irgendwelcher Zahlen gerade ist, kommen ungerade Summanden in gerader Anzahl vor.

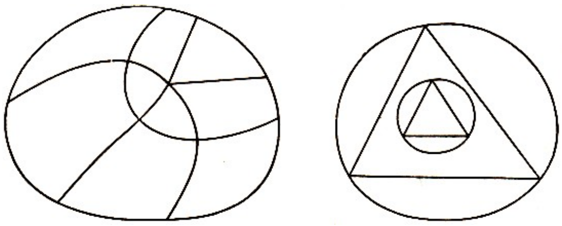


Abb. 59 und 60

18. Mögliche Lösungen für a), b) und c) sind aus den Abb. 58, 59 bzw. 60 ersichtlich.

19. In der Summe $n_1 + n_2 + ... + n_s$ ist jede Grenze zweimal enthalten, weil jede zwei benachbarten Ländern angehört.

20. Dies folgt aus Aufgabe 19 genauso, wie Aufgabe 17 aus Aufgabe 16 folgt.

21. Siehe die Abb. 61 und 62.

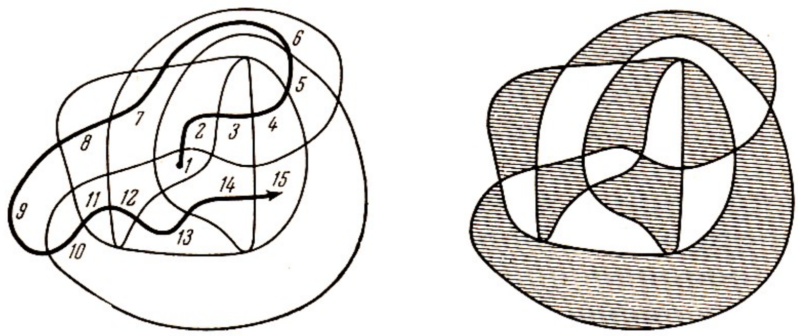


Abb. 61 und 62

22. Wir färben unsere Karte regulär mit zwei Farben (siehe Abb. 63). Wenn wir die Länder in der Reihenfolge nummerieren, in der sie betreten werden, so erhalten alle Länder mit gerader Nummer die eine und die Länder mit ungerader Nummer die andere Farbe, weil der Turm bei jedem Schritt aus einem Land

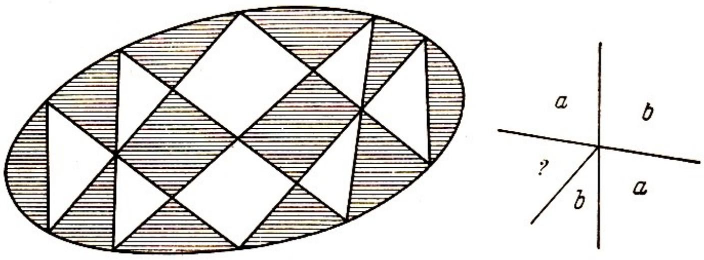


Abb. 63 und 64

der einen Farbe in eines der anderen Farbe gelangt (vgl. mit der Lösung von Aufgabe 6). Insgesamt sind es 21 Länder, von denen 11 eine ungerade Nummer haben müssten (1., 3., ..., 21.) und 10 eine gerade. Es liegen hier jedoch 12 schwarze und nur 9 weiße Länder vor.

23. Falls irgendein Eckpunkt eine ungerade Wertigkeit hat, so lassen sich sehen die Länder, zu denen er gehört, mit zwei Farben nicht regulär färben (Abb. 64).

24. Wir betrachten den Weg unseres Turmes (er geht den gestrichelten Weg in Abb. 65). Wir entfernen nun denjenigen Teil der Karte, der sich im Äußeren unseres Weges befindet, nehmen aber den Weg zur Karte. Wir erhalten dadurch eine neue Karte, die in Abb. 66 dargestellt ist. Alle inneren Eckpunkte dieser Karte haben laut Voraussetzung gerade Wertigkeit, und die äußeren Eckpunkte, welche die Schnittpunkte der Grenzen der alten Karte mit dem Weg des Turmes sind, haben die Wertigkeit 3.

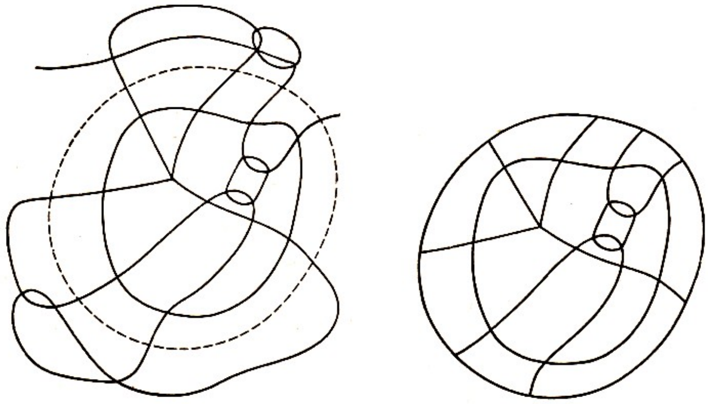


Abb. 65 und 66

Es kann aber nur (siehe Aufgabe 17) eine gerade Anzahl Eckpunkte mit ungerader Wertigkeit geben, weshalb der Turm eine gerade Anzahl von Grenzen bei seinem Weg überschritten haben muss; d.h., er hat eine gerade Anzahl von Schritten zurückgelegt.

25. Der Fall, dass der von S_0 ausgehende Turm jedes Land nicht mehr als einmal betreten hat, ist bereits in Aufgabe 24 besprochen werden.
Der Turm betrete nun irgendein Land S_1 zweimal, d.h., er kreuze in diesem Land seinen eigenen Weg (siehe Abb. 67). Die Anzahl der Schritte auf dem Abschnitt S_0aS_1 sei gleich p, die auf S_1bS_1 gleich q und die auf Abschnitt S_1cS_0 gleich r.
Es muss bewiesen werden, dass $p+q+r$ gerade ist.

Gemäß Aufgabe 24 ist q gerade, der Weg $S_0aS_1cS_0$ genügt jedoch auch der Voraussetzung von Aufgabe 24 ; demnach ist $p+r$ ebenfalls gerade. Hieraus folgt, dass $p+q+r$ gerade ist. Wenn der Turm statt einer Schleife deren zwei geht (siehe Abb. 68), so erhalten wir, wenn wir eine davon - beispielsweise S_1bS_1 - ausschließen, den bereits betrachteten Fall; für das Passieren der Schleife S_1bS_1 ist wieder gemäß Aufgabe 24 eine gerade Anzahl von Schritten notwendig; daher wird auch für den gesamten Weg eine gerade Anzahl von Schritten benötigt. Somit kann unsere Behauptung auch für eine beliebige Anzahl von Schleifen bewiesen werden.

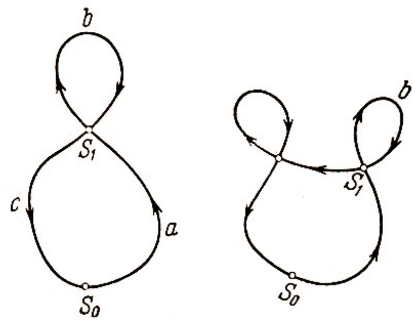


Abb. 67 und 68

26. Wird der zweite Weg in entgegengesetzter Richtung begangen, so erreichen wir S_0 von S_0 aus mit q Schritten. Wenn man von S_0 aus den ersten Weg nach S_1 durchläuft und anschließend von S_1 nach S_0 geht, wobei der zweite Weg in entgegengesetzter Richtung gegangen wird, so erreicht man demnach S_0 mit $p+q$ Schritten.
Gemäß Aufgabe 25 ist $p+q$ eine gerade Zahl, und folglich sind p und q entweder beide gerade oder beide ungerade.

27. Erste Methode. Unser Turm geht von irgendeinem Lande S_0 aus und durchquert auf unserer Karte ein Land nach dem anderen. Dabei werden die Länder in der Reihenfolge nummeriert, in der sie betreten wurden.

Hierbei ist es möglich, dass das eine oder andere Land zweimal oder öfter betreten wird. Das betreffende Land erhält dann nicht eine Nummer, sondern zwei oder entsprechend mehr. Gemäß Aufgabe 26 werden diese Nummern entweder alle gerade oder alle ungerade sein; Nummern benachbarter Länder unterscheiden sich hingegen um eine ungerade Zahl.

In der Tat, wird das Land S_1 von S_0 aus mit p Schritten erreicht und grenzt S_2 an S_1, so kann S_2 von S_0 aus mit $p+1$ Schritten erreicht werden. Daher sind für alle Wege, die von S_0 nach S_2 führen, genau dann eine gerade Anzahl Schritte nötig, wenn $p+1$ gerade ist - und umgekehrt.
Folglich ist diese Schrittanzahl gerade, wenn p ungerade ist, und ungerade, wenn p eine gerade Zahl ist.

Wenn wir auf der Karte, nachdem der Turm sämtliche Länder betreten hat, mit einer Farbe alle Länder mit ungerader Nummer färben und mit einer anderen Farbe die mit einer geraden Nummer, so erhalten wir in der Tat eine reguläre Färbung.

Zweite Methode. Wir bewegen uns längs der Grenzen und Eckpunkte unserer Karte. Durchwandern wir dabei eine Grenze und gelangen wir zu irgendeinem Eckpunkt, so gehen wir auf einer anderen Grenze, die von diesem Eckpunkt ausgeht, weiter (und nicht auf derjenigen, auf der wir dahin gelangten).

Da es auf unserer Karte keine Eckpunkte der Wertigkeit 1 gibt, können wir uns von jedem beliebigen Eckpunkt, in den wir gelangen, weiterbewegen. Wir gehen so lange, bis wir wieder einen Eckpunkt erreichen, auf dem wir uns bereits einmal befanden; es sei dies z.B. der Eckpunkt A.
Der Weg, den wir vom Punkte A bis zur Rückkehr in diesen Punkt zurückgelegt haben, bildet eine geschlossene, sich nirgends überschneidende Linie; diese wollen wir auf unserer Karte auslöschen.

Dabei ändert sich die Wertigkeit der einzelnen Eckpunkte entweder gar nicht (wenn sie nämlich nicht auf der oben beschriebenen Linie liegen), oder sie wird um 2 vermindert (dabei können einige Eckpunkte der Wertigkeit 2 auch verschwinden).

Aus der so entstandenen Karte suchen wir wieder eine aus Grenzen bestehende, in sich geschlossene und sich nirgends überschneidende Linie aus, die wir ebenfalls auslöschen. Dies setzen wir fort, solange es möglich ist.
Folglich kann man eine Karte, deren Eckpunkte sämtlich gerade Wertigkeit besitzen, durch Übereinanderlegen der oben beschriebenen Konturen erhalten, welche die Ebene immer in zwei Teile zerlegen, ähnlich wie die Karte in Abb. 5, die man durch Übereinanderlegen von Kreisen erhält.
Analog Aufgabe 2 lässt sich beweisen, dass eine derartige Karte mit zwei Farben regulär gefärbt werden kann.

Bemerkung. Mit analogen Überlegungen ist unschwer zu zeigen, dass man eine Karte, deren Eckpunkte sämtlich von gerader Wertigkeit sind, mit einem Federstrich zeichnen kann, d.h., man braucht dabei die Feder nicht vom Papier abzuheben und keine Grenze doppelt zu ziehen.
Allgemein kann man ein Netz von Kurven in zwei Fällen in einem Strich zeichnen:

Wenn entweder alle seine Eckpunkte gerade Wertigkeit haben oder wenn genau zwei Eckpunkte ungerade Wertigkeit haben (dann muss man jedoch in einem dieser beiden den Strich beginnen und im anderen beenden).

28. Bei der Lösung dieser Aufgabe können wir entweder vollständige Induktion wie in Aufgabe 1 benutzen oder die bei der Lösung der Aufgabe 2 benutzte Methode anwenden. Wir geben hier das Schema für die Lösung nach der zweiten Methode an.

Wir nehmen irgendeine unserer Figuren (Kreis mit Sehne). Sie teilt die Ebene in drei Teile. Alle Länder unserer Karte, die in dem einen dieser Teile liegen, erhalten die Nummer 0, alle Länder, die im zweiten Teil liegen, erhalten die Nummer 1, und die Länder, die im dritten Teil liegen, die Nummer 2. Dies führen wir für alle Figuren durch.

Jedem Land werden dann n Nummern zugeordnet. Wir addieren sie und nehmen den Rest dieser Summe bei der Division durch 3. Die Länder, bei denen dieser Rest gleich 0 ist, erhalten die Farbe weiß; diejenigen, deren Rest gleich 1 oder 2 ist, werden rot oder schwarz gefärbt. Genau wie in Aufgabe 2 lässt sich nun leicht zeigen, dass die so erhaltene Färbung regulär ist.

29. Eine Seite des Brettes werde von m Sechsecken gebildet. Wir entfernen die $6(m-1)$ Felder, die die sechs Seiten des Brettes bilden. Dann erhalten wir ein Brett der gleichen Form, dessen Seiten jedoch nur noch aus je $m-1$ Sechsecken bestehen. Daher gilt, wenn wir mit S_m die Anzahl der Felder unseres Brettes bezeichnen,

$$S_m = 6(m-1) + S_{m-1}$$

Genauso erhält man

$$\begin{aligned} S_{m-1} &= 6(m-2) + S_{m-2} \\ S_{m-2} &= 6(m-3) + S_{m-3} \\ &\dots \\ S_2 &= 6 \cdot 1 + S_1 \\ S_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$S_m = 6(m-1) + 6(m-2) + \dots + 6 + 1 = 1 + 6[1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1)]$$

Nun ist aber[23]

$$1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2}$$

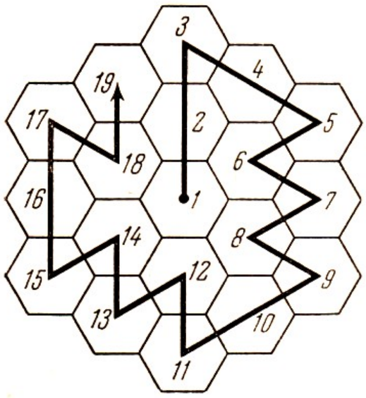
Das endgültige Resultat ist demnach

$$S_m = 1 + 6\frac{(m-1)m}{2} = 3m^2 - 3m + 1$$

30. Siehe Abb. 69.

31. Eine reguläre Färbung mit drei Farben erhielten wir für das Brett, dessen Seiten aus je drei Sechsecken bestehen (siehe Abb. 69 und 70)[24]. Das gleiche erhalten wir für jedes beliebige andere Brett.
Nehmen wir nämlich an, wir hätten bereits ein Brett, das mit drei Farben regulär gefärbt ist. Das Kamel gehe in diesem Fall vom roten Feld ins weiße, vom weißen ins schwarze und aus dem schwarzen wieder ins rote Feld, usw. (vgl. mit Abb. 19 und Abb. 20).

[23] Siehe z.B. Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen, diese Reihe, XII, Seite 5 u. 6, oder I.S. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion, diese Reihe, III, Seite 20.
[24] In Abb. 70 ist die rote Farbe durch horizontale Schraffur gekennzeichnet.



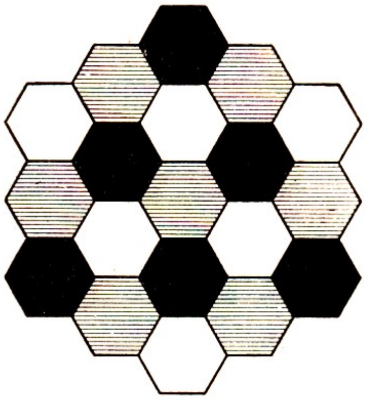


Abb. 69 und 70

Wenn nun das Kamel seinen Weg in dem zentralen roten Feld beginnt und wir die Reihenfolge der Farben der einzelnen Felder, die es durchläuft, notieren, so erhalten wir die Folge (r = rot, w = weiß, s = schwarz)

$$rws \qquad rws \qquad rws \qquad rwsrw...$$

Daher werden, unabhängig von dem Weg, den das Kamel nimmt (jedoch unter der Voraussetzung, dass dieser Weg in einem roten Feld beginnt), alle Felder, deren Nummer durch 3 teilbar ist, schwarz, und alle Felder, deren Nummer bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2 lässt, rot bzw. weiß sein.

Es wird also in der Tat die Färbung, die in der Formulierung der Aufgabe 31 beschrieben wurde, mit der hier vorgegebenen regulären Färbung des Brettes zusammenfallen (vgl. mit Aufgabe 6).

32. Wenn beispielsweise das Kamel seinen Weg in einem schwarzen Feld beginnt, so wird die Folge der Farben der von ihm betretenen Felder folgendes Aussehen haben (siehe die vorhergehende Aufgabe):

$$srw \qquad srw \qquad srw \qquad s...$$

Die Periode dieser Folge besteht aus drei Gliedern; das Kamel wird daher genau dann auf ein Feld der gleichen Farbe wie die des Ausgangsfeldes gelangen (insbesondere auf das Ausgangsfeld selbst), wenn die Anzahl der inzwischen zurückgelegten Schritte ein Vielfaches von drei ist.

33. Um ein Brett, das aus 19 Feldern besteht (siehe Abb. 70), zu durchlaufen, muss das Kamel 18 Schritte tun, d.h., die Anzahl der Schritte ist ein Vielfaches von drei; daher wird auch das Kamel schließlich auf ein Feld gelangen, das die gleiche Farbe wie das Ausgangsfeld hat.

Folglich werden die Felder dieser Farbe häufiger betreten als die Felder der anderen Farben. Jedoch gibt es nicht mehr Felder der Farbe des Eckfeldes als Felder jeder der anderen Farben (siehe Abb. 70). (Dagegen gibt es mehr rote Felder als schwarze und weiße; daher war Aufg. 30 lösbar.)

34. Um ein Brett, das aus $3m^2 - 3m + 1$ Feldern besteht (siehe Aufgabe 29), zu durchlaufen, muss das Kamel $3m^2 - 3m = 3(m^2 - m)$ Schritte tun, und da diese Anzahl der Schritte ein Vielfaches von drei ist, wird es mit dem letzten Schritt auf ein Feld der gleichen Farbe wie die des Ausgangsfeldes gelangen.
Die dem Ausgangsfeld benachbarten Felder haben jedoch alle eine andere Farbe als dieses. Folglich kann das Kamel dabei nicht auf ein dem Ausgangsfeld benachbartes Feld gelangen.

35. Der letzte Schritt des Kamels führt dieses auf ein Feld der gleichen Farbe wie die des Ausgangsfeldes. Folglich müssten von dieser Farbe mehr Felder vorhanden sein als von den beiden übrigen Farben.
Auf unserem Brett (Abb. 20 auf S. 12) sind jedoch 21 schwarze Felder, 21 weiße Felder und 19 rote Felder.

36. Siehe Abb. 71 und 72[25]. Wir erhalten eine reguläre Färbung.

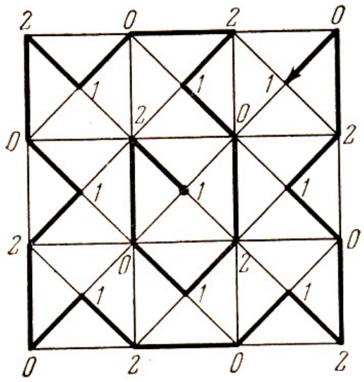
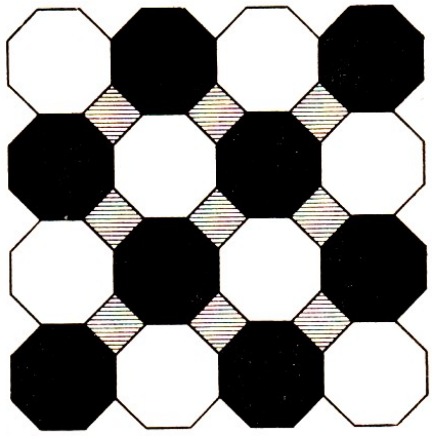



Abb. 71 und 72

37. Unser Brett besteht aus 25 Feldern. Um es auf die angegebene Art zu durchwandern, sind 24 Schritte notwendig.
Mit jedem dritten Schritt erreicht das Kamel ein Feld der Farbe des Ausgangsfeldes (Abb. 72). Erreicht das Kamel tatsächlich mit dem letzten Schritt ein Feld der Farbe wie die des Ausgangsfeldes, so müssen von den Feldern dieser Farbe mehr vorhanden sein als von den Feldern der anderen Farben. Unsere achteckigen Felder sind schwarz und weiß gefärbt, von den roten, viereckigen Feldern haben wir 9, von denen der beiden anderen Farben jedoch nur 8.

38. Wenn wir nicht auf die Richtung der Pfeile achten, können wir von jedem beliebigen Eckpunkt zu jedem beliebigen anderen auf den Seiten der Dreiecke gelangen.
Wir ändern nun unseren Weg dahingehend, dass diese Bewegung stets in Übereinstimmung mit der Richtung der Pfeile vor sich geht. Die Korrektion des Weges geschieht folgendermaßen:

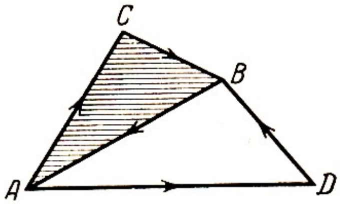


Abb. 73

Laufen wir entlang einer Seite in Pfeilrichtung, so lassen wir den Weg unverändert. In dem Fall aber, in dem wir eine Seite entgegen der Pfeilrichtung passierten, Wählen wir den Weg über die beiden anderen Seiten eines der beiden benachbarten Dreiecke (Abb. 73); der Weg von A nach B verläuft entgegen der Pfeilrichtung, und wir benutzen deshalb entweder den Weg ACB oder den Weg ADB.

39. Es ist hier zunächst klar, dass es genügt, diesen Satz für den Fall zu beweisen, dass das Kamel nirgends seinen Weg kreuzt; denn über den Fall mit Überschneidungen des Weges kann man sich bei der Lösung der Aufgabe 25 informieren.

[25] In Abb. 72 ist die rote Farbe durch horizontale Schraffur gekennzeichnet.

Das Kamel habe also jeden Eckpunkt nur einmal berührt und sei in seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt.

Nun löschen wir alles aus, was sich außerhalb des von dem Weg des Kamels umrissenen Gebietes befindet (Abb. 74).

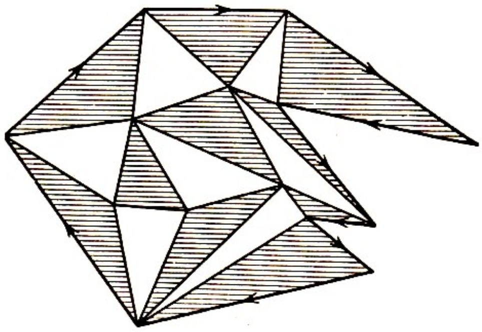


Abb. 74

Es entsteht eine Karte, die mit zwei Farben regulär gefärbt Werden kann; denn alle Dreiecke, die rechts vom Weg des Kamels liegen, sind schwarz gefärbt und die links an- grenzenden weiß. Daher haben alle Dreiecke, die im Inneren des Gebietes an den Weg grenzen, die gleiche Farbe, und wir erhalten eine reguläre Färbung, wenn wir für das Innere des Gebiets zwei verschiedene Farben benutzen.

Da in der erhaltenen Karte alle Länder Dreiecke sind, ist gemäß Aufgabe 4 die Anzahl der Grenzen im Inneren des Gebietes, d.h. die Anzahl der Seiten, die mit dem Weg des Kamels zusammenfallen, durch 3 teilbar, was zu beweisen war.

40. Wir suchen einen Hilfsweg von B nach A (dieser kann gemäß Aufgabe 38 gefunden werden). Das Kamel brauche, um ihn zu passieren, r Schritte (Abb. 75). Gemäß Aufgabe 39 ist dann $p+r$ durch 3 teilbar, ebenso $q+r$; hieraus folgt, dass

$$(p+r)-(q+r)=P-q$$

ebenfalls durch 3 teilbar ist.

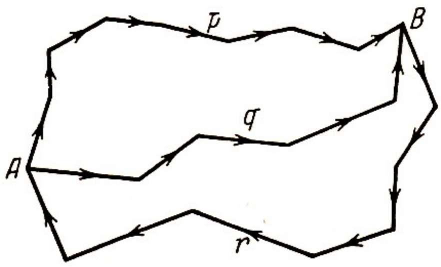


Abb. 75

41. Wir kennzeichnen irgendeinen Eckpunkt mit A. Es sei B ein beliebiger Eckpunkt. Das Kamel kann im allgemeinen auf vielen verschiedenen Wegen von A nach B gelangen, wobei jedem Weg eine gewisse Anzahl Schritte entspricht.
Gemäß Aufgabe 40 müssen jedoch alle diese Zahlen bei Division durch 3 den gleichen Rest ergeben. Diesen Rest nehmen wir als Nummer des Eckpunktes B. Genauso verfahren wir mit allen anderen Eckpunkten.

Diese werden dann mit den Ziffern 0, 1, 2 nummeriert sein. Wir beweisen, dass benachbarte Eckpunkte verschiedene Nummern besitzen.
Es seien B_1 und B_2 zwei derartige Eckpunkte. Sie seien durch einen Pfeil verbunden, der beispielsweise von B_1 nach B_2 weist.

Das Kamel gelange von A nach B_1 in p Schritten und mache dann noch einen Schritt in der Richtung des Pfeiles B_1B_2; damit erreichen wir B_2.

Man kann also von A nach B_2 in $p+1$ Schritten gelangen. Die Zahlen p und $p+1$ ergeben jedoch bei Division durch 3 verschiedene Reste.

42. Wir konstruieren zu der normalen Karte K die duale Karte K^*. Gemäß der Beziehung 4. zwischen dualen Karten besteht die Karte K^* aus Dreiecken.
Nach dem angegebenen Satz kann die Karte K dann und nur dann regulär mit drei Farben gefärbt werden, wenn die Eckpunkte von K^* mit drei Ziffern regulär nummeriert werden können.

Die Eckpunkte der aus Dreiecken bestehenden Karte K^* können aber genau dann mit drei Ziffern regulär nummeriert werden, wenn die Dreiecke selbst mit zwei Farben regulär gefärbt werden können oder, was dasselbe ist, wenn alle Eckpunkte der Karte K^* eine gerade Wertigkeit haben.
Die letzte dieser Bedingungen ist jedoch gleichwertig damit, dass jedes Land der Karte K eine gerade Anzahl von Grenzen (Beziehung 4) zwischen dualen Karten besitzt.
Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Im Grunde genommen gilt dieser Beweis nur für zusammenhängende Karten. Wir können nämlich nur in diesem Fall ohne Schwierigkeiten zur dualen Karte übergehen. Der Satz ist jedoch auch für unzusammenhängende Karten gültig. Wir beweisen ihn für den Fall, dass die Karte in zwei vollkommen getrennte Teile zerfällt.

Es sei S das trennende Land der unzusammenhängenden normalen Karte K, deren Länder sämtlich eine gerade Anzahl von Eckpunkten besitzen (Abb. 76). Wir betrachten die beiden Karten K' und K'' einzeln (Abb. 77a und b), in die die Karte K zerfällt. Jede dieser beiden Karten ist zusammenhängend.

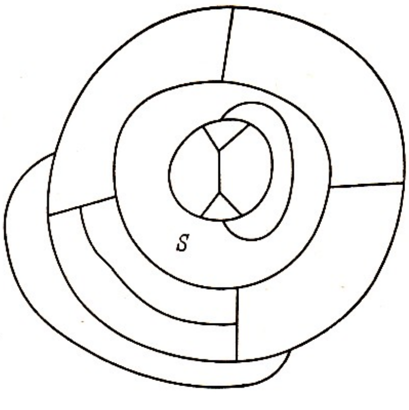


Abb. 76

Alle Länder der Karten K' und K'' - eventuell mit Ausnahme von S' und S'' - haben voraussetzungsgemäß eine gerade Anzahl von Ecken. Da in der Karte K' (genau wie in der Karte K'') nicht nur ein einziges Land existieren kann, das eine ungerade Anzahl Grenzen besitzt (Aufgabe 20), haben auch S' und S'' eine gerade Anzahl von Eckpunkten.

Nach dem eben bewiesenen Satz können die Karten K' und K'' mit drei Farben regulär gefärbt werden. Man muss dabei nur dafür Sorge tragen, dass S' und S'' mit der gleichen Farbe gefärbt sind. Dann kann aber auch offenbar die Karte K mit drei Farben regulär gefärbt werden.
Analog wird der Satz für den Fall bewiesen, dass die Karte in drei, vier und mehr Teile zerfällt.

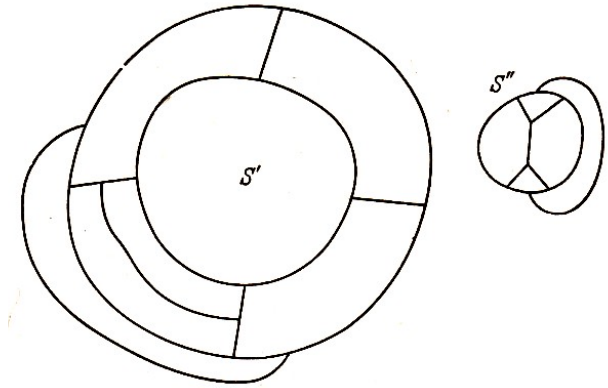


Abb. 77a und b

43. Wir ordnen jeder Grenze die Summe der Nummern der beiden anliegenden Länder als Nummer zu. Dabei erhält man eine der drei Nummern (0, 1), (1, 0) oder (1, 1), denn die Summe zweier Nummern ist nur dann gleich (0, 0), wenn beide Nummern gleich sind.
Diese Nummerierung ist regulär, denn sind a, b und c die Nummern der Länder, die in irgendeinem Eckpunkt zusammenstoßen, so haben die von diesem Eckpunkt ausgehenden Grenzen die Nummern $a+b$, $a+c$ und $b+c$.

Es ist aber $a+b \neq a+c$, da $b \neq c$ ist. Genauso gilt $a+b \neq b+c$ und $a+c \neq b+c$.
(Mit den Buchstaben a, b und c haben wir drei beliebig herausgegriffene der Paare (0, 0), (0, 1), (1, 0) und (1, 1) bezeichnet.)

44. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass der Turm jedes Feld nicht mehr als einmal betritt. Für den allgemeinen Fall verfährt man genauso wie in Aufgabe 25 (wenn der Turm Schleifen macht und die Summe der Nummern auf jeder Schleife gleich (0, 0) ist, so ist auch die Summe aller Nummern auf diesem Weg gleich (0, 0)).

Im Innern des Gebietes, das durch den Weg des Turmes umrissen wird (in Abb. 78 ist der Weg des Turmes durch eine gestrichelte Linie dargestellt), mögen die Eckpunkte $A_1, A_2, ..., A_v$ liegen.
Werden die Nummern aller Grenzen, die in jedem Eckpunkt zusammentreffen, addiert, so erhalten wir (0, 0). Wir schreiben diese Gleichung für jeden der Eckpunkte $A_1, A_2, ..., A_v$ auf und addieren sie. Wir erhalten auf der rechten Seite (0, 0) und auf der linken Seite die Summe aller der Grenzen, deren eines Ende oder deren beide Enden im Innern des von dem Turm umschrittenen Gebietes liegen.

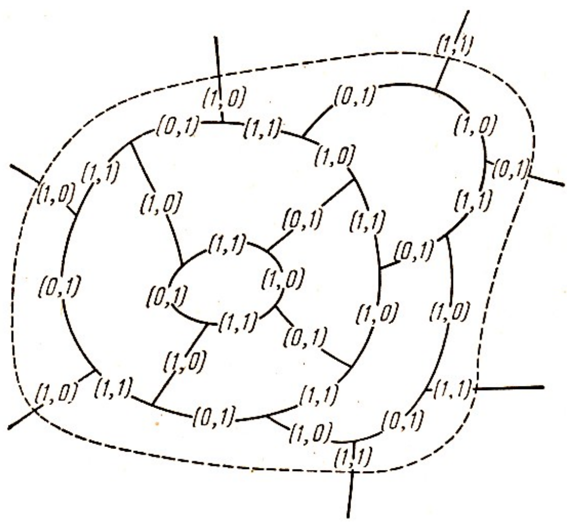


Abb. 78

Dabei sind die Grenzen, deren beide Enden im Innern dieses Gebietes liegen, zweimal gezählt und die Grenzen, von denen nur ein Ende im Innern des Gebietes liegt, einmal. Die Summe der Nummern der ersteren sei gleich x und die der letzteren gleich y; dann gilt $2x + y = (0, 0)$. Es galt jedoch $2x = (0, 0)$ für jede Nummer, woraus $y = (0, 0)$ folgt, was zu beweisen war.

45. Erste Methode. Wir wählen irgendein Land S aus und ordnen ihm die Nummer (0, 0) zu. Von diesem Feld aus lassen wir den Turm durch alle Felder der Karte wandern derart, dass jedes Feld einmal betreten wird. Wir addieren die Nummern aller der Grenzen, die der Turm auf seinem Weg von S in ein gegebenes anderes Feld Q gekreuzt hat; diese Summe sei gleich a. Wir notieren a als die Nummer des Feldes Q.

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass diese Nummerierung der Felder unabhängig von der Art des Durchwanderns der Karte ist.
Angenommen, wir wären von S in irgendein Feld Q auf zwei Wegen gelangt (Abb. 79). Die Summe der Nummern der Grenzen auf dem Weg SmQ sei a und die auf dem Wege SnQ sei b.

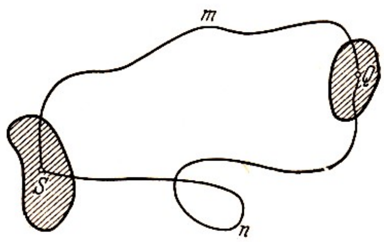


Abb. 79

Gemäß Aufgabe 44 ist die Summe der Nummern der Grenzen auf dem Weg $SmQnS$ gleich (0, 0); hieraus folgt $a + b = (0, 0)$. Die Summe zweier Nummern ist jedoch nur dann gleich (0, 0), wenn diese beiden Nummern gleich sind; daher ist $a = b$, und Q erhält eindeutig die Nummer a.

Wir zeigen nun, dass die erhaltene Nummerierung regulär ist.
P und Q seien zwei benachbarte Felder, deren trennende Grenze irgendeine Nummer c hat, und die Summe der Nummern der Grenzen auf dem Weg von S nach P sei gleich a, wonach P die Nummer a hat. Wir gelangen von P nach Q, indem wir die Grenze mit der Nummer c überschreiten.
Dann hat Q die Nummer $a + c$, und es ist stets $a + c$ von a verschieden.

Zweite Methode.
Wir nummerieren die Grenzen mit den Ziffern 1, 2, 3. Von irgendeinem Eckpunkt A aus gehen wir entlang der Grenze mit der Nummer 1 und bewegen uns dann weiter auf den Eckpunkten und Grenzen der Karte; dabei werden wir jedesmal, nachdem wir eine Grenze mit der Nummer 1 durchlaufen haben, entlang einer Grenze mit der Nummer 2 gehen und, wenn wir von einer Grenze mit der Nummer 2 kommen, auf einer Grenze mit der Nummer 1 Weitergehen.

Dies endet in dem Moment, in dem wir einen Eckpunkt B erreichen, auf dem wir uns bereits einmal befanden.

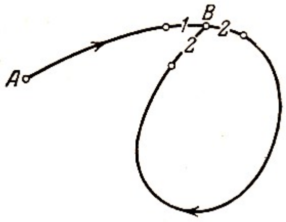


Abb. 80

Die Grenze, auf der wir nach B gelangen, hat entweder die Nummer 1 oder 2. Wegen der Regularität der Nummerierung wird der Eckpunkt B mit A zusammenfallen (falls der Eckpunkt B mit A nicht zusammenfällt, ist die Nummerierung der in B zusammentreffenden Grenzen nicht regulär (Abb. 80)).

Somit erweist sich unser aus Grenzen mit den Nummern 1 und 2 bestehender Weg als eine in sich geschlossene, sich nirgends überschneidende Kurve.
Nun nehmen wir eine beliebige Grenze, die eine der Nummern 1 oder 2 hat und nicht zu obigem Rand gehört, und beginnen auf ihr denselben Rundgang; wir erhalten irgendeine neue Kurve. Diesen Prozess setzen wir fort, solange noch nicht beschrittene Grenzen mit den Nummern 1 und 2 existieren.

Somit bilden die Grenzen mit den Nummern 1 und 2 ein System von in sich geschlossenen, sich nirgends überschneidenden Kurven. Diese Kurven zerlegen die Karte in die Gebiete $M_1, M_2, ..., M_p$; jedes Gebiet enthält einige Felder.
Wenn alle Grenzen mit der Nummer 3 ausgelöscht werden, so entsteht eine Karte, deren Grenzen unsere Kurven und deren Felder die Gebiete $M_1, M_2, ..., M_p$ sind.

Der Beweis dafür, dass $M_1, M_2, ..., M_p$ mit den zwei Farben a und b regulär gefärbt werden können, ist wörtlich aus Aufgabe 2 zu übertragen.

Wir betrachten nun ein analoges System von Kurven, das aus den Grenzen mit den Nummern 1 und 3 besteht. Dieses zerlegt die Ebene in die Gebiete $N_1, N_2, ..., N_r$, die wir mit den Farben c und d regulär färben können.
Jedes Land S der ursprünglichen Karte ist in einem der Gebiete $M_1, M_2, ..., M_p$ enthalten und besitzt da entweder die Farbe a oder b und ist außerdem in einem der Gebiete $N_1, N_2, ..., N_r$ enthalten, wo es die Farbe c oder d besitzt.

Demgemäß erhält jedes Land eines der vier Paare (a, c), $(afld)$, (b, c), (b, d). Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Nummerierung der Länder durch solche Paare regulär ist.

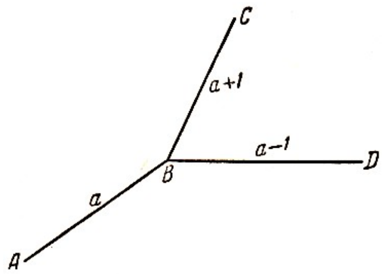


Abb. 81

46. Gemäß Aufgabe 45 genügt es zu zeigen, dass die Grenzen dieser Karte mit drei Ziffern regulär nummeriert werden können.
Das Kamel wandere auf den Grenzen der Karte, wobei es von jeder Grenze auf jede benachbarte übergeben kann. Wir gehen von irgendeiner Grenze aus, der wir die Nummer 1 zuordnen, und nummerieren von da an weiter.

Nachdem wir irgendeine Grenze AB, welche die Nummer a hat (Abb. 81), durchlaufen haben, erreichen wir den Eckpunkt B. Von hier aus können wir entweder rechts (auf BD) oder links (auf BC) weitergehen. Gehen wir links weiter, so vergrößert sich unsere Nummer um 1, d.h., wir schreiben der Grenze BC die Nummer $a + 1$ zu. Wenden wir uns jedoch nach rechts, so vermindert sich die Nummer a um 1, d.h., wir haben der Grenze BD die Nummer $a - 1$ zuzuordnen.

Dabei erhält im allgemeinen jede Grenze nicht eine, sondern mehrere Nummern (wir bemerken hierbei, dass auch negative Zahlen als Nummern auftreten können).
Wir zeigen, dass alle Nummern, die ein und derselben Grenze angehören, bei der Division durch 3 den gleichen Rest ergeben. (Gelingt uns dies, so erhalten wir eine reguläre Nummerierung, wenn wir jeder Grenze diesen Rest zuordnen.) Der Beweis stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

Das Kamel geht von einer Grenze mit der Nummer a aus und kehrt auf diese zurück. Bei der Rückkehr erhält diese Grenze die Nummer b. Dann ist $b-a$ durch 3 teilbar.

Der Weg des Kamels führe über g' Grenzen, wobei es sich g_1-mal für die linke Richtung entscheidet und g_2-mal für die rechte ($g' = g_1 + g_2$).
Offenbar gilt $b = a + g_1 - g_2$; man muss also zeigen, dass $g_1 - g_2$ durch 3 teilbar ist.
Bekanntlich genügt es, den Beweis für den Fall durchzuführen, dass das Kamel keine Grenze mehr als einmal durchläuft.

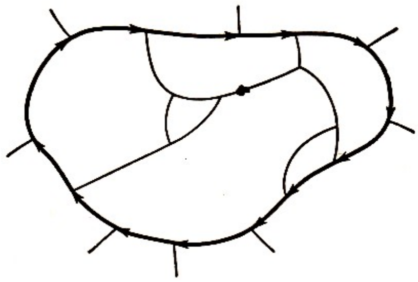


Abb. 82

Der Weg des Kamels ist in Abb. 82 gezeigt ($g' = 13$). Alle Grenzen, die von Eckpunkten auf dem Weg des Kamels ausgehen, jedoch selbst nicht zu diesem Weg gehören, zerfallen in zwei Typen: in die rechts (ihre Zahl ist gleich g_1[26]) und in die links von der Bewegungsrichtung des Kamels liegenden (deren Anzahl ist gleich g_2).

Falls das Kamel seinen Weg im Uhrzeigersinn durchläuft (Abb. 82), so liegen die Grenzen des ersten Typs im Innern des Gebietes G und die Grenzen des zweiten Typs sämtlich außerhalb dieses Gebietes (in Abb. 82 ist $g_1 = 5$ und $g_2 = 8$).
Somit muss bewiesen werden, dass die Differenz zwischen der Zahl der Grenzen, die sich in Bezug auf den Weg des Kamels im Innern befinden, und der Zahl der Grenzen, die bezüglich des Weges des Kamels im Äußeren liegen, durch 3 teilbar ist.

Es sei v die Anzahl der Eckpunkte, die sowohl im Gebiet G als auch auf dem Weg des Kamels selbst liegen, g_i die Anzahl der Grenzen, die (echt) im Innern des Gebietes G liegen, und $n_1, n_2, ..., n_s$ die Anzahlen der Grenzen der Länder, die in G liegen. Es gelten die Beziehungen

$$3v = 2(g_i + g') + g_2 \qquad (1)$$
$$n_1 + n_2 + ... + n_s = 2g_i + g' \qquad (2)$$

Subtrahiert man (2) von (1), so erhält man

$$g' + g_2 = 3v - (n_1 + n_2 + ... + n_s)$$

Da jede der Zahlen $n_1, n_2, ..., n_s$ nach Voraussetzung durch 3 teilbar ist, ist auch $g' + g_2$ durch 3 teilbar. Nun ist aber $g' = g_1 + g_2$, daher ist auch $g_1 + 2g_2$ durch 3 teilbar und ebenso $g_1 + 2g_2 - 3g_2 = g_1 - g_2$, was zu beweisen war.

[26] Dabei wird eine Grenze, deren beide Eckpunkte auf dem Weg des Kamels liegen, zweimal gezählt.

Wir begnügen uns hier mit dem Beweis dieses Hilfssatzes und überlassen es dem Leser, die Lösung der Aufgabe selbst zu finden (das Schema des Beweises ist dasselbe wie in den Aufgaben 39 bis 41).

47. Auf der erhaltenen Karte hat jeder Eckpunkt die Wertigkeit 4. Gemäß Aufgabe 16 gilt

$$4 \cdot 6 = k_1 + k_2 + ... + k_6 = 2g$$

hieraus folgt $g = 12$.
Die Karte ist zusammenhängend. Wäre sie nicht zusammenhängend, so hätte wenigstens einer der Teile, in die sie zerfällt, weniger als vier Eckpunkte, weil die Zahl aller Eckpunkte gleich 6 ist. Andererseits kann, da dieser Teil völlig isoliert ist, jeder seiner Eckpunkte nur mit einem Eckpunkt des gleichen Teiles verbunden sein.
Das steht jedoch im Widerspruch dazu, dass jeder Eckpunkt mit genau vier anderen verbunden sein soll.

Da die Karte zusammenhängend ist, können wir den Satz von Euler anwenden

$$s = g + 2 - v = 8$$

Gemäß Aufgabe 19 gilt

$$n_1 + n_2 + ... + n_s = 24$$

Einecke und Zweiecke gibt es auf der Karte nicht (es gibt keinen Eckpunkt, der mit sich selbst verbunden ist und keine zwei Eckpunkte, die durch zwei verschiedene Grenzen verbunden sind).

Daher ist keine der Zahlen $n_1, n_2, ..., n_s$ kleiner als 3. Wäre wenigstens eine von ihnen größer als 3, so wäre die Summe größer als $3 \cdot 8 = 24$, was aber falsch ist. Daher ist $n_1 = n_2 = ... = n_s 3$ (die entsprechende Karte ist in Abb. 83 dargestellt).

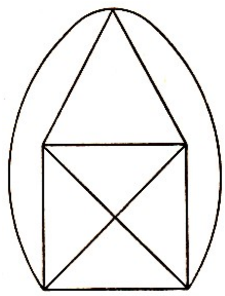


Abb. 83

48. Wir nehmen das Gegenteil an und zeichnen die geforderten Linien. Wir erhalten eine Karte, deren sämtliche Eckpunkte die Wertigkeit 4 haben. Auf Grund von Aufgabe 16 ist

$$g = \frac{k_1 + k_2 + ... k_7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$$

Nach dem Satz von EULER ist $s = g + 2 - v = 9$ (der Zusammenhang lässt sich genau so wie in der vorhergehenden Aufgabe beweisen). Gemäß Aufgabe 19 gilt

$$n_1 + n_2 + ... + n_9 = 28 \qquad (1)$$

Da die Anzahl der Grenzen jedes Landes nicht kleiner als 3 ist (siehe Lösung der vorhergehenden Aufgabe), folgt aus Formel (1), dass acht Dreiecke und ein Viereck vorliegen.
Gemäß Aufgabe 4 kann daher unsere Karte nicht mit zwei Farben regulär gefärbt werden. Andererseits ist aber die Wertigkeit jedes Eckpunktes gleich 4, d.h. gerade; dies steht aber im

Widerspruch zu Aufgabe 27.

49. Wir nehmen an, diese Wege wären gezogen. Dann erhalten wir eine Karte, deren Eckpunkte Häuser und Brunnen und deren Grenzen die Wege sind.
Die Anzahl der Eckpunkte ist 6, ihre Wertigkeit jeweils 3. Die Zahl der Grenzen ist $g = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (Aufgabe 16), die Zahl ihrer Länder ist $s = g + 2 - v = 5$.
Da kein Weg ein Haus mit einem Haus oder einen Brunnen mit einem Brunnen verbindet, erhalten wir, wenn wir den Häusern die Ziffer 0 und den Brunnen die Ziffer 1 zuordnen, eine reguläre Nummerierung unserer Karte.

Hieraus folgt, dass jedes Land eine gerade Anzahl Grenzen hat (das duale zu Aufgabe 23). Zweiecke existieren nicht, daher hat kein Land weniger als 4 Grenzen.
Gemäß Aufgabe 19 ist

$$18 = 2g = n_1 + n_2 + ... + n_5 \geq 4 \cdot = 20$$

was aber ein Widerspruch ist.

50. Wir nehmen das Gegenteil an. Es liegt dann eine Karte vor, die fünf Eckpunkte besitzt, die gezogenen Linien sind die Grenzen. Die Wertigkeit jedes Eckpunktes ist 4. Wir haben $g = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (Aufgabe 16). Hiernach gilt nach dem Satz von Euler $s = g + 2 - v = 7$.

Gemäß Aufgabe 19 ist

$$n_1 + n_2 + ... + n_7 = 2g = 20$$

Andererseits gilt, da alle $n_1, n_2, ..., n_7$ nicht kleiner als 3 sind,

$$n_1 + n_2 + ... + n_7 \geq 3 \cdot 7 = 21$$

Das ist aber ein Widerspruch.

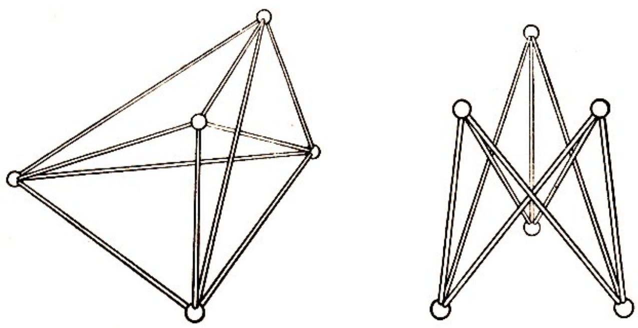


Abb. 84 und 85

Anmerkung. Wenn es auch unmöglich ist, in der Ebene fünf Punkte paarweise durch sich nicht schneidende Kurven zu verbinden, so ist diese Aufgabe im Raum leicht lösbar (Abb. 84).
Analog dazu kann im Raume auch eine Konfiguration für Aufgabe 49 (Abb. 85) und Aufgabe 48 konstruiert werden. Allgemein kann jedes Schema von n verbundenen Punkten, das in der Ebene Überschneidungen aufweist, im Raum ohne Überschneidungen aufgebaut werden (nämlich in Form eines Netzes mit sich nicht schneidenden Fäden, wobei die zu verbindenden n Punkte die Knoten des Netzes sind). Schwierigkeiten treten bei der Lösung von Aufgaben mit der entgegengesetzten Fragestellung auf:

Welche räumlichen Kurvennetze können ohne Überschneidungen auf die Ebene abgebildet werden? Beispiele für räumliche Netze, deren Abbildung ohne Überschneidungen auf die Ebene unmöglich ist, zeigen die Abb. 84 und 85.

Offensichtlich können räumliche Netze, welche Bestandteile enthalten, wie sie in Abb. 84 oder 85 dargestellt sind, unmöglich ohne Überschneidungen in die Ebene abgebildet werden. ("Bestandteil" bedeutet, dass sich bei Weglassen eines Teils der Kurven und Eckpunkte fünf Punkte ergeben, von denen jeder mit jedem so wie in Aufgabe 50 gefordert, verbunden ist, oder sechs Punkte, die so verbunden sind, wie es in Aufgabe 49 gefordert wird.)

Man kann beweisen, dass damit alle allgemeinen Netze erschöpft sind, die sich nicht ohne Überschneidungen in die Ebene abbilden lassen, d.h., dass jedes solche Netz unbedingt eine Konfiguration wie in Aufgabe 49 oder eine Konfiguration wie in Aufgabe 50 als Bestandteil enthält.

51. Falls derartige Länder existieren würden, so könnten wir aus jedem von ihnen die Hauptstadt auswählen und die Hauptstädte benachbarter Länder durch eine Eisenbahnlinie verbinden (mit anderen Worten, zur dualen Karte übergeben). Wir würden so eine Konfiguration erhalten, deren Unmöglichkeit bereits in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt wurde. Diese Aufgabe kann jedoch ähnlich wie die vorhergehende durch direkte Berechnung gelöst werden.

52. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann sind alle Zahlen $n_1, n_2, ..., n_s$ nicht kleiner als 6 und

$$6s \leq n_1 + n_2 + ... + n_s = 2g \quad , \quad 3s \leq g \tag{1}$$

Andererseits ist die Wertigkeit aller Eckpunkte nicht kleiner als 3; daher gilt (Aufgabe 16)

$$3v \leq 2g \tag{2}$$

Durch Addition der Ungleichungen (1) und (2) erhält man

$$3(v+s) \leq 3g \quad , \quad v+s \leq g$$

was aber wegen $v + s = g + 2$ unmöglich ist.

53. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Für eine Karte mit höchstens sechs Ländern gilt der Satz offensichtlich. Er sei für eine Karte mit n Ländern bewiesen. Wir werden zeigen, dass er dann auch für eine Karte mit $n + 1$ Ländern gilt.

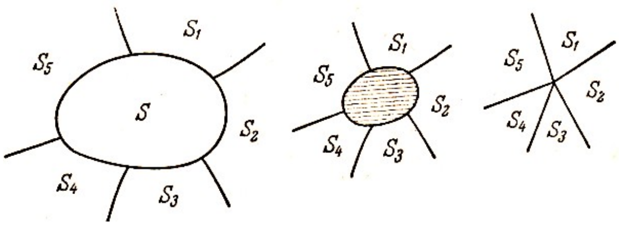


Abb. 86a, b und c

Auf Grund der vorhergehenden Aufgabe existiert ein Land S mit weniger als sechs Grenzen (Abb. 86a). Wir nehmen nun an, dass die Ebene, auf die unsere Karte gezeichnet ist, aus einer Gummihaut besteht, und führen folgende Operation aus.

Mit einer Schere schneiden wir das Land S mit seinen Grenzen heraus, so dass wir ein Loch erhalten (Abb. 86b), und ziehen dann die anschließenden Grenzen der benachbarten Länder so weit zusammen, bis das Loch geschlossen ist (Abb. 86 c).
Damit erhalten wir eine Karte, die aus n Ländern besteht; diese kann aber laut Voraussetzung mit sechs Farben regulär gefärbt werden. Wenn wir nun das Land S wieder einfügen, so können wir es, falls es an nicht mehr als fünf Länder direkt angrenzt, mit einer Farbe färben, die nicht identisch ist mit der Farbe eines dieser Nachbarländer. Der Satz ist damit bewiesen.

Der Beweis wurde nur für zusammenhängende Karten geführt (wir benutzten die Aufgabe 52). Er kann jedoch sofort auf unzusammenhängende Karten übertragen werden. Wie dies geschieht, soll an einem Beispiel demonstriert werden.

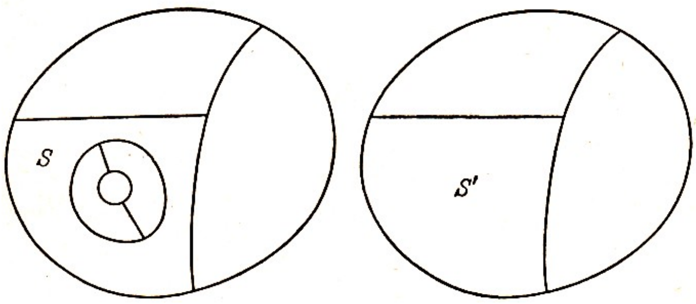


Abb. 87 und 88

In Abb. 87 ist eine unzusammenhängende Karte mit dem trennenden Land S gezeichnet. Die Grenzen dieser Karte zerfallen in zwei zusammenhängende Teile, die im einzelnen in den Abb. 88 und 89 dargestellt sind.
Die Karten in den Abb. 88 und 89 sind zusammenhängend; es ist bewiesen, dass sie mit sechs Farben regulär gefärbt werden, können. Wir bauen sie so auf, dass S' und S'' die gleiche Farbe haben. Dadurch erhalten wir offensichtlich auch für die Karte in Abb. 87 eine reguläre Färbung.

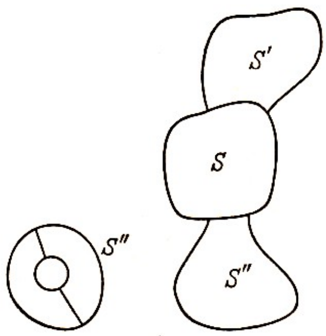


Abb. 89 und 90

54. Wir benutzen wieder vollständige Induktion. Für eine Karte mit höchstens fünf Ländern gilt die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen an, dass der Satz für eine Karte mit höchstens n Ländern gilt, und beweisen ihn dann auch für eine Karte mit $n+1$ Ländern.

Gemäß Aufgabe 52 existiert ein Land S mit weniger als sechs Grenzen, d.h., dass nicht mehr als fünf andere Länder an dieses grenzen.
Falls die Anzahl der S benachbarten Länder vier nicht überschreitet, können wir dieselben Überlegungen wie in der vorhergehenden Aufgabe anwenden.

Es bleibt also noch der Fall zu betrachten, dass S genau fünf Nachbarn besitzt. Unter diesen fünf an S grenzenden Ländern existieren zwei, die nicht direkt aneinander grenzen (Aufgabe 51), etwa S' und S'' (Abb. 90).
Nun entfernen wir die Grenzen zwischen S und S' und zwischen S und S'.
Wir erhalten damit eine neue Karte, die aus $n-1$ Ländern besteht und in der statt der Länder S, S' und S'' ein großes Land $\overline{S}$ liegt.

Diese Karte färben wir mit fünf Farben regulär (dies ist laut Voraussetzung möglich). Wir setzen nun die ausgelöschten Grenzen wieder ein und kehren damit zur Ausgangskarte zurück. S' und S'' behalten die Farbe, die $\overline{S}$ hatte (da sie nun nicht aneinandergrenzen, ist dies ohne Verletzung der regulären Färbung der gesamten Karte möglich).

Das Land S ist dann von fünf Ländern umschlossen, von denen zwei, nämlich S' und S'', die gleiche Farbe besitzen; d.h., S grenzt nur an Länder mit vier verschiedenen Farben, und wir können es daher mit der fünften Farbe belegen, die von denen der Nachbarn verschieden ist.

55. Die kleinstmögliche Wertigkeit der Eckpunkte ist 3. Daher folgt aus Aufgabe 16

$$3v \leq 2g$$

Nach dem Satz von Euler ist $v = g + 2 - s$; hieraus folgt

$$3(g + 2 - s) \leq 2g \qquad , \qquad g \leq 3s - 6$$

was zu beweisen war.

56. Wir wollen zeigen, dass in einer zusammenhängenden Karte mit weniger als zwölf Ländern ein Land existiert, das weniger als 5 Grenzen hat. Dazu nehmen wir das Gegenteil an. Dann gilt gemäß Aufgabe 19

$$5s \leq 2g \tag{1}$$

Da laut Voraussetzung die Wertigkeit jedes Eckpunktes nicht kleiner als 3 ist, gilt nach Aufgabe 16

$$3v \leq 2g \tag{2}$$

Multiplizieren wir (1) mit 3 und (2) mit 5 und addieren, so erhalten wir

$$15(v + s) \leq 16g$$

Nun ersetzen wir $v + s$ durch $g + 2$ und finden

$$15(g + 2) \leq 16g \qquad , \qquad 15g + 30 \leq 16g \qquad , \qquad g \geq 30$$

Andererseits folgt aus Aufgabe 55, dass für $s < 12$ die Ungleichung $g < 3 \cdot 12 - 6 = 30$ erfüllt ist. Wir erhalten einen Widerspruch.
Folglich muss unter den Ländern unserer Karte ein Land existieren, das weniger als fünf Grenzen besitzt.

Im weiteren erhalten wir die Lösung durch Induktion. Wenn die Zahl der Länder 4 nicht überschreitet, so ist die Färbung möglich. Der Satz sei für n Länder richtig. Wir beweisen ihn nun für den Fall von $n + 1$ Ländern ($n + 1 < 12$).

Nach dem Bewiesenen enthält die aus $n+1$ Ländern bestehende Karte ein Land S mit weniger als fünf Grenzen. Ist die Zahl der Nachbarn dieses Landes gleich 1, 2 oder 3, so beseitigen wir dieses Land und stellen dieselben Überlegungen wie in Aufgabe 53 an.
Ist die Zahl der Nachbarländer jedoch gleich 4, so verfahren wir folgendermaßen:

Wir haben fünf Länder, nämlich das Land S Selbst und seine vier Nachbarländer. Es ist ausgeschlossen, dass diese sämtlich paarweise aneinandergrenzen (Aufgabe 51).
Andererseits grenzt jedes von S verschiedene dieser fünf Länder an S. Folglich existieren zwei zu S benachbarte Länder, die selbst nicht aneinandergrenzen. Nachdem wir diese Tatsache festgestellt haben, verläuft der weitere Beweis genau wie in Aufgabe 54.

Wir überlassen es dem Leser, diesen Beweis auch für unzusammenhängende Karten zu führen.

Anmerkung. In dieser Aufgabe ist das Vierfarbenproblem für den Spezialfall gelöst, dass die Anzahl der Länder 11 nicht übertrifft.
Heute ist (als schärfstes Resultat) das Vierfarbenproblem für Karten mit höchstens 38 Ländern gelöst.