Ernest Kolman

Die vierte Dimension

Übersetzung und Bearbeitung: Dr. H. Laßner, Prof. Dr. G. Laßner
1970 Verlag Mir Moskau und BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 88
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort des Verfassers zur deutschen Ausgabe

Eine der dringendsten aber auch der schwierigsten Aufgaben unserer Epoche beruht darin, die Kluft, welche zwischen uns Menschen, den Völkerschaften und Rassen klafft, zu überbrücken. Sicher ist die Abschaffung aller Art Ausbeutung des Menschen durch andere Menschen eine notwendige Bedingung dafür, die allein noch nicht ausreicht.

Wir müssen noch unser Moralniveau, unsere Einsicht bedeutend heben, das Verständnis für die Kulturen anderer Nationen stärken. Übersetzungen tragen - wenn auch nur laut dem Sprichwort gutta cavet lapidem - ebenfalls etwas dazu bei.

Deshalb ist es eine Freude für mich, wenn mein Büchlein in deutscher Übersetzung erscheint, und ich hoffe, dass der Leser an meiner Freude teilnehmen wird.

E. Kolman

Moskau, den 23. Mai 1973

Inhaltsverzeichnis

1 Empirische und rationale Erkenntnis

Alle für uns wahrnehmbaren Gegenstände haben Länge, Breite und Höhe (manchmal auch Tiefe oder Stärke genannt). Anders gesagt, jeder Körper besitzt drei räumliche Ausdehnungen, er ist dreidimensional.

Davon überzeugen uns unsere Sinne, das Sehvermögen und der Tastsinn. Zweidimensionale, eindimensionale und nulldimensionale Gegenstände finden wir nirgends in der objektiven Außenwelt. Sie existieren nicht in der Natur, und man kann sie auch nicht künstlich schaffen.

Freilich können eine, zwei oder sogar alle drei Dimensionen bei bestimmten Gegenständen sehr klein sein. So ist z.B. eine Ausdehnung, die Dicke, bei Insektenflügeln sehr klein, zwei, Dicke und Breite, bei einem Spinngewebe oder Haar, und alle drei bei einem Stäubchen.
Wir sind auch in der Lage, sehr dünne Blätter Gold, Quarzfäden usw. herzustellen.
Aber in allen Fällen sind alle drei Dimensionen vorhanden. Mit Hilfe geeigneter Geräte kann man sie messen, so winzig sie auch sein mögen.

Wir erfassen jedoch die Wirklichkeit nicht nur durch sinnliche Wahrnehmung (empirisch), sondern auch im logischen Denken (rational). Auf der Grundlage der Wahrnehmungen und Vorstellungen, die aus der Erfahrung erhalten werden, entstehen Begriffe.
Dabei ist es möglich, von diesen oder jenen Qualitäten, Eigenschaften und Beziehungen der realen Gegenstände zu abstrahieren und im Bewusstsein das zu teilen, was in Wirklichkeit nur im Ganzen existiert.

Umgekehrt ist es möglich zu verallgemeinern und gedanklich zu verbinden, was in Wirklichkeit getrennt ist. So hat jeder materielle Gegenstand ein bestimmtes Gewicht, Farbe, Festigkeit und eine Menge anderer Charakteristika.
In Gedanken können wir sie alle vernachlässigen und nur die Form der Gegenstände, ihre Größe (Länge) und ihre Lage bezüglich anderer Gegenstände behalten. Das Ergebnis ist ein geometrischer Körper, z.B. ein bestimmter. Würfel oder eine Kugel.

Dieser Prozess des Abstrahierens kann in zwei Richtungen fortgesetzt werden. Es ist möglich, von der Größe und der Lage des konkreten geometrischen Körpers zu abstrahieren, z.B. des konkreten Kubus.
So kommt man zum abstrakten Körper, in unserem Beispiel zum Begriff des Kubus. Es ist auch möglich, von einer, zwei oder sogar von drei Dimensionen eines geometrischen Körpers zu abstrahieren.

Im ersten Fall erhalten wir eine Oberfläche, z.B. eine Ebene oder eine Kugeloberfläche, die nicht drei, sondern nur zwei räumliche Dimensionen hat. Der zweite Fall führt zu einer geraden oder gekrümmten Kurve, welche nur noch eine Dimension hat. Im dritten Fall erhalten wir schließlich einen Punkt, der über keinerlei Dimension verfügt. Er ist dimensionslos.

2 Herausbildung des Raumbegriffes

In Gedanken wäre es auch möglich, in umgekehrter Weise vorzugehen. Man kann sich vorstellen, dass die Ausmaße irgendeines geometrischen Körpers, z.B. eines Kubus oder einer Kugel, unbeschränkt wachsen.
Auf diese Weise erhalten wir den Begriff des Raums. Der Raum wird offensichtlich genau wie der geometrische Körper, aus dem er im Resultat der gedanklichen Erweiterung entstand, drei

Dimensionen besitzen, er wird dreidimensional sein.

Wir haben hier verschiedene Stufen des Abstraktionsprozesses beschrieben, mit dessen Hilfe wir von der Wahrnehmung konkreter materieller Gegenstände zum Begriff des dreidimensionalen Raums gelangten. Doch bevor wir fortfahren und zur nächsthöheren Abstraktionsstufe übergeben, muss das oben Gesagte präzisiert und ergänzt werden.

Wir sagten, dass uns Tastsinn und Sehvermögen die Gegenstände als dreidimensional erscheinen lassen. Das ist wahr, jedoch nicht so einfach. Das Bild eines Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges ist zweidimensional.
Deshalb wird jeder Gegenstand anfänglich als zweidimensional aufgefasst. Auf die gleiche Art und Weise ertasten wir auch nur die Oberfläche des Gegenstandes, also zwei Dimensionen und nicht alle drei Dimensionen.

Die Vorstellung, dass Gegenstände dreidimensional sind, entsteht nur als Ergebnis eines Vergleichs. Das Bild des Gegenstandes im linken und rechten Auge stimmt nicht vollkommen überein. Infolge unserer Bewegung, Annäherung an den Gegenstand oder Entfernung von ihm sehen wir ihn verschieden.
So nimmt man in diesem Sinne einen Gegenstand eigentlich primär als zweidimensional wahr. Bei der Herausbildung der dreidimensionalen Vorstellung wirkt schon der Vergleich, d.h. Urteil und Denken, mit.

Dieser Umstand trägt dazu bei, dass alles, was mit drei Dimensionen verbunden ist, uns schwieriger erscheint als das, was nur mit zwei verbunden ist. Außerdem sind selbstverständlich dreidimensionale geometrische Körper komplizierter als zweidimensionale.

Aus diesen beiden Gründen ist für Schüler in der Regel die Stereometrie schwieriger als die Planimetrie, obwohl es, wie es scheint, genau entgegengesetzt sein müsste, denn die real existierende Welt ist dreidimensional und nicht zweidimensional.

Nach dieser Präzisierung, die wir im weiteren noch benötigen, ergänzen wir das Gesagte mit der folgenden Bemerkung. Der Weg, auf dem wir uns von den konkreten materiellen Gegenständen entfernten, war der Weg der Abstraktion.
Er führte uns letzten Endes zum dreidimensionalen Raum, aber zu welchem? Im Grunde genommen zum Begriff des Raums, zum begrifflichen, konzeptionellen Raum.

Doch dieser konzeptionelle Raum entstand bei uns auf der Grundlage der Wahrnehmung des Raums, genauer der Wahrnehmung der einzelnen räumlichen Gegenstände, auf der Grundlage eines perzeptiblen Raums. Doch der perzeptible Raum selbst ist das Abbild des realen materiellen Raums.
Der perzeptible Raum ist das Bild desjenigen Raums, der unabhängig davon existiert, ob wir ihn wahrnehmen oder nicht, unabhängig von den Wahrnehmungen, die wir von ihm erhalten.

Der reale Raum existierte schon, bevor die Erde entstand, schon bevor sich auf der Erde Menschen befanden, die sich den perzeptiblen und darüber hinaus den konzeptionellen Raum schufen. Offensichtlich sind der reale, der perzeptible und der konzeptionelle Raum nicht miteinander identisch.
Die Wechselbeziehungen zwischen ihnen sind ziemlich kompliziert.

Wie wir eben erwähnten, liegt der reale Raum sowohl dem perzeptiblen als auch dem konzeptionellen Raum zugrunde. Beide erscheinen als seine Widerspiegelungen, der perzeptible Raum als unmittelbare Widerspiegelung durch die Sinnesorgane und der konzeptionelle als indirekte

Widerspiegelung, als Abbild des Abbildes, als Widerspiegelung durch das Denken.

Der reale Raum ist untrennbar mit der Materie verbunden. Gerade auf ihn bezieht sich der bekannte Lehrsatz der marxistischen Philosophie, dass kein Raum ohne Materie existiert, so wie auch keine Materie ohne oder außerhalb des Raumes existiert. Der Raum ist eine Existenzform der Materie.

Deshalb sind solche Aussagen wie "Materie oder ein materieller Körper bewegt sich im Raum" ungenau.

Solche Vorstellungen, als sei der reale Raum so etwas ähnliches wie ein leerer Kasten, in welchem sich die dort untergebrachten materiellen Körper bewegen, ohne auf den Raum irgendeinen Einfluss auszuüben, wie sie von Newton vertreten wurden, sind überholt. Die Relativitätstheorie Einsteins widerlegte diese Auffassung, indem sie bestätigte, dass Materie und Raum in engem Zusammenhang miteinander stehen.

Wegen dieser engen Verbindung des realen Raums mit der Materie ist er auch mit der Zeit untrennbar verbunden. Denn die Zeit, wie auch der Raum, ist eine Existenzform der Materie. Keine Zeit ohne Materie, keine Materie ohne oder außerhalb der Zeit.

Schließlich folgt aus allem auch der untrennbare Zusammenhang des realen Raums mit der Bewegung, denn es existiert keinerlei Materie ohne Bewegung und keinerlei Bewegung ohne Materie. Die Erforschung des Zusammenhangs zwischen realem Raum, Zeit, Materie und ihrer Bewegung ist u. a. eine Aufgabe der Physik, und diese Aufgabe löst auf modernem Entwicklungsniveau der Wissenschaft mit großer Vollständigkeit die Relativitätstheorie obwohl auch eine zweite, grundlegende physikalische Theorie, die Quantentheorie, ihren nicht unwichtigen Beitrag dazu leistet.

3 Der reale, perzeptible und konzeptionelle Raum

Der reale Raum ist objektiv, während der perzeptible Raum subjektiven Charakter hat.
Für das Kind ist am Anfang der Säuglingsperiode seines Lebens der Raum zweidimensional. Es erscheinen ihm die Gegenstände alle in der gleichen Entfernung von ihm, als wären sie auf einem Bildschirm abgebildet.
Bei einigen Störungen des Nervensystems des erwachsenen Menschen durch eine Erkrankung, Verwundung, Trunkenheit oder Einfluss von Narkotika weicht sein perzeptibler Raum von der Norm ab. Im allgemeinen hat der perzeptible Raum bei jedem Menschen seine individuellen Besonderheiten.

Auch der konzeptionelle Raum beinhaltet subjektive Momente. Doch sie sind nicht so sehr durch die Besonderheiten der einzelnen Personen, obwohl diese auch eine Rolle spielen, sondern durch das Niveau der wissenschaftlichen Erkenntnisse und der technischen Errungenschaften der Menschheit insgesamt in dieser oder jener Epoche bedingt.

Ein schlagendes Beispiel ist schon der oben erwähnte Wandel, den der konzeptionelle Raum vom physikalisch absoluten, nicht von der Materie abhängigen Raum Newtons bis zum physikalisch relativen Raum Einsteins erfuhr.
Wir beleuchteten hier nur teilweise die Beziehungen zwischen realem, perzeptiblem und konzeptionellem Raum. Doch wie schwierig sie auch sein mögen, die gesamte historische Erfahrung der Menschheit, ihre praktische Produktionstätigkeit inbegriffen, zeugt davon, dass alle diese drei Räume dreidimensional sind.

Kann man jedoch daraus mit absoluter Sicherheit schließen, dass die gesamte materielle Welt dreidimensional ist, dass in Wirklichkeit beispielsweise keinerlei zweidimensionale oder, sagen wir, eindimensionale Räume existieren?

Wenn man streng logisch schließt, kann man das nicht behaupten. Unsere Erfahrung ist begrenzt. Einerseits in Bezug auf die Zeit, d.h. es sind nur einige tausend Jahre, in deren Verlauf die Menschen mehr oder weniger bewusst Wissen über die Welt sammelten.
Andererseits in Bezug auf räumliche Entfernungen, in die vorzustoßen es uns gelingt: In die Ferne - bis zur Entfernung von zehn Milliarden Lichtjahren, in die Tiefe - bis zum zehnbillionsten Teil eines Zentimeters.

Was hinter diesen Grenzen steckt, nach der einen wie nach der anderen Seite, ist uns bisher noch nicht bekannt. Wir sind nicht einmal berechtigt zu sagen, dass der Raum dort? wahrscheinlich ebenfalls dreidimensional ist.

Tatsächlich, wenn man annimmt, dass sich der Raum bis ins Unendliche ausdehnt, und auch, dass er unerschöpflich im kleinen ist, so ist uns nur ein unendlich kleiner Teil von ihm bekannt. Deshalb liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendeine Behauptung über irgend etwas wahr ist, was außerhalb der Grenzen dieses uns bekannten Teiles des Raums liegt, beliebig nahe bei Null.

Diese Schlussfolgerung erhält man auch aus der Voraussetzung der Unendlichkeit der Zeit. Auch wenn man den Raum als endlich, aber unvorstellbar ausgedehnt ansieht, liegt diese Wahrscheinlichkeit dennoch nahe bei Null. Ebenso wird sich die Sache auch bei der Voraussetzung von endlicher, doch nicht vorstellbar langer Zeit verhalten.

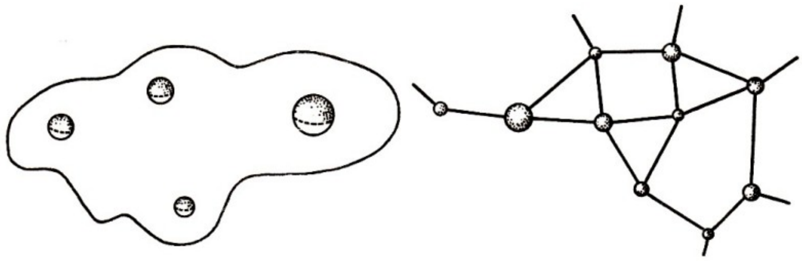


Fig. 1

Mit einiger Phantasie kann man sich zum Beispiel vorstellen, dass das Weltall zwei-dreidimensional ist. Das heißt, dass es im allgemeinen zweidimensional ist und sich nur bald hier, bald dort dreidimensionale Besonderheiten herausbilden, wovon eine unsere Metagalaxis ist.
Bildhaft gesprochen könnte sein Modell ein dünner Fladen sein, der mit kugelförmigen Blasen übersät ist, von welchen eine unsere Welt ist.

Analog könnten wir uns vorstellen, dass der Raum im Inneren der Elementarteilchen zweidimensional ist. Es ist auch möglich, sich die Vorstellung eines ein-dreidimensionalen Weltalls zu schaffen. Sein Modell wäre ein Netz mit Knoten.
Schließlich wäre ein ein-zwei-dreidimensionales Weltall eine Kombination der ersten beiden (Fig. 1).

Wir wollen noch einmal unterstreichen, dass in all diesen Fällen keinerlei Erfahrung diese phantastischen Hypothesen bekräftigt. Aber in ihnen ist auch im Unterschied zu den Märchen von Engeln und Teufeln keinerlei Unverträglichkeit mit den wissenschaftlichen Gegebenheiten und mit den hergeleiteten Gesetzen der Wissenschaft.

Wir eilen durch das Weltall, wobei wir in nichtdarstellbar riesigen Zeitperioden in unvorstellbar ferne Gebiete gelangen.

Mit einer Geschwindigkeit von 900 km/h (für Moskau) nehmen wir teil an der Drehung der Erde und mit der Geschwindigkeit von 15000 km/h an ihrem jährlichen Umlauf um die Sonne. Zusammen mit dem gesamten Sonnensystem, das an der Drehung unserer Galaxis teilnimmt, zirkulieren wir um das Zentrum der Galaxis mit einer Periode von 180 Millionen Jahren auf einer Bahn mit dem Radius von 24000 Lichtjahren und mit der Geschwindigkeit von 900000 km/h.

Weiterhin nimmt unsere Galaxis, die Bestandteil einer Ansammlung von Galaxien ist, am gegenseitigen Auseinanderstreben dieser Ansammlungen teil (Hubble-Effekt). Diese Expansion geht mit einer Geschwindigkeit vor sich, die mit der Vergrößerung der Entfernung zwischen den Galaxien wächst, und zwar vergrößert sich die Geschwindigkeit des Auseinanderstrebens für jede Million Lichtjahre um 90 bis 100 Tausend Kilometer pro Stunde.

Für die am weitesten entfernten Galaxien ist die Geschwindigkeit des Auseinanderlaufens ungeachtet ihrer riesigen Entfernung von uns (mehr als drei Milliarden Lichtjahre, und das heißt, dass wir sie so beobachten, wie sie in der Epoche der Formierung der Erdkruste waren) noch messbar.
Diese Geschwindigkeit erreicht 100 Millionen Kilometer pro Stunde.

Man muss annehmen, dass die Metagalaxis weitere, bezüglich ihrer Ausdehnung noch grandiosere Bewegungen ausführt. Sie ist bisher noch ungenügend erforscht, doch ihr der Beobachtung zugänglicher Teil stellt ungefähr eine Milliarde Galaxien dar, ähnlich unserer.
Wenn aber die Metagalaxis in eine Hierarchie irgendwelcher höherer kosmischer Systeme eingeht, so führt sie, und folglich auch wir mit ihr, weitere Bewegungen aus, die uns noch weiter forttragen.

Aber wie es dort auch sein mag, können wir so selbstgefällig sein, uns einzubilden, der Raum des Universums sei unbedingt überall so, wie er in dem verhältnismäßig kleinen Teil ist, mit dem wir in der verhältnismäßig verschwindend kurzen Zeitspanne der Existenz der Erdzivilisation in Berührung kommen konnten?

Sind wir berechtigt anzunehmen, dass in solcher Einförmigkeit das Wesen der Einheit der Welt liegt? Wollen wir den Blattläusen gleichen, die sich einbilden, die ganze Welt wäre so, wie die Oberfläche der Grashalme, mit der allein sie vertraut sind?
Aber die Welt ist nicht deshalb einheitlich, weil sie einförmig ist, sondern deshalb, weil sie materiell ist. Die Materie ist jedoch äußerst mannigfaltig in ihrer Struktur, ihren Erscheinungsformen und ihren Gesetzmäßigkeiten. Sie verändert sich ununterbrochen. Es verändern sich ihre Eigenschaften und die Zusammenhänge, welchen sie unterworfen ist, und lediglich bezüglich unserer irdischen Maßstäbe kann man sie als unveränderlich ansehen.[1]

Nach allem bisher Gesagten drängt sich folgende Frage auf: Wenn es keinen Grund gibt, kate-

[1] Auf dem unlängst anlässlich des Kopernikus-Jubiläums stattgefundenen Moskauer Symposium für philosophische Fragen der zeitgenössischen Astronomie berichtete der sowjetische Physiker Professor J. A. Smorodinski über sogenannte "schwarze Löcher". Wie die Relativitätstheorie vorausgesagt hat, schrumpft ein genügend massiver Stern unter der Wirkung der eigenen Schwere grenzenlos zusammen. Die uns bekannten qualitativ verschiedenen Abarten der Materie (Stoff und Strahlung) werden in der Nähe eines solchen Sternes durch seine Gravitation absorbiert. Sie verschwinden für ihn, er wird unsichtbar für uns. Die Raum-Zeit in seinem Innern kontraktiert, er wird zur eindimensionalen Linie. Man nimmt an, dass es etwa 10 bis 100 Millionen solcher "schwarzen Löcher" im beobachtbaren Weltall gibt. Es ist möglich, dass aus "unserem" Raum die Materie in andere Gebiete entrinnt, und dass es ebenfalls "weiße Löcher" gibt, durch welche wiederum die Materie in "unser" Weltall zufließt. Es ist also nicht ausgeschlossen, dass verschiedene dreidimensionale Räume durch eindimensionale Kanäle verbunden sind.

gorisch zu verneinen (ebenso, wie zu behaupten), dass hinter den Grenzen unserer Erfahrung der reale Raum zwei- oder vielleicht eindimensional ist, ist es dann nicht möglich anzunehmen, dass er in der Megawelt oder in einer subatomaren Welt vier- oder allgemein mehrdimensional ist?

Um auf diese Frage stichhaltig antworten zu können, muss man zunächst unbedingt genau verstehen, was eine vierte räumliche Dimension ist. Und das gelingt am leichtesten, wenn man nicht vom realen, sondern vom konzeptionellen Raum ausgeht.

So werden wir auch vorgehen. Wir wenden uns nicht dem materiellen Raum, sondern dem geometrischen, dem mathematischen Raum zu.

4 Übergang zur vierten Dimension

Den dreidimensionalen konzeptionellen Raum werden wir im weiteren der Kürze halber mit R_3 bezeichnen. Wir gelangten vom dreidimensionalen geometrischen Körper auf dem Wege der Extrapolation zu ihm. Ausgehend vom Begriff des R_3 ist für uns nicht schwer, den Begriff des zweidimensionalen (konzeptionellen) Raums R_2 zu bilden.

Als R_2 ist einfach jede beliebige Fläche aufzufassen. Ebenso bildet man auch den Begriff des eindimensionalen (konzeptionellen) Raums R_1, den jede beliebige Linie repräsentiert, und den des nulldimensionalen Raums R_0, repräsentiert durch die Punkte.
Es ist klar, dass man R_2, R_1, R_0 als "Räume" in Analogie zum R_3 bezeichnet.

Unsere Vorstellung über sie wird dadurch erleichtert, dass wir sie in Gedanken durch Weglassen von Dimensionen erhalten, die in unserer Wahrnehmung tatsächlich existieren. Mit anderen Worten, wir haben die Möglichkeit, uns zumindest indirekt auf eine gefühlsmäßige Anschaulichkeit zu stützen.
Anders verhält es sich, wenn wir vom R_3 zum R_4 übergeben wollen, vom dreidimensionalen zum vierdimensionalen konzeptionellen Raum, und allgemein von drei zu vier räumlichen Dimensionen. Denn hier muss man nicht etwas erfassen, sondern etwas hinzudenken. Wobei dieses Etwas, die vierte räumliche Dimension, sich nicht auf irgendwelche Wahrnehmung stützen kann.

Es ist leichter, sich ein Objekt vorzustellen, das gewisse Merkmale nicht mehr besitzt, als ein Objekt, dem neue Merkmale hinzugefügt wurden, die es zusätzlich haben kann. Deshalb haben wir zur Bildung des Begriffes des R_4 nur eine logische Methode zur Verfügung, die Methode der Analogie.

Wenn α irgendeine Erscheinung ist, die Merkmale $p_1, p_2, ..., p_i$ besitzt, zwischen denen die Beziehungen $S_1, S_2, ..., S_i$ (z.B. $S_i(p_5, p_3)$ oder $S_2(p_1, p_4, p_8)$ usw.) bestehen, und wenn β irgendeine andere Erscheinung mit den Merkmalen $q_1, q_2, ..., q_i$ ist, zwischen denen dieselben Beziehungen $S_1, S_2, ..., S_i$ bestehen, so sagen wir bekanntlich, dass die Erscheinungen α und β analog sind.

Eine Analogie ist immer unvollständig. Während wir in unserem Fall nur von einem R_3 ausgehen (diese Behauptung wird im weiteren präzisiert), haben wir eine unendliche Menge von Räumen R_2, R_1 und R_0, die in R_3 unterschiedlich angeordnet sind.
Der Prozess des Übergangs zur vierten Dimension durch Analogiebetrachtungen werden wir schrittweise vollziehen. Beginnen wir mit einer eindimensionalen Figur, einer Strecke AB (Fig. 2).

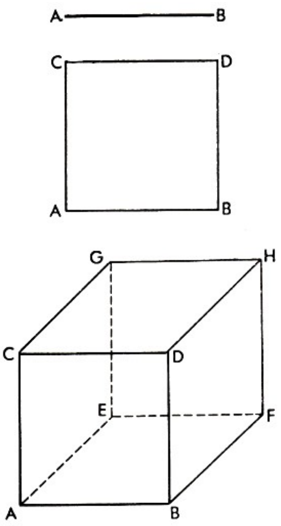


Fig. 2

Zu einer zweidimensionalen Figur, dem Quadrat $ABCD$ gelangen wir, indem wir in den Punkten A und B orientierte Senkrechte zu AB errichten, und zwar so, dass sie untereinander parallel sind und gleiche Orientierung besitzen. Danach tragen wir auf jeder dieser Senkrechten von den Punkten A bzw. B aus die Strecke AB ab und verbinden die Endpunkte C und D durch die neue Strecke CD. Das erhaltene Quadrat hat vier Eckpunkte und vier Seiten.

Von dem Quadrat $ABCD$ zu einer dreidimensionalen Figur, dem Würfel (Kubus) $ABCDEFGH$, gelangen wir wiederum, indem wir in den Punkten A, B, C und D senkrechte Strecken zu $ABCD$ so errichten, dass sie alle gleich orientiert sind und auf ihnen von den Ecken A, B, C und D aus wieder die Strecke AB abtragen.
Indem wir die so erhaltenen Punkte E, F, G und H entsprechend durch Strecken miteinander verbinden, erhalten wir ein neues Quadrat $EFGH$. Der Kubus, der auf diese Weise entsteht, hat folglich 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Seiten.

Da ein Quadrat zweidimensional ist, können wir es auf einem Blatt Papier mit Hilfe einer Zeichnung darstellen. Analog dazu kann man für einen dreidimensionalen Kubus ein dreidimensionales Modell schaffen, z.B. aus Draht, Holz oder Karton. Auf ein zweidimensionales Blatt Papier kann man nur seine Projektion zeichnen.

5 Mobilisierung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Bevor wir den folgenden entscheidenden Schritt von der dritten zur vierten Dimension tun, überzeugen wir uns davon, dass schon der Übergang von der zweiten zur dritten Dimension an unser räumliches Vorstellungsvermögen bedeutende Anforderungen stellt.
Dies zeigen wir an einem einfachen Beispiel, das speziell für diesen Zweck ausgedacht wurde.

In ein Quadrat kann man zwei Diagonalen einzeichnen, d.h. Strecken, die jeweils zwei Eckpunkte des Quadrates miteinander verbinden und keine Seiten des Quadrates sind.
Diese Diagonalen teilen das Quadrat in vier kongruente Teile, die rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke sind.
Das weiß jeder Schüler von der dritten Klasse ab und ist in der Lage, sich das vorzustellen, indem er auf eine Zeichnung schaut oder sogar, ohne sie zu Hilfe zu nehmen (Fig. 3).
Aber gehen wir zum Kubus über. Wir legen in ihn die Diagonalebenen hinein, d.h. solche Ebenen, die nicht Seitenfläche sind, aber durch mindestens drei seiner Ecken hindurchgehen.

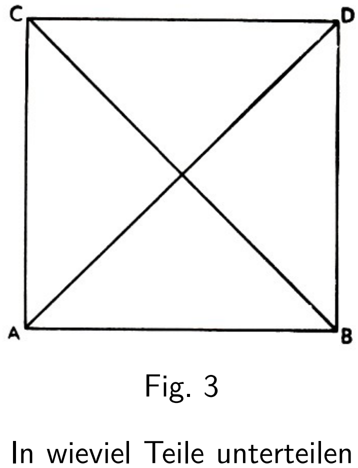


Fig. 3

Wir fragen nun: Wieviel solcher Flächendiagonalen existieren? In wieviel Teile unterteilen sie den Kubus? Was sind das für Teile?

Auf diese Fragen kann auch ein Mathematiker nicht sofort antworten. Tatsächlich haben wir zwei verschiedene diagonale Ebenen. Einmal gibt es diagonale Ebenen erster Art, die durch die Diagonalen von zwei parallelen Seitenflächen gehen. Wir haben 6 solche Ebenen.

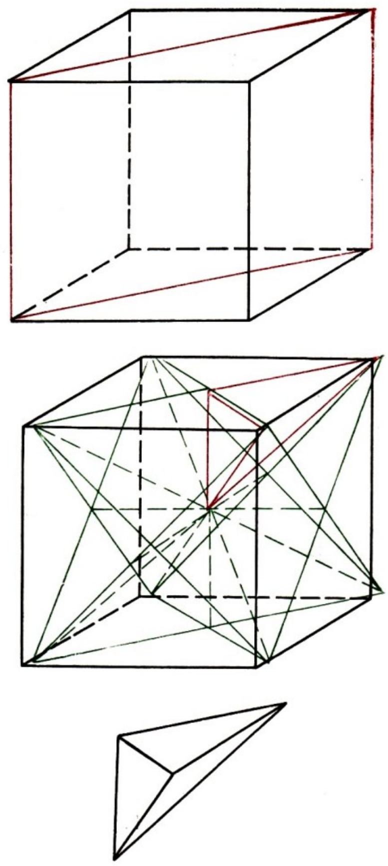


Fig. 4

Sie teilen den Kubus in 24 gleiche Teile, dreieckige Pyramiden (Fig. 4). Die diagonalen Ebenen zweiter Art verlaufen durch die Diagonalen dreier Seitenflächen, die eine gemeinsame Ecke haben.

Solche Ebenen haben wir demzufolge 8. Sie teilen den Kubus in 21 Teile und zwar in ein regelmäßiges Achteck, 8 regelmäßige Tetraeder und 12 gleiche dreieckige Pyramiden (Fig. 5).
Wenn in den Kubus gleichzeitig beide Sorten von Ebenen eingeführt werden, so teilen sie zusammen den Kubus in 96 Teile. Darunter sind 3 Arten dreiflächiger und eine Art vierflächiger Pyramiden, 24 Exemplaren von jeder Art (Fig. 6).
Das ist alles so schlecht zu überschauen, dass wir die Zeichnung nicht überfüllen wollten und nur einen von den 24 Teilen des Kubus darstellten.

Nach dieser Abschweifung gehen wir vom dreidimensionalen Kubus zur vierdimensionalen Figur über. Sie heißt Hyperkubus.

Dabei werden wir einen Weg beschreiten, analog dem, der uns vom zweidimensionalen Quadrat zum dreidimensionalen Kubus führte. Dafür müssen wir in allen Ecken des Kubus $ABCDEFGH$ Senkrechte errichten (Fig. 7), aber nicht nur bezüglich seiner Kanten und nicht nur bezüglich seiner Seitenflächen, sondern auch bezüglich des Kubus selbst.

Das bedeutet, dass die Senkrechte AI, die in der Ecke A errichtet wird, zu allen Strecken senkrecht sein soll, die in diesem Kubus liegen und folglich auch zu den Strecken AB, AC und AE. Das fordern wir, damit alles ähnlich vonstatten geht wie bei den Quadraten. Dort ist die Senkrechte AE, errichtet in der Ecke A des Quadrates $ABCD$, senkrecht zu allen Strecken AB und AC.

Doch im Raum R_3 kann man drei und nur drei gegenseitig senkrechte Strecken (oder Geraden) in einem Punkt konstruieren. Das heißt, die Möglichkeit der Existenz der Strecke AI, der Senkrechten zu den drei Strecken AB, AC und AE, ist ausgeschlossen.
Sie ist eine reine spekulative Annahme, die von uns in Analogie eingeführt wurde und sich nicht auf die geringsten gegebenen sinnlichen Erfahrungen stützt.

Außer dem Punkte A, in welchem die Senkrechte AI unseren Raum zerschneidet, liegen alle anderen Punkte dieser Senkrechten außerhalb des Raums R_3. Die Annahme über die Existenz von vier Senkrechten, die von einem Punkt der Strecken AB, AC, AE und AI ausgehen, ist ausreichend dafür, einen Hyperkubus zu konstruieren.

Weil wir die Ecke A beliebig wählten, kann die Senkrechte zum Kubus auch in seinen übrigen Ecken konstruiert werden, und zwar so, dass sie genauso wie die Senkrechte AI orientiert ist.
Danach tragen wir an den Ecken A, B, C, D, E, F, G und H die Länge AB ab.
Indem man die Enden I, J, K, L, M, N, O und P der Strecken untereinander verbindet,

erhalten wir den neuen Kubus $IJKLMNOP$.

Der Hyperkubus, der auf diese Weise entsteht, hat, wie Ihnen nicht schwerfällt nachzurechnen, 16 Ecken, 32 Kanten, 24 zweidimensionale Seitenflächen und 8 dreidimensionale Hyperflächen-Kuben. Die letzteren bilden seinen Rand.

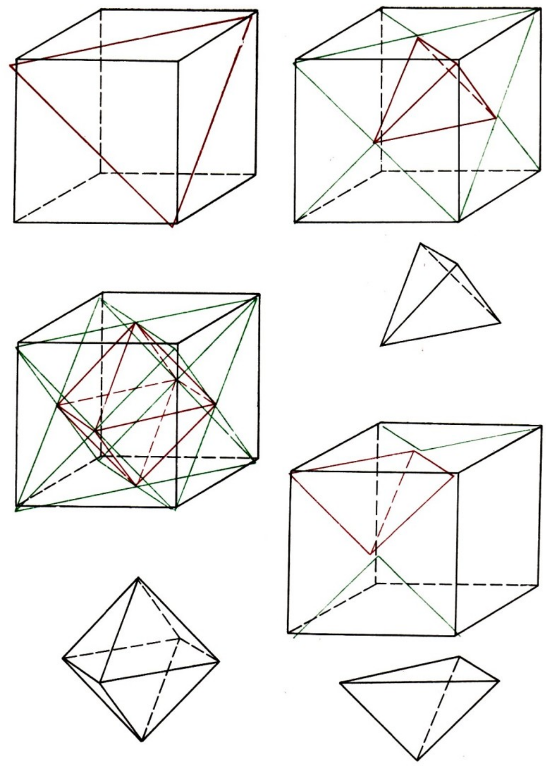


Fig. 5a und b

Weil der Hyperkubus $ABCDEFGHIJKLMNOP$, mit Ausnahme des einen ihn begrenzenden Kubus $ABCDEFGH$, vollkommen außerhalb von R_3 liegt, kann man ihn in diesem Raum nicht darstellen. Doch es ist möglich, ihn in den Raum R_3 zu projizieren und ein dreidimensionales Modell dieser Projektion zu konstruieren (z.B. ein Drahtmodell).

Es ist auch möglich, das Modell auf eine Ebene zu projizieren. Dann erhalten wir eine zweidimensionale Zeichnung, die unseren Hyperkubus abbildet. In der Fig. 7 sind die Teile des Hyperkubus, die außerhalb von R_3 in der vierten Dimension liegen, mit roter Farbe gezeichnet.

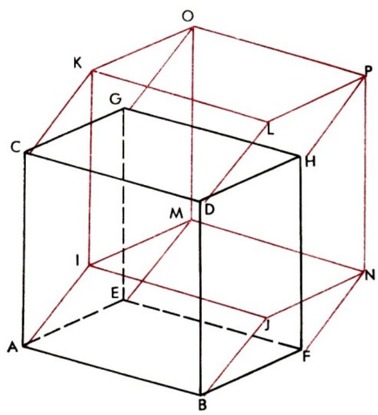


Fig. 7

Wenn wir jetzt annehmen, dass die Maße des Hyperkubus unendlich groß werden, so erhalten wir den Begriff des Raums mit vier Dimensionen, des vierdimensionalen (konzeptionellen)

Raums R_4. Es ist nicht schwer zu verstehen, dass uns, nachdem wir den Weg beschritten haben, durch Analogiebetrachtungen zu drei Dimensionen die vierte hinzuzufügen, nichts aufhalten kann, im Geiste den fünfdimensionalen, sechsdimensionalen usw. Hyperkubus zu konstruieren und damit jedesmal den Begriff des fünfdimensionalen, sechsdimensionalen usw. Raums R_5, R_6 oder allgemein R_n zu bilden, wobei n eine beliebige ganze positive Zahl ist.

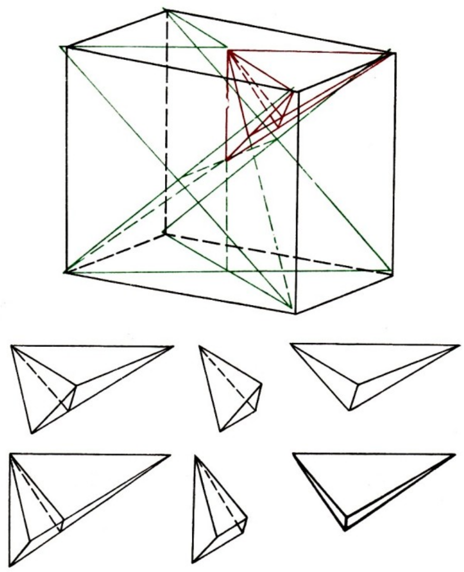


Fig. 6

In diesem Prozess der abstrakten Extrapolation und Verallgemeinerung können wir noch weiter gehen. Wir können den Begriff des Raums R_∞ unendlicher (abzählbarer) Dimension bilden.

6 Hyperkuben und andere Hyperkörper

Wofür ist das alles nötig? Ist es, wie einige denken, einzig und allein nur eine Geistesgymnastik oder hat es auch eine gewisse praktische Bedeutung?
Auf diese Frage antworten wir im weiteren. Doch vorerst sei noch bemerkt, dass man zum Begriff des vierdimensionalen und allgemein mehrdimensionalen Raums nicht nur über Quadrat und Kubus gelangen kann.

Man kann auch mit der Strecke AB beginnen und dann zum Dreieck ABC übergehen, das auch zweidimensionales Simplex genannt wird (Fig. 8).

Nehmen wir an, dass D ein Punkt ist, der nicht im Raum R_2 dieses Simplexes liegt, d.h. nicht in der gleichen Ebene wie das Simplex. Indem man D mit dessen Ecken verbindet, erhält man ein dreidimensionales Simplex, die vierflächige Pyramide $ABCD$.
Analog zum vorhergehenden nehmen wir jetzt an, dass wenigstens ein Punkt E existiert, der nicht zum Raum R_3 des Simplexes $ABCD$ gehört. Verbinden wir ihn mit den Ecken des Simplexes, so erhalten wir das vierdimensionale Simplex $ABCDE$.

Auf der Fig. 8 sind die Teile des Simplexes, die in der vierten Dimension liegen, rot gezeichnet. Wie man sieht, hat das vierdimensionale Simplex 5 Ecken, 10 Kanten, 10 zweidimensionale Grenzflächen und 5 dreidimensionale Hyperflächen, vierflächige Pyramiden, die seine Seiten darstellen.
Es ist offensichtlich, dass man auf diesem Wege auch das fünfdimensionale, sechsdimensionale usw. Simplex erhalten kann.

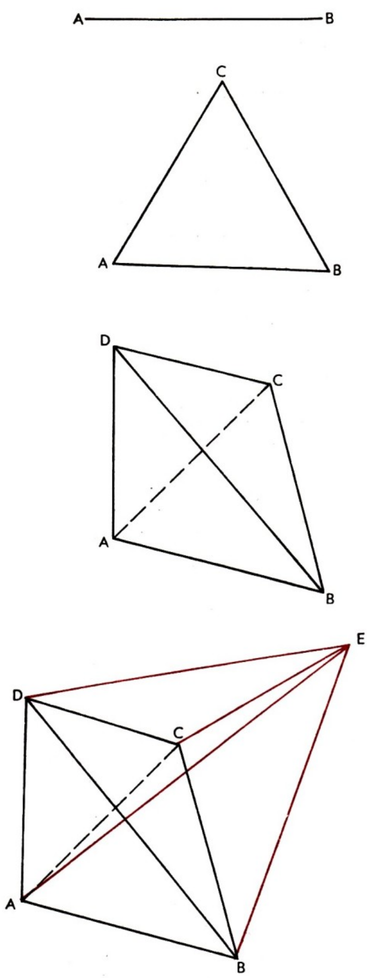


Fig. 8

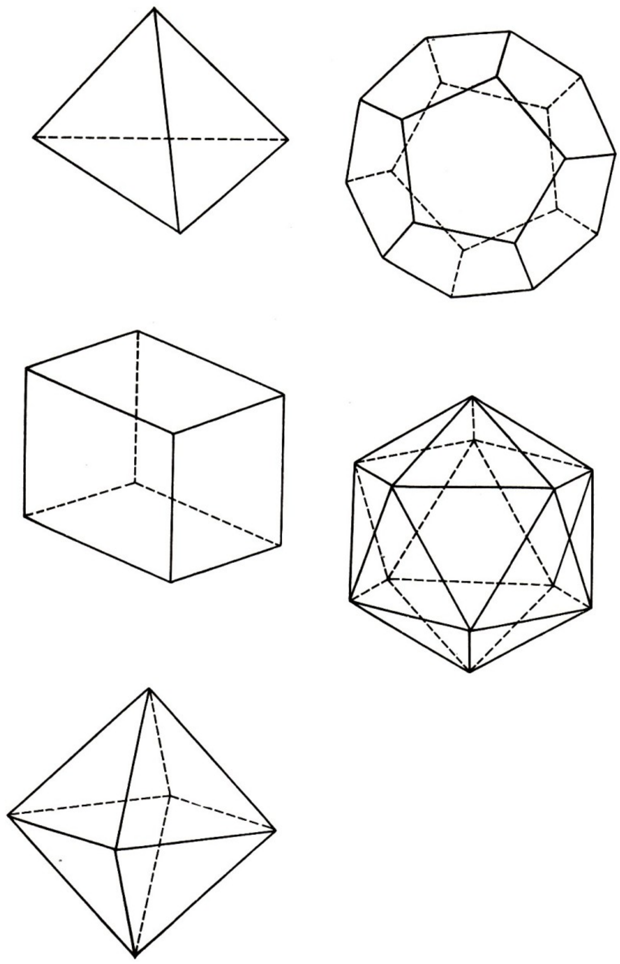


Fig. 9

Diese Methode der Konstruktion vierdimensionaler Hyperkörper hat den Vorteil, dass im Unterschied zur früheren Methode keine Winkelmessungen wie bei der Konstruktion der Senkrechten und auch keine Längenmessung wie beim Abtragen der Strecken notwendig sind.
Das Messen von Abständen und Winkeln fußt auf den sogenannten metrischen Eigenschaften des Raums, auf seiner Metrik. Die Möglichkeit, beim Übergang von der niederen zur höheren Dimension die metrischen Eigenschaften zu umgehen, zeigt, dass die Qualität der Dimension mit fundamentaleren Eigenschaften des Raums verbunden ist, als mit den metrischen. Man nennt sie topologische Eigenschaften, doch darüber werden wir später sprechen.

Aus den vierdimensionalen Simplexen kann man beliebige vierdimensionale Hyperpolyeder konstruieren. Höchst interessante Hyperpolyeder sind diejenigen, die man in Analogie zu den regelmäßigen Vielflachen und Polyedern regelmäßig nennt.
Wir werden nur konvexe Vielflache und Polyeder betrachten, d.h. solche, die jeweils völlig auf einer Seite einer beliebigen ihrer Seitenflächen liegen.

Ein konvexes Vieleck nennt man regelmäßig, wenn alle seine Seiten und alle seine inneren Winkel gleich sind. Bekanntlich existieren im R_2 unendlich viele regelmäßige und konvexe Vielecke.
Jedoch schon der griechische Geometer Euklid zeigte, dass im R_3 nur fünf regelmäßige konvexe Polyeder existieren: Tetraeder, Kubus, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder (Fig. 9).
Man nennt sie auch platonische Körper nach dem griechischen Philosophen Platon, der annahm, dass die Atome der vier Elemente, aus denen die Welt aufgebaut ist, die Form eines

Tetraeders (Feuer), eines Oktaeders (Luft), eines Ikosaeders (Wasser) und eines Kubus (Erde) haben, während die Welt als Ganzes die Form eines Dodekaeders habe.

Bezeichnen wir mit N_0 die Zahl der Ecken, mit N_1 die Zahl der Kanten und mit N_2 die Zahl der Flächen eines regelmäßigen konvexen Polyeders, so erhalten wir folgende Tabelle 1.

Bezeichnung	N_0	N_1	N_2
Tetraeder	4	6	4 regelmäßige Dreiecke
Kubus	8	12	6 Quadrate
Oktaeder	6	12	8 regelmäßige Dreiecke
Dodekaeder	20	30	12 regelmäßige Fünfecke
Ikosaeder	12	30	20 regelmäßige Dreiecke

Wie man leicht anhand dieser Tabelle nachprüfen kann, gilt für ein beliebiges regelmäßiges konvexes Polyeder folgende Formel

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

Jedoch schon Descartes bemerkte und Euler bewies es dann 1752, dass diese Formel, die seinen Namen erhielt, nicht nur für regelmäßige, sondern auch für beliebige konvexe Polyeder im R_3 gültig ist.
Dieser Beweis, wie auch der Beweis dafür, dass genau 5 regelmäßige konvexe Polyeder existieren, ist nicht schwierig. Doch wir lassen hier alle Beweise weg und verweisen den Leser, den die Beweise interessieren, auf die Literatur, die im weiteren genannt wird.

Beim Übergang von der dritten zur vierten Dimension ist die Zahl der regelmäßigen konvexen Polyeder gleich 6.
Wenn wir die Zahl der dreidimensionalen Polyeder mit N_3 bezeichnen, erhalten wir die Tabelle 2. Die Tabelle zeigt, dass im R_4 die Gleichung

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$$

gilt.
In dieser Form ist die Eulersche Gleichung nicht nur für regelmäßige, sondern auch für beliebige Polyeder der vierten Dimension gültig. Die Abbildungen (in der Projektion auf R_3) des Hyperkubus und des vierdimensionalen Simplexes (eines regelmäßigen, wenn alle Dreiecke gleichseitig sind) hatten wir schon angegeben (siehe Fig. 7 und 8).

Abbildungen der verbleibenden vierdimensionalen regelmäßigen Polyeder sind schwer zu überblicken. Wir geben lediglich noch die Abbildung des 16-Hyperpolyeders an (Fig. 10).

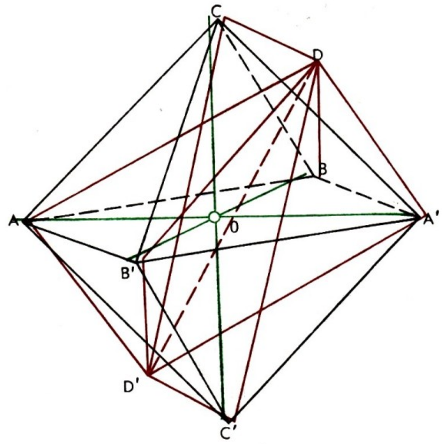


Fig. 10

Seine im R_3 gelegenen Teile sind mit roter Farbe gezeichnet.

Tab. 2

Bezeichnung	N_0	N_1	N_2	N_3
Simplex	5	10	10 regelmäßige Dreiecke	5 Tetraeder
Hyperkubus	16	32	24 Quadrate	8 Kuben
16-Hyperpolyeder	8	24	32 regelmäßige Dreiecke	16 Tetraeder
24-Hyperpolyeder	24	96	96 regelmäßige Dreiecke	24 Oktaeder
120-Hyperpolyeder	600	1200	720 regelmäßige Fünfecke	120 Dodekaeder
600-Hyperpolyeder	120	720	1200 regelmäßige Dreiecke	600 Tetraeder

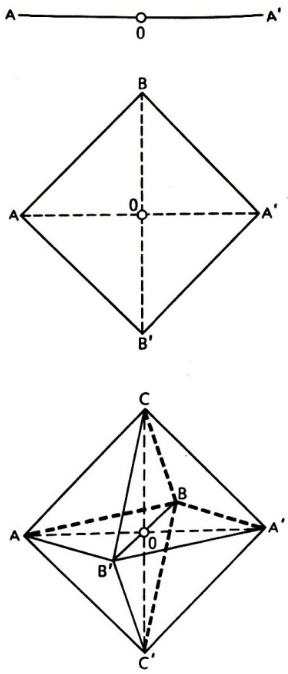


Fig. 11

Ähnlich wie wir zum vierdimensionalen Hypersimplex über die Strecke, das Dreieck und das Tetraeder kamen und zum vierdimensionalen Hyperkubus über die Strecke,das Quadrat und den Kubus, ist es möglich, zu dem 16-Hyperpolyeder auf folgendem Wege zu gelangen.

Als Ausgang nehmen wir die Strecke AA', die der Punkt O in der Mitte teilt (Fig. 11). Danach konstruieren wir die Senkrechte BB' zu O so, dass $OB = OB' = AO = AO'$. Indem wir B und B' verbinden, erhalten wir das Quadrat $ABA'B$.
Weiter konstruieren wir zur Ebene des Quadrats in O die Senkrechte CC' so, dass $OC = OC' = AO$. Indem wir C und C' mit den Ecken des Quadrates verbinden, erhalten wir das Oktaeder.

Wenn wir jetzt zum Oktaeder, d.h. zum R_3 die Senkrechte DD' in O konstruieren, so dass $OD = OD' = AO$ wird, erhalten wir das 16-Hyperpolyeder, das in der Figur 10 dargestellt ist.

Man kann es folglich als vierdimensionales Oktaeder bezeichnen.

Sowohl diesen Prozess als auch den Prozess der Bildung mehrdimensionaler Simplexe und Hyperkuben kann man auf beliebiges n verallgemeinern, wobei diese drei Typen von Hyperpolyedern des Raums R_n für $n > 4$ die einzig möglichen regelmäßigen Hyperpolyeder sind.
Hier zeigt sich von neuem, dass die Analogie beim Übergang von einer Dimension zur anderen manchmal "hinkt".

In Fig. 12, 12 a sind für den fünfdimensionalen Fall das Hypersimplex, der Hyperkubus und das Hyperoktaeder abgebildet. Mit roter Farbe wurden die Teile dieser Körper gezeichnet, die im R_4 liegen, und mit grüner Farbe die, die erst im R_5 liegen.

Die Eulersche Formel für ein beliebiges konvexes Hyperpolyeder im Raume R_n $(n > 2)$ hat folgende Form

$$N_0 - N_1 + N_2 - ... + (-1)^{n-1} N_{n-1} = E$$

wobei E die Eulersche Charakteristik ist, die Null für geradzahliges n und 2 für ungeradzahliges n ist.

Nun kann man im R_4, selbstverständlich nur gedanklich, nicht nur Hyperpolyeder, sondern auch krumme vierdimensionale Körper bilden.

Der einfachste von ihnen ist die vierdimensionale Hyperkugel (Hypersphäre), analog der dreidimensionalen Kugel.

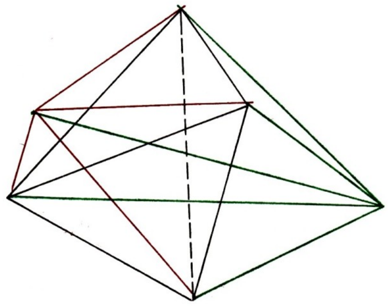
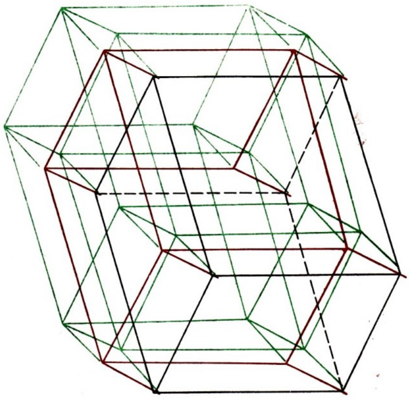


Fig. 12



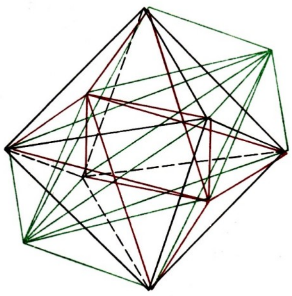


Fig. 12a

Die vierdimensionale Hyperkugel schneidet unseren Raum R_3 in einer dreidimensionalen Kugel. Eine Hyperkugel ist ein vierdimensionaler Körper, der von einer dreidimensionalen sphärischen Hyperfläche begrenzt wird, die den Raum R_3 in der zweidimensionalen Kugeloberfläche schneidet. Wenn wir die vierdimensionale Hyperkugel in den R_3 projizieren, so erhalten wir eine Kugel, und wenn wir die letztere in den R_2 projizieren, bekommen wir einen Kreis, der von einer Kreislinie begrenzt wird.
Deshalb kann man eine einfache Kreislinie als Bild von "Sphären"der dritten, der vierten, ja einer beliebigen Dimension auffassen.

Kehren wir jedoch noch einmal zum vierdimensionalen Hyperkubus zurück. Es ist äußerst schwierig sich vorzustellen, dass er von 8 dreidimensionalen Kuben begrenzt wird oder allgemeiner, dass ein dreidimensionaler Körper die Oberflächen von Hyperkörpern bildet.
Eigentlich kann man es sich gar nicht vorstellen, es widerspricht unserer gesamten herkömmlichen Vorstellung, unserem gesunden Menschenverstand.

Die vierdimensionale Geometrie ist voller ähnlicher Seltsamkeiten, und wir werden uns im weiteren mit einigen von ihnen bekannt machen. Doch vorerst versuchen wir noch, uns an den Begriff des vierdimensionalen Kubus wie überhaupt an die vierte räumliche Dimension besser zu gewöhnen, indem wir noch von anderen Seiten an sie herangehen.

7 Andere „anschauliche“ Zugänge zur vierten Dimension

Wenn man das Papiermodell des Kubus $ABCDEFGH$ an sieben Kanten AE, BF, CG, DH, EF, EG und GH aufschneidet (siehe Fig. 13, in der die eingeschnittenen Kanten rot gezeichnet sind), so kann man ihn zu einer Fläche entfalten, man erhält den Mantel des Kubus.

Aus dem Mantel kann man durch Zusammenkleben der Kanten das Modell des Kubus zurückgewinnen. Analog wird der Mantel eines Hyperkubus (dessen Projektion in Fig. 7 gezeichnet ist) ein dreidimensionales Modell (seine Projektion ist in Fig. 13 abgebildet). Beim Zusammenkleben dieses Mantels des Hyperkubus (was, wie sich von selbst versteht, im $_3$ nicht zu verwirklichen ist) müssen gleichnamige Grenzflächen zusammenfallen.
So muss z.B. auf der Zeichnung der alleroberste Rand $KLOP$ mit dem oberen Rand rechts zusammenfallen, und der unterste $IJMN$ mit dem unteren Rand rechts usw.

Möglicherweise wird der vierdimensionale Hyperkubus fassbarer für unsere Vorstellung, wenn wir das folgende Gedankenexperiment durchführen. Nehmen wir einen gläsernen Kubus und sehen wir von oben auf ihn, indem wir ein Auge schließen.

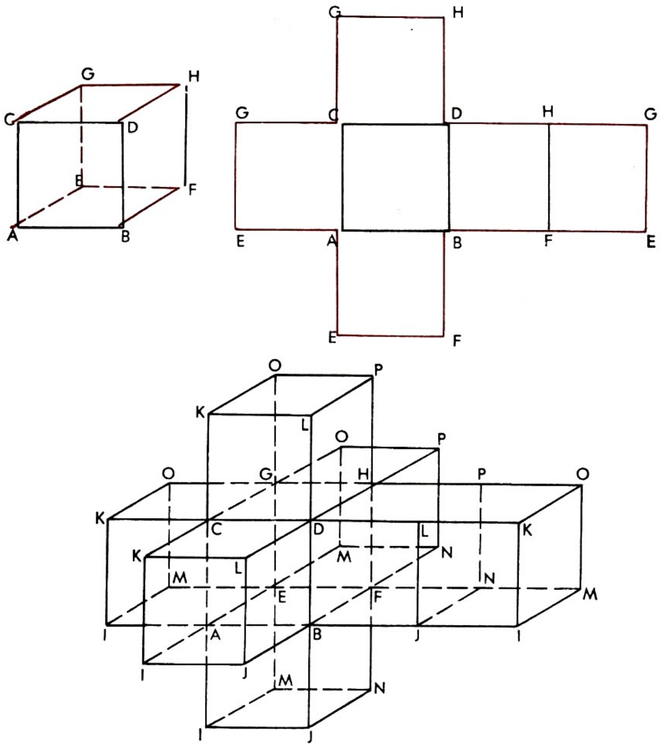


Fig. 13

Dann sehen wir eine zweidimensionale Figur, wie sie in Fig. 14 dargestellt ist.

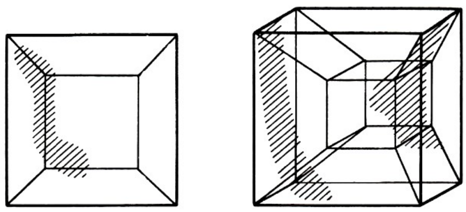


Fig. 14

Wenn wir "von oben mit einem Auge" auf den Hyperkubus blicken könnten, so würden wir einen dreidimensionalen Körper sehen, dessen gläsernes Modell man herstellen kann (die Projektion dieses Modelles ist in Fig. 14 abgebildet).

Wahrscheinlich wird der Übergang zur vierten Dimension am deutlichsten klargemacht, wenn wir folgendes Verfahren benutzen, das sich der deutsche Naturwissenschaftler Helmholtz ausdachte, wenn auch für einen anderen Zweck.
Stellen wir uns vor, dass auf einer Ebene zweidimensionale Wesen leben, sagen wir irgendwelche Insekten, ähnlich den Milben. Sie sollen keine Dicke aufweisen, sondern nur Länge und Breite haben, aber keine Höhe (oder Tiefe). Gleichzeitig sollen sie sehr entwickelte geistige Fähigkeiten besitzen und ihre eigene Wissenschaft und Technik geschaffen haben.

Wie werden diese phantastischen Wesen die Gegenstände ihrer Umwelt erfassen?
Sie werden nur ihre eindimensionalen Konturen sehen, das Bild der Gegenstände auf ihrer eindimensionalen Netzhaut ihrer Augen wird eindimensional. Mit ihrem Tastsinn können sie feststellen, ob die Gegenstände hart oder biegsam sind, können zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern unterscheiden.

Doch auch der Tastsinn gestattet ihnen nur die Wahrnehmung eindimensionaler Konturen. Jedoch dank ihrer Bewegung und, wenn sie zwei Augen besitzen, dank ihres binokularen Tiefensehens werden sie auf dem Wege des Vergleichens, des Denkens befähigt, sich eine Vorstellung der zweidimensionalen Gegenstände zu schaffen. Sie können begreifen, dass ihre Welt zweidimensional ist.

Sie besitzen die Fähigkeit, Gegenstände miteinander zu verbinden und sie auch wieder zu trennen. Kein Gegenstand ihrer Welt besitzt eine durchgehende Öffnung (weil sie, indem sie eine durchgehende Öffnung in einen Gegenstand bohren, ihn in zwei einzelne Teile zersägen), es existieren keine Röhren.

Wenn z.B. ihr Körper zwei untereinander verbundene Öffnungen hätte, so würde er in zwei Teile zerfallen.

Stellen wir uns vor, dass diese zweidimensionale Welt die Eigenschaft hätte, Lichtstrahlen zu reflektieren, die von außen auf sie fallen, und wir, die Lebewesen der dreidimensionalen Welt könnten sie sehen. In diesem Falle würden wir alles sehen, was sich innerhalb eines beliebigen geschlossenen zweidimensionalen Behälters befindet, eines Kastens, eines Gefäßes oder einer Behausung, ja selbst das Innere der Körper dieser Wesen.

Und wenn wir außerdem in unserer dreidimensionalen Welt zweidimensionale Gegenstände ergreifen könnten, so könnten wir einen Gegenstand ergreifen, der sich innerhalb eines zweidimensionalen Behälters befindet. Dafür brauchten wir nicht die Wände dieser Behälter zu durchdringen. Es würde ausreichen, den Gegenstand über die zweidimensionale Welt zu heben (oder ihn unter sie zu senken) und ihn danach wieder außerhalb der Wände in die zweidimensionale Welt abzusetzen.

Vom Gesichtspunkt unserer zweidimensionalen Wesen wäre ein unerklärliches Wunder geschehen, ein Gegenstand war plötzlich verschwunden und an einer anderen Stelle ebenso plötzlich wieder erschienen, etwas völlig Unerklärliches für ihr Vorstellungsvermögen.

8 Wir phantasieren weiter

Da wir nun einmal beim Phantasieren sind, setzen wir unsere Erfindungen fort und nehmen an, wir könnten mit diesen zweidimensionalen Wesen Kontakt aufnehmen.
Wenn sie auch nicht fähig wären, uns, wie überhaupt die dreidimensionale Welt, zu sehen, so könnten sie uns vielleicht hören und unsere Sprache verstehen. Hätten wir dann nicht doch vielleicht eine Möglichkeit, ihnen zu erklären, was die dritte Dimension ist?

Selbstverständlich, ja. Als erstes würden wir ihnen erzählen, wie man von der eindimensionalen Strecke AB zum zweidimensionalen Quadrat $ABCD$ übergeben kann, was ihnen völlig verständlich wäre, und dann würden wir ihnen vorschlagen, sich die Existenz einer dritten Strecke AE im Punkt A vorzustellen, senkrecht sowohl zu AB als auch zu AC (siehe Fig. 2), was für sie zwar nicht anschaulich vorstellbar wäre, was sie aber mit ihrem abstrakten Denken durch Analogiebetrachtungen verstehen und begreifen könnten.

Zweitens könnten wir ihnen vorschlagen sich vorzustellen, dass auf einer Geraden eindimensionale Wesen existieren, ähnlich den Würmern, mit der Eigenschaft, dass sie nur eine Länge und keine Breite und Höhe besitzen, dabei aber äußerst entwickelt sind, vernunftbegabt, die sich eine eindimensionale Wissenschaft geschaffen haben und in der Lage sind, Längen zu messen.

Früher oder später würden diese Wesen bemerken, dass zwischen den Gegenständen ihrer eindimensionalen Welt zwei Sorten besonderer Beziehungen bestehen.

Die einen Gegenstände, wie z.B. X, Y (Fig. 15), sind untereinander gleich, sie können, wenn auch nur gedanklich, durch eine Verschiebung in ihrer Welt (längs der Geraden R_1) zur Deckung gebracht werden.
Andere, wie z.B. X und Z, obwohl sie von gleicher Größe sind, können durch Verschiebung im R_1, und sei es nur gedanklich, nicht zur Deckung gebracht werden, sie sind gegenseitig symmetrisch.

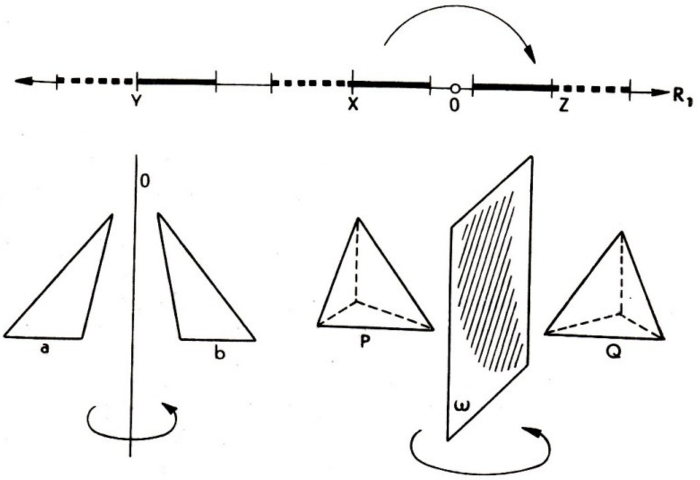


Fig. 15

"Aber Ihnen, zweidimensionale Wesen"- so würden wir sagen - "fällt es nicht schwer zu verstehen, dass sich X und Z lediglich durch die Lage unterscheiden und dass man, wenn man aus der eindimensionalen Welt heraus in ihre zweidimensionale Welt geht, durch Drehung um den Punkt O X mit Z zur Deckung bringen kann.

Bei Ihnen in der zweidimensionalen Welt existieren aber auch symmetrische, aus gleichen Teilen zusammengesetzte Figuren, die durch keinerlei Bewegung zur Deckung gebracht werden können. Solche sind z.B. die Dreiecke a und b in Fig. 15.

Aber wenn man aus der zweidimensionalen Welt heraus in die dreidimensionale Welt geht, so kann man durch Drehung des Dreiecks a um die Achse O dieses mit dem Dreieck b zur Deckung bringen. Für uns, die Lebewesen des R_3, unterscheiden sich solche Dreiecke wie a und b nur durch ihre Lage relativ zu uns."

Es ist schwierig zu sagen, ob diese Überlegung die zweidimensionalen Wesen von der Möglichkeit der Existenz der dreidimensionalen Welt überzeugen könnte. Doch auf alle Fälle wäre es für sie unvergleichlich leichter sich vorzustellen, dass sie existiert, als eindimensionale Wesen von der Möglichkeit der Existenz der zweidimensionalen Welt zu überzeugen. In der Tat fehlt den eindimensionalen Wesen die Vorstellung der Senkrechten und allgemein der Vielheit der räumlichen Dimension!

Noch eine Bemerkung zu dieser äußerst seltsamen eindimensionalen Welt. Stellen wir uns vor, dass in ihr nichts weiter als ihre phantastischen Lebewesen existieren, dass sich dort kein einziger anderer Gegenstand befindet. Selbst in diesem Falle ist ihre Bewegungsfreiheit sehr eingeschränkt, wenn auch nicht durch solche Grenzen und Verbote, wie wir dreidimensionalen Wesen sie uns selbst schufen.

Jedes von diesen eindimensionalen Lebewesen kann sich nicht weiter als bis zum nächsten

Nachbarn nach links oder rechts bewegen, wenn nicht ihre gegenseitige Durchdringlichkeit vorausgesetzt wird. Ein solches Wesen wird somit durch den Tastsinn und das Auge jeden von seinen beiden Nachbarn lediglich als Punkt wahrnehmen, als nulldimensionales Wesen. Möglicherweise nimmt es deshalb an, als einziges auf der ganzen Welt eindimensional zu sein, ein "höheres Wesen"zu sein, sozusagen ein "Überwurm".

Aber wenn seine Nachbarn behaupten auch eindimensional zu sein (sagen wir, indem sie ihre Gedanken mittels wörtlicher Rede übermitteln), vertraut es ihnen wahrscheinlich nicht. Denn auch wir können einem anderen nicht ins Herz blicken.

Es scheint, dass diese Gedanken aus dem Gebiet der "gesellschaftlichen" und "moralischen" Beziehungen der eindimensionalen Wesen nicht ganz unnütz für uns sind.

Sie zeigen, dass es unmöglich ist, die Zivilisation - die Kenntnis der Geometrie, der Wissenschaften allgemein, einiger Sprachen, Beherrschung der Technik, aber auch die Beschäftigung mit der Kunst - mit der wahren Kultur zu identifizieren, die wir Menschen Humanismus oder Menschlichkeit nennen.
Ganz allgemein kann man die wahre Kultur für jede Art vernunftbegabter Wesen, etwa auch für hypothetische Bewohner des Andromedanebels, folgendermaßen definieren:

Die Einsicht des Individuums, dass es für alles, was es hat und erreichen kann, nicht so sehr sich selbst verpflichtet ist, als vielmehr dem ganzen großen Kollektiv seines Geschlechts (und nicht nur dem Stamm, der Nation oder der Rasse) und sein Verhalten in Übereinstimmung mit dieser Einsicht.

Wir wollen noch bemerken, dass dieser Unterschied zwischen Zivilisation und Kultur, welcher sich schon wie eine Drohung unseren "Überwürmern" andeutete, im großen Maßstab durch die Faschisten demonstriert wurde, wie auch durch die amerikanischen Soldateska in Vietnam und überhaupt durch jede Aggression.

9 „Wunderdinge“ des Vierdimensionalen

Nachdem wir uns in die geistige Welt dieser Bewohner von Räumen mit niedrigerer Dimension als der unseren eingelebt haben, fällt es leichter uns vorzustellen, wie die vierdimensionalen Bewohner des R_4, unseren R_3 wahrnehmen würden, natürlich nur dann, wenn der R_4, mehr wäre als nur eine Abstraktion.

Zunächst würde die Netzhaut ihrer Augen dreidimensional sein, und die Bilder der vierdimensionalen Gegenstände würden sie dreidimensional wahrnehmen. Somit würden sie alles sehen, was sich innerhalb einer geschlossenen dreidimensionalen Oberfläche befindet, und sie könnten, ohne durch die Oberfläche hindurchzudringen und ohne sie zu zerstören, von dort einen beliebigen Gegenstand fortschaffen, etwa Geld oder Dokumente aus einem hermetisch verschlossenen Safe nehmen, den Inhalt einer verkorkten Flasche austrinken, das Herz eines Menschen, sogar ohne den Brustkasten zu berühren, verpflanzen usw.

Ferner würden sich dreidimensionale Körper, wie z.B. die dreiflächigen Prismen P und Q (siehe Fig. 15), von welchem eins das Spiegelbild des anderen ist und welche im R_3 keine Bewegung zur Deckung bringt, auch nicht gedanklich, für diese vierdimensionalen Wesen nur durch ihre relative Lage unterscheiden.
Sie könnten die Prismen P und Q zur Deckung bringen, indem P um die Symmetrieebene ω gedreht wird.

Im R_3 ist diese Drehung um die Ebene nicht möglich, und wir sind nicht in der Lage, sie anschaulich darzustellen.

Doch das sind noch längst nicht alle "Seltsamkeiten" der vierten Dimension. Wie wir schon wissen, können wir in einem beliebigen Punkt O des Raums R_4 ein Quadrupel Geraden x, y, z, u einführen, von welchen jede senkrecht zu den drei übrigen ist (man kann in O eine unendliche Menge solcher Vierbeine erzeugen).
Folglich haben wir hier sechs Flächen, und zwar xy, xz, xu, yz, yu und zu, welche senkrecht aufeinander stehen (es ist möglich, in O eine unendliche Menge solcher Sechsbeine zu konstruieren).

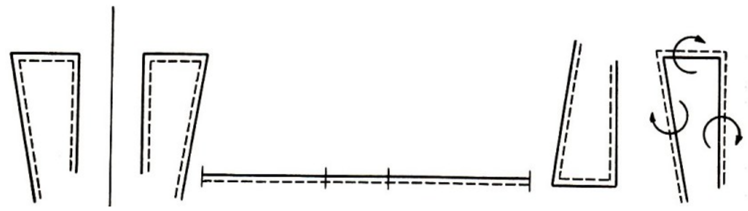


Fig. 16

Dabei schneiden sich solche Ebenen, wie z.B. xy und xz, in der Geraden x, während sich solche Ebenen wie xy und zu nur in einem Punkt schneiden, nämlich im Punkte O.
Im allgemeinen können entweder zwei Ebenen des R_4 zusammenfallen, sich in einer Geraden schneiden, sich in einem Punkt schneiden, oder sich überhaupt nicht schneiden - dann sind sie parallel.

"Wunderlich"erscheint auch, dass unser Raum zwei Teile des Hyperraums R_4 voneinander trennt. Weiter kann man im $R.3$ z.B. einen Gummiring umwenden, ohne ihn zu zerreißen. Ähnlich, und ist das nicht erstaunlich, kann man im R_4 ohne Riss eine biegsame kugelförmige Oberfläche umwenden!

Jedoch durch ein ähnliches Umwenden "nach links", entgegen der irrtümlichen, in der populären Literatur ziemlich verbreiteten Meinung (dabei beging sogar der bekannte Mathematiker Schubert (1758-1825) einen Fehler), kann man die Figuren nicht kongruent machen, die im R_3 spiegelsymmetrisch sind, solche wie z.B. die Prismen P und Q in Fig. 15 oder wie der rechte und linke Handschuh.
Im R_2 verwandelt das Umwenden eine Figur auch nicht in eine symmetrische, wie das in Fig. 16 zu sehen ist, wo die Vorderseite der Figur mit durchgehender Linie gezeichnet ist und die Kehrseite gestrichelt. In beiden Fällen, wie im R_2 so auch im R_3, gehen symmetrische Figuren nur durch Drehung ineinander über.

Im R_2 existieren im allgemeinen keine Knoten, weil dort "unter" oder "über" nicht bekannt ist. Im R_3 kann ein Knoten, dessen beide Enden befestigt sind, nicht aufgelöst werden (Fig. 17).

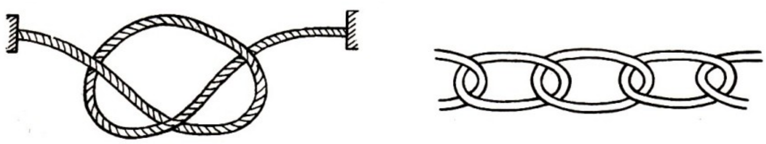


Fig. 17

Doch diesen Knoten kann man lösen, ohne die Enden der Leine zu bewegen, wenn man von der dritten zur vierten Dimension übergeht. Auf die gleiche Art kann man durch Übergang zur vierten Dimension die Glieder einer Kette trennen, ohne sie zu zerreißen oder zu zerhauen.

In der vierdimensionalen Geometrie ist es wie auch in der zweidimensionalen und dreidimensionalen möglich, komplizierte Figuren zu konstruieren, Theoreme herzuleiten und zu beweisen, Entfernungen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Hypervolumen auszurechnen und auf sie die Algebra und die Differential- und Integralrechnung anzuwenden.

So ist z.B. das Hypervolumen des vierdimensionalen Hyperkubus mit der Seite a gleich a^4. Das Hypervolumen der vierdimensionalen Hyperkugel mit dem Radius r ist gleich $1/2\pi^2r^4$ (während der Inhalt der Kugel desselben Radius gleich $4/3\pi r^3$ ist).
Aber das Volumen der Hyperoberfläche dieser Hyperkugel ist gleich $2\pi^2r^3$ (während die Kugeloberfläche gleich $4\pi r^2$ ist).

Es wurde auch die darstellende Geometrie für den R_4 ausgearbeitet. Entwickelt wurde ebenfalls eine Mechanik der vierten räumlichen Dimension.
Wir wollen nur noch erwähnen, dass ein vierdimensionaler Körper für das stabile Gleichgewicht nicht nur drei, wie im R_3, sondern vier Stützpunkte benötigt. Und was die Freiheitsgrade betrifft, so haben wir im Unterschied zum R_3, in dem es 6 Freiheitsgrade gibt (3 Translationen und 3 Drehungen um drei Achsen), im R_4 10 Freiheitsgrade (4 Translationen und 6 Drehungen um 6 Ebenen).

10 Nichteuklidische Räume

Bis jetzt betrachteten wir den vierdimensionalen Raum als Verallgemeinerung des dreidimensionalen euklidischen Raums.
Den zweidimensionalen Raum nahmen wir auch aus dem euklidischen Raum, und deshalb erwies er sich als die uns bekannte Ebene. Ebenso bildeten wir auch den R_1, der deshalb eine Gerade war.

Wie wir bemerkten, ist im Unterschied zum R_1 und R_2, von denen im R_3 eine unendliche Menge existiert, der R_3 eindeutig in dem Sinne, als er die Widerspiegelung des real existierenden materiellen Raums ist, der uns aus der Erfahrung bekannt ist.
Um diesen Satz zu präzisieren, müssen wir sagen, dass der R_3 nur in dem bezeichneten Sinne eindeutig ist. Nämlich erstens, wenn wir die Existenz des R_4 zulassen, so haben wir in ihm eine unendliche Menge von eben solchen euklidischen Räumen R_3 wie dem unsrigen.

Und zweitens entdeckten am Anfang des vergangenen Jahrhunderts der russische Mathematiker Lobatschewski (1826) und der ungarische Mathematiker Bolyai (1832) unabhängig voneinander (der deutsche Mathematiker Gauß machte diese Entdeckung schon früher, veröffentlichte sie aber nicht), dass es möglich ist, eine nichteuklidische Geometrie aufzubauen.

Von ihr gibt es unendlich viele Spielarten. Davon ausgehend kann man mit der uns schon bekannten Analogiemethode zu nichteuklidischen Räumen R_4, aber auch R_2 und R_1 übergehen.

Da es uns hier nicht möglich ist, auf Details einzugehen, weisen wir nur darauf hin, dass sich der eindimensionale Raum R_1 uns nicht unbedingt als unendliche Gerade darzustellen braucht, sondern beispielsweise auch als Kreislinie.
Wenn der zweidimensionale euklidische Raum, die Ebene, verbogen wird, so können sich zwei Punkte, welche vorher weit voneinander entfernt waren, annähern.[2]

[2] Jedoch ist im allgemeinen der Zusammenhang zwischen der Nichteuklidizität und einer Verbiegung nicht so einfach. So herrscht auf der Oberfläche eines Zylinders oder Kegels ungeachtet der Verbiegung die euklidische Geometrie. (Unter Verwendung des Krümmungsmaßes, das für Riemannsche Räume - zu denen

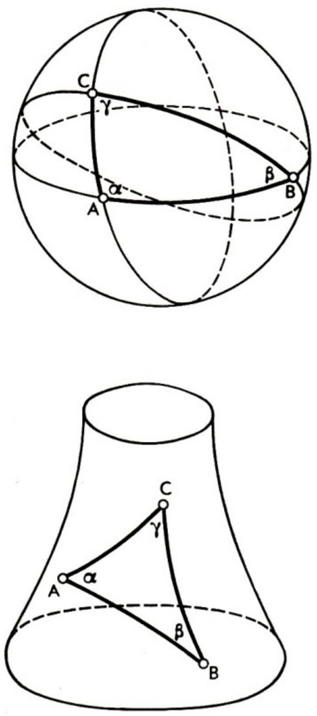


Fig. 18

Auf der Kugeloberfläche, die eine der Spielarten des nichteuklidischen Raums R_2 ist, ist die kürzeste Linie, die zwei Punkte A und B miteinander verbindet (Fig. 18) (man nennt solche Linien auf einer Fläche geodätische) nicht eine Gerade wie in der Ebene, sondern ein Teil des Großkreises. Im Dreieck ABC, dessen Seiten geodätische Linien sind, ist die Summe der inneren Winkel α, β, γ größer als zwei rechte Winkel und nicht gleich zwei rechten Winkeln wie in der Ebene. Den Unterschied zwischen dieser Summe $\alpha + \beta + \gamma$ und zwei rechten Winkeln π nennt man sphärischen Überschuss oder Exzess ε.
Dieser Überschuss ist direkt proportional der Fläche S des Dreiecks ABC und umgekehrt proportional dem Quadrat r^2 des Radius r der Kugel, $\varepsilon = \frac{S}{r^2}$.

In diesem nichteuklidischen Raum R_2, den man sphärisch oder elliptisch nennt, kann man durch einen Punkt, der außerhalb einer gegebenen geodätischen Linie liegt, keine geodätische Linie ziehen, die die gegebene geodätische Linie nicht schneidet.

In einer anderen Variante des nichteuklidischen Raums R_2, auf der Oberfläche der sogenannten Pseudosphäre, die an einen Flaschenhals erinnert (siehe Fig. 18), ist die Summe der inneren Winkel des Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien sind, $\alpha + \beta + \gamma$, kleiner als zwei rechte Winkel π.
Den Unterschied $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ nennt man Defekt δ. Auch dieser Defekt ist direkt proportional der Fläche S des Dreiecks ABC und umgekehrt proportional dem Quadrat r^2 des Radius der Krümmung r der Pseudosphäre (ihre Krümmung ist negativ).

In diesem nichteuklidischen Raum R_2, den man hyperbolisch nennt, kann man durch einen Punkt, der außerhalb einer geodätischen Linie liegt, eine unendliche Menge geodätischer Linien hindurchführen, die die gegebene geodätische Linie nicht schneiden.

Auf Wunsch kann man auch nichteuklidische Räume R_2 mit noch komplizierteren Eigenschaften bilden. Z.B. bekommen wir das Modell eines Teiles eines solchen Raums, wenn wir ein langes rechtwinkliges Band $ABCD$ ausschneiden, und dann seine schmalen Seiten so zusammenkleben, dass der Punkt A mit D und der Punkt B mit C zusammenfällt (Fig. 19).
Diese gekrümmte Oberfläche, welche man nach dem deutschen Geometer Möbius Möbiussches Band nennt, besitzt im Unterschied zur Ebene, zur Oberfläche einer Kugel, eines Zylinders, eines Kegels oder allgemein einer "gewöhnlichen" Oberfläche, keine zwei Seiten, eine Vorder- und Hinterseite, sondern nur eine.

Sie ist im Raum nicht orientiert. Man kann sie nicht mit zwei Farben bemalen, mit einer oben und mit einer unten. Auf dem Möbiusschen Band existieren geschlossene, sich nichtschneidende Kurven, z.B. zerteilt die geschlossene Kurve K die Oberfläche nicht in zwei Gebiete - ein inneres und ein äußeres - was in der Ebene der Fall wäre.

die im Text beschriebenen speziellen nicht- euklidischen Räume gehören - in allen Punkten zu jeder Richtung berechnet werden kann, lässt sich der genannte Zusammenhang einfach beschreiben. Die Krümmung, die für die euklidische Geometrie verschwindet, bleibt bei Verbiegungen ungeändert. Eine Verbiegung einer Fläche ist eine stetige Abbildung der Fläche, bei der die Länge beliebiger Kurvenstücke nicht geändert wird. A.d.R.)

Dort kann man vom Punkt M, der auf einer Seite der geschlossenen Kurve liegt, nicht zu dem Punkt N gelangen, der auf ihrer anderen Seite liegt, ohne diese Kurve r zu schneiden (siehe Fig. 19).

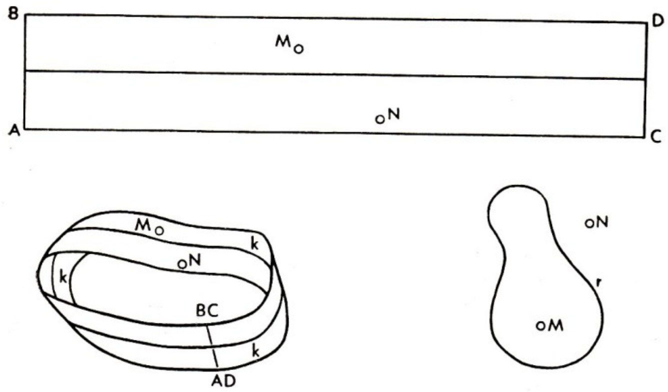


Fig. 19

Vom nichteuklidischen Raum R_2 kann man zu den nichteuklidischen Räumen R_3, R_4 usw. übergehen, ähnlich wie beim Übergang vom euklidischen Raum R_2 zu R_3, R_4 usw., d.h. auf anschaulich-geometrischem Wege.
Jedoch gibt es auch noch andere Wege der Bildung sowohl euklidischer als auch nichteuklidischer mehrdimensionaler Räume.

11 Weitere Wege der Bildung mehrdimensionaler Räume

Zunächst ist hier der analytische Weg zu nennen, dessen Wesen in folgendem besteht. Um den Aufenthaltsort P (Fig. 20) eines Schiffes zu bestimmen, das sich in einem Kanal bewegt, ist eine Zahlenangabe ausreichend (eine Koordinate):
Die Anzahl der Kilometer, die den Abstand des Schiffes vom Ort O, von seinem Ausgangspunkt, aus- drücken. Doch wenn das Schiff auf dem Meer schwimmt, so ist zur Bestimmung seines Aufenthaltsortes die Kenntnis zweier Zahlen nötig, zweier Koordinaten x und y, z.B. die geographische Länge und die geographische Breite.
Schließlich kommt, wenn die Rede über den Aufenthaltsort eines Flugzeuges geht, zu den zwei Koordinaten noch eine dritte z dazu, seine Höhe über dem Meeresspiegel.

Allgemein gesprochen ist bei gewähltem Maßstab, Ursprung O und drei gegenseitig senkrecht stehenden Koordinatenachsen X, Y, Z, die Lage des Punktes P durch die drei (reellen) Zahlen x, y, z im R_3 bestimmt.
Wenn wir den Koordinaten x, y, z alle möglichen (reellen) Werte geben, so erhalten wir alle Punkte P des Raums R_3.

Wenn allerdings die sich verändernden Koordinaten x, y, z nur gewisse Werte annehmen, etwa so, dass zwischen ihnen bestimmte Beziehungen erhalten bleiben, die durch Gleichungen ausgedrückt werden, so werden die ihnen entsprechenden Punkte P nicht den ganzen Raum R_3 ausfüllen.
Im Falle einer Gleichung, die x, y, z untereinander verbindet, werden die Punkte P eine Fläche ausfüllen, deren Form, Lage und, wenn sie geschlossen ist, auch deren Größe vom Charakter dieser Gleichung abhängen. Bei zwei Gleichungen, die nicht voneinander abhängen und einander nicht widersprechen, erhalten wir eine Kurve, deren Form, Lage und Länge, sofern sie geschlossen ist, wiederum vom Charakter dieser Gleichung abhängen.

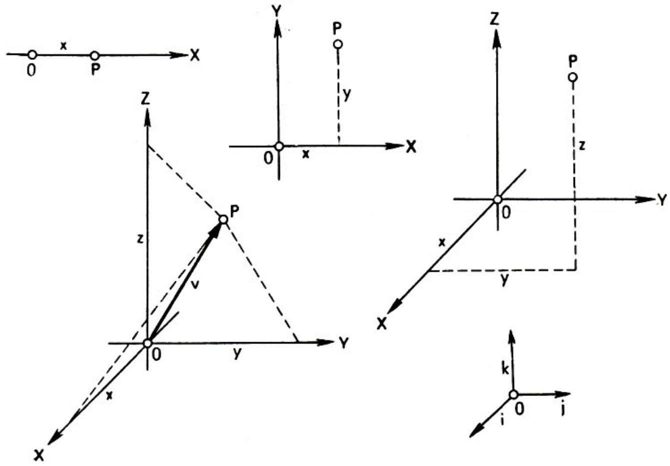


Fig. 20

Das eben kurz dargelegte Prinzip ist das Prinzip der analytischen Geometrie. Wenn wir es verallgemeinern, indem wir statt drei Zahlen vier (reelle) Zahlen nehmen, die Koordinaten x, y, z, u, so können wir sagen, dass sie die Lage irgendeines Punktes P im vierdimensionalen Raum R_4 bestimmen.

Indem man diese Analogiebetrachtung fortführt, kann man die gesamte vierdimensionale analytische Geometrie entwickeln. Wir werden wenigstens ein konkretes Beispiel anführen.
In der analytischen Geometrie der Ebene ist $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung des Kreises mit dem Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems und dem Radius r (das bedeutet, dass die Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, auf dem Kreis liegen).

In der analytischen Geometrie stellt im Raum R_3 die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ eine analog gelegene Oberfläche dar. Schließlich ist $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2$ die Gleichung einer dreidimensionalen Sphäre im R_4 die eine vierdimensionale Hyperkugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und dem Radius r begrenzt.

Führt man mit den Gleichungen verschiedene Umformungen durch, so ist es möglich, ohne zur geometrischen Anschaulichkeit überzugehen, verschiedene vierdimensionale Aufgaben zu lösen und dabei geometrische Formen zu erhalten, die reicher sind als in der dreidimensionalen Geometrie.

Eine weitere Möglichkeit des Studiums des vierdimensionalen Raums bietet die Vektoralgebra. Bekanntlich unterscheidet man in der Mathematik zwei Arten von Größen:
Skalare und Vektoren. Skalare sind Größen, die durch eine (reelle) Zahl beschrieben werden, wie z.B. Länge, Strecke, Flächeninhalt der Figuren, Zeit, Masse, Dichte, Temperatur usw. Vektoren haben nicht nur eine Größe, sondern auch eine Richtung im Raum, wie z.B. die Geschwindigkeit oder die Kraft.

Ein beliebiger Vektor $\vec{v}$ kann als eine gerichtete Strecke OP (von O zu P) dargestellt werden. Im R_3 hat er drei Komponenten, seine drei Projektionen $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ auf die drei gegenseitig senkrecht stehenden Achsen X, Y, Z (Fig. 20).
Den Vektor $\vec{x}$ kann man als das Produkt des Skalars x mit dem Vektor $\vec{i}$ auffassen (dessen Länge 1 ist und der die Richtung der X-Achse besitzt). d.h. $\vec{x} = x\vec{i}$ und analog $\vec{y} = y\vec{j}$, $\vec{z} = z\vec{k}$, woraus

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

folgt.
Vektoren kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren, d.h. mit ihnen die algebraischen

Grundrechenarten durchführen. Diese Grundrechenarten erinnern an die Grundrechenarten der gewöhnlichen Zahlen, der Skalare, nur besitzen sie einige Eigenarten.
Mit Hilfe der Vektoralgebra kann man dreidimensionale geometrische Aufgabe lösen (und setzt man $z = 0$ selbstverständlich auch zweidimensionale). Die Vektoralgebra wird in der Mechanik, in der Physik und in anderen Gebieten angewandt.

Wenn wir jetzt die Existenz eines vierten Einheitsvektors $\vec{l}$ senkrecht zu allen drei Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ annehmen (wobei nicht gefordert ist, dass wir damit anschauliche Vorstellungen verbinden, was ja auch nicht möglich ist; die formalen Regeln der Grundrechenarten mit Vektoren sind ausreichend), so erhalten wir die Vektoralgebra im R_4 mit analogen Grundrechenarten zum R_3 und mit der Möglichkeit, Aufgaben der vierdimensionalen Geometrie zu lösen.

Eine weitere Verallgemeinerung der Vektorrechnung ist die Tensorrechnung. Ein einfaches Beispiel eines Tensors, einer Größe, die komplizierter als ein Vektor ist, ist (im R_3) der Spannungstensor, der die Spannung eines Zustandes in einem gegebenen Punkt eines festen, elastischen Körpers charakterisiert.

Er hat neun Komponenten bezüglich des Koordinatensystems x, y, z. Der Begründer der Tensorrechnung (1888) war der italienische Mathematiker Ricci-Curbastro.
Diesen Kalkül benutzt man in der Mechanik und theoretischen Physik.

Mit der Vektorrechnung sind auch die Quaternionen verbunden. Das sind Zahlen, die vier Einheiten $1, i, j, k$ besitzen, wobei $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ gilt.
Die Quaternionen führte der irische Mathematiker und Astronom Hamilton ein. Sie sind die Verallgemeinerung der komplexen Zahlen, die zwei Einheiten besitzen, 1 und $i = \sqrt{-1}$, und stellen einen Spezialfall der hyperkomplexen Zahlen mit n oder einer unendlichen Anzahl Einheiten dar.

12 Axiomatik

Die dem Charakter der Mathematik am besten entsprechende Methode des Aufbaus der vierdimensionalen Geometrie ist die Methode der Axiomatik.
Die Gegenstände der Geometrie, z.B. Punkte, Geraden, Ebenen, Körper, sind keine realen Sachen (Staubkörper, Nägel, Blätter Papier, Äpfel), sondern Idealisierungen von ihnen. Deshalb sind auch die grundlegenden Sätze, Axiome, die ein endliches System von Ausdrücken bilden, nicht völlig "offensichtlich", wie man irrtümlich Jahrtausende lang annahm.

So ist z.B. das bekannte "Parallelenaxiom" (das 5. Euklidische Postulat)[3], welches besagt, dass es in einer Ebene zu einer Geraden p, durch einen Punkt O, der nicht auf der Geraden p liegt, eine und nur eine Gerade q gibt, die p nicht schneidet, keine offensichtliche Tatsache.

Man kann es nicht sinnlich anschaulich prüfen, da unser Sehvermögen, aber auch die optischen Geräte, die es verstärken, nicht absolut genau sind, nicht fähig sind, sehr kleine Winkel zu unterscheiden und die Möglichkeit zu widerlegen, dass durch O außer q auch noch andere Geraden s gehen, die p nicht schneiden, wenn nur der Winkel sOq sehr klein ist (Fig. 21).

[3] Wörtlich lautet dieses Postulat: "Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."

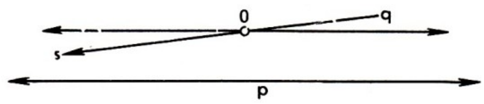


Fig. 21

Sinnlich-anschaulich sind wir auch nicht in der Lage, die entgegengesetzte Möglichkeit zu widerlegen, nämlich dass die Gerade q die Gerade p irgendwo weit links oder rechts schneidet. Denn wir können nur einen endlichen Teil der Geraden q verfolgen.

Somit sind die Axiome keine direkten Abbildungen, keine Photographien oder genaue Wiedergaben unserer sinnlichen Erfahrungen. Auf der anderen Seite sind sie auch nicht willkürliche Schöpfungen der "reinen Vernunft".
Die Axiome spiegeln nicht direkte Beziehungen zwischen realen Dingen wider, sondern sie sind idealisierte Widerspiegelungen dieser Beziehungen. Von den Axiomensystemen fordert man nicht Offensichtlichkeit, sondern dass sie drei logische Forderungen erfüllen:

1. Widerspruchsfreiheit
2. Unabhängigkeit,
3. Vollständigkeit.

Ein Axiomensystem ist widerspruchsfrei, wenn es unmöglich ist, unter Anwendung der Regeln des logischen Beweises aus diesem System irgendeinen Satz p (Theorem) zu folgern und gleichzeitig seine Verneinung.
Ein Axiomensystem ist unabhängig, wenn nicht eines seiner Axiome durch logische Beweise aus anderen Axiomen dieses Axiomensystems gefolgert werden kann. Schließlich ist ein Axiomensystem vollständig, wenn ein beliebiges Theorem, das aus ihm gefolgert wurde, nicht aus einem Axiom hergeleitet werden kann, welches nicht logisch aus diesem System folgt.

Die in die Axiome eingehenden grundlegenden Begriffe, wie "Punkt", "Gerade", "Ebene", "liegen auf", "sich schneiden", "dazwischen liegen" usw., definiert man nicht sinnlich-anschaulich, wie das in den "Elementen" Euklids der Fall ist, wo z.B. "der Punkt" als "etwas, was keine Teile hat" definiert ist.
Vielmehr betrachtet man die Grundbegriffe als durch die Beziehungen bestimmt, durch die sie in das Axiomensystem eingehen.

Eines der wichtigsten grundlegendsten Prinzipien, das sich bei der historischen Entwicklung der Mathematik und damit der Geometrie herausbildete, wenn es auch nicht expliziert in ihr formuliert wurde, ist das Prinzip des Nichtzulassens irgendwelcher Ausnahmen.
Dank diesem Prinzip sind die mathematischen Sätze maximal breit anwendbar.

In der Mathematik wurden Algorithmen (Regeln) geschaffen, die es erlauben, mit Hilfe einer endlichen Anzahl Schritte ganze unendliche Klassen von Aufgaben desselben Typs zu lösen. Das wird in der Tat deshalb möglich, weil die Objekte der Mathematik, darunter auch die der Geometrie, genauso wie auch die Beziehungen zwischen diesen Objekten, eine Idealisierung darstellen. Sie widerspiegeln die Wirklichkeit nur unvollständig, grob, in ihnen ist eine Menge von Details weggelassen, die im gegebenen Zusammenhang als unwesentlich erscheinen.

Deshalb entsteht auch unmittelbar die Möglichkeit, von der sinnlich-anschaulichen Bedeutung zu abstrahieren, Sätze zu beweisen, die keine Ausnahmen kennen, Algorithmen zu schaffen und mit den mathematischen Objekten automatisch formal zu operieren.

Wir können mathematische Begriffe und somit auch geometrische Begriffe, sofern sie axiomatisiert sind, unterschiedlich deuten, ihnen eine unterschiedliche Interpretation geben, wenn sie nur das gegebene Axiomensystem erfüllt.

So können wir unter "Punkt" eine Gerade verstehen und unter "Gerade" einen Punkt. Dadurch verlieren die Sätze der Geometrie ihren Sinn nicht, er ändert sich nur.

Zum Beispiel erhalten wir anstelle des Satzes (des Axioms) "Durch zwei beliebige nichtzusammenfallende Punkte a und b geht eine und nur eine Gerade C" (Fig. 22) den Satz (welcher ebenfalls ein Axiom darstellt) "Zwei beliebige Geraden A und B bestimmen einen und nur einen Punkt c", wobei man, um die Ausnahme zu beseitigen, die entsteht, wenn die Geraden parallel sind, annimmt, dass ein "uneigentlicher" oder "unendlich entfernter" Schnittpunkt existiert.

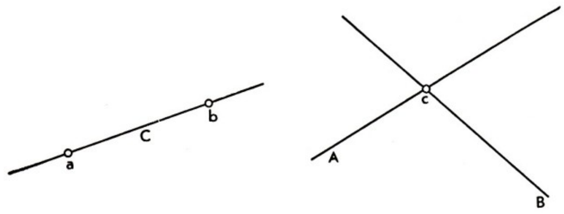


Fig. 22

Jedoch können wir auch vollständig von der anschaulichen Bedeutung der geometrischen Begriffe absehen und über die "Punkte" a, b, c, ..., "Geraden" A, B, C, ..., und "Ebenen" α, β, γ, ... sprechen und dabei nur die Beziehungen zwischen ihnen im Sinn haben, welche durch die Axiome gegeben sind.
Und wenn wir uns an die auf diesem Wege aufgebaute abstrakte Geometrie gewöhnt haben, so erscheint es uns schon nicht mehr so ungewöhnlich, wenn wir zu dem Axiomensystem der dreidimensionalen Geometrie noch ein neues Axiom hinzufügen, das "Axiom der Erweiterung". Es lautet:

"Es existiert mindestens ein Punkt x, der nicht im R_3 liegt."

Das auf diese Weise erweiterte Axiomensystem erweist sich auch als widerspruchsfrei, unabhängig und vollständig, sofern das unerweiterte System diese Eigenschaften hat. Und dieses erweiterte System ist dann auch für den Aufbau der Geometrie des Raums R_4 ausreichend.

13 Bemerkungen über einen symbolischen Kalkül

Bevor wir unsere zusammengedrängte Betrachtung der geometrischen Seite des Problems der vierten Dimension abschließen, sagen wir noch einige Worte über einen eigentümlichen symbolischen Kalkül, welchen man in der vierdimensionalen oder allgemein mehrdimensionalen Geometrie anwendet. Dieser Kalkül ist sehr bequem bei der Berechnung verschiedener Charakteristika mehrdimensionaler Figuren.

Bezeichnen wir mit M^0, M^1, M^2, M^3, M^4 entsprechend einen Punkt, eine Strecke, ein konvexes Vieleck, ein konvexes vierdimensionales Hyperpolyeder usw.
Die Indizes 0, 1, 2, 3, 4, bezeichnen die Anzahl der Dimensionen der gegebenen Figuren, die Dimension des Raumes, der von der Figur erzeugt wird, ohne irgendwelche Einheiten oder Zentimeter, Quadratzentimeter, Kubikzentimeter usw.

Wir betrachten diese Figuren ohne ihren Rand (offen), d.h., wir werden ihre Ränder nicht dazurechnen. Wenn wir zu einer randlosen Figur ihren Rand dazuzählen (z.B. zu einer Strecke M^1 ihre beiden Endpunkte oder zu einem Vieleck M^2 seinen Rand, oder zum Polyeder M^3 die Oberfläche, die aus Grenzflächen besteht), so erhalten wir eine berandete abgeschlossene Figur, welche wir entsprechend mit $\overline{M^0}, \overline{M^1}, \overline{M^2}, \overline{M^3}, \overline{M^4}$ bezeichnen. Es ist offensichtlich, dass M^0 und $\overline{M^0}$ identisch sind.

Wir führen jetzt den Begriff des "Bestandes" der berandeten n-dimensionalen geometrischen Figur $\overline{M^n}$ ein.
Unter ihm werden wir die Aufzählung aller unberandeten Elemente verschiedener Dimensionen verstehen, aus denen diese Figur besteht. Mit Hilfe der eben erst eingeführten Symbole kann man leicht die Formel des Bestandes aufschreiben.

Führen wir einige Beispiele für Figuren an, die in Fig. 23 dargestellt sind. Für eine berandete Strecke $\overleftarrow{M^1}$, die aus zwei Endpunkten M^0 und einer unberandeten Strecke M^1 besteht, wird die Formel ihres Bestandes $\overline{M^1} = 2M^0 + M^1$.

Der Bestand des unberandeten Polygonzuges (mit den Buchstaben M bezeichnet) schreibt sich als $M = 3M^0 + 4M^1$, und der Bestand der gleichen Linie, wenn man sie als berandet betrachtet, wird $\overline{M} = 5M^0 + 4M^1$. Die Formel des Bestandes des berandeten Fünfecks wird $\overline{M^2} = 5M^0 + 5M^1 + M^2$. Der Bestand des dreiflächigen Prismas wird durch die Formel $\overline{M^3} = 6M^0 + 9M^1 + 5M^2 + M^3$ gegeben.

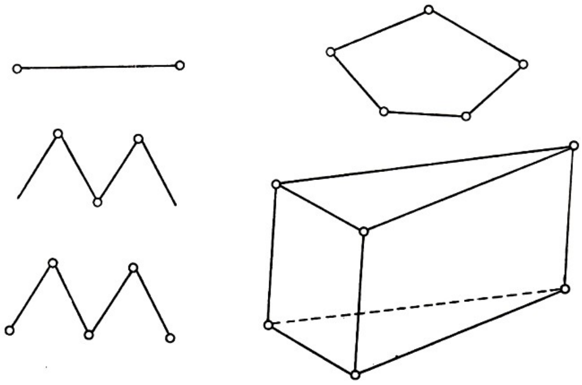


Fig. 23

Betrachten wir schließlich noch die Bildung geometrischer Figuren mit Hilfe der Bewegung. Dabei beschränken wir uns hier nur auf eine geradlinige fortschreitende Bewegung, die Strecken, Quadrate, Kuben, vierdimensionale Hyperkuben usw. erzeugt.
Dann kann man sagen, dass die Strecke $\overline{M^0}$ durch die Bewegung des Punktes $\overline{M^0}$ entsteht (oder M^0, was dasselbe ist). Das Quadrat $\overline{M^2}$ kann man durch Bewegung der Strecke $\overline{M^1}$ bilden, wenn nur diese Bewegung in senkrechter Richtung zur Richtung dieser Strecke verläuft, bis zu einer Entfernung gleich ihre Länge.

Analog wird auch der Kubus $\overline{M^3}$ durch die Bewegung des Quadrates $\overline{M^2}$ gebildet, wiederum in senkrechte Richtung zu diesem Quadrat bis zu einem Abstand, der gleich den Seiten ist.
Indem wir diese Analogie fortsetzen und annehmen, dass es möglich ist, zum Kubus eine geradlinige fortschreitende Bewegung mit senkrechter Bewegungsrichtung zum Kubus auszuführen (was im R_3 nicht möglich ist), bis zu einem Abstand, der gleich seinen Seiten ist, kommen wir zum vierdimensionalen Hyperkubus und danach analog zum fünfdimensionalen usw.

Wir nahmen eben an, dass geometrische Figuren höherer Dimension aus Figuren niederer Dimension durch die Bewegung letzterer entstehen können. Nun setzt der Begriff der Bewegung den Begriff der Zeit voraus und deshalb ist sie eigentlich nicht charakteristisch für eine Geometrie, deren Gegenstand ausschließlich räumliche Beziehungen sind. Wir können jedoch auch unter Vermeidung des Begriffes der Bewegung der Figuren das gleiche Ziel erreichen, nämlich eine Möglichkeit zu erhalten, die Bildung der Formeln des Bestandes der n-dimensionalen Polyeder zu begründen. Dafür wenden wir uns dem Begriff des "Unteilbaren" zu.

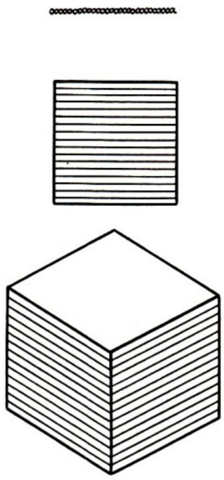


Fig. 24

Die Idee des Unteilbaren führte der griechische Mathematiker und Philosoph Demokrit ein. Er nahm an, dass die Punkte unveränderliche und unteilbare Atome des Raumes sind. Sie besitzen ein endliches Volumen.
Jede Strecke hat eine endliche, wenn auch unvorstellbare große Anzahl von Punkten. Analog besteht eine ebene Figur, z.B. ein Quadrat, aus einer endlichen, wenn auch unvorstellbaren großen Zahl Strecken, jede von der Dicke eines räumlichen Atoms. Und ein geometrischer Körper, z.B. ein Kubus, besteht aus einer endlichen, doch außerordentlich großen Zahl paralleler Platten, deren Dicke einem räumlichen Atom gleich ist (Fig. 24).
Demokrit konnte den Begriff des Unteilbaren zum Auffinden von Flächen und Rauminhalten vieler Figuren verwenden, unter ihnen auch Volumina von Pyramiden und Kegeln.

Jedoch hielten viele Mathematiker schon damals die Methode des Unteilbaren für logisch nicht streng, zeigten Widersprüche auf, in die die Idee des Unteilbaren gerät.

Deshalb versuchten sie Resultate, die mit dieser Methode erhalten wurden, auf anderem Wege zu beweisen, was auch dem griechischen Mathematiker Eudoxos nach einem halben Jahrhundert gelang. Doch die Methode des Unteilbaren wurde trotz allem auch noch bedeutend später von Archimedes fruchtbar angewandt, wenn auch nur als Hilfsmethode. Die mit ihrer Hilfe erhaltenen Resultate bewies Archimedes aber unbedingt auf anderem Wege.

In der Renaissance begannen der deutsche Astronom Kepler und besonders der italienische Mathematiker Cavalieri von neuem erfolgreich die Methode des Unteilbaren anzuwenden, später jedoch wurde sie wesentlich umgearbeitet und fiel dann schließlich vollständig weg. Die Mathematik ging bei der Berechnung von Flächen und Rauminhalten nicht von konstanten, unteilbaren Größen aus, sondern von veränderlichen, unendlich kleinen Größen, die beliebig kleine Werte annehmen können.

Ungeachtet dessen können wir gleichzeitig sowohl annehmen, dass eine Strecke durch eine Bewegung eines Punktes gebildet worden ist, ein Quadrat durch die Bewegung einer Strecke, ein Kubus durch die Bewegung eines Quadrates usw., als auch annehmen, dass die Strecke aus Atomen besteht (aus Punkten), ein Quadrat aus Strecken, ein Kubus aus Quadraten usw. In diesem und in jenem Fall haben wir die Möglichkeit, wenn auch nicht zu beweisen (einen Beweis haben wir auch nicht vor), so doch die Herleitung der Formel des Bestandes von mehrdimensionalen Polyedern mit Hilfe symbolischer Rechnungen überzeugend zu machen.

Tatsächlich ist es möglich, die Bildung des Quadrates durch Bewegung einer Strecke oder die Bildung des Quadrates aus den es "bildenden" Strecken mit der Methode der Berechnung der Fläche des Quadrates durch algebraische Multiplikation der Seitenlänge a mit der (gleichlangen) Höhe a zu vergleichen.
Dementsprechend gewinnt man die Formel des Bestandes des Quadrates $\overline{M^2}$, indem die Formel des Bestandes der Strecken $\overline{M^1}$ symbolisch quadriert, d.h., $\overline{M^2} = \overline{M^1} \cdot \overline{M^1} = (\overline{M^1})^2$ gesetzt wird.

Ebenso ist auch die Bildung des Kubus durch eine Bewegung des Quadrates oder die Bildung des Kubus aus seinen ihn "bildenden" Quadraten vergleichbar mit der Methode der Berechnung des Volumens des Kubus durch algebraische Multiplikation seiner Grundfläche a^2 mit seiner

Höhe a.
Dementsprechend muss man, um die Formel des Bestandes des Kubus zu erhalten, d.h. $\overline{M^3}$, symbolisch die Formel des Bestandes des Quadrates $\overline{M^2}$ mit der Formel des Bestandes der Strecke $\overline{M^1}$ multiplizieren, das heißt

$$\overline{M^3} = \overline{M^2} \cdot \overline{M^1} = (\overline{M^1})^3$$

Wenn wir jetzt $\overline{M^1}$ durch seinen Bestand $\overline{M^1} = 2M^0 + M^1$ ersetzen, so erhalten wir

$$\overline{M^2} = (2M^0 + M^1)^2 = 4(M^0)^2 + 4M^0M^{+}(M^1)^2$$

Nun ist $\overline{M^0}^2 = M^0$, $M^0M^1 = M^1$, aber $(M^1)^2 = M^2$. Daher erhalten wir endgültig

$$\overline{M^2} = 4M^0 + 4M^1 + M^2$$

Auf diese Weise bekommen wir

$$\overline{M^3} = \overline{M^2} \cdot \overline{M^1} = (4M^0 + 4M^1 + M^2) \cdot (2M^0 + M^2) = 8M^0 + 12M^1 + 6M^2 + M^3$$

Hierbei wird die symbolische Multiplikation durchweg nach den Regeln der Algebra ausgeführt, wobei M^0 die Rolle der Eins spielt (analog der Regel, für jedes a ungleich Null $a^0 = 1$ zu setzen).
Die Exponenten addieren sich bei der Multiplikation, $M^p \cdot M^q = M^{p+q}$, und beim Potenzieren multiplizieren sie sich, $(M^p)^q = M^{pq}$.

Jetzt ist es nicht schwer, die Formel des Bestandes des vierdimensionalen Hyperkubus $\overline{M^4}$ zu erhalten, nämlich

$$\overline{M^4} = (\overline{M^1})^4 = (2M^0 + M^1)^4 = 16M^0 + 32M^1 + 24M^3 + 8M^3 + M^4$$

Für n-dimensionale Hyperkuben erhalten wir analog

$$\overline{M^n} = (\overline{M^1})^n = (2M^0 + M^1)^n$$

Hier ist es der Koeffizient bei M^s, der zeigt, wieviel s-dimensionale Hypergrenzflächen dieser n-dimensionale Hyperkubus besitzt, und der nach der binomischen Formel ausgerechnet wird. Dieser Koeffizient ist gleich

$$2^s \cdot \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot s}$$

Auf diese Weise hat ein n-dimensionaler Hyperkubus 2^n Ecken, $2^{n-1} \cdot n$ Kanten, $2^{n-2}\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ quadratische Grenzflächen, $2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ dreidimensionale kubische Grenzflächen usw., und endlich $2n$ Grenzflächen, die $(n-1)$-dimensionale Kuben darstellen und seine äußere Grenze bilden.

Mit einigen Modifikationen kann man durch diese Methode die Formeln des Bestandes auch anderer n-dimensionaler Polyeder erhalten. Den Lesern, die sich ausführlicher mit der Geometrie mehrerer Dimensionen befassen wollen, empfehlen wir die im Literaturverzeichnis genannten Bücher von Efimow und Pickert.

14 Vorgeschichte der Idee der Mehrdimensionalität

Nachdem wir uns mit dem mathematisch-logischen Ursprung der Idee der vierten räumlichen Dimension vertraut gemacht haben, wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf ihre historische Entstehung und Entwicklung.

Die Idee einer Möglichkeit der Verallgemeinerung des Begriffes der Quantität der Dimensionen von drei auf vier und mehr erschien in der Mathematik schon sehr früh. Dazu trug die Entdeckung der Inkommensurabilität der Strecken durch die alten Griechen bei.
Es zeigte sich, dass das Verhältnis zwischen Strecken (z.B. zwischen der Diagonalen und der Seite des Quadrates) nicht immer als Verhältnis zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Eben dadurch erlitten die Ansichten der Anhänger des griechischen Mathematikers und Philosophen Pythagoras einen Zusammenbruch, die glaubten, die Arithmetik der ganzen Zahlen sei in der Lage, alle Gesetzmäßigkeiten der Welt zu erklären.

Eudoxos schuf eine spezielle Theorie der Proportionen der Strecken, die später in Euklids "Elemente" einging.
Den Platz der allgemeinen Arithmetik nahm jetzt die Algebra der geometrischen Größen ein. Man betrachtete sie nicht als Zahlen und wendete auf sie keine arithmetische Terminologie an. Deshalb wurde die zweite Potenz Quadrat genannt und die dritte Kubus. Diese Bezeichnungen haben sich bis jetzt erhalten.

Gerade diese Terminologie suggerierte den Gedanken, auch höheren Potenzen geometrische Bezeichnungen zu geben, die die Begriffe des Quadrates und des Kubus verallgemeinern.

Als erstes begegnen wir ihnen in der "Arithmetik" des griechischen Mathematikers Diophant, in welcher er sich in der Hauptsache mit der Lösung verschiedener Arten algebraischer Gleichungen befasst.
Die unbekannte Größe (unser x) in zweiter Potenz (x^2) nannte er Quadrat - griechisch "dynamis" - und bezeichnete es mit den zwei Anfangsbuchstaben dieses Wortes δ^v.
Die dritte Potenz (x^3) - Kubus, auf griechisch "kybos" - bezeichnete er κ^v. Entsprechend war x^4 - "dynamodynamis" $\delta\delta^v$, x^5 - "dynamokybos " $\delta\kappa^v$, x^6 - "kybokybos" $\kappa\kappa^v$.
Jedoch kann man wohl nicht behaupten, dass Diophant mit dieser Terminologie irgendwie bestimmte mehrdimensionale geometrische Vorstellungen in Zusammenhang brachte.

Klarer tritt die Idee der vierten und höherer Dimensionen bei dem iranischen Mathematiker Abul Wafa zu Tage, dem Übersetzer und Kommentator Diophants. In seinem "Buch darüber, was dem Handwerker nötig ist von den geometrischen Konstruktionen", stellte Abul Wafa die Aufgabe der Konstruktion der Seite an eines Quadrates, dessen Fläche gleich der Summe dreier gleicher Quadrate mit den Seiten a ist.

Er sagt, dass x gleich der Diagonalen eines Kubus mit der Kante a ist. Und dann fährt er fort: "Genau so steht die Sache, wenn wir ein Quadrat konstruieren wollen, das aus mehr als drei Quadraten besteht." Und er weist darauf hin, dass z.B. die Seite eines Quadrates, das die gleiche Größe wie fünf Quadrate mit der Seite a hat, gleich der Diagonalen des Quadrat-Kubus (fünfdimensionaler Kubus) mit der Kante a ist.

Der Gedanke über die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Begriffes der räumlichen Dimension von der dritten zur vierten und mehr beschäftigte auch den französischen mittelalterlichen Mathematiker Oresme, doch er war sich nicht schlüssig, ihn aufzunehmen. Im Werk "Fragen zur Geometrie Euklids" schrieb Oresme:

"... irgendwer äußert vielleicht Zweifel, wenn die lineare Qualität hier als Ebene darstellbar ist und die ebene als ein Körper, der drei Dimensionen hat, denn so würde folglich die körperliche Qualität dargestellt, als hätte sie vier Dimensionen, als, neue Art der Quantität.[4]
Ich sage, dass das nicht folgt. Denn wenn auch ein laufender Punkt sich als erzeugte Linie darstellen lässt, eine Linie als Fläche, die Fläche als Körper, folgt nicht, dass eine vierte Art Quantität entsteht, wenn man sich einen sich bewegenden Körper vorstellt."

Er bleibt ein Körper, und deshalb sagt der griechische Philosoph Aristoteles im 1. Buch "Über den Himmel": "... von ihm (d.h. dem Körper) existiert kein Übergang zu einer anderen Art Quantität durch diese Methode, sich Dinge vorzustellen, und genau das muss man im gegebenen Fall sagen."

In seinem viel späteren Traktat "Über die Konfiguration der Eigenschaften" legte Oresme ausführlich die Methode der geometrisch anschaulichen Darstellung der Beziehungen zwischen den Dingen dar, eine Art Prototyp der Diagramm-Methode oder der rechtwinkligen Koordinaten. Er unterschied beiden Qualitäten ihre Intensität (Gespanntheit) und Extensität (Ausgedehntheit).

Bei der Qualität, die in einem Punkt konzentriert ist, drückt sich ihre Intensität als gerade Strecke aus. Es existieren "lineare Qualitäten", deren Intensität auf die Punkte einer Linie verteilt sind, - sie drücken sich in den zweidimensionalen Figuren aus.

Weiter hat man die "Flächenqualitäten", die sich durch dreidimensionale Körper ausdrücken. Schließlich wären "Körperqualitäten " geeignet, in der vierten Dimension zum Ausdruck zu kommen, doch Oresme nimmt davon Abstand, indem er unklar über zwei Arten von Körperlichkeit spricht, einmal von der echten und zum anderen von der eingebildeten.

Letzteres stammt aus "unendlicher Wiederholung der Intensität der Qualität in Übereinstimmung mit der Menge der Flächen im Objekt". Die körperliche Qualität lässt sich schon schwieriger vorstellen, doch man kann sie sich als gegenseitige überdeckte Volumen denken.

Obwohl die Idee der mehr als dreidimensionalen Räume in der Mathematik schon im Altertum entstand, eigneten sie sich die Mathematiker nur langsam den inneren Widerstand überwindend an. Typisch ist in dieser Beziehung die Äußerung des deutschen Mathematikers Stifel in seinem Lehrbuch "Coss" (so nannte man im 15.-16. Jahrhundert die erste Potenz der Unbekannten, aber auch die Algebra im großen und ganzen; diese Bezeichnung stammt aus dem Italienischen, casa - das Wesen, das Unbekannte), das eine Bearbeitung des damals verbreiteten Buches des Wiener Mathematikers Rudolff "Schnelles und schönes Rechnen mit Hilfe der geschickten Regeln der Algebra, gewöhnlich genannt Koss", herausgegeben in Straßburg 1525, war. Stifel schrieb:

Wenn wir in der Arithmetik sehen, dass wir uns viele Gegenstände ausdenken können, sogar wenn sie keinerlei Form aufweisen, so ist es in der Geometrie nicht erlaubt, körperartige Linien und Flächen anzunehmen und über die Grenzen des Kubus hinauszugehen, so als gäbe es mehr als drei Dimensionen, weil das unnatürlich wäre.
In diesem Falle würden die geometrischen Reihen weiter und weiter fortschreiten, ohne jedes Ziel und Ende, der Kubus würde als körperlicher Punkt angesehen, danach käme die körperliche Linie, hinter ihr die körperliche Fläche und hinter ihr ein körperlicher Kubus und danach würde es ohne Ende weitergehen, wie wir es eben gezeigt haben. Aber man sollte hier Nachsicht üben

[4] Die Worte "Qualität" und "Quantität" werden hier natürlich mit anderer Bedeutung benutzt als im heutigen Sprachgebrauch, insbesondere auch in der marxistischen Philosophie. A. d. R.

wegen der schönen und wunderbaren Anwendung der Algebra."

Ebenso zurückhaltend verhielt sich zum Begriff der mehrdimensionalen Geometrie der französische Mathematiker Fermat. In seiner Arbeit "Neue analytische Behandlung der zweiten Unbekannten und der Unbekannten höherer Ordnung", welche zusammen mit "Die Geometrie" von Descartes die Grundlage zur analytischen Geometrie legte, erwähnte Fermat lediglich flüchtig die Möglichkeit, die Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten als Gleichungen geometrischer Orte höherer Dimensionen auszulegen, entwickelte diesen Gedanken aber nicht weiter.

Sogar noch nach dem Verlauf von weiteren hundert Jahren äußerte der französische Mathematiker und Philosoph d'Alembert, der gemeinsam mit dem Philosophen Diderot die "Enzyklopädie der Wissenschaften, Künste und Gewerbe" herausgab, sich in einem seiner darin enthaltenen Artikel "Dimension" sehr vorsichtig bejahend zum Gedanken einer vierten Dimension:

"Ein mir bekannter kluger Mann denkt, dass es möglich wäre, die Zeit als vierte Dimension zu betrachten, so dass das Produkt der Zeit mit dem Volumen auf irgendeine Weise das Produkt von vier Dimensionen wäre. Diese Idee ist vielleicht umstritten, doch mir scheint, dass sie irgendwie Wert besitzt, auf alle Fälle den Wert der Neuheit."

15 Entwicklungsgeschichte der n-dimensionalen Geometrie

Das Misstrauen der Mathematiker gegenüber der vierten Dimension und allgemein der mehrdimensionalen Geometrie zerstreute sich merklich, als der französische Mathematiker und Mechaniker Lagrange in seiner "Analytischen Mechanik" (1788) neben den räumlichen Koordinaten x, y, z die Zeit t als vierte Koordinate einführte.
Hierbei war allerdings die vierte Dimension keine räumliche, und man benutzte sie nur der Anschaulichkeit halber. Tatsächlich sind ja die Koordinaten x, y, z, t nicht gleichberechtigt.

Erstens haben sie unterschiedliche physikalische Dimensionen, d.h. man misst sie in unterschiedlichen Einheiten: räumliche in Zentimetern und zeitliche in Sekunden.
Zweitens kann man sich im Raum nach beiden Richtungen bewegen, von rechts nach links und von links nach rechts, zurück und vorwärts, von unten nach oben und von oben nach unten, während zeitlich nur die einseitige Bewegung möglich ist: von der Vergangenheit zur Gegenwart und von jetzt in die Zukunft, doch nicht umgekehrt.

Seit dieser Zeit fand die Idee der vierten Dimension, und zwar als räumliche Dimension, Schritt für Schritt und in entwickelterer Form ihren Niederschlag in solchen Arbeiten wie "Der barycentrische Calcul" (1827) des deutschen Geometers Möbius, "Über die Transformation zweier beliebiger homogener Funktionen zweiter Ordnung" (1834) des deutschen Mathematikers Jacobi, "Kapitel zur analytischen Geometrie von n Dimensionen" (1843) des englischen Mathematikers Cayley und in "System der Geometrie des Raums usw." (1846) des deutschen Mathematikers Plücker.

Die erste Monographie, die der mehrdimensionalen Geometrie gewidmet war, "Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre" (1844), wurde von dem deutschen Mathematiker Graßmann publiziert. Darin gab er den ersten systematischen Aufbau einer Lehre über den n-dimensionalen euklidischen Raum und seine Unterräume sowie auch seiner Vektoralgebra. Graßmann legte jedoch seine Lehre äußerst abstrakt dar, benutzte eine ungewöhnliche

Terminologie, und deshalb blieb sie wenig zugänglich.

Nun wuchs die Anzahl der Arbeiten über die mehrdimensionale Geometrie schnell an. Der schweizerische Mathematiker Schläfli schrieb die "Theorie der vielfachen Kontinuität" (1852), in welcher er neben vielen anderen Theoremen der mehrdimensionalen Geometrie die Lehre über die mehrdimensionalen regulären Vielecke darlegte, deren Klassifikation unabhängig voneinander von dem amerikanischen Mathematiker Stringham (1880) und dem deutschen Mathematiker Hoppe (1882) durchgeführt wurde.

Schließlich wurden die Prinzipien der mehrdimensionalen Geometrie in allgemeinster Form in der bekannten Vorlesung "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" (1854) von dem deutschen Mathematiker Riemann dargelegt. Er betrachtete die Geometrie in ihrer allgemeinsten Form als das Studium der stetigen Mannigfaltigkeiten n-ter Ordnung.
Wenn in ihnen eine Metrik gegeben ist, d.h. der Abstand zwischen unendlich nahen Elementen bestimmt ist, so nannte Riemann diese Mengen Räume (Riemannsche Räume) und entwickelte in ihnen die Krümmungslehre. Spezielle Fälle dieser verallgemeinerten Räume sind die (parabolische) euklidische Geometrie, die (hyperbolischen) lobatschewskische Geometrie konstanter negativer Krümmung und die (elliptische) Geometrie der Räume konstanter positiver Krümmung (für $n = 2$ - die Geometrie der sphärischen Oberflächen), welche man auch Riemannsche Geometrie im engeren Sinne nennt.

In dieser Vorlesung formulierte Riemann auch die Grundlagen der Topologie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.
Unter Topologie versteht man den Teil der Geometrie, der diejenigen Eigenschaften der räumlichen Figuren erforscht, die bei solchen Transformationen erhalten bleiben, die keinerlei Zerreißen (es entstehen keine neuen Punkte) oder Verheften (es gehen keine Punkte verloren) bewirken.

Auf diese Weise hängen die topologischen Eigenschaften nicht von der Lage und Größe der Figuren und auch nicht von der Linearität ab. Zum Beispiel ist aus topologischer Sicht zwischen einem Quadrat und einem Kreis in der Ebene keinerlei Unterschied, aber Quadrat und Strecke sind unterschiedliche Figuren.

Bei umkehrbar eindeutigen und stetigen (d.h. topologischen) Abbildungen von Figuren erhalten sich eine Reihe Eigenschaften, sogenannte topologische Invarianten. Die wichtigste topologische Invariante ist die Dimension einer Figur:
Eine n-dimensionale Figur bildet sich wieder nur auf eine n-dimensionale Figur ab, wie der holländische Mathematiker Brouwer 1911 bewies.

Auf diese Weise ist der Begriff "Anzahl der Dimensionen", entgegen seiner Bezeichnung, kein metrischer, sondern ein topologischer Begriff. Die Dimension[5] hat nichts mit der Messung von Entfernungen und Winkeln zu tun.
Man kann sie bestimmen, ohne solche Begriffe wie "Abstand zwischen zwei Punkten" und "Winkel zwischen zwei Geraden" zu betrachten, sondern indem man ausschließlich vom Begriff "Umgebung eines Punktes" ausgeht.

Während sich die Abstände und Winkel bei Deformation der räumlichen Figuren in der Regel verändern, bleiben die Eigenschaften der Umgebung eines Punktes unverändert, sofern bei der Deformation keine Punkte der Figur verschwinden.

[5]Die Definition der Dimensionszahl (Dimension) einer geometrischen Figur geht nach K. Menger und T.S. Uryson induktiv vor sich(vgl. z. B.Wilenkin "Unterhaltsame Mengenlehre", Leipzig 1973, S. 173f).

Durch Riemann wurden noch andere topologische Invarianten der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten entdeckt, die den Namen "Bettische Zahlen" erhielten, nach dem Namen eines Freundes von Riemann, des italienischen Mathematikers Betti, welcher in der Arbeit "Über Räume einer beliebigen Anzahl von Dimensionen" (1871) die Forschungen seines Freundes fortsetzte.

Eine weitere Entwicklung der Theorie der topologischen Invarianten geschah durch die Arbeiten des französischen Mathematikers Poincaré (1895) und des deutschen Mathematikers Klein (1872).
In unserer Zeit entwickelte sich die mehrdimensionale Geometrie ungewöhnlich breit und vielfältig. Einen großen Beitrag dazu leisteten auch die Mathematiker Russlands, und im besonderen die sowjetischen Mathematiker und Physiker P.S. Urusom, A.N. Kolmogorow, L.S. Pontrjagin, A.D. Alexandrow und andere.

16 Anwendung der vierdimensonalen Geometrie

Wie in jeder Wissenschaft werden auch in der Mathematik neue Ideen zunächst unter dem Einfluss von direkten oder indirekten Forderungen geboren und entwickelt, die andere, häufig angewandte Wissenschaften und im besonderen die Technik, an sie stellen. Das heißt, letzten Endes entstehen sie aus den Erfordernissen der materiellen Produktion, aber auch aus dem Kulturleben der Gesellschaft.

Daneben werden aber auch neue wissenschaftliche Ideen aus der inneren Logik der Wissenschaft selbst geboren und entwickelt, in der Form von Verallgemeinerungen anderer, schon bekannter Ideen u.ä.
Gerade die Idee der vierten Dimension und der mehrdimensionalen Räume allgemein ist ein solches Beispiel. Derartige Ideen können manchmal die Grundlage zu einer ganzen Theorie legen oder sogar zu Teilen einer Wissenschaft, wobei sie dabei lange Zeit abstrakt bleiben und manchmal ein Jahrzehnt oder ein Jahrhundert bis zu spürbaren praktischen Anwendungen vergeht.

Man kann auch andere Beispiele solcher anfänglich von der Praxis isolierter, abstrakter, wissenschaftlicher Ideen anführen, die ihren Ursprung in der Mathematik haben. So war die Lehre über die Kegelschnitte schon vollständig im 3. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung von dem griechischen Geometer Apollonius ausgearbeitet, doch die praktische Anwendung in der Astronomie und der Mechanik geschah erst im 16. Jahrhundert.

Oder etwa die Zahlentheorie, die die Eigenschaften der ganzen Zahlen untersucht und deren Grundlagen auf die Pythagoräer im 5. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung zurückgehen, war immer inhaltsreich und ein sehr verzweigter Teil der modernen Mathematik, doch trotzdem hat sie vergleichsweise nur wenig praktische Anwendung und dabei hauptsächlich in anderen Teilen der Mathematik.

Worin besteht die Möglichkeit der praktischen Anwendung der vierten Dimension und allgemein der mehrdimensionalen Geometrie?
Darin, dass die mehrdimensionale Geometrie eine Menge verschiedener Auslegungen und Interpretationen gestattet. Es ist klar, dass ihre natürliche Interpretation diejenige ist, die durch ihre Entstehung als Verallgemeinerung der Gesetzmäßigkeiten des realen Raums auf mehr als drei Dimensionen gegeben ist. Aber die Beziehungen, die die mehrdimensionale Geometrie aufstellt, können auch als nichträumliche Beziehungen ausgelegt werden, als Beziehungen völlig

anderer Art zwischen Objekten der materiellen Welt.

Ein Beispiel dafür führten wir schon an:
In der Interpretation Lagranges waren drei Dimensionen x, y, z des vierdimensionalen Raums R_4 räumliche, doch die vierte Dimension t war keine räumliche Dimension, sondern die Zeit.

Ein anderes Beispiel ist der Phasenraum irgendeines physikalischen Systems, z.B. eines Gases aus N Molekülen. Die Moleküle werden als "materielle Punkte" betrachtet, die die Massen $m_1, m_2, ..., n_N$ besitzen.
Jeder solche materielle Punkt nimmt in einem bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Lage im Raum ein, der durch drei Koordinaten bestimmt ist. Außerdem besitzt er einen bestimmten Impuls (das Produkt seiner Masse mit seiner augenblicklichen Geschwindigkeit), welcher drei Komponenten besitzt (die Projektionen auf die Koordinatenachsen).
Auf diese Weise sind zur Bestimmung des Zustandes eines materiellen Punktes 6 ihn charakterisierende Größen (Parameter; erforderlich. Folglich können die Zustände des gesamten Systems durch $6N$ Parameter bestimmt werden.

Diese kann man als Koordinaten irgendeines Punktes P im Raum R_{6N} betrachten. Da sich im Laufe der Zeit die Zustände des Systems ändern, so kann man sich das als Bewegung des Punktes P vorstellen. Der Punkt P beschreibt in diesem $6N$-dimensionalen Raum eine Linie, die man Phasentrajektorie nennt.
Die Methode des mehrdimensionalen Phasenraums wendet man in der Mechanik, Thermodynamik, in der physikalischen Chemie und mit entsprechender Modifikation auch in der Quantenmechanik an.

In der physikalischen Chemie findet die mehrdimensionale Geometrie mit großem theoretischem und praktischem Nutzen bei der Untersuchung mehrkomponentiger Systeme Anwendung. Solche Systeme bestehen aus vier und mehr festen, flüssigen oder gasförmigen Teilen (Komponenten).
Die Komponenten wechselwirken miteinander durch Wärmeaustausch, Diffusion oder chemische Reaktionen. Infolgedessen verändern sich die quantitativen Beziehungen der Massen der Komponenten, die Temperatur des Systems, der Druck, unter dem es sich befindet. usw.
Die Gesamtheit der n Parameter, die den Zustand des Systems charakterisieren, kann man als Koordinaten eines Punktes im Raum R_n bezeichnen (man nennt ihn Bildpunkt).
Sogar wenn das System nur im ganzen aus zwei Komponenten besteht, zum Beispiel Eis und Wasser, und man betrachtet die Änderung von Temperatur und Druck, muss man auf den dreidimensionalen Raum zurückgreifen, weil das prozentuale Verhältnis der Komponenten im Gemisch ein dritter Parameter ist. Diese Methode der "Zustandsdiagramme" gibt die Möglichkeit, genaue Aussagen über die Änderungen der untersuchten Systeme (z.B. einer metallischen Legierung, einer Salz-Wasser-Lösung, eines Silikates u.a.) zu machen, ohne eine chemische Analyse vorzunehmen.

Sie dient als Grundlage für die Wahl der Zusammensetzung des Systems und der Bestimmung der günstigsten Bedingungen seiner technologischen Verarbeitung.

Nach dem zweiten Weltkrieg entstand in der Mathematik eine neue Richtung, die lineare Programmierung.
In ihr löst man Aufgaben technisch-ökonomischen Charakters (z.B. auch militärische Probleme, daher entstammt dieser Teil der Mathematik), Probleme der Auslastung von Anlagen, des rationellen Einsatzes des Materials, des Transports, der Mischungen wie überhaupt der Organisation der Produktion allgemein.

Die in diesen Aufgaben auftreten- den veränderlichen Größen $x_1, x_2, ..., x_n$ sind linear voneinander abhängig, d.h. es gilt eine Anzahl Ungleichungen der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq a0$$

wobei $a_0, a_1, ..., a_n$ gegebene Größen sind. Die Veränderlichen sollten so bestimmt werden, dass sie nicht negativ sind und dass der Ausdruck

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = f$$

wobei $c_1, c_2, ..., c_n$ gegeben sind, seinen größten (in anderen Fällen seinen kleinsten) Wert annimmt.

Es zeigte sich, dass man solchen Aufgaben eine geometrische Interpretation im mehrdimensionalen Raum R_n geben kann.
Wir führen hier nur ein äußerst einfaches Beispiel für $n = 2$ an und weisen die Richtung für Verallgemeinerungen auf mehrdimensionale Räume auf. Wir bemerken noch, dass in der Praxis die Anzahl der Veränderlichen so riesig ist, dass man die Rechnungen ohne schnellarbeitende elektronische Rechenmaschinen nicht bewältigen könnte.

Nehmen wir ein Unternehmen an, das zwei Arten von Waren herstellt. Es ist bekannt, dass 1. die Montagehalle in 24 Stunden 100 Stück der Waren der ersten bzw. 300 Stück der zweiten Art fertigstellen kann, 2. die Kontrollabteilung nicht in der Lage ist, in 24 Stunden mehr als 155 Stück beliebiger Art zu kontrollieren. und 3. die Ware der ersten Art doppelt so teuer ist wie die Ware zweiter Art.
Es fragt sich nun, wieviel fertigt man in 24 Stunden Waren der ersten und der zweiten Art an, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

Bezeichnen wir mit x_1 die Menge der Waren erster Art, mit x_2 die Menge der Waren der zweiten Art. Beide Größen sollen nichtnegative (ganze) Zahlen sein, d.h. $x_1 \geq 0$, $x2 \geq 0$.

Aus Bedingung 1 folgt, sofern man die gesamte vierundzwanzigstündige Produktion des Unternehmens nach Waren der zweiten Art umrechnet, dass $3x_1 + x_2$ Stück hergestellt werden. Also müsste $3x_1 + x_2 \leq 300$ sein.
Bedingung 2 schreibt sich $x_1 + x_2 \leq 155$, und aus Bedingung 3 folgt, dass $2x_1 + x_2 = f$ maximal werden soll.

Gehen wir jetzt zur geometrischen Interpretation über.
Wir werden x_1, x_2 als Koordinaten eines Punktes in der Ebene (Fig. 25) betrachten. Dann stellt die Ungleichung $x1 \geq 0$ die rechte Halbebene (von der Achse x_2), und die Ungleichung $x_2 \geq 0$ die obere (von der Achse x_1) Halbebene dar.

Folglich wird durch diese beiden Ungleichungen zusammengenommen in der Ebene der erste Quadrant dargestellt. Die Ungleichung $3x_1 + x_2 \leq 300$ beschreibt in Verbindung mit den anderen Ungleichungen die Punkte des Quadranten, die links von der Geraden AB liegen, die durch die Gleichung $3x_1 + x_2 = 300$ gegeben wird; sie füllen das Dreieck OAB aus.

Analog grenzt die Ungleichung $x_1 + x_2 \leq 155$ die Punkte des Dreiecks OAB ab, die links von der Geraden CD liegen, die durch die Gleichung $x_1 + +x_2 = 155$ gegeben ist.
Auf diese Weise füllen die Punkte, deren Koordinaten alle vier Ungleichungen erfüllen, das konvexe Viereck $OAPD$ aus.

Indem wir das Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 = 300 \qquad , \qquad x_1 + x_2 = 155$$

lösen, erhalten wir $x_1 = 72,5$, $x_2 = 82,5$ als Koordinaten des Punktes P.

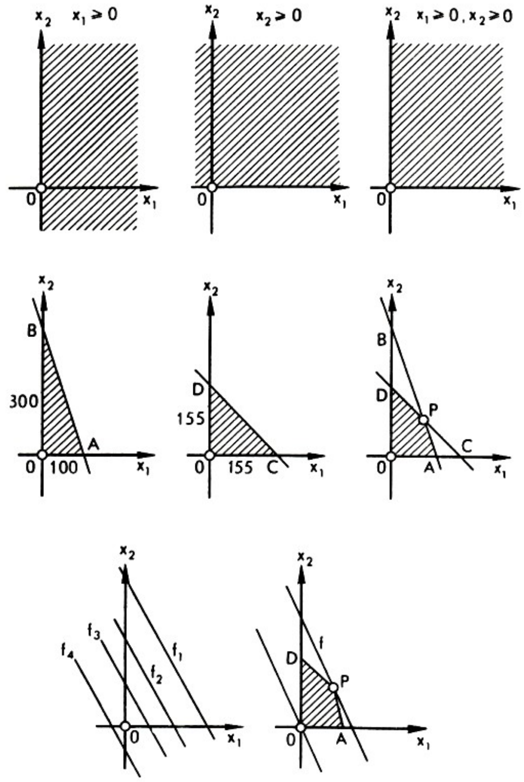


Fig. 25

Die Gleichung $2x_1 + x_2 = f$, endlich, ist die Gleichung eines Bündels paralleler Geraden. Entlang jeder Geraden bedeuten $f_1, f_2, ...$ Konstante.

Unter den Geraden des Bündels sind zwei, die so durch die Ecken des Vierecks $OAPD$ gehen, dass es völlig auf einer Seite der Geraden liegt; man nennt sie Stützgeraden. In unserem Beispiel sind es die Geraden, die durch die Ecken O und P gehen. In der Ecke O wird die Größe f minimal (im gegebenen Falle ist sie Null), doch in der Ecke P maximal (227,5).

Da wir für x_1 und x_2 gebrochene Zahlen erhielten, nehmen wir natürlich an ihrer Stelle die nächstliegendsten ganzen Zahlen, 72 und 83, und erhalten dann $f = 227$.
Manchmal kann die Stützgerade mit der Seite des konvexen Vielecks zusammenfallen und dann wird die Lösung der Aufgabe nicht eindeutig.

Bei der Verallgemeinerung auf n Veränderliche nimmt den Platz des konvexen Vielecks ein konvexes Hyperpolyeder ein, und den Platz des Bündels paralleler Geraden ein Bündel paralleler Hyperebenen im Raum R_n.
Es versteht sich, dass das Aufsuchen der Stützhyperebene, die durch die Ecke des Hyperpolyeders geht (oder mit irgendeinem seiner Hyperflächen zusammenfällt), keine leichte Aufgabe darstellt. Zu ihrer Lösung wurden verschiedene Methoden ausgearbeitet, mit denen man sich z.B. in den Büchern A. S. Barsow "Was ist lineare Optimierung?", Leipzig 1972, und J. Piehler "Einführung in die lineare Optimierung", Leipzig 1970, vertraut machen kann.

17 Voraussetzungen für die Interpretation

In allen angeführten Fällen musste man, um den Begriff des vier- und allgemein n-dimensionalen Raums für irgendeine Anwendung zu benutzen, ihm eine andere, nichträumliche Interpretation S geben. Damit dies möglich wurde, ist notwendig und hinreichend, dass das System der

Begriffe S isomorph zum Begriff R_n ist.

Das bedeutet, dass die Beziehungen zwischen den Objekten des Systems S sich in umkehrbar eindeutiger Zuordnung zu den Objekten des Raums R_n befinden: Jedem Objekt des Systems S soll ein und nur ein Objekt des Raums R_n zugeordnet sein und umgekehrt.

Es versteht sich, dass das auch dann gilt, wenn man die Begriffe der mehrdimensionalen Geometrie in anderen Teilgebieten der Mathematik selbst anwendet. Wenn z.B. eine Potenzreihe gegeben ist

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

wobei x die Veränderliche und die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ konstante Größen sind, so kann man sie als einen Punkt P im Raum R_∞ mit einer unendlichen (abzählbaren) Anzahl von Dimensionen betrachten, wobei $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ die Koordinaten des Punktes sind. Ist dann

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + ...$$

eine andere Potenzreihe, so kann man einen Begriff "Abstand" d zwischen diesen Reihen einführen analog zum Abstand zwischen Punkten, d.h. als

$$d = \sqrt{(a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + ...}$$

Er hat Sinn, wenn die Reihe unter der Wurzel konvergiert. Zum Beispiel, wenn

$$P(x) = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$$
$$Q(x) = 1 + \frac{1}{1\cdot 2}x + \frac{1}{2\cdot 3}x^2 + \frac{1}{3\cdot 4}x^3 + ...$$

ist, so dass

$$d = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = 1,28255...$$

wird. Das eben angeführte Beispiel ist ein einfacher Fall des unendlichdimensionalen Raums R_∞, der von dem deutschen Mathematiker Hilbert eingeführt wurde und der seinen Namen erhielt.
Er spielt in verschiedenen Zweigen der modernen Mathematik und der theoretischen Physik eine große Rolle.

Als wir uns mit der vektoralgebraischen Methode der Betrachtung des vierdimensionalen Raums R_4 bekannt gemacht hatten, sahen wir, dass ein Vektor $\vec{r}$ bezüglich vier gegebener, paarweise senkrechter Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{l}$ zerlegt werden kann, d.h., man kann ihn als Summe

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + u\vec{l}$$

darstellen, wobei x, y, z, u Zahlen sind. Für den R_n wird analog

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

wobei $x_1, x_2, ..., x_n$ Skalare und $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind, von denen man sagt, dass sie eine Orthogonalbasis des Vektors $\vec{r}$ bilden.
Den Raum R_n dieser Vektoren nennt man linear. Die Länge des Vektors $\vec{r}$ ist eine skalare Größe

$$\vec{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}$$

Wenn wir jetzt vom R_n zum R_∞ übergeben und wenn die Reihe $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + ...$ konvergiert, so nennt man R_∞ Hilbertraum.
Seine enorme Bedeutung besteht darin, dass analog zum Vektor $\vec{r}$ im R_∞ auch irgendeine Funktion $f(x)$ nach einer unendlichdimensionalen orthogonalen Basis entwickelt werden kann, wobei alle Grundrechenarten der Vektoralgebra, die sich auf den Raum R_∞ beziehen, erhalten bleiben, es ist so, als wären sie in eine andere Sprache übersetzt worden, in die Sprache der orthogonalen Funktionen.

Ein System irgendwelcher Funktionen $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$, heißt orthogonal im Intervall (a, b), wenn die Bedingung

$$\int\limits_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0$$

gilt, wobei $f_i(x), f_j(x)$ zwei beliebige unterschiedliche Funktionen dieses Systems sind.
So ist z.B. das System der Funktionen 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ..., $\cos nx$, ...; $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, ... orthogonal im Intervall $(0, 2\pi)$.

Systeme orthogonaler Funktionen wendet man häufig zur Darstellung gegebener Funktionen (zum Beispiel empirisch an Hand von Grafiken gefundener Funktionen) an. In der mathematischen Physik ist die Darstellung periodischer Funktionen mittels trigonometrischer Reihen, den sog. Fourierreihen, genannt nach dem französischen Mathematiker Fourier, welcher die Lehre darüber in seinen Arbeiten über die Wärmeleitfähigkeit entwickelte, ein wichtiges Instrument.

Wenn die Funktion $f(x)$ die Periode 2π hat, so kann man sie (bei Erfüllung einiger Bedingungen) in die Reihe

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}[&(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + ... \\ &+ (a_n \cos 2n + b_n \sin 2n) + ...] \end{aligned}$$

zerlegen.
Dann gilt, sofern beispielsweise $f(x)$ beschränkt (d.h. keinen unendlich großen Wert annimmt) und stückweise stetig ist (d.h. stetig in allen Punkten des Intervalles $(0, 2\pi)$ mit Ausnahme höchstens einiger isolierter Punkte, an denen sie endliche Sprünge hat), die sogenannte Parsevalsche Gleichung, die von diesem französischen Mathematiker 1805 aufgestellt wurde, nämlich

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = a_0^2 + (a_1^2 + b_1^2) + ... + (a_n^2 + b_n^2) + ...$$

Wie man sieht, verhält sich die Funktion $f(x)$, die in eine Fourierreihe entwickelt wurde, wie ein Vektor $\vec{r}$ im R_∞.
Den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n, ...$ entsprechen die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ...$$

und der Länge r des Vektors $\vec{r}$ entspricht die Zahl

$$\sqrt{\int\limits_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx}$$

18 Die vierdimensionale Minkowskische Welt

Unter all den verschiedenen Interpretationen der mehrdimensionalen Geometrie ist wahrscheinlich für das breite Publikum diejenige am bekanntesten, welche ihr 1908 der deutsche Mathematiker Minkowski gab, als er sie auf die spezielle Relativitätstheorie anwandte.

Letztere baut bekanntlich auf zwei Prinzipien auf. Das erste Prinzip der "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" besagt, dass elektromagnetische Wellen, zu denen das Licht gehört, sich im Vakuum gleichartig nach allen Seiten mit einer konstanten Geschwindigkeit c (etwas weniger als 300000 km/s) ausbreiten, die nicht von der Geschwindigkeit einer bewegten Lichtquelle abhängt.

Das zweite grundlegende Prinzip ist das Relativitätsprinzip. Nach diesem hat eine gleichförmige geradlinige Bewegung eines materiellen Systems insgesamt keinen Einfluss auf den Gang beliebiger Prozesse, die sich im Innern des Systems abspielen. (Gleichförmig geradlinig bewegen sich Systeme, die keinen äußeren Kräften unterliegen.[6]
Dieses zweite Prinzip ist das verallgemeinerte Relativitätsprinzip.

Es wurde von dem italienischen Physiker und Astronom Galilei ursprünglich nur bezüglich mechanischer Prozesse formuliert. Wie alle Prinzipien der Naturwissenschaften wurden auch diese beiden Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie als Verallgemeinerung von Versuchen und Erfahrungen erhalten. Aus ihnen ergibt sich folgendes:

Wenn am Aufenthaltsort der Ursprung O des Koordinatensystems x, y, z untergebracht wird, so nimmt die Front der Lichtwelle in der Zeit t die sphärische Oberfläche mit dem Radius $r = ct$ ein, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

lautet. In einem zweiten, bezüglich des ersten gleichförmig geradlinig mit der Geschwindigkeit v bewegten Koordinatensystems mit dem Ursprung O', den Koordinaten x', y', z' und der Zeit t' wird die Gleichung der Lichtwellenfront entsprechend

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

Anders gesagt, beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen, das sich bezüglich des ersten gleichförmig geradlinig bewegt, bleibt der Ausdruck

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

unverändert (invariant). Die Raumkoordinaten x, y, z, bzw. x', y', z' und die Zeit t bzw. t' sind durch Transformationsformeln miteinander verbunden, welche man nach dem holländischen Physiker Lorentz benennt. Im einfachsten Fall, wenn die Richtung der Geschwindigkeit v mit der x-Achse übereinstimmt, hat die Transformation folgendes Aussehen:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In der klassischen, nichtrelativistischen Physik Newtons und Galileis waren räumlicher Abstand (die Länge des materiellen Körpers) und Dauer (der Zeitabstand zwischen den Ereignissen) absolute Größen, d.h., sie errechneten sich unabhängig vom Koordinatensystem.

[6] Systeme, die sich gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegen (d.h. Trägheitsbewegungen ausführen), heißen Inertialsysteme. A. d. R.

Jetzt sind Länge und Dauer relative Größen. Sie hängen von den Beziehungen des Körpers oder Prozesses zum Koordinatensystem ab.

Wie jedoch aus der Formel der Lorentz-Transformation folgt, muss man die relativistischen Effekte, wie Verkürzung der Längen in Bewegungsrichtung und Verlangsamung des Zeitablaufs, nur bei so hohen Geschwindigkeiten v in Rechnung stellen, die mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar sind und die man nur in der Mikrowelt oder auch im Kosmos antrifft.

Wenn die Geschwindigkeit v klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit (wie sogar die Geschwindigkeit eines Flugzeuges, das sich mit zwei- oder dreifacher Schallgeschwindigkeit bewegt, die 333 m in der Sekunde beträgt), können die Größen v/c^2 und v^2/c^2 vernachlässigt werden.
Dann geht die Formel der Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

über, anders gesagt, die Längen verkürzen sich nicht wahrnehmbar und der Gang der Zeit wird nicht merklich langsamer, wie das bei hohen Geschwindigkeiten der Fall ist (z.B. bei künstlichen Sputniks, interplanetaren Raketen, Elementarteilchen, außergalaktischen Nebeln).

Aus den Lorentz-Transformationen folgt, dass, wenn die Geschwindigkeit wächst und ihre Größe gegen c strebt, die Quadratwurzeln im Nenner der Formeln nach Null konvergieren. Das heißt aber, x' und t' streben nach unendlich.
Anders gesagt, die Geschwindigkeit c kann mit einem materiellen Körper niemals erreicht werden. Sie ist die Grenzgeschwindigkeit der Energieausbreitung.

Somit verwendet man in der Relativitätstheorie anstelle des räumlichen Abstandes r der Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x2, y-2, z_2)$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

und des Zeitintervalles

$$t = t_1 - t_2$$

das einheitliche Raum-Zeit-Intervall

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2}$$

welches allein beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen, das sich gleichförmig geradlinig bezüglich des ersten bewegt, invariant bleibt.
Gerade diesen Umstand benutzte Minkowski. Anstelle des Gliedes $-x^2(t_1 - t_2)^2$ führte er das Glied $+(u_1 - u_2)^2$ ein, d.h., er nahm $\sqrt{-1}ct$ als neue Koordinate u des vierdimensionalen Raumes R_4.

Das bedeutet, dass die Zeit anstatt in Sekunden in Zentimetern (in Vielfachen von ct) gemessen wurde, jedoch multipliziert mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$.
Folglich lässt sich jeder materielle Punkt P, von dem man in der alten Betrachtungsweise sagte, dass er zum Zeitpunkt t eine bestimmte Lage im R_3 einnimmt, die durch die Koordinaten x, y, z gegeben sind, jetzt in der vierdimensionalen Raum-Zeit R_4 als ein Punkt P darstellen, dessen Lage durch die Koordinaten x, y, z, u gegeben ist.

Diese Raum-Zeit nannte Minkowski vierdimensionale Welt und den materiellen Punkt $P(x, y, z, u)$

Ereignis.[7]

Somit wurde aus dem Ausdruck des raum-zeitlichen Intervalles

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(u_1-u_2)^2}$$

jetzt ein Ausdruck des Abstandes zwischen zwei Punkten (Ereignissen) P_1 und P_2 in der Minkowski-Welt. Da er sich analog dem Abstand im euklidischen Raum schreibt, wobei allerdings die vierte Koordinate imaginär ist, nennt man die vierdimensionale Welt Minkowskis nicht euklidisch, sondern einen pseudoeuklidischen Raum der vierten Dimension.

Andererseits ist die spezielle Relativitätstheorie mit der Geometrie Lobatschewskis verbunden, jedoch können wir uns damit hier nicht weiter befassen.

Die geometrische Interpretation Minkowskis zeigt "anschaulich" zwei Sachen. Erstens, dass Raum und Zeit im einzelnen genommen nur Abstraktionen sind, in der materiellen Wirklichkeit sind sie nicht zu trennen.
Zweitens, dass sich die Zeit qualitativ vom Raum unterscheidet. Das drückt sich darin aus, dass die Zeitkoordinate, im Unterschied zu den drei Koordinaten des realen Raums, durch eine imaginäre Größe gemessen wird.

Veränderungen, die mit einem Ereignis vor sich gehen, werden in der Minkowski-Welt durch eine Linie dargestellt. Jeder Punkt gibt nicht nur die Lage des Ereignisses im realen Raum R_3 an (der ein Unterraum des Raums R_4 ist), sondern auch die Zeit, zu der es stattfindet.
Minkowski nannte eine solche Linie "Weltlinie". Die vierdimensionale Welt R_4 ist auf diese Weise mit Weltlinien angefüllt, und das Studium ihrer Gesetzmäßigkeiten führt auf die Untersuchung der Geometrie dieses R_4.

Betrachten wir ein konkretes Beispiel, wobei wir zur Vereinfachung und größeren Anschaulichkeit erneut den Fall nehmen, bei dem die Richtung der Geschwindigkeit v der gleichförmigen geradlinigen Bewegung des zweiten Koordinatensystems bezüglich des ersten in x-Richtung des ersten Koordinatensystems zeigt.
Dann brauchen wir den Koordinaten y und z keine Aufmerksamkeit zu schenken, und wir werden in der Minkowski-Welt anstatt des R_4 die Ebene R_2 betrachten bzw. das Koordinatensystem mit dem Ursprung O und den Achsen x (räumlich) und u (zeitlich) (Fig. 26).[8]

Der Koordinatenursprung der Minkowski-Welt bedeutet "hier" und "jetzt". Die x-Achse der Minkowski-Welt ist die Weltlinie aller Punkte (Ereignisse), die sich mit unendlicher Geschwindigkeit entlang der x-Achse des realen Raums bewegen, wir wissen jedoch schon, dass eine solche Geschwindigkeit unmöglich ist.
Die x-Achse in der Minkowskischen Raum-Zeit kann man auch noch als Weltlinie aller Punkte (Ereignisse) mit unveränderter Zeit auslegen, und zwar gleich der Zeit im Anfangspunkt O.

Mit anderen Worten, auf der x-Achse der Minkowski-Welt passiert nichts. Die u-Achse stellt die Veränderungen dar, die im Zeitverlauf im nicht bewegten Anfangspunkt O vor sich gehen.
Wenn sich irgendein materieller Punkt P gleichförmig auf der x-Achse des realen Raumes bewegt, so ist seine Geschwindigkeit konstant.
Da v gleich dem Verhältnis von zurückgelegtem Weg zur Zeit, gemessen durch u, ist, bleibt das Verhältnis $x : u$ konstant.

[7] Man unterscheidet hier und im folgenden zwischen dem realen Raum und der vierdimensionalen Minkowski-Welt, also insbesondere auch zwischen den in ihnen angebrachten Koordinatensystemen. A. d. R.
[8] Der reale Raum lässt sich damit auf einen R_1 (die x-Achse) reduzieren. A. d. R.

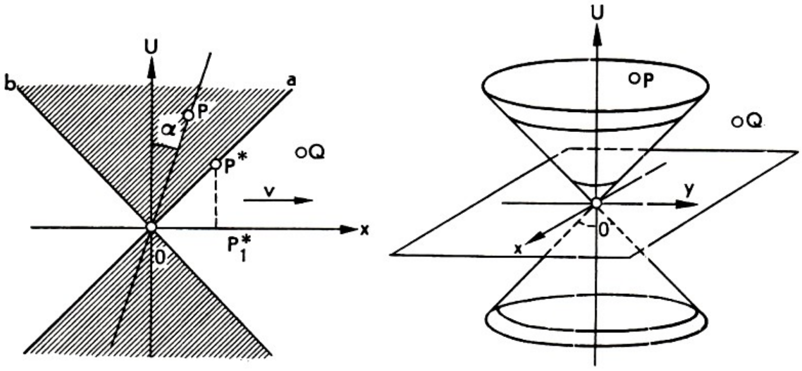


Fig. 26

Das bedeutet, dass die Weltlinie des Punktes P eine Gerade wird, die durch den Ursprung O geht, wobei der Tangens des Winkels der Neigung zur u-Achse gleich v ist, d h. $|\tan\alpha| = v$.

Da jedoch die Geschwindigkeit v kleiner als die Geschwindigkeit c sein soll, so sind nur solche Weltlinien p zugelassen, für welche $|\tan\alpha| < c$ gilt.
Wir können jedoch die Maßstäbe zur Messung von x und u so wählen, dass die Lichtgeschwindigkeit die Größenordnung eins hat. Dann wird $|\tan\alpha| < 1$, d.h. $|\alpha| < 45°$, und alle zugelassenen Weltlinien p liegen im schraffierten Teil der R_2-Ebene, der durch die Geraden a und b begrenzt wird.

Die Teile der Geraden a und b, die oberhalb der x-Achse liegen, sind Weltlinien elektromagnetischer Signale (z.B. Lichtsignale), die im Anfangsmoment vom Punkt O ausgesandt werden. Wenn ein solches Signal nach einiger Zeit im realen Raum den Punkt P_1 auf der x-Achse erreicht, so wird dieses Ereignis in der Minkowski-Welt durch den Punkt P^* auf der Geraden a (oder b) ausgedrückt, wobei P_1 der Projektion P_1^* des Punktes P^* auf die x-Achse der Minkowski-Welt entspricht.

Relativ zum Ursprung O bildet man im unteren schraffierten Teil von R_2 vergangene Ereignisse und im oberen Teil zukünftige Ereignisse ab. Was den Punkt Q der Minkowski-Welt betrifft, der im nicht schraffierten Teil liegt, so führt zu ihm keine Weltlinie vom Punkt O. Zum Punkt Q kann aus O keinerlei materielles Signal gelangen (Teilchen oder Welle), und deshalb können sich die Ereignisse Q und O nicht im kausalen Zusammenhang befinden. Es ist unmöglich zu bestimmen, welches von ihnen dem anderen vorausgeht.[9]

Unter welchen Bedingungen kann ein Beobachter in der Minkowski-Welt nun von zwei Ereignissen angeben, welches von ihnen früher vor sich ging als das andere und folglich dessen Ursache sein könnte?

Es sei der räumliche Abstand zwischen diesen Ereignissen $r = |x_1 - x_2|$ und das Zeitintervall $t = |t_1 - t_2|$ (im gegebenen Koordinatensystem der Minkowski-Welt).
Wenn von P_1 nach P_2 ein Lichtsignal gelangt (oder z.B. ein Radiosignal), so ist, damit es nach P_2 gelangen kann, die Zeit r/c erforderlich. Hier können zwei Fälle eintreten.

Erstens kann diese Zeit kleiner als das Zeitintervall zwischen den Ereignissen P_1 und P_2 sein, d.h. $r/c \geq t_2 - t_1$. Dieser Fall tritt im alltäglichen Leben häufig ein. Ich nehme in der Ferne, im Abstand r, das Aufleuchten eines Blitzes wahr.

[9]Das durch die Geraden a und b bestimmte Gebiet (in Figur 26 schraffiert) wird Lichtkegel und gelegentlich Minkowskischer Kausalitätskegel genannt, sein oberer Teil ($u > 0$) heißt auch Nachkegel, (Zukunft), sein unterer Teil ($u < 0$) Vorkegel (Vergangenheit). Die innerhalb des Lichtkegels befindlichen Punkte P (Ereignisse) nennt man in Bezug auf den Ursprung O zeitartig, die außerhalb des Kegels befindlichen Punkte Q in Bezug auf den Ursprung O raumartig. A. d. R.

Mit dem Entstehen des Blitzes - sagen wir zur Zeit t_1 - ist auch die Hervorbringung der Begleiterscheinung Donner (Ereignis P_1) verbunden. Zur Zeit t_2 höre ich den zugehörigen Donner (Ereignis P_2), der für den Weg r die Zeit $t_2 - t_1 = r/v$ (v Schallgeschwindigkeit, 333 m/s) benötigt hat. Wegen $v < c$ ist offensichtlich, dass die Entstehung des Donners meiner Beobachtung vorausging.

In unserer geometrischen Interpretation bedeutet das, dass sich P_1 und P_2 auf einer Weltlinie im schraffierten Teil von R_2 befinden.

Der zweite Fall tritt dann ein, wenn der Abstand r zwischen den Ereignissen Q_1 und Q_2 so groß wird, dass die Zeit r/c, die benötigt werden würde, damit das Lichtsignal von Q_1 zu Q_2 gelangen kann, größer als das Zeitintervall zwischen den Ereignissen Q_1 und Q_2, d.h. $r/c > t_2 - t_1$ wird.[10]
Solche Fälle trifft man in der Astronomie. Ein Lichtstrahl braucht von dem der Erde nächsten Stern, dem Proxima Centauri, bis zu uns 4,26 Jahre. Deshalb ist es klar, dass das Ereignis O, auf diesem Stern, für welches in der Minkowski- Welt $t_2 - t_1$ kleiner als 4,26 Jahre wäre (hier wäre t_2 der Moment des Ereignisses Q_2, d.h. unserer "Beobachtung"; t_1 der Moment, in welchem das Ereignis Q_1 auf dem Stern stattfand), sich für uns praktisch gleichzeitig mit Q_2 ereignet.

Eine ähnliche Quasigleichzeitigkeit trifft man auch dann an, wenn der Abstand r zwischen den Ereignissen Q_1, Q_2 durchaus nicht allzu groß, doch dafür das Zeitintervall $t_2 - t_1$ zwischen ihnen äußerst klein ist, was in der Mikrowelt auftritt.
Die "Weltlinie" q der quasigleichzeitigen Ereignisse Q_1, Q_2 befindet sich im nicht schraffierten Gebiet von R_2.

Die Quasigleichzeitigkeit zweier Ereignisse Q_1 und Q_2 hängt vom Ort des Beobachters ab; ein anderer Beobachter könnte sich so bewegen, dass er Q_1 vor oder nach oder auch mit Q_2 wahrnimmt.[11]

Sehen wir schließlich von der durch uns auferlegten Einschränkung ab und gehen von der Bewegung auf der Geraden x zur Bewegung in der xy-Ebene über (siehe Fig. 26). Dann haben wir anstelle von R_2 den dreidimensionalen Raum R_3 zu betrachten, mit der dritten (imaginären) Achse als Zeitachse u, wobei nach oben Gesagtem die z-Achse nicht beachtet wird.
Für das rechtwinklige Koordinatensystem $Oxyu$ könnten wir ein Modell im realen Raum konstruieren, doch völlig anschaulich ist auch die zweidimensionale Projektion dieses Modells.

Ohne uns dabei lange aufzuhalten, weisen wir nur darauf hin, dass an Stelle des schraffierten

[10] Eine tatsächliche Beobachtung müsste natürlich $r/c = t_2 - t_1$ liefern, da sonst Überlichtgeschwindigkeit benötigt werden würde. A. d. H.

[11] Die hier diskutierten Fälle erläutern wir nochmals an der Figur 26. Dazu denken wir uns durch P_1^* eine Parallele g zur u-Achse gezogen. Die Punkte P auf g, die im Vorkegel liegen, sind Ereignisse, die sich am gleichen Ort wie P_1^* aber in der Vergangenheit von O abspielen, also dem Beobachter in O bekannt sind (wie z.B. das Entstehen des Donners). Die im Nachkegel befindlichen Punkte P von g stellen Ereignisse dar, die sich in der Zukunft von O am gleichen Ort wie P_1^* abspielen werden (etwa eine Veränderung auf dem Proxima Centauri im Jahr 2000). Was im Augenblick auf der Proxima Centauri geschieht, ist zwar ein objektives physikalisches Ereignis, aber für einen Beobachter auf der Erde nur gedanklich vorhanden, da sich alle physikalischen Erscheinungen nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können, und das Licht benötigt bis zur Erde 4,26 Jahre. P_1^* kann hier als das im Text (zweiter Fall) genannte Q_1 fungieren. Ein in Q_1 angebrachter Lichtkegel würde die u-Achse in einem Abstand von O schneiden, der den 4,26 Lichtjahren entspricht. Vergl. hierzu das im Literaturverzeichnis genannte Buch von Landau/Rumer, S. 38f. A. d. R.

Teiles der Ebene jetzt der innere Teil des Kegels tritt, der von den Weltlinien der Lichtsignale, die vom Ursprung O ausgehen, gebildet wird, und dessen Achse die u-Achse ist. Dieser Kegel heißt Lichtkegel.

Schließlich, wenn Wir noch einen Schritt weiter gehen, sind wir in die Minkowskische Welt geraten. Dann ist es anstatt des Lichtkegels ein Hyperlichtkegel (eine dreidimensionale Hyperoberfläche im R_4), der die in seinem Innern stattfindenden Ereignisse P, die mit dem Ursprung O kausal zusammenhängen, von den Ereignissen Q trennt, die außerhalb des Kegels liegen und mit dem Ursprung O nicht kausal zusammenhängen.

Wir können hier nur sehr oberflächlich über die Anwendung der vierdimensionalen Geometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie sprechen. Diese wurde von Einstein entwickelt (1916) und brachte in unsere Vorstellungen über Raum und Zeit noch radikalere Veränderungen als die spezielle Relativitätstheorie.
Ihr Ziel war, die Newtonsche Gravitationstheorie mit der Relativitätstheorie in Übereinstimmung zu bringen; nach der Newtonschen Theorie ist die allumfassende Anziehungskraft (Gravitation) eine Fernwirkung, die sich blitzartig ausbreitet, keine Zeit benötigt, was im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie steht, nach der Raum und Zeit untrennbar verbunden sind.

Um seine Gravitationstheorie zu schaffen, die selbst eine weitere Präzisierung von Newtons Gravitationstheorie darstellt, fügte Einstein deshalb zu den früher genannten zwei Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie noch ein drittes, das Äquivalenzprinzip, hinzu. Es basiert ebenfalls auf einem experimentellen Fakt, nämlich der Tatsache, dass die Gravitationsmasse eines beliebigen Körpers (d.h. die Masse, die sein Gravitationsfeld hervorruft) gleich seiner trägen Masse ist (d.h. dem Widerstand, den ein sich gleichförmig geradlinig bewegender Körper der Änderung seiner Bewegung entgegensetzt, die von der Wirkung irgendwelcher Kräfte hervorgerufen wird).

Daraus folgt, dass jede nichtträge (nichtgleichförmige und nichtgeradlinige) Bewegung einer Bewegung in irgendeinem Gravitationsfeld äquivalent ist. Jedoch existiert ein Unterschied:
Die Wirkung des Gravitationsfeldes fällt proportional zum Quadrat des Abstandes von seinem Ursprung nach dem Gesetz $k\frac{m}{r^2}$ ab (wobei m die Masse des anziehenden Körpers, r der Abstand zu ihm und k die Gravitationskonstante ist), während z.B. das durch ein sich drehendes System hervorgerufene Feld (d.h. seine zentrifugalen Kräfte) mit dem Abstand unbegrenzt anwächst.

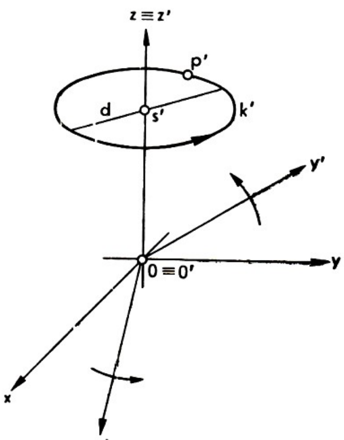


Fig. 27

Trotz alledem kann man die Wirkung von Gravitationsfeldern bei entsprechender Wahl nichtträger Bewegungen ausschließen bzw. ausgleichen (zum Beispiel beobachtet man im fallenden Lift kein Gewicht mehr). Doch das ist nur lokal möglich, praktisch im kleinen, genauer gesagt, in unendlich kleinen Raum-Zeit-Gebieten, in welchen das Feld als homogen betrachtet werden kann.

Im einfachsten Fall, wenn um die z-Achse des Inertialsystems $Oxyz$ sich gleichmäßig das System $O'x'y'z'$ dreht (Fig. 27), werden sich in Übereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie alle Abstände in Bewegungsrichtung verkürzen.

Wenn wir deshalb z.B. im System $O'x'y'z'$ den Kreis k' mit dem Mittelpunkt S' auf der z'-Achse und dem Durchmesser d konstruieren, so verkürzt sich der Maßstab, mit welchem wir seinen Umfang messen (im Vergleich zum Maßstab, mit welchem wir den Umfang des Kreises K mit demselben Durchmesser d im System $Oxyz$ messen).

Dagegen ist der Durchmesser nicht in Geschwindigkeitsrichtung angeordnet, sondern senkrecht dazu. Deshalb verändert sich seine Länge nicht. Daraus folgt, da sich das Verhältnis des Umfanges des Kreises K' zu seinem Durchmesser verändert, dass wir nicht die Zahl π erhalten, wie das im System $Oxyz$ der Fall ist, sondern einen Ausdruck größer als π.
Verallgemeinert kann man sagen, dass in Koordinatensystemen, die keine Inertialsysteme sind, die Geometrie des Raumes nichteuklidisch ist.

Genau dasselbe gilt auch bezüglich der Zeit. Die Uhr, die im Punkt P' auf dem Umfang des Kreises k' untergebracht ist, wird langsamer im Vergleich zur Uhr in seinem Mittelpunkt S' gehen.

Auf diese Weise erweist sich die Raum-Zeit eines Nichtinertialsystems nichteuklidisch. Im allgemeinen Fall wird die Raum-Zeit ein vierdimensionaler Riemannscher Raum R_4.
Er ist gekrümmt, wobei seine Krümmung im gegebenen Gebiet um so größer sein wird, je größer die Masse ist, die in diesem Gebiet konzentriert ist. Folglich hängen die geometrischen Eigenschaften der Raum-Zeit von der Materie, von ihrer Verteilung, ab.

Außerdem hängt die Bewegung der Materie von der Geometrie des R_4 ab: Die Weltlinie des materiellen Punktes ist eine geodätische Linie (d.h. die Linie des kürzesten Abstandes) im R_4, welche bei Vorhandensein des Gravitationsfeldes keine Gerade mehr ist, sondern eine gekrümmte Kurve.
Das Vorzeichen der Krümmung des R_4 hängt von der mittleren Dichte der Masse im Universum ab, doch diese mittlere Dichte kann bis jetzt noch nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden. Deshalb ist auch die Frage, ob der R_4 positiv oder negativ gekrümmt ist, d.h. ob er geschlossen und endlich, jedoch unbegrenzt oder ob er nicht geschlossen und unendlich ist, durch die moderne Astronomie nicht mit Sicherheit zu beantworten.
Ausführlichere Ausführungen über diese Probleme kann der interessierte Leser in dem Buch von Treder "Relativität und Kosmos" finden.

19 Noch einmal über die Bedeutung der mehrdimensionalen Geometrie

Die Bedeutung aller dieser mehrdimensionalen Geometrien, wie auch der Wert der nichteuklidischen Geometrien, liegt nicht nur in der Möglichkeit ihrer Anwendung in den Naturwissenschaften. Wie wir schon sahen, finden sie auch in der Mathematik selbst ihre Anwendung.
Ungeachtet dessen, dass sie gefühlsmäßig-anschaulich nicht vorstellbar sind, geben sie dem Mathematiker doch eine anschauliche Stütze bei seinen Forschungen in der Zahlentheorie, Algebra und Analysis und durch die Mathematik auch bei den Anwendungen in den Gesellschaftswissenschaften.

Der Mathematiker gewöhnt sich ohne unmittelbare Anschaulichkeit an die vierte Dimension, an die mehrdimensionalen Räume, gewöhnt sich daran, sich "in ihnen" wie zu Hause zu fühlen. Uns scheint es so, als würde hier bei dem Mathematiker das gleiche vor sich gehen wie bei einem Menschen, der die Grammatik irgendeiner Sprache nicht kennt, sie nie studierte oder sie schon längst wieder vergaß, diese Sprache jedoch in der Praxis beherrscht. Inwieweit dieser Vergleich richtig ist, soll uns hier nicht weiter beschäftigen. Das ist Sache der Psychologen.

Hilbert, der größte Mathematiker unseres Jahrhunderts, sagte bezüglich der Entdeckung der lobatschewskischen Geometrie, wie überhaupt der unendlichen Menge nichteuklidischer Geometrien, dass diese Entdeckung "die geistig anregendste Errungenschaft unserer Zeit" darstellt. Es scheint, dass diese Äußerung mit Recht auch auf die mehrdimensionale Geometrie ausgedehnt werden könnte, wenn nicht die Entdeckungen der Kybernetik diese noch übertroffen hätten.

Doch die Entdeckung der mehrdimensionalen wie auch der nichteuklidischen Geometrien haben nicht nur Bedeutung für die Mathematik und die Naturwissenschaft.
Nicht weniger bedeuten sie für die Logik und Philosophie, für die Erkenntnistheorie und die Entwicklung einer wissenschaftlichen Weltanschauung, für den Aufbau eines wissenschaftlichen Weltbildes. Die Entstehung dieser abstrakten Geometrien gab der Ausarbeitung axiomatischer Methoden einen mächtigen Impuls, unterstützte die Schaffung und Entwicklung der mathematischen Logik.

Und ohne sie wären keine schnellarbeitenden elektronischen Rechenmaschinen, keine höhere Automation, keine Kybernetik, keine Kosmonautik möglich, könnte die moderne wissenschaftlich-technische Revolution nicht stattfinden.

Diese abstrakten Geometrien widerlegen durch ihr Vorhandensein verschiedene Arten von früher eingewurzelten dogmatischen Vorstellungen, nach denen der konzeptionelle euklidische Raum R_3 der einzig mögliche wäre.
Die idealistische Lehre des deutschen Philosophen Kant über den Raum, derzufolge unsere Äußerungen über räumliche Beziehungen "synthetische a priori-Urteile" sind, d.h., angeblich durch die angeborenen Eigenschaften des menschlichen Geistes gegeben sind, die nicht von der Erfahrung, von Beobachtungen und Experimenten abhängen, verlor damit ihre Grundlage.[12]

Die einzig wissenschaftliche Philosophie, die Philosophie des dialektischen Materialismus entwickelt eine harmonische, logisch folgerichtige, sich aus allen Erfahrungen der Menschheit ergebende und durch die produktive und wissenschaftliche Praxis des täglichen Lebens geprüfte Erkenntnistheorie des Raums und der Zeit.
Den Gedanken Engels' folgend legte Lenin ihre grundlegenden Aussagen im fünften Abschnitt des dritten Kapitels des "Materialismus und Empiriokritizismus" dar. In kürzester Form können sie folgendermaßen formuliert werden:

Die Welt ist die sich bewegende Materie. Raum und Zeit sind grundlegende Existenzformen der Materie. Es existiert keine Materie ohne Bewegung, ohne Raum und Zeit, genauso wie keine Bewegung und auch nicht Raum und Zeit ohne Materie existieren. Diese objektive Realität des Raums und der Zeit ist die Quelle der Wahrnehmung durch das menschliche Gehirn.
Das heißt, sie sind keine Formen des menschlichen Geistes, sondern existieren unabhängig von den Empfindungen der Menschen und der Menschheit und unabhängig davon, ob sie sie erkennen.

Doch die menschlichen Vorstellungen über Raum und Zeit, ihre relativen Begriffe über sie, die sich mit ihrer historischen Entwicklung verändern, alles nähert sich den objektiven Formen des Seins an, welche sie aber nie vollkommen erreichen werden. Es können sich unsere Vorstellungen über die Geometrie der realen Raum-Zeit ändern und ändern die Vorstellungen darüber, ob sie

[12] Der amerikanische Mathematiker Paul Cohen bewies 1963, dass neben der herkömmlichen auch eine andere, ebenso logisch widerspruchslose Arithmetik möglich ist. Beide basieren auf verschiedenen Axiomensystemen der Mengenlehre. Damit fiel aber die Behauptung Kants über die angebliche Apriorität des Zeitbegriffs, weil er ihn mit der Arithmetik verbunden hatte.

euklidisch oder nichteuklidisch ist, offen oder abgeschlossen, ob diejenigen Eigenschaften, die uns aus Beobachtungen unseres Teils des Weltalls bekannt sind (einschließlich der Dimension), universell gelten.
Immer gilt jedoch, was Lenin schrieb:

"Die Lehre der Wissenschaft von der Struktur der Materie, von der chemischen Beschaffenheit der Nahrung, vom Atom und Elektron kann veralten und veraltet mit jedem Tage, doch nicht veralten kann die Wahrheit, dass der Mensch von Gedanken nicht satt wird und dass er mit platonischer Liebe allein keine Kinder zeugen kann.
Eine Philosophie aber, die die objektive Realität von Zeit und Raum leugnet, ist ebenso unsinnig, innerlich faul und falsch wie die Leugnung dieser letzten Wahrheiten. Die Spitzfindigkeiten der Idealisten und Agnostiker sind im großen und ganzen ebenso heuchlerisch wie das Predigen der platonischen Liebe durch die Pharisäer![13]

Mehr als sechs Jahrzehnte stürmischer Entwicklung der Naturwissenschaft und Mathematik sind seit der Zeit vergangen, da Lenin diese Zeilen schrieb.
Sie brachten eine Vielzahl weiterer Beweise für die Grundlosigkeit der idealistischen und agnostizistischen Annahmen über Raum und Zeit. Außerdem wurde offensichtlich, wie scharfblickend Lenin war, indem er feststellte: "Materialismus und Idealismus unterscheiden sich durch die eine oder die andere Beantwortung der Frage nach der Quelle unserer Erkenntnis, nach dem Verhältnis der Erkenntnis (und des 'Psychischen' überhaupt) zur physischen Welt, während die Frage der Struktur der Materie, die Frage der Atome und Elektronen eine Frage ist, die ausschließlich diese 'physische Welt' betrifft.
Denn die einzige 'Eigenschaft' der Materie, an deren Anerkennung der philosophische Materialismus gebunden ist, ist die Eigenschaft, objektive Realität zu sein, außerhalb unseres Bewusstseins zu existieren."[14]

In der Wissenschaft trifft man laufend auf Fragen, die im gegebenen Moment noch nicht gelöst sind, auf welche man verschiedene, manchmal geradezu entgegengesetzte, heiß umstrittene, doch ebenso unbewiesene Antworten vorschlägt, und auch auf Fragen, von denen sogar unbekannt ist, ob ihre Lösung in der üblichen Art und auf dem gegenwärtigen Niveau der Erkenntnis überhaupt möglich ist.

So kann z.B. die Mathematik heute (und schon mehr als zweitausend Jahre) keine Antwort auf die Frage geben, ob ungerade vollkommene Zahlen existieren (d.h. ganze positive Zahlen, die gleich der Summe ihrer Teiler sind; gerade vollkommene Zahlen wie $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ kannte schon Pythagoras), und sie ist nicht einmal in der Lage zu beweisen, ob es möglich ist, wenn man von den Axiomen der modernen Mathematik ausgeht, diese Frage zu lösen.

So ist auch die Physik heute z.B. nicht in der Lage, die Frage zu lösen, welche innere Struktur das Elektron hat und ob es überhaupt zulässig ist, allgemein auf das Elektron den Begriff "Struktur" anzuwenden.

Ebenso ist man auch in der modernen Astronomie nicht fähig, beweiskräftig ein Streitgespräch darüber zu schlichten, ob das Raum-Zeit-Universum unendlich oder endlich ist, wenn auch unbegrenzt, oder ob die Begriffe "endlich" und "unendlich" gar nicht darauf anwendbar sind.

In allen diesen und in einer Unzahl ähnlicher Fälle, wo die Wissenschaft keine Antworten auf

[13] W.I. Lenin, Werke, Dietz Verlag, Berlin 1968, Bd. 14, S. 182
[14] ebenda

die in ihr entstehenden Fragen besitzt, zeugt das nicht von ihrer Schwäche, nicht von der Schwäche des menschlichen Geistes. Eher umgekehrt, es ist eine Aussage seiner Stärke, seiner Fähigkeit sich selbst zu begreifen, seine eigenen Möglichkeiten zu erkennen, die die reale historische Situation bestimmen.
Das gibt auch die Möglichkeit, einerseits nicht aufzugeben und andererseits zu glauben, dass alles schon gelöst ist, neue Wege zu suchen, um unsere begrenzte Erkenntnis der Bedingungen zu überwinden.

Dadurch unterscheidet sich die Wissenschaft von der Religion, die annimmt, dass ihre Dogmen, die blind als Wahrheit angenommen werden, ohne Beweis und kritische Überprüfung, als unveränderliche, angeblich unanfechtbare Wahrheiten, alle Probleme ein für allemal entscheiden.

Zu den bis jetzt ungelösten Problemen der Wissenschaft, ähnlich denen, die wir eben erst erwähnten, gehört zweifellos auch die Frage, ob die Zahl der Dimensionen des dreidimensionalen Raums universell ist oder nur das Gebiet des Universums charakterisiert, welches bisher unserer Erkenntnis zugänglich war, d.h. ein Gebiet im Maßstab von 10^{-15} bis 10^{28} cm.

Es ist offensichtlich, dass hier derjenige Philosoph oder Naturwissenschaftler, welcher die bisher noch ungelösten Fragen dadurch "lösen" wollte, dass er, geführt von seinen Sympathien die eine Antwort hinsichtlich einer gegebenen Einzelwissenschaft als echt wissenschaftlich, vom Gesichtspunkt der Philosophie als materialistisch und dialektisch bezeichnet, während er andere Antworten, die der ersten widersprächen, als nichtwissenschaftlich oder pseudowissenschaftlich abstempelt und zugleich als idealistisch, agnostizistisch, mechanistisch, metaphysisch abstempelt, sowohl der Einzelwissenschaft als auch der Philosophie des dialektischen Materialismus einen Bärendienst erweisen würde.

In der Tat kann man niemals den Fakt, dass man sich die vierte Dimension nicht sinnlich-anschaulich vorstellen kann, als Beweis ihrer Nichtexistenz anerkennen. Denn anschaulich kann man sich weder die Endlichkeit noch die Unendlichkeit des realen dreidimensionalen Raums des Universums, weder die dialektische Einheit seiner Endlichkeit und Unendlichkeit noch die Tatsache, dass auf ihn diese Begriffe gar nicht anwendbar sind, vorstellen.

Und doch muss eine der vier Alternativen gelten. Nun, so versteht sich, darf man das nicht etwa gar als einen Beweis dafür ausdeuten, dass der reale Raum nicht existieren kann. Wir können daraus nur folgern, dass unsere Vorstellungen über den Raum beschränkt sind, unvollständig, vereinfacht, dass sie historisch bedingt sind durch das allgemeine Wissensniveau, das die Menschheit in der gegebenen Epoche erreicht hat.
Diejenigen Züge der Wirklichkeit, die wir bei ihrer Idealisierung, bei der Schaffung ihrer geometrischen Abbilder in einer bestimmten Etappe als "unwesentlich" fallen lassen, werden in einer späteren Etappe wesentlich, und wir ziehen sie mit in Betracht, wie z.B. die Krümmung des Raums bei der Entstehung der nichteuklidischen Geometrie.

Könnte in solch einem Fall es sich nicht auch einmal erweisen, dass der vierdimensionale (aber auch der zweidimensionale und allgemein der n-dimensionale) Raum ganz und gar nicht nur konzeptionell ist, sondern irgendwo real existiert?

Kann nicht die Materie so aufgebaut sein, dass wir z.B. in subatomaren Maßstäben, innerhalb der Grenzen unmittelbarer Wechselwirkung hypothetischer Gravitonen (den Quanten des Gravitationsfeldes), feststellen, dass die dritte räumliche Dimension nicht vorhanden ist, die Anziehungskräfte und Abstoßungskräfte nur in einer Ebene wirken?

Und umgekehrt, kann nicht in irgendwelchen Gebieten des Universums, deren Entfernung von uns im Vergleich zur Ausdehnung unserer Metagalaxis unvorstellbar groß ist, der Raum vier Dimensionen besitzen?

Es ist klar, dass alles dies rein spekulativ ist, phantastische Vorstellungen, die durch keine Experimente und beobachteten Fakten wissenschaftlich untermauert sind. Gleichzeitig widersprechen sie aber auch nicht irgendwelchen wissenschaftlichen Tatsachen oder den durch die Wissenschaft aufgedeckten Gesetzmäßigkeiten.
Nichts Übernatürliches liegt in der bis jetzt noch nicht erkannten Existenz einer vierten räumlichen Dimension irgendwo in der materiellen Welt.

Die Möglichkeit, von vornherein ihre Existenz kategorisch abzulehnen bedeutet deshalb, eine dogmatische Position einzunehmen, gewissermaßen mit umgekehrten Vorzeichen den gleichen Fehler zu begehen wie derjenige, der die Möglichkeit der realen Existenz eines vierdimensionalen Raums schon als Beweis für die tatsächliche Existenz ausgeben möchte.

Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus hätten wir nur dann das Recht zu behaupten, dass die vierte räumliche Dimension real nicht existieren kann, wenn irgendwelche Ursachen dafür bekannt wären, dass die materielle Welt drei Dimensionen besitzen muss und nicht vier oder zwei, wenn es gelingen würde, dieses Charakteristikum der Materie, nämlich ihre räumliche Dimension, aus irgendwelchen anderen, mehr fundamentaleren Gesetzmäßigkeiten herzuleiten.
Weil die moderne Physik bewies, dass Raum und Zeit bei allen ihren Unterschieden untrennbar miteinander verbunden sind, wird das Problem der Begründung der Dreidimensionalität des Raums Teil eines allgemeineren Problems, des Problems der Begründung der vierdimensionalen Raum-Zeit.

Doch ähnlich wie beim Raum, stellt sich auch die Frage für die Zeit: Warum ist sie eindimensional und nicht zweidimensional?

Obwohl viele hervorragende Wissenschaftler die Zwangsläufigkeit von drei Dimensionen des Raums und einer Dimension der Zeit, nicht mehr und nicht weniger, zu begründen versuchten und obwohl in diesem Zusammenhang eine Reihe interessanter Gedanken formuliert wurden, kann die Wissenschaft auf diese Frage im Moment noch keine befriedigende Antwort geben.
Doch dabei klärte sich mit Gewissheit, dass eine solche Begründung nicht physiologisch-psychologisch sein kann (d.h. angeblich aus den Eigenschaften unseres Nervensystems und der Psyche folgend), nicht rein mathematisch, aber selbstverständlich auch nicht spekulativ-philosophisch.
Sie muss sich auf weitere tiefgehende Untersuchungen der physikalischen Gesetzmäßigkeit der Materie stützen.

20 Die Anregung Kants

Im Jahre 1764 rückte Kant in seiner Arbeit "Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte ..." die Voraussetzung in den Vordergrund, dass die Dreidimensionalität des Raums sich auf die allgemeinste Eigenschaft der Materie gründet - auf die weltweite Gravitation.
Das war die sogenannte "vorkritische" Periode seiner philosophischen Entwicklung, als er noch auf der Position des Rationalismus stand, zum naturwissenschaftlichen Materialismus neigte, bevor er zum Idealisten und Agnostizisten wurde, was später eintrat, als er alle Eigenschaften des Raums und somit auch seine Dreidimensionalität, als Eigenschaften unseres "Ichs"

betrachtete.[15]
Aber ursprünglich versuchte Kant, die Dreidimensionalität des Raums aus dem Newtonschen Gesetz der reziproken Quadrate herzuleiten:

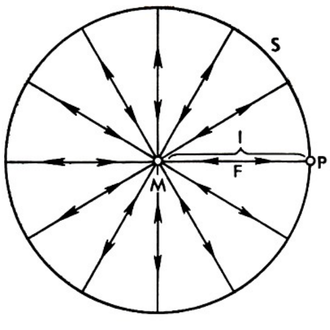


Fig. 28

Die Anziehungskraft der Körper ist umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes. Die Kraft F, die von einer anziehenden punktförmigen Masse M ausgeht (oder von einer punktförmigen elektrischen Ladung, in diesem Fall haben wir das Gesetz des französischen Physikers Coulomb, das dieselbe mathematische Form wie auch das Gravitationsgesetz hat), die mit einer anderen Masse (oder Ladung) P wechselwirkt, welche sich im Abstand r vom M befindet, wird um so kleiner, je größer die Fläche S der Kugeloberfläche ist, die den Radius r und das Zentrum in M hat (Fig. 28).

Das ist so, weil die Anzahl der Kraftlinien, die vom Zentrum der Kugel ausgehen und pro Einheitsfläche aus der Oberfläche austreten, um so geringer ist, je größer die Kugeloberfläche ist.
Wenn also der Raum dreidimensional ist, so ist die Kugeloberfläche gleich $S = 4\pi r^2$ und folglich ist F umgekehrt proportional zu r^2.
Zu der Überlegung Kants kann man noch hinzufügen, dass im zweidimensionalen Raum statt der Kugel ein Kreis zu nehmen wäre, dessen Umfang $S = 2\pi r$ ist, und folglich wäre F nicht dem Quadrat, sondern der ersten Potenz von r umgekehrt proportional.

Wenn der Raum vierdimensional wäre, so wäre die Oberfläche der Hypersphäre gleich $S = 2\pi^2 r^3$, und F wäre zu r^3 umgekehrt proportional.

Wie wir gesehen haben, hängt Kants Begründung der Dreidimensionalität des Raumes vom Newtonschen Gesetz (oder Coulombschen) ab, welches vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus nur angenähert gilt.[16]
Obwohl im Detail diese Hypothese Kants ungenau ist, steckt in ihr doch ein gesunder Kern. Das gleiche lässt sich auch von einer anderen Hypothese Kants sagen, nämlich von der Hypothese über die Entstehung der Planetensysteme, die von ihm formuliert (1755) und unabhängig in einer ähnlichen Form von Laplace (1796) mathematisch ausgearbeitet wurde.

Man darf jedoch nicht übersehen, dass Kant schon damals seine folgenden Gedanken über den Raum hinzugefügt hat: "Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumsarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte. Wenn es möglich ist, dass es Ausdehnungen von anderen Abmessungen gäbe, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass sie Gott wirklich irgendwo angebracht hat.[17]

Kant verfuhr also schon damals so, wie er 35 Jahre später bezüglich der "Kritik der reinen Vernunft" schrieb: "Ich musste also das Wissen aufheben, um zum Glauben Platz zu bekom-

[15] Kant wirkte durch seine frühen materialistischen Arbeiten über Kosmologie und Dialektik bahnbrechend. Sein bedeutendstes Werk, die "Kritik der reinen Vernunft" stellt ein "Koalitionssystem von Materialismus und Idealismus" (Lenin) dar. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Bücher von M. Thom "Immanuel Kant", Urania Verlag 1974 und M. Buhr "Immanuel Kant", Reclam Verlag 1968 (RUB Bd. 432). A. d. R.

[16] Eine Modifikation des Newtonschen (oder Coulombschen) Gesetzes erfordert, um die Begründung der Dreidimensionalität des Raums beibehalten zu können, eine gleichzeitige Modifikation der Raumvorstellung, die im Übergang von einer euklidischen zu einer nichteuklidischen Baumstruktur bestehen könnte. A. d. R.

[17] I. Kant. "Frühschriften", Berlin 1961, Bd. 2, S. 380.

men..."[18]

Über andere Versuche, auch unvollständige, die (3+1)- Dimensionalität der Raum-Zeit aus der modernen Physik zu begründen, kann der Leser mehr im Buch von A. M. Mostepanenko und M. W. Mostepanenko "Vierdimensionalität von Raum und Zeit" erfahren, das sich vorteilhaft durch kühne Abkehr von einer scholastischen Behandlung der philosophischen Probleme der Naturwissenschaften auszeichnet, was in unserer marxistischen Literatur bei weitem noch nicht überall der Fall ist.

Wir wollen hier nur noch das folgende bemerken. Die deutsche Mathematikerin Emmy Noether zeigte 1918, dass in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes für beliebige isolierte Systeme (d.h. solche, deren Wechselwirkung mit der Umwelt vernachlässigt werden kann) drei fundamentale Erhaltungsgesetze eng mit den Grundeigenschaften von Raum und Zeit verknüpft sind. Aus der Gleichartigkeit (Homogenität) der Zeit, d.h. daraus, dass sie in allen Momenten gleichermaßen abläuft, resultiert das Gesetz der Erhaltung der Energie.

Dieses Gesetz besagt, dass bei allen Prozessen, die im System ablaufen, die Gesamtenergie E konstant bleibt. Aus der Homogenität des Raums, d.h. der Gleichheit seiner Eigenschaften an allen Punkten, resultiert das Gesetz der Erhaltung der Bewegungsgröße (des Impulses) $\vec{p} = m\vec{v}$, wobei m die Masse und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Dieses Gesetz besagt, dass die Summe (Vektorsumme, da der Impuls $\vec{p}$ ein Vektor ist) der Bewegungsgrößen aller Teilchen des Systems unverändert bei beliebigen Prozessen bleibt, die in ihm ablaufen.
Schließlich folgt aus der Isotropie des Raums, d.h. aus der Unabhängigkeit seiner Eigenschaften von der Richtung, das Gesetz der Erhaltung des Drehmomentes $M = \vec{r} \times \vec{p}$, wobei $\vec{r}$ der Radiusvektor des Teilchens ist und $\vec{r} \times \vec{p}$ das Vektorprodukt dieses Radiusvektors mit dem Impuls $\vec{p}$.

Dieser Zusammenhang zwischen den Eigenschaften von Raum und Zeit und den genannten Erhaltungssätzen zeigt, dass wahrscheinlich die Lösung des Problems, die Anzahl der Dimensionen zu begründen, in Verbindung mit der Invarianz der Wechselwirkungen zu suchen ist. Es scheint, dass in dem gleichen Maße, wie man eine befriedigende kosmogonische Theorie nicht nur aus der Mechanik heraus begründen kann, sondern das gesamte moderne physikalische und astronomische Wissen berücksichtigen muss, auch die Begründung der Zahl der Dimensionen der realen Raum-Zeit nur komplex möglich ist:

Sie muss auch die Probleme der Endlichkeit und Unendlichkeit, Stetigkeit und Unstetigkeit, sowie das Problem des Wesens der Gravitation mit umfassen. Und genauso wie jedes beliebige physikalische Gesetz nur in einem bestimmten Bereich gültig ist, darf nicht die Möglichkeit ausgeschlossen werden, dass die (3+1)-Dimensionalität der Raum-Zeit nicht universell ist.
Und weil sie eine topologische Eigenschaft ist, die von dem Charakter der Umgebung eines Punktes, von ihrem Zusammenhang abhängt, und letzterer seinerseits den Charakter des kausalen Zusammenhanges der Ereignisse bedingt, den Charakter ihrer Determiniertheit, so wäre zu erwarten, dass auch die uns gewohnte Kausalität, der gewohnte Determinismus, sich als im Weltall nicht universell gültig erweist.

Dieser Umstand darf nicht als Argument gegen die Möglichkeit der Existenz einer von der (3+1)-dimensionalen Raum-Zeit verschiedenen äußeren Makrowelt dienen. Denn bei dieser Annahme verschwindet die Determiniertheit der Ereignisse nicht, sondern verändert sich nur, ähnlich wie in der Quantenmechanik (obwohl möglicherweise noch tiefergehende Änderungen

[18] I. Kant. "Kritik der reinen Vernunft", Leipzig 1971, Vorrede zur zweiten Ausgabe, S. 32.

möglich wären), wo die klassische mechanische Determiniertheit durch eine andere, dialektische, Zufälligkeit und Notwendigkeit vereinigende ersetzt wird, was sich in Übereinstimmung mit den Ansichten der marxistischen Philosophie befindet.

Und wenn sich einmal zeigen sollte, dass irgendwo, in irgendwelchen Gebieten der Mikrowelt oder Megawelt oder in beiden, Raum und Zeit vier oder nur zwei Dimensionen besitzen, so hören sie deswegen nicht auf, objektiv zu existieren, unabhängig davon, ob sie jemand erkennt oder nicht, ebenso wie sie auch schon existierten, als es weder die Erde noch den Menschen mit seinem denkenden Verstand gab.

In diesem Sinne steht die Hypothese der möglichen realen Existenz der vierten Dimension nicht im Gegensatz zur Wissenschaft, nicht im Widerspruch zur wissenschaftlichen Weltanschauung des dialektischen Materialismus. Diese Überzeugung hat wenigstens der Autor der vorliegenden Arbeit.

21 Vierdimensionalität und Spiritismus

Die Idee der vierten Dimension erschien in der Geschichte des menschlichen Denkens zuerst keineswegs als wissenschaftliche Idee. Auch später bemächtigten sich ihrer äußerste Mystik und finsterster Aberglaube.

Schon im Altertum erzählt der angesehene griechische Philosoph und Idealist Platon im VII. Buch seines Werkes "Der Staat" über Gefangene, die am Eingang einer Höhle so gefesselt waren, dass sie sich nicht bewegen konnten und, nur die gegenüberliegende Wand, ihre Schatten auf ihr und die Schatten der Gegenstände, die sich zufällig vor dem Eingang der Höhle befanden, sehen konnten.
Letzten Endes identifizierten sich diese Unglücklichen mit den Schatten. Die Welt schien ihnen eine Welt der Schatten von irgendwas Überirdischem, einer vollkommeneren Welt, einer Welt der Ideen zu sein.

Bei den Neoplatonisten, einer philosophischen Schule, die noch im Mittelalter fortexistierte und sogar noch am Anfang unserer neuen Zeit und die ihre mystischen Ansichten nicht nur von Platon schöpften, sondern auch aus verschiedenen orientalischen religiösen Lehren, fand die Idee, die reale Welt als Schatten einer überirdischen Welt zu begreifen, allgemeine Anerkennung.
Soviel mir bekannt ist, erschien der Ausdruck "vierte Dimension" - quarta dimensio - in der Literatur tatsächlich zuerst in Verbindung mit der überirdischen, "jenseitigen" Welt, und zwar in dem Werke "Enchiridion metaphysicum" (1671) des englischen Mystikers und Cambridger Neoplatonikers H. Moore.
Die an diese vierdimensionale Welt Glaubenden stellten sich vor, dass diese durch Geister Verstorbener bevölkert ist. Als Beweis verwiesen sie auf "Wunder", die angeblich durch Geister hervorgerufen werden, die in unserer Welt "erscheinen" können.

Die Mystiker des jüdischen Glaubens führten Zitate aus den kabbalistischen Büchern "Schar" und "Sefer Jezira" an; die Muselmanen, besonders die Parteigänger des Sufismus, verweisen auf einige Suren des Korans und auf die Hadithen (die "geheiligten" Traditionen); die Christen auf das Evangelium und die Apokryphen, biblische Bücher, die nicht von der offiziellen Kirche anerkannt waren.

Wie "überzeugend" diese Beweise waren, zeigen folgende Beispiele. Im zweiten Brief des Paulus an die Korinther (XII, 2 u. 3) ist gesagt, dass Paulus einen Menschen kannte, der "... - ob in

dem Leibe, ich weiß es nicht, ob außer dem Leibe, ich weiß es nicht, Gott weiß es - entrückt wurde bis in den dritten Himmel".
Dies war ausreichend dafür, es als mystischen Übergang in die vierte Dimension auszudeuten. Oder in seinem Brief an die Epheser (III, 18) spricht er über "die Breite und Länge, die Höhe und Tiefe". Sind hier nicht die vier Dimensionen der Welt der Geister aufgezählt!

Schließlich wird in der "Offenbarung des Johannes" gesagt, dass Johannes "im Geist gehoben" wurde und eine "vierquadratische Stadt" sah (XXI 10 u. 16). Selbstverständlich bedeutet das einen vierdimensionalen Hyperkubus, nichts anderes!

Spiritismus ist der Glaube an die Existenz der Geister Verstorbener, die in einem besonderen Reich außerhalb unserer dreidimensionalen Welt hausen. Auf dem Wege einer geheimnisvollen, nichtmateriellen Ausstrahlung - Emanation - erscheinen sie den Personen, die besonders durch die Fähigkeit begnadet sind, sich diese Emanation vorzustellen.
Diese Personen werden Medien (Vermittler) genannt. Die sich dieser Erscheinung unterwerfen, fallen dabei in einen Trancezustand (Zustand der Unzurechnungsfähigkeit), manchmal echt (wissenschaftlich erklärbar durch Hypnose und Autosuggestion bei nervlich kranken und psychisch labilen Menschen), manchmal einfach gespielt (von Scharlatanen der verschiedensten Art).

In diesem Zustand können die Medien angeblich die Gedanken der Geister lesen, ihre Stimme hören, sie sehen und sie sogar anrufen. Sie sind auch fähig, nach Wunsch verschiedene "astrale" (aus einer überirdischen Welt) Körper zu "materialisieren", "Psychokinesis"(die Fortbewegung materieller Körper über eine Entfernung allein kraft des Willens) zu bewirken, mit einem Wort, ein Wunder zu vollbringen.

Dieses Dunkelmännertum entstand im 19. Jahrhundert in den Vereinigten Staaten von Amerika unter den Bedingungen des verschärften politischen Kampfes zwischen den Anhängern und Gegnern der Negersklaverei. Es kam schnell in Mode und breitete sich auch auf Europa aus.
Durch Geisterseherei, Geisterklopfen, Tischdrehen wurden besonders bestimmte Kreise der herrschenden Klasse hingerissen, die nicht an die Fortdauer ihres Schicksals glaubten.
Aristokraten und Bourgeois hielten in ihren Salons spiritistische "Séancen" ab, in denen Scharlatane und psychisch minderwertige "Medien" Geister "beschworen", zum Beispiel König Salomon, den blutigen Räuber Rinaldo Rinaldini oder einen angesehenen Ahn des Hausherren.

Sie nötigten sie, durch Tischverrücken und Klopfen zu Verkündigungen auf die von den Anwesenden gestellten Fragen über ihre persönliche Zukunft, über die Kurse der Aktien an der Börse, über die zukünftige Entwicklung des Landes und die Weltpolitik zu antworten.

Die Séancen fanden im geheimnisvollen Halbdunkeln statt. "Das Medium" war sehr oft ein junges Mädchen und lag in ein schwarzes Kleid gehüllt auf einer Erhöhung und gelangte allmählich in den "Trancezustand", bis endlich der "Geist" erschien, - eine weibliche Figur in weiß.

Einige "Medien" traten öffentlich für Geld auf, wobei sie verschiedene Arten von Tricks zeigten, angeblich durch Realisierung der vierten Dimension, z.B. das Umwenden einer geschlossenen metallischen Kugel oder auch eines Handschuhs, ohne Löcher hinein zu machen, das Hineinziehen von einzelnen abgeschlossenen Ringen in andere, ohne sie zu zerreißen usw., bis man sie als Schwindler entlarvte.

Die Spiritisten befreundeten sich mit den Anhängern des Mesmerismus, der Lehre des österreichischen Arztes Mesmer über den "tierischen Magnetismus" und über den geheimnisvollen magnetischen Einfluss der Planeten auf einen Menschen, der sich seiner bemächtigen und ihn auf andere Menschen ausstrahlen kann. Die Grundlosigkeit des Mesmerismus wurde 1774 von einer Kommission festgestellt, deren Vorsitz der bekannte französische Chemiker Lavoisier hatte.

Später, in der imperialistischen Epoche, trat der Spiritismus in Verbindung mit der Antroposophie auf. Diese "geheimnisvolle Wissenschaft" des deutschen Mystikers Steiner ist eine Lehre über den göttlichen Menschen, über die drei in ihm kämpfenden Welten (der höchsten - der geistigen, der mittleren - der astralen, der niedrigsten - der materiellen) und über die Erkenntnis des wahren Wesens und das Ziel des menschlichen Lebens und der menschlichen Geschichte durch Offenbarung, Erleuchtung und Gotteserkenntnis.

Mit dem Spiritismus belogen sich auch einige große Gelehrte selbst. In der Regel begannen sie als Erforscher der spiritistischen Erscheinungen, verhielten sich ihm gegenüber misstrauisch, nörgelten an den Experimenten herum, und die "Geister" waren beleidigt und erschienen nicht. Doch allmählich ließen sich diese Wissenschaftler, die hervorragende Spezialisten auf ihrem begrenzten Gebiet und die häufig vom Misstrauen gegenüber dem theoretischen Denken und der Dialektik erfüllte Empiriker waren, vertrauensselig bearbeiten, und dann begannen sich die Fremdlinge aus dem Jenseits sogar auf Photographien zu zeigen.

Mit einem Wort, es kam soweit, wie es Engels beschrieb: "Die Geister beweisen das Dasein der vierten Dimension, wie die vierte Dimension einsteht für das Dasein der Geister."[19]

In England gehörte Wallace zu diesen Gelehrten, die diese Betrügerei nicht durchschauten. Er schuf gleichzeitig mit Darwin die Evolutionstheorie der natürlichen Auswahl, wobei er jedoch idealistische Ansichten zugrunde legte, nach denen die Entstehung des Lebens auf der Erde und die Abstammung des Menschen vor sich gehen sollten.

Ein Spiritist wurde ebenfalls der englische Chemiker und Physiker Crookes, der das Element Thallium entdeckte, elektrische Gasentladungen studierte, den radiometrischen Effekt entdeckte und die "Lichtmühle" konstruierte - ein Radiometer für die Messung dieses Effekts, und später das Spinthariskop konstruierte, ein Instrument, das Alpha-Teilchen registriert.

In Deutschland propagierte den Spiritismus der Astrophysiker Zöllner, der sich mit der Astrophotometrie und mit der spektrometrischen Untersuchung der Sonnenprotuberanz befasste.[20]
In Russland verbreitete sich die Begeisterung für den Spiritismus wie auch für andere "okkulte Wissenschaften" in den siebziger-achtziger Jahren, während der Vollendung der Industriereformen.
Unter den Einfluss des Spiritismus gerieten nicht nur solche eingefleischten Mystiker wie A. N. Aksakow, sondern auch solche berühmten Wissenschaftler wie der Chemiker Butlerow.

Die Gefahr der weiteren Verbreitung dieses wilden Aberglaubens, sein Durchsickern auch in einige Schichten der Arbeiterklasse war so ernst, dass sich Engels 1878 in dem bekannten Artikel "Naturforschung in der Geisterwelt" dagegen wandte.
Im Jahr 1875 bildete die Physikalische Gesellschaft der Petersburger Universität eine Kommission von 12 Mitgliedern, zu der auch Mendelejew gehörte, zur Untersuchung der Authentizität der spiritistischen Erscheinungen. Das von Mendelejew veröffentlichte Protokoll der Kommis-

[19] F. Engels "Dialektik der Natur", Berlin 1958, S. 49.

[20] In der Kosmologie führte Zöllner als erster eine Abänderung des unendlichen euklidischen Newtonschen Raums durch, indem er ihn durch einen endlichen Riemannschen Kosmos (wie ihn der Einsteinsche Kosmos der relativistischen Kosmologie darstellt) ersetzte. A. d. R.

sion besagte, dass als Resultat der Arbeit der Kommission, die diese Frage untersuchte, festgestellt wurde, dass "die spiritistischen Erscheinungen durch unbewusste Bewegungen oder bewussten Schwindel entstehen, und die spiritistische Lehre Aberglaube ist".

In seiner Komödie "Die Früchte der Aufklärung" (1886-1889) machte L. N. Tolstoi den Enthusiasmus für den Spiritismus in bestimmten Schichten der russischen "gebildeten Gesellschaft" der damaligen Zeit lächerlich.

Im Zusammenhang damit, dass die Begeisterung für den Spiritismus in einigen Wissenschaftlern geweckt wurde, stützten sich die Anhänger dieser reaktionären Ideen nicht nur auf die Bibel und auf mystische religiöse Lehren des alten Orients, sondern benutzten "wissenschaftliche" Beweise und philosophische Argumente.

Zum Einsatz kamen elektrische Geräte und Signalisation, dann auch die junge Photographie, die "authentische" Aufnahmen der Gespenster und Erscheinungen lieferte, und auch die mathematische Theorie über die vierte Dimension.

22 Der Wissenschaftler Zöllner in der Welt der Geister

Einer der führenden "Theoretiker" des Spiritismus war der schon erwähnte Zöllner. Ein gewisser Slade, der sich selbst als ein "Medium" ausgab, das in direkter Verbindung mit den Geistern steht, machte Zöllner seinen Hokuspokus in einem verdunkelten Raum vor.

Und Zöllner glaubte fest daran, dass diese "unerklärlichen" Erscheinungen nur durch die reale Existenz und den aktiven Einfluss der vierten Dimension des Raums, des Aufenthaltsortes der Geister, erklärt werden können.
In seinen "Wissenschaftlichen Abhandlungen" (1878) versucht Zöllner zum ersten Mal die Notwendigkeit der Ergänzung unserer Vorstellungen über den realen Raum durch eine weitere, vierte Dimension zu begründen. Dabei geht er von Kant aus, der 1768 in seinem Werk "Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume" behauptete, dass ein Widerspruch darin besteht, dass es dreidimensionale Körper gibt, die begrifflich identisch, doch offensichtlich unterschiedlich sind, wie die rechte und die linke Hand, Schnecken mit Rechts- und Linkswindung, ein Gegenstand und sein Spiegelbild.

Daraus folgt angeblich nach Zöllner, dass dieser Widerspruch nur durch die Existenz der vierten Dimension beseitigt wird.[21] Jedoch ist hier die Ausgangsbehauptung Kants, dass die genannten Körper "begrifflich identisch" sind, falsch. Sie sind nicht identisch, sondern symmetrisch bezüglich einer Ebene im Raum R_3. Symmetrie ist nicht Identität.

Nach solch einem gelungenen "Beweis" der Notwendigkeit der Existenz der vierten räumlichen Dimension in unserer realen Welt macht Zöllner einen nicht minder erfolgreichen Versuch, ihre Existenz zu beweisen. Er überlegt so:
Wenn wir die flache Hand umdrehen, so verändert sich ihr Schatten, aus dem Schatten der rechten Hand entsteht der Schatten der linken und umgekehrt. Analog sind zwei dreidimensionale symmetrische Körper Schatten (oder Projektionen) ein und desselben vierdimensionalen Objektes. Diese Überlegung lässt jedoch außer acht, dass man Schatten (oder Projektionen) nicht direkt verändern kann, wir aber die dreidimensionalen Objekte (die Lage der Hand)

[21] Der gleiche Widerspruch würde dann im R_4 wieder auftreten, so dass man zu seiner "Lösung"einen R_5 usw. benötigen würde. Zur Erklärung von Symmetrie und Identität im Sinne Kants vgl. "Prolegomena", § 13. A. d. R.

durchaus verändern können und folglich sind dreidimensionale Objekte keine Projektionen.

Einen anderen "Beweis" für die Möglichkeit der realen Existenz der vierten räumlichen Dimension gab Zöllner experimentell. Er erfuhr von einer Arbeit Kleins (1876), in der bewiesen wurde, dass Knoten, die als geschlossene räumliche Kurven im R_3 aufgefasst werden können, im R_4 gelöst werden können. Auf die Bitte Zöllners hin demonstrierte Slade in der Tat solch eine Aufknotung. Aber ach, sie erwies sich einfach als geschickter Trick eines Gauklers.

Klein erklärte öffentlich[22], dass seine mathematische Entdeckung keinerlei Beziehung zur Geisterwelt hat und belächelte die "Experimente" Zöllners. In eine ähnliche Lage gerieten Mathematiker, die sich mit der vierdimensionalen und n-dimensionalen Geometrie befassten, und Naturwissenschaftler, die sie mehrfach anwendeten.
Wie Lenin hervorhob, verteidigte der österreichische Physiker Mach, das Haupt der idealistischen philosophischen Schule des Empiriokritizismus (Machismus genannt), in seiner "Mechanik" (1883) "... die Mathematiker, die die Frage des in n Dimensionen gedachten Raums untersuchen, gegen den Vorwurf, dass sie Schuld seien, wenn aus ihren Untersuchungen 'monströse' Schlussfolgerungen gezogen werden. Die neuere Mathematik", sagt Mach, "warf die sehr wichtige und nützliche Frage eines n-dimensionalen Raums als eines denkbaren Raums auf, ein 'wirklicher Fall' aber bleibe nur der dreidimensionale Raum" (3. Auflage, Leipzig 1897, S. 483-485).
Daher sei es ein vergebliches Bemühen, wenn "manche Theologen, welche in Verlegenheit waren, die Hölle unterzubringen", und die Spiritisten aus der vierten Dimension Nutzen zu ziehen versuchten.

Selbstverständlich war, wie hier bei Lenin nachgewiesen wurde, der subjektive Idealist Mach, der Raum und Zeit die objektive Realität absprach, gezwungen, damit er sich nicht in eine für ihn unerwünschte Kumpanei mit Theologen und Spiritisten versetzt fand, stillschweigend vom Materialismus die Argumente über die Realität des nur dreidimensionalen Raums auszuleihen. Und Lenin fährt fort:

"Ein Accoucheur", schreibt Mach an gleicher Stelle, "der eine Geburt durch die vierte Dimension bewerkstelligt hätte, ist noch nicht aufgetreten".
Dies ist, bemerkt Lenin, "ein ausgezeichnetes Argument - aber nur für diejenigen, die im Kriterium der Praxis eine Bestätigung der objektiven Wahrheit, der objektiven Realität unserer sinnlichen Welt sehen. Wenn unsere Empfindungen uns ein objektiv richtiges Abbild der unabhängig von uns existierenden Außenwelt geben, dann ist dieses Argument mit dem Accoucheur, die Berufung auf die ganze menschliche Praxis brauchbar. Dann aber ist der ganze Machismus als philosophische Richtung völlig unbrauchbar."[23]

Im Zusammenhang mit der Anwendung der vierdimensionalen Geometrie in der Relativitätstheorie war auch Einstein gezwungen, sich von verschiedenen Arten mystischer Spekulationen zu distanzieren, die sich auf die vierdimensionale Minkowskische Welt, auf die Krümmung der Raum-Zeit und anderes zu stützen versuchten.

Es ist selbstverständlich, dass Einstein, der es verstand, sich zeitig vom Einfluss des Machismus zu befreien und bedingungslos die objektive, reale Existenz der materiellen Welt, des Raums und der Zeit und der Kausalität unabhängig von dem zu erkennenden Objekt anerkannte, sich folgerichtig und mit unvergleichlich größerem Recht als Mach und mit Ironie mit denjenigen auseinandersetzen konnte, die sich auf die Relativitätstheorie bezogen, um damit "die Kosten

[22] F. Klein. "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus", Bd. 2: Geometrie, Berlin 1925, S. 67.
[23] W.I. Lenin, Werke. Dietz Verlag, Berlin 1968, Bd. 14, S. 178-179.

einer Spukgeschichte zu bestreiten".

Vielleicht ist hier die Bemerkung angebracht, dass sich an solchen wissenschaftlichen Begriffen wie die vierte Dimension der Spiritismus, Mystik und allgemein eine reaktionäre Weltanschauung anklammern, ein vollkommen gesetzmäßiger Umstand ist.
Je "seltsamer" die Begriffe der Wissenschaft sind, je mehr sie dem "gesunden Menschenverstand" widersprechen, um so leichter stellen sich der idealistischen Philosophie, deren Spielart eine jede Religion und jeder Aberglaube ist, diese Abstraktionen als "Argumente" für das Primat des Geistes über die Materie dar. Lenin schrieb dazu:
"Der menschliche Geist hat viel Wundersames in der Natur entdeckt, er wird noch mehr entdecken und dadurch seine Macht über die Natur erweitern, aber das bedeutet nicht, dass die Natur eine Schöpfung unseres Geistes oder eines abstrakten Geistes ... ist ..."[24]

Selbstverständlich wurde die Tatsache, dass diese oder jene Philosophen und Naturwissenschaftler aus dieser oder jener "ungewohnten" wissenschaftlichen Hypothese, aus der vierten Dimension, dem Zusammenhang von Raum und Zeit, dem Umlauf der Galaxis, der Existenz der Antiwelt usw. dunkle "Konsequenzen" ziehen, kein Hindernis dafür, dass sich diese Hypothesen durchsetzten und bearbeitet wurden.

Man darf nicht den Behauptungen der philosophischen Idealisten, Theologen und Spiritisten glauben, dass aus ähnlichen "wunderlichen", doch vollkommen wissenschaftlichen Konzeptionen, tatsächlich die Existenz der Welt der Geister, die Erschaffung der Welt, "der Jüngste Tag", die Begrenzung der Welt durch irgendetwas Nichtmaterielles usw. folgte, und deshalb die Wissenschaftler verurteilen, die so etwas untersuchen.
Eine solche Unfähigkeit oder der Widerwille von der Wissenschaft antiwissenschaftliche Schlussfolgerungen zu trennen, die von ihr abgeleitet werden können, fügt der Entwicklung der Wissenschaft Schaden zu und bringt unsere Philosophie in ein hässliches Licht.

Anstelle eines leichtfertigen Vorgehens sollten wir uns bemühen zu beweisen, dass alle diese "Spukgeschichten" nicht aus wissenschaftlichen Behauptungen herrühren, sondern leere Vermutungen darstellen, die auf dem Wege der Sophistik, der scholastischen Kasuistik (Deutelei) erhalten wurden. Wir müssen in einer positiven Weise zeigen, dass diese wissenschaftlichen Konzeptionen, auch wenn sie nur hypothetisch sind, vollständig mit den Grundlagen des dialektischen Materialismus vereinbar sind.

23 Noch einmal „Beweise“

Führen wir noch einige "wissenschaftliche" Begründungen der Realität einer vierten Dimension in unserer alltäglichen Welt an. Eine von ihnen kann man als biologisch- psychologisch bezeichnen. Sie führt zu folgender Überlegung.

Die Menschheit befindet sich nur am Anfang der Vernunftsära. Wenn deshalb unsere Sinnesorgane und unser Gehirn, die sich ziemlich langsam entwickelten, ein genügend hohes Niveau erreichen, gelangt der Mensch zu einer gefühlsmäßigen Wahrnehmung der vierten Dimension. Doch ist es auch anders möglich:

Wir nehmen schon jetzt die vierte Dimension wahr, nämlich als Zeit. In diesem Falle ist es offensichtlich, dass unser geistiges Ich vierdimensional ist, ohne Zeitbegrenzung, ewig. Das wird dadurch bestätigt, dass es im Traum möglich ist, in einem Moment viele Jahre zu durchleben.

[24] W. I. Lenin. Werke, Bd. 14, S. 283.

Das bedeutet, die Träume sind vierdimensional.

Doch diese Erfindungen lösen sich bei der ersten Berührung mit der wissenschaftlichen Kritik auf. Wahr ist selbstverständlich, dass im phylogenetischen Prozess, im Zeitraum von einer halben Million Jahren der Entwicklung des modernen Menschen, sein Gehirn, seine Sinnesorgane und das gesamte Nervensystem sowie seine Funktionen sich veränderten, allerdings äußerst langsam. Jedoch gerade wegen dieser Langsamkeit der Entwicklung unterlagen sie nur einer quantitativen Veränderung, und durchaus nicht einer irgendwie bemerkbar qualitativen.

Sogar als sich in den letzten fünfhundert Jahren im Ergebnis der kolossalen Erfolge der Wissenschaft und Technik das Milieu stark veränderte, in welchem die Menschen leben und arbeiten und das sie formt, gingen keinerlei wesentliche Veränderungen der Art der sinnlichen Wahrnehmung der Welt durch den Menschen vor sich.

Wir, die Menschen des 20. Jahrhunderts, unterscheiden uns in nichts von den alten Ägyptern, die im 6. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lebten. Auch nicht dadurch, dass wir (ohne Zuhilfenahme von Geräten) infrarote und ultraviolette Strahlen sehen, Ultraschall hören würden usw., geschweige denn dadurch, dass irgendwelche neue Sinnesorgane entstanden wären, die uns erlaubten, Wärmewellen, radioaktive Strahlung usw. wahrzunehmen. Von welcher Wahrnehmung der vierten räumlichen Dimension, wenn diese existieren sollte, kann dann die Rede sein?

Was die Wahrnehmung der vierten Dimension als Zeit in Träumen betrifft, so werden nach der Lehre Pawlows über die höhere Nerventätigkeit die Träume durch Hemmungen der Tätigkeit der Zellen der Hemisphären des Großhirns in der Zeit des Traumes hervorgerufen.
Jener Umstand, dass es uns im Traum scheint, als wären viele Jahre des Lebens auf einen einzigen Moment geschoben, hat absolut nichts gemein mit der vierten Dimension.
Er erklärt sich ebenso wie jener, dass man noch albernere Dinge träumen kann, etwa von singenden grünen Kühen oder einem tanzenden Haus, von phantastischen Widersinnigkeiten, wie sie von Shakespeare, Gogol oder M. A. Bulgakow beschrieben wurden.

Die Erklärung besteht darin, dass während des Traumes die Funktionen der verschiedenen Teile des Gehirns voneinander getrennt sind, und dadurch ungewöhnliche Verbindungen zwischen den im Gedächtnis zurückgebliebenen Spuren früher erlebter Erregungen auftreten.
Es ist somit verständlich, dass Gespräche über die Vierdimensionalität, Außerzeitlichkeit, die Ewigkeit unseres geistigen "Ichs" einfach in eine "wissenschaftliche" Sprache gebrachte Nacherzählungen der phantastischen, religiösen Lehren aus der Zeit unserer Vorfahren über die Seele und ihre Unsterblichkeit sind.

Schließlich suchten einige den Beweis der Realität der vierten räumlichen Dimension unserer Welt in der Existenz der optischen Isomerie chemischer Verbindungen.

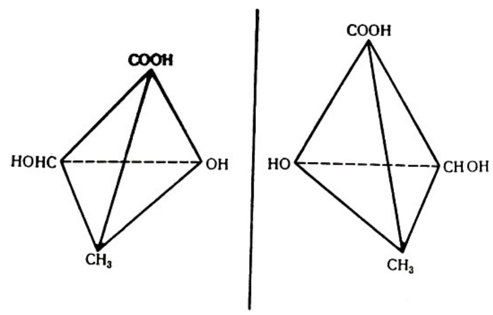
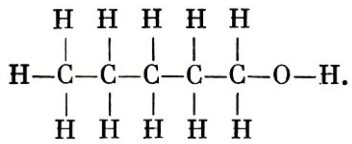


Fig. 29

Optische Isomere sind Verbindungen gleicher Zusammensetzung, die in zwei Abarten vorkommen können und sich untereinander nur dadurch unterscheiden, dass die Kristalle der einen Art das Spiegelbild der Kristalle der anderen sind und dass sie hindurchgehendes Licht verschieden polarisieren, die einen rechts und die anderen links.

Solch ein Beispiel ist die Milchsäure $CH_3 \cdot CH(OH) \cdot COOH$. Der holländische Chemiker van't Hoff erklärte (1874) diese Erscheinung damit, dass die Moleküle optischer Isomere Spiegelbilder voneinander sind (Fig. 29).

Ihre Existenz jedoch war Anlass zu Vermutungen, dass sie nur zwei verschiedene Projektionen ein und desselben in der vierten Dimension existierenden Stoffes seien. Und der englische Chemiker Hinton behauptete, dass sich im Molekül des Alkohols $C_5H_{12}0$ seine 5 Kohlenstoffatome C im gleichmäßigen Abstand voneinander befinden, was im R_3 nicht möglich ist, im R_4 jedoch realisierbar. Indessen ist die tatsächliche Struktur dieses Alkohols die folgende:



Doch die Anhänger einer "vierdimensionalen Chemie" nahmen an, dass sich tatsächlich nur dank ihrer vierdimensionalen Konfigurationen die optischen Isomere gegenseitig ohne chemische Zerteilung ineinander umwandeln können.

Der elektrische Strom wurde auch so aufgefasst, als ob er durch vierdimensionale Wirbel erklärt werden könnte. Alles dies erwies sich als grundlose Erfindung.
Interessant ist dabei, dass der entscheidendste Schritt zur wissenschaftlichen Erklärung der optischen Isomerie von dem eifrigen Verfechter des Spiritismus Butlerow in seiner Theorie des Aufbaus chemischer Verbindungen getan wurde.

Optische Isomerie ist ein spezieller Fall der Spiegelsymmetrie, die sowohl in der nichtorganischen als auch in der organischen Natur weit verbreitet ist. Bis in jüngste Zeit nahmen die Physiker an, dass sie ein Ausdruck für ein allgemeingültiges Prinzip, das sogenannte Gesetz der Parität ist.

Dieses Gesetz behauptet, dass jeder Prozess in der Natur auf zweierlei Art verlaufen kann, wobei einer jeweils das Spiegelbild des anderen ist und die physikalischen Gesetze beider Prozesse ein und dieselben sind. Jedoch im Jahre 1956 machten die in den USA lebenden chinesischen Physiker Li und Yang die Voraussage, dass in der Mikrowelt bei schwachen Wechselwirkungen, beim β-Zerfall der Atomkerne und dem Zerfall der Elementarteilchen dieses Gesetz nicht gilt, die Parität nicht erhalten bleibt.
Eine Vielzahl von Experimenten untermauerten diese Voraussage.

Wenn die Spine (Eigendrehmomente des Kobalts-60) in gleicher Richtung orientiert (polarisiert) sind, ändert eine Spiegelung die Orientierung des Kerns (seiner "Drehung um die eigene Achse") nicht, jedoch die Flugrichtung der Elektronen ändert sich.

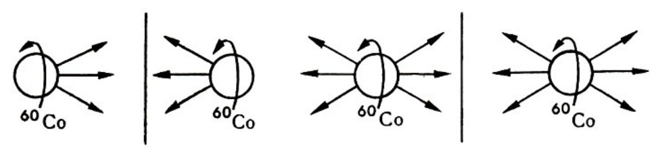


Fig. 30

Würde das Gesetz der Parität gelten, so würden die Elektronen in beiden Richtungen gleich oft wegfliegen (Fig. 30). Es erwies sich jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

Damit stürzte auch die Spekulation derjenigen, die, indem sie sich auf die angebliche Universalität des Paritätsgesetzes stützten, die Existenz der vierten Dimension der Geisterwelt zu beweisen meinten.

24 Phantasie, Phantastik und Phantasterei

"Es ist falsch zu glauben, dass nur der Dichter Phantasie braucht. Das ist ein dummes Vorurteil! Sogar in der Mathematik braucht man sie, sogar die Entdeckung der Differential- und Integralrechnung wäre ohne Phantasie unmöglich gewesen. Phantasie ist eine höchst wertvolle Eigenschaft, ..."[25]

Diese Worte Lenins sind sehr bekannt. Sie beinhalten die schöpferische Einbildungskraft, die Fähigkeit des Erfindens, die Fähigkeit, neue Vorstellungen und Begriffe auf der Grundlage der Überarbeitung vorhergehender Auffassungen durch kühne Gedankenflüge zu schaffen. Ein Mensch ohne Phantasie kann kein echter Künstler, kein wahrer Wissenschaftler, kein progressiver Politiker werden. Er ist auch im alltäglichen Leben ein langweiliger, grauer Kleinkrämer.

Phantasie existiert jedoch auf verschiedene Arten. Sie ist dann progressiv, wenn der Phantasierende sich selbst einer strengen logischen Kritik unterzieht und danach auch der Prüfung durch die Praxis.
Diese bestimmt letzten Endes, ob die Resultate der Phantasie zumindest nicht der Wirklichkeit widersprechen oder ob sie sie sogar tatsächlich richtig widerspiegeln. In solchen Fällen dient die Phantasie neuen Entdeckungen der Wissenschaft, neuen Erfindungen der Technik.
Sie unterstützt und lenkt den Menschen in seinem Kampf zum Nutzen der Gesellschaft.

Doch die Phantasie kann sich auch in unfruchtbaren Träumen ausdrücken, in unerfüllbaren Träumereien über die Zukunft, in zauberhaften, wunderlichen Visionen, in falschen, utopischen Wahnvorstellungen, die den feststehenden naturwissenschaftlichen und sozialen Gesetzmäßigkeiten zuwiderlaufen.

Dann ist sie in der Lage, den Menschen von seinen realen Aufgaben abzubringen, zwischen ihm und der Wissenschaft, der Technik, dem gesellschaftlichen Leben zu stehen. Die Phantasie ist reaktionär, wenn sie eine entstellte Widerspiegelung der realen Welt gibt und diese als wahr hinstellt, wenn sie mythische Bilder schafft, wie sie im religiösen Glauben enthalten sind, in Legenden und Märchen, die der Inhalt von Spiritismus, Theosophie und der übrigen Mystik sind.

In unserem Jahrhundert der wissenschaftlich-technischen Revolution erlangte die Phantasie besondere Bedeutung, die unsere Vorstellungen infolge der sich immer wieder ereignenden verblüffenden "Wunder" des Vordringens des Menschen in die inneren Geheimnisse der Natur, der Unterwerfung der Naturgewalten gefangennimmt.

In unser Bewusstsein greifen die Entdeckungen der Atomenergie ein, die Schaffung der "denkenden" kybernetischen Maschinen, die Errungenschaften der Kosmonautik, die Lösung der molekularen Grundlagen der Vererbungslehre, die Verpflanzung des Herzens und anderer lebenswichtiger Organe.
Diese Entdeckungen spiegelt die wissenschaftlich-phantastische künstlerische Literatur wider und manchmal überflügelt sie sie auch, wobei sie hinreißend die Perspektiven der Zukunft ausmalt, noch nicht verwirklichte, doch schon durch den heutigen Stand der Wissenschaft und

[25]W. I. Lenin. Werke, Berlin 1962, Bd. 33, S. 304.

Technik vorbereitete Entdeckungen und Erfindungen.

Durch all das, aber auch durch die wachsende Verbreitung der populärwissenschaftlichen Literatur, von dem allgemeinen Anwachsen der Bildung einmal ganz abgesehen, gewöhnt sich das Denken des modernen Menschen an neue, ungewohnte wissenschaftliche Ideen.

In der Tat haben die wissenschaftliche Phantastik und sogar, wie seltsam es auch scheinen mag, Sensationen, die mit der spiritistischen Auslegung der vierten Dimension zusammenhingen, wahrscheinlich mehr als alles andere die Verbreitung des Terminus "vierte Dimension" unter das breite Publikum unterstützt.
Es ist selbstverständlich, dass die Leser von Zeitungen und populärwissenschaftlichen Schriften mit der "vierten Dimension" nicht exakte wissenschaftliche Begriffe verbanden, die zur Physik und Geometrie gehören. Sie erforderten von ihnen unverständliche, geheimnisvolle, phantastische Einbildungskraft.

Das Anwachsen des Interesses für die mehrdimensionale Welt stimulierte sie dazu, dass sie sich phantastischen Erzählern zuwandten. Im Grunde genommen tauchten in den wissenschaftlich-phantastischen Romanen und Erzählungen, bereits in "Die Neue Atlantis" von F. Bacon (1604), Motive auf, die mit der Idee einer anderen Zahl räumlicher Dimensionen als drei verwandt waren.

Jedoch erst 1884 wurde in London das Werk "Flatland" [26] publiziert, in welchem direkt über die zweidimensionale Welt erzählt wird.
Die Lebewesen dieser Welt unterscheiden sich durch ihre geometrischen Formen. Die vollendetsten haben das Aussehen regelmäßiger Vielecke. Jedoch die Wesen weiblichen Geschlechts, von denen der anonyme Autor, der unter dem Pseudonym "Quadrat" schrieb, offenbar keine hohe Meinung hatte, haben einfach das Aussehen von Strecken.

Herbert Wells, der Klassiker der wissenschaftlichen Phantastik, gab in einer Reihe seiner Werke dem Raum und der Zeit Eigenschaften, die sich von den real in unserer Welt existierenden Eigenschaften unterscheiden. In "Die Zeitmaschine" konnte ein Erfinder die Zeit umkehren, wodurch er mit seinem Apparat in die Vergangenheit reisen konnte; in "Der neue Beschleuniger" beschleunigte sich der Zeitfluss auf der ganzen Welt, mit Ausnahme der des Erzählers; in der Geschichte "Plattners Erzählung" werden durch die vierte räumliche Dimension spiegelsymmetrische Körper zur Deckung gebracht usw.

In unseren Tagen treffen wir sowohl in der sowjetischen als auch in der ausländischen Literatur die vierte Dimension ziemlich oft an.

Im Jahre 1910 rief das Journal "Scientific American" zu einem Preisausschreiben für den besten populärwissenschaftlichen Artikel über die vierte Dimension auf. Der Umfang des Artikels durfte 2500 Wörter nicht überschreiten, das Honorar dafür betrug 500 Dollar.
Es antworteten 245 Autoren aus den verschiedensten Ländern. Die 22 besten Artikel publizierte das Journal in einem besonderen Sammelband "Einfache Erklärung der vierten Dimension".

Selbstverständlich erklärte sich das erhöhte Interesse für die vierte Dimension nicht aus dem Spiritismus, diese Mode war schon abgeflaut, obwohl ihr Überbleibsel, ähnlich wie auch die Begeisterung für die Astrologie, Wahrsagung usw. sich im Westen noch erhalten hatte und sich in der Periode des Anwachsens der gesellschaftlichen Reaktion und Unsicherheit über den

[26] Abbot, E. B. "Flatland, A Romance of Many Dimensions", By a Square, gekürzte deutsche Ausgabe "Flächenland. Eine Geschichte von den Dimensionen", erzählt von einem Quadrat. Leipzig 1929 (Teubners Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Band 83).

morgigen Tag von neuem ausbreitete.

Das Interesse für die vierte Dimension verstärkte sich außerordentlich, als die Erfolge der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie bekannt wurden.

Zusammen mit der Relativitätstheorie wurde die vierte Dimension das Thema der bourgeoisen Salons. Von einem besonderen Ereignis dieser Art habe ich einen so unvergesslichen Eindruck behalten, dass ich Ihnen diesen nicht vorenthalten will.

Es war im Jahre 1922. Ich arbeitete in Düsseldorf, einer großen Industriestadt im Zentrum Nordrhein-Westfalens. Ich redigierte die Tageszeitung "Freiheit" die die Kommunistische Partei Deutschlands herausgab.

Sowjetrussland durchlebte in dieser Zeit eine schwere Prüfung wegen des Hungers im Wolgagebiet. Auf der ganzen Welt sammelten die Werktätigen Mittel, den Hungernden zu helfen. Unsere Zeitung beschloss, die Börse der Ruhrmagnaten der Kohle und des Stahls, der Monopolisten, zu schröpfen.

Wir baten Einstein, der damals Direktor des physikalischen Institutes in Berlin war, zu kommen und einen populärwissenschaftlichen Vortrag über seine Theorie zu halten und die Einnahme für die Bedürfnisse der Hungernden zu verwenden. Einstein sagte gern zu.
Sein Vortrag fand im Stadttheater statt. Die Preise für die Eintrittskarten setzten wir phantastisch hoch fest.
Doch das Theater war gestopft voll. Es war die gesamte Bourgeoisie der Stadt gekommen. Und diese Damen und Herren hörten geduldig zu, obwohl kaum mehr als ein Prozent der Versammelten in der Lage war, den Inhalt des Vortrages zu verstehen. Solch eine Kraft ist die Mode, sind Konventionen, aber auch der starke Hang zu Sensationen.

Die Langeweile, hervorgerufen durch Übersättigungen an Vergnügen und Wohlstand, der den einen ohne Mühe gegeben wird, das Leben unter schwerer erschöpfender Arbeit, unter stumpfsinniger eintöniger Beschäftigung oder unter nicht endender Hast und Sorge bei den anderen, alle diese in ihrer Art entgegengesetzten Reize führen einheitlich zu dem heißen Wunsch, sich abzulenken, zu vergessen, aus dem gewohnten Leben auszubrechen, die Nerven durch eine Sensation, durch eine Kuriosität, durch aufregende Erscheinungen und Ereignisse irgendeiner anderen, der unseren nicht ähnlichen Welt, die in die Alltäglichkeit eingreifen, aufzuputschen. So entsteht die Nachfrage und mit ihr erscheint auch das Angebot an Verkehrung der Phantasie in Phantastik, in Phantasterei, die schon nicht mehr wissenschaftlich ist, obwohl sie Anspruch erhebt, als solche zu gelten.

Das Vorhandensein des Imperialismus und die von seiner allgemeinen Krise ausgehende Existenzunsicherheit, die Spaltung der Welt in zwei Lager, das sozialistische und das kapitalistische, die Atmosphäre der Gefahr eines thermonuklearen Krieges, die verderblichen Auswirkungen, zu welchen unerwartet irgendwelche aus der Kontrolle geratenen wissenschaftlichen Entdeckungen und technischen Erfindungen führen können, das Gefühl der Schwäche, das hervorgerufen wird durch das Bewusstsein, dass das Schicksal von Millionen Menschen im Kapitalismus von Entscheidungen abhängen kann, die eine Handvoll Personen fällen kann, alles dies führt dazu, dass phantastische Erfindungen auftreten, in welchen so oder so Elemente der Angst enthalten sind, die irgendwie erschreckend geheimnisvoll, mystisch oder pathologisch sind.

Ein Schneemensch, Ankömmlinge aus dem Kosmos, fliegende Untertassen, parapsychologische Erscheinungen und viele andere ähnliche Erfindungen bemächtigten sich der Phantasie, aber in der Regel nicht für so lange Zeit, dass nicht eine Erfindung die andere ablösen könnte.

Und auf diesem Hintergrund beleben sich selbstverständlich aufs neue auch Versuche einer spiritistischen Auslegung der vierten Dimension.

25 Wissenschaft ist unvereinbar mit Mystik

In der Gegenwart ist im Westen das Bestreben, Wissenschaft und Religion in Übereinstimmung zu bringen, weit verbreitet. Einzelne Theologen übernahmen es, das Christentum an die Gegenwart anzunähern. Sie streben danach, wie sie sich ausdrücken, "eine Synthese der Theologie und der Naturwissenschaft" zu schaffen, selbstverständlich auf der Grundlage der Erhaltung des Glaubens an "die Existenz Gottes, die Vorsehung, die weise den Kosmos führt, und an die Offenbarung, die sich über die Vernunft den Leuten mitteilt".

Solch ein Gelehrter ist zum Beispiel Teilhard de Chardin, ein moderner Katholik, ein bekannter französischer Paläontologe und Mitglied des Jesuitenordens.

Diese Ansichten verbreiteten sich in einigen Schichten der Intelligenz der kapitalistischen Länder und drangen auch in bestimmte Kreise der neuen Intelligenz von unlängst gegründeten selbständigen Ländern Asiens oder Afrikas ein.
Vor noch gar nicht langer Zeit verurteilte der Vatikan diese Ideen scharf, wobei er sie als Abweichung vom Katholizismus wertete.

Jedoch als die Kirche begriff, dass ihr durch das Anwachsen der Macht des sozialistischen Lagers und durch den verstärkten Einfluss des Marxismus die Gefahr drohte, ihre Macht über die Massen zu verlieren, änderte sie jäh ihre Taktik.
Der vorige Papst Johannes XXIII., der das II. Vatikanische Konzil einberief, und auch der jetzige Papst Paul VI. spornten zu "Dialogen" der Theologen und der Kommunisten an, um auf diesem Wege der Kirche ihren Einfluss auf die Werktätigen zu erhalten und um ein Gegengift gegen den Marxismus zu schaffen.

Und siehe, unter den Kämpfern für den gesellschaftlichen Fortschritt, für Sozialismus, Demokratie und Frieden, darunter auch Marxisten, fanden sich Leute, die auch die Koexistenz des Sozialismus und Katholizismus für möglich hielten.

Dem unbedingt richtigen Aufruf der Kommunistischen Partei zur Zusammenarbeit mit den Katholiken, mit den gläubigen Menschen überhaupt, im Kampf gegen Faschismus, gegen Diktatur einer persönlichen Macht, gegen Unterdrückung durch das Kapital und die Gefahr des Krieges, unterschoben sie eine Versöhnung der Wissenschaft mit dem religiösen Glauben und gerieten auf den Weg der Versöhnung der marxistisch-materialistischen Weltanschauung mit der Propaganda des Glaubens und der Mystik.

Lenin schrieb, dass der Ausspruch von Marx: "Die Religion ist Opium für das Volk"[27] der Grundstein der Weltanschauung des Marxismus in den Fragen der Religion ist.
Und wie sehr sich auch die gesellschaftlichen Bedingungen auf der ganzen Welt verändert haben, seit dieser Ausspruch getan wurde, er konnte sich nicht in ein Dogma verwandeln (wie die Anhänger einer Versöhnung mit der religiösen Lehre behaupten), einfach deshalb nicht, weil das Wesen des religiösen Glaubens und sein sozialer Einfluss unverändert geblieben sind.

In der Tat behauptet die Religion heute so wie früher, dass etwas außerhalb der Natur existiert, irgendeine übernatürliche Kraft, die die Natur geschaffen hat, ein gewisser geheimnisvoller

[27] K. Marx. Werke, Bd. 10, Berlin 1958, S. 71.

Geist, viel allmächtiger und weiser als der menschliche Geist.

Und so wie früher ruft sie auf, "den blinden Glauben an die Unfehlbarkeit der Naturwissenschaft zu zerstören, einen besseren Weg zur Heimstätte der Wahrheit zu finden".

Gleichzeitig bleibt nach wie vor die Religion in den Ländern, in denen die Ausbeutung der Werktätigen herrscht, "als untaugliches Produkt einer untauglichen gesellschaftlichen Schicht" bestehen, hingegen in den Ländern, wo die Revolution die ausgebeuteten Klassen abschaffte, als ein Überbleibsel des alten Zustandes, als Überbleibsel, das auf Grund der Unausgereiftheit der sozialistischen Verhältnisse, durch Missstände beim Aufbau des neuen Lebens Nahrung erhält.

Und so flößt die Religion dem Menschen ein, dass seine Vernunft kraftlos sei, dass er sich seinem Geschick zu fügen habe, dass die Sittlichkeit darin besteht, dem Willen Gottes zu gehorchen, dass es keinen Sinn habe, für Gerechtigkeit und Glück auf der Erde zu kämpfen, denn nur in jener anderen Welt erhält er, was ihm gebührt.

Sie veränderte sich nur so, dass man heute noch öfter als früher die Bezeichnung "Gott" zu verändern versucht, ihn abstrakter, nebelhafter, für die Glaubwürdigkeit näher zum Psychischen darstellt, so dass anstatt des Glaubens an einen groben anthropomorphen Gott alles mehr die raffiniertere Form des Glaubens an ein "geistiges Prinzip", an einen "allweltlich sittlichen Willen"u.ä. annimmt.

Zur Änderung des Inhalts der Religion, ihre Umwandlung von dem Glauben an die Dogmen des Katechismus, in "die Stimmung des Herzens", in die Verehrung "der göttlichen Prinzipien in unserem Inneren" trägt die Entmenschlichung bei, die die Technik in solchen Fällen mit sich bringt, wo sie den Menschen in einen Automaten verwandelt, wo der Mensch sich einsam und verdammt fühlt, nicht in der Lage, mit den ihn unterdrückenden und von ihm unvorhergesehenen gesellschaftlichen Kräften fertig zu werden. Und dort eben findet auch Platz alles Geheimnisvolle, Mystische, alle "okkulten Wissenschaften", unter ihnen auch die Erfindung über die vierte Dimension als Welt der Geister.

Wir lehnen jeden Annäherungsversuch an die Mystik ab, in welche pseudowissenschaftliche Verkleidung er sich auch steckt, und erachten es als unzulässig, dass Phantastik, die in der künstlerischen Literatur wie im allgemeinen in der Kunst angebracht und erwünscht ist, sich der Wissenschaft aufdrängt.
Doch wir sollten dabei nicht vergessen, dass es keine allgemeine Regel gibt und im Grunde auch nicht geben kann, welche erlaubte, ein für allemal für eine beliebige phantastische Idee festzustellen, ob sie wissenschaftlich ist oder eine leere Phantasterei. Hier wird mehr als anderswo klar, dass die Wahrheit immer konkret ist.

Musste nicht gerade die Theorie des kosmischen Raketenfluges, die Ziolkowski 1903 schuf, um ein Beispiel aus tausend ähnlichen zu nehmen, damals als aus der Luft gegriffene Phantasterei erscheinen? Erforderte es nicht noch ein halbes Jahrhundert, damit sie mit dem Start des ersten sowjetischen Sputniks 1957 vom Traum zur Wirklichkeit wurden?
Folglich kann man und muss man phantastische Ideen als antiwissenschaftlich nur dann bezeichnen, wenn sie den aufgestellten Fakten und Gesetzen der Wissenschaft widersprechen.

Wenn heute ein jämmerlicher Erfinder kommt und behauptet, dass es möglich ist, eine Maschine zu konstruieren, die ohne Zustrom von Energie von außen arbeitet, so nennen wir ihn einen großen Phantasten. Wenn uns jemand einreden wollte, dass eine Gedankenübertragung auf eine gewisse Entfernung ohne Zuhilfenahme materieller Mittel auf irgendeinem übernatürlichen Wege möglich ist, so werden wir ihn richtig als mystischen Phantasten bezeichnen.

Eine andere Sache ist die, über die Möglichkeit der Gedankenübertragung auf Entfernungen ohne Rede-, Hör- und Klopfsignale (mittels Tastsinn), aber auch ohne Vermittlung des Telefons, des Telegraphen, des Radios usw., doch unter Teilnahme irgendwelcher bisher nicht bekannter physikalischer Felder zu sprechen.

Hier ist es möglich anzunehmen, dass die biotischen Ströme des Gehirns durch irgendwelche, bis jetzt noch nicht erforschten Schwingungen begleitet werden, die bei besonderen Bedingungen durch das andere Gehirn aufgefangen werden können. In Wirklichkeit gelang es aber bis jetzt noch nicht, solche Erscheinungen der Übergabe von Gedanken und Stimmungen, genannt Telepathie, nachzuweisen.
Ja, man führt gegen ihre Möglichkeit verschiedene Argumente an, unter welchen uns als das schwerwiegendste das folgende erscheint: Wenn Menschen existiert hätten, die die besondere Begabung gehabt hätten, Gedanken über Entfernung zu lesen, so wären sie im Existenzkampf bevorzugt gewesen.

Deshalb würde im Prozess der natürlichen Auswahl ihre Zahl im Verhältnis zu den gewöhnlichen Menschen zugenommen haben. Doch nichts Ähnliches wurde beobachtet.

Wenn solche Menschen überhaupt existieren, so offensichtlich äußerst selten. Wahrscheinlicher als alles andere ist, dass "die Übertragung von Gedanken"eine zufällige Übereinstimmung ist. Trotzdem meinen wir, dass die Wissenschaft ein Recht hat zu erforschen, ob telepathische Erscheinungen tatsächlich existieren oder nicht.

Dasselbe gilt auch für die Vermutung über die Möglichkeit der Existenz der vierten räumlichen Dimension in Mikro- und Makrowelt. Der Wissenschaftler hat das Recht, eine solche Vermutung aufzustellen, wenn sie nur nicht wissenschaftlichen Tatsachen widerspricht, und wenn er sie nicht antimaterialistisch, mystisch deutet, sogar dann, wenn ihre Richtigkeit unmöglich sofort überprüft werden kann.

Über das Schicksal solcher heutzutage phantastischer Annahmen, wenn auch harmloser so doch nicht nutzloser, entscheidet die Geschichte. Es ist möglich, dass sie verworfen werden, wenn es sich erweist, dass sie mit der Wissenschaft unvereinbar sind.
Doch es ist auch nicht ausgeschlossen, dass sie sich entweder vollständig oder teilweise in einer überarbeiteten Form bewahrheiten, und dann wird aus der Hypothese eine wissenschaftliche Theorie.

Es ist zu bemerken, dass die Hypothese darüber, dass in anderen Gebieten des Weltalls Raum und Zeit möglicherweise andere, völlig verschiedene von den uns bekannten Eigenschaften besitzen, z.B. von dem kroatischen Mathematiker, Astronomen und Philosophen B.J. Boschkowitsch und dem russischen Mathematiker N.I. Lobatschewski, dem Schöpfer der nichteuklidischen Geometrie, aufgestellt wurde.
In seiner Schrift "Die neueste Philosophie" (1755) schrieb Boschkowitsch, dass "in den entfernten Gebieten des Weltalls möglicherweise andere Typen des Raums und der Zeit existieren, als diejenigen, die wir hier wahrnehmen, jedoch kann man ihre Existenz oder Nichtexistenz nicht aus philosophischen Prinzipien allein deduzieren, diesen Beweis muss die Naturwissenschaft liefern".

In seiner Einführung zur Schrift "Neue Grundlagen der Geometrie"(1835-1838) sagte Lobatschewski:
"... in unserem Verstand kann kein Widerspruch entstehen, wenn wir annehmen werden, dass

manche Kräfte in der Natur einer und andere ihrer eigenen Geometrie folgen"
und weiter, das Abweichungen von der euklidischen Geometrie
"nur außerhalb der Grenzen der beobachtbaren Welt" - d.h. in kosmischen Maßstäben - "oder aber in den engen Sphären der molekularen Anziehungen" - d.h. in der Mikrowelt - "zu suchen sind".

26 Ziehen wir Schlussfolgerungen

Ziehen wir alles Dargelegte auf die kürzeste Form zusammen, so kann man sagen:

1. Die vierte Dimension und die mehrdimensionale Geometrie überhaupt sind im allgemeinen für die Wissenschaft höchst nützliche Abstraktionen, die im weiten Maße in der Mathematik benutzt werden und durch sie Anwendungen nicht nur in der Physik und Chemie finden, sondern auch bei der Lösung von Aufgaben ökonomischer und anderer Planung.

2. Der reale, uns durch die Erfahrung gegebene Raum ist dreidimensional, und die reale uns durch Erfahrung gegebene Zeit ist eindimensional. Jedoch ist die Wissenschaft jetzt noch nicht in der Lage, zufriedenstellend diese Charakteristika des Raums und der Zeit aus den physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu folgern, sondern sie ist gezwungen, sie als empirischen Fakten anzunehmen.

3. Die Hypothesen darüber, dass außerhalb der Grenzen unserer Erfahrung sich der Raum zum Beispiel als vierdimensional erweisen kann oder zweidimensional und die Zeit etwa als zweidimensional, können gegenwärtig durch keinerlei Fakten bekräftigt werden. Jedoch enthalten sie auch nichts der wissenschaftlichen Erkenntnis Widersprechendes, nichts Übernatürliches.

4. Die Idee der vierten Dimension kann selbstverständlich wie alles Ungewohnte, das "dem gesunden Menschenverstand" des alltäglichen Lebens widerspricht, durch die Mystik, den Aberglaube des Spiritismus, den religiösen Glauben, aber auch durch die idealistische Philosophie benutzt werden, jedoch nur durch Vergewaltigung der Logik, durch die Entstellung dieser Idee. In Wirklichkeit widerlegt die Möglichkeit der Schaffung mehrdimensionaler Geometrien (genauso wie auch nichteuklidischer) den idealistischen Apriorismus; mit ihr ist die wissenschaftliche Philosophie des dialektischen Materialismus in vollkommener Übereinstimmung.

5. Ob der vierdimensionale Raum existiert oder nicht, ob der Raum unendlich oder endlich aber unbegrenzt ist, stetig oder nicht stetig, alle diese Fragen können nicht allein durch philosophische Betrachtungen gelöst werden, sondern nur, und so weit sie gelöst werden können, durch die Ergebnisse der konkreten Wissenschaft.
Schon Engels bemerkte im Jahre 1894 genial: "Das Sein ist ja überhaupt eine offene Frage, von der Grenze an, wo unser Gesichtskreis aufhört."[28]

[28] F. Engels. "Anti-Dühring", Berlin 1959, S. 51.

Literatur

(Die erste Gruppe enthält Bücher, die sich an einen breiten Leserkreis wenden, während die zweite Gruppe mathematisch-physikalisch geschulte Leser erfordert.)

EINSTEIN, A.: Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. 21. Auflage, Berlin-Oxford-Braunschweig 1969.

EINSTEIN , A.: Geometrie und Erfahrung. 1. Auflage, Berlin 1921.

HÖRZ, H.: Marxistische Philosophie und Naturwissenschaft. 1. Auflage, Berlin 1974

LANDAU, L. D.; RUMER, JU. B.: Was ist Relativitätstheorie? (Übersetzung aus dem Russischen), 7. Auflage, Leipzig 1972

SKOBELZYN, D. W.: Das Zwillingsparadoxon in der Relativitätstheorie. 1. Auflage, Berlin 1972.

WEITZENBÖCK, R.: Der vierdimensionale Baum. 1. Auflage, Braunschweig 1929, überarbeitete Auflage, Basel 1956.

WELLER, W.; WINKLER, H.: Grundkurs klassische Physik; Band I: Mechanik. 1. Auflage, Leipzig 1974.

DAUTCOURT, G.: Relativistische Astrophysik. 1. Auflage, Berlin 1972.

EINSTEIN , A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. 5. Auflage, Berlin-Oxford-Braunschweig 1969.

EFIMOW, N. W.: Über die Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage, Berlin 1972.

FOCK, V. A.: Theorie von Raum und Zeit. 1. Auflage, Berlin 1957.

LORENTZ, H.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H.: Das Relativitätsprinzip. 1. Auflage, Leipzig 1922.

MINKOWSKI, H.: Raum und Zeit. Vortrag auf der 80. Naturforscher-Versammlung in Köln 1908, abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 18 (1909), S. 75-86.

PICKERT, G.: Analytische Geometrie. 7. Auflage, Leipzig 1976.

RIEMANN, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Herausgegeben von H. Weyl, 2. Auflage, Berlin 1920.

SCHMUTZER, E.: Relativistische Physik. 1. Auflage, Leipzig 1968.

TREDER, H. J .: Relativität und Kosmos. 1. Auflage, Berlin-Oxford-Braunschweig 1968.

WEYL, H.: Raum, Zeit, Materie. 5. Auflage, Berlin 1923.

WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems, 1. Auflage, Berlin 1923.