

---

**I.M. Sobol**

**Die Monte-Carlo-Methode**

Übersetzung: A. Matthes  
1971 Deutscher Verlag der Wissenschaften  
MSB: Nr. 50  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematika.de>

---

## Vorwort

Vor einigen Jahren wurde mir vorgeschlagen, zwei Vorträge über die Monte-Carlo-Methode für Hörer der Fakultät für Rechen-technik der Abend-Universität zu halten. Ich sagte zu.

Vor dem ersten Vortrag musste ich jedoch mit Schrecken feststellen, dass die meisten Hörer keine Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitsrechnung besaßen. Absagen konnte ich nicht mehr, dazu war es zu spät. Daher nahm ich zusätzlich einen Abschnitt auf, in welchem ich die Hörer mit den grundlegenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen vertraut machte.

Diese Vorträge wurden im Laufe einiger Jahre wiederholt. Nach und nach nahm ihr Inhalt feste Formen an. Das vorliegende Büchlein enthält auch den zusätzlichen Abschnitt (§ 2), zu dem ich hier einige Bemerkungen machen möchte.

Jeder Mensch gebraucht die Worte "Wahrscheinlichkeit" und "Zufallsgröße".

Die intuitive Vorstellung vom Begriff Wahrscheinlichkeit (als Häufigkeit) entspricht mehr oder weniger seinem wirklichen Inhalt. Dagegen weicht die intuitive Vorstellung vom Begriff der Zufallsgröße in der Regel weit von der mathematischen Definition ab. Deshalb wird in § 2 der Begriff Wahrscheinlichkeit als bekannt vorausgesetzt und nur der kompliziertere Begriff der Zufallsgröße erläutert.

Dieser Paragraph kann naturgemäß keinen Lehrgang der Wahrscheinlichkeitsrechnung ersetzen; alles wird vereinfacht und ohne Beweise gebracht. Aber er vermittelt gewisse Vorstellungen von Zufallsgrößen, die zum Verständnis der einfachsten Beispiele der Anwendung der Monte-Carlo-Methode ausreichen.

Das Hauptanliegen der vorliegenden Broschüre ist es, Fachleuten verschiedenster Disziplinen Hinweise zu geben, welche Aufgaben ihres Tätigkeitsbereichs mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode gelöst werden können.

Die hier betrachteten Beispiele sind hinreichend einfach und vielgestaltig. Naturgemäß können sie jedoch nicht alle Anwendungsgebiete der Monte-Carlo-Methode erfassen.

Beispielsweise ist in der Broschüre nicht von medizinischen Anwendungen die Rede. Die in § 7 geschilderten Methoden erlauben es jedoch auch, die Strahlendosis bei Bestrahlungstherapie zu berechnen. Hat man ein Programm zur Berechnung der Strahlungsabsorption in verschiedenen Geweben des Körpers, so kann man mit großer Effektivität Dosierung und Richtung der Bestrahlung so auswählen, dass dem gesunden Gewebe kein Schaden zugefügt wird.

Die vorliegende Broschüre enthält neben dem Stoff der Vorträge einige ausführlich untersuchte Beispiele sowie den ergänzenden § 9.

Moskau, 1967

I. Sobol

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>5</b>
<b>1 Allgemeine Bemerkungen über die Monte-Carlo-Methode</b>	<b>5</b>
1.1 Der Ursprung der Monte-Carlo-Methode . . . . .	5
1.2 Ein Beispiel . . . . .	5
1.3 Zwei Besonderheiten der Monte-Carlo-Methode . . . . .	6
1.4 Probleme, die sich mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode lösen lassen . . . . .	7
1.5 Weitere Bemerkungen zu unserem Beispiel . . . . .	7
<b>Modellierung von Zufallsgrößen</b>	<b>8</b>
<b>2 Zufallsgrößen</b>	<b>8</b>
2.1 Diskrete Zufallsgrößen . . . . .	8
2.2 Stetige Zufallsgrößen . . . . .	11
2.3 Normalverteilte Zufallsgrößen . . . . .	13
2.4 Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	14
2.5 Das allgemeine Schema der Monte-Carlo-Methode . . . . .	15
<b>3 Realisierung von Zufallsgrößen auf einer EDVA</b>	<b>16</b>
3.1 Tabellen von Zufallszahlen . . . . .	16
3.2 Zufallszahlengeneratoren . . . . .	18
3.3 Pseudozufallszahlen . . . . .	18
<b>4 Transformation von Zufallsgrößen</b>	<b>20</b>
4.1 Auslösen einer diskreten Zufallsgröße . . . . .	21
4.2 Auslösen einer stetigen Zufallsgröße . . . . .	22
4.3 Das Verfahren von J.v. Neumann für das Auslösen einer stetigen Zufallsgröße . . . . .	24
4.4 Auslösen normalverteilter Zufallsgrößen . . . . .	24
4.5 Nochmals das Beispiel aus Abschnitt 1.2 . . . . .	25
<b>Beispiele für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode</b>	<b>26</b>
<b>5 Die Berechnung von Bedienungssystemen</b>	<b>26</b>
5.1 Beschreibung der Problemstellung . . . . .	26
5.2 Der Poissonsche Strom von Bedienungswünschen . . . . .	26
5.3 Das Rechenschema . . . . .	27
5.4 Kompliziertere Aufgabenstellungen . . . . .	29
<b>6 Die Bestimmung der Qualität und der Zuverlässigkeit von Erzeugnissen</b>	<b>30</b>
6.1 Ein einfaches Schema zur Gütekontrolle . . . . .	30
6.2 Beispiele zur Berechnung der Zuverlässigkeit . . . . .	31
6.3 Weitere Möglichkeiten dieser Methode . . . . .	32
6.4 Bemerkungen . . . . .	34
<b>7 Untersuchung des Neutronendurchgangs durch eine Platte</b>	<b>34</b>
7.1 Erläuterung der Aufgabenstellung . . . . .	35
7.2 Ein Schema zur Berechnung durch Modellierung der realen Trajektorien . . . . .	36

7.3	Ein Rechenschema unter Benutzung von Gewichten, welche die Absorption ersetzen . . . . .	38
7.4	Bemerkung . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Die Berechnung bestimmter Integrale</b>	<b>39</b>
8.1	Die Berechnungsmethode . . . . .	40
8.2	Wahl des geeigneten Rechenschemas . . . . .	40
8.3	Ein Zahlenbeispiel . . . . .	41
8.4	Zur Fehlerabschätzung . . . . .	42
<b>9</b>	<b>Anhang - Beweis einiger Sätze</b>	<b>44</b>
9.1	Begründung des von Neumannschen Verfahrens zur Auslosung der Werte von Zufallsgrößen . . . . .	44
9.2	Die Verteilungsdichte der Zufallsgröße $Z' = a + \sigma Z$ . . . . .	44
9.3	Die Gleichverteilung der Punkte ( $G'$ , $G''$ ) im Quadrat . . . . .	45
9.4	Auswahl einer zufälligen Richtung . . . . .	45
9.5	Der Vorteil von Berechnungsverfahren mit „Gewichten“ . . . . .	47
9.6	Optimale Auswahl von X-Werten . . . . .	47
9.7	Ermittlung der Fehlerwahrscheinlichkeit . . . . .	48
<b>10</b>	<b>Tabellen</b>	<b>49</b>

## Einführung

# 1 Allgemeine Bemerkungen über die Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode ist eine numerische Methode zur Lösung mathematischer Probleme mit Hilfe der Modellierung von Zufallsgrößen.

## 1.1 Der Ursprung der Monte-Carlo-Methode

Als Geburtsjahr der Monte-Carlo-Methode gilt das Jahr 1949, in welchem eine Arbeit mit dem Titel "The Monte Carlo method"<sup>1</sup> erschien.

Als Begründer dieser Methode sind die Mathematiker J.v. Neumann und S. Ulam anzusehen. In der Sowjetunion wurden die ersten Arbeiten über die Monte-Carlo-Methode in den Jahren 1955-1956 veröffentlicht.<sup>2</sup>

Interessant ist dabei, dass die theoretische Grundlage der Monte-Carlo-Methode schon seit langem bekannt war. Mehr noch, einige Aufgaben der Statistik waren zuweilen schon mit Hilfe zufälliger Stichproben gelöst worden, und das ist praktisch die Monte-Carlo-Methode.

Solange aber keine elektronischen datenverarbeitenden Anlagen (EDVA) zur Verfügung standen, konnte diese Methode keine breite Anwendung finden, da die Modellierung (Simulation) von Zufallsgrößen von Hand einen zu großen Arbeitsaufwand erfordert.

Daher konnte die Monte-Carlo-Methode sich erst dann zu einer universellen numerischen Methode entwickeln, als EDVA benutzt werden konnten.

Die Bezeichnung "Monte-Carlo-Methode" geht auf die Stadt Monte Carlo im Fürstentum Monaco zurück, die besonders durch ihr Spielkasino bekannt geworden ist. Eines der einfachsten mechanischen Geräte zur Realisierung von Zufallsgrößen ist nämlich das Roulette. Darüber wird in § 3 Näheres ausgeführt.

Hier wollen wir nur die häufig gestellte Frage beantworten: "Hilft die Monte-Carlo-Methode, beim Roulette-Spiel zu gewinnen?"

Nein, sie hilft nicht! Sie beschäftigt sich nicht einmal damit.

## 1.2 Ein Beispiel

Um dem Leser klar zu machen, worum es sich hier handelt, betrachten wir das folgende, sehr einfache Beispiel. Wir nehmen an, wir hätten den Flächeninhalt einer ebenen Figur  $S$  zu berechnen.

Die Figur  $S$  kann beliebige Gestalt, sogar eine beliebige krummlinige Begrenzung haben, die sowohl graphisch als auch analytisch gegeben sein kann. Außerdem darf die Begrenzung zusammenhängend sein oder auch aus mehreren Stücken bestehen. Es sei also  $S$  die in Abb. 1 dargestellte Figur, von der wir annehmen, sie liege vollständig innerhalb des Einheitsquadrates.

Wir wählen in diesem Quadrat  $N$  zufällige Punkte aus und bezeichnen die Anzahl der Punkte, die dabei innerhalb der Figur  $S$  liegen, mit  $N'$ . Geometrisch ist klar, dass der Flächeninhalt

---

<sup>1</sup>Metropolis, N., und S. Ulam, The Monte Carlo method, J. Amer. statistical assoc. 44 (1949), 335-341.

<sup>2</sup>Das waren die Arbeiten von N.W. Tschewtschanidse, J.A. Schreider und W.S. Wladimirow.

der Figur  $S$  angenähert gleich dem Verhältnis  $N'/N$  ist. Je größer  $N$  ist, desto größer ist die Genauigkeit dieser Schätzung.

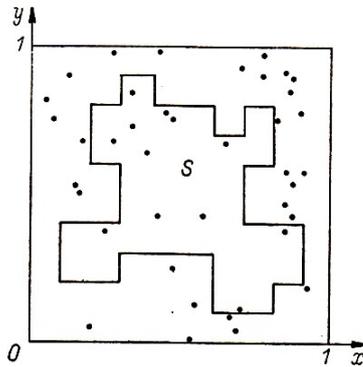


Abb. 1

In Abb. 1 sind  $N = 40$  Punkte dargestellt, von denen  $N' = 12$  innerhalb der Figur  $S$  liegen. Damit ergibt sich das Verhältnis  $N'/N$  zu  $12/40 = 0,3$ . Demgegenüber ist der tatsächliche Flächeninhalt von  $S$  gleich  $0,35$ .<sup>3</sup>

### 1.3 Zwei Besonderheiten der Monte-Carlo-Methode

Die erste Besonderheit der Methode liegt in der einfachen Struktur des Rechenalgorithmus. In der Regel wird ein Programm zur Realisierung eines zufälligen Versuchs aufgestellt (in dem Beispiel von Abschnitt 1.2 war in einem Quadrat ein zufälliger Punkt auszuwählen und nachzuprüfen, ob er in  $S$  liegt).

Danach wird dieser Versuch  $N$ -mal wiederholt; jeder Versuch ist von allen übrigen unabhängig, die Ergebnisse aller Versuche werden statistisch ausgewertet.

Deshalb nennt man die Monte-Carlo-Methode manchmal auch Methode der statistischen Versuche.

Die zweite Besonderheit der Methode betrifft die Rechengenauigkeit. Sie ist in der Regel proportional  $\sqrt{D/N}$ , wobei  $D$  eine Konstante und  $N$  die Anzahl der Versuche ist. Aus dieser Formel ist folgendes zu ersehen:

Will man den Fehler auf  $1/10$  verkleinern (anders gesagt, will man eine weitere richtige Dezimalstelle erhalten), so muss man  $N$  (d.h. den Arbeitsaufwand) auf das 100fache vergrößern.

Offenbar kann man auf diesem Wege keine hohe Genauigkeit erreichen. Deshalb sagt man, die Monte-Carlo-Methode sei besonders effektiv bei der Lösung solcher Aufgaben zu verwenden, von deren Resultaten keine größere Genauigkeit als 5-10 % gefordert wird.

Man kann jedoch ein und dieselbe Aufgabe mit verschiedenen Varianten der Monte-Carlo-Methode lösen<sup>4</sup>, denen verschiedene Werte für die Größe  $D$  entsprechen.

Bei vielen Aufgaben kann die Genauigkeit wesentlich erhöht werden, wenn solche Varianten der Monte-Carlo-Methode benutzt werden, bei denen sich ein relativ kleiner Wert für  $D$  ergibt.

---

<sup>3</sup>In der Praxis wird zur Berechnung des Flächeninhalts einer ebenen Figur die Monte-Carlo-Methode nicht benutzt. Dafür existieren andere Verfahren, die zwar komplizierter sind, aber eine weit größere Genauigkeit gewährleisten. Die in unserem Beispiel geschilderte Monte-Carlo-Methode erlaubt es jedoch, den "mehrdimensionalen Inhalt" eines Körpers im mehrdimensionalen Raum zu berechnen, und in diesem Fall erweist sich die Monte-Carlo-Methode häufig als einziges numerisches Verfahren, das eine Lösung der Aufgabe ermöglicht.

<sup>4</sup>In der Literatur spricht man häufig auch von Monte-Carlo-Methoden; damit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass ein und dieselbe Aufgabe mit Hilfe verschiedener Zufallsgrößen modelliert werden kann.

## 1.4 Probleme, die sich mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode lösen lassen

Erstens gestattet es die Monte-Carlo-Methode, jeden Vorgang nachzubilden (man sagt auch: zu modellieren oder zu simulieren), auf dessen Ablauf zufällige Faktoren Einfluss nehmen. Zweitens kann man sich für viele mathematische Aufgaben, die überhaupt nichts mit Zufälligkeiten zu tun haben, ein künstliches wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell ausdenken (manchmal sogar mehr als eins), das ihre Lösung ermöglicht. Gerade von dieser Art war das Beispiel in Abschnitt 1.2.

Aus diesen Gründen kann man die Monte-Carlo-Methode zu recht als eine universelle Methode zur Lösung mathematischer Aufgaben bezeichnen.

Besonders interessant ist, dass es in einigen Fällen vorteilhaft ist, von einer Modellierung des wirklichen zufälligen Prozesses abzusehen und stattdessen ein künstliches Modell zu benutzen. Einen solchen Fall werden wir in § 7 untersuchen.

## 1.5 Weitere Bemerkungen zu unserem Beispiel

Wir betrachten noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 1.2.

Zur Berechnung mussten wir zufällige Punkte im Einheitsquadrat auswählen. Wie lässt sich das physikalisch realisieren?

Wir wollen uns folgendes Experiment vorstellen: Wir zeichnen die Abb. 1 (vergrößert) als Zielscheibe auf eine Wand. Ein Schütze, der sich in einer gewissen Entfernung von der Wand befindet, schießt  $N$ -mal, wobei er auf das Zentrum des Quadrates zielt.

Selbstverständlich werden die Einschüsse nicht alle genau im Zentrum liegen. Sie bilden auf der Zielscheibe  $N$  zufällige Punkte.<sup>5</sup> Kann man nun mit Hilfe dieser Punkte den Flächeninhalt von  $S$  schätzen?

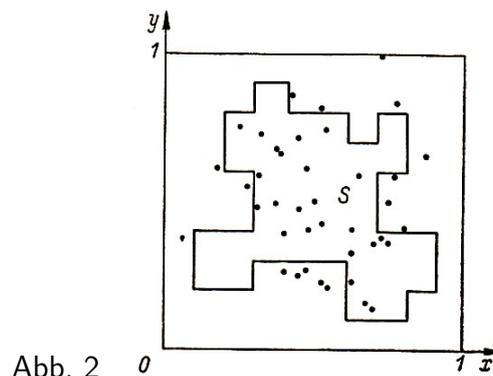


Abb. 2

Das Ergebnis dieses Versuchs zeigt Abb. 2. Es ergab sich  $N = 40$  und  $N' = 24$ , d.h., das Verhältnis  $N'/N$  ist gleich 0,6. Das ist fast doppelt so groß wie der wirkliche Wert des Flächeninhalts (0,35). Übrigens ist klar, dass das Ergebnis dieses Versuchs bei sehr hoher Qualifikation des Schützen sehr schlecht sein wird, da dann fast alle Einschüsse nahe dem Zentrum und innerhalb  $S$  liegen werden.<sup>6</sup>

Es ist leicht einzusehen, dass unsere Methode zur Berechnung des Flächeninhaltes nur dann

<sup>5</sup>Wir setzen dabei voraus, dass der Schütze nicht Weltmeister ist und hinreichend weit von der Zielscheibe entfernt steht.

<sup>6</sup>Wie die zufälligen Punkte in Abb. 1 und 2 ausgewählt wurden, erfahren wir in Abschnitt 4.5.

richtig ist, wenn die zufälligen Punkte nicht nur "schlechthin zufällig" sind, sondern außerdem noch über das ganze Quadrat "gleich(mäßig) verteilt" sind.

Um diesen Worten einen genauen Sinn verleihen zu können, müssen wir uns mit der Definition von Zufallsgrößen und einigen ihrer Eigenschaften vertraut machen. Diese Begriffe werden in § 2 ohne Beweis dargelegt. Ein Leser, der schon Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzt, kann den gesamten § 2, mit Ausnahme des Abschnitts 2.5, übergehen.

## Modellierung von Zufallsgrößen

### 2 Zufallsgrößen

Wir nehmen an, der Begriff Wahrscheinlichkeit sei dem Leser mehr oder weniger bekannt, und gehen sofort zum Begriff der Zufallsgröße über.

Das Wort "Zufallsgröße" gebraucht man gewöhnlich dann, wenn man betonen will, dass nicht bekannt ist, welchen konkreten Wert diese Größe annehmen wird. Manchmal allerdings wird mit diesem Wort einfach umschrieben, dass man über die Art dieser Größe nichts weiß.

Wenn man sich jedoch in der Mathematik des Wortes "Zufallsgröße" bedient, verbindet man damit einen völlig bestimmten Sinn. Es besagt dort nämlich folgendes:

Wir wissen zwar nicht, welchen Wert eine solche Größe in einem konkreten Fall annimmt, wir wissen aber, welche Werte sie überhaupt annehmen kann, und wir wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der eine oder andere Wert angenommen wird.

Aufgrund dieser Kenntnis können wir zwar das Resultat eines einzelnen Versuchs, der mit dieser Zufallsgröße zusammenhängt, nicht genau vorhersagen, aber wir können die Gesamtheit der Resultate einer großen Anzahl von Versuchen äußerst zuverlässig vorhersagen. Je mehr Versuche gemacht werden, um so genauer wird unsere Vorhersage sein.

Um eine Zufallsgröße zu charakterisieren, muss also angegeben werden, welche Werte sie überhaupt annehmen kann und wie groß die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser einzelnen Werte ist.

#### 2.1 Diskrete Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße  $X$  heißt diskret, wenn sie eine diskrete Menge von Werten  $x_1, \dots, x_n$  annehmen kann.<sup>7</sup>

Eine diskrete Zufallsgröße  $X$  lässt sich durch eine Tabelle

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (\text{T})$$

definieren, in der  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die möglichen Werte der Größe  $X$  und  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind. Genauer gesagt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Größe  $X$  den Wert  $x_i$ , annimmt, in Zeichen  $P\{X = x_i\}$ , ist gleich  $p_i$ :

$$P\{X = x_i\} = p_i$$

---

<sup>7</sup>In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden auch diskrete Zufallsgrößen betrachtet, die unendlich viele Werte annehmen können.

Die Tabelle (T) wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße  $X$  genannt. Die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  können beliebig sein. Die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  müssen jedoch den folgenden beiden Bedingungen genügen:

a) Alle  $p_i$  sind positiv:

$$p_i > 0 \quad (1)$$

b) Die Summe aller  $p_i$  ist gleich 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2)$$

Die letzte Bedingung besagt, dass  $X$  unbedingt einen der Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  annehmen muss.

Unter dem Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  verstehen wir die Zahl

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (3)$$

Zur Klärung der physikalischen Bedeutung dieser Größe schreiben wir sie in folgender Form:

$$EX = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Hieraus ist zu ersehen, dass  $EX$  der gewogene Mittelwert der Größe  $X$  ist, wobei die Werte  $x_i$  mit dem "Gewicht" ihrer Wahrscheinlichkeit in die Summe eingehen.<sup>8</sup>

Für den Erwartungswert gelten folgende grundlegenden Eigenschaften: Ist  $c$  eine beliebige nicht zufällige Größe, so gilt

$$E(X + c) = EX + c \quad , \quad E(cX) = cEX \quad (4,5)$$

sind  $X$  und  $Y$  zwei beliebige Zufallsgrößen, so gilt

$$E(X + Y) = EX + EY \quad (6)$$

Unter der Dispersion einer Zufallsgröße  $X$  versteht man die Größe

$$DX = E((X - EX)^2) \quad (7)$$

Die Dispersion  $DX$  ist somit der Erwartungswert des Quadrates der Abweichung der Zufallsgröße  $X$  von ihrem Mittelwert  $EX$ . Daher gilt in jedem Fall  $DX > 0$ .

Erwartungswert und Dispersion sind die wichtigsten zahlenmäßigen Charakteristiken einer Zufallsgröße  $X$ . Worin liegt nun ihre praktische Bedeutung?

<sup>8</sup>Gewogene Mittelwertbildung kommt in den verschiedensten Bereichen der Wissenschaft sehr häufig vor, beispielsweise in der Mechanik: In den Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der x-Achse seien die Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  angeordnet. Dann gilt für die Abszisse des Schwerpunktes dieses Systems

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

In diesem Fall braucht natürlich die Gesamtmasse nicht gleich Eins zu sein.

Wenn wir eine Größe  $X$  mehrmals beobachten und dabei die Werte  $X_1, X_2, \dots, X_n$  erhalten (jeder von ihnen ist dann gleich einer der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), so ist das arithmetische Mittel dieser Werte ungefähr gleich  $EX$ :

$$\frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \approx EX \quad (8)$$

Die Dispersion  $DX$  charakterisiert dann die Streuung dieser Werte um den Mittelwert  $EX$ . Mit Hilfe der Formeln (4) bis (6) kann man die Formel (7) für die Dispersion wie folgt umformen:

$$DX = E(X^2 - 2EX \cdot X + (EX)^2) = E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 \quad (9)$$

Eine Berechnung der Dispersion nach Formel (9) ist gewöhnlich einfacher als nach Formel (7). Die Dispersion besitzt folgende grundlegenden Eigenschaften:

Ist  $c$  eine beliebige nicht zufällige Größe, so gilt

$$D(X + c) = DX \quad , \quad D(cX) = c^2DX \quad (10,11)$$

Eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt der Begriff der Unabhängigkeit von Zufallsgrößen. In Wirklichkeit ist dies ein ziemlich komplizierter Begriff, der allerdings in den einfachsten Fällen sehr einleuchtend ist.<sup>9</sup>

Für unabhängige Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  gelten folgende Beziehungen:

$$E(XY) = EX \cdot EY \quad , \quad D(X + Y) = DX + DY \quad (12,13)$$

Beispiel. Wir betrachten eine Zufallsgröße  $K$  mit der Verteilung

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Als Realisierung dieser Größe kann man offenbar die Anzahl der geworfenen Augen eines Spielwürfels beim Würfeln ansehen. Alle Werte sind gleich wahrscheinlich.

Wir wollen den Erwartungswert und die Dispersion von  $K$  berechnen. Nach Formel (3) gilt

$$EK = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$$

Nach der Formel (9) ergibt sich

$$DK = E(K^2) - (EK)^2 = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - (3,5)^2 = 2,917$$

Beispiel. Wir betrachten die Zufallsgröße  $M$  mit der Verteilung

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<sup>9</sup>Wir nehmen an, es werde außer der Zufallsgröße  $X$  noch eine zweite Zufallsgröße  $Y$  beobachtet. Wenn sich die Verteilung der Größe  $X$  aufgrund der Tatsache, dass uns der Wert von  $Y$  schon bekannt war, nicht ändert, sehen wir die Größen  $X$  und  $Y$  naturgemäß als unabhängig an.

Als Realisierung dieser Zufallsgröße kann man das Zahl- und Wappenspiel (Werfen einer Münze) ansehen, wenn man der einen Seite der Münze (der Zahl) die Zahl 3, der anderen Seite (dem Wappen) die Zahl 4 zuordnet. In diesem Fall ist

$$EM = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 = 3,5$$

$$DM = 0,5(3^2 + 4^2) - (3,5)^2 = 0,25$$

Wir sehen, dass zwar  $EM = EK$ , aber  $DM < DK$  ist. Das ist leicht einzusehen, da die für  $M$  möglichen Werte nur um  $\pm 0,5$  von dem Wert 3,5 abweichen, die Werte von  $K$  dagegen bis zu  $\pm 2,5$  um den Mittelwert von  $K$  streuen können.

## 2.2 Stetige Zufallsgrößen

Wir stellen uns vor, in der Ebene befinde sich im Koordinatenursprung eine gewisse Menge Radium. Beim Zerfall jedes Radiumatoms wird ein  $\alpha$ -Teilchen frei. Seine Bewegungsrichtung können wir durch den Winkel  $\psi$  charakterisieren (Abb. 3).

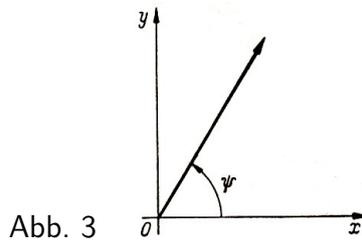


Abb. 3

Da sowohl theoretisch als auch praktisch jede Bewegungsrichtung möglich ist, kann diese Zufallsgröße jeden Wert zwischen 0 und  $2\pi$  annehmen.

Eine Zufallsgröße  $X$  heißt stetig, wenn sie jeden Wert aus einem Intervall  $(a, b)$  annehmen kann.

Eine stetige Zufallsgröße wird durch Angabe des Intervalls  $(a, b)$ , das die für sie möglichen Werte enthält, und einer Funktion  $p(x)$ , welche Wahrscheinlichkeitsdichte oder Verteilungsdichte der zufälligen Größe  $X$  genannt wird, definiert.

Die physikalische Bedeutung von  $p(x)$  ist folgende: Es sei  $(a', b')$  ein beliebiges in  $(a, b)$  enthaltenes Intervall (es ist also  $a \leq a', b' \leq b$ ). Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X$  einen Wert aus dem Intervall  $(a', b')$  annimmt, die Beziehung

$$P\{a' < X < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx \quad (14)$$

In Abb. 4 ist der Inhalt der gestrichelten Fläche gleich dem Wert des Integrals (14).

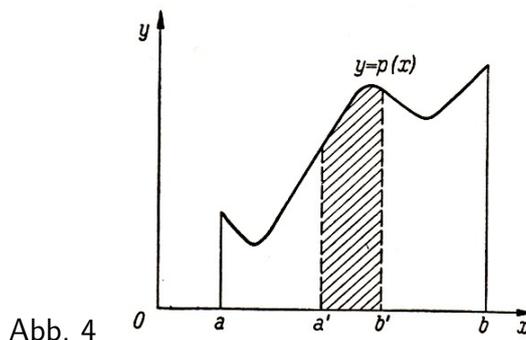


Abb. 4

Die Menge der Werte von  $X$  kann ein beliebiges Intervall sein, wobei auch die Werte  $a = -\infty$  und  $b = +\infty$  zugelassen sind.

Die Dichte  $p(x)$  allerdings muss zwei Bedingungen erfüllen, die den Bedingungen (1) und (2) für diskrete Zufallsgrößen analog sind:

a) Die Dichte  $p(x)$  ist positiv:

$$p(x) > 0 \quad (15)$$

b) Das Integral der Dichte  $p(x)$  über das ganze Intervall  $(a, b)$  ist gleich 1:

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad (16)$$

Unter dem Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße  $X$  verstehen wir die Zahl

$$EX = \int_a^b xp(x) dx \quad (17)$$

Die Bedeutung des Erwartungswertes ist dieselbe wie im Fall einer diskreten Zufallsgröße. Wegen

$$EX = \frac{\int_a^b xp(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

ist leicht zu sehen, dass das der Mittelwert der Größe  $X$  ist; jede Zahl  $x$  aus dem Intervall  $(a, b)$ , die dann mit dem Gewicht  $p(x)$  in das Integral eingeht<sup>10</sup>, kann eine Realisierung von  $X$  sein.

Die im Abschnitt 2.1 angegebenen Formeln (4) bis (13) gelten auch für stetige Zufallsgrößen, insbesondere die Definition der Dispersion (7), die Formel (9) zu ihrer Berechnung sowie alle Eigenschaften von  $EX$  und  $DX$ . Wir werden sie deshalb nicht noch einmal wiederholen.

Wir erwähnen nur noch eine Formel für den Erwartungswert einer Zufallsfunktion.

Es sei  $X$  eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$ . Wir wählen eine beliebige stetige Funktion  $f(x)$  und betrachten die Zufallsgröße  $Y = f(X)$ , die manchmal als zufällige Funktion bezeichnet wird. Man kann die Beziehung

$$Ef(X) = \int_a^b f(x)p(x) dx \quad (18)$$

beweisen.

Wir betonen, dass im allgemeinen  $Ef(X) \neq f(EX)$  ist.

Eine im Intervall  $(0, 1)$  definierte Zufallsgröße  $G$  nennt man in  $(0, 1)$  gleichverteilt, wenn  $p(x) = 1$  ist (siehe Abb. 5).

<sup>10</sup>Auch in diesem Fall kann man mit Hilfe einer analogen Formel aus; der Mechanik zeigen: Wenn die lineare Dichtefunktion auf dem Intervall  $a \leq x \leq b$  gleich  $R(x)$  ist, erhält man die Abszisse des Schwerpunkte nach der Formel

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xR(x) dx}{\int_a^b R(x) dx}$$

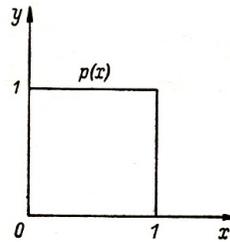


Abb. 5

Ist nämlich  $(a', b')$  irgendein Teilintervall von  $(0, 1)$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße  $G$  einen Wert aus  $(a', b')$  annimmt, gleich

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a'$$

also gleich der Länge dieses Teilintervalls. Teilen wir insbesondere das Intervall  $(0, 1)$  in beliebig viele Intervalle gleicher Länge, so sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Zufallsgröße  $G$  einen Wert aus einem beliebigen dieser Teilintervalle annimmt, sämtlich einander gleich. Man rechnet leicht nach, dass

$$EG = \int_0^1 xp(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

und

$$DG = \int_0^1 x^2 p(x) dx - (EG)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

gilt. Der Zufallsgröße  $G$  werden wir im weiteren noch mehrmals begegnen.

### 2.3 Normalverteilte Zufallsgrößen

Wir nennen eine Zufallsgröße  $Z$  normalverteilt (oder Gauß-verteilt), wenn sie auf der gesamten reellen Achse  $(-\infty, \infty)$  definiert ist und die Verteilungsdichte

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

besitzt, wobei  $a$  und  $\sigma > 0$  irgendwelche Zahlenparameter sind.<sup>11</sup>

Der Parameter  $a$  hat keinen Einfluss auf die Gestalt der Kurve  $p(x)$ ; eine Änderung von  $a$  führt nur zu einer Verschiebung der Kurve entlang der  $x$ -Achse. Bei einer Änderung von  $\sigma$  ändert sich jedoch die Gestalt der Kurve. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass

$$\max p(x) = p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

ist. Verkleinert man  $\sigma$ , so wird  $\max p(x)$  größer. Dabei bleibt jedoch der Flächeninhalt unterhalb der Kurve  $p(x)$  gemäß der Bedingung (16) gleich 1.

Daher ist die Kurve in der Umgebung von  $x = a$  nach oben gestreckt, Während sie für alle hinreichend großen Werte von  $x$  flach wird.

In Abb. 6 sind die Verteilungsdichten zweier normalverteilter Zufallsgrößen, die eine mit  $a = 0$  und  $\sigma = 1$ , die andere mit  $a = 0$  und  $\sigma = 0,5$ , dargestellt (eine weitere Verteilungsdichte einer normalverteilten Zufallsgröße ist in Abb. 21 dargestellt).

<sup>11</sup>Die Bezeichnung  $\sigma$  ist allgemein üblich.

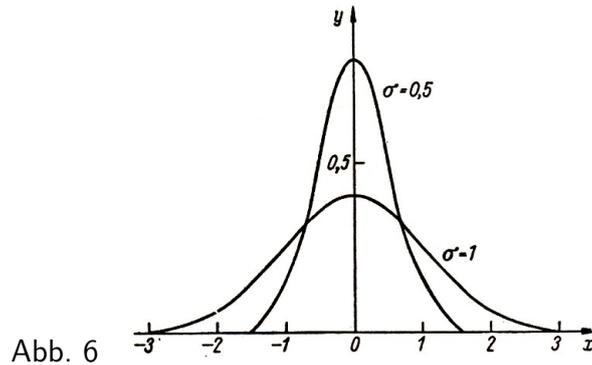


Abb. 6

Man kann zeigen, dass

$$EZ = a \quad , \quad DZ = \sigma^2$$

gilt. Auf normalverteilte Zufallsgrößen stößt man sehr häufig bei der Untersuchung ganz verschiedenartiger Probleme. Über die Ursache dieser Tatsache wird später noch einiges gesagt werden.

So ist z.B. ein Messfehler  $\delta$  in der Regel eine normalverteilte Zufallsgröße. Gibt es bei einer Messung keinen systematischen Fehler, so ist  $a = E\delta = 0$ . Die Größe  $\sigma = \sqrt{D\delta}$ , die als mittlere quadratische Abweichung bezeichnet wird, kennzeichnet den Fehler der Messmethode.

Die "3 $\sigma$ -Regel". Man rechnet leicht nach, dass für beliebige Werte  $a$  und  $\sigma$  in Formel (19) die Beziehung

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} p(x)dx = 0,997$$

gilt. Aus der Formel (14) folgt dann

$$P\{a - 3\sigma < Z < a + 3\sigma\} = 0,997 \tag{20}$$

Die Wahrscheinlichkeit 0,997 liegt so nahe bei 1, dass man diese Formel auch folgendermaßen interpretieren kann: Bei einem einzigen Versuch ist es praktisch unmöglich, einen Wert der Zufallsgröße  $Z$  zu erhalten, der sich vom Erwartungswert  $EZ$  um mehr als  $3\sigma$  unterscheidet.

## 2.4 Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dieser bemerkenswerte Satz wurde erstmalig von Laplace formuliert. Mit Verallgemeinerungen dieses Satzes beschäftigten sich viele hervorragende Mathematiker, so P.L. Tschebyschew, A.A. Markow und A.M. Ljapunow; sein Beweis ist ziemlich kompliziert.

Wir betrachten  $N$  gleichartig verteilte unabhängige Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeitsdichten dieser unabhängigen Zufallsgrößen stimmen überein. Folglich stimmen auch die Erwartungswerte und die Dispersionen überein. Wir setzen

$$\begin{aligned} EX_1 &= EX_2 = \dots = EX_N = m \\ DX_1 &= DX_2 = \dots = DX_N = b^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Summe dieser  $N$  Zufallsgrößen mit  $R_N$ ,

$$R_n = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

so folgt aus den Formeln (6) und (13)

$$\begin{aligned} ER_N &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = Nm \\ DR_N &= D(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = Nb^2 \end{aligned}$$

Für die normalverteilte Zufallsgröße  $Z_N$  mit den Parametern  $a = Nm$  und  $\sigma^2 = Nb^2$  gilt nun der

Satz. Die Verteilungsdichte der Summe  $R_N$  konvergiert für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Verteilungsdichte der normalverteilten Zufallsgröße  $Z_N$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |p_{R_N}(x) - p_{Z_N}(x)| = 0$$

Die physikalische Bedeutung dieses Satzes ist offensichtlich:

Die Summe  $R_N$  einer großen Zahl gleichartig verteilter unabhängiger Zufallsgrößen ist asymptotisch normalverteilt:

$$p_{R_N}(x) \approx p_{Z_N}(x)$$

In Wirklichkeit ist dieser Satz unter weit allgemeineren Bedingungen gültig:

Die Summanden  $X_1, X_2, \dots, X_N$  müssen nicht unbedingt gleichartig verteilt und unabhängig sein. Wesentlich ist nur, dass die einzelnen Summanden keinen zu großen Beitrag zur Summe liefern.

Dieser Satz macht deutlich, warum man in der Natur so häufig normalverteilte Zufallsgrößen antrifft. Denn immer, wenn man es mit dem Zusammenwirken einer großen Anzahl von zufälligen Faktoren zu tun hat, die im einzelnen unwesentlich sind, erweist sich die resultierende Zufallsgröße als normalverteilt.

So ist die Zielabweichung eines Artilleriegeschosses fast immer eine normalverteilte Zufallsgröße, da sie sowohl von meteorologischen Bedingungen auf den verschiedenen Abschnitten der Geschossbahn als auch von vielen anderen Faktoren abhängt.

## 2.5 Das allgemeine Schema der Monte-Carlo-Methode

Nehmen wir an, wir hätten irgendeine unbekannte Größe  $m$  zu berechnen. Wir versuchen, uns dazu eine solche Zufallsgröße  $X$  auszudenken, für die  $EX = m$  ist. Dabei sei dann  $DX = b^2$ .

Wir betrachten  $N$  unabhängige Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , deren Verteilungen mit der Verteilung von  $X$  übereinstimmen. Ist  $N$  hinreichend groß, so wird die Verteilung der Summe  $R_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  entsprechend dem Satz aus Abschnitt 2.4 asymptotisch normalverteilt sein mit den Parametern  $a = Nm$  und  $\sigma^2 = Nb^2$ . Aus (20) folgt dann

$$P\{Nm - 3b\sqrt{N} < R_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0,997$$

Dividieren wir die in geschweiften Klammern stehende Ungleichung durch  $N$ , so erhalten wir eine äquivalente Ungleichung, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Ungleichung erfüllt ist, bleibt dieselbe:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{R_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997$$

Wir schreiben diese Beziehung in der Gestalt

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997 \quad (21)$$

Dies ist eine für die Monte-Carlo-Methode außerordentlich wichtige Beziehung. Sie liefert uns eine Methode sowohl zur Berechnung von  $m$  als auch zur Abschätzung der Streuung.

Wir finden  $N$  Realisierungen der Zufallsgröße  $X_1$ <sup>12</sup>; der Formel (21) ist zu entnehmen, dass das arithmetische Mittel dieser Realisierungen asymptotisch gleich  $m$  sein wird. Mit großer Wahrscheinlichkeit wird der Fehler dieser Näherung nicht größer als  $3b/\sqrt{N}$  sein, woraus zu ersehen ist, dass dieser Fehler mit wachsendem  $N$  gegen Null geht.

### 3 Realisierung von Zufallsgrößen auf einer EDVA

Schon die Frage: "Wie realisiert man auf einer EDVA zufällige Größen?" ruft manchmal Erstaunen hervor; denn alles, was eine solche Anlage tut, muss ja vorher programmiert werden. Wie kann sich da eine Zufälligkeit ergeben?

In dieser Frage liegen tatsächlich einige Schwierigkeiten; sie sind jedoch eher philosophischer Natur, so dass wir hier nicht näher darauf eingehen.

Wir wollen aber auf jeden Fall betonen, dass Zufallsgrößen, von denen in § 2 die Rede war, idealisierte mathematische Begriffe sind. Die Frage, ob mit ihrer Hilfe irgendwelche Naturerscheinungen beschrieben werden können, lässt sich durch Experimente beantworten.

Eine solche Beschreibung wird immer eine Näherung sein. Mehr noch, eine Zufallsgröße, die irgendeine physikalische Größe für einen bestimmten Erscheinungsbereich völlig zufriedenstellend beschreibt, kann sich für Untersuchungen in anderen Erscheinungsbereichen als schlechte Charakterisierung der gleichen Größe erweisen.

Ganz ähnlich erweist sich ja ein Weg, den man auf einer Landkarte als Gerade (im Sinne einer mathematisch idealen Geraden "ohne Breite") sieht, auf dem Plan einer Ortschaft in größerem Maßstab als gekrümmter Streifen.

Gewöhnlich unterscheidet man drei Verfahren zur Realisierung von Zufallsgrößen: Tabellen von Zufallszahlen, Generatoren von Zufallszahlen und das Prinzip der Pseudozufallszahlen.

#### 3.1 Tabellen von Zufallszahlen

Wir führen folgenden Versuch durch: Auf zehn gleich aussehende Zettel schreiben wir die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, legen diese Zettel in einen Hut und mischen sie. Jetzt ziehen wir einen Zettel aus dem Hut, halten die darauf stehende Ziffer in einer Tabelle fest, legen den Zettel wieder in den Hut zurück und mischen erneut. Diesen Vorgang wiederholen wir.

Auf diese Weise entstand die Tabelle A am Ende des Buches. (In Tabelle A haben wir die Ziffern der Bequemlichkeit halber in Gruppen zu je fünf zusammengestellt.)

Eine solche Tabelle nennen wir eine Tabelle von Zufallszahlen, obwohl es richtiger wäre, sie als Tabelle zufälliger Ziffern zu bezeichnen.

Man kann diese Tabelle in einen Rechenautomaten einspeichern. Benötigt man dann im Verlauf

---

<sup>12</sup>Dabei ist es völlig gleichgültig, ob man je einen Wert der Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_N$  sucht oder ob  $N$  Werte einer einzigen Zufallsgröße  $X$  ermittelt werden, da alle diese Zufallsgrößen übereinstimmen (d.h. die gleiche Verteilung haben).

einer Berechnung den Wert einer Zufallsgröße mit der Verteilung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

so wählt man dafür jeweils die nächste Ziffer aus dieser Tabelle.

Die größte der veröffentlichten Tabellen von Zufallszahlen enthält 1000000 Ziffern.<sup>13</sup> Sie wurde natürlich mit einer moderneren Technik, als es unser "Hut-Experiment" darstellt, gewonnen, und zwar mit einem elektronischen Roulette.

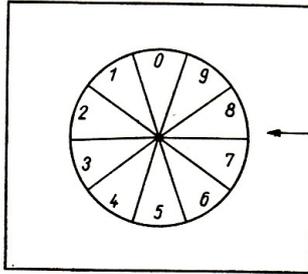


Abb. 7

Ein vereinfachtes Schema eines solchen Roulettes zeigt Abb. 7. (Eine sich drehende Scheibe wird plötzlich gestoppt und diejenige Ziffer gewählt, auf die ein feststehender Pfeil zeigt.)

Wir müssen allerdings darauf hinweisen, dass die Aufstellung einer guten Tabelle von Zufallszahlen nicht so einfach ist, wie es scheint. Jedes reale physikalische Gerät erzeugt Zufallsgrößen mit einer Verteilung, die sich etwas von der idealen Verteilung (22) unterscheidet.

Außerdem sind im Verlauf des Versuches Fehler möglich, beispielsweise könnte ein Zettel nach einiger Zeit unter das Schweißleder rutschen. Deshalb muss eine Tabelle von Zufallszahlen mit Hilfe spezieller statistischer Tests sorgfältig daraufhin geprüft werden, ob die eine oder andere Eigenschaft einer Zahlengruppe nicht der Hypothese widerspricht, dass diese Zahlen Werte der Zufallsgröße (22) sind.

Einen der einfachsten derartiger Tests wollen wir hier angeben. Wir betrachten eine Tabelle mit  $N$  Ziffern. Die Zahl Null komme darin  $\nu_0$ -mal, die Zahl Eins  $\nu_1$ -mal, die Zahl Zwei  $\nu_2$ -mal usw. vor. Wir bilden die Summe

$$\sum_{i=0}^9 (\nu_i - 0,1N)^2$$

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man angeben, innerhalb welcher Grenzen diese Summe liegen muss:

sie darf nicht zu groß sein, da der Erwartungswert jedes der  $\nu_i$  gleich  $0,1 \cdot N$  ist; sie darf aber auch nicht zu klein sein, da das eine "zu gesetzmäßige" Verteilung der Werte bedeuten würde.

Tabellen von Zufallszahlen benutzt man nur bei Rechnungen nach der Monte-Carlo-Methode, die von Hand ausgeführt werden, da EDVA relativ kleine innere Speicher besitzen, in denen keine großen Tabellen gespeichert werden können. Das Speichern der Tabellen in äußeren Speichern und das ständige Abfordern der Zahlen von dort würde die Rechnung sehr verlangsamen.

Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass im Laufe der Zeit die Speicherkapazitäten von EDVA erheblich anwachsen und Tabellen von Zufallszahlen somit praktischen Wert bekommen werden.

<sup>13</sup>RAND-Corporation, A million random digits with 1000000 normal deviates, The Free Press 1955.

## 3.2 Zufallszahlengeneratoren

Es wäre denkbar, das in Abschnitt 3.1 erwähnte Roulette mit einem Rechenautomaten zu verbinden und nach Bedarf Zufallszahlen zu erzeugen. Allerdings wäre jedes mechanische Gerät für eine EDVA zu langsam. Deshalb wird als Zufallszahlengenerator sehr häufig das Rauschen von Elektronenröhren benutzt.

Erreicht der Rauschpegel innerhalb eines beliebig festgelegten Zeitintervalls  $\Delta t$  ein geradzahliges Vielfaches eines vorgegebenen Schwellwertes, so wird eine Null registriert; erreicht er ein ungeradzahliges Vielfaches, so wird eine Eins registriert.<sup>14</sup>

Auf den ersten Blick ist das ein sehr bequemes Verfahren. Es mögen  $m$  solche Generatoren ununterbrochen parallel arbeiten und alle binären Stellen einer speziellen Speicherzelle mit zufälligen Nullen und Einsen belegen. Jeder Arbeitstakt ergibt dann eine  $m$ -stellige Zahl. In jedem Augenblick der Berechnung kann man dieser Speicherzelle einen Wert der Zufallsgröße  $G$ , die im Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilt ist, entnehmen.

Dieser Wert lässt sich selbstverständlich angenähert als  $m$ -stelliger Dualbruch  $0, \alpha_{(1)}\alpha_{(2)}\dots\alpha_{(m)}$  schreiben, wobei jedes der  $\alpha_{(i)}$  eine Zufallsgröße mit der Verteilung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

darstellt.

Auch dieses Verfahren ist jedoch nicht frei von Unzulänglichkeiten. Einmal ist es schwer, die "Güte" der erzeugten Zahlen zu überprüfen. Diese Prüfung müsste periodisch durchgeführt werden, da sich aufgrund von Fehlern eine sogenannte "Verteilungsdrift" ergeben kann (d.h. auf irgendwelchen Stellen können sich Nullen und Einsen mit unterschiedlicher Häufigkeit einstellen).

Zum anderen werden auf einer EDVA gewöhnlich alle Rechnungen zweimal ausgeführt, um die Möglichkeit einer zufälligen Abweichung auszuschließen. Die gleichen Zufallszahlen lassen sich aber nicht reproduzieren, wenn man sie im Verlauf der Rechnung nicht speichert. Würde man sie aber speichern, so wäre das gleichbedeutend damit, dass man wieder mit Tabellen von Zufallszahlen arbeiten würde.

Zahlengeneratoren eines solchen Typs sind ohne Zweifel dann nützlich, wenn man spezielle datenverarbeitende Anlagen baut, die der Lösung von Aufgaben mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode angepasst sind. Für universelle EDVA jedoch, auf denen nur von Zeit zu Zeit Berechnungen mit Hilfe von Zufallszahlen ausgeführt werden, eine solche spezielle Einrichtung vorzusehen und zu benutzen, wäre einfach unökonomisch.

Hier ist es besser, sogenannte Pseudozufallszahlen zu benutzen.

## 3.3 Pseudozufallszahlen

Da die "Güte" der verwendeten Zufallszahlen mit Hilfe spezieller Tests überprüft wird, braucht man sich nicht dafür zu interessieren, wie diese Zahlen gewonnen wurden. Es genügt, dass sie ein vorgegebenes System von Tests erfüllen. Man kann sogar versuchen, sie nach einer gegebenen Formel zu berechnen.

Eine solche Formel muss selbstverständlich immer eine sehr "schlaue" Formel sein.

---

<sup>14</sup>Es existieren auch vollkommenere Konstruktionen.

Zahlen, welche nach einer bestimmten Formel gewonnen werden und die Werte einer Zufallsgröße  $G$  nachbilden (modellieren, simulieren), nennt man Pseudozufallszahlen. Hierbei wollen wir unter "nachbilden" verstehen, dass diese Zahlen eine Reihe von Tests so erfüllen, als ob sie Werte dieser Zufallsgröße wären.

Der erste Algorithmus zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen wurde von J.v. Neumann vorgeschlagen; er wird als Methode der mittleren Ziffern von Quadraten bezeichnet.

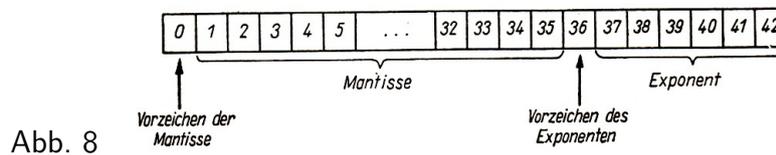


Abb. 8

Wir wollen diese Methode an einem Beispiel erläutern. Es sei die vierstellige ganze Zahl  $n_1 = 9876$  gegeben. Wir erheben sie ins Quadrat und erhalten die (im allgemeinen) achtstellige Zahl  $n_1^2 = 97535376$ .

Von dieser Zahl wählen wir die mittleren vier Ziffern und bilden so die Zahl  $n_2 = 5353$ .

Danach quadrieren wir  $n_2$  und erhalten  $n_2^2 = 28654609$ , wählen wieder die mittleren vier Ziffern aus und erhalten  $n_3 = 6546$ .

Weiter ergibt sich  $n_3^2 = 42850116$ ,  $n_4 = 8501$ ;  $n_4^2 = 72267001$ ,  $n_5 = 2670$ ;  $n_5^2 = 07128900$ ,  $n_6 = 1289$  usw.

So bieten sich als Werte für  $G$  die Werte 0,9876; 0,5353; 0,6546; 0,8501; 0,2670; 0,1289 usw. an.<sup>15</sup>

Dieser Algorithmus hat sich jedoch nicht bewährt; es ergaben sich mehr kleine Werte als gebraucht wurden. Deshalb wurden von verschiedenen Wissenschaftlern andere Algorithmen aufgestellt.

Einige dieser Algorithmen nutzen die Besonderheiten konkreter EDVA aus. Als Beispiel betrachten wir einen solchen Algorithmus, der auf der EDVA Strela Verwendung findet.

Beispiel. Die EDVA Strela ist ein Dreiadressrechenautomat mit Gleitkomma. Eine Speicherzelle zum Einspeichern einer Zahl zu besteht aus 43 Bit (Abb. 8). Die Maschine verarbeitet die Dualzahlen in der Normalform:

$$x = \pm q \cdot 2^{\pm p}$$

bei der  $p$  der Exponent und  $q$  die Mantisse genannt werden. In der Bit-Stelle  $j$  der Speicherzelle kann eine Null oder eine Eins stehen. Bezeichnen wir diesen Wert mit  $\varepsilon_j$ , dann ist

$$q = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_{35}}{2^{35}} \quad , \quad p = \varepsilon_{37}2^5 + \varepsilon_{38}2^4 + \dots + \varepsilon_{42}2^0$$

Die Normierungsbedingung  $0,5 \leq q < 1$  bedeutet, dass  $\varepsilon_1$  immer gleich 1 ist. Das Vorzeichen + wird durch eine Null, das Vorzeichen - durch eine Eins dargestellt.

Aus der Zahl  $G_k$  gewinnt man die Zahl  $G_{k+1}$  durch drei Operationen:

1.  $G_k$  wird mit einer großen Konstante, gewöhnlich mit  $10^{17}$ , multipliziert.
2. Das Produkt  $10^{17} \cdot G_k$  verschieben wir um 7 Bit-Stellen nach links (dadurch gehen die ersten 7 Bit des Produkts verloren, und die Bit-Stellen 36 bis 42 nehmen den Wert Null an).

<sup>15</sup>Man kann diesen Algorithmus auch in der Form  $n_{k+1} = F(n_k)$  schreiben. Dabei bedeutet  $F$  die Gesamtheit der Operationen, die mit der Zahl  $n_k$  ausgeführt werden müssen, um  $n_{k+1}$  zu erhalten. Die Zahl  $n_1$  wird vorgegeben. Pseudozufallszahlen sind dann die Werte  $G_k = 10^{-4}n_k$ .

3. Von der so gewonnenen Zahl bilden wir den Absolutbetrag (dabei wird die Zahl normiert) und setzen diesen gleich  $G_{k+1}$ .

Wenn man mit  $G_0 = 1$  beginnt, erhält man durch diesen Prozess mehr als 80000 verschiedene Zahlen  $G_k$ , bevor in dieser Folge eine Periode auftritt, d.h. sich Zahlen zu wiederholen beginnen. Verschiedene Überprüfungen der ersten 50000 Zahlen ergaben völlig zufriedenstellende Resultate. Diese Zahlen wurden wiederholt zur Lösung verschiedenster Aufgaben benutzt.

Die Vorteile der Methode der Pseudozufallszahlen sind recht einleuchtend. Erstens erfordert die Erzeugung jeder Zahl nur einige einfache Operationen, wodurch die Geschwindigkeit der Erzeugung der Zufallszahlen in die Größenordnung der Arbeitsgeschwindigkeit einer EDVA rückt, zweitens belegt ein entsprechendes Programm nur wenige Zellen des Speichers, drittens kann jede der Zahlen  $G_k$  leicht reproduziert werden, und viertens braucht die "Güte" einer solchen Folge nur ein einziges Mal überprüft zu werden, wonach man sie unbesehen bei der Lösung ähnlicher Aufgaben benutzen kann.

Die einzige Unzulänglichkeit dieser Methode liegt darin, dass der "Vorrat" an Pseudozufallszahlen beschränkt ist. Es existieren jedoch Verfahren, die es ermöglichen, weit mehr Zahlen zu gewinnen. Insbesondere kann man die Anfangswerte  $G_0$  variieren.

Die weitaus meisten der mit der Monte-Carlo-Methode zu behandelnden Aufgaben werden heutzutage unter Benutzung von Pseudozufallszahlen gelöst.

## 4 Transformation von Zufallsgrößen

Bei der Lösung verschiedener Aufgaben sind unterschiedliche Zufallsgrößen zu simulieren. In früheren Etappen der Anwendung der Monte-Carlo-Methode bemühten sich einige Numeriker, für jede Zufallsgröße ein entsprechendes Roulette zu entwerfen. Um z.B. die Werte einer Zufallsgröße mit der Verteilung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,125 \end{pmatrix} \quad (22')$$

zu gewinnen, kann man das in Abb. 9 dargestellte Roulette benutzen. Es ist im Prinzip das gleiche Roulette, wie es Abb. 7 zeigt, nur weist es eine ungleichmäßige, den Werten  $p_i$  proportionale Teilung auf.

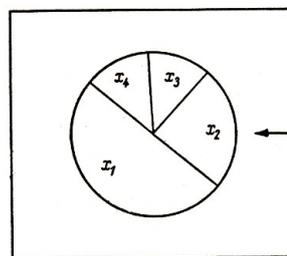


Abb. 9

Das ist jedoch gar nicht nötig; die Werte jeder Zufallsgröße lassen sich nämlich durch Transformation der Werte einer bestimmten Zufallsgröße (einer sogenannten "Standardzufallsgröße") gewinnen. Gewöhnlich spielt eine in  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsgröße  $G$  die Rolle einer solchen Standardzufallsgröße.

Wie man die Werte von  $G$  gewinnt, wissen wir schon.

Wir wollen vereinbaren, das Verfahren, die Werte einer bestimmten Zufallsgröße  $X$  durch

Transformation eines oder mehrerer Werte von  $G$  zu gewinnen, als Auslesen der Zufallsgröße  $X$  zu bezeichnen.

### 4.1 Auslosen einer diskreten Zufallsgröße

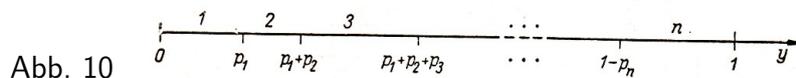
Wir wollen die Werte der Zufallsgröße  $X$  mit der Verteilung

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

ermitteln. Dazu betrachten wir das Intervall  $0 < y < 1$ , das wir in  $n$  Teilintervalle der Länge  $p_1, p_2, \dots, p_n$  unterteilen. Als Koordinaten der Teilungspunkte erhalten wir offenbar

$$y = p_1, \quad y = p_1 + p_2, \quad y = p_1 + p_2 + p_3, \quad \dots, \quad y = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

Die so entstandenen Teilintervalle nummerieren wir mit Hilfe der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  (Abb. 10).



Nach dieser Vorbereitung kann mit der Auslosung von  $X$  begonnen werden.

Jedes mal, wenn ein "Versuch" durchzuführen und dabei ein Wert für  $X$  auszulosen ist, wählen wir einen Wert für  $G$  aus und tragen den Punkt  $y = G$  ein. Liegt dieser Punkt im Intervall der Nummer  $i$ , so setzen wir  $X = x_i$  (in dem betrachteten Versuch).

Der Beweis dafür, dass dieses Verfahren zulässig ist, ist leicht zu führen. Da die Zufallsgröße  $G$  in  $(0, 1)$  gleichverteilt ist, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $G$  in einem gewissen Intervall liegt, gleich der Länge dieses Intervalls. Also ist

$$\begin{aligned} P\{0 < G < p_1\} &= p_1, \\ P\{p_1 < G < p_1 + p_2\} &= p_2, \dots, \\ P\{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} < G < 1\} &= p_n \end{aligned}$$

Entsprechend unserem Verfahren ist  $X = x_i$  genau dann, wenn

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} < G < p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber gleich  $p_i$ .

Auf einer EDVA muss man natürlich ohne die Abb. 10 auskommen. Wir nehmen an, die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seien der Reihe nach in dem Speicher der EDVA gespeichert. In entsprechender Reihenfolge seien auch die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_1 + p_2, \dots, 1$  gespeichert. Das Flussdiagramm eines Unterprogramms zur Auslosung von  $X$  zeigt dann die Abb. 11.

Beispiel. Es sollen 10 Werte der Zufallsgröße  $T$  mit der Verteilung

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}$$

ausgelost werden. Als Werte für  $G$  wählen wir Ziffernpaare aus der am Ende des Buches angegebenen Tabelle A, die wir vorher mit 0,01 multiplizieren.<sup>16</sup> So erhalten wir für  $G$  die

<sup>16</sup>Da die  $p_i$  in diesem Beispiel mit zwei Dezimalstellen nach dem Komma angegeben sind, reicht es völlig aus, die  $G$ -Werte mit einer Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma auszuwählen. Bei dieser Näherung ist es möglich, dass  $G = 0,58$  ist. Das macht es erforderlich, diesen Fall mit allen Fällen  $G > 0,58$  zusammenzufassen (da der Wert  $G = 0,00$  zugelassen ist, der Wert  $G = 1,00$  aber nicht). Bei der Benutzung von  $G$ -Werten mit einer größeren Stellenzahl nach dem Komma wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $G = p_1$  ist, klein sein. Man kann sich deshalb auf eine beliebige der Ungleichungen beziehen.

Werte

0,86; 0,51; 0,59; 0,07; 0,95; 0,66; 0,15; 0,56; 0,64; 0,34.

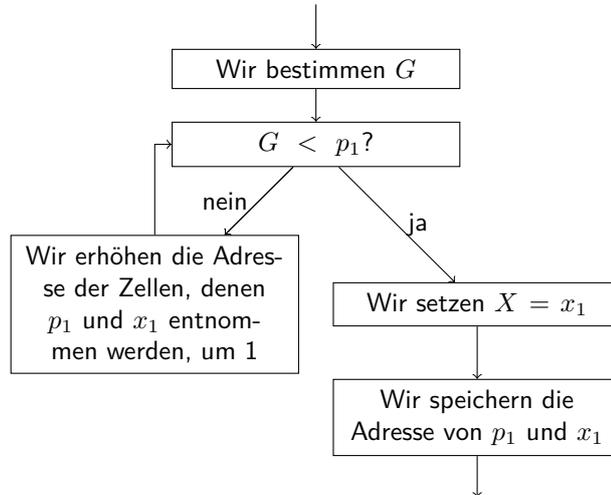


Abb. 11

Entsprechend unserem Schema werden allen Werten  $G$ , die kleiner als 0,58 sind, der Wert  $T = 3$  und allen Werten  $G$ , für die  $G \geq 0,58$  gilt, der Wert  $T = 4$  zugeordnet. Folglich erhalten wir für  $T$  die Werte 4; 3; 4; 3; 4; 4; 3; 3; 4; 3.

Dazu ist noch zu bemerken, dass die Reihenfolge der Nummerierung der Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in der Verteilung von  $X$  beliebig ist, zu Beginn der Auslosung aber fixiert sein muss.

## 4.2 Auslosen einer stetigen Zufallsgröße

Jetzt wollen wir die Werte einer Zufallsgröße  $X$  ermitteln, die im Intervall  $(a, b)$  mit der Dichte  $p(x)$  verteilt ist.

Wir werden zeigen, dass man die Werte von  $X$  aus der Gleichung

$$\int_a^X p(x) dx = G \tag{23}$$

bestimmen kann, indem man nacheinander Werte für  $G$  auswählt, für diese die Gleichung (23) löst und so nacheinander die Werte von  $X$  erhält.

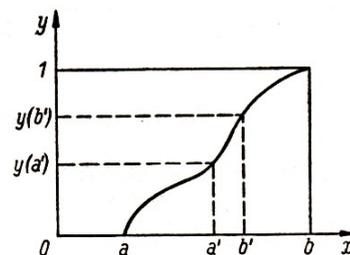
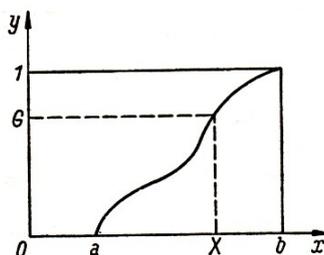


Abb. 12 und 13

Zum Beweis betrachten wir die Funktion (Abb. 12)

$$y = \int_a^x p(u) du$$

Aus den allgemeinen Eigenschaften (15) und (16) für Dichten folgt  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 1$  und für die Ableitung gilt

$$y'(x) = p(x) > 0$$

Das bedeutet, dass die Funktion  $y(x)$  monoton von 0 bis 1 wächst. Jede Gerade  $y = G$ , wobei  $0 < G < 1$  ist, schneidet die Kurve  $y = y(x)$  in einem einzigen Punkt, dessen Abszisse wir gleich  $X$  setzen. Daher hat die Gleichung (23) immer eine und nur eine Lösung.

Wir wählen jetzt ein beliebiges innerhalb  $(a, b)$  gelegenes Teilintervall  $(a', b')$  aus. Den Punkten  $x$  dieses Intervalls, für welche  $a' < x < b'$  gilt, entsprechen Ordinaten der Kurve  $y = y(x)$ , die der Ungleichung

$$y(a') < y < y(b')$$

genügen. Liegt jetzt  $X$  im Intervall  $a' < x < b'$ , so gehört  $G$  zum Intervall  $y(a') < y < y(b')$ , und umgekehrt (Abb. 13). Das bedeutet aber

$$P\{a' < X < b'\} = P\{y(a') < G < y(b')\}$$

Da  $G$  in  $(0, 1)$  gleichverteilt ist, gilt

$$P\{y(a') < G < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x) dx$$

woraus

$$P\{a' < X < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx$$

folgt. Das aber bedeutet gerade, dass die Zufallsgröße  $X$  eine Lösung der Gleichung (23) ist und die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$  besitzt.

Beispiel. Eine Zufallsgröße  $Y$  nennt man im Intervall  $(a, b)$  gleichverteilt, wenn ihre Dichte im ganzen Intervall der Beziehung

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{für } a < x < b$$

genügt. Um Werte für  $Y$  auszulösen, stellen wir die Gleichung (23) auf:

$$\int_a^Y \frac{dx}{b-a} = G$$

Das Integral ist leicht zu errechnen:

$$\frac{Y-a}{b-a} = G$$

Hieraus erhält man für  $Y$  den Ausdruck:

$$Y = a + G(b-a) \tag{24}$$

Weitere Beispiele für die Anwendung der Formel (23) sind in den Abschnitten 5.2 und 8.3 angegeben.

### 4.3 Das Verfahren von J.v. Neumann für das Auslosen einer stetigen Zufallsgröße

Es kann sein, dass sich die Gleichung (23) nur sehr schwer nach  $X$  auflösen lässt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn sich das Integral von  $p(x)$  nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lässt oder wenn die Dichte  $p(x)$  nur graphisch gegeben ist.

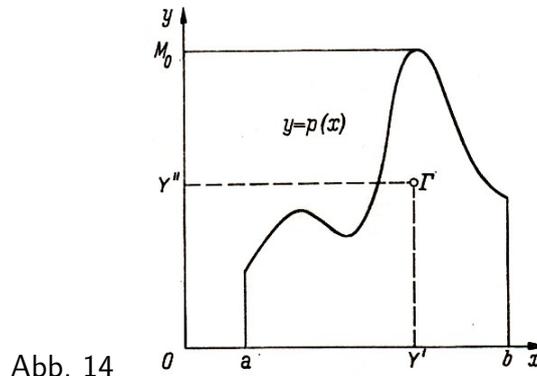


Abb. 14

Nehmen wir an, die Zufallsgröße  $X$  sei auf dem endlichen Intervall  $(a, b)$  definiert und ihre Dichte sei beschränkt: (vgl. Abb. 14):

$$p(x) \leq M_0$$

Dann kann man Werte für  $X$  in folgender Weise auslosen:

1. Wir wählen zwei Werte  $G'$  und  $G''$  der Zufallsgröße  $G$  und konstruieren den zufälligen Punkt  $\Gamma(Y', Y'')$  mit den Koordinaten

$$Y' = a + G'(b - a) \quad , \quad Y'' = G'' M_0$$

2. Liegt der Punkt  $P$  unterhalb der Kurve  $y = p(x)$ , dann setzen wir  $X = Y'$ ; liegt er oberhalb der Kurve  $y = p(x)$ , dann lassen wir das Wertepaar  $(G', G'')$  unberücksichtigt und wählen ein neues Wertepaar  $(G', G'')$ . Eine Begründung dieses Verfahrens wird in Abschnitt 9.1 gegeben.

### 4.4 Auslosen normalverteilter Zufallsgrößen

Es existieren viele überaus verschiedenartige Verfahren für das Auslosen unterschiedlicher Zufallsgrößen, mit denen wir uns hier jedoch nicht befassen. Sie werden gewöhnlich nur dann benutzt, wenn sich die in den Abschnitten 4.2 und 4.3 beschriebenen Verfahren in ihrer Effektivität als zu gering erweisen.

Ein solcher Fall liegt insbesondere für die normalverteilte Zufallsgröße  $Z$  vor, da die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = G$$

in der angegebenen Form nicht lösbar und das Intervall der für  $Z$  möglichen Werte unendlich ist.

In Tabelle B am Ende des Buches sind (schon ausgeloste) Werte einer normalverteilten Zufallsgröße  $Z$  mit dem Erwartungswert  $EZ = 0$  und der Dispersion  $DZ = 1$  angegeben. Man

kann leicht zeigen<sup>17</sup>, dass die Zufallsgröße

$$Z' = a + \sigma Z \quad (25)$$

ebenfalls normalverteilt ist, wobei aus (10) und (11) die Beziehungen  $EZ' = a$ ,  $DZ' = \sigma^2$  folgen. Auf diese Weise erlaubt Formel (25), mit Hilfe der Tabelle B Werte beliebiger normalverteilter Zufallsgrößen auszulösen.

## 4.5 Nochmals das Beispiel aus Abschnitt 1.2

Jetzt können wir erklären, wie die zufälligen Punkte der Abb. 1 und 2 ausgewählt wurden. In Abb. 1 wurden Punkte mit den Koordinaten

$$x = G' \quad , \quad y = G''$$

konstruiert. Die Werte  $G'$  und  $G''$  wurden aus den fünfstelligen Ziffernfolgen der Tabelle A ermittelt:  $x_1 = 0,86515$ ;  $y_1 = 0,90795$ ;  $x_2 = 0,66155$ ;  $y_2 = 0,66434$  usw.

Da die Abszissen und die Ordinaten unserer Punkte voneinander unabhängig sind, kann man zeigen<sup>18</sup>, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solcher Punkt in ein beliebiges Gebiet innerhalb des Quadrates zu liegen kommt, gleich dem Flächeninhalt dieses Gebietes ist. Mit anderen Worten, die Punkte sind im Quadrat gleichverteilt.

In Abb. 2 wurden Punkte mit den Koordinaten

$$x = 0,5 + 0,2Z' \quad , \quad y = 0,5 + 0,2Z''$$

konstruiert. Dabei wurden die Werte  $Z'$  und  $Z''$  der Tabelle B entnommen:

$$x_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,2005; \quad y_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 1,1922; \quad x_2 = 0,5 + 0,2(-0,0077), \quad \text{usw.}$$

Der Punkt, der dabei außerhalb des Quadrates zu liegen kommt, wird nicht berücksichtigt. Aus Formel (25) folgt, dass die Abszissen und die Ordinaten dieser Punkte normalverteilte Zufallsgrößen sind, die den Mittelwert  $a = 0,5$  und die Dispersion  $\sigma^2 = 0,04$  besitzen.

---

<sup>17</sup>Der Beweis findet sich in Abschnitt 9.2.

<sup>18</sup>Der Beweis findet sich in Abschnitt 9.3.

## Beispiele für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode

### 5 Die Berechnung von Bedienungssystemen

#### 5.1 Beschreibung der Problemstellung

Wir betrachten eines der einfachsten Bedienungssysteme. Dieses System besteht aus 11, Leitungen (Kanälen oder Bedienungsstellen), von denen jede "Kunden bedienen" kann.

In dem System treten zu zufälligen Zeitpunkten Bedienungswünsche auf. Jeder Bedienungswunsch erscheint dabei zuerst auf der Leitung Nr. 1. Ist diese Leitung zum Zeitpunkt des Eintreffens des  $k$ -ten Bedienungswunsches (wir bezeichnen diesen Zeitpunkt mit  $A_k$ ) frei, so wird sie für die Dauer einer Bedienung, die  $t_{bes}$  Minuten dauert, belegt ( $t_{bes}$  ist die Belegungs-dauer der Leitung). Ist die Leitung 1 zum Zeitpunkt  $A_k$  belegt, so wird der Bedienungswunsch sofort an die Leitung 2 übergeben, usw. ...

Ist schließlich auch die  $n$ -te Leitung zum Zeitpunkt  $A_k$  belegt, so lehnt das System den Bedienungswunsch ab.

Es soll ermittelt werden, wieviel Bedienungswünsche (im Mittel) das System während der Zeit  $A$  erfüllt und wieviel es ablehnt.

Offenbar findet man Aufgaben dieser Art bei der Untersuchung der Arbeitsorganisation beliebiger Betriebe und nicht nur bei Dienstleistungsbetrieben. In einigen sehr speziellen Fällen können analytische Lösungen angegeben werden. In komplizierten Fällen dagegen (über die wir weiter unten sprechen werden) erweist sich die Monte-Carlo-Methode als einziges Berechnungsverfahren.

#### 5.2 Der Poissonsche Strom von Bedienungswünschen

Die erste Frage, die sich bei der Betrachtung solcher Systeme ergibt, ist folgende: In welcher Weise bietet sich der Strom der ein- treffenden Bedienungswünsche dar?

Diese Frage lässt sich durch einen Versuch, durch hinreichend lange Beobachtung von Bedienungswünschen, beantworten. Das Studium des Stroms von Bedienungswünschen unter unterschiedlichen Bedingungen ermöglicht ein Aussondern hinreichend oft auftretender Fälle.

Ein Strom von Bedienungswünschen, bei dem das Zeitintervall  $T$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bedienungswünschen eine Zufallsgröße ist, die im Intervall  $(0, \infty)$  mit der Dichte

$$p(x) = ae^{-ax} \quad (26)$$

verteilt ist, wird Poissonscher Strom genannt. Das Verteilungsgesetz (26) wird auch Exponentialverteilung genannt (in Abb. 15 ist dieses Verteilungsgesetz für  $a = 1$  und  $a = 2$  dargestellt).

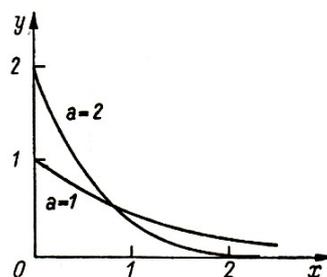


Abb. 15

Der Erwartungswert für  $T$  lässt sich leicht berechnen:

$$ET = \int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx$$

Durch partielle Integration ( $u = x, dv = ae^{-ax} dx$ ) erhalten wir

$$ET = \left[-xe^{-ax}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

Der Parameter  $a$  ist die Intensität des Stroms der Bedienungswünsche.

Eine Formel zum Auslesen von  $T$  ist leicht aus Gleichung (23) zu erhalten, die in unserem Fall folgende Gestalt hat:

$$\int_0^T ae^{-ax} dx = G$$

Berechnen wir das Integral, so erhalten wir die Beziehung

$$1 - e^{-aT} = G \quad \text{woraus sich} \quad T = -\frac{1}{a} \ln(1 - G)$$

ergibt.

Übrigens ist die Größe  $1 - G$  genau so verteilt wie die Größe  $G$ . Deshalb kann man anstelle der letzten Formel auch die Formel

$$T = -\frac{1}{a} \ln G \tag{27}$$

benutzen.

### 5.3 Das Rechenschema

Wir betrachten nun die Arbeit des in Abschnitt 5.1 beschriebenen Systems für den Fall eines Poissonschen Stroms von Bedienungswünschen.

Jeder Leitung ordnen wir einen Speicherplatz des Hauptspeichers der EDVA zu, in den wir den Zeitpunkt einschreiben, zu dem die Leitung wieder frei werden wird. Wir bezeichnen den Zeitpunkt, zu dem die  $i$ -te Leitung frei wird, mit  $t_i$ . Als Anfangsmoment der Rechnung wählen wir den Zeitpunkt, zu dem der erste Bedienungswunsch eintrifft:  $A_1 = 0$ .

Man kann annehmen, dass zu diesem Zeitpunkt alle  $t_i$  gleich  $A_1$ , d.h. alle Leitungen frei sind. Der Moment der Beendigung der Berechnung ist  $A_{end} = A_1 + A$ .

Der erste Bedienungswunsch erscheint an der Leitung Nr. 1. Das bedeutet, dass diese Leitung für die Dauer der Zeit  $t_{bes}$  belegt ist. Wir müssen deshalb  $t_1$  durch den neuen Wert  $(t_1)_{neu} = A_1 + t_{bes}$  ersetzen.

Weiter erhöhen wir den Zähler für die erfolgreich abgefertigten Bedienungswünsche um Eins und gehen zur Abfertigung des zweiten Bedienungswunsches über.

Wir werden annehmen, es seien schon  $k$  Bedienungswünsche abgefertigt worden, dann ist der Zeitpunkt für das Erscheinen des  $(k + 1)$ -ten Bedienungswunsches auszulösen.

Zu diesem Zweck wählen wir den nächstfolgenden Wert für  $G$  und berechnen nach Formel (27) den nächsten Wert  $T = T_k$ . Der Zeitpunkt für das Erscheinen des nächsten Bedienungswunsches berechnet sich dann zu

$$A_{k+1} = A_k + T_k$$

Ist zu diesem Zeitpunkt die erste Leitung frei? Um das festzustellen, müssen wir prüfen, ob die Bedingung

$$t_1 \leq A_{k+1} \quad (28)$$

erfüllt ist. Ist dies der Fall, so bedeutet das, dass die Leitung zum Zeitpunkt  $A_{k+1}$  schon wieder frei ist und den Bedienungswunsch abfertigen kann. Wir müssen  $t_1$  durch  $A_{k+1} + t_{bes}$  ersetzen, den Zähler für abgefertigte Bedienungswünsche um Eins erhöhen und zum nächsten Bedienungswunsch übergehen.

Ist die Bedingung (28) nicht erfüllt, so bedeutet das, dass die erste Leitung zum Zeitpunkt  $A_{k+1}$  belegt ist. Dann haben wir zu prüfen, ob die zweite Leitung frei ist:

$$t_2 \leq A_{k+1} \quad (29)$$

Ist die Bedingung (29) erfüllt, so ersetzen wir  $t_2$  durch  $A_{k+1} + t_{nes}$ , erhöhen den Zähler für abgefertigte Bedienungswünsche um Eins und gehen zum nächsten Bedienungswunsch über. Ist die Bedingung (29) nicht erfüllt, so prüfen wir nach, ob die Bedingung

$$t_{bes} \leq A_{k+l}$$

erfüllt ist.

Es kann nun sein, dass

$$t_i > A_{k+1}$$

für alle  $i$  von 1 bis  $n$  gilt, d.h., dass zum Zeitpunkt  $A_{k+1}$  alle Leitungen belegt sind. In diesem Fall wird der Zähler für die abgelehnten Bedienungswünsche um Eins erhöht und zur Bearbeitung des nächsten Bedienungswunsches übergegangen.

Jedes Mal, wenn ein neuer Zeitpunkt  $A_{k+1}$  berechnet wird, muss geprüft werden, ob die Bedingung

$$A_{k+1} > A_{end}$$

für die Beendigung des Versuchs erfüllt ist. Ist dies der Fall, so wird der Versuch abgebrochen. Im Zähler der erfüllten und im Zähler der abgelehnten Bedienungswünsche stehen dann die Zahlen  $\mu_{erf}$  und  $\mu_{abg}$ .

Dieser Versuch wird nun  $N$ -mal wiederholt (unter Benutzung jeweils anderer Werte für  $G$ ); die Ergebnisse aller Versuche werden gemittelt:

$$E\mu_{erf} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{erf(j)} \quad , \quad E\mu_{abg} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{abg(j)}$$

wobei  $\mu_{erf(j)}$  und  $\mu_{abg(j)}$  die im  $j$ -ten Versuch gewonnenen Werte von  $\mu_{erf}$  und  $\mu_{abg}$  sind. Abb. 16 zeigt das Flussdiagramm, nach dem eine derartige Berechnung realisiert wird (falls notwendig, kann man die Werte  $\mu_{erf(j)}$  und  $\mu_{abg(j)}$  für einzelne Versuche im Block "Ende des Versuchs" erhalten).

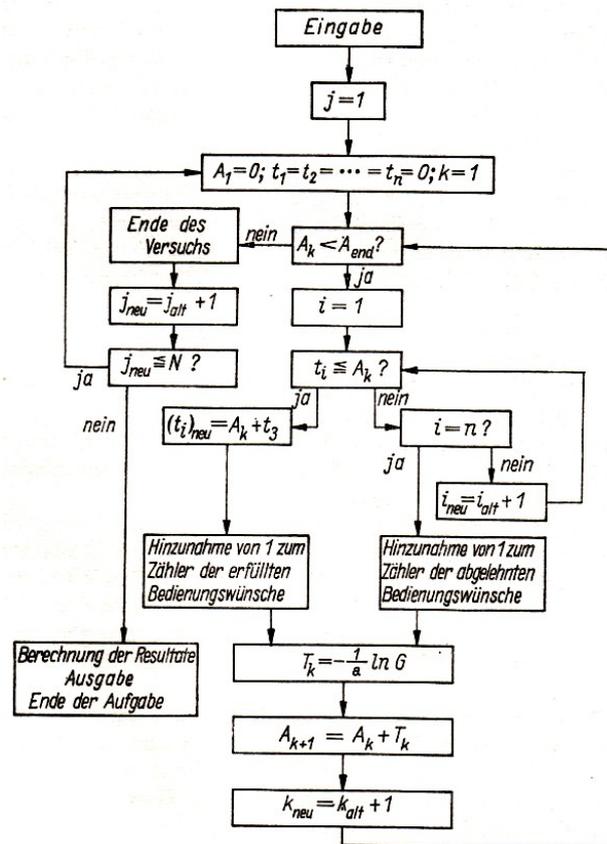


Abb. 16

## 5.4 Kompliziertere Aufgabenstellungen

Man kann leicht zeigen, dass man mit dem soeben geschilderten Verfahren auch unverhältnismäßig kompliziertere Systeme berechnen kann. Beispielsweise braucht die Größe  $t_{bes}$  nicht konstant zu sein, sie kann zufällig und für verschiedene Leitungen verschieden sein (das entspricht etwa verschiedenen Einrichtungen oder einer unterschiedlichen Qualifikation des Bedienungspersonals).

Das Rechenschema bleibt im Prinzip dasselbe, nur werden die Werte für  $t_{bes}$  jedes mal gelöst, wobei für jede Leitung eine entsprechende Formel benutzt wird.

Man kann auch sogenannte Wartesysteme betrachten, bei denen die Ablehnung nicht sofort erfolgt. Ein Bedienungswunsch kann eine gewisse Zeit  $t$  (Verweilzeit des Bedienungswunsches im System) aufrecht erhalten werden, und wenn im Verlauf dieser Zeit irgendeine Leitung frei wird, übernimmt sie die Abfertigung des Bedienungswunsches.

Es gibt auch Systeme, in denen nacheinander auftretende Bedienungswünsche jeweils durch diejenige Leitung bedient werden, die als erste wieder frei geworden ist. Man kann auch zufällige Ausfälle einer Leitung sowie deren (zufällige) Reparaturdauer berücksichtigen. Ebenso können zeitliche Schwankungen der Intensität des Stroms der Bedienungswünsche berücksichtigt werden, und vieles, vieles andere.

Die Berechnung solcher Systeme ist natürlich mit einem gewissen Aufwand verbunden. Um praktisch verwendbare Resultate zu erhalten, muss man den Berechnungen ein gutes Modell zugrunde legen. Zu diesem Zweck ist ein sorgfältiges Studium der wirklich auftretenden Ströme von Bedienungswünschen, eine genaue Messung des Arbeitsablaufs der einzelnen Vorgänge und ähnliches erforderlich.

Solche Berechnungsmethoden sind für die Produktionsplanung äußerst nützlich. Anstelle lang andauernder (manchmal sogar unmöglicher) Experimente in der Natur experimentieren wir auf einer EDVA, indem wir verschiedene Varianten der Arbeitsorganisation oder der benutzten Einrichtungen nachbilden.

## 6 Die Bestimmung der Qualität und der Zuverlässigkeit von Erzeugnissen

### 6.1 Ein einfaches Schema zur Gütekontrolle

Wir betrachten ein Gerät  $S$ , das aus einer bestimmten (eventuell sehr großen) Zahl von Bauelementen besteht. Ist  $S$  beispielsweise ein elektrisches Gerät, so können seine Bauelemente Widerstände ( $R_k$ ), Kapazitäten ( $C_k$ ), Röhren u.ä. sein.

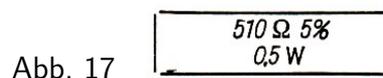
Wir nehmen an, die Güte des Gerätes werde durch den Wert eines einzigen Ausgangsparameters  $U$  bestimmt, der aus den Parametern aller Bauelemente mit Hilfe der Beziehung

$$U = f(R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots) \quad (30)$$

berechnet werden kann.

Ist  $U$  beispielsweise der Spannungsabfall an dem arbeitenden Teil des elektrischen Gerätes, so kann man mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze Gleichungen aufstellen, aus denen sich  $U$  berechnen lässt.

In der Praxis haben die Bauelemente jedoch nicht genau die angegebenen Werte. So kann z.B. der in Abb. 17 dargestellte Widerstand einen Wert zwischen 484,5 und 535,5  $\Omega$  besitzen.



Es ergibt sich nun die Frage, wie sich eine Abweichung der Parameter der Bauelemente von den Nominalwerten auf den Wert von  $U$  auswirkt.

Man kann versuchen, den Schwankungsbereich von  $U$  dadurch abzuschätzen, dass man für alle Bauelemente die "ungünstigsten" Parameterwerte einsetzt. Nur weiß man bei weitem nicht immer, welche Parameterauswahl die "ungünstigste" ist.

Überdies wird bei einer großen Anzahl von Bauelementen eine solche Abschätzung sehr ungenau sein; denn es ist wenig wahrscheinlich, dass alle Parameter gleichzeitig besonders ungünstig sind.

Daher scheint es sinnvoll zu sein, die Parameter aller Bauelemente sowie die Größe  $U$  selbst als Zufallsgrößen aufzufassen und den Erwartungswert  $EU$  sowie die Dispersion  $DU$  abzuschätzen.

Die Größe  $EU$  ist praktisch der Mittelwert von  $U$ , gemittelt über alle hergestellten Geräte, und  $DU$  ist die Abweichung der Größe  $U$  vom Mittelwert  $EU$ , welche in der Praxis auftritt. Schon in Abschnitt 2.2 haben wir darauf hingewiesen, dass im allgemeinen

$$EU \neq f(ER_{(1)}, ER_{(2)}, \dots; EC_{(1)}, EC_{(2)}, \dots; \dots)$$

gilt.

Es dürfte aber unmöglich sein, die Verteilung von  $U$  bei einer etwas komplizierteren Funktion  $f$  analytisch zu berechnen. Durch Untersuchung einer großen Anzahl gefertigter Geräte kann man sie jedoch manchmal experimentell ermitteln. Aber auch das ist nicht immer möglich, und schon gar nicht im Stadium der Projektierung.

Wir versuchen deshalb, die Monte-Carlo-Methode anzuwenden. Dazu ist folgendes notwendig: Man muss die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Parameterschwankungen aller Bauelemente sowie die Funktion  $f$  kennen (d.h., es muss möglich sein,  $U$  für beliebige, aber feste Werte  $R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots$  zu berechnen).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Parameter jedes einzelnen Bauelements lässt sich experimentell durch Beobachtung einer großen Anzahl solcher Bauelemente ermitteln. Sehr häufig wird dies eine Normalverteilung sein.

Daher gehen viele Forscher in folgender Weise vor:

Beispielsweise wird der in Abb. 17 dargestellte Widerstand als normalverteilte Zufallsgröße  $R$  mit dem Erwartungswert  $ER = 510$  und  $3\sigma = 25,5$  angesehen (wir erinnern daran, dass man praktisch [siehe Formel (20)] bei einer einzigen Beobachtung keinen Wert für  $R$  findet, der um mehr als  $3\sigma$  von  $ER$  abweicht).

Das Rechenschema ist jetzt sehr einfach. Für jedes Bauelement wird ein Parameterwert ausgelost. Mit diesen Werten wird  $U$  nach Formel (30) berechnet. Man wiederholt das  $N$ -mal und erhält die Werte  $U_1, U_2, \dots, U_N$ ; dann nimmt man in guter Näherung

$$EU \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j$$

$$DU \approx \frac{1}{N-1} \left( \sum_{j=1}^N (U_j)^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N U_j \right)^2 \right)$$

an.

Für große Werte von  $N$  kann man in der letzten Beziehung den Faktor  $1/(N-1)$  durch  $1/N$  ersetzen, und dann ist diese Beziehung eine einfache Folgerung aus den Formeln (8) und (9). In der mathematischen Statistik wird bewiesen, dass es für kleine Werte von  $N$  besser ist, den Faktor  $1/(N-1)$  beizubehalten.

## 6.2 Beispiele zur Berechnung der Zuverlässigkeit

Wir stellen uns die Aufgabe, die mittlere Lebensdauer eines Gerätes abzuschätzen, wenn wir die Lebensdauer der einzelnen Bauelemente als bekannt voraussetzen.

Wenn die Lebensdauer  $t_{(k)}$  jedes Bauelementes eine konstante Größe ist, ist es nicht schwer, die Lebensdauer  $t$  des Gerätes zu berechnen.

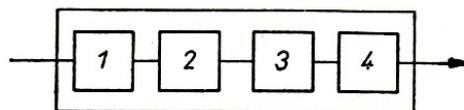


Abb. 18

Für ein Gerät, wie es Abb. 18 schematisch zeigt und das funktionsunfähig ist, wenn auch nur ein einziges der Elemente ausfällt, ist

$$t = \min(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}, t_{(4)}) \quad (31)$$

Für das in Abb. 19 schematisch dargestellte Gerät dagegen, bei dem ein Bauelement doppelt vorhanden ist, gilt

$$t = \min(t_{(1)}, t_{(2)}; \max(t_{(3)}, t_{(4)}); t_{(5)}) \quad (32)$$

denn wenn z.B. das Element Nr. 3 ausfällt, kann ja das Gerät mit dem Bauelement Nr. 4 weiterarbeiten.

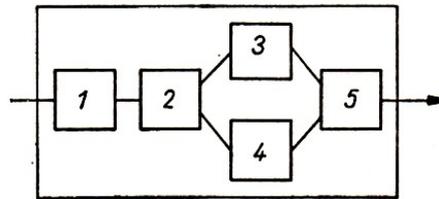


Abb. 19

In Wirklichkeit ist die Lebensdauer jedes Elementes eine Zufallsgröße  $D_{(k)}$ . Wenn wir sagen, eine Elektronenröhre besitze eine Betriebsdauer von 1000 Stunden, so ist das nur der Erwartungswert  $ED$  der Zufallsgröße  $D$ .

Es ist allgemein bekannt, dass die eine Röhre schneller durchbrennt als eine andere (obwohl beide von der gleichen Sorte sind).

Wenn man die Verteilungsdichte der Zufallsgröße  $D_{(k)}$  für jedes Element eines Gerätes kennt, dann kann man den Erwartungswert  $ED$  mit der Monte-Carlo-Methode genauso ermitteln, wie wir es in Abschnitt 6.1 getan haben.

Für jedes Bauelement kann man nämlich einen Wert  $t_{(k)}$  der Zufallsgröße  $D_{(k)}$  auslosen. Mit Hilfe von Formel (31) oder (32) kann man dann den Wert  $t$  der Zufallsgröße  $D$  berechnen.

Bei  $N$ -maligem Wiederholen dieses Versuchs erhält man dann

$$ED \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j$$

wobei  $t_j$  den Wert für  $t$  darstellt, der mit dem  $j$ -ten Versuch ermittelt wurde.

Es muss jedoch gesagt werden, dass das Problem der Ermittlung der Verteilung der Lebensdauer  $D_{(k)}$  für die einzelnen Bauelemente nicht gerade einfach ist. Für sehr langlebige Elemente ist es schwer, einen Versuch zu organisieren, da man abwarten muss, bis eine genügend große Anzahl von Elementen ausgefallen ist.

### 6.3 Weitere Möglichkeiten dieser Methode

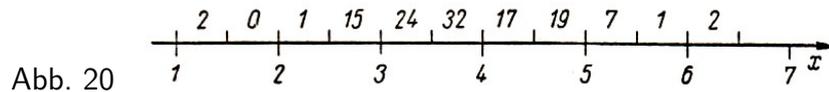
Die vorangegangenen Beispiele zeigen, dass das angegebene Verfahren zur Berechnung der Qualität zu projektierender Erzeugnisse seiner Idee nach sehr einfach ist.

Man muss die statistischen Kennwerte aller Bauelemente des Erzeugnisses kennen und in der Lage sein, die interessierende Größe als Funktion der Parameterwerte dieser Bauelemente zu berechnen. Dann kann man die Zufälligkeit der Parameterwerte durch die Modellierung berücksichtigen.

Bei der Modellierung ergibt sich häufig außer dem Erwartungswert und der Dispersion der uns interessierenden Größe eine noch weit nützlichere Information. Wenn wir z.B. eine große Zahl von Werten  $U_1, U_2, \dots, U_N$  der Zufallsgröße  $U$  erhalten, können wir mit diesen Werten eine angenäherte Verteilungsdichte der Zufallsgröße  $U$  konstruieren. Da es sich hierbei um eine statistische Auswertung von Versuchen handelt (die allerdings auf einer EDVA durchgeführt werden), haben wir es im wesentlichen mit einer Fragestellung der mathematischen Statistik

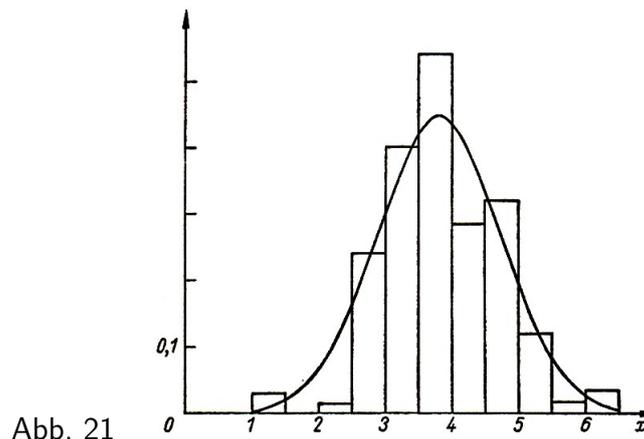
zu tun. Wir beschränken uns deshalb auf ein konkretes Beispiel.

Angenommen, wir hätten  $N = 120$  Werte  $U_1, U_2, \dots, U_{120}$  der Zufallsgröße  $U$  erhalten und alle Werte lägen innerhalb der Grenzen  $1 < U_j < 6,5$ . Wir teilen das Intervall  $1 < x < 6,5$  in 11 (diese Zahl ist beliebig, sollte aber nicht zu groß und auch nicht zu klein sein) gleichgroße Intervalle der Länge  $\Delta x = 0,5$  und zählen, wieviel Werte  $U_j$  in jedes Intervall fallen. Diese Zahlen sind in Abb. 20 angegeben.



Die relativen Häufigkeiten der Ereignisse, dass Werte  $U_j$  in ein beliebiges Intervall fallen erhalten, wir, indem wir diese Zahlen für das Eintreten obigen Ereignisses durch  $N = 120$  dividieren. In unserem Beispiel ergeben sich so die relativen Häufigkeiten 0,017; 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008; 0,017.

Über jedem Intervall der Zerlegung konstruieren wir jetzt ein Rechteck, dessen Flächeninhalt gleich der Häufigkeit ist, mit der Werte  $U_j$  in dieses Intervall fallen (Abb. 21). Mit anderen Worten, die Höhe jedes Rechtecks ist gleich der entsprechenden Häufigkeit, dividiert durch die Breite  $\Delta x$ . Die sich so ergebende Treppenkurve nennt man ein Histogramm.



Das Histogramm dient zur Approximation der unbekannt Dichte der Zufallsgröße  $U$ . Somit liefert uns beispielsweise der Flächeninhalt unterhalb des Histogramms zwischen den Werten  $x = 2,5$  und  $x = 5,5$  einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

$$P\{2,5 < U < 5,5\} \approx 0,94$$

Folglich kann man aufgrund der durchgeführten Berechnung (bzw. des Versuchs) sagen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Größe  $U$  im Intervall  $2,5 < U < 5,5$  liegt, ist näherungsweise gleich 0,94.

In Abb. 21 ist zum Vergleich die Dichte einer normalverteilten Zufallsgröße  $Z'$  mit den Parametern  $a = 3,85$  und  $\sigma = 0,88$  eingezeichnet. Berechnet man bezüglich dieser Dichte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $Z'$  im Intervall  $2,5 < Z' < 5,5$  liegt, so erhält man den Näherungswert 0,91.

Der Gang der Rechnung ist folgender: Nach (14) ist

$$P\{2,5 < Z' < 5,5\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{2,5}^{5,5} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Mit der Variablensubstitution  $x - a = \sigma t$  ergibt sich

$$P\{2,5 < Z' < 5,5\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

wobei  $t_1 = \frac{2,5-a}{\sigma} = -1,54$ ,  $t_2 = \frac{5,5-a}{\sigma} = 1,88$  ist. Den Wert dieses Integrals berechnet man mit Hilfe der Tabellen des sogenannten Wahrscheinlichkeitsintegrals  $\Phi(x)$ , in denen Werte der Funktion

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

angegeben sind. Man erhält

$$P\{2,5 < Z' < 5,5\} = 0,5[\Phi(1,88) + \Phi(1,54)] = 0,91$$

## 6.4 Bemerkungen

Leider werden Berechnungen dieser Art bis jetzt selten durchgeführt. Worin die Hauptgründe dafür liegen, ist schwer zu sagen.

Der häufigste wird sein, dass Konstrukteure und Projektanten gar nichts von diesen Möglichkeiten wissen.

Außerdem muss man, bevor man an die Durchrechnung eines beliebigen Erzeugnisses nach diesem Verfahren herangehen kann, die statistischen Kennwerte aller Bauelemente, aus denen das betrachtete Erzeugnis besteht, studieren. Das ist eine nicht unerhebliche Arbeit.

Allerdings kann man, wenn man diese Kennwerte kennt, die Qualität jedes Erzeugnisses, das aus diesen Bauelementen besteht, abschätzen. Man kann auch die Änderung der Qualität, die sich beim Auswechseln einiger Bauelemente ergibt, mit Hilfe dieses Verfahrens abschätzen.

Es bleibt zu hoffen, dass in den nächsten Jahren Berechnungen dieser Art üblich werden. Die statistischen Kennwerte der Bauelemente werden dabei stets von den Herstellerfirmen angegeben werden müssen.

## 7 Untersuchung des Neutronendurchgangs durch eine Platte

Die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Wechselwirkung eines einzelnen Elementarteilchens (Neutrons, Photons, Mesons u.a.) mit Materie sind bekannt. Gewöhnlich wird gefordert, die makroskopischen Charakteristiken von Vorgängen zu finden, an denen eine riesige Zahl solcher Teilchen beteiligt ist, wie z.B. Dichte, Strom u.ä.

Diese Situation ähnelt derjenigen, mit der wir uns in den §§ 5 und 6 beschäftigt haben und die für eine Anwendung der Monte-Carlo-Methode sehr geeignet ist.

Wahrscheinlich wird die Monte-Carlo-Methode in der Neutronenphysik sogar am häufigsten angewendet. Wir wollen uns mit einer sehr einfachen Aufgabenstellung bezüglich des Neutronendurchgangs durch eine Platte beschäftigen.

## 7.1 Erläuterung der Aufgabenstellung

Auf eine homogene Platte unendlicher Ausdehnung und der Stärke  $0 \leq x \leq h$  möge ein Neutronenstrom mit der Energie  $E_0$  auftreffen. Der Einfallswinkel sei  $90^\circ$ .

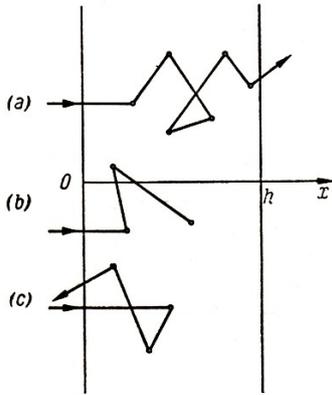


Abb. 22

Beim Zusammenstoß mit den Atomen des Stoffes, aus dem die Platte besteht, werden die Neutronen entweder elastisch gestreut oder absorbiert. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Energie eines Neutrons ändere sich bei der Streuung nicht und alle Richtungen, in denen sich ein Neutron nach dem Zusammenstoß weiterbewegen kann, besäßen die gleiche Wahrscheinlichkeit (das ist manchmal in Stoffen mit schweren Atomen der Fall). In Abb. 22 sind die verschiedenen "Schicksale" von Neutronen dargestellt:

Das Neutron (a) durchquert die Platte, das Neutron (b) wird absorbiert, und das Neutron (c) wird von der Platte reflektiert.

Es sollen nun  $p^+$ , die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron die Platte durchquert,  $p^-$ , die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron an der Platte reflektiert wird, und  $100$ , die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Neutron in der Platte absorbiert wird, berechnet werden.

Die Wechselwirkung der Neutronen mit der Materie lässt sich in unserem Fall durch zwei Konstanten  $\Sigma_c$  und  $\Sigma_s$  charakterisieren, die man als Absorptionsquerschnitt und Streuquerschnitt bezeichnet. Die Indizes  $c$  und  $s$  deuten auf die Anfangsbuchstaben der englischen Worte capture (Absorption) und scattering (Streuung) hin.

Die Summe dieser Größen

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s$$

heißt Gesamtquerschnitt.

Die physikalische Bedeutung des Begriffs Querschnitt ist folgende: Beim Zusammenprall eines Neutrons mit einem Atom des Stoffes ist die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption gleich  $\Sigma_c / \Sigma$  und für eine Streuung gleich  $\Sigma_s / \Sigma$ .

Die freie Weglänge  $\lambda$  eines Neutrons (das ist die Wegstrecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen) ist eine Zufallsgröße. Sie kann beliebige positive Werte mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}$$

annehmen.

Es ist unschwer zu erkennen, dass diese Dichte von  $\lambda$  mit der Dichte (26) (für  $a = 1$ ) der Zufallsgröße  $T$  für den Poissonschen Strom von Bedienungswünschen übereinstimmt. Analog zu Abschnitt 5.2 erhalten wir für die mittlere freie Weglänge den Ausdruck

$$E\lambda = 1/\Sigma$$

Als Formel für das Auslösen von  $\lambda$  ergibt sich

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} \ln G$$

Es bleibt zu klären, wie die zufällige Richtung eines Neutrons nach einer Streuung auszuwählen ist. Da das Problem bezüglich der  $x$ -Achse symmetrisch ist, ist diese Richtung durch den Winkel  $\varphi$  zwischen der Bewegungsrichtung des Neutrons und der  $x$ -Achse vollständig bestimmt.

Man kann zeigen<sup>19</sup>, dass die Forderung, alle Richtungen des Neutrons nach dem Zusammenprall seien gleich wahrscheinlich, mit der Forderung gleichbedeutend ist, dass der Kosinus des Richtungswinkels, also  $\mu = \cos \varphi$ , im Intervall  $(-1, 1)$  gleichverteilt ist. Aus Formel (24) ergibt sich für  $a = -1$  und  $b = 1$  als Formel zum Auslosen von  $\mu$ :

$$\mu = 2G - 1$$

## 7.2 Ein Schema zur Berechnung durch Modellierung der realen Trajektorien

Wir nehmen an, ein Neutron erleide zum  $k$ -ten Mal in einem Punkt der Platte mit der Abszisse  $x_k$  eine Streuung und bewege sich danach in der Richtung  $\mu_k$  weiter.

Als freie Weglänge ermitteln wir

$$\lambda_k = -\left(\frac{1}{\Sigma}\right) \ln G$$

und berechnen daraus als Abszisse des nächsten Zusammenpralls (Abb. 23)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k$$

Wir prüfen nach, ob die Bedingung  $x_{k+1} > h$  für den Durchgang durch die Platte erfüllt ist.

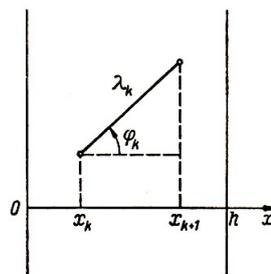


Abb. 23

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Bestimmung der Trajektorie des Neutrons abgebrochen und der Zähler für die durch die Platte hindurchtretenden Teilchen um Eins erhöht. Anderenfalls prüfen wir nach, ob die Reflexionsbedingung

$$x_{k+1} < 0$$

erfüllt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so beenden wir die Berechnung des Weges und erhöhen den Zähler für die Anzahl der reflektierten Teilchen um Eins. Ist auch diese Bedingung nicht erfüllt, d.h., ist  $0 \leq x_{k+1} \leq h$ , so erleidet das Neutron seinen  $(k + 1)$ -ten Zusammenstoß in der Platte. In diesem Fall muss das "Schicksal" des Neutrons beim Zusammenstoß ausgelöst werden.

Entsprechend Abschnitt 4.1 wählen wir nacheinander Werte für  $G$  aus und prüfen die Bedingung für eine Absorption:

$$G < \frac{\Sigma_c}{\Sigma}$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, so wird auch hier die Bestimmung des Neutronenweges abgebrochen und der Zähler für die absorbierten Teilchen um Eins erhöht. Anderenfalls nehmen

<sup>19</sup>Der Beweis findet sich in Abschnitt 9.4.

wir an, dass das Neutron im Punkt mit der Abszisse  $x_{k+1}$  eine Streuung erleidet. Als neue Bewegungsrichtung lösen wir

$$\mu_{k+1} = 2G - 1$$

aus und wiederholen danach den gesamten Zyklus von neuem (selbstverständlich mit anderen  $G$ -Werten).

Sämtliche  $G$ -Werte sind zwar ohne Index aufgeschrieben; es ist jedoch zu beachten, dass jeder  $G$ -Wert nur ein einziges Mal verwendet werden darf. Dabei werden zur Berechnung eines Trajektorienabschnitts drei  $G$ -Werte benötigt.

Für jede Trajektorie benutzen wir als Anfangswerte:

$$x_0 = 0 \quad , \quad \mu_0 = 1$$

Nachdem  $N$  Trajektorien auf diese Weise ermittelt worden sind, wird festgestellt, dass  $N^+$  Neutronen die Platte durchquert haben,  $N^-$  Neutronen von ihr reflektiert und  $N^0$  Neutronen in ihr absorbiert wurden. Offenbar sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten näherungsweise gleich den relativen Häufigkeiten

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N} \quad , \quad p^- \approx \frac{N^-}{N} \quad , \quad p^0 \approx \frac{N^0}{N}$$

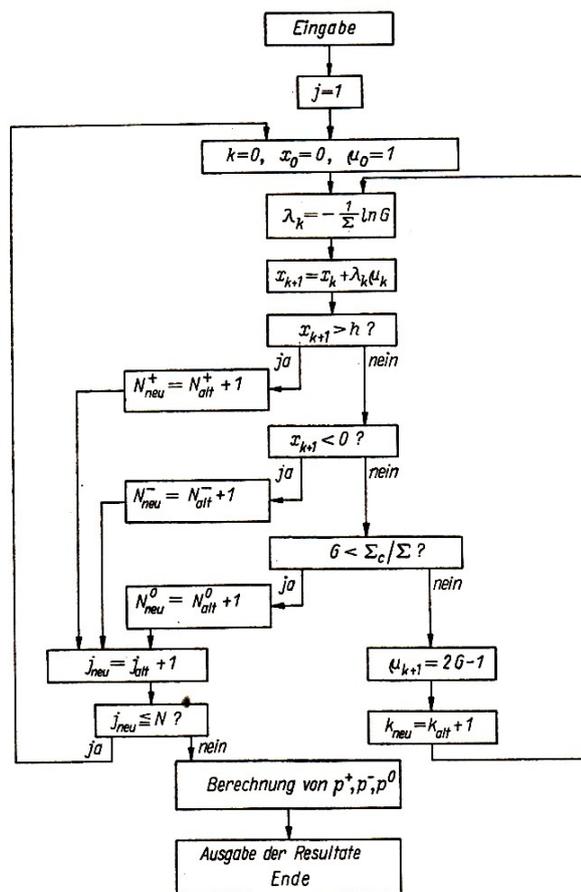


Abb. 24

In Abb. 24 ist das Flussdiagramm eines Programms zur Lösung dieser Aufgaben dargestellt.

Dabei ist der Index  $j$  die Nummer der Trajektorie, der Index  $k$  die Nummer des Zusammenpralls (entlang dieser Trajektorie).

Dieses Berechnungsverfahren ist unvollkommen, obwohl es den natürlichen Ablauf der untersuchten Vorgänge sehr gut berücksichtigt. Besonders schwer ist es, mit diesem Verfahren die Wahrscheinlichkeit  $p^+$  zu berechnen, wenn diese sehr klein ist. Aber gerade mit solchen Fällen hat man sich bei Untersuchungen über Strahlenschutz oft zu befassen.

Es existieren "raffiniertere" Varianten der Monte-Carlo-Methode, mit denen auch solche Fälle berechnet werden können. Wir gehen kurz auf eine solche einfache Variante der Berechnung mit Hilfe sogenannter "Gewichte" ein.

### 7.3 Ein Rechenschema unter Benutzung von Gewichten, welche die Absorption ersetzen

Wir betrachten die gleiche Aufgabenstellung, die Untersuchung des Neutronendurchgangs. Dazu setzen wir voraus, dass sich entlang ein und derselben Trajektorie ein ganzes "Paket" bewegt, das aus einer großen Zahl  $\omega_0$  gleichartiger Neutronen besteht.

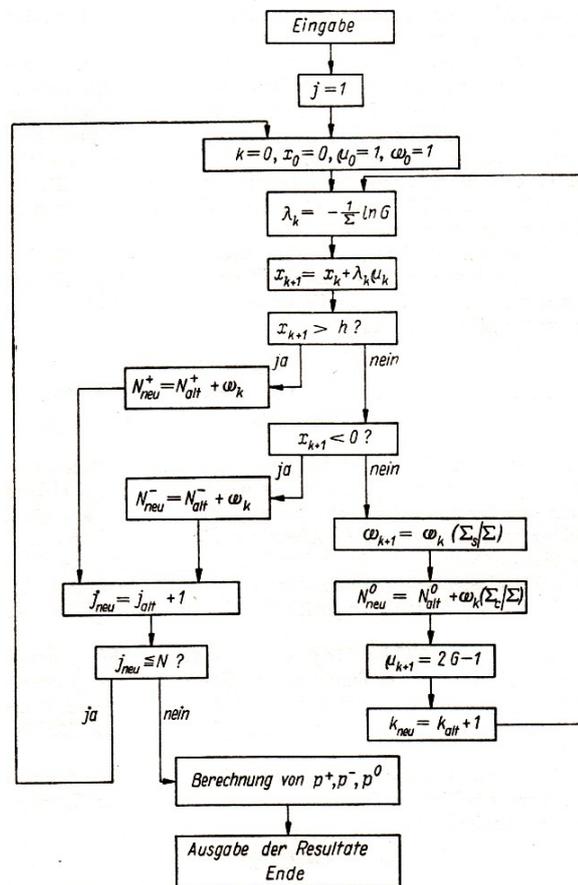


Abb. 25

Bei einem Zusammenstoß in einem Punkt mit der Abszisse  $x_1$  ist die Anzahl der absorbierten Neutronen des Paketes im Mittel gleich  $\omega_0(\sum_c / \sum)$  und die Anzahl der gestreuten Neutronen im Mittel gleich  $\omega_0(\sum_s / \sum)$ .

Wir erhöhen den Zähler für die absorbierten Teilchen um den Betrag  $\omega_0(\sum_c / \sum)$  und beobachten die Bewegung des gestreuten Pakets weiter, wobei wir voraussetzen, dass sich das gesamte nach dem Zusammenstoß verbleibende Paket in die gleiche Richtung bewegt.

So bleiben alle in Abschnitt 7.2 angegebenen Formeln weiterhin gültig. Nur ist bei jedem

Zusammenstoß die Anzahl der Neutronen des Pakets nach der Formel

$$\omega_{k+1} = \omega_k \left( \sum_s / \sum \right)$$

zu verkleinern, da der Teil des Pakets, der  $\omega_k (\sum_c / \sum)$  Neutronen enthält, absorbiert wird. Und die Trajektorie kann jetzt nicht durch Absorption beendet werden.

Die Größe  $\omega_k$  nennt man gewöhnlich Neutronengewicht, und statt von einem Paket aus  $\omega_k$  Neutronen zu sprechen, spricht man von einem Neutron mit dem Gewicht  $\omega_k$ . Dabei wird das Anfangsgewicht  $\omega_0$  gewöhnlich gleich 1 gesetzt.

Das ist kein Widerspruch zu unseren Überlegungen über ein "großes Paket"; denn es ist uns schwer zu erkennen, dass alle  $\omega_k$ , die sich bei der Berechnung einer Trajektorie ergeben,  $\omega_0$  als gemeinsamen Faktor enthalten.

Ein Flussdiagramm zur Realisierung dieses Verfahrens ist in Abb. 25 dargestellt. Es ist keineswegs komplizierter als das in Abb. 24 gezeigte Flussdiagramm.

Man kann jedoch zeigen<sup>20</sup>, dass die Berechnung von  $p^+$  nach dem hier gezeigten Verfahren immer vorteilhafter ist als nach dem in Abschnitt 7.2 geschilderten Verfahren.

## 7.4 Bemerkung

Es existieren recht viele verschiedenartige Berechnungsverfahren, die unterschiedliche Gewichte benutzen. Wir wollen hier aber nicht weiter darauf eingehen.

Wir wollen nur noch darauf hinweisen, dass man mit der Monte-Carlo-Methode weit komplizierten Probleme über Elementarteilchen lösen kann. Dabei können die untersuchten Medien aus verschiedenen Stoffen bestehen und beliebige geometrische Struktur aufweisen; die Energie der Teilchen kann sich bei jedem Zusammenstoß ändern. Man kann noch viele andere atomare Prozesse untersuchen (beispielsweise die Möglichkeit einer Spaltung des Atoms bei einem Zusammenstoß mit Neutronen und die Bildung neuer Neutronen). Ebenso kann die Bedingung der Entstehung und Aufrechterhaltung einer Kettenreaktion untersucht werden.

## 8 Die Berechnung bestimmter Integrale

Die in den §§ 5, 6 und 7 betrachteten Beispiele waren ihrer Natur nach Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Anwendung der Monte-Carlo-Methode zu ihrer Lösung erschien demnach naturgemäß.

Jetzt wollen wir eine rein mathematische Aufgabe betrachten: die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Da die Berechnung bestimmter Integrale der Berechnung von Flächeninhalten gleichkommt, könnte man die beim Beispiel 1.2 benutzte Methode anwenden. Stattdessen wollen wir jedoch ein effektiveres Verfahren untersuchen, mit dem verschiedene wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle zur Lösung dieser Aufgabe mit der Monte-Carlo-Methode konstruiert werden können. Wir werden zeigen, wie man daraus die "besten" Modelle auswählt.

---

<sup>20</sup>Der Beweis findet sich in Abschnitt 9.5.

## 8.1 Die Berechnungsmethode

Wir betrachten eine Funktion  $g(x)$  auf dem Intervall  $a < x < b$ . Es soll das Integral

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (33)$$

näherungsweise berechnet werden.

Wir wählen eine beliebige Verteilungsdichte  $p_X(x)$ , die in dem Intervall  $(a, b)$  definiert ist [d. h. eine beliebige Funktion  $p_X(x)$ , welche die Bedingungen (15) und (16) erfüllt].

Außer der in dem Intervall  $(a, b)$  definierten Zufallsgröße  $X$  mit der Dichte  $p_X(x)$  benötigen wir die Zufallsgröße

$$Y = \frac{g(X)}{p_X(X)}$$

Gemäß Formel (18) gilt

$$EY = \int_a^b \left[ \frac{g(X)}{p_X(X)} \right] p_X(x) dx = I$$

Wir betrachten jetzt  $N$  gleichartige Zufallsgrößen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  und wenden auf ihre Summe den zentralen Grenzwertsatz aus Abschnitt 2.4 an. Die Formel (21) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j - I \right| < 3 \sqrt{\frac{DY}{N}} \right\} \approx 0,997 \quad (34)$$

Dieser Beziehung ist zu entnehmen, dass für  $N$  Werte  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bei hinreichend großem  $N$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{g(X_j)}{p_X(X_j)} \approx I \quad (35)$$

gilt. Sie zeigt auch, dass der Fehler der Näherung (35) mit sehr großer Wahrscheinlichkeit den Wert  $3 \sqrt{\frac{DY}{N}}$  nicht überschreitet.

## 8.2 Wahl des geeigneten Rechenschemas

Wir sahen, dass man zur Berechnung des Integrals (33) jede im Intervall  $(a, b)$  definierte Zufallsgröße  $X$  verwenden kann. Für einen beliebigen Fall gilt

$$EY = E \left[ \frac{g(X)}{p_X(X)} \right] = I$$

Die Streuung  $DY$  und mit ihr die Fehlerabschätzung der Formel (35) hängen jedoch davon ab, welche Größe  $X$  wir verwenden. Es gilt nämlich

$$DY = E(Y^2) - I^2 = \int_a^b \left[ \frac{g^2(x)}{p_X(x)} \right] dx - I^2$$

Man kann beweisen<sup>21</sup>, dass dieser Ausdruck minimal wird, wenn  $p_X(x)$  proportional  $|g(x)|$  ist.

<sup>21</sup>Der Beweis findet sich in Abschnitt 9.6.

Man sollte natürlich keine sehr komplizierte Funktion  $p_X(x)$  auswählen, da dann das Auslosen der  $X$ -Werte sehr aufwendig werden würde. Man kann sich aber bei der Wahl von  $p_X(x)$  durch obige Empfehlung leiten lassen (siehe Beispiel 8.3).

Integrale der Form (33) werden praktisch nicht mit der Monte-Carlo-Methode berechnet. Dafür gibt es exaktere Verfahren, z.B. Quadraturformeln. Bei mehrfachen Integralen ändert sich die Lage: Die Quadraturformeln werden sehr kompliziert, während die Monte-Carlo-Methode fast unverändert angewendet werden kann.

### 8.3 Ein Zahlenbeispiel

Wir wollen das Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

näherungsweise berechnen. Der genaue Wert dieses Integrals ist bekannt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

Wir werden die Berechnung mit zwei Zufallsgrößen  $X$  ausführen. Einmal wählen wir die Dichte  $p_X(x) \equiv 2/\pi$  (d.h.,  $X$  ist im Intervall  $(0; \pi/2)$  gleichverteilt), zum anderen wählen wir die lineare Dichte  $p_X(x) = \frac{8x}{\pi^2}$ .

Die beiden Dichtefunktionen sind zusammen mit dem Integranden  $\sin x$  in Abb. 26 dargestellt.

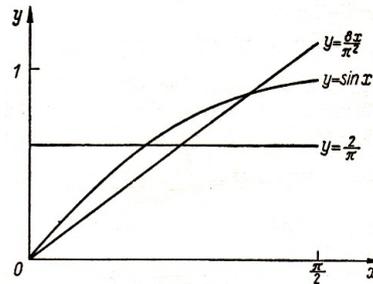


Abb. 26

Die Abbildung zeigt, dass die lineare Dichtefunktion der in Abschnitt 8.2 gegebenen Empfehlung, dass  $p_X(x)$  und  $\sin x$  proportional sein sollen, besser entspricht. Man muss deshalb erwarten, dass das zweite Verfahren die besseren Ergebnisse liefern wird.

a) Es sei  $p_X(x) \equiv \frac{2}{\pi}$  auf dem Intervall  $(0, \pi/2)$ . Aus Formel (24) erhält man dann für  $a = 0$  und  $b = \pi/2$  folgende Beziehung zum Auslesen der  $X$ -Werte:

$$X = \frac{\pi}{2}G$$

Formel (35) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^N \sin X_j$$

Es sei nun  $N = 10$ . Als  $G$ -Werte benutzen wir Zahlentripel aus der Tabelle A (jeweils mit 0,001 multipliziert). Die Zwischenergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1										
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G_j$	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
$X_j$	1,359	0,250	0,124	0,889	0,243	1,043	0,542	1,029	1,275	0,521
$\sin X_j$	0,978	0,247	0,124	0,776	0,241	0,864	0,516	0,857	0,957	0,498

Insgesamt ergibt sich

$$I \approx 0,952$$

b) Nun wählen wir als Dichtefunktion  $p_X(x) = \frac{8x}{\pi^2}$ . Zum Auslesen der  $X$ -Werte benutzen wir wieder die Gleichung (23),

$$\int_0^X \frac{8x}{\pi^2} dx)G$$

aus der wir nach einigen Umformungen

$$X = \frac{\pi}{2} \sqrt{G}$$

erhalten. Die Formel (35) nimmt jetzt die Gestalt

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin X_j}{X_j}$$

an. Es sei wieder  $N = 10$ , und die  $G$ -Werte seien dieselben wie im Fall a). Die Zwischenresultate sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Insgesamt ergibt sich

$$I = 1,016$$

Wie zu erwarten war, liefert das zweite Verfahren ein genaueres Ergebnis.

Tabelle 2										
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G_j$	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
$X_j$	1,461	0,626	0,442	1,182	0,618	1,280	0,923	1,271	1,415	0,905
$\frac{\sin X_j}{X_j}$	0,680	0,936	0,968	0,783	0,937	0,748	0,863	0,751	0,698	0,868

## 8.4 Zur Fehlerabschätzung

In Abschnitt 8.2 wiesen wir schon darauf hin, dass der absolute Fehler bei der Berechnung des Integrals  $I$  nach Formel (35) praktisch nicht größer als  $3\sqrt{DY/N}$  sein wird.

In Wirklichkeit liegt der Fehler sogar merklich unter dieser Größe. Deshalb benutzt man zur Charakterisierung des zu erwartenden Fehlers in der Praxis häufig eine andere Größe, die sogenannte Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$\delta_{\text{Wahrsch}} = 0,075 \sqrt{\frac{DY}{N}}$$

Faktisch hängt der absolute Fehler von den im Verlauf der Berechnung benutzten Zufallszahlen ab und kann sowohl zwei- bis dreimal so groß als auch kleiner sein als  $\delta_{\text{Wahrsch}}$ . Somit liefert  $\delta_{\text{Wahrsch}}$  keine obere Schranke für den Fehler, sondern nur seine Größenordnung.<sup>22</sup>

<sup>22</sup>Zur Definition des Begriffs Fehlerwahrscheinlichkeit siehe Abschnitt 9.7.

Wir kehren noch einmal zum Beispiel aus Abschnitt 8.3 zurück. Aus den in Tabelle 1 und 2 angegebenen Werten kann man für beide Berechnungsmethoden näherungsweise eine Dispersion  $DY$  berechnen. Die entsprechenden Formeln sind in Abschnitt 6.1 angegeben.<sup>23</sup>

Tabelle 3 enthält die Näherungswerte der Dispersion  $DY$  für beide Berechnungsverfahren. Ergänzt wird die Tabelle durch die entsprechenden Fehlerwahrscheinlichkeiten  $\delta_{\text{Wahrsch}}$  und die faktisch den absoluten Fehler darstellenden Rechenfehler  $\delta_{\text{ber}}$ .

Methode	$DY$	$\delta_{\text{Wahrsch}}$	$\delta_{\text{ber}}$
a)	0,256	0,103	0,048
b)	0,016	0,027	0,016

Wir sehen, dass  $\delta_{\text{ber}}$  tatsächlich die gleiche Größenordnung besitzt wie  $\delta_{\text{Wahrsch}}$ .

---

<sup>23</sup>Für Methode a) gilt

$$DY \approx \frac{\pi^2}{9 \cdot 4} \left[ \sum_1^{10} (\sin X_j)^2 - \frac{1}{10} \left( \sum_1^{10} \sin X_j \right)^2 \right] = \frac{\pi^2}{36} (4,604 - 3,670) = 0,256$$

Für Methode b) gilt

$$DY \approx \frac{\pi^4}{9 \cdot 64} \left[ \sum_1^{10} \left( \frac{\sin X_j}{X_j} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \sum_1^{10} \frac{\sin X_j}{X_j} \right)^2 \right] = \frac{\pi^4}{576} (6,875 - 6,777) = 0,016$$

## 9 Anhang - Beweis einiger Sätze

Dieser Paragraph bringt die Beweise einiger Behauptungen, die in vorangegangenen Paragraphen formuliert wurden. Zum Teil schienen sie uns für eine populärwissenschaftliche Darstellung zu umfangreich, oder sie erfordern tiefere Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### 9.1 Begründung des von Neumannschen Verfahrens zur Auslosung der Werte von Zufallsgrößen

betrifft Abschnitt 4.3

Der zufällige Punkt  $\Gamma$  sei im Rechteck  $abcd$  (Abb. 27) mit dem Flächeninhalt  $M_0(b - a)$  gleichverteilt<sup>24</sup>.

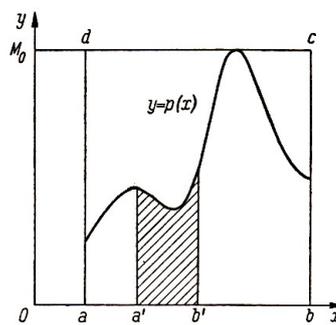


Abb. 27

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt  $P$  unterhalb der Kurve  $y = p(x)$  liegt und Flächeninhalte:

$$\frac{\int_a^b p(x) dx}{M_0(b-a)} = \frac{1}{M_0(b-a)}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt  $P$  unterhalb der Kurve  $y = p(x)$  und innerhalb des Intervalle  $a' < x < b'$  liegt, ist ebenfalls gleich dem Verhältnis der Flächeninhalte:

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x) dx}{M_0(b-a)}$$

Unter den ausgewählten  $X$ -Werten ist der Anteil derjenigen, die in das Intervall  $(a', b')$  fallen, folglich gleich dem Quotienten

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x) dx}{M_0(b-a)} : \frac{1}{M_0(b-a)} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx$$

und das war zu beweisen.

### 9.2 Die Verteilungsdichte der Zufallsgröße $Z' = a + \sigma Z$

betrifft Abschnitt 4.4

<sup>24</sup>Siehe Abschnitt 9.3.

Wir betrachten die normalverteilte Zufallsgröße  $Z$  mit dem Erwartungswert  $EZ = 0$  und der Dispersion  $DZ = 1$ . Für ihre Dichtefunktion gilt also

$$p_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Um die Verteilungsdichte der Zufallsgröße  $Z'$  zu berechnen, wählen wir zwei beliebige Zahlen  $x_1 < x_2$  und berechnen die Wahrscheinlichkeit

$$P\{x_1 < Z' < x_2\} = P\{x_1 < a + \sigma Z < x_2\} = P\left\{\frac{x_1 - a}{\sigma} < Z < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right\}$$

Folglich ist

$$P\{x_1 < Z' < x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

In diesem Integral führen wir die Variablensubstitution  $x' = a + \sigma x$  durch und erhalten

$$P\{x_1 < Z' < x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x'-a)^2}{2\sigma^2}} dx'$$

Daraus folgt (siehe (14)), dass die Zufallsgröße  $Z'$  normalverteilt ist mit den Parametern  $EZ' = a$  und  $DZ' = \sigma^2$ .

### 9.3 Die Gleichverteilung der Punkte ( $G'$ , $G''$ ) im Quadrat

betrifft Abschnitt 4.5

Da die Koordinaten der Punkte ( $G'$ ,  $G''$ ) unabhängig sind, ist ihre Dichtefunktion  $p(x, y)$  gleich dem Produkt der Dichten:

$$p(x, y) = p_{G'}(x) \cdot p_{G''}(y)$$

Jede dieser Dichten ist identisch gleich 1, d.h., es ist  $p(x, y) \equiv 1$  (für  $0 < x < 1$  und  $0 < y < 1$ ). Das aber bedeutet gerade, dass der Punkt ( $G'$ ,  $G''$ ) im Einheitsquadrat gleichverteilt ist.

### 9.4 Auswahl einer zufälligen Richtung

betrifft Abschnitt 7.1

Wir wollen vereinbaren, eine Richtung durch einen Einheitsvektor vorzugeben, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Endpunkte dieser Vektoren liegen auf der Oberfläche der Einheitskugel.

Die Aussage, jeder Richtung komme die gleiche Wahrscheinlichkeit zu, bedeutet, dass die Endpunkte der Vektoren zufällige Punkte  $\Omega$  darstellen, die auf der Oberfläche der Einheitskugel gleichverteilt sind.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $\Omega$  in einem beliebigen Flächenelement  $dS$  liegt, ist gleich  $\frac{dS}{4\pi}$ .

Auf der Oberfläche der Kugel wählen wir die Kugelkoordinaten  $\varphi$  und  $\psi$  in Bezug auf die  $x$ -Achse (Polachse) (Abb. 28). Dann gilt

$$dS = \sin \varphi d\varphi d\psi \tag{36}$$

wobei  $0 \leq \varphi \leq \pi$  und  $0 \leq \psi \leq \pi$  ist.

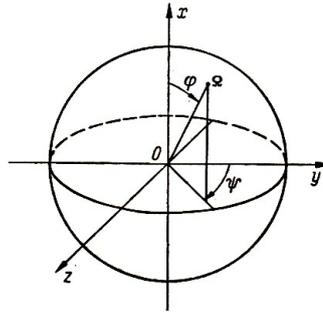


Abb. 28

Da die Koordinaten  $\varphi$  und  $\psi$  unabhängig sind, ist die Verteilungsdichte des Punktes  $(\varphi, \psi)$  gleich dem Produkt

$$p(\varphi, \psi) = p_\varphi(\varphi) \cdot p_\psi(\psi)$$

Aus dieser Gleichung, der Beziehung (36) und der Beziehung

$$p(\varphi, \psi)d\varphi d\psi = \frac{dS}{4\pi}$$

folgt

$$p_\varphi(\varphi) \cdot p_\psi(\psi) = \frac{\sin \varphi}{4\pi} \quad (37)$$

Wir integrieren diesen Ausdruck über  $\psi$  von 0 bis  $2\pi$ . Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung

$$\int_0^{2\pi} p_\psi(\psi) d\psi = 1$$

erhalten wir

$$p_\varphi(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{2} \quad (38)$$

Dividiert man (37) durch (38), so ergibt sich

$$p_\psi(\psi) = \frac{1}{2\pi} \quad (39)$$

Offenbar ist  $\psi$  im Intervall  $(0, 2\pi)$  gleichverteilt. Als Formel für das Auslosen von  $\psi$  erhält man somit

$$\psi = 2\pi G \quad (40)$$

Eine Formel für das Auslosen von  $\varphi$  finden wir mit Hilfe der Gleichung (23):

$$\frac{1}{2} \int_0^\varphi \sin x dx = G \quad \text{aus der sich} \quad \cos \varphi = 1 - 2G \quad (41)$$

ergibt.

Die Formeln (40) und (41) ermöglichen es uns nun, eine zufällige Richtung auszuwählen (bzw. auszulosen). Die in den Formeln benutzten  $G$ -Werte müssen natürlich verschieden sein.

Die Formel (41) unterscheidet sich von der letzten Formel des Abschnitts 7.1 nur darin, dass anstelle von  $G$  jetzt  $1 - G$  steht. Diese Größe ist aber ebenfalls gleichverteilt.

## 9.5 Der Vorteil von Berechnungsverfahren mit „Gewichten“

betrifft Abschnitt 7.3

Wir führen die Zufallsgrößen  $V$  und  $V'$  ein, die gleich der Anzahl (dem Gewicht) der eine Platte durchquerenden Neutronen sein sollen, die (das) sich bei der Berechnung einer Trajektorie durch die in Abschnitt 7.2 bzw. 7.3 geschilderten Verfahren ergeben hat.

Entsprechend dem physikalischen Inhalt des Problems ist

$$EV = EV' + p^+$$

Da  $V$  nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen kann, ist die Verteilung von  $V$  durch

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1 - p^+ \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beachten wir  $V^2 = V$ , so lässt sich leicht nachrechnen, dass  $DV = p^+ - (p^+)^2$  ist.

Andererseits ist leicht zu sehen, dass die Größe  $V'$  unendlich viele Werte annehmen kann:  $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$  sowie den Wert 0. Daher wird die Verteilung von  $V'$  durch

$$V' = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_k & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q \end{pmatrix}$$

gegeben. Die einzelnen Werte  $q_i$  werden uns nicht interessieren, da in jedem Fall für die Dispersion die Beziehung

$$DV' = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^2 q_k - (p^+)^2$$

gilt.

Ausgehend davon, dass  $\omega_k \leq 1$  für alle  $\omega_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^2 q_k = EV' = p^+$  gilt, erhalten wir die

Ungleichung

$$DV' \leq p^+ - (p^+)^2 = DV$$

Die Tatsache, dass die Dispersion von  $V'$  stets kleiner ist als die Dispersion von  $V$ , zeigt, dass das Verfahren zur Berechnung von  $p^+$  aus Abschnitt 7.3 immer besser ist als das aus Abschnitt 7.2.

Die gleiche Aussage kann man bezüglich der Berechnung von  $p^-$  machen, bei nicht zu großer Absorption übrigens auch für die Berechnung von  $p^0$ .

## 9.6 Optimale Auswahl von X-Werten

betrifft Abschnitt 8.2

In Abschnitt 8.2 erhielten wir einen Ausdruck für die Dispersion  $DY$ . Um diesen Ausdruck bezüglich sämtlicher möglichen Dichtefunktionen  $p_X(x)$  zum Minimum zu machen, bedienen wir uns der aus der Analysis wohlbekannten (Cauchy-Schwarzschen) Ungleichung

$$\left[ \int_a^b |u(x)v(x)| dx \right]^2 \leq \int_a^b u^2(x) dx \cdot \int_a^b v^2(x) dx$$

Setzen wir  $u = g(x)/\sqrt{p_X(x)}$  und  $v = \sqrt{p_X(x)}$ , so erhalten wir daraus die Ungleichung

$$\left[ \int_a^b |g(x)| dx \right]^2 \leq \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_X(x)} dx \cdot \int_a^b p_X(x) dx = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_X(x)} dx$$

Das bedeutet aber

$$DY \geq \left[ \int_a^b |g(x)| dx \right]^2 - I^2 \quad (42)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass in dieser Ungleichung die untere Grenze angenommen wird, wenn  $p_X(x)$  zu  $|g(x)|$  proportional ist.

Es sei

$$p_X(x) = \frac{|g(x)|}{\int_a^b |g(x)| dx} \quad (43)$$

Man kann dann leicht nachrechnen, dass für diese Dichtefunktion  $p_X(x)$  die Beziehung

$$\int_a^b \frac{g^2(x)}{p_X(x)} dx = \left[ \int_a^b |g(x)| dx \right]^2$$

gilt. Die Dispersion  $DY$  ist dann tatsächlich gleich der rechten Seite der Gleichung (42).

Dazu ist jedoch zu bemerken, dass es praktisch unmöglich ist, die "optimale" Dichtefunktion der Formel (43) zu wählen. Denn dazu müsste man den Wert des Integrals  $\int_a^b |g(x)| dx$  kennen. Die Berechnung dieses Integrals ist aber eine Aufgabe, die dem ursprünglichen Problem der Berechnung des Integrals  $\int_a^b g(x) dx$  gleichwertig ist. Wir beschränken uns deshalb auf die in Abschnitt 8.2 gegebene Empfehlung.

## 9.7 Ermittlung der Fehlerwahrscheinlichkeit

betrifft Abschnitt 8.4

Es sei  $Z$  die in Abschnitt 2.3 definierte normalverteilte Zufallsgröße. Man kann leicht nachrechnen, dass für beliebige  $a$  und  $\sigma$  für  $r = 0,675\sigma$

$$\int_{a-r}^{a+r} p_X(x) dx = 0,5$$

ist. Daraus folgt

$$P\{|Z - a| < r\} = P\{|Z - a| > r\} = 0,5$$

d.h., eine Abweichung größer als  $r$  und eine Abweichung kleiner als  $r$  treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Deshalb wird die Größe  $r$  die Fehlerwahrscheinlichkeit der Zufallsgröße  $Z$  genannt.

In Abschnitt 8.1 berechneten wir näherungsweise die normalverteilte Zufallsgröße

$$R = (1/N)(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N).$$

Ihr Erwartungswert ist  $a \equiv ER = 1$ , und ihre Dispersion ist  $\sigma^2 \equiv DR = DY/N$ . Daher ist die Fehlerwahrscheinlichkeit von  $R$  angenähert gleich  $0,675\sqrt{DY/N}$ .

## 10 Tabellen

Tabelle A. 400 Zufallszahlen<sup>25</sup>

86515	90795	66155	66434	56558	12332	94377	57802
69186	03393	42502	99224	88955	53758	91641	18867
41686	42163	85181	38967	33181	72664	53807	00607
86522	47171	88059	89342	67248	09082	12311	90316
72587	93000	89688	78416	27589	99528	14480	50961
52452	42499	33346	83935	79130	90410	45420	77757
76773	97526	27256	66447	25731	37525	16287	66181
04825	82134	80317	75120	45904	75601	70492	10274
87113	84778	45863	24520	19976	04925	07824	76044
84754	57616	38132	64294	15218	49286	89571	42903

Tabelle B. 88 normalverteilte Zahlen<sup>26</sup>

0,2005	1,1922	-0,0077	0,0348	1,0423	-1,8149	1,1803	0,0033
1,1609	-0,6690	-1,5893	0,5816	1,8818	0,7390	-0,2736	1,0828
0,5864	-0,9245	0,0904	1,5068	-1,1147	0,2776	0,1012	-1,3566
0,1425	-0,2863	1,2809	0,4043	0,6379	-0,4428	-2,3006	-0,6446
0,9516	-1,7708	2,8854	0,4686	1,4664	1,6852	-0,9690	-0,0831
-0,5863	0,8574	-0,5557	0,8115	-0,2676	-1,2496	-1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	-0,1032	0,5405	-0,6022	0,0093	0,2119	-1,4647
-0,4428	-0,5564	-0,5098	-1,1929	-0,0572	-0,5061	-0,1557	-1,2384
-0,3924	1,7981	0,6141	-1,3596	1,4943	-0,4406	-0,2033	-0,1316
0,8319	0,4270	-0,8888	0,4167	-0,8513	1,1054	1,2237	-0,7003
0,9780	-0,7679	0,8960	0,5154	-0,7165	0,8563	-1,1630	1,8800

<sup>25</sup>Diese zufälligen Ziffern simulieren die Werte einer Zufallsgröße mit der Verteilung (22) (siehe Abschnitt 3.1).

<sup>26</sup>Diese normalverteilten Größen simulieren die Werte einer normal (Gauß)-verteilten Zufallsgröße  $Z$  mit den Parametern  $a = 0$  und  $\sigma = 1$ .