N. P. Antonow

M. I. Wygodski

W. W. Nikitin

A. I. Sankin

Aufgabensammlung zur Elementarmathematik

Band 2

N. P. ANTONOW, M. J. WYGODSKI, W. W. NIKITIN, A. I. SANKIN

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEMENTARMATHEMATIK

BAND II

VOLK UND WISSEN

VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1963

Titel der Originalausgabe:
Сборник задач по элементарной математике
Erschienen 1961 im Staatlichen Verlag für physikalische und mathematische Literatur, Moskau.
Herausgegeben von Prof. Dr. Herbert Karl,
Direktor des Instituts für Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Potsdam.
Übersetzt von Rolf Lindner, Potsdam, und Rolf Zander, Potsdam.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1963
Schutzumschlag und Einband: Klaus Boerger
ES 10 C · Bestell-Nr. 00 21 63-1
Lizenz Nr. 203 · 1000/63 (E)
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203

INHALTSVERZEICHNIS

AUFGABEN

8. Planimetrie

510. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 132 Längeneinheiten; die Summe der Quadrate der Seiten beträgt 6050 Flächeneinheiten. Wie groß sind die Seiten?

511. In einem Parallelogramm sind der spitze Winkel α und die Abstände m und p des Schnittpunktes der Diagonalen von den beiden verschieden langen Seiten gegeben. Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen und die Fläche des Parallelogramms!

512. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis gleich 30 cm und die Höhe 20 cm. Bestimmen Sie die Länge des Lotes von einem Eckpunkt der Basis auf einen Schenkel!

513. In einem Dreieck ist die Grundseite gleich 60 cm und die Höhe gleich 12 cm. Die Seitenhalbierende der Grundseite ist 13 cm lang. Berechnen Sie die unbekannten Seiten des Dreiecks!

514. Über den Seiten eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks zeichne man die Quadrate so, daß sich die Quadratflächen nicht überdecken. Die Diagonalschnittpunkte der Quadrate verbinde man miteinander durch Geraden. Berechnen Sie die Fläche des erhaltenen Dreiecks!

515. Die Seiten eines Quadrats teile man im Verhältnis $m : n$, so daß jede Seite in einen großen und in einen kleinen Abschnitt geteilt wird. Danach verbinde man die erhaltenen Punkte durch Geraden. Bestimmen Sie die Fläche des Vierecks, wenn die gegebene Seitenlänge a ist!

516. In ein Quadrat zeichne man ein anderes Quadrat so ein, daß die Eckpunkte des zweiten auf den Seiten des ersten Quadrats liegen. Die Winkel zwischen den Seiten des ursprünglichen und des eingezeichneten Quadrats sollen 30° betragen. Welchen Teil der Fläche des gegebenen Quadrates nimmt das eingezeichnete Quadrat ein?

517. In ein Quadrat mit der Seitenlänge a zeichne man ein Quadrat so ein, daß die Eckpunkte auf den Seiten des ersten Quadrates liegen. Bestimmen Sie die Abschnitte, in die die Seiten des ersten Quadrates durch die Eckpunkte des zweiten Quadrates geteilt werden, wenn die Fläche des zweiten Quadrats $\frac{25}{49}$ der Fläche des ersten beträgt!

518. In ein Rechteck, dessen Seitenlängen 3 m und 4 m betragen, zeichne man ein anderes Rechteck so ein, daß sich dessen Seiten wie 1 : 3 verhalten und seine Ecken auf den Seiten des ursprünglichen liegen. Bestimmen Sie die Seitenlängen des eingezeichneten Rechtecks!

519. In ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a zeichne man ein anderes gleichseitiges Dreieck LMN so ein, daß die Eckpunkte des letzteren auf den Seiten des ersteren liegen. Die Eckpunkte des Dreiecks LMN sollen die Seiten des gegebenen Dreiecks im Verhältnis 1 : 2 teilen. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks LMN!

520. Bestimmen Sie die Länge der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, wenn der Umfang $2s$ und die zur Hypotenuse gehörige Höhe h gegeben sind!

521. Auf den Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC liegen die gleich großen Abschnitte $\overline{CM}$ und $\overline{CN}$. Bestimmen Sie die Länge dieser Abschnitte, wenn der Umfang $2s$ des Dreiecks ABC, seine Basis $\overline{AB} = 2a$ und der Umfang $2k$ des Vierecks $ABNM$, das durch MN abgeschnitten wurde, bekannt sind!

522. Gegeben ist ein rechtwinkliges Trapez mit den Grundseiten a und c und dem kleineren Schenkel h. Bestimmen Sie den Abstand des Schnittpunktes der Diagonalen des Trapezes von der Grundseite a und von dem kleineren Schenkel!

523. Berechnen Sie die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis 12 cm lang ist und dessen zur Basis gehörige Höhe ebenso groß ist wie die Verbindungsstrecke der Mitte der Basis mit einer Seitenmitte!

524. Der Umfang eines Rhombus beträgt $2s$ cm, die Summe der Diagonalen m cm. Berechnen Sie die Fläche des Rhombus!

525. Die größere Grundseite eines Trapezes sei a, die kleinere b. Die Winkel an der längeren Grundseite betragen 30° und 45°. Berechnen Sie die Fläche des Trapezes!

526. Berechnen Sie die Fläche eines Trapezes, dessen Parallelseiten 16 cm und 44 cm und dessen nichtparallele Seiten 17 cm und 25 cm lang sind!

527. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Quadrates, das in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a so eingezeichnet wurde, daß alle vier Eckpunkte auf den Dreiecksseiten liegen!

528. Die Grundseite eines Dreiecks wird durch die Höhe in Abschnitte von 36 cm und 14 cm geteilt. Senkrecht zur Grundseite zeichne man eine Gerade, die die Fläche des Dreiecks halbiert. In welche Strecken teilt diese Senkrechte die Grundseite?

529. Die Höhe eines Dreiecks beträgt vier Einheiten; sie teilt die Grundseite in zwei Teile, die sich wie 1 : 8 verhalten. Berechnen Sie die Strecke, die parallel zur Höhe verläuft und die das Dreieck in zwei gleich große Teile teilt!

530. Ein Dreieck ABC wird durch zwei Geraden, die parallel zu AB verlaufen, in drei gleich große Figuren geteilt. Berechnen Sie die Größe der Abschnitte auf $\overline{AC} = b$, die durch diese Teilung entstehen!

531. Der Flächeninhalt eines gegebenen Dreiecks ABC sei A_1. Eine Parallele zur Grundseite $\overline{AB}$ teilt das Dreieck ABC in ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A_2 und in ein Viereck. Berechnen Sie die Fläche eines anderen Vierecks, von dem drei Eckpunkte mit den Eckpunkten des kleineren Dreiecks zusammenfallen, und dessen vierter Eckpunkt auf der Grundseite des größeren Dreiecks liegt!

532. Die Grundseiten eines Trapezes sind a und c. Berechnen Sie die Länge der Strecke, die die Fläche des Trapezes halbiert!

533. Von dem Eckpunkt eines Rhombus, der Scheitelpunkt eines stumpfen Winkels ist, fälle man die Lote auf die Seiten. Die Länge der Lote sei a, die Entfernung ihrer Fußpunkte b. Berechnen Sie die Fläche des Rhombus!

534. Bestimmen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn zwei Seitenlängen 27 cm und 29 cm betragen und die Seitenhalbierende der dritten Seite 26 cm lang ist!

535. Gegeben sind zwei Seiten b und c eines Dreiecks und die Fläche $A = \frac{2}{5} bc$. Bestimmen Sie die dritte Seite a des Dreiecks!

536. Von einem Trapez seien die Grundseiten a und b sowie die Schenkel c und d gegeben. Berechnen Sie die Diagonalen m und n!

537. Gegeben sei ein Parallelogramm, dessen spitzer Winkel 60° betrage. Berechnen Sie die Länge der Seiten, wenn das Verhältnis der Quadrate der Diagonalen den Wert $\frac{19}{7}$ hat!

538. Innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks wähle man willkürlich einen Punkt und fälle die Lote auf die Seiten des Dreiecks. Beweisen Sie, daß die Summe dieser drei Lote gleich der Höhe des Dreiecks ist!

539. Von einem Punkt außerhalb eines Kreises zeichne man zwei Sekanten. Der innere Abschnitt der ersten Sekante sei gleich 47 m, ihr äußerer gleich 9 m. Der innere Abschnitt der zweiten Sekante sei um 72 m länger als ihr äußerer. Bestimmen Sie die Summe der Längen der beiden Abschnitte auf der zweiten Sekante!

540. Von einem Punkt, der vom Mittelpunkt eines Kreises die Entfernung m cm hat, zeichne man die Tangenten an den Kreis. Die Entfernung zwischen den Berührungspunkten des Kreises sei gleich a cm. Berechnen Sie den Radius des Kreises!

541. Innerhalb eines Kreises mit dem Radius $r = 13$ cm sei ein Punkt P gegeben, der vom Mittelpunkt des Kreises 5 cm entfernt ist. Durch P führt eine Sehne $\overline{AB} = 25$ cm. Bestimmen Sie die Länge der Abschnitte, in die die Sehne $\overline{AB}$ durch M geteilt wird!

542. In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Winkel γ an der Spitze gegeben. Bestimmen Sie das Verhältnis von Um- zu Inkreisradius!

543. Gegeben sind die Seiten eines Dreiecks mit $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm. Zwei von ihnen (a und b) sind Tangenten an einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der dritten Seite liegt. Bestimmen Sie den Radius des Kreises!

544. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 120° umbeschrieben. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks!

545. Die größere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sei Durchmesser eines über ihr errichteten Halbkreises, der die Hypotenuse in D schneidet. Bestimmen Sie die Länge des Halbkreisbogens, wenn die kleinere Kathete 30 cm lang und die Sehne, welche den Scheitel des rechten Winkels mit dem Punkt D verbindet, 24 cm lang sind!

546. In ein rechtwinkliges Dreieck ist ein Halbkreis so einbeschrieben, daß sein Durchmesser auf der Hypotenuse des Dreiecks liegt und sein Mittelpunkt die Hypotenuse in zwei Abschnitte (15 cm und 20 cm) teilt. Berechnen Sie die Länge des Bogens, der zwischen den beiden Berührungspunkten des Halbkreises mit den Katheten liegt!

547. Über einem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis 4 cm und mit einer Höhe von 6 cm sei ein Halbkreis so konstruiert, daß sein Durchmesser auf dem Schenkel liege und dessen Länge habe. Die Schnittpunkte des Halbkreises mit der Basis und dem anderen Schenkel werden durch eine Gerade verbunden. Berechnen Sie die Fläche des dem Halbkreis einbeschriebenen Sehnenvierecks!

548. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $2c$, der Höhe h und dem Inkreis. An den Inkreis sei eine Tangente parallel zur Basis des Dreiecks gelegt. Bestimmen Sie den Radius des Inkreises und die Länge des Tangentenabschnittes zwischen den Schenkeln des Dreiecks!

549. Von einem Punkt außerhalb eines Kreises sind zwei Sekanten konstruiert, deren äußere Abschnitte eine Länge von je 2 m haben. Bestimmen Sie die Fläche des Vierecks, dessen Eckpunkte durch den Schnitt der Sekanten mit der Peripherie des Kreises entstehen! Zwei der gegenüberliegenden Vierecksseiten sollen 6 m bzw. 2,4 m lang sein.

550. Die Seiten eines Dreiecks sind 6 cm, 7 cm und 9 cm lang. Die drei Eckpunkte des Dreiecks seien Mittelpunkte dreier Kreise, die sich gegenseitig berühren. Der Kreis, dessen Mittelpunkt Scheitelpunkt des kleinsten Dreieckswinkels ist, wird von den beiden anderen Kreisen innen berührt, während sich diese beiden Kreise außen berühren. Bestimmen Sie die Radien der drei Kreise!

551. Die Länge der äußeren Tangente zweier Kreise mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 2$ cm sei gleich dem $1\frac{1}{2}$fachen der Länge der inneren Tangente[1]. Bestimmen Sie die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise voneinander!

552. Die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien 17 cm und 10 cm beträgt 21 cm. Bestimmen Sie die Entfernung der Mittelpunkte vom Schnittpunkt der Verbindungsgeraden beider Mittelpunkte mit den gemeinsamen Tangenten an die Kreise!

553. An zwei sich außen berührende Kreise mit den Radien r und R sind die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten und die innere Tangente konstruiert. Bestimmen Sie die Länge des Abschnitts der inneren Tangente zwischen ihren Schnittpunkten mit den äußeren Tangenten!

554. An zwei Kreise mit den Radien r und R, die sich außen berühren, sind die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten konstruiert. Bestimmen Sie die Fläche des Trapezes, das durch die Tangenten und die Sehnen, die die Berührungspunkte verbinden, gebildet wird!

555. Gegeben sind zwei sich außen berührende Kreise und eine gemeinsame äußere Tangente. In das dadurch bestimmte krummlinige „Dreieck" ist ein Kreis einbeschrieben. Bestimmen Sie seinen Radius!

[1] Innere Tangenten zweier Kreise sind solche, deren Schnittpunkt auf der Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte liegt. Schneiden die Tangenten einander nicht auf dieser Strecke, so nennt man sie äußere Tangenten.

556. Durch einen Punkt auf einem Kreis sind zwei Sehnen mit den Längen a und b gelegt. Wenn man die Schnittpunkte der Sehnen mit der Peripherie untereinander geradlinig verbindet, dann erhält man ein Dreieck mit der Fläche A. Bestimmen Sie den Radius des Kreises!

557. In einen Kreis mit dem Radius r sollen drei parallele Sehnen so eingezeichnet sein, daß ihre Längen gleich den Seitenlängen der diesem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechs-, Vier- und Dreiecke sind. Bestimmen Sie das Verhältnis des Teils der Kreisfläche, der zwischen der zweiten und dritten Sehne liegt, zu der Teilfläche, die zwischen der ersten und zweiten Sehne liegt!

558. Berechnen Sie die Fläche eines Kreises, der in ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben ist, wenn der Fußpunkt der Höhe die Hypotenuse in die Abschnitte $p = 25{,}6$ cm und $q = 14{,}4$ cm teilt!

559. In einen Rhombus mit der Seite a, in dem der Winkel $\alpha = 60°$ ist, wird ein Kreis einbeschrieben. Bestimmen Sie die Fläche des Vierecks, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte des Kreises mit den Seiten des Rhombus sind!

560. Zu einem Kreis mit dem Radius r seien vier Tangenten, die einen Rhombus bilden, gegeben. Die größere Diagonale des Rhombus betrage $4r$. Bestimmen Sie die Flächen der Figuren, die durch jeweils zwei einander schneidende Tangenten und durch den kleineren Kreisbogen, der zwischen den Berührungspunkten liegt, gebildet werden!

561. Die Fläche eines gleichschenkligen Trapezes, das einem Kreis umschrieben ist, sei A. Ermitteln Sie die Schenkellänge des Trapezes, wenn der Winkel an der Basis des Trapezes $\frac{\pi}{6}$ beträgt!

562. Einem Kreis mit dem Radius 2 cm ist ein gleichschenkliges Trapez umschrieben, das eine Fläche von 20 cm² hat. Berechnen Sie die Seitenlängen des Trapezes!

563. Einem Kreis ist ein Trapez umschrieben, dessen Schenkel mit der größeren der parallelen Seiten die spitzen Winkel α und β einschließen. Bestimmen Sie den Radius des Kreises, wenn die Fläche des Trapezes gleich A ist!

564. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein rechtwinkliges Trapez umbeschrieben, dessen kleinste Seite die Länge $\frac{3r}{2}$ hat. Bestimmen Sie die Fläche des Trapezes!

565. Der Mittelpunkt eines Kreises, der einem rechtwinkligen Trapez einbeschrieben ist, ist von den Endpunkten des einen Schenkels 2 cm bzw. 4 cm entfernt. Berechnen Sie die Fläche des Trapezes!

566. In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a ist ein Kreis einbeschrieben. In die drei entstehenden krummlinigen „Dreiecke" werden drei Kreise so gelegt, daß sie die beiden Dreiecksseiten und den ersten Kreis berühren. Danach werden wieder drei Kreise konstruiert, die jeweils zwei Dreiecksseiten und einen der letztgenannten Kreise berühren usw. Bestimmen Sie die Summe der Flächen aller Inkreise[1]!

567. Ein Dreieck ABC ist einem Kreis einbeschrieben. Durch den Eckpunkt C wird die Tangente an den Kreis konstruiert. Diese schneidet die Verlängerung der Seite $\overline{AB} = 5$ cm in dem Punkt D. Von den Punkten A und B werden die Lote auf die Tangente durch C gefällt, wobei das kleinere von ihnen eine Länge von 6 cm hat. Bestimmen Sie die Fläche des Trapezes, das aus den beiden Loten, der Seite $\overline{AB}$ und dem Abschnitt auf der Tangente gebildet wird, wenn $\overline{CD} = 5\sqrt{6}$ cm ist!

568. In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a seien drei gleiche Kreise konstruiert, so daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt. Bestimmen Sie den Radius der Kreise!

569. Innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a sind drei gleiche Kreise so angeordnet, daß sie die Seiten des Dreiecks berühren. Es möge ferner jeder Kreis jeden anderen berühren. Geben Sie die Fläche des krummlinigen „Dreiecks" an, das aus den Bögen der drei sich berührenden Kreise entsteht! (Die Eckpunkte sind die Berührungspunkte.)

570. Innerhalb eines Quadrates mit der Seitenlänge a sind vier gleiche Kreise so angeordnet, daß jeder von ihnen zwei benachbarte Quadratseiten und zwei von den restlichen drei Kreisen berührt. Bestimmen Sie die Fläche des krummlinigen „Vierecks", das von den Bögen der sich berührenden Kreise gebildet wird! (Die Eckpunkte sind die Berührungspunkte.)

571. Berechnen Sie die Fläche eines Kreissegments, wenn sein Umfang u bekannt ist und der zugehörige Zentriwinkel 120° beträgt!

572. In ein Dreieck ist ein Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm einbeschrieben. Eine der Dreiecksseiten wird durch den Berührungspunkt in die Abschnitte von 6 cm und 8 cm Länge geteilt. Berechnen Sie die Länge der beiden anderen Seiten!

573. Ein Lot, das von einem Basiseckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird, teilt die letztere im Verhältnis $m : n$. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks!

[1] Das heißt, den Grenzwert der Flächensumme der einbeschriebenen Kreise.

574. In einem Kreis mögen ein Durchmesser und eine Sehne senkrecht aufeinander stehen. Ferner soll die Sehne den Durchmesser im Verhältnis $m : n$ teilen. Bestimmen Sie (im Bogenmaß) die Zentriwinkel der Bögen, die auf dem Kreis durch Sehne und Durchmesser begrenzt werden!

575. Bestimmen Sie die Winkel eines Parallelogramms, wenn zwei Höhen h_1 und h_2 und der Umfang $2s$ gegeben sind!

576. Bestimmen Sie das Verhältnis der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn bekannt ist, daß das Verhältnis der Höhe der Hypotenuse zur entsprechenden Seitenhalbierenden gleich 40 : 41 ist!

577. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gleich c, einer der spitzen Winkel gleich α. Bestimmen Sie den Radius des Inkreises!

578. Die Längen der Seiten eines Dreiecks sind gleich 25 cm, 24 cm und 7 cm. Berechnen Sie die Radien des In- und Umkreises!

579. Bestimmen Sie die Radien zweier sich außen berührender Kreise, wenn der Abstand d der Mittelpunkte und der Winkel φ zwischen den beiden gemeinsamen Tangenten gegeben sind!

580. Berechnen Sie die Winkel eines Rhombus, wenn seine Fläche A_1 und die des einbeschriebenen Kreises A_2 bekannt sind!

581. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Dem gleichen Kreis ist ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben. Die Flächendifferenz der Vielecke ist gleich P. Berechnen Sie r!

582. Die Seitenmitten eines regelmäßigen n-Ecks sind untereinander geradlinig so verbunden, daß ein neues regelmäßiges n-Eck entsteht, das innerhalb des gegebenen liegt. Ermitteln Sie das Verhältnis beider Flächen zueinander!

583. Zu einem regelmäßigen n-Eck mit der Seite a sind In- und Umkreis gegeben. Bestimmen Sie Fläche und Breite des Kreisringes!

584. Einem Kreissektor mit dem Radius r und dem Zentriwinkel α ist ein Kreis einbeschrieben. Bestimmen Sie den Radius dieses Kreises!

585. An einen Kreis mit dem Radius r werden von einem Punkt außerhalb des Kreises zwei Tangenten konstruiert. Sie schließen den Winkel 2α ein. Berechnen Sie die Fläche zwischen den Tangenten und dem kleineren Kreisbogen!

586. Ein Rhombus mit dem spitzen Winkel α und der Seite a wird von zwei Geraden, die durch den Scheitelpunkt des Winkels α verlaufen, in drei gleich große Teile geteilt. Bestimmen Sie die Länge der Abschnitte auf den Geraden!

587. Innerhalb eines Winkels von 60° ist ein Punkt gegeben, der von den Schenkeln die Abstände a und b hat. Bestimmen Sie die Entfernung des Punktes vom Scheitelpunkt des gegebenen Winkels!

588. Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, wenn die Seiten a und b sowie die Länge w der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen diesen Seiten gegeben sind!

589. In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Schenkellänge a und die Länge t des Abschnittes Basis–Scheitel auf einer Geraden, die durch den Scheitel des Winkels an der Spitze verläuft und diesen Winkel im Verhältnis 1 : 2 teilt, bekannt. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks!

590. Die Winkel eines Dreiecks seien bekannt. Bestimmen Sie den Winkel, der in einem der Eckpunkte des Dreiecks von der Höhe und der Seitenhalbierenden gebildet wird!

591. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks sei a. Um den Mittelpunkt[1] dieses Dreiecks wurde mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis geschlagen. Bestimmen Sie die Teilfläche des Dreiecks, die außerhalb des Kreises liegt!

592. Ein rechtwinkliges Trapez habe die Höhe h. Die Seite, die nicht senkrecht zur Basis des Trapezes steht, sei Durchmesser eines Kreises. Dieser Kreis soll die gegenüberliegende Seite berühren. Berechnen Sie die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich den Grundseiten des Trapezes sind!

593. Zeigen Sie, daß im rechtwinkligen Dreieck die Winkelhalbierende des rechten Winkels den Winkel zwischen der Seitenhalbierenden und der Höhe gleichfalls halbiert!

594. Zeigen Sie, daß im rechtwinkligen Dreieck die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis ist!

595. Bestimmen Sie die Winkel im rechtwinkligen Dreieck, wenn bekannt ist, daß sich der Radius des Umkreises zum Radius des Inkreises wie 5 : 2 verhält!

596. Die Seiten eines Parallelogramms seien gleichzeitig Seiten von vier Quadraten, die außerhalb des Parallelogramms liegen. Verbinden Sie die Mittelpunkte benachbarter Quadrate geradlinig, und beweisen Sie, daß die so entstehende Figur ein Quadrat ist!

[1] Um- und Inkreismittelpunkt fallen beim gleichseitigen Dreieck zusammen.

9. Polyeder

597. Die Seiten der Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaders, d. Üb.) seien a und b. Die Raumdiagonale schließe mit der Grundfläche den Winkel α ein. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche des Körpers!

598. Die größte Raumdiagonale eines regelmäßigen, geraden, sechsseitigen Prismas habe die Länge d. Sie schließe mit der Seitenkante des Prismas den Winkel α ein. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas!

599. Die Seitenkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide habe die Länge m. Sie schließe mit der Grundfläche den Winkel α ein. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

600. Das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei V, der Winkel, den eine ihrer Seitenkanten mit der Grundfläche einschließt, sei α. Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten!

601. Die Mantelfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei A, die Höhe der Pyramide h. Geben Sie die Länge einer Seite der Pyramidengrundfläche an!

602. Bestimmen Sie das Volumen und die Mantelfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, wenn die Seitenkante l und der Durchmesser d_i des der Pyramidengrundfläche einbeschriebenen Kreises gegeben sind!

603. Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders[1], dessen Volumen V gegeben ist!

604. In einem geraden Parallelepiped seien von der Grundfläche die Seiten a und b und der spitze Winkel α gegeben. Die große Diagonale der Grundfläche soll der kleinen Diagonale des Körpers gleich sein. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds!

605. Die Raumdiagonalen eines geraden Parallelepipeds seien 9 cm und $\sqrt{33}$ cm lang. Der Umfang seiner Grundfläche betrage 18 cm, die Länge einer Seitenkante 4 cm. Bestimmen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers!

[1] Unter „Tetraeder" wird hier ein regelmäßiges Vierflach verstanden (oft bezeichnet man auch eine beliebige dreiseitige Pyramide als Tetraeder).

606. Die Seitenkante einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide habe die Länge l, die Höhe der Pyramide die Länge h. Bestimmen Sie den Winkel, den die Grundfläche mit einer Seitenfläche einschließt!

607. Bestimmen Sie das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn der Winkel α, den eine Seitenkante mit der Ebene der Grundfläche einschließt, und die Fläche A eines Diagonalschnittes gegeben sind!
Ferner ist der Winkel zu bestimmen, den Grund- und Seitenfläche miteinander einschließen.

608. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide sei ein Vieleck, dessen Innenwinkelsumme 540° ist. Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide, wenn bekannt ist, daß die Seitenkante die Länge l hat und mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α einschließt!

609. Bestimmen Sie die Winkel, die die Seitenkanten und die Seitenflächen in einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide mit der Grundfläche einschließen! Die Seitenflächen der Pyramide seien gleichseitige Dreiecke.

610. Bestimmen Sie aus dem Volumen V einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide, deren Grundkante a gegeben ist, den Winkel, den die Seitenkante mit der Ebene der Grundfläche einschließt!

611. Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide sei ein Rechteck mit der Diagonalen b und dem Winkel α zwischen den Diagonalen. Jede Seitenkante bilde mit der Grundfläche den Winkel β. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!

612. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a und mit dem Winkel α an der Spitze. Alle Seitenkanten schneiden die Ebene der Grundfläche unter dem Winkel β. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

613. Die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds sei ein Rechteck, das einem Kreis mit dem Radius r einbeschrieben ist. Zur kleineren Seite des Rechtecks gehöre im genannten Kreis ein Zentriwinkel 2α. Geben Sie das Volumen dieses Parallelepipeds an, wenn die Mantelfläche A_M gegeben ist!

614. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a und mit dem Basiswinkel β. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas, wenn seine Mantelfläche gleich der Summe von Grund- und Deckfläche ist!

615. Seiten- und Grundfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide schließen den Winkel α ein. Von der Mitte einer Grundkante habe die Spitze der Pyramide die Entfernung m. Bestimmen Sie die Oberfläche der Pyramide!

616. Durch die Hypotenuse c eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks verlaufe die Ebene E. Sie bilde mit der Ebene des Dreiecks den Winkel α. Bestimmen Sie den Umfang und die Fläche der Figur, die durch senkrechte Parallelprojektion des Dreiecks auf die Ebene E entsteht!

617. In einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide sei die Grundfläche A_G gegeben. Die Höhe schließe mit jeder Seitenfläche den Winkel φ ein. Berechnen Sie die Mantelfläche und die Oberfläche der Pyramide!

618. Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei gleich a. Die Seitenflächen schneiden die Grundflächenebene unter dem Winkel α. Bestimmen Sie Volumen und Oberfläche der Pyramide!

619. Die Oberfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei gleich A_n. Eine Seitenfläche und die Grundfläche schließen miteinander den Winkel α ein. Bestimmen Sie die Länge einer Grundkante!

620. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rhombus mit dem spitzen Winkel α. Die Seitenflächen bilden mit der Grundfläche den Winkel β. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen der Pyramide, wenn der Radius des dem Rhombus einbeschriebenen Kreises gleich r_i ist!

621. Bestimmen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide mit der Ebene der Grundfläche eingeschlossen wird, wenn die Grundfläche der Pyramide A_G und die Mantelfläche A_M gegeben sind!

622. Die Grundfläche eines geraden Parallelepipeds sei ein Rhombus. Die Ebene, die durch eine Seite der unteren und durch eine gegenüberliegende Seite der oberen Deckfläche verläuft, bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β. Die erhaltene Schnittfläche habe die Größe A_s. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Parallelepipeds!

623. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel α. Jede Seite der Pyramide schließe mit der Grundfläche den Winkel φ ein. Errichtet man in der Ebene der Seitenfläche auf der Basis des Grundflächendreiecks die Höhe, so habe die Mitte dieser Höhe vom Mittelpunkt des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises die Entfernung d. Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide!

624. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Vieleck, das einem Kreis mit dem Radius r umschrieben ist. Der Umfang des Vieleckes betrage $2s$. Die Seitenflächen der Pyramide bilden mit der Ebene der Grundfläche den Winkel φ. Geben Sie das Volumen der Pyramide an!

625. Die Seitenkanten eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes bilden mit der Grundfläche den Winkel α. Die Seite der Grundfläche habe die Länge c_1, die der Deckfläche die Länge c_2 $(c_1 > c_2)$. Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!

626. Die Grund- und Deckfläche eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes seien Quadrate mit den Seiten a und b $(a > b)$.
Die Seitenkanten schließen mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α ein. Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes und die Größe des Winkels zwischen Grund- und Seitenfläche!

627. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse b und mit einem spitzen Winkel α. Alle Seitenkanten bilden mit der Grundfläche den Winkel β. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und die Winkel an der Spitze!

628. Die Grundfläche eines schiefen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Die Summe der Kathetenlängen des Dreiecks sei gleich m und der Winkel an der Ecke A gleich α. Die Seitenfläche des Prismas, deren Ebene durch die Kathete $\overline{AC}$ verläuft, bilde mit der Grundfläche den Winkel β. Durch die Hypotenuse $\overline{AB}$ und durch die gegenüberliegende räumliche Ecke C_1 wird eine Ebene aufgespannt. Bestimmen Sie das Volumen der so entstandenen dreiseitigen Pyramide, wenn bekannt ist, daß ihre Seitenkanten gleich lang sind!

629. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel β. Alle Seitenkanten schließen mit der Ebene der Grundfläche die gleichen Winkel $\alpha = 90° - \beta$ ein. Die Schnittfläche durch die Höhe der Pyramide und durch die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks der Grundfläche habe die Größe A_s. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!

630. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck. Von den Seitenflächen stehen zwei auf der Ebene der Grundfläche senkrecht, während zwei mit ihr die Winkel α und β einschließen. Die Höhe der Pyramide sei gleich h. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

631. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein Quadrat. Von zwei einander gegenüberliegenden Seitenkanten stehe die eine senkrecht zur Ebene der Grundfläche, während die andere mit ihr den Winkel β einschließt und die Länge l hat. Bestimmen Sie die Längen der übrigen Seitenkanten und die Winkel, die sie mit der Grundfläche der Pyramide einschließen!

632. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Eine der Seitenkanten stehe senkrecht zur Grundfläche, die beiden anderen bilden also mit der Grundflächenebene gleiche Winkel β. Berechnen

Sie die größte Seitenfläche der Pyramide, und bestimmen Sie den Winkel, den sie mit der Grundfläche einschließt!

633. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkellänge gleich a und dessen Winkel an der Spitze 120° seien. Die Seitenkante der Pyramide, die durch den Scheitel des stumpfen Winkels verläuft, stehe senkrecht auf der Grundfläche. Die beiden anderen schneiden die Grundfläche unter dem Winkel α. Berechnen Sie die Größe der Schnittfläche der Pyramide mit der Ebene, die durch die größte Seite der Grundfläche der Pyramide verläuft und die Seitenkante halbiert, die senkrecht auf der Grundfläche steht!

634. Eine regelmäßige dreiseitige Pyramide werde von einer Ebene geschnitten, die senkrecht auf der Grundfläche steht und zwei Seiten der Grundfläche halbiert. Bestimmen Sie das Volumen der restlichen Pyramide, wenn die Seite a der Grundfläche der ursprünglichen Pyramide und der Winkel α zwischen Grund- und Seitenfläche gegeben sind!

635. Durch die Spitze einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide verlaufe parallel zu einer Seite der Grundfläche eine Ebene, die die Grundflächenebene unter einem Winkel φ schneidet. Die Grundkante der Pyramide sei gleich a, der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten an der Spitze gleich α. Bestimmen Sie die Größe der Schnittfläche!

636. Durch die Spitze einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide und durch die Halbierungspunkte zweier Seiten der Grundfläche sei eine Ebene bestimmt. Berechnen Sie die Größe der Schnittfläche und die Volumina der Teile der Pyramide, die durch den Schnitt entstanden sind, wenn die Seite a der Grundfläche der Pyramide und der Winkel α, den die Schnittebene mit der Grundfläche bildet, bekannt sind!

637. Ein Tetraeder[1], dessen Seitenkante gleich a ist, werde von einer Ebene geschnitten, die eine der Kanten des Tetraeders enthält und die gegenüberliegende Kante im Verhältnis 2 : 1 teilt. Bestimmen Sie die Schnittfläche und ihre Winkel!

638. Bestimmen Sie das Volumen eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes, wenn die Seiten der größeren und der kleineren Grundfläche mit a und b gegeben sind und wenn der spitze Winkel der Seitenflächen gleich α ist!

639. Bestimmen Sie das Volumen eines regelmäßigen vierseitigen Prismas! Die Raumdiagonale des Prismas bilde mit der Seitenfläche den Winkel α. Die Grundkante habe die Länge b.

[1] Siehe Fußnote zu Aufgabe 603!

640. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse b und mit einem spitzen Winkel α. Durch die Hypotenuse der unteren Grundfläche und durch den Scheitel des rechten Winkels der oberen Grundfläche verlaufe eine Ebene, die mit der unteren Grundfläche den Winkel β bildet. Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide, die vom Prisma durch die Ebene abgeschnitten wird!

641. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck. Die Summe der Längen einer Kathete und der Hypotenuse sei gleich m; zwischen diesen beiden Seiten liege der Winkel γ. Durch die andere Kathete und durch die gegenüberliegende räumliche Ecke des Prismas sei eine Ebene bestimmt, die die Grundfläche unter dem Winkel β schneide. Bestimmen Sie die Volumen der Teile des Prismas, die durch den Schnitt des Prismas mit der Ebene entstanden sind!

642. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel γ. Jede Seite der Pyramide bilde mit der Grundfläche den Winkel $\varphi = 90° - \gamma$. Die Summe der Seitenflächen sei A_M. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide!

643. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a und mit dem Basiswinkel α ($\alpha > 45°$). Die Seitenkanten schließen mit der Grundfläche den Winkel β ein. In dieser Pyramide verlaufe eine Ebene durch die Höhe der Pyramide und durch den Scheitel des einen Basiswinkels α. Geben Sie die Größe der Schnittfläche an!

644. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein Viereck, das zwei gegenüberliegende rechte Winkel habe. Die Diagonale der Grundfläche, die die Scheitel der beiden anderen Winkel verbindet, habe die Länge l und teile einen dieser Winkel in die Winkel α und β. Die Schnittfläche des Prismas mit der Ebene, die durch die andere Diagonale verläuft und auf der Grundfläche senkrecht steht, habe die Größe A_s. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas!

645. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat. Zwei gegenüberliegende Seitenflächen der Pyramide seien gleichschenklige Dreiecke. Die eine von ihnen bilde mit der Grundfläche den inneren Winkel β, die andere den äußeren spitzen Winkel α. Die Höhe der Pyramide sei gleich h. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und die Winkel, die die beiden anderen Seitenflächen mit der Grundfläche bilden!

646. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck. Eine der Seitenflächen der Pyramide schließe mit der Grundfläche den Winkel $\beta = 90° - \alpha$ ein, während die ihr gegenüberliegende Seitenfläche senkrecht auf der Grundfläche steht, und die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel an der

Spitze der Pyramide und einem spitzen Winkel α habe. Die Summe der Höhen dieser beiden Seiten sei gleich m. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide und die Summe der beiden anderen Seitenflächen!

647. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck. Eine der Seitenflächen habe die Form eines gleichschenkligen Dreiecks und stehe senkrecht auf der Grundfläche. Die andere Fläche, die der genannten gegenüberliegt, werde von zwei Seitenkanten der Länge b begrenzt, die miteinander den Winkel 2α und mit den Kanten, die die erste Fläche begrenzen, den Winkel α bilden. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide und den Winkel zwischen den beiden genannten Flächen!

648. In einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, deren Grundkantenlänge a betrage, seien die Winkel zwischen den Kanten an der Spitze gleich α ($\alpha \leqq 90°$). Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Seitenflächen der Pyramide und die Schnittfläche, die durch den Schnitt der Pyramide mit einer Ebene, welche durch eine Grundkante und senkrecht zur gegenüberliegenden Seitenkante verlaufe, gebildet wird!

649. Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Seitenflächen und das Volumen eines Oktaeders (regelmäßiger Achtflächner) mit der Kantenlänge a!

650. Der Winkel zwischen zwei Seitenflächen einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sei φ. Berechnen Sie die Winkel, die zwei benachbarte Seitenkanten an der Spitze der Pyramide miteinander bilden!

651. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$. Die Seitenkante $\overline{AM}$ stehe senkrecht auf der Ebene der Grundfläche. Die ihr gegenüberliegende Kante $\overline{DM}$ bilde mit der Grundfläche den Winkel α. Berechnen Sie die Winkel, die die Seitenflächen mit der Grundfläche einschließen!

652. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC, in dem $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist. Die Höhe $\overline{SO}$ der Pyramide verlaufe durch die Mitte der Höhe $\overline{AD}$ der Grundfläche. Die Seite $\overline{BC}$ liege in einer Ebene, die senkrecht auf der Seitenkante $\overline{AS}$ stehe und mit der Grundfläche den Winkel α bilde. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide, die von der gegebenen abgeschnitten wird und mit ihr die Spitze S gemeinsam hat, wenn das Volumen des anderen Teiles der Pyramide gleich V ist!

653. Die Grundkante einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei a. Die Schnittfläche, die den Winkel zwischen zwei Seitenflächen halbiere, sei ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und den Winkel zwischen einer Seiten- und der Grundfläche!

654. Durch eine Grundkante (Länge q) einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei die zur gegenüberliegenden Seitenkante senkrechte Ebene gelegt. Bestimmen Sie die Oberfläche der Pyramide, wenn die gegebene Ebene die Seitenkante im Verhältnis $m : n$ teilt!

655. Die Raumdiagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds habe die Länge d und bilde mit zwei benachbarten Seitenflächen gleiche Winkel α. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds und den Winkel, den die Grundfläche mit der Ebene bildet, die durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte der Grundfläche und durch einen der anderen beiden Eckpunkte der Deckfläche verläuft!

656. In einem rechtwinkligen Parallelepiped sei der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche mit der Mitte einer der Seitenkanten geradlinig verbunden. Beide Punkte haben die Entfernung m voneinander. Diese Strecke bilde mit der Grundfläche den Winkel α und mit einer der Seitenflächen den Winkel $\beta = 2\alpha$. Nehmen Sie eine der anderen angrenzenden Seitenflächen als Grundfläche an, berechnen Sie dann die Mantelfläche und das Volumen des Körpers! (Zeigen Sie, daß $\alpha < 30°$ sein muß!)

657. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein Trapez, das in einen Halbkreis mit dem Radius r so einbeschrieben ist, daß die größere Grundseite des Trapezes der Durchmesser des Halbkreises, die kleinere die Sehne zu einem Bogen mit dem Zentriwinkel 2α ist. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas, wenn die Diagonale der von einem Schenkel der Grundfläche begrenzten Seitenfläche mit der Grundfläche den Winkel α bildet!

658. Die Raumdiagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds habe die Länge d. Sie bilde mit einer Seitenfläche den Winkel $\beta = 90° - \alpha$. Die Ebene, die durch diese Diagonale und durch eine sich mit ihr schneidende Seitenkante aufgespannt wird, bildet mit einer Seitenfläche den Winkel α. (Weisen Sie nach, daß $\alpha > 45°$ ist!). Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds!

659. In einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma seien zwei Ecken der oberen Grundfläche mit den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten der unteren Grundfläche verbunden. Der mit seiner Öffnung der unteren Grundfläche zugewandte Winkel zwischen den erhaltenen Geraden sei α. Die Grundkante habe die Länge b. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas!

660. In einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma sei der Winkel zwischen der Diagonale einer Seitenfläche und der anderen Seitenfläche gleich α. Berechnen Sie die Mantelfläche des Prismas, wenn die Länge der Grundkante mit a gegeben ist!

661. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Stücken:

$\sphericalangle\, BCA = 90°$; $\sphericalangle\, CAB = \alpha$; Kathete $\overline{AC} = b$.

Die Diagonale der durch die Hypotenuse $\overline{AB}$ der Grundfläche begrenzten Seitenfläche bildet mit der Seitenfläche, die zur Kathete $\overline{AC}$ gehört, den Winkel β. Geben Sie das Volumen des Prismas an!

662. Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei A_n. Zwei benachbarte Seitenkanten bilden an der Spitze den Winkel α. Geben Sie die Höhe der Pyramide an!

663. In einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide sei der Winkel zwischen zwei Seitenkanten an der Spitze gleich α. Die Grundkante habe die Länge a. Bestimmen Sie das Volumen!

664. Aus einem regelmäßigen vierseitigen Prisma entstehe durch den Schnitt mit einer Ebene, die durch eine Diagonale der unteren Grundfläche und durch einen Eckpunkt der oberen Grundfläche verläuft, eine Pyramide mit der Oberfläche A. Gesucht ist die Oberfläche des Prismas, wenn der Winkel an der Spitze des durch den Schnitt erhaltenen Dreiecks α ist.

665. Die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide haben die gleiche Länge l. Von den drei Winkeln zwischen diesen Kanten an der Spitze der Pyramide seien zwei gleich α, der dritte gleich β. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

666. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck, das gleichzeitig die Projektion der durch eine seiner Katheten begrenzten Seitenfläche sei. Der Winkel, der in der Ebene der Grundfläche dieser Kathete gegenüberliegt, sei α, während der in der Ebene der Seitenfläche der gleichen Kathete gegenüberliegende die Größe β habe. Die Fläche der genannten Pyramidenseitenfläche sei um A größer als die Grundfläche. Bestimmen Sie die Flächendifferenz zwischen den beiden anderen Seitenflächen und die Winkel, die die Seitenflächen mit der Ebene der Grundfläche einschließen!

667. In einer dreiseitigen Pyramide seien zwei Seitenflächen gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen b. Die beiden Hypotenusen bilden miteinander den Winkel α. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

668. In einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sei jede der Seitenkanten gleich l. Einer der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten an der Spitze sei gleich α, der andere gleich β. Berechnen Sie die Schnittfläche der Pyramide mit der Ebene, die durch die Winkelhalbierenden der Winkel β verläuft!

669. In einem Parallelepiped seien die Längen dreier Kanten, die von einer gemeinsamen Ecke ausgehen, gleich a, b und c. Die Kanten a und b stehen aufeinander senkrecht, während die Kante c mit jeder dieser beiden Kanten den Winkel α einschließe. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, die Mantelfläche und den Winkel zwischen der Kante c und der Ebene der Grundfläche! (Für welche Werte des Winkels α ist die Aufgabe sinnvoll?)

670. Alle Flächen eines Parallelepipeds seien gleiche Rhomben mit den Seitenlängen a und den spitzen Winkeln α. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds!

671. Die Grundfläche eines schiefen Parallelepipeds sei ein Rhombus $ABCD$ mit den Seitenlängen a und den spitzen Winkeln α. Die Kante $\overline{AA_1}$ habe die Länge b und bilde mit den Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ den Winkel φ. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds!

672. In einem rechtwinkligen Parallelepiped verlaufe eine Ebene durch eine Diagonale der Grundfläche und durch eine Diagonale einer größeren Seitenfläche (beide Diagonalen schneiden einander in einer Ecke). Der Winkel zwischen diesen Diagonalen sei gleich β. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche des Parallelepipeds, die Schnittfläche und den Winkel, den die Schnittfläche mit der Grundfläche einschließt! Gegeben sind der Radius des der Grundfläche des Epipeds umbeschriebenen Kreises und der kleinere Winkel 2α zwischen den Diagonalen der Grundfläche.

673. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Der Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises sei gleich r, und die Kathete $\overline{AB}$ gehöre als Sehne zu einem Bogen mit dem Zentriwinkel 2γ. Durch die Diagonale der Seitenfläche, die durch die Kathete $\overline{BC}$ begrenzt ist, sei eine Ebene senkrecht zu dieser Seitenfläche errichtet. Diese Ebene schneide die Grundflächenebene unter dem Winkel γ. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Prismas und das Volumen der entstandenen vierseitigen Pyramide!

674. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Trapez, in dem die Schenkel und die kleinere der Grundseiten untereinander gleich seien. Die größere Grundseite sei gleich a und der stumpfe Winkel des Trapezes gleich α. Alle Seitenkanten der Pyramide bilden mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

675. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Trapez, dessen Diagonale senkrecht auf einem Schenkel stehe und mit der Grundseite des Trapezes den Winkel α einschließe. Alle Seitenkanten der Pyramide seien untereinander gleich lang. Die Seitenfläche, die zur größeren Grundseite des Trapezes gehört, habe die Größe A.

In ihr liege der Winkel $\varphi = 2\alpha$ an der Spitze der Pyramide. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und die Winkel, die die Seitenflächen mit der Ebene der Grundfläche bilden!

676. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Das Lot, von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefällt, gehe durch einen der Eckpunkte der Grundfläche. Die Seitenfläche, die durch die Seite des Grundflächendreiecks, die dem genannten Punkt gegenüberliegt, verläuft, bilde mit der Grundflächenebene den Winkel φ. Bestimmen Sie die Mantelfläche, wenn man eine der beiden gleichen Seitenflächen als Grundfläche der Pyramide wählt!

677. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a und dem Basiswinkel α. Durch die Basis des Dreiecks in der oberen Deckfläche und durch die gegenüberliegende Ecke der unteren Deckfläche verlaufe eine Ebene, die mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β bilde. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Prismas und das Volumen der durch den Schnitt entstandenen vierseitigen Pyramide!

678. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat. Zwei Seitenflächen stehen senkrecht auf der Ebene der Grundfläche. Die beiden anderen schließen mit ihr den Winkel α ein. Der Radius des Kreises, den man einer der senkrecht zur Grundfläche stehenden Seitenflächen umschreiben kann, sei gleich r. Bestimmen Sie die Oberfläche der Pyramide!

679. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete a und mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel α. Durch den Scheitel des rechten Winkels der unteren Grundfläche verlaufe parallel zur Hypotenuse eine Ebene, die die gegenüberliegende Seitenfläche unter dem Winkel $\gamma = 90° - \alpha$ schneide. Bestimmen Sie das Volumen des Prismateiles, der zwischen der unteren Grundfläche und der Schnittfläche liegt! Geben Sie ferner die Größe der Mantelfläche des Prismas an, wenn bekannt ist, daß die durch die Kathete a begrenzte Seitenfläche genauso groß ist wie die Schnittfläche im Prisma! Untersuchen Sie, für welche Werte des Winkels α die Schnittebene die Seitenfläche schneidet, die zur Hypotenuse der Grundfläche gehört!

680. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck. Eine Seitenkante stehe senkrecht zur Ebene der Grundfläche. Zwei Seitenflächen schließen mit der Grundfläche die Winkel α und β ein. Bestimmen Sie die Mantelfläche, wenn die Höhe h der Pyramide gegeben ist!

681. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein spitzer Winkel gleich α und der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich r ist. Jede Seitenfläche bilde mit der Grundfläche den Winkel α. Bestimmen Sie das Volumen, die Mantel- und die Oberfläche der Pyramide!

682. Die Grundfläche eines Prismas $ABCA_1B_1C_1$ sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$ und $\sphericalangle\ ABC = \alpha$). Der Eckpunkt B_1 der oberen Grundfläche, projiziert auf die Ebene der unteren Grundfläche, liefere als Bildpunkt den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r, der der Grundfläche einbeschrieben ist. Durch die Seite $\overline{AC}$ der Grundfläche und durch den Eckpunkt B_1 wird eine Ebene festgelegt, die die Ebene der Grundfläche unter dem Winkel α schneide. Berechnen Sie die Oberfläche der entstandenen dreiseitigen Pyramide $ABCB_1$ und das Volumen des Prismas!

683. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck. Die Höhe der Pyramide verlaufe durch den Schnittpunkt der Hypotenuse mit der Winkelhalbierenden des rechten Winkels der Grundfläche. Die Seitenkante, die durch den Scheitel des rechten Winkels gehe, bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und die Winkel, die die Seitenflächen mit der Ebene der Grundfläche einschließen, wenn die Winkelhalbierende des rechten Winkels der Grundfläche die Länge m hat und mit der Hypotenuse den Winkel $45° + \alpha$ bildet!

684. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rhombus mit der Seitenlänge a. Zwei benachbarte Seitenflächen bilden mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α, die dritte Fläche schließe mit der Grundfläche den Winkel β ein. (Zeigen Sie, daß auch die vierte Fläche die Grundfläche unter diesem Winkel schneidet!) Die Höhe der Pyramide sei h. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide!

685. Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide sei ein Rhombus, dessen Seitenlänge a und dessen spitzer Winkel α gegeben seien. Die Ebenen, die durch die Spitze der Pyramide und durch die Diagonalen der Grundfläche festgelegt sind, schneiden die Ebene der Grundfläche unter den Winkeln φ und ψ. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide, wenn ihre Höhe eine Seite der Grundfläche schneidet!

686. Die Grundfläche eines schiefen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit einer Kathete $\overline{BC} = a$. Wenn man den Eckpunkt C_1 der oberen Grundfläche auf die Ebene der unteren Grundfläche projiziert, erhält man als Bildpunkt den Halbierungspunkt der Kathete $\overline{BC}$. Die Seitenflächen, die durch die Kathete $\overline{BC}$ und durch die Hypotenuse $\overline{AC}$ begrenzt sind, bilden miteinander den Winkel α. Die Seitenkanten schließen mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β ein. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Prismas!

687. Die Grundfläche des Prismas $ABCA_1B_1C_1$ sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$ und $\sphericalangle\ CAB = 2\alpha$). Projiziert man den Eckpunkt A_1 der oberen Grundfläche auf die untere, so erhält man den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r, der der unteren Grundfläche umbeschrieben ist. Die Seitenkante $\overline{AA_1}$ bilde mit der Grundkante $\overline{AB}$ den Winkel 2α. Bestimmen Sie das Volumen und die Mantelfläche des Prismas!

688. Bestimmen Sie das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, deren Seitenkanten die Länge l haben! Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen sei gleich β.

689. Von einem regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf seien folgende Stücke bekannt:
die Länge der Raumdiagonale d, der Winkel α zwischen der unteren Grundfläche und einer Seitenfläche sowie die Höhe h.
Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!

690. Die Seitenkante eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes habe die Länge l. Sie bilde mit der Grundfläche den Winkel β. Die Raumdiagonale des Pyramidenstumpfes stehe senkrecht auf ihrer Seitenkante. Bestimmen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!

691. Die Höhe eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes sei h. Raumdiagonale und Seitenkante des Stumpfes bilden mit der Ebene der Grundfläche die Winkel β und α. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche!

692. Die Seitenlängen der Grundflächen eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes seien a und $a\sqrt{3}$. Die Seitenfläche bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel γ. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Pyramidenstumpfes!

693. In eine regelmäßige vierseitige Pyramide sei ein Würfel so einbeschrieben, daß vier seiner Eckpunkte auf den Seitenkanten, die restlichen vier in der Grundfläche der Pyramide liegen. Bestimmen Sie die Kantenlänge des Würfels, wenn die Höhe h der Pyramide und die Seitenkantenlänge l gegeben sind!

694. In eine regelmäßige vierseitige Pyramide sei ein Würfel so einbeschrieben, daß seine Ecken auf den Symmetrieachsen der Grundfläche und der Seitenflächen liegen. Berechnen Sie das Verhältnis zwischen dem Volumen der Pyramide und dem Volumen des Würfels, wenn der Winkel α zwischen der Höhe der Pyramide und einer Seitenfläche gegeben ist!

695. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 6 cm und 8 cm. Die Spitze der Pyramide habe von der Ebene der Grundfläche einen Abstand von 24 cm, und ihre Projektion auf die Ebene der Grundfläche liege im Innern der Grundfläche. Berechnen Sie die Kantenlänge des Würfels, von dem vier Ecken in der Ebene der Grundfläche der gegebenen

Pyramide liegen und dessen Kanten parallel zu den Katheten des Grundflächendreiecks verlaufen! Die vier anderen Eckpunkte des Würfels liegen auf den Seitenflächen der gegebenen Pyramide.

696. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei der Winkel α zwischen der Grundfläche und den Seitenflächen gegeben. Durch eine Kante, auf der der Scheitel eines Winkels α liege, verlaufe eine Ebene, die mit der Grundfläche den Winkel β bilde. Die Länge der Grundkante sei gleich a. Bestimmen Sie die Größe der Schnittfläche!

697. Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei die Grundkante a gegeben. Seitenflächen und Grundfläche schneiden einander unter dem Winkel α. Durch zwei gegenüberliegende Seiten der Grundfläche verlaufen zwei Ebenen, die sich unter einem rechten Winkel schneiden. Bestimmen Sie die Länge der Schnittstrecke, die innerhalb der Pyramide liegt, wenn bekannt ist, daß sie die Achse der Pyramide schneidet!

698. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide verlaufe eine Ebene durch einen Eckpunkt der Grundfläche senkrecht zur gegenüberliegenden Seitenkante. Bestimmen Sie die Schnittfläche, wenn die Grundkante a der Pyramide gegeben ist! Ferner bilde die Seitenkante mit der Grundfläche den Winkel φ. (Weisen Sie nach, daß $\varphi > 45°$ gilt!)

699. Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma werde von einer Ebene so geschnitten, daß die Schnittfigur ein Rhombus mit dem spitzen Winkel α ist. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der gesuchten Ebene und der Ebene der Grundfläche!

700. Die Grundfläche eines geraden Parallelepipeds sei ein Rhombus mit dem spitzen Winkel α. Unter welchem Winkel muß eine zu bestimmende Ebene die Grundflächenebene schneiden, damit die Schnittfläche ein Quadrat ist, dessen Ecken auf den Seitenkanten liegen?

701. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundfläche ein Rhombus mit der Seitenlänge a und dem spitzen Winkel α sei, werde von einer Ebene, die durch den Scheitel eines Winkels der Größe α verläuft, so geschnitten, daß als Schnittfläche ein Rhombus mit dem spitzen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ entsteht. Bestimmen Sie die Größe der Schnittfläche!

702. Die Kanten eines Tetraeders haben die Länge b. Durch die Mitte einer Kante sei eine Ebene so gelegt, daß sie parallel zu zwei sich nicht schneidenden Kanten verläuft. Berechnen Sie die Größe der erhaltenen Schnittfläche!

703. Eine Pyramide besitze als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit der einen Kathetenlänge a. Eine der Seitenkanten der Pyramide stehe senkrecht auf der Grundflächenebene, die beiden anderen bilden mit ihr die gleichen Winkel α.

Eine Ebene, die senkrecht auf der Grundfläche steht, schneide die Pyramide so, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist. Bestimmen Sie die Fläche dieses Quadrates!

704. In einem regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf seien die Seitenlängen a und $3a$ der oberen bzw. unteren Grundfläche gegeben. Die Seitenflächen bilden mit der unteren Grundfläche den Winkel α. Durch eine Seite der oberen Grundfläche verlaufe eine Ebene parallel zur gegenüberliegenden Seitenfläche. Bestimmen Sie das Volumen des vierseitigen Prismas, das vom gegebenen Pyramidenstumpf abgeschnitten wurde, und die Oberfläche des verbleibenden Rests!

705. Durch einen Punkt, der auf einer Seitenkante eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas mit der Grundkantenlänge a liege, verlaufen zwei Ebenen. Eine von ihnen verlaufe durch die Grundkante des Prismas unter dem Winkel α zur unteren Grundfläche, die andere durch die Seite der oberen Grundfläche, die zur genannten Grundkante parallel verläuft. Die obere Grundfläche werde von der zweiten Ebene unter dem Winkel β geschnitten. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas und die Summe der entstandenen Schnittflächen!

706. In einem regelmäßigen vierseitigen Prisma verlaufe eine Ebene durch die Mitten zweier benachbarter Grundkanten. Diese Ebene schneide drei Seitenkanten und bilde mit der Grundflächenebene den Winkel α. Bestimmen Sie die Fläche des erhaltenen Schnittes und seinen spitzen Winkel! Die Seite der Grundfläche des Prismas habe die Länge b.

707. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein gleichschenkliges Trapez mit dem spitzen Winkel α. Dieses Trapez sei einem Kreis mit dem Radius r umbeschrieben. Durch einen Schenkel der unteren Grundfläche und durch den gegenüberliegenden Scheitelpunkt des spitzen Winkels der oberen Grundfläche werde eine Ebene aufgespannt, die mit der unteren Grundfläche den Winkel α bilde. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche des Prismas und die Größe der entstehenden Schnittfläche!

708. Die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCA_1B_1C_1$ sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit dem Winkel α an der Basis $\overline{BC}$. Die Mantelfläche des Prismas sei A. Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die durch den Schnitt des Prismas mit einer Ebene, welche durch die Diagonale der Seitenfläche BCC_1B_1 parallel zur Höhe $\overline{AD}$ der Grundfläche des Prismas verläuft, entsteht! Die Ebene bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β.

709. Die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCA_1B_1C_1$ sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem Winkel γ an der Ecke C ($\gamma < 45°$). Die Differenz der beiden zu den Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ gehörenden Seitenflächen sei gleich A. Geben Sie die Größe der Schnittfläche des Prismas mit einer Ebene an, die mit

der Ebene der unteren Grundfläche den Winkel φ bildet und durch drei Punkte bestimmt ist:
Scheitelpunkt C_1 des Winkels γ der oberen Grundfläche;
Mittelpunkt der Seitenkante $\overline{AA_1}$;
Punkt D, der in der Ebene der unteren Grundfläche symmetrisch zu C bezüglich der Kathete $\overline{AB}$ liegt!

710. Die sich nicht schneidenden Diagonalen zweier benachbarter Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds schließen mit der Ebene der unteren Grundfläche die Winkel α und β ein. Bestimmen Sie den Winkel zwischen diesen Diagonalen!

711. Gegeben seien drei ebene Winkel der räumlichen Ecke $SABC$:

$$\sphericalangle CSB = \alpha; \quad \sphericalangle CSA = \beta; \quad \sphericalangle BSA = \gamma.$$

Geben Sie die Größe der Winkel zwischen den drei begrenzenden Ebenen an!

712. Ein Winkel zwischen zwei Ebenen einer räumlichen Ecke sei gleich Θ. Die zugehörigen ebenen Winkel der beiden Ebenen in der räumlichen Ecke haben die Größen α und β. Bestimmen Sie den dritten ebenen Winkel!

713. In einer räumlichen Ecke seien drei ebene Winkel 45°; 60° und 45° gegeben. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen, zu denen die Winkel von 45° gehören!

714. Auf der Schnittgeraden zweier Ebenen sei die Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Auf einer der Ebenen liege ein Punkt M. Die Gerade durch A, die mit $\overline{AB}$ den Winkel α bildet und in der Ebene von M verläuft, schneide die Gerade, die durch B senkrecht zu $\overline{AB}$ verlaufe, im Punkt M. Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Ebenen, wenn die Gerade AM mit der anderen Ebene den Winkel β bildet!

715. Gegeben seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2, die einen Winkel φ[1] miteinander bilden. Ihr gemeinsames Lot habe die Länge $\overline{PQ} = h$. Auf der Geraden g_1 liege der Punkt A und auf der Geraden g_2 der Punkt B so, daß von ihnen die Strecke $\overline{PQ}$ unter den Winkeln α und β gesehen werde. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$!

716. Auf zwei senkrecht zueinander verlaufenden windschiefen Geraden, deren Abstand $\overline{PQ} = h$ ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, von denen der Abstand $\overline{PQ}$ unter den Winkeln α und β gesehen werde. Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\overline{AB}$ und der Strecke $\overline{PQ}$!

[1] Zum Winkel zweier windschiefer Geraden siehe Lösung dieser Aufgabe!

717. Eine Schnittebene teile die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide in den Verhältnissen:

$$\frac{m_1}{n_1}; \quad \frac{m_2}{n_2}; \quad \frac{m_3}{n_3} \quad \text{(von der Pyramidenspitze gerechnet).}$$

In welchem Verhältnis teilt die Ebene das Volumen der Pyramide?

718. Die Lote von der Mitte der Höhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide auf die Seitenkanten haben die Länge a, die auf die Seitenflächen die Länge b. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide!

10. Rotationskörper

719. Die Mantellinie eines Kegels habe die Länge l und bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel 60°. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels!

720. Die Länge der Mantellinie eines Kegels sei gleich l und der Umfang der Grundfläche gleich c. Bestimmen Sie sein Volumen!

721. Die Abwicklung der Mantelfläche eines Zylinders ergebe ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Bestimmen Sie das Volumen des Zylinders!

722. Die Mantelfläche eines Zylinders ergebe, wenn sie abgewickelt wird, ein Rechteck, in dem die Diagonalen die Länge d haben. Die Diagonalen bilden mit den Seiten, die durch Abwicklung der Grundflächenkreise entstehen, den Winkel α. Bestimmen Sie das Volumen des Zylinders!

723. Der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes eines Kegels sei 2α. Die Summe der Längen seiner Höhe und einer Mantellinie sei gleich m. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Kegels!

724. Das Volumen eines Kegels sei gleich V. Seine Höhe sei in drei gleiche Teile geteilt, und durch diese Punkte verlaufen Ebenen parallel zur Ebene der Grundfläche. Bestimmen Sie das Volumen des mittleren Teiles!

725. Bestimmen Sie das Volumen eines Kegels, wenn in seiner Grundfläche eine Sehne der Länge a liegt, die zum Zentriwinkel α gehört! Die Höhe des Kegels bilde mit einer Mantellinie den Winkel β.

726. Auf ein und derselben Grundfläche seien zwei Kegel (einer innerhalb des anderen) errichtet. Der Winkel zwischen der Höhe und der Mantellinie des kleineren Kegels sei α, der zwischen der Höhe und der Mantellinie des größeren Kegels β. Die Differenz der Höhen beider Kegel habe den Wert h. Bestimmen Sie das Volumen, das zwischen den Kegelmänteln eingeschlossen ist!

727. Die Mantelfläche eines Kegels habe die Größe A_M, die Oberfläche die Größe A_O. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Höhe und einer Mantellinie im Kegel!

728. Die Mantelfläche eines Kegels ergebe, in die Ebene abgewickelt, einen Kreissektor mit dem Winkel α und der Sehnenlänge a. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels!

729. Durch die Spitze eines Kegels verlaufe eine Ebene unter dem Winkel φ zur Grundfläche geneigt. Sie schneide aus dem Grundflächenkreis einen Bogen aus, der zum Zentriwinkel α gehöre. Die Ebene habe vom Mittelpunkt der Grundfläche den Abstand a. Berechnen Sie das Volumen des Kegels!

730. Die Grundfläche eines Kegels sei einem Quadrat mit der Seitenlänge a umbeschrieben. Die Ebene, die durch die Spitze des Kegels und durch eine Seite des Quadrates verläuft, ergibt als Schnittfigur mit der Oberfläche des Kegels ein Dreieck mit dem Winkel α an der Spitze. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Kegels!

731. Die Mantellinie eines Kegelstumpfes, die die Länge l habe, bilde mit der Ebene der unteren Grundfläche den Winkel α und stehe senkrecht auf der Geraden, die den oberen Endpunkt von l mit dem unteren Endpunkt der gegenüberliegenden Mantellinie verbinde. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche des Kegelstumpfes!

732. Gegeben sei ein Kegel mit dem Volumen V. Seine Mantellinie bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α. In welcher Höhe muß eine Ebene senkrecht zur Achse des Kegels verlaufen, damit ihr Schnitt mit dem Kegel

a) die Mantelfläche des Kegels;
b) die Oberfläche des Kegels halbiert?

733. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche eines Kugelsektors, der aus einer Kugel mit dem Radius r ausgeschnitten wurde, wenn dessen Achsenschnitt den Winkel α aufweist!

734. Ein Kugelsegment einer Kugel mit dem Radius r habe die Oberfläche A_O. Berechnen Sie seine Höhe!

735. Die Fläche eines Dreiecks ABC sei gleich A. Seine Seite $\overline{AC} = b$ und der Winkel $CAB = \alpha$ seien bekannt. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, den man durch Drehung des Dreiecks ABC um die Seite $\overline{AB}$ erhält!

736. Von einem Dreieck seien die Seite a und die Winkel β und γ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, den man durch Drehung des Dreiecks um die gegebene Seite erhält!

737. Ein Rhombus mit der größeren Diagonale d und einem spitzen Winkel γ wird um die Achse gedreht, die durch eine Ecke des Rhombus senkrecht zur größeren Diagonale außerhalb der Figur verläuft. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers!

738. Von einem Dreieck seien die Seiten b, c und der Winkel α zwischen ihnen gegeben. Dieses Dreieck werde um eine Achse gedreht, die außerhalb des Dreiecks durch den Scheitel des Winkels α verlaufe und mit den Seiten b und c gleiche Winkel bilde. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers!

739. In einem gleichschenkligen Trapez mögen die Diagonalen senkrecht auf den Schenkeln stehen. Die Schenkel haben die Länge b und bilden mit der größeren Grundseite den Winkel α. Bestimmen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Drehung des Trapezes um die größere Grundseite entsteht!

740. Durch die Spitze eines Kegels sollen zwei Ebenen verlaufen. Eine von ihnen bilde mit der Ebene der Grundfläche des Kegels den Winkel α und schneide die Grundfläche in einer Sehne der Länge a. Die andere bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel β und schneide die Grundfläche in einer Sehne der Länge b. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels!

741. Ein Kegel sei einer Kugel umbeschrieben. Bestimmen Sie das Volumen der Kugel, wenn die Länge l der Mantellinie des Kegels und der Winkel α, den sie mit der Ebene der Grundfläche bildet, bekannt sind!

742. Eine Gerade sei Tangente an den Mantel eines Kegels. Sie bilde mit der Mantellinie, die durch den Berührungspunkt verlaufe, den Winkel Θ. Welchen Winkel φ bildet diese Gerade mit der Ebene E der Grundfläche des Kegels, wenn die Mantellinie mit der Ebene E den Winkel α bildet?

743. Ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen spitze Winkel α und β und dessen kleinste Höhe h bekannt seien, werde um die Seite, die dem Winkel β gegenüberliege, gedreht. Geben Sie die Oberfläche des Rotationskörpers an!

744. Ein kegelförmiges Gefäß, das auf der Spitze steht und dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, sei gänzlich mit Wasser gefüllt. Ferner soll sich in ihm eine Kugel mit dem Radius r befinden, die die Wasseroberfläche und den Kegelmantel berührt. Bestimmen Sie die Höhe des Wasserstandes nach dem Entfernen der Kugel aus dem Wasser!

745. In einem Kegel, dessen Radius der Grundfläche gleich r ist und dessen Mantellinie mit der Grundfläche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bildet, sei ein gerades dreiseitiges Prisma so einbeschrieben, daß die untere Grundfläche des Prismas in der Grundfläche des Kegels liege und die Ecken der oberen Grundfläche des Prismas auf der Mantelfläche des Kegels liegen. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Prismas, wenn seine Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel α ist! Die Höhe des Prismas sei gleich dem Radius des Schnittes des Kegels mit der Ebene der oberen Grundfläche des Prismas.

746. In eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a ist, sei ein Zylinder so einbeschrieben, daß sich seine untere Grundfläche in der Grundfläche der Pyramide befindet, während der Rand der oberen Grundfläche alle Seitenflächen der Pyramide berührt. Bestimmen Sie das Volumen des Zylinders und das Volumen derjenigen Pyramide, die von der ursprünglichen durch den Schnitt der Ebene der oberen Grundfläche abgetrennt wird! Es sei ferner bekannt, daß die Höhe des Zylinders $\frac{a}{2}$ beträgt, daß eine der Seitenkanten der Pyramide senkrecht auf der Ebene der Grundfläche steht und daß eine Seitenfläche mit der Grundfläche den Winkel α bildet. (Zeigen Sie, für welche Werte von α die Aufgabe lösbar ist!)

747. In eine Kugel mit dem Radius r sei ein gerades dreiseitiges Prisma einbeschrieben. Die Grundfläche dieses Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel α, die größte Seitenfläche ein Quadrat. Bestimmen Sie die Größe des Prismenvolumens!

748. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck mit dem spitzen Winkel α zwischen den Diagonalen. Die Seitenkanten bilden mit der Ebene der Grundfläche den Winkel φ. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide, wenn der Radius der Kugel, die der Pyramide umbeschrieben ist, gleich r ist!

749. Der Radius der Grundfläche eines Kegels sei r, der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes gleich α. Berechnen Sie das Volumen der regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, die dem Kegel umbeschrieben ist!

750. In einen Kegelstumpf sei eine Kugel mit dem Radius r einbeschrieben. Die Mantellinie des Kegelstumpfes bilde mit der Grundfläche den Winkel α. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Kegelstumpfes!

751. Einer Kugel mit dem Radius r sei ein Kegelstumpf umbeschrieben. Seine Mantellinie bilde mit der Grundfläche den Winkel α. Bestimmen Sie die Oberfläche des Kegelstumpfes!

752. Einem Kegelstumpf sei eine Kugel mit dem Radius r einbeschrieben. Die Mantellinie des Stumpfes bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α. Bestimmen Sie das Volumen des Kegelstumpfes!

753. Durch einen Punkt auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r seien drei Sehnen gleicher Länge so konstruiert, daß jede mit jeder den Winkel α bildet. Berechnen Sie die Länge der Sehnen!

754. In eine Kugel mit dem Radius r sei ein Kegelstumpf einbeschrieben. Seine beiden Grundflächen schneiden von der Kugel zwei Segmente ab, zu deren

Achsenschnitten die Zentriwinkel α und β gehören. Bestimmen Sie die Größe der Mantelfläche des Kegelstumpfes!

755. Die Seitenflächen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide bilden mit der Grundfläche den Winkel α. Die Symmetrieachsen der Seitenflächen der Pyramide haben die Länge m. Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels, der der Pyramide einbeschrieben ist, und bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenkanten der Pyramide mit der Grundfläche bilden!

756. Einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sei ein Kegel umbeschrieben. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn die Kanten der Pyramide die Länge l haben und zwei benachbarte Seitenkanten sich jeweils unter dem Winkel α schneiden!

757. In eine regelmäßige dreiseitige Pyramide sei ein Kegel einbeschrieben. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels, wenn die Kantenlänge der Pyramide l beträgt und wenn zwei benachbarte Seitenkanten miteinander den Winkel α bilden!

758. In eine Kugel sei ein Kegel einbeschrieben, dessen Volumen gleich einem Viertel des Volumens der Kugel ist. Die Höhe des Kegels sei h. Berechnen Sie das Volumen der Kugel!

759. In ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma sei eine Kugel so einbeschrieben, daß sie die drei Seitenflächen und die Grundflächen des Prismas berührt. Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen der Oberfläche der Kugel und der des Prismas!

760. Eine Kugel mit dem Radius r sei einer Pyramide einbeschrieben. Die Grundfläche der Pyramide sei ein Rhombus mit dem spitzen Winkel α. Die Seitenflächen der Pyramide bilden mit der Ebene der Grundfläche den Winkel φ. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!

761. In eine regelmäßige vierseitige Pyramide sei eine Halbkugel so einbeschrieben, daß ihre ebene Fläche parallel zur Grundfläche verläuft, während die gekrümmte Fläche die Grundfläche der Pyramide berührt. Bestimmen Sie die Oberfläche der Pyramide, wenn ihre Seitenflächen mit der Grundfläche den Winkel α bilden und der Radius r der Halbkugel gegeben ist!

762. In eine regelmäßige vierseitige Pyramide sei eine Halbkugel so einbeschrieben, daß ihre ebene Fläche in der Grundfläche der Pyramide liegt, während die gekrümmte Fläche die Seitenflächen der Pyramide berührt. Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen der Oberfläche der Halbkugel und der Oberfläche der Pyramide und das Volumen der Halbkugel, wenn die Seitenflächen der Pyramide mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α bilden und wenn die Differenz zwischen der Grundkante der Pyramide und dem Durchmesser der Halbkugel den Wert m hat!

763. In einem Kegel mit dem Grundflächenradius r_1 und dem Winkel α zwischen der Höhe und einer Mantellinie befinde sich eine Kugel, die die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels berührt. Bestimmen Sie das Volumen des Kegelteiles, der über der Kugel liegt!

764. Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels sei n-mal größer als die Oberfläche der dem Kegel einbeschriebenen Kugel. Unter welchem Winkel schneidet die Mantellinie des Kegels die Ebene der Grundfläche?

765. In einen Kegel sei eine Kugel einbeschrieben. Das Verhältnis der beiden Volumina sei gleich n. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Mantellinie des Kegels und der Grundfläche, und überprüfen Sie das Resultat für $n = 4$!

766. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Achse und einer Mantellinie des Kegels, dessen Oberfläche n-mal größer ist als die Fläche seines Achsenschnittes!

767. In einen Kegel sei eine Halbkugel einbeschrieben. Ihre ebene Fläche liege in der Grundfläche des Kegels. Bestimmen Sie den Winkel an der Spitze des Kegels, wenn sich die Oberfläche des Kegels zur gekrümmten Oberfläche der Halbkugel wie 18 : 5 verhält!

768. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Höhe und der Mantellinie eines Kegels, wenn bekannt ist, daß das Volumen des Kegels gleich dem $1\frac{1}{3}$-fachen des Volumens der Halbkugel ist, die in den Kegel so einbeschrieben wurde, daß die ebene Fläche der Halbkugel in der Grundfläche des Kegels liegt und die Kugelkappe die Mantelfläche des Kegels berührt!

769. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Höhe und der Mantellinie des Kegels, dessen Mantelfläche durch den Schnitt mit einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels und deren Radius gleich der Höhe des Kegels ist, in zwei gleich große Teile zerlegt wird!

770. Ein Kegel mit der Höhe h_1 und mit dem Winkel α zwischen der Höhe und einer Mantellinie soll durch eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist, so geschnitten werden, daß das Kegelvolumen halbiert wird. Bestimmen Sie den Radius der Kugel!

771. Die Höhe eines Kegels sei Durchmesser einer Kugel. Die Spitze des Kegels und der Mittelpunkt seines Grundkreises liegen dann auf der Kugeloberfläche. Berechnen Sie das Volumen des Kugelteils, der außerhalb des Kegels liegt! Der Winkel zwischen der Höhe des Kegels und einer Mantellinie sei α.

772. Gegeben seien zwei Kugeln um M und M_1, die sich außen berühren und einem gemeinsamen Kegel einbeschrieben sind. Berechnen Sie die Oberfläche des Kegelstumpfes, dessen Grundflächen die Berührungskreise der Kugeln mit der Kegelfläche sind! Die Radien der Kugeln seien r und r_1.

773. Auf einem Tisch liegen vier Kugeln mit dem Radius r. Die Kugeln berühren sich gegenseitig so, daß man auf die entstehende mittlere Lücke eine fünfte Kugel mit dem gleichen Radius legen kann. Berechnen Sie den Abstand des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischebene!

774. Bestimmen Sie den Winkel an der Spitze des Achsenschnittes des Kegels, der vier gleichen Kugeln umbeschrieben ist! Die Kugeln sollen so angeordnet sein, daß jede Kugel drei andere berührt.

775. Die Flächen eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes berühren eine Kugel. Berechnen Sie den Wert des Verhältnisses zwischen der Oberfläche der Kugel und der Oberfläche des Pyramidenstumpfes, wenn die Seitenflächen der Pyramide mit der Ebene ihrer Grundfläche den Winkel α bilden!

776. In einen Kegel sei ein Zylinder einbeschrieben. Die Höhe des Zylinders sei gleich dem Radius der Grundfläche des Kegels. Geben Sie die Größe des Winkels zwischen der Achse des Kegels und der Mantellinie an, wenn sich die Oberfläche des Zylinders zur Grundfläche des Kegels wie $3:2$ verhält!

777. Der Radius einer Kugel, die einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide einbeschrieben ist, sei gleich r. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen der Pyramide habe die Größe α. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide, deren Spitze im Zentrum der Kugel liegt, wenn die Eckpunkte ihrer Grundfläche die vier Berührungspunkte der Kugel mit den Seitenflächen der gegebenen Pyramide sind!

778. In einem Kegel befinde sich eine Kugel mit dem Radius r. Sie berühre die Mantel- und die Grundfläche des Kegels. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels, wenn bekannt ist, daß die der Spitze nächste Ebene, die die gegebene Kugel berührt und senkrecht auf einer der Mantellinien des Kegels steht, von der Spitze des Kegels den Abstand d hat!

779. Die Kante eines Würfels habe die Länge a, die Strecke $\overline{AB}$ sei Raumdiagonale dieses Würfels. Bestimmen Sie den Radius der Kugel, die drei Flächen, deren gemeinsamer Punkt A ist, und gleichzeitig die drei Kanten, die sich in B schneiden, berührt. Bestimmen Sie die Oberfläche der Kugelteile, die außerhalb des Würfels liegen!

780. In einem Tetraeder[1] mit der Kantenlänge a sei eine Kugel so untergebracht, daß sie alle Kanten des Tetraeders berührt. Bestimmen Sie den Radius dieser Kugel und das Volumen der Kugelteile, die außerhalb des Tetraeders liegen!

[1] Siehe Fußnote auf Seite 18.

11. Trigonometrische Umformungen

Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Identitäten!

781. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$

782. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

783. $2(\operatorname{cosec} 2\alpha+\cot 2\alpha)=\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}$

784. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)$

785. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha$

786. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$

787. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$

788. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

789. $\frac{\cos 2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

790. $\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$

791. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

792. $\dfrac{\sin x + \cos(2y - x)}{\cos x - \sin(2y - x)} = \dfrac{1 + \sin 2y}{\cos 2y}$

793. $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)\sec^2 \alpha \sec^2 \beta$

794. $\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\cdot(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha} = \cot\alpha$

795. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$

796. $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

797. $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$

798. $\sin(a - b) + \sin(a - c) + \sin(b - c) = 4\cos\dfrac{a - b}{2}\sin\dfrac{a - c}{2}\cos\dfrac{b - c}{2}$

799. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

800. $\sin\alpha + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right) = 0$

801. $\sin^2(45° + \alpha) - \sin^2(30° - \alpha) - \sin 15° \cos(15° + 2\alpha) = \sin 2\alpha$

802. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1 - 2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \tan\varphi - \cot\varphi$$

gilt!

803. Zeigen Sie, daß

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$$

gilt!

804. Zeigen Sie die Richtigkeit der Identität

$$\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha + \varphi) = \sin^2\alpha!$$

805. Formen Sie den Ausdruck $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$ um!

806. Zeigen Sie, daß

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$$

gilt, wenn $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist!

807. Zeigen Sie, daß

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = 1$$

gilt, wenn $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist!

808. Zeigen Sie, daß

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

gilt!

809. Zeigen Sie, daß

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

gilt!

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, daß sie sich einfach logarithmieren lassen!

810. $1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}$

811. $1 - \sqrt{2}\cos\alpha + \cos 2\alpha$

812. $1 - \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$

813. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \tan\alpha$

814. $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

815. $1 - \tan\alpha + \sec\alpha$

816. $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$

817. $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

818. $\dfrac{2\sin\beta - \sin 2\beta}{2\sin\beta + \sin 2\beta}$

819. $\dfrac{\sqrt{2} - \cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

820. $\cot\alpha + \cot 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha$

821. $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan\alpha$

822. $2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1$

823. $\dfrac{1 + \tan 2\alpha \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$

824. $2 + \tan 2\alpha + \cot 2\alpha$

825. $\tan x - 1 + \sin x(1 - \tan x) + \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

826. $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$

827. $1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha - \sin^2\beta - \cos^4\alpha$

828. $\tan x + \tan y + \tan z - \dfrac{\sin(x + y + z)}{\cos x \cos y \cos z}$

829. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, wenn $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

12. Goniometrische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

830. $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2$

831. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

832. $\sin (x + 30°) + \cos (x + 60°) = 1 + \cos 2x$

833. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

834. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

835. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

836. $\sin (x - 60°) = \cos (x + 30°)$

837. $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$

838. $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3 \sin x(\cos x - \sin x) + 3$

839. $\cos 4x = -2 \cos^2 x$

840. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

841. $\sin 3x = \cos 2x$

842. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$

843. $3 \tan^2 x - \sec^2 x = 1$

844. $(1 + \cos 4x) \sin 4x = \cos^2 2x$

845. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$

846. $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$

847. $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2 \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$

848. $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$

849. $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x\cos x$

850. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

851. $\sin x + \cos x = 1$

852. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$

853. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$

854. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

855. $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$

856. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$

857. $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$

858. $5\cos 2x = 4\sin x$

859. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan x - 2 = 0$

860. $8\tan^2\frac{x}{2} = 1 + \sec x$

861. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} = \sec^2\frac{x}{2} - 1$

862. $1 - \cos(\pi - x) + \sin\dfrac{\pi + x}{2} = 0$

863. $2\left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right] = \sqrt{3}\tan\dfrac{\pi - x}{2}$

864. $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x\sin x = 4\sin^3 x.$

865. $\cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

866. $2\cot(x - \pi) - (\cos x + \sin x)(\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4$

867. $\sin(\pi - x) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sec x - \cos x}{2\sin x}$

868. $\dfrac{1-\tan\frac{x}{2}}{1-\cot\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}$

869. $\sin(\pi - x) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sec(-x) - \cos(2\pi - x)$

870. $\sec^2 x - \tan^2 x + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \sec^2 x$

871. $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \cos 2x$

872. $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0{,}375$

873. $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$

874. $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right)$

875. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

876. $1 - 3\cos x + \cos 2x = \dfrac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\cot 2x - \cot x}$

877. $[\cos x - \sin(x - \pi)]^2 + 1 = \dfrac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}$

878. $(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

879. $2 - \sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\right]^2$

880. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

881. $\cos x + \sin x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

882. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$

883. $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ)\sin(x - 30^\circ)$

884. $\dfrac{\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)}{2} = \dfrac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)^2} + \dfrac{\cot x}{(1 + \cot^2 x)^2}$

885. $\sec^2 x - \left(\cos x + \sin x \tan \frac{x}{2}\right) = \frac{\sin (x - 30^\circ) + \cos (60^\circ - x)}{\cos x}$

886. $\sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}$

887. $2\sqrt{2} \sin (45^\circ + x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}$

888. $1 - \frac{2 (\sin 2x - \cos 2x \tan x)}{\sqrt{3} \sec^2 x} = \cos^4 x - \sin^4 x$

889. $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$

890. $\sec x + 1 = \sin (\pi - x) - \cos x \tan \frac{\pi + x}{2}$

891. $\frac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} - 2 \sin (45^\circ + x) \sin (45^\circ - x) = 0$

892. $\tan (x - 45^\circ) \tan x \tan (x + 45^\circ) = \frac{4 \cos^2 x}{\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}}$

893. $\frac{\tan (x + 45^\circ) + \tan (x - 45^\circ)}{2} = \tan (x - 45^\circ) \tan (x + 45^\circ) \tan x$

894. $\tan (x + \alpha) + \tan (x - \alpha) = 2 \cot x$

895. $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\tan \frac{x}{2} - \tan \frac{x + \pi}{2}}$

896. $\frac{\sin x}{\sin (30^\circ + x) + \sin (30^\circ - x)} = 1 + \tan \left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) - \tan \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$

897a. $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

897b. $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

898. $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$

$\cos x\cos y=\frac{1}{4}$

899. $x+y=\alpha$

$\sin x\sin y=m$

900. $x+y=\alpha$

$\tan x+\tan y=m$

901. $x+y=\frac{\pi}{4}$

$\tan x+\tan y=1$

902. $2^{\sin x+\cos y}=1$

$16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4$

903. $\sin x\sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}}$

$\tan x\tan y=\frac{1}{3}$

904. $\sin x=2\sin y$

$\cos x=\frac{1}{2}\cos y$

13. Zyklometrische Funktionen

(Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

905. Berechnen Sie

$$2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccot}(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arccos(-1)!$$

906. Zeigen Sie, daß

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

gilt!

907. Zeigen Sie, daß

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

gilt!

Berechnen Sie!

908. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

909. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

910. $\cot\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]$

911. $\tan\left(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

912. $\sin\left(3\arctan\sqrt{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$

913. $\cos\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

Weisen Sie die Richtigkeit folgender Identitäten nach!

914. $\arctan(3 + 2\sqrt{2}) - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

915. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

916. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

917. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

918. $2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{4} = \arctan\frac{32}{43}$

919. $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

Lösen Sie folgende Gleichungen!

920. $4\arctan(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$

921. $6\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$

922. $\arctan(x + 2) - \arctan(x + 1) = \frac{\pi}{4}$

923. $2\arctan\frac{1}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{4}$

924. $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1 - x} = \arcsin\frac{1}{3}$

925. $\arctan\frac{a}{b} - \arctan\frac{a-b}{a+b} = \arctan x$

926. $\arcsin 3x = \arccos 4x$

927. $2\arcsin x = \arcsin\frac{10x}{13}$

928. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x + y = \arctan\frac{2a}{1-a^2}$$

$$\tan x \tan y = a^2, \quad (|a| < 1)!$$

LÖSUNGEN

8. Planimetrie

510. Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks seien a und b, c die Hypotenuse. Zwei Beziehungen sind bekannt:

$$a + b + c = 132 \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 6050.$$

Setzt man $a^2 + b^2 = c^2$ in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$2c^2 = 6050$$

$$c = \sqrt{3025} = 55.$$

Also muß

(1) $\qquad a + b = 77$

sein. Andererseits gilt:

(2) $\qquad a^2 + b^2 = 3025.$

Quadriert man (1) und subtrahiert davon (2), so erhält man schließlich $ab = 1452$. Also sind a und b die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 77x + 1452 = 0.$$

Lösung: Die Längen der Katheten des Dreiecks betragen 33 bzw. 44 Längeneinheiten, die Länge der Hypotenuse 55 Längeneinheiten.

511. Die Höhe $\overline{DK}$ (Abb. 1) des Parallelogramms $ABCD$ ist gleich $2\overline{MN} = 2p$. Weil $\sphericalangle\, DAK = \alpha$ ist, gilt $\overline{AD} = \dfrac{2p}{\sin\alpha}$. Analog ist $\overline{AB} = \dfrac{2m}{\sin\alpha}$.

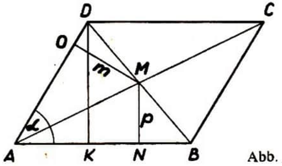


Abb. 1

Es gilt: $A = \overline{AB} \cdot \overline{DK} = \dfrac{4mp}{\sin\alpha}$.

Die Größe der Diagonalen berechnet man nach dem Kosinussatz.

Lösung: $A = \dfrac{4mp}{\sin\alpha}$; $\overline{BD} = \dfrac{2\sqrt{p^2 + m^2 - 2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}$;

$$\overline{AC} = \frac{2\sqrt{p^2 + m^2 + 2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

512. Es sind $\overline{AB} = 30$ cm und $\overline{CD} = 20$ cm gegeben (Abb. 2). Die Höhe $\overline{AE}$ kann man durch die Ähnlichkeit der Dreiecke BCD und ABE berechnen (beide stimmen im $\sphericalangle ABC$ überein). Die Rechnung ist einfacher, wenn man die Flächenformeln für das Dreieck ABC aufstellt:

$$A = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

und

$$A = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AE}.$$

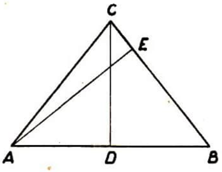


Abb. 2

Man isoliert $\overline{AE}$ und erhält:

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{30 \cdot 20}{\sqrt{20^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2}}\,\text{cm} = 24\,\text{cm}.$$

Lösung: 24 cm.

513. Im Dreieck CDE, von dem $\overline{CD} = 12$ cm und $\overline{CE} = 13$ cm bekannt sind, berechnet man $\overline{DE} = \sqrt{13^2\,\text{cm}^2 - 12^2\,\text{cm}^2} = 5$ cm. (Abb. 3) Folglich gilt:

$$\overline{AD} = \overline{AE} - \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot 60\,\text{cm} - 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$$

und

$$\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{DE} = 35\,\text{cm}.$$

Lösung: $\overline{AC} = \sqrt{769}$ cm $\approx 27{,}7$ cm

$\overline{BC} = \sqrt{1369}$ cm $= 37$ cm

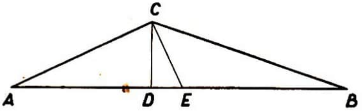


Abb. 3

514. Es ist ABC das gegebene Dreieck ($\overline{AC} = \overline{BC} = b$).
Gesucht ist die Fläche des Dreiecks $M_1M_2M_3$ (Abb. 4).

Erstes Verfahren:

Man erhält $A = \frac{1}{2}\,\overline{M_2M_3} \cdot \overline{CM_1}$, wobei $\overline{M_2M_3} = \overline{AB}$ und $\overline{CM_1} = \overline{AB}$ sind.

Folglich ist $A = \frac{1}{2}\,\overline{AB}^2 = b^2$.

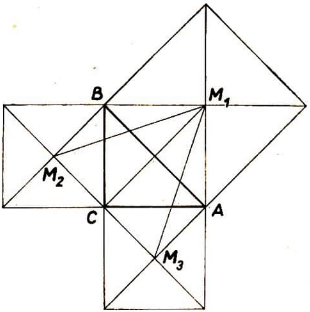


Abb. 4

Zweites Verfahren:

Das Dreieck M_1M_2C ist flächengleich dem Dreieck M_1BC (die Grundseite $\overline{CM_1}$ und die Höhe sind gleich groß).
Das Dreieck M_1CM_3 ist flächengleich dem Dreieck M_1CA (analog zum vorigen).
Also ist das Dreieck $M_1M_2M_3$ flächengleich dem Quadrat M_1BCA.

Lösung: $A = b^2$.

515. *Erstes Verfahren:*

Nach der Aufgabenstellung teilt der Punkt M die Strecke $\overline{AB} = a$ im Verhältnis $m : n$ (Abb. 5). Es gilt also

$$\overline{AM} = \frac{m}{m+n}a \quad \text{und} \quad \overline{BM} = \frac{n}{m+n}a.$$

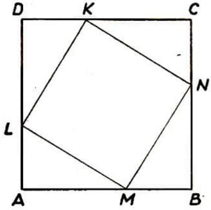


Abb. 5

Man erhält:

$$\overline{BN} = \overline{CK} = \overline{DL} = \frac{ma}{m+n} \quad \text{und} \quad \overline{CN} = \overline{DK} = \overline{AL} = \frac{na}{m+n}.$$

Folglich gilt:

$$\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{KN} = \overline{KL} = \sqrt{\frac{m^2a^2}{(m+n)^2} + \frac{n^2a^2}{(m+n)^2}}$$

$$\overline{LM} = \frac{a}{m+n}\sqrt{m^2 + n^2}.$$

Alle Winkel des Vierecks $KLMN$ sind rechte Winkel.
(Aus der Gleichheit der Dreiecke AML und BNM erhalten wir:

$$\sphericalangle AML = \sphericalangle BNM = 90° - \sphericalangle NMB.$$

Folglich gilt:

$$\sphericalangle AML + \sphericalangle NMB = 90°.$$

Deshalb ist $\sphericalangle LMN = 90°$.)
Also ist das Viereck $KLMN$ ein Quadrat.

Lösung: $A = \dfrac{a^2(m^2 + n^2)}{(m+n)^2}$.

Zweites Verfahren:

Von der Fläche des Quadrates $ABCD$ subtrahiert man vier flächengleiche Dreiecke.

516. Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle AML = 30°$ (Abb. 5).
Folglich gilt:

$$\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{LM} \quad \text{und} \quad \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{LM}.$$

Man weiß daher, daß

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{BM} = \overline{AM} + \overline{AL} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\,\overline{LM}$$

ist und erhält als Wert des Verhältnisses der Flächeninhalte der Vierecke $ABCD$ und $KLMN$

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{LM}^2} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}.$$

Folglich gilt:

$$A_{KLMN} = \frac{4}{(1 + \sqrt{3})^2} \cdot A_{ABCD}.$$

Lösung: Das Verhältnis ist gleich $\dfrac{4}{(1 + \sqrt{3})^2} = 2(2 - \sqrt{3}) \approx 0{,}54.$

517. Man bezeichnet $\overline{AM}$ mit x (Abb. 5). Dann ist $\overline{AL} = \overline{BM} = a - x$. Folglich ist $A_{KLMN} = \overline{LM}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AM}^2 = (a - x)^2 + x^2$.

Nach Voraussetzung gilt $(a - x)^2 + x^2 = \dfrac{25}{49}a^2$.

Man löst diese Gleichung und erhält die

Lösung: Die Längen der gesuchten Abschnitte betragen $\dfrac{3a}{7}$ und $\dfrac{4a}{7}$.

518. Vorbemerkung: Zur Lösung ist die Lage der Eckpunkte des eingezeichneten Rechtecks $KLMN$ (Abb. 6) zu ermitteln. Vorerst muß man das Rechteck $KLMN$ einzeichnen, ohne das gegebene Verhältnis zugleich zu berücksichtigen.

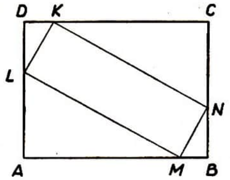


Abb. 6

Lösung: Man setzt $\overline{BM} = x$ und $\overline{BN} = y$.
Es gilt: $\overline{AB} = 4$ und $\overline{AM} = 4 - x$.

Die Dreiecke DLK und BNM sind gleich (Nachweis!).
Folglich gilt: $\overline{DL} = \overline{BN} = y$ und $\overline{AL} = 3 - y$.
Die Dreiecke AML und MBN sind ähnlich, denn beide sind rechtwinklig und $\sphericalangle MLA = \sphericalangle NMB$. (Die Schenkel beider Winkel stehen paarweise senkrecht aufeinander.)
Nach Voraussetzung ist $\overline{LM}$ dreimal so groß wie $\overline{MN}$.
Ferner gilt $\overline{AL} = 3 \cdot \overline{BM}$,
also auch $\overline{AM} = 3 \cdot \overline{BN}$, d. h.

$$3 - y = 3x \quad \text{und} \quad 4 - x = 3y.$$

Man erhält

$$x = \frac{5}{8}; \quad y = \frac{9}{8} \quad \text{und} \quad \overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{8},$$

$$\overline{LM} = \frac{3\sqrt{106}}{8}.$$

Lösung: Die Seiten des Rechtecks sind gleich

$$\frac{\sqrt{106}}{8}\,\text{m} \approx 1{,}29\,\text{m} \quad \text{und} \quad \frac{3\sqrt{106}}{8}\,\text{m} \approx 3{,}87\,\text{m}.$$

519. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABC (Abb. 7) ist gleich

$$\frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Das Dreieck ALN, für das $\overline{AL} = \frac{1}{3} a$ und $\overline{AN} = \frac{2}{3} a$ gelten soll, hat den Winkel NAL mit dem Dreieck ABC gemeinsam.

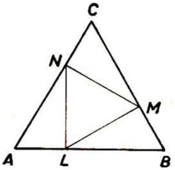


Abb. 7

Man weiß, daß sich die Flächen wie die Produkte der Seiten verhalten:

$$\frac{A_{ALN}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{1}{3} a \cdot \frac{2}{3} a}{a \cdot a}.$$

Man erhält:

$$A_{ALN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{2}{9} \cdot A_{ABC}.$$

Daraus kann man herleiten:

$$A_{LMN} = A_{ABC} - 3A_{ALN} = \frac{1}{3} A_{ABC},$$

$$A_{LMN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Bemerkung: Das Dreieck LMN ist wie das Dreieck ABC gleichseitig (Nachweis!).
Aus diesem Grunde kann man die Fläche des Dreiecks LMN bei beliebigem Teilverhältnis in allen diesen Fällen bestimmen.

Lösung: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

520. Wenn die Bezeichnungen wie in Abbildung 8 gewählt werden, erhält man $a + b + c = 2s$ und $a + b = 2s - c$.

Daraus folgt: $a^2 + 2ab + b^2 = (2s - c)^2$.
Ferner gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ und $ab = c \cdot h$.

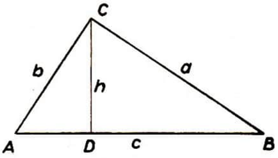


Abb. 8

Deshalb ist $c^2 + 2ch = 4s^2 - 4cs + c^2$.
Folglich gilt

$$c = \frac{2s^2}{h + 2s}.$$

Man erhält weiter

$$a + b = \frac{2s(h + s)}{h + 2s}$$

und

$$a \cdot b = \frac{2s^2 h}{h + 2s};$$

a und b sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \frac{2s(h+s)}{h+2s}x + \frac{2s^2h}{h+2s} = 0.$$

Lösung: $c = \dfrac{2s^2}{h+2s}$;

$$a = \frac{s}{h+2s}\left[h + s + \sqrt{(s-h)^2 - 2h^2}\right];$$

$$b = \frac{s}{h+2s}\left[h + s - \sqrt{(s-h)^2 - 2h^2}\right].$$

Die Aufgabe ist nur lösbar für $s \geqq h(\sqrt{2} + 1)$.

521. Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Abb. 9) des Dreiecks ABC haben die Länge

$$\frac{2s - 2k}{2} = s - a.$$

Wenn x die Länge der Strecke $\overline{CM}$ ist, dann gilt: $\overline{CN} = \overline{CM} = x$.

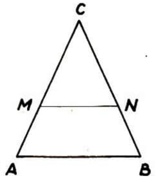


Abb. 9

Den Umfang $2k$ des Trapezes $ABNM$ erhält man aus dem Umfang $2s$ des Dreiecks ABC, wenn man von $2s$ die Summe $\overline{CM} + \overline{CN} = 2x$ subtrahiert und die Strecke $\overline{MN}$ zu dieser Differenz addiert.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und MNC erhält man:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{2ax}{s-a}.$$

Folglich gilt:

$$2s - 2x + \frac{2ax}{s-a} = 2k,$$

$$x = \frac{(s-a)(s-k)}{s-2a}.$$

Lösung: $\overline{CM} = \overline{CN} = \dfrac{(s-a)(s-k)}{s-2a}$.

522. Gefordert wird die Länge der Strecken $\overline{NO} = x$ (Abstand des Punktes O (Abb. 10) von der Gundlinie $\overline{AB} = a$)[1] und $\overline{MO} = y$ (Abstand des Punktes O von $\overline{AD} = h$). Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AOM und ACD, wobei $\overline{CD} = c$, ist erhält man

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{y}{c} = \frac{x}{h}.$$

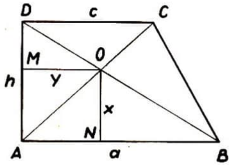


Abb. 10

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke NBO und ABD erhält man

$$\frac{\overline{NO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{AB}}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{x}{h} = \frac{a-y}{a}.$$

Man löst diese beiden Gleichungen.

Lösung: $x = \dfrac{ah}{a+c}$; $y = \dfrac{ac}{a+c}$.

523. ABC ist das gegebene Dreieck (Abb. 11). $\overline{DE}$ ist die Verbindung des Mittelpunktes eines Schenkels mit dem Mittelpunkt der Basis. Da nach Konstruktion $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$ und nach Voraussetzung $\overline{CD} = \overline{DE}$ ist, folgt daraus $\overline{CD} = \dfrac{1}{2}\,\overline{AC}$.

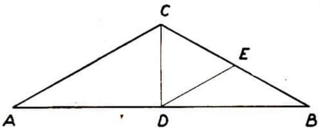


Abb. 11

[1] Die Lösung ist unabhängig davon, ob a die größere oder die kleinere Grundseite ist.

Folglich muß $\sphericalangle CAD = 30°$ betragen.

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AD}\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{CD} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Lösung: $A = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

524. Man bezeichnet wie folgt: $\overline{DM} = x$ und $\overline{AM} = y$ (Abb. 12). Die Fläche des Rhombus $ABCD$ ist gleich $2xy$.
Nach Voraussetzung gilt

$$(1) \qquad x + y = \frac{m}{2}.$$

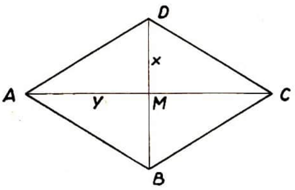


Abb. 12

In dem rechtwinkligen Dreieck AMD gilt

$$\overline{AD} = \frac{1}{4}\ 2s = \frac{s}{2} \quad \text{und} \quad (2)\ x^2 + y^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Quadriert man die Gleichung (1) und subtrahiert davon die Gleichung (2), so erhält man $2xy = \dfrac{m^2 - s^2}{4}$.

Lösung: $A = \dfrac{m^2 - s^2}{4}\ \text{cm}^2$.

525. Man bezeichnet die Höhe $\overline{DE}$ mit h (Abb. 13).
Dann gilt: $\overline{AE} = h$ und $\overline{BF} = h\sqrt{3}$.
Es gilt ferner: $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF}$

$$a = h + c + h\sqrt{3}.$$

Daraus folgt:

$$h = \frac{a - c}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(a - c)(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Lösung: $A = \dfrac{(a^2 - c^2)(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

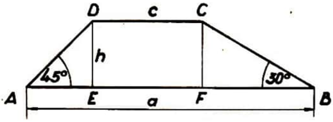


Abb. 13

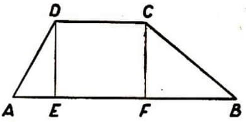


Abb. 14

526. Gegeben sind $\overline{AB} = 44$ cm und $\overline{CD} = 16$ cm (Abb. 14), folglich gilt

$$\overline{AE} + \overline{BF} = 28 \text{ cm}.$$

Man bezeichnet $\overline{AE}$ mit x (in cm): $\overline{BF} = 28 \text{ cm} - x$.
Ferner waren gegeben: $\overline{AD} = 17$ cm und $\overline{BC} = 25$ cm.
Es ist bekannt, daß $\overline{DE}^2 = 17^2 - x^2$ und $\overline{CF}^2 = 25^2 - (28 - x)^2$ ist.
Man erhält die Gleichung: $17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2$ und daraus $x = 8$ cm.
Man berechnet daraus die Höhe $h = \overline{DE} = \sqrt{17^2 - x^2} = 15$ cm.
Man kann nun den Flächeninhalt berechnen:

$$A = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DE}.$$

Lösung: $A = 450 \text{ cm}^2$.

527. Man bezeichnet die Seite des einbeschriebenen Quadrats mit x (Abb. 15). Die Dreiecke AKN und ADC sind ähnlich.

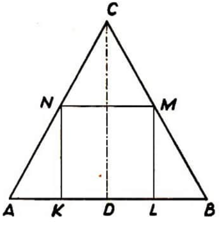


Abb. 15

Es ergibt sich:

$$\overline{AK} = \frac{\overline{AB} - \overline{MN}}{2} = \frac{a - x}{2} \quad \text{und} \quad \overline{AD} = \frac{a}{2}, \quad \overline{CD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Durch die Ähnlichkeit der Dreiecke findet man die Beziehung

$$\frac{a-x}{2} : \frac{a}{2} = x : \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Man erhält

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = a\sqrt{3}(2-\sqrt{3}).$$

Lösung: $A = 3a^2(2-\sqrt{3})^2 = 3(7-4\sqrt{3})\,a^2$.

528. Gegeben sind $\overline{AD} = 36$ cm, $\overline{BD} = 14$ cm (Abb. 16). Die Flächen A_1 und A_2 der Dreiecke ADC und BCD (die Dreiecke besitzen beide die Höhe $\overline{CD}$) stehen im Verhältnis

$$A_1 : A_2 = 36 : 14, \text{ also } \frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{7}.$$

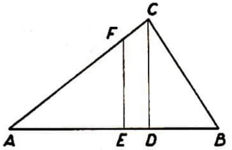


Abb. 16

Daraus kann man schlußfolgern: $A_1 = \frac{18}{25}A$, wobei $A_1 + A_2 = A$ (Fläche des Dreiecks ABC) ist. Die Strecke $\overline{EF}$ halbiert die Fläche des Dreiecks ABC. Die Gerade durch E und F schneidet $\overline{AB}$ zwischen den Punkten A und D (aber nicht zwischen den Punkten D und B).
Man erhält das Dreieck AEF; sein Flächeninhalt A_3 ist gleich $\frac{1}{2}A$.

Die Flächen der ähnlichen Dreiecke AEF und ADC verhalten sich wie die Quadrate der Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{AD}$:

$$\frac{18}{25}A : \frac{1}{2}A = 36^2 : \overline{AE}^2.$$

Daraus folgt: $\overline{AE} = 30$ cm.
Es gilt: $\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE} = (36 \text{ cm} + 14 \text{ cm}) - 30 \text{ cm} = 20$ cm.

Lösung: 30 cm und 20 cm.

529. Man beachte die Lösung der vorigen Aufgabe. Nach Voraussetzung muß gelten:

$$\overline{AD} : \overline{BD} = 1 : 8.$$

Die Fläche des Dreiecks BCD (Abb. 17) ist gleich $\frac{8}{9}$ der Fläche A des Dreiecks ABC.

Weil nach Voraussetzung $\overline{CD} = 4$ ist, erhält man

$$\overline{EF}^2 : 16 = \frac{1}{2} A : \frac{8}{9} A.$$

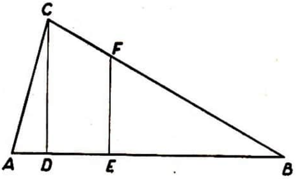


Abb. 17

Lösung: $\overline{EF} = 3$ Längeneinheiten.

530. Weil $A_{CFG} = A_{DEGF} = A_{ABED}$ (Abb. 18) ist, muß die Fläche des Dreiecks CFG halb so groß wie die Fläche des Dreiecks DEC sein. Die Fläche ABC ist dreimal so groß wie die Fläche CFG. Weil diese Dreiecke ähnlich sind, gilt

$$\overline{CF}^2 : \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 = 1 : 2 : 3.$$

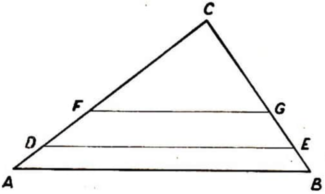


Abb. 18

Nach Voraussetzung ist $\overline{AC} = a$. Folglich gilt

$$\overline{CF} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \overline{CD} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Lösung: Die Seite $\overline{AC} = a$ wird wie folgt geteilt:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2} - 1), \quad \frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

531. Man bezeichnet, wie in der Aufgabenstellung gegeben, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Abb. 19) mit A_1, den Flächeninhalt des Dreiecks KFC mit A_2.

Drei Eckpunkte des zu berechnenden Vierecks sind die Punkte K, F und C. Der vierte Punkt kann beliebig auf der Seite $\overline{AB}$ liegen. Die Fläche A_3 des Vierecks $KEFC$ läßt sich als Summe der Dreiecksflächen KFC und KEF darstellen. Die Fläche KEF ändert sich nicht, wenn der Punkt E beliebig auf $\overline{AB}$ wandert.

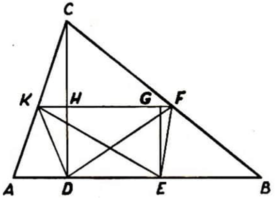


Abb. 19

(Da $\overline{FK} \parallel \overline{AB}$ ist, ist die Höhe immer gleich, und alle diese Dreiecke besitzen die gleiche Grundseite $\overline{FK}$.) $\overline{CD}$ ist die Höhe des Dreiecks ABC, ihr Fußpunkt auf $\overline{AB}$ ist D. Liegt der Punkt E auf dem Fußpunkt des Lotes (D), so erhält man das Viereck $CKDF$, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{FK} \cdot \overline{CH}.$$

Es gilt ferner

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{FK} \cdot \overline{CD}.$$

Daraus schlußfolgert man: $A_3 : A_2 = \overline{CD} : \overline{CH}$.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und KFC folgt

$$A_1 : A_2 = \overline{CD}^2 : \overline{CH}^2.$$

Folglich gilt

$$A_3 = A_2 \frac{\overline{CD}}{\overline{CH}} = A_2 \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = \sqrt{A_1 \cdot A_2}.$$

B e m e r k u n g: Fällt der Punkt E nicht mit dem Punkt D zusammen, so erhält hält man die Lösung auf folgendem Wege:

$$A_3 = \frac{1}{2} \overline{FK} \cdot \overline{CH} + \frac{1}{2} \overline{FK} \cdot \overline{EG} = \frac{1}{2} \overline{FK}(\overline{CH} + \overline{EG}) = \frac{1}{2} \overline{FK} \cdot \overline{CD}.$$

Der weitere Weg verläuft wie im vorangehenden Teil.

Lösung: $\sqrt{A_1 \cdot A_2}$.

532. Die Strecke $\overline{EF} = x$ (Abb. 20) teilt die Fläche des Trapezes $ABCD$ ($\overline{AB} = a$; $\overline{CD} = c$) in zwei gleich große Teile.
Also gilt:

(1) $$\frac{(a + x)\overline{FL}}{2} = \frac{(x + c)\overline{FN}}{2}, \quad \text{d. h.} \quad (a + x)\overline{FL} = (x + c)\overline{FN}.$$

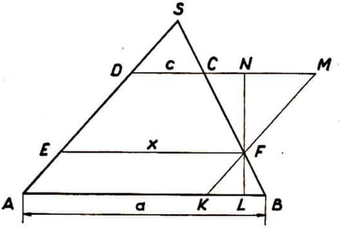


Abb. 20

Es ist nicht möglich, die Höhen $\overline{FL}$ und $\overline{FN}$ einzeln zu finden. (Ihre Längen kann man zunächst beliebig wählen.) Der Wert des Verhältnisses $\overline{FL} : \overline{FN}$ ist eine Größe, die man bestimmen kann.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KBF und FMC (wobei $\overline{BK} = a - x$ und $\overline{CM} = x - c$ ist) folgt

(2) $$\frac{a - x}{\overline{FL}} = \frac{x - c}{\overline{FN}}.$$

Man multipliziert die Gleichungen (1) und (2) miteinander und erhält

$$a^2 - x^2 = x^2 - c^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}.$$

Anderes Lösungsverfahren:
Man verlängert die Schenkel des Trapezes und erhält die ähnlichen Dreiecke DCS, EFS und ABS.
Ihre Flächen (A_1, A_2, A_3) sind den Quadraten der Seiten c, x und a proportional, also gilt

$$A_1 = q \cdot c^2,$$

$$A_2 = q \cdot x^2,$$

$$A_3 = q \cdot a^2,$$

wobei q der Proportionalitätsfaktor ist (seine Größe ist abhängig von der Höhe des Trapezes).

Es gilt die Beziehung: $A_2 - A_1 = A_3 - A_2$, d. h. $q(x^2 - c^2) = q(a^2 - x^2)$.
Da $q \neq 0$ ist, erhält man $x^2 - c^2 = a^2 - x^2$.

Lösung: $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{2}}$.

533. Wir setzen $\overline{DE} = \overline{DG} = a$ (Abb. 21) und $\overline{EG} = b$.

Wir wissen, daß $\overline{EF} = \dfrac{b}{2}$ und $\overline{DF} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$ ist.

Nach dem Kathetensatz gilt: $\overline{DE}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DF}$.
daraus folgt

$$\overline{BD} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

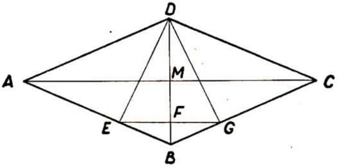


Abb. 21

Wir bestimmen die Seitenlänge $\overline{AB}$ des Rhombus. Die gleichschenkligen Dreiecke ABD und DEG sind ähnlich, weil ihre Winkel übereinstimmen (alle sind spitze Winkel, und ihre Schenkel stehen paarweis aufeinander senkrecht).
Es gilt also: $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{DE} : \overline{EG}$, d. h.

$$\overline{AB} : \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = a : b.$$

Man berechnet $\overline{AB}$ und erhält die Fläche des Rhombus

$$A = \overline{AB} \cdot a.$$

Lösung: $\dfrac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

534. Die gegebenen Größen sind: $\overline{AB} = 27$ cm, $\overline{AC} = 29$ cm (Abb. 22) und die Seitenhalbierende $\overline{AD} = 26$ cm. Man verlängert $\overline{AD}$, bis die Entfernung $\overline{DE} = \overline{AD}$ ist. Das Viereck $ABEC$ ist ein Parallelogramm (das ist nachzuweisen!)

mit den Seitenlängen 27 cm und 29 cm. Die Fläche des Dreiecks ABC ist halb so groß wie die des erhaltenen Parallelogramms, aber auch die Fläche des Dreiecks ABE ist halb so groß wie die Fläche des Parallelogramms $ABEC$. Folglich ist die Fläche des Dreiecks ABC gleich der des Dreiecks ABE. Die Seiten des Dreiecks ABE sind aber bekannt:

$$\overline{AB} = 27 \text{ cm}, \quad \overline{BE} = 29 \text{ cm}, \quad \overline{AE} = 52 \text{ cm}.$$

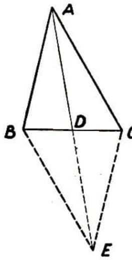


Abb. 22

Der Flächeninhalt wird nach der HERONischen Dreiecksformel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

berechnet.

Lösung: 270 cm^2.

535. Nach dem Kosinussatz gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Man verwendet die Formel $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, d. h.

$$\sin\alpha = \frac{2A}{bc} = \frac{4}{5}.$$

Es gilt aber

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{3}{5}.$$

Man erhält zwei Lösungen; beide Lösungen sind brauchbar. (α ist im ersten Falle ein spitzer, im zweiten Falle ein stumpfer Winkel.)

Lösung: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc}$ oder $a = \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{6}{5}bc}$.

536. Wählt man die Bezeichnung wie in Abbildung 23 und führt zusätzlich noch ein:

$$\sphericalangle DAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle BCD = \gamma, \quad \sphericalangle CDA = \delta,$$

so erhält man für das Dreieck BCD:

$$m^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma.$$

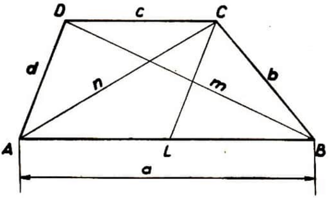


Abb. 23

Da $\cos\gamma = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta$ ist, erhält man

(1) $$m^2 = c^2 + b^2 + 2bc\cos\beta.$$

Im Dreieck ABD gilt

(2) $$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha.$$

Aus (1) und (2) folgt

(3) $$2bc\cos\beta + 2ad\cos\alpha = a^2 - c^2 + d^2 - b^2.$$

Betrachtet man die Dreiecke ABC und ACD, so erhält man durch die gleichen Umformungen

(4) $$2ab\cos\beta + 2cd\cos\alpha = a^2 - c^2 - (d^2 - b^2).$$

Man multipliziert (3) mit c, (4) mit a. Dann subtrahiert man die erste der so erhaltenen Gleichungen von der zweiten und erhält

$$2(a^2 - c^2)\,b\cos\beta = (a^2 - c^2)(a - c) - (d^2 - b^2)(a + c).$$

Man dividiert beide Seiten der Gleichung durch $(a^2 - c^2) \neq 0$ und erhält

(5) $$2b\cos\beta = a - c - \frac{d^2 - b^2}{a - c}.$$

Die Gleichung (1) wird weiter umgeformt:

$$m^2 = c^2 + b^2 + (2b\cos\beta)\,c,$$

$$m^2 = b^2 + ac - \frac{(d^2 - b^2)\cdot c}{a - c},$$

$$m^2 = \frac{a(b^2 - c^2) + c(a^2 - d^2)}{a - c}.$$

Analog zu (5) erhält man

$$(6) \qquad 2d\cos\alpha = a - c + \frac{d^2 - b^2}{a - c},$$

und daraus ergibt sich

$$n^2 = c^2 + d^2 + (2d\cos\alpha)\,c$$

$$n^2 = \frac{a(d^2 - c^2) + c(a^2 - b^2)}{a - c}.$$

Bemerkung: Ist $\overline{AB} = a$ die größere Grundseite des Trapezes, so erhält man nur für $a < b + c + d$ eine Lösung. (Zunächst sagt diese Bedingung wenig, aber im folgenden wird ihre Bedeutung offensichtlich.) Es sei $a > c$ und $b \geqq d$. (Wenn diese Ungleichungen nicht erfüllt sind, kann man die Bezeichnung so ändern, daß sie erfüllt werden.)
Man zeichnet die Gerade $\overline{CL}$ parallel zu $\overline{AD}$ und erhält ein Parallelogramm $ALCD$, wobei $\overline{AD} = \overline{CL} = d$ und $\overline{AL} = \overline{CD} = c$ ist. Im Dreieck LBC ist die Seite $\overline{BL} = \overline{AB} - \overline{AL} = a - c$ größer als die Differenz der Seiten $\overline{BC} = b$ und $\overline{AD} = d$.
Deshalb kann nur noch die zweite Bedingung gelten: $a - c > b - d$.
Wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, dann kann es vorkommen, daß einer der Ausdrücke für m^2 oder n^2 negativ wird.
Die zwei Bedingungen $a < b + c + d$ und $a - c > b - d$ genügen, um eine Lösung für die Aufgabe zu erhalten. Für die erste Bedingung kann man schreiben $a - b < c + d$. Es ist also immer möglich, aus folgenden drei Seiten das Dreieck BCL zu konstruieren:

$$\overline{BL} = a - c, \quad \overline{BC} = b \quad \text{und} \quad \overline{CL} = d.$$

Verlängert man $\overline{BL}$ um die Strecke $\overline{AL} = c$ und konstruiert das Parallelogramm $ALCD$, so entsteht das Viereck $ABCD$. Es ist ein Trapez mit den Grundseiten

$$\overline{AB} = a \quad \text{und} \quad \overline{CD} = c$$

und den Schenkeln $\overline{BC} = b$ und $\overline{AD} = d$.

Lösung: $$m^2 = \frac{a(b^2 - c^2) + c(a^2 - d^2)}{a - c}.$$

$$n^2 = \frac{a(d^2 - c^2) + c(a^2 - b^2)}{a - c}.$$

537. Wählt man die Bezeichnungen wie in Abbildung 24, wobei $\sphericalangle DAB = \alpha = 60°$ ist, so gilt

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos 60° = a^2 + d^2 - ad$$

und

$$\overline{AC}^2 = a^2 + d^2 + ad.$$

Da $\overline{AC}$ größer als $\overline{BD}$ ist, muß das gegebene Verhältnis $\frac{19}{7}$ gleich $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BD}^2}$ $\left(\text{also nicht gleich } \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AC}^2}\right)$ sein.

Man erhält folgende Gleichung:

$$\frac{a^2 + d^2 + ad}{a^2 + d^2 - ad} = \frac{19}{7}$$

oder

$$\frac{\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1 + \frac{a}{d}}{\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1 - \frac{a}{d}} = \frac{19}{7}.$$

Man erhält $\frac{a}{d} = \frac{3}{2}$ und $\frac{a}{d} = \frac{2}{3}$.

Beide Lösungen ergeben ein Parallelogramm. (In der Abbildung 24 müßte man dann eine Bezeichnungsänderung vornehmen: $\overline{AB} = d$, $\overline{AD} = a$.)

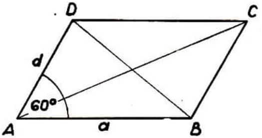


Abb. 24

Lösung: Die Seiten verhalten sich wie 3 : 2.

538. Es sei M ein beliebiger Punkt in dem gleichseitigen Dreieck ABC (Abb. 25). Man verbindet M mit den Eckpunkten A, B und C. Die Summe der Flächen der Dreiecke ABM, BCM und CAM ergibt die Fläche des Dreiecks ABC. Bezeichnet man die Länge der Seiten des Dreiecks ABC mit a und die Höhe mit h, so erhält man

$$(\overline{OM} + \overline{KM} + \overline{LM})\frac{a}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Also gilt: $h = \overline{OM} + \overline{KM} + \overline{LM}$.

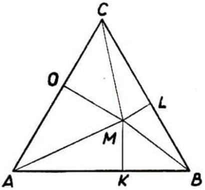


Abb. 25

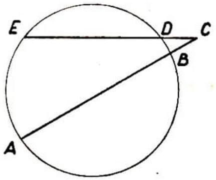


Abb. 26

539. Gegeben sind $\overline{DE} = 47$ m und $\overline{CD} = 9$ m (Abb. 26; die Abbildung ist nicht maßstäblich). $\overline{CE}$ muß also 56 m betragen. Folglich gilt

$$\overline{BC} \cdot \overline{AC} = 9 \cdot 56 \text{ m}^2 = 504 \text{ m}^2.$$

Setzt man $\overline{BC} = x$ m, dann ist nach der Aufgabenstellung $\overline{AB} = x\text{ m} + 72$ m. Man erhält also $\overline{AC} = 2x\text{ m} + 72$ m. Aus der Gleichung $x\text{m}(2x\text{m} + 72\text{m}) = 504\text{m}$ erhält man x m $= 6$ m.

Lösung: $\overline{AC} = 84$ m.

540. Die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkt M beträgt m Meter. Das Dreieck MAB (Abb. 27) ist rechtwinklig. Die Strecke $\overline{BD}$ ist gleich $\frac{a}{2}$ (nach Aufgabenstellung). Man bezeichnet die größere Kathete mit x, die kleinere mit y. Den Flächeninhalt des Dreiecks MAB kann man berechnen:

$$x \cdot y = \frac{a}{2} \cdot m,$$

also: $2xy = am$.
Außerdem gilt: $x^2 + y^2 = m^2$.
Die Gleichungen werden addiert bzw. subtrahiert, und man erhält

$$x + y = \sqrt{m^2 + am}$$

$$x - y = \sqrt{m^2 - am}.$$

Sowohl x als auch y können der gesuchte Radius sein.

Lösung: $\frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + am} + \sqrt{m^2 - am})$ oder $\frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + am} - \sqrt{m^2 - am})$

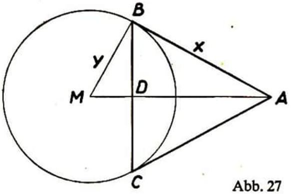


Abb. 27

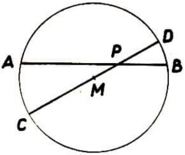


Abb. 28

541. Da der Radius des Kreises gleich 13 cm und $\overline{MP} = 5$ cm sind, müssen $\overline{DP} = 8$ cm und $\overline{CP} = 18$ cm sein (Abb. 28). Man bezeichnet $\overline{BP}$ mit x. Dann gilt $\overline{AP} = 25 - x$. Weil $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{DP} \cdot \overline{CP}$ ist, gilt $(25 - x)\,x = 18 \cdot 8$, woraus $x_1 = 16$; $x_2 = 9$ folgen.

Lösung: Die Längen der Abschnitte betragen 16 cm und 9 cm.

542. Aus dem Dreieck ECM_1 (Abb. 29), mit $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, erhält man

$$r_u = \overline{CM_1} = \frac{\overline{AC}}{2\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

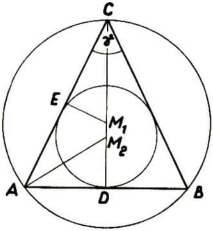


Abb 29

Im Dreieck ADM_2 gilt

$$\sphericalangle M_2AD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right),$$

also $r_i = \overline{DM_2} = \overline{AD} \cdot \tan\left(45° - \frac{\gamma}{4}\right)$.

Weil $\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ ist (Dreieck ADC), folgt

$$r_u : r_i = \frac{\cot\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right)}{\sin\gamma}.$$

Lösung: $\frac{r_u}{r_i} = \frac{\cot\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right)}{\sin\gamma}.$

543. Nach Voraussetzung sind $a = \overline{BC} = 13$ cm, $b = \overline{AC} = 14$ cm, $c = \overline{AB} = 15$ cm (Abb. 30). Man ersetzt $\overline{EM} = \overline{FM}$ durch r. Die Fläche des Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Flächen der Dreiecke AMC und MBC. Weil die Flächen

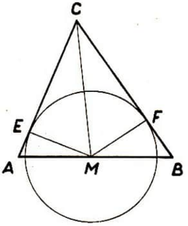


Abb. 30

dieser Teildreiecke gleich $\frac{13r}{2}$ und $\frac{14r}{2}$ sind, folgt $A_{ABC} = \frac{27r}{2}$. Andererseits ist nach der HERONischen Formel

$$A_{ABC} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84 \text{ cm}^2.$$

Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so findet man die

Lösung: $r = 6\frac{2}{9}$ cm.

544. Im rechtwinkligen Dreieck MCD (Abb. 31) ist der Winkel MCD gleich 60°. Deshalb gelten die Beziehungen

$$\overline{CM} = \overline{DM} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \overline{CE} = r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{r(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}.$$

Aus dem Dreieck AEC erhält man

$$\overline{AC} = \frac{2r(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \overline{AE} = r(\sqrt{3}+2).$$

Damit ist $\overline{AB} = 2r(\sqrt{3}+2)$.

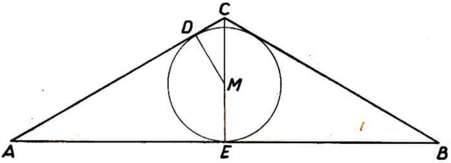


Abb. 31

Lösung: $\overline{AB} = 2r(\sqrt{3}+2)$; $\overline{AC} = \overline{BC} = \dfrac{2r(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}$.

545. Im Dreieck ADC (Abb. 32) ist bekannt

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = 18 \text{ cm}.$$

Weil $\overline{BC} \cdot \overline{CD} = \overline{AC}^2$ ist, gilt $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CD}} = 50$ cm.

Folglich ist $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = 40$ cm.

Lösung: Die Länge des Halbkreisbogens ist gleich 20π cm.

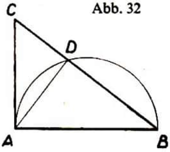


Abb. 32

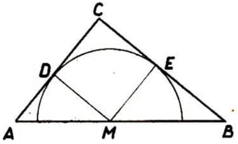


Abb. 33

546. Da die Winkel ECD, CDM und MEC im Viereck $MECD$ rechte sind, und weil $\overline{DM} = \overline{EM}$ ist (Abb. 33), muß das Viereck ein Quadrat sein. Die gesuchte Bogenlänge $\widehat{DE}$ ist also ein Viertel des Kreisumfanges. Man bezeichnet den Radius des Kreises mit r. Aus den ähnlichen Dreiecken AMD und MBE folgt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{BM}}.$$

Ferner gilt $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{15^2 - r^2}$, also $\frac{\sqrt{15^2 - r^2}}{15} = \frac{r}{20}$, woraus $r = 12$ folgt.

Lösung: 6π Längeneinheiten.

547. Die Fläche A des Vierecks $ADEC$ (Abb. 34) ist

$$A = A_{ABC} - A_{DBE}.$$

Man findet

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB}}{2}\,\overline{CD} = 12\ \text{cm}^2.$$

Für die Bestimmung von A_{DBE} ist es wichtig, zu erkennen, daß die Dreiecke DBE und DBC den Punkt D und die zugehörige Höhe (in der Abb. 34 nicht eingezeichnet) gemeinsam haben.

Es gilt $A_{DBC} = \frac{1}{2} A_{ABC} = 6\ \text{cm}^2$, folglich $A_{DBE} : 6 = \overline{BE} : \overline{BC}$. Die Länge der Strecke $\overline{BE}$ erhält man aus den Verhältnissen auf den Sekanten, die durch den Punkt B verlaufen.

Es gilt $\overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{AB}$, woraus $\overline{BE} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AB}}{\overline{BC}}$ folgt.

Folglich ist

$$A_{DBE} = 6\,\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = 6\,\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AB}}{\overline{BC}^2} = 6\,\frac{2 \cdot 4}{2^2 + 6^2} = 1{,}2\ \text{cm}^2.$$

Lösung: $A = 10{,}8\ \text{cm}^2$.

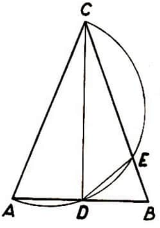


Abb. 34

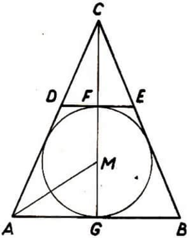


Abb. 35

548. Die Fläche A des Dreiecks ABC (Abb. 35) ist gleich dem Produkt des Dreiecksumfanges $2c + 2\sqrt{c^2 + h^2}$ mit $\frac{r_i}{2}$ (r_i ist dabei der Radius des Inkreises):

$$A = (c + \sqrt{c^2 + h^2})\, r_i.$$

Andererseits gilt

$$A = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CG} = ch.$$

Man setzt beide Ausdrücke einander gleich und erhält

$$r_i = \frac{ch}{c + \sqrt{c^2 + h^2}}.$$

Die Strecke $\overline{DE}$ bestimmt man aus der Proportion $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{CF} : \overline{CG}$. Dabei sind $\overline{AB} = 2c$; $\overline{CF} = h - 2r_i$; $\overline{CG} = h$.

B e m e r k u n g: Die Größe von r_i kann man auch so bestimmen: Die Strecke $\overline{AM}$ liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels DAG, d. h. die Strecken $\overline{GM} = r_i$ und $\overline{CM} = h - r_i$ sind den Seiten $\overline{AG}$ und $\overline{AC}$ proportional, also

$$\frac{r_i}{h - r_i} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}}.$$

Lösung: $r_i = \dfrac{ch}{c + \sqrt{c^2 + h^2}}$

$$\overline{DE} = 2c \cdot \frac{\sqrt{c^2 + h^2} - c}{\sqrt{c^2 + h^2} + c} = 2c \frac{(\sqrt{c^2 + h^2} - c)^2}{h^2}.$$

549. Weil $\overline{DP} \cdot \overline{AP} = \overline{CP} \cdot \overline{BP}$ (Abb. 36) und $\overline{DP} = \overline{CP}$ sind, muß $\overline{AP} = \overline{BP}$ sein. Die gegenüberliegenden Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Vierecks $ABCD$ sind gleich lang, das bedeutet, daß die gegebenen Längen von 6 m und 2,4 m zu den Seiten $\overline{AB}$

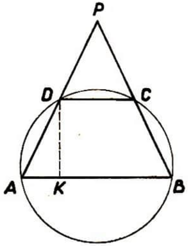


Abb. 36

und $\overline{CD}$ gehören ($\overline{AB} = 6$ m; $\overline{CD} = 2{,}4$ m). Da die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind, müssen die Geraden, auf denen die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegen, parallel zueinander verlaufen. Das Viereck $ABCD$ ist also ein gleichschenkliges Trapez. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DCP und ABP folgt $\overline{DP}:\overline{AP} = \overline{CD}:\overline{AB}$, woraus

$$\overline{AP} = \frac{\overline{DP} \cdot \overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2 \cdot 6}{2{,}4}\,\text{m} = 5\,\text{m} \quad \text{folgt;} \quad \text{d. h.} \quad \overline{AD} = 3\,\text{m}.$$

Jetzt bestimmt man die Höhe des Trapezes

$$h = \overline{DK} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AK}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{6 - 2{,}4}{2}\right)^2}\,\text{m} = 2{,}4\,\text{m}.$$

Lösung: $A = 10{,}08\,\text{m}^2$.

550. Nach Voraussetzung sind $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$; $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 9\,\text{cm}$ (Abb. 37). Man bezeichnet mit r_A, r_B und r_C die gesuchten Radien der Kreise mit den Mittel-

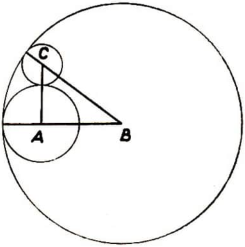


Abb. 37

punkten in A, B und C. Dann sind $r_A + r_C = 6\,\text{cm}$, $r_B - r_A = 7\,\text{cm}$, $r_B - r_C = 9\,\text{cm}$. Man erhält die Radien r_A, r_B und r_C.

Lösung: $r_A = 4\,\text{cm}$, $r_B = 11\,\text{cm}$, $r_C = 2\,\text{cm}$.

551. Man konstruiert $\overline{EM_2}$ parallel zu $\overline{AB}$ und $\overline{M_2P}$ parallel zu $\overline{CD}$ (Abb. 38). Nach Voraussetzung ist $\frac{3}{2}\overline{CD} = \overline{AB}$.

Man ersetzt $\overline{CD}$ durch x. Dann ist $\overline{M_2P} = x$; $\overline{EM_2} = \frac{3}{2}x$.
Aus den Dreiecken M_1M_2E und M_1PM_2 findet man

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{EM_1}^2 + \frac{9}{4}x^2 \quad \text{und} \quad \overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1P}^2 + x^2.$$

Man setzt die rechten Seiten einander gleich und bemerkt, daß die Beziehungen

$$\overline{EM_1} = \overline{AM_1} - \overline{AE} = \overline{AM_1} - \overline{BM_2} = 5\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$$

und analog $\overline{M_1P} = \overline{CM_1} + \overline{DM_2} = 7\,\text{cm}$ gelten.

Dann erhält man $9\,\text{cm}^2 + \frac{9}{4}x^2 = 49\,\text{cm}^2 + x^2$, woraus $x^2 = 32\,\text{cm}^2$ folgt.

Deshalb ist $\overline{M_1M_2}^2 = 49\,\text{cm}^2 + 32\,\text{cm}^2 = 81\,\text{cm}^2$.

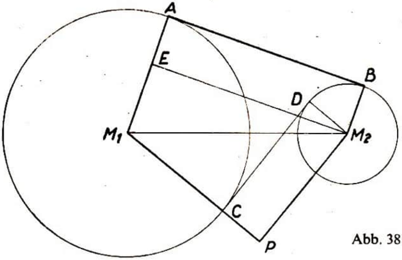


Abb. 38

Lösung: $\overline{M_1M_2} = 9$ cm.

552. Weil die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien dieser Kreise ist, müssen sich diese Kreise schneiden, d. h., sie haben eine gemeinsame äußere Tangente, aber keine gemeinsame innere.

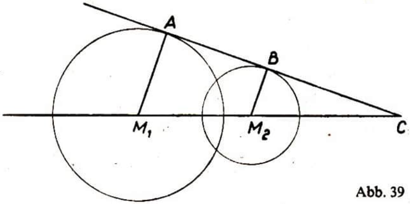


Abb. 39

Man setzt $\overline{CM_1} = x$, $\overline{CM_2} = y$ (Abb. 39).
Dann gelten folgende Beziehungen

$$x - y = \overline{M_1M_2} = 21\,\text{cm} \quad \text{und} \quad x : y = \overline{AM_1} : \overline{BM_2} = 17 : 10.$$

Lösung: $\overline{CM_1} = 51$ cm; $\overline{CM_2} = 30$ cm.

553. Durch den Punkt E (Abb. 40) verlaufen zwei Tangenten ($\overline{DE}$ und $\overline{AE}$) an den Kreis um M_1, also ist $\overline{DE} = \overline{AE}$. Ebenso kann man zeigen, daß $\overline{DE} = \overline{BE}$ ist. Folglich gilt

$$\overline{EF} = 2\overline{DE} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AB}.$$

Um $\overline{AB}$ zu bestimmen, konstruiert man parallel zu $\overline{AB}$ die Gerade $\overline{CM_2}$. Aus dem Dreieck M_1M_2C, mit $\overline{CM_2} = \overline{AB}$, $\overline{M_1M_2} = R + r$ und $\overline{CM_1} = R - r$, erhält man

$$\overline{AB} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} \quad \text{oder} \quad \overline{AB} = 2\sqrt{Rr}.$$

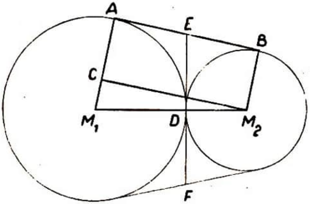


Abb. 40

Lösung: $\overline{EF} = 2\sqrt{Rr}$.

554. Es sei $\overline{FH}$ die gemeinsame Tangente an die beiden Kreise (Abb. 41). Weil $\overline{DF} = \overline{FP} = \overline{CF}$ ist, muß $\overline{FH}$ die Mittellinie des Trapezes $ABCD$ sein.

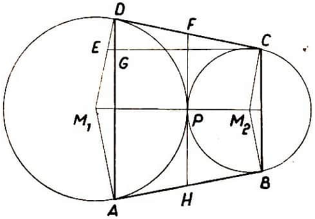


Abb. 41

Man findet $\overline{FH} = \overline{CD} = 2\sqrt{Rr}$ (s. Lösung der vorigen Aufgabe) und kennt dann die Höhe $\overline{CG}$ des Trapezes. Nach dem Kathetensatz (ΔECD) erhält man $\overline{CG} = \dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{CE}}$.

Da $\overline{CE} = \overline{M_1M_2} = R + r$ ist, folgt

$$\overline{CG} = \frac{4Rr}{R + r}.$$

Lösung: $A = \dfrac{8(Rr)^{\frac{3}{2}}}{R + r}$.

555. Den unbekannten Radius des Kreises bezeichnet man mit x. Durch den Mittelpunkt M_3 dieses Kreises (Abb. 42) wird die Parallele $\overline{CD}$ zu $\overline{AB}$ gelegt. Da diese Parallele senkrecht auf den Radien $\overline{BM_1}$, $\overline{AM_2}$ und $\overline{EM_3}$ steht, gilt

$$\overline{BC} = \overline{AD} = x, \quad \text{d. h.} \quad \overline{CM_1} = R - x \quad \text{und} \quad \overline{DM_2} = r - x.$$

Außerdem gilt $\overline{M_1M_2} = R + r$ und $\overline{M_2M_3} = r + x$.

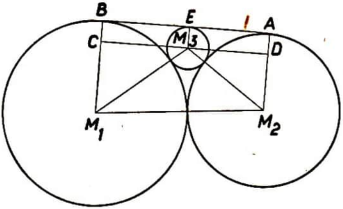


Abb. 42

Es folgt

$$\overline{CM_3} = \sqrt{(R + x)^2 - (R - x)^2} = 2\sqrt{Rx}.$$

Ebenso gilt $\overline{DM_3} = 2\sqrt{rx}$.

Weil $\overline{CD} = 2\sqrt{Rr}$ (s. Lösung der Aufg. 553) ist, gilt $2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$,

woraus $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}$ folgt.

Lösung: Der Radius des Kreises ist $x = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.

556. Da $A = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ gilt (γ sei der Winkel zwischen den Sehnen), hat die Aufgabe nur für $A \leqq \dfrac{1}{2}ab$ Lösungen.

Für $A < \dfrac{1}{2}ab$ erhält man $\sin\gamma = \dfrac{2A}{ab}$; es existieren zwei Dreiecke, die die Seiten a und b sowie die Fläche A haben. Im ersten Falle ist der Winkel γ spitz, im zweiten stumpf. Für das erste Dreieck gilt

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{4A^2}{a^2b^2}},$$

für das zweite

$$\cos\gamma = -\sqrt{1 - \frac{4A^2}{a^2b^2}}.$$

Folglich ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2 - 4A^2}$. (Das obere Vorzeichen gilt für $\gamma < 90°$, das untere für $\gamma > 90°$.)

Für $A = \frac{1}{2}ab$ erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, also $c^2 = a^2 + b^2$. Den Radius des Kreises, in den dieses Dreieck einbeschrieben ist, erhält man aus der Formel

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Lösung: $r = \dfrac{ab\sqrt{a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2 - 4A^2}}}{4A}$.

Für $A > \frac{1}{2}ab$ existiert keine Lösung, für $A < \frac{1}{2}ab$ existieren zwei. (Das obere Vorzeichen gilt, wenn der Winkel zwischen den Sehnen spitz ist, das untere, wenn dieser Winkel stumpf ist.)

Für $A = \frac{1}{2}ab$ gibt es genau eine Lösung. (Die Sehnen stehen senkrecht aufeinander.)

557. Nach Voraussetzung (Abb. 43) sind $\overline{A_1B_1} = a_6 = r$, $\overline{A_2B_2} = a_4 = r\sqrt{2}$ und $\overline{A_3B_3} = a_3 = r\sqrt{3}$. Die Höhen der Dreiecke MA_1B_1, MA_2B_2 und MA_3B_3 sind

$$\overline{C_1M} = \frac{r\sqrt{3}}{2},\quad \overline{C_2M} = \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{C_3M} = \frac{r}{2}.$$

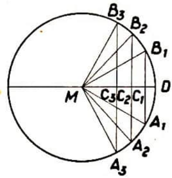


Abb. 43

Damit bestimmt man die Flächen dieser Dreiecke und findet anschließend die Fläche des Sektors MA_1DB_1.

Sie beträgt $\frac{1}{6}$ der Kreisfläche: $A_{MA_1DB_1} = \dfrac{\pi r^2}{6}$.

Analog sind $A_{MA_2DB_2} = \frac{1}{4}\pi r^2$ und $A_{MA_3DB_3} = \frac{1}{3}\pi r^2$.

Wenn man von der Fläche eines Sektors jeweils die Fläche des entsprechenden Dreiecks subtrahiert, erhält man die Fläche des betreffenden Segments:

$$A_{\text{I}} = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad A_{\text{II}} = r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad A_{\text{III}} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Die Teilfläche des Kreises, die von den Sehnen $\overline{A_1B_2}$ und $\overline{A_2B_2}$ begrenzt wird, ist gleich

$$A_{\text{II}} - A_{\text{I}} = \frac{r^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6).$$

Die Fläche zwischen den Sehnen $\overline{A_2B_2}$ und $\overline{A_3B_3}$ hat die Größe

$$A_{\text{III}} - A_{\text{II}} = \frac{r^2}{12}(\pi - 3\sqrt{3} + 6).$$

Lösung: Das Verhältnis der Flächen beträgt $\dfrac{\pi + 3(2 - \sqrt{3})}{\pi - 3(2 - \sqrt{3})}$.

558. Für die Bestimmung des Inkreisradius $\overline{EM} = r$ (Abb. 44) benutzt man die Formel zur Berechnung einer Dreiecksfläche: $A = s \cdot r$ (s ist der halbe Dreiecksumfang). Nach Voraussetzung sind $\overline{AD} = 14{,}4$ cm und $\overline{BD} = 25{,}6$ cm; folglich ist $\overline{AB} = 40$ cm.

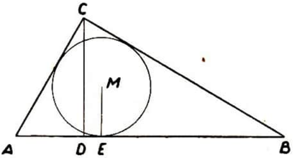


Abb. 44

Also ist $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{AB}} = 24$ cm, $\overline{BC} = \sqrt{\overline{BD} \cdot \overline{AB}} = 32$ cm.
Demnach sind $s = 48$ cm und $A = 384\ \text{cm}^2$.

Lösung: Die Fläche des Kreises ist gleich $A = 64\pi\ \text{cm}^2$.

559. Die Strecke $\overline{EG}$, die die Berührungspunkte der beiden parallelen Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mit dem Kreis (Abb. 45) verbindet, ist Durchmesser des Kreises. Deshalb sind die Winkel GHE und EFG (und analog die Winkel HEF und FGH) rechte. Folglich ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck. Das Dreieck ABD ist gleichseitig (denn $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\alpha = 60°$). Die Strecke $\overline{EG}$ (die Höhe des Rhombus) ist gleich der Höhe des Dreiecks ABD, d. h. $\overline{EG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Die

Fläche des Rechtecks ist gleich

$$A = \frac{1}{2}\,\overline{EG}^2 \sin \sphericalangle EMH = \frac{1}{2}\,EG^2 \sin \sphericalangle DAB.$$

(Die Schenkel der Winkel EMH und DAB stehen paarweise aufeinander senkrecht.)
Folglich ist $A = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin 60°$.

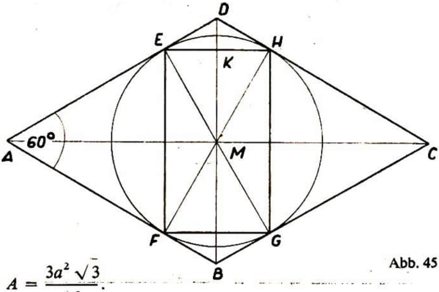


Abb. 45

Lösung: $A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

560. Gesucht sind die Flächen A_1 und A_2 der Figuren $GCHN$ (Abb. 46) und $FBGL$ (die Flächen der Figuren $AFKE$ und $EJHD$ sind gleich A_1 und A_2). Weil nach Voraussetzung $\overline{AC} = 4r$ ist, gilt $\overline{CM} = 2\overline{HM}$, d. h. $\sphericalangle MCH = 30°$. Ferner

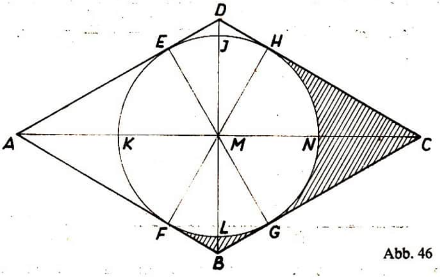


Abb. 46

sind $\sphericalangle HMG = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ und $\sphericalangle GMF = 60°$. Die Fläche des Vierecks $GCHM$ ist gleich $r^2\sqrt{3}$ und die des Sektors $HMGN$ ist gleich $\frac{1}{3}\pi r^2$.

Folglich ist $A_1 = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3}$, so daß man $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{6}$ erhält.

Lösung: $A_1 = \frac{r^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$, $A_2 = \frac{r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{6}$.

561. Weil der Winkel $DAB = 30°$ ist (Abb. 47), muß die Höhe $\overline{DE} = h$ des Trapezes gleich $\frac{1}{2}\overline{AD}$ sein. Da $ABCD$ ein Tangentenviereck ist, gilt

$$\overline{CD} + \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{AD},$$

deshalb gilt

$$A = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}h = \frac{1}{2}\overline{AD}^2.$$

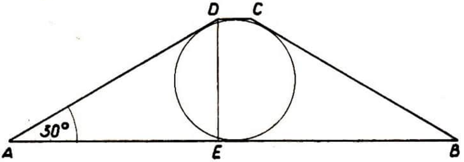


Abb. 47

Lösung: $\overline{AD} = \sqrt{2A}$.

562. Aus der Fläche $A = 20\text{ cm}^2$ und der Höhe $\overline{DE} = 2r = 4\text{ cm}$ (Abb. 48) findet man die Länge der Mittellinie des Trapezes $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = 5\text{ cm}$.

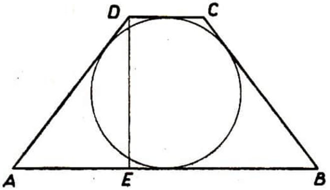


Abb. 48

Folglich ist $\overline{AD} = 5\text{ cm}$ (s. Lösung der vorigen Aufgabe). Jetzt berechnet man

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DE}^2} = 3\text{ cm}.$$

$\overline{AE}$ ist aber der halbe Wert der Differenz beider Trapezgrundseiten, Aus der Länge der Mittellinie und dem Wert von $\overline{AE}$ erhält man die Länge der Grundseite selbst.

Lösung: $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ cm.

563. Die Fläche A des Trapezes $ABCD$ (Abb. 49) ist gleich

$$\frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2}\overline{DE} = (\overline{CD} + \overline{AB}) \cdot r$$

(r ist der Radius des einbeschriebenen Kreises).

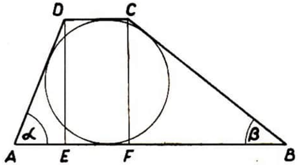


Abb. 49

Weil dieses Trapez einem Kreis umbeschrieben ist, muß $\overline{CD} + \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$ sein. Ferner sind

$$\overline{AD} = \frac{2r}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \overline{BC} = \frac{2r}{\sin\beta}.$$

Deshalb gilt

$$A = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 2r^2\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$A = 4r^2\,\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\,\sin\beta}.$$

Lösung: $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A\sin\alpha\sin\beta}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}}.$

564. Der Schenkel $\overline{AD}$ (Abb. 50) steht senkrecht auf der Grundlinie und hat die Länge $2r$. Der andere Schenkel $\overline{BC}$ muß deshalb größer als $2r$ sein. Das heißt, die kleinste Seite des Trapezes ist die (kleinere) Grundlinie $\overline{CD}$ mit der Länge $\frac{3}{2}r$. Um die Länge der größeren Grundlinie $\overline{AB}$ zu bestimmen, konstruiert man die Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{BM}$. Sie sind die Winkelhalbierenden der Winkel BCF und EBC, deren Summe gleich 180° ist.

Folglich ist $\sphericalangle MCF + \sphericalangle EBM = 90°$.
Aus dem rechtwinkligen Dreieck EBM erhält man

$$\sphericalangle BME + \sphericalangle EBM = 90°.$$

Es folgt $\sphericalangle BME = \sphericalangle MCF$. Also sind die Dreiecke EBM und MCF ähnlich. Man erhält die Proportion

$$\overline{BE} : \overline{EM} = \overline{FM} : \overline{CF}.$$

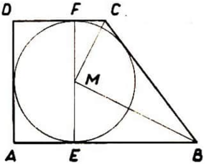


Abb. 50

Hierin sind $\overline{EM} = \overline{FM} = r$ und $\overline{CF} = \frac{r}{2}$ (nach Voraussetzung).

Dann gilt $\overline{BE} = 2r$ und damit $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = r + 2r = 3r$.

Lösung: $A = \dfrac{9r^2}{2}$.

565. Die Dreiecke MCF und BME (Abb. 50) sind ähnlich (s. vorige Aufgabe). Aus $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \dfrac{4}{2} = 2$ folgen $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{FM}} = 2$ und $\dfrac{\overline{EM}}{\overline{CF}} = 2$, d. h.

$$\overline{BE} = 2\overline{FM} = 2r \quad \text{und} \quad \overline{CF} = \frac{\overline{EM}}{2} = \frac{r}{2}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck EBM erhält man $r^2 + (2r)^2 = 4^2$, woraus $r = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ cm folgt.

Jetzt bestimmt man $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = r + 2r = 3r = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$ cm und $\overline{CD} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ cm. Die Höhe $\overline{EF}$ des Trapezes hat die Länge $2r = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ cm.

Lösung: $A = 14{,}4\ \text{cm}^2$.

566. Der Mittelpunkt M des ersten Kreises (Abb. 51) teilt die Höhe $\overline{CE} = h$ im Verhältnis $\overline{CM} : \overline{EM} = 2 : 1$.
Der Durchmesser $\overline{EG}$ hat deshalb eine Länge von $\frac{2}{3}h$, d. h. $\overline{CG} = \frac{1}{3}h$.

Der zweite Kreis ist in das Dreieck DFC einbeschrieben. Die Höhe dieses Dreiecks beträgt $\frac{1}{3}$ der Höhe h des Dreiecks ABC, d. h., der Radius des Kreises um M_1 ($r_1 = \overline{GM_1}$) ist gleich einem Drittel des Radius $r = \overline{EM}$. Wenn also A die Fläche des Kreises um M ist $\left[A = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}\right]$, dann ist die Fläche des Kreises um M_1 gleich $A_1 = \frac{1}{3^2} A$.

Von diesen Kreisen mit den Radien r_1 gibt es drei. Die Summe ihrer Flächen beträgt $Q_1 = \frac{1}{3} A$.

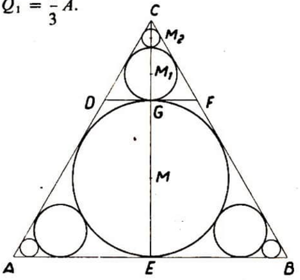


Abb. 51

Durch analoge Überlegungen findet man, daß die Flächensumme der drei folgenden Kreise sich zu

$$Q_2 = \frac{1}{3^2} Q_1 = \frac{1}{3^3} A$$

ergibt usw.

Man erhält eine unendliche Reihe

$$A + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = A + \frac{1}{3} A + \frac{1}{3^3} A + \frac{1}{3^5} A + \cdots$$

Subtrahiert man von beiden Seiten A, so erhält man eine konvergente geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a_1 = \frac{1}{3} A$ und dem Quotienten $q = \frac{1}{3^2}$.

Ihre Summe ist $\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3} A}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} A.$

Dazu muß noch A addiert werden.

Lösung: Die gesuchte Fläche hat eine Größe von $\frac{11}{8} A = \frac{11}{96} \pi a^2$.

567. Um die Fläche des Trapezes $ABEF$ (Abb. 52) bestimmen zu können, muß zuerst die Grundseite $\overline{AF}$ und die Höhe $\overline{EF}$ bestimmt werden, denn $\overline{BE}$ ist bekannt. Man bezeichnet $\overline{BD}$ mit x cm und findet: $x(\overline{AB} + x) = \overline{CD}^2$ oder $x(5 + x) = 150$. Daraus folgt $\overline{BD} = x\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADF und BDE folgt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$ oder $\frac{\overline{AF}}{15\,\text{cm}} = \frac{6\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$, woraus $\overline{AF} = 9$ cm folgt.

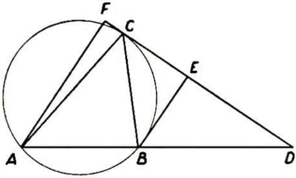


Abb. 52

Die Höhe $\overline{EF}$ des Trapezes erhält man aus der Proportion

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}, \quad \text{wobei} \quad \overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BE}^2} \quad \text{ist.}$$

Schließlich erhält man $\overline{EF} = 4$ cm.

Lösung: $A = 30\,\text{cm}^2$.

568. Es mögen M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der gleich großen inneren Kreise und r ihr Radius sein (Abb. 53). Da $\overline{AM_1}$ und $\overline{BM_2}$ Winkelhalbierende der

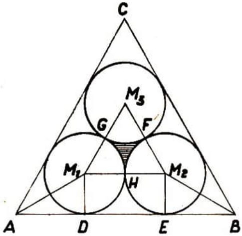


Abb. 53

Winkel $CAB = ABC = 60°$ sind, muß $\sphericalangle M_1AD = 30°$ sein. Folglich ist $\overline{AD} = \overline{EB} = r\sqrt{3}$.

Ferner gilt: $\overline{DE} = \overline{M_1M_2} = 2r$. Deshalb ist $2r\,(1 + \sqrt{3}) = a$.

Lösung: $r = \dfrac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{4}$.

569. Die gesuchte Fläche *FGH* (in Abb. 53 schraffiert) erhält man, wenn man von der Fläche des Dreiecks $M_1M_2M_3$ die Flächensumme der drei Sektoren M_1HG, M_2FH und M_3GF subtrahiert (ihre Flächensumme ist gleich der Fläche eines Halbkreises mit dem Radius *r*).
Die Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ sind gleich

$$2r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$$

(siehe Lösung der vorigen Aufgabe),
deshalb gilt

$$A_{M_1M_2M_3} = r^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{16}.$$

Die Summe der Flächen der drei Sektoren hat den Wert

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)^2}{32} = \frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{16}.$$

Lösung: $A = r^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{16}$.

570. Der Lösungsweg ist dem vorigen ähnlich (Abb. 54).

Lösung: $A = \dfrac{a^2(4-\pi)}{16}$.

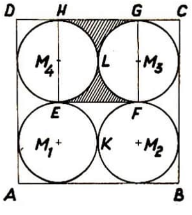


Abb. 54

Anderes Verfahren:
Die Figur *EKFL* hat die gleiche Fläche wie die in Abbildung 54 schraffierte Figur. Folglich erhält man die gesuchte Fläche, indem man von der Fläche des Quadrates *EFGH* die der zwei Halbkreise subtrahiert.

571. Man bestimmt den Radius r des Kreisbogens. Der Umfang des Segments ist gleich der Summe aus den Längen des Bogens $\widehat{AB}$ und der Sehne $\overline{AB}$ (Abb. 55).

Man erhält $\frac{2}{3}\pi r + r\sqrt{3} = u$, woraus $r = \frac{3u}{2\pi + 3\sqrt{3}}$ folgt.

Die Fläche A des Segments ist gleich der Differenz der Flächen des Sektors und des Dreiecks MBA, also

$$A = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Lösung: $A = \dfrac{3u^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$.

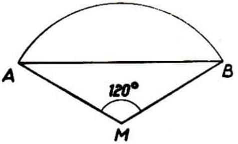


Abb. 56

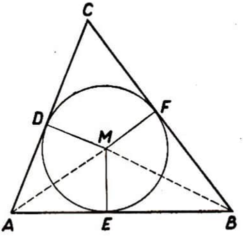


Abb. 55

572. Für die Bestimmung der Längen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Abb. 56) reicht es aus, $\overline{CD} = \overline{CF} = x$ zu errechnen, denn es gilt $\overline{AD} = \overline{AE} = 6$ cm und $\overline{BF} = \overline{BE} = 8$ cm. Man benutzt zwei Formeln für die Berechnung der Dreiecksfläche

$$A = r_i \cdot s \quad \text{und} \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei s der halbe Dreiecksumfang ist, d. h.

$$s = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}(28\,\text{cm} + 2x)$$

$$= 14\,\text{cm} + x.$$

Man erhält die Gleichung

$$4(14 + x) = \sqrt{(14 + x)\,x \cdot 6 \cdot 8},$$

woraus $x = 7$ cm folgt.

Lösung: $\overline{AC} = 13$ cm; $\overline{BC} = 15$ cm.

573. Es sei $\overline{BD} : \overline{CD} = m : n$ (Abb. 57). Dann gilt $\overline{CD} : \overline{BC} = n : (m + n)$, folglich ist

$$\cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{n}{m + n}.$$

Da $\gamma = 180° - 2\beta$ ist, muß $\cos 2\beta = \cos(180° - \gamma) = -\dfrac{n}{m+n}$ sein. Man findet

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2(m+n)}}.$$

Lösung: $\gamma = \arccos\dfrac{n}{m+n}$; $\beta = \arccos\sqrt{\dfrac{m}{2(m+n)}}\left[= \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{n}{m+n}\right)\right]$.

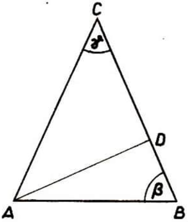


Abb. 57

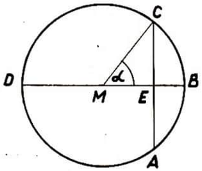


Abb. 58

574. Die Peripherie des Kreises wird in vier paarweise gleiche Bögen $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ und $\widehat{CD} = \widehat{DA}$ geteilt (Abb. 58). Es wird angenommen, der Bogen $\widehat{BC}$ gehöre zu einem Zentriwinkel $\alpha < 90°$ (der Fall $m:n = 1$ wird hier nicht betrachtet, da dann jeder Bogen gleich einem Viertel des Kreisumfanges wäre). Die Größe des Zentriwinkels $\alpha = \sphericalangle CMB$ ist durch den Bogen $\widehat{BC}$ bestimmt.

Nach Voraussetzung ist $\overline{DE}:\overline{BE} = m:n$. Man wählt als Einheitslänge die Größe $\dfrac{\overline{DE}}{m}$, dann sind $\overline{DE} = m$ und $\overline{BE} = n$, d. h. $\dfrac{\overline{BD}}{2} = \dfrac{m+n}{2}$ und

$$\overline{EM} = \overline{DE} - \overline{DM} = m - \frac{m+n}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

Folglich ist $\cos\alpha = \dfrac{\overline{EM}}{\overline{CM}} = \dfrac{m-n}{m+n}$ und $\alpha = \arccos\dfrac{m-n}{m+n}$.

Der Zentriwinkel zum Bogen $\widehat{CD}$ hat die Größe $\pi - \arccos\dfrac{m-n}{m+n}$.

Lösung: Der Zentriwinkel, der kleiner als $\dfrac{\pi}{2}$ ist, beträgt

$$\arccos\frac{m-n}{m+n} \quad (m > n),$$

der, der größer als $\dfrac{\pi}{2}$ ist,

$$\pi - \arccos\frac{m-n}{m+n} = \arccos\frac{n-m}{m+n}.$$

575. Es sei α ein Winkel im Parallelogramm (Abb. 59), dann gilt $h_1 = \overline{DE} = \overline{AD} \sin\alpha$ und $h_2 = \overline{DF} = \overline{CD} \cdot \sin\alpha$, d. h., $h_1 + h_2 = (\overline{AD} + \overline{CD}) \sin\alpha = s \cdot \sin\alpha$, woraus $\sin\alpha = \dfrac{h_1 + h_2}{s}$ folgt. Wenn α ein spitzer (oder ein rechter) Winkel ist, dann gilt $\alpha = \arcsin \dfrac{h_1 + h_2}{s}$. Der stumpfe (oder rechte) Winkel des Parallelogramms ist dann gleich $\pi - \arcsin \dfrac{h_1 + h_2}{s}$.

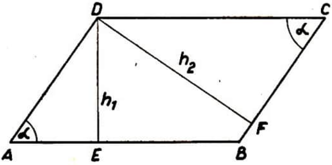


Abb. 59

Bemerkung: Die Aufgabe hat keine Lösung für $h_1 + h_2 > s$. Ist dagegen $h_1 + h_2 \leqq s$, so ist die Aufgabe lösbar (für $h_1 + h_2 = s$ entsteht ein Rechteck).

Lösung: Einer der Winkel ist gleich $\arcsin \dfrac{h_1 + h_2}{s}$,
der andere $\pi - \arcsin \dfrac{h_1 + h_2}{s}$.

576. Nach Voraussetzung gilt $\overline{CD} : \overline{CE} = 40 : 41$ (Abb. 60). Man verwendet als Einheitslänge $\dfrac{1}{40}$ der Strecke $\overline{CD}$. Dann sind $\overline{CD} = 40$ und $\overline{CE} = 41$.

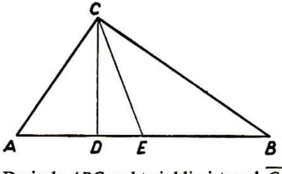


Abb. 60

Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist und $\overline{CE}$ die Seitenhalbierende der Hypotenuse ist, folgt $\overline{AE} = \overline{CE} = 41$.
Das Dreieck DEC ist rechtwinklig, also ist $\overline{DE} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CD}^2} = 9$. Dann folgt $\overline{AD} = \overline{AE} - \overline{DE} = 32$. Aus den ähnlichen Dreiecken ADC und ABC erhält man $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{32}{40} = \dfrac{4}{5}$.

Lösung: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{4}{5}$.

577. Da $\overline{AM}$ die Winkelhalbierende des Winkels $\alpha = \sphericalangle CAD$ ist (Abb. 61), folgt $\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle MAB$. Ebenso erhält man $\sphericalangle ABM = \frac{1}{2}(90° - \alpha) = 45° - \frac{\alpha}{2}$. Aus den Dreiecken ADM und DBM folgt $\overline{AD} = \overline{DM} \cdot \cot\frac{\alpha}{2}$ und

$$\overline{BD} = \overline{DM} \cdot \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Folglich gilt

$$c = \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = \overline{DM}\left[\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Daraus erhält man

$$r = \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

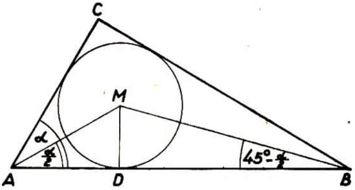


Abb. 61

Nun wird der Nenner auf eine bequem zu logarithmierende Form gebracht:

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin 45°}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Lösung: $r = c \cdot \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$

Bemerkung: Verwendet man die Formel $r = \frac{A}{s}$ (A ist die Dreiecksfläche, s der halbe Dreiecksumfang), so erhält man das gleichwertige Ergebnis

$$r = \frac{c \sin\alpha \cos\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}.$$

578. Man bezeichnet die Seiten des Dreiecks mit a, b und c. Dann sei $a = 7$ cm, $b = 24$ cm und $c = 25$ cm.
Da hier $a^2 + b^2 = c^2$ ist, muß es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handeln. Folglich ist der Radius des Umkreises gleich $\frac{c}{2}$. Den Radius des Inkreises ermittelt man aus der Beziehung $r_i = \frac{A}{s}$ (A ist die Dreiecksfläche, s der halbe Dreiecksumfang).

Lösung: $r_u = 12{,}5$ cm, $r_i = 3$ cm.

579. Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle EAC = \varphi$ (Abb. 62). Daraus folgt $\sphericalangle M_1AC = \frac{\varphi}{2}$.
Es sind die Radien $R = \overline{CM_1}$ und $r = \overline{BM_2}$ zu bestimmen. Es sind bekannt:

$$R + r = \overline{FM_1} + \overline{FM_2} = \overline{M_1M_2} = d,$$

$$R - r = \overline{CM_1} - \overline{BM_2} = \overline{DM_1}.$$

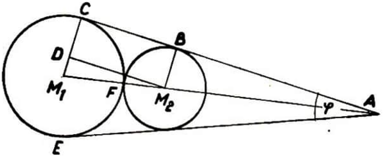


Abb. 62

Aus dem rechtwinkligen Dreieck M_1M_2D mit $\sphericalangle M_1M_2D = \sphericalangle M_1AC = \frac{\varphi}{2}$ erhält man

$$\overline{DM_1} = \overline{M_1M_2} \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \text{d. h.} \quad R - r = d \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ermittelt man

$$R = \frac{d\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{d\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2}.$$

Wenn man $\sin\frac{\varphi}{2}$ durch $\cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ ersetzt, kann man diese Ausdrücke umformen.

Lösung: $R = d\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$; $r = d\sin^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$.

580. Aus Abbildung 63 ersieht man $\sin \sphericalangle DAB = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AB}} = \frac{2r}{a}$. Nach Voraussetzung gilt $\overline{EG} \cdot \overline{BC} = A_1$, d. h. $2ra = A_1$ und außerdem $\pi r^2 = A_2$.

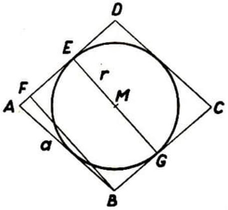


Abb. 63

Aus diesen Gleichungen können r und a bestimmt werden. Da man aber nur den Quotienten $\frac{r}{a}$ zu bestimmen braucht, dividiert man die zweite Gleichung durch die erste und erhält

$$\frac{\pi r}{2a} = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{a} = \frac{2A_2}{\pi A_1}.$$

Lösung: $\sphericalangle DAB = \arcsin\frac{4A_2}{\pi A_1}$.

581. Die Fläche des einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks ist gleich

$$A_1 = nr^2 \sin\frac{180^\circ}{n},$$

die des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks gleich

$$A_2 = nr^2 \tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Nach Voraussetzung gilt $nr^2\left(\tan\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n}\right) = P$.
Daraus findet man

$$r = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{n(\tan\alpha - \sin\alpha)}},$$

wobei $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ ist. Den Ausdruck $\tan\alpha - \sin\alpha$ formt man um:

$$\tan\alpha - \sin\alpha = \tan\alpha(1 - \cos\alpha) = 2\tan\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\textit{Lösung:}\ r = \sqrt{\frac{P}{n\left(\tan\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n}\right)}} = \frac{1}{\sin\frac{90^\circ}{n}}\sqrt{\frac{P\cot\frac{180^\circ}{n}}{2n}}.$$

582. Die regelmäßigen n-Ecke (n ist in beiden Fällen gleich) sind einander ähnlich (Abb. 64). Ihre Flächen (A_1 ist die des einbeschriebenen, A_2 die des umbeschriebenen Vielecks) verhalten sich wie die Quadrate der Radien:

$$A_1 : A_2 = \overline{DM}^2 : \overline{BM}^2.$$

Im Dreieck MDB gilt aber $\frac{\overline{DM}}{\overline{BM}} = \cos \sphericalangle BMD = \cos\frac{180^\circ}{n}$.

Lösung: $F_1 : F_2 = \cos^2\frac{180^\circ}{n}$.

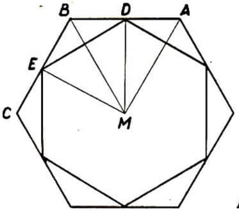


Abb. 64

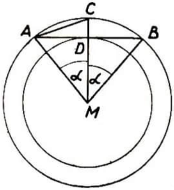


Abb. 65

583. Es sei $\overline{AB} = a$ die Seite des regelmäßigen n-Ecks (Abb. 65). Dann gilt

$$\sphericalangle CMA = \alpha = \frac{180^\circ}{n} \quad \text{und} \quad \sphericalangle CAD = \frac{\alpha}{2} = \frac{90^\circ}{n}$$

($\sphericalangle CAD$ ist Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{BC}$). Die Fläche A des Kreisringes ist

$$A = \pi(\overline{AM}^2 - \overline{DM}^2) = \pi\overline{AD}^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Die Breite d des Ringes kann man aus dem Dreieck ADC bestimmen.

Lösung: $A = \dfrac{\pi a^2}{4}$; $d = \dfrac{a}{2} \tan \dfrac{90°}{n}$.

584. Der gesuchte Radius wird mit x bezeichnet (Abb. 66), so daß $\overline{AM_2} = \overline{BM_2} = x$ ist. Im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2 sind

$$\sphericalangle AM_1M_2 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \overline{M_1M_2} = \overline{BM_1} - \overline{BM_2} = r - x.$$

Man findet $\overline{AM_2} = \overline{M_1M_2} \sin \dfrac{\alpha}{2}$, d. h. $x = (r - x) \sin \dfrac{\alpha}{2}$.

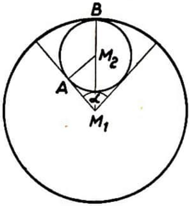


Abb. 66

$$\textit{Lösung: } x = \frac{r \sin \dfrac{\alpha}{2}}{1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \dfrac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \left(45° - \dfrac{\alpha}{4}\right)}.$$

585. Die Fläche A_1 des Vierecks $ABCM$ (Abb. 67) ist gleich $2 \cdot \dfrac{1}{2} \overline{CM} \cdot \overline{BC} = r^2 \cot \alpha$.

Von ihr wird die Fläche A_2 des Sektors $CMAD$ subtrahiert. Der Zentriwinkel

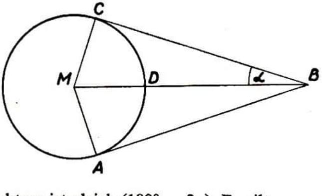


Abb. 67

dieses Sektors ist gleich $(180° - 2\alpha)$. Es gilt

$$A_2 = \pi r^2 \frac{180° - 2\alpha}{360°} = \pi r^2 \frac{90° - \alpha}{180°}.$$

Lösung: $A = A_1 - A_2 = r^2\left(\cot\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\alpha}{180°}\right)$, ($\alpha$ im Gradmaß)

oder

$$A = r^2\left(\cot\alpha' - \frac{\pi}{2} + \alpha'\right) \quad (\alpha' \text{ im Bogenmaß}).$$

586. Nach Voraussetzung ist die Fläche des Dreiecks AFD (Abb. 68) gleich einem Drittel der Fläche des Rhombus $ABCD$, d. h. gleich zwei Dritteln der Fläche des Dreiecks ACD.

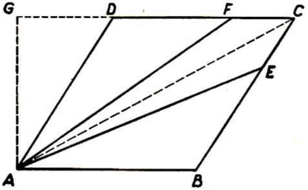


Abb. 68

Da die Dreiecke ACD und AFD die gemeinsame Höhe AG haben, gilt

$$DF = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3}a.$$

Ferner ist

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{DF}\cos(180° - \alpha)$$
$$= a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3}a^2\cos\alpha.$$

Lösung: $\overline{AF} = \overline{AE} = \frac{a}{3}\sqrt{13 + 12\cos\alpha}.$

587. Man verlängert die Strecke $\overline{BP}$ über P hinaus (Abb. 69) und erhält den Schnittpunkt C mit dem Schenkel SA des Winkels BSA.

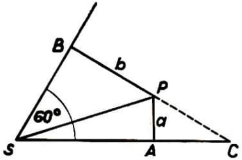


Abb. 69

Aus dem Dreieck ACP, in dem $\sphericalangle CPA = \sphericalangle BSA = 60°$ ist (die Schenkel dieser Winkel stehen paarweise aufeinander senkrecht), erhält man $\overline{CP} = 2\overline{AP} = 2a$.

Folglich ist $\overline{BC} = \overline{CP} + \overline{BP} = 2a + b$. Im Dreieck SCB ist $\overline{CS} = 2\overline{BS}$. Man findet $(2\overline{BS})^2 - \overline{BS}^2 = (2a + b)^2$, folglich ist $\overline{BS} = \dfrac{2a + b}{\sqrt{3}}$.

Die gesuchte Entfernung $\overline{PS}$ wird aus dem Dreieck SPB bestimmt.

Lösung: $\overline{PS} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

588. Man führt die Aufgabe auf die Ermittlung der Größe des Winkels $BCA = 2\gamma$ (Abb. 70) zurück.

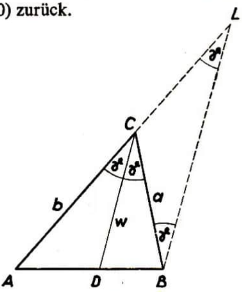


Abb. 70

Dazu verlängert man $\overline{AC}$ über C hinaus und konstruiert eine Parallele zu $\overline{CD}$ durch B. Mit Hilfe des Satzes über die Halbierende des Innenwinkels eines Dreiecks weist man nach, daß $\overline{BC} = \overline{CL} = a$ ist.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und ABL erhalten wir $\overline{BL} = \dfrac{(a + b)\,w}{b}$.
Im gleichschenkligen Dreieck BLC ist $\overline{BL} = 2a\cos\gamma$.

Folglich ist $2a\cos\gamma = \dfrac{(a + b)\,w}{b}$. Daraus erhält man $\cos\gamma$ und schließlich $\sin\gamma$. Also gilt

$$A = \frac{1}{2}\,aw\sin\gamma + \frac{1}{2}\,bw\sin\gamma = \frac{1}{2}\,w(a + b)\sin\gamma.$$

Ein anderer Lösungsweg:

Die Fläche $\dfrac{1}{2}\,ab\sin 2\gamma$ des Dreiecks ABC ist die Summe der Flächen $\dfrac{1}{2}\,bw\sin\gamma$ und $\dfrac{1}{2}\,aw\sin\gamma$ der Dreiecke ADC und DBC. Dann gilt

$$ab\sin\gamma\cos\gamma = \frac{1}{2}\,bw\sin\gamma + \frac{1}{2}\,aw\sin\gamma,$$

daraus bestimmt man $\cos\gamma$.

Lösung: $A = \dfrac{(a + b)\,w}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a + b)^2\,w^2}$.

589. Es wird angenommen, die Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{CF}$ (Abb. 71) würden den Winkel BCA in drei gleiche Teile teilen:

$$\sphericalangle BCF = \sphericalangle FCE = \sphericalangle ECA = \gamma.$$

Nach Voraussetzung sind $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ und $\overline{CE} = \overline{CF} = t$. Aus dem Dreieck EBC erhält man, wie in der vorangegangenen Aufgabe,

$$\cos\gamma = \frac{t(a+t)}{2at} = \frac{t+a}{2a}.$$

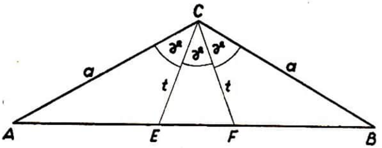


Abb. 71

Danach bestimmt man $\sin\gamma$. Die gesuchte Fläche ist die Summe der Flächen der Dreiecke AEC, EFC und FBC.

Lösung: $A = \frac{t}{4a}(2a+t)\sqrt{(3a+t)(a-t)}$.

590. Im Dreieck ABC (Abb. 72) sind die Strecken $\overline{CE}$ Höhe und $\overline{CD}$ Seitenhalbierende. Man bezeichnet den gesuchten Winkel ECD mit φ, die Winkel des Dreiecks mit α, β und γ. Aus den Dreiecken AEC, EBC und DEC findet man folgende Beziehungen für die Abschnitte auf der Grundlinie $\overline{AB}$:

$$\overline{AE} = \overline{CE}\cdot\cot\alpha$$
$$\overline{BE} = \overline{CE}\cdot\cot\beta$$
$$\overline{DE} = \overline{CE}\cdot\tan\varphi.$$

Weil $\overline{AD} = \overline{BD}$ ist, gilt $\overline{AE} - \overline{BE} = (\overline{AD} + \overline{DE}) - (\overline{BD} - \overline{DE}) = 2\overline{DE}$.

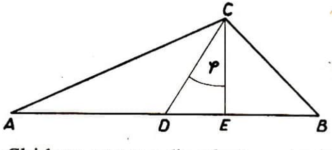


Abb. 72

In diese Gleichung setzt man die gefundenen Ausdrücke ein und erhält

$$\overline{CE}\cot\alpha - \overline{CE}\cot\beta = 2\,\overline{CE}\tan\varphi$$

oder

$$\cot\alpha - \cot\beta = 2\tan\varphi.$$

Lösung: $\tan \varphi = \frac{1}{2} (\cot \alpha - \cot \beta)$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{1}{2} (\cot \alpha - \cot \beta) \right].$$

591. Die gesuchte Fläche A (in Abb. 73 schraffiert) ist gleich dem Dreifachen der Fläche EBH. Nach Voraussetzung ist $\overline{EM} = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{a}{3}$. Im rechtwinkligen Dreieck DEM ist die Kathete $\overline{DM}$ (der Radius des Kreises) gleich $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Folglich ist $\overline{DM} = \overline{EM} \frac{\sqrt{3}}{2}$, d. h. $\sphericalangle DEM = 60°$. Ohne weiteres folgt $\sphericalangle MHG = 60°$. Da der Winkel EBH ebenfalls gleich 60° ist, müssen $\overline{EM}$ und $\overline{BH}$ sowie $\overline{HM}$ und $\overline{BE}$ jeweils zueinander parallel verlaufen. Das Viereck $EBHM$ ist also ein Rhombus mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ und mit dem Winkel 60° an der Ecke M. Man subtrahiert die Fläche des Sektors HME, also $A_{HME} = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{a}{3}\right)^2$, von der Fläche $\left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ des Rhombus und verdreifacht die Differenz.

Lösung: $A = \frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)$.

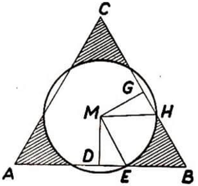


Abb. 73

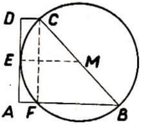


Abb. 74

592. Es soll die Fläche $A = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ (Abb. 74) bestimmt werden.

Der Winkel CFB ist ein rechter (Satz des Thales). Folglich ist $\overline{CD} = \overline{AF}$, so daß $A = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AF}$ gilt.

Auf Grund der Sekanteneigenschaften ergibt sich ferner

$$\overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AE}^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Lösung: $A = \frac{h^2}{8}$.

593. Da $\sphericalangle DCA = \sphericalangle FBC$ (Abb. 75) und $\sphericalangle BCF = \sphericalangle FBC$ sind (die Seitenhalbierende $\overline{CF}$ hat die halbe Länge der Hypotenuse), folgt $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCF$.

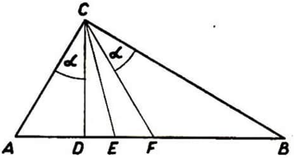


Abb. 75

Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle ECA = \sphericalangle BCE$. Man subtrahiert von dieser Gleichung die vorige und erhält

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCE,$$

d. h. $\overline{CE}$ halbiert den Winkel FCD.

594. Der Durchmesser $2r_u$ des Umkreises ist gleich der Hypotenusenlänge $\overline{AB}$ (Abb. 76). Der Durchmesser $2r_i$ des Inkreises ist gleich $\overline{CE} + \overline{CG}$ (denn $EMGC$ ist ein Quadrat).

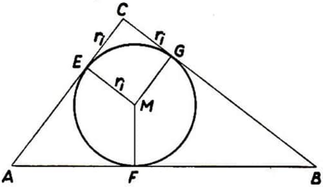


Abb. 76

Danach gilt:

$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{BC} &= (\overline{AE} + \overline{BG}) + (\overline{CE} + \overline{CG})\\ &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + (\overline{CE} + \overline{CG})\\ \overline{AC} + \overline{BC} &= 2r_u + 2r_i,\end{aligned}$$

wie behauptet.

595. Wie in Aufgabe 594 zeigt man, daß $a + b = 2(r_i + r_u)$, d. h.

$$a + b = 2\left(\frac{2}{5}r_u + r_u\right) = \frac{7}{5}c$$

ist.

Außerdem gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Daraus folgt $a = \frac{3}{5}c$, $b = \frac{4}{5}c$ $\left(\text{oder } a = \frac{4}{5}c,\ b = \frac{3}{5}c\right)$.

Lösung: $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$; $\beta = \arcsin\frac{4}{5}$.

596. Man konstruiert (Abb. 77) die Dreiecke MFM_1 und MM_4E (die Punkte F und E sind Seitenmitten des Parallelogramms). Diese Dreiecke sind kongruent, denn $\overline{FM} = \overline{CE}$, und aus der Voraussetzung folgt $\overline{CE} = \overline{EM_4}$. Also ist $\overline{FM} = \overline{EM_4}$.

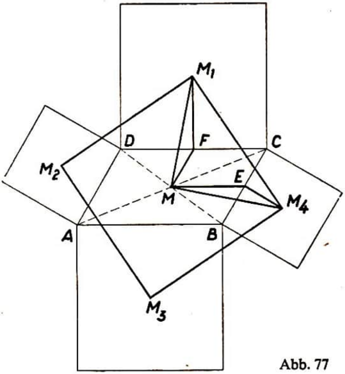


Abb. 77

Ebenso zeigt man, daß $\overline{FM_1} = \overline{EM}$ ist. Die stumpfen Winkel MFM_1 und M_4EM sind gleich, denn ihre Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht. Aus der Kongruenz der Dreiecke MFM_1 und MM_4E folgt, daß $\overline{MM_1} = \overline{MM_4}$ und $\sphericalangle FM_1M = \sphericalangle EMM_4$ sind. Da $\overline{FM_1}$ und $\overline{EM}$ miteinander einen rechten Winkel bilden, müssen $\overline{MM_1}$ und $\overline{MM_4}$ aufeinander senkrecht stehen, d. h., das Dreieck MM_4M_1 ist gleichschenklig-rechtwinklig. Ebenso verhält es sich mit den Dreiecken M_3M_4M, M_2M_3M und M_1M_2M. Daraus folgt, daß das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Quadrat ist.

9. Polyeder

In den Kapiteln 9 und 10 werden folgende Symbole verwendet:

V Volumen
A oder A_G Grundfläche[1]
A_M Mantelfläche[1]
A_n Oberfläche[1]
a Seite der Grundfläche
r_i Radius des Inkreises der Grundfläche[1]
r_u Radius des Umkreises der Grundfläche[1]
h Höhe des Körpers
h_A Höhe der Grundfläche[1]

Wenn gesuchte Größen einmal anders bezeichnet werden sollten, wird das jeweils vermerkt.
Bei Darstellungen räumlicher Gebilde werden die unsichtbaren Kanten und die Hilfslinien durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

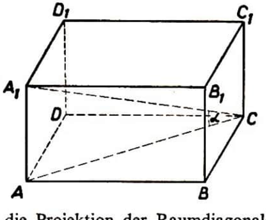


Abb. 78

597. $\overline{AC}$ ist die Projektion der Raumdiagonalen $\overline{A_1C}$ des Parallelepipeds auf die Ebene der Grundfläche $ABCD$ (Abb. 78). Deshalb ist der gegebene Winkel α,

[1] Wenn in einer Aufgabe keine Unterscheidung nötig ist, werden die Symbole ohne Indizes geschrieben.

der zwischen $\overline{A_1C}$ und der Ebene durch $ABCD$ liegt, der Winkel ACA_1. Aus dem Dreieck ACA_1 erhält man

$$\overline{AA_1} = \overline{AC} \cdot \tan\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \tan\alpha.$$

Das wird in die Formel $A_M = (2a + 2b) \cdot \overline{AA_1}$ eingesetzt.

Lösung: $A_M = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \tan\alpha.$

598. In jeder Ecke des Prismas treffen sich drei Raumdiagonalen, so z. B. in A_1 die Diagonalen $\overline{A_1E}$, $\overline{A_1D}$ und $\overline{A_1C}$ (Abb. 79). Ihre senkrechten Parallelprojektionen auf die Ebene $ABCDEF$ sind die Diagonalen der Grundfläche $ABCDEF$: $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$. Von den Strecken $\overline{A_1E}$, $\overline{A_1D}$ und $\overline{A_1C}$ ist diejenige die längste,

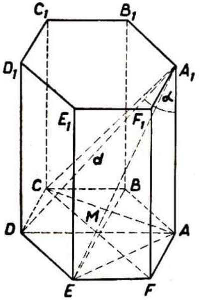


Abb. 79

deren Projektion am größten ist. Folglich ist die Diagonale $\overline{A_1D}$ die längste der gewählten. (Im Prisma existieren weitere Raumdiagonalen, die die gleiche Länge wie $\overline{A_1D}$ besitzen, es gibt aber keine größeren.) Aus dem Dreieck DAA_1 ($\sphericalangle AA_1D = \alpha$, $\overline{A_1D} = d$) erhält man $h = \overline{AA_1} = d\cos\alpha$, $\overline{AD} = d\sin\alpha$. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABM ist $A = \frac{1}{4}\overline{AM}^2 \cdot \sqrt{3}$. Demzufolge ist

$$A_G = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{AM}^2 \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{AD}}{2}\right)^2 \sqrt{3}.$$

Das Volumen ist gleich

$$V = A_G \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \overline{AA_1}.$$

Lösung: $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} d^3 \sin^2\alpha \cos\alpha.$

Bemerkung: Anschauliche Zeichnungen erleichtern oft die Lösung der Aufgaben. Deshalb werden in einer Reihe von Aufgaben Möglichkeiten zur Darstellung räumlicher Gebilde in der Ebene gezeigt. Sie ermöglichen selbst bei Freihandskizzen gute Anschaulichkeit.
Die Darstellungen liegen in Parallelprojektion vor: Die Projektionsrichtung ist beliebig. Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über, während z. B. senkrecht aufeinander stehende Geraden nach der Abbildung (im allgemeinen, d. Übers.) nicht mehr senkrecht aufeinander stehen. Streckenverhältnisse auf einer Geraden bleiben nach der Abbildung unverändert.
Liegen gleich lange Abschnitte auf Geraden vor, die nicht parallel sind, dann gehen sie durch Parallelprojektion in Strecken verschiedener Länge über.
Um die Abbildung des regelmäßigen Sechseckes, der Grundfläche des Prismas, zu konstruieren, braucht man nur ein beliebiges Parallelogramm $BCDM$ zu zeichnen. Verlängert man die Strecken $\overline{DM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{BM}$ über M hinaus um sich selbst bis zu den Endpunkten A, F und E, so erhält man ein Sechseck $ABCDEF$.
Der Punkt M ist das Bild des Mittelpunktes der Figur.

599. a) *Darstellungsverfahren:*
Das Quadrat der Grundfläche wird durch ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ dargestellt (Abb. 80). Der Schnittpunkt M der Diagonalen des Parallelogramms liefert das Bild des Mittelpunktes der Grundfläche. Die Verbindung der Seitenmitte der Seite $\overline{AB}$ mit der Pyramidenspitze E stellt die Seitenhöhe $\overline{EF}$ dar.

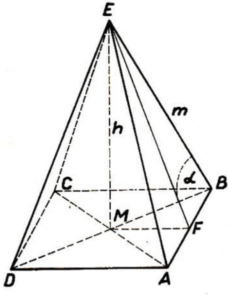


Abb. 80

b) *Lösungsweg:*

Es gilt $V = \frac{1}{3}x^2h$, wobei $x = \overline{AB}$ ist und h die Höhe $\overline{EM}$ der Pyramide darstellt.

Der Winkel α ist der Winkel MBE (s. Lösung der Aufgabe 597). Aus dem Dreieck MBE erhält man $h = m \cdot \sin\alpha$. Das Dreieck ABM liefert

$$x = \overline{BM} \cdot \sqrt{2} = m\sqrt{2}\cos\alpha.$$

Lösung: $V = \frac{2}{3} m^3 \cos^2\alpha \sin\alpha = \frac{m^3 \sin 2\alpha \cos\alpha}{3}.$

600. Wenn man die unbekannte Seitenkante mit m bezeichnet, erhält man wie in der vorigen Aufgabe

$$V = \frac{m^3 \sin 2\alpha \cos\alpha}{3}.$$

Nun wird m bestimmt.

Lösung: $m = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sin 2\alpha \cos\alpha}}.$

601. Es werden folgende Bezeichnungen benutzt (Abb. 80): $\overline{AB} = x$, $\overline{EF} = y$. Dann gilt $A_M = 2xy$. Im rechtwinkligen Dreieck MFE ist $\overline{EM} = h$. Man findet also

$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2.$$

Wird y eliminiert, so erhält man $x^4 + 4h^2x^2 - A_M^2 = 0$. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen, aber nur eine von ihnen ist positiv.

Lösung: $x = \sqrt{\sqrt{4h^4 + A_M^2} - 2h^2}.$

602.[1] Man verbindet die Mitten H und G der Grundkanten $\overline{EF}$ und $\overline{BC}$ miteinander und erhält in $\overline{GH}$ den Inkreisdurchmesser (Abb. 81). Es ist also $\overline{GH} = d$ und $\overline{GM} = \frac{d}{2}$. Weil $\overline{GM}$ die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit $a = \overline{BC} = \overline{CM} = \overline{BM}$ ist, gilt

$$\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d. h.} \quad a = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Die Höhe $h = \overline{MS}$ bestimmt man aus dem Dreieck MCS:

$$h = \sqrt{\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2} = \sqrt{l^2 - a^2} = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{3}},$$

[1] Siehe Bemerkung zur Darstellung einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide in Aufgabe 598!

die Strecke $m = \overline{GS}$ aus dem Dreieck GCS:

$$m = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{12l^2 - d^2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{d^2}{6}\sqrt{3l^2 - d^2}$, $A_M = \dfrac{d}{2}\sqrt{12l^2 - d^2}$.

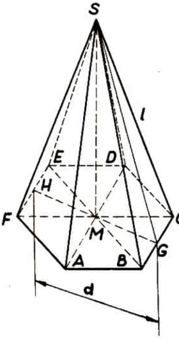


Abb. 81

603. *a) Darstellungsverfahren:*

Als Bild der Grundfläche kann jedes beliebige Dreieck ABC dienen (Abb. 82). Der Mittelpunkt der Grundfläche wird durch den Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden dargestellt.[1]

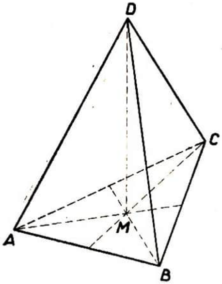


Abb. 82

[1] Anschließend kann man die beiden Seitenhalbierenden, die für die Aufgabe nicht von Bedeutung sind, weglassen. Man behält lediglich M auf AE, wie dies in Abbildung 85 gezeigt wird.

b) Lösungsweg:

Bekannt ist $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 h \sqrt{3}$. Aus dem Dreieck AMD bestimmt man die Beziehung zwischen a und h. Wenn $\overline{AD} = a$ und $\overline{AM}$ der Radius des Umkreises ist, dann gilt $a = r_u \sqrt{3}$.
Folglich ist

$$h^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AM}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3} a^2.$$

Setzt man $a^2 = \frac{3}{2} h^2$ in die Formel für V ein, so erhält man $V = \frac{\sqrt{3}}{8} h^3$.

Lösung: $h = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$.

604. *a) Darstellungsverfahren:*

Zum Unterschied vom Quader, der nur rechteckige Seiten aufweist, hat das gerade Parallelepiped als Grund- und Deckfläche gleiche Parallelogramme, während die Seitenflächen Rechtecke sind.
Wenn wir einen Quader darstellen wollen, sind wir gezwungen, seine Grundfläche als Parallelogramm zu zeichnen (s. Abb. 78, S. 108).
Deshalb unterscheiden sich Quader und gerades Parallelepiped in ihren Darstellungen nicht, was das „Lesen“ der Zeichnungen etwas erschwert.
Man muß also darauf achten, daß der spitze Winkel des Parallelogramms der Grundfläche wirklich als solcher zu erkennen ist. Dazu empfiehlt es sich, den Winkel sehr spitz zu zeichnen und unbedingt zu benennen.

b) Lösungsweg:

Im geraden Parallelepiped sind jeweils zwei Raumdiagonalen gleich lang (es existieren insgesamt vier): $\overline{A_1C} = \overline{AC_1}$ und $\overline{BD_1} = \overline{B_1D}$. ($\overline{AC_1}$ und $\overline{B_1D}$ sind in Abbildung 83 nicht eingezeichnet.)

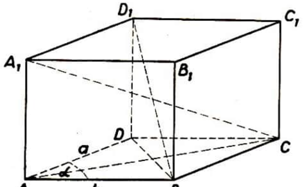


Abb. 83

Der spitze Winkel der Grundfläche sei der Winkel $DAB = \alpha$. Dann ist der Winkel $ABC = 180° - \alpha$ stumpf und $\overline{AC} > \overline{BD}$. Daraus folgt: die kleinere Raumdiagonale ist $\overline{BD_1}$, denn $\overline{BD_1}^2 = h^2 + \overline{BD}^2$. Ebenso ist $\overline{A_1C}^2 = h^2 + \overline{AC}^2$, folglich ist $\overline{BD_1}^2 < \overline{A_1C}^2$. Laut Aufgabenstellung ist $\overline{BD_1} = \overline{AC}$, also kann man h bestimmen. Im Dreieck DBD_1 gilt

$$h^2 = \overline{BD_1}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2.$$

Aus dem Dreieck ABD folgt

$$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

aus dem Dreieck ABC $\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$.
Folglich ist $h^2 = 4ab\cos\alpha$.

Lösung: $V = 2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.

605. Man bezeichnet die größere Seite der Grundfläche ($\overline{AB}$ in Abb. 84) mit a, die kleinere mit b ($\overline{BC}$). Dann gilt nach Voraussetzung $a + b = 9$ cm.

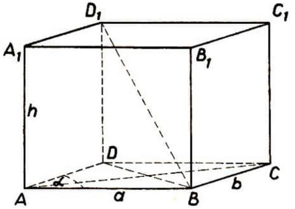


Abb. 84

Um a, b und den spitzen Winkel α zu bestimmen, muß man die Länge der Diagonalen der Grundfläche berechnen. Wie früher schon gezeigt, ist die Diagonale $\overline{BD}$ die senkrechte Projektion der kleineren Raumdiagonalen $[\overline{BD_1} = \sqrt{33}$ cm$]$ auf die Ebene der Grundfläche. Deshalb gilt

$$\overline{BD}^2 = \overline{BD_1}^2 - \overline{DD_1}^2 = (\sqrt{33})^2\,\text{cm}^2 - 4^2\,\text{cm}^2 = 17\,\text{cm}^2.$$

Ebenso findet man $\overline{AC}^2 = 65\,\text{cm}^2$. Daraus folgen zwei Gleichungen:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 17; \quad a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = 65.$$

Es werden beide addiert, und man erhält $a^2 + b^2 = 41\,\text{cm}^2$. Unter Verwendung der Gleichung $a + b = 9$ cm findet man $a = 5$ cm, $b = 4$ cm (man betrachtet a als die größere Seite). Durch Subtraktion erhält man $4ab\cos\alpha = 48$, d. h.,

$$\cos\alpha = \frac{48}{4\cdot 5\cdot 4} = 0{,}6.$$

Folglich ist $A = ab\sin\alpha = 4\cdot 5\cdot 0{,}8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$.

Lösung: $V = 64\,\text{cm}^3$, $A_n = 104\,\text{cm}^2$.

606. *a) Darstellungsverfahren:*

Zur Lage des Punktes M siehe Aufgabe 603 (Abb. 82 auf Seite 112)! Um den gesuchten Winkel zwischen Grund- und Seitenfläche darzustellen, verbindet man die Mitte E der Kante $\overline{BC}$ mit D und A (Abb. 85). Der Punkt E ist das Bild des Halbierungspunktes von $\overline{BC}$. Weil die Dreiecke BCD und ABC in Wirklichkeit gleichschenklig sind, stehen $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$ auf $\overline{BC}$ senkrecht. Es ist also $\alpha = \sphericalangle AED$ der gesuchte Winkel. Die Höhe $\overline{DM} = h$ liegt in der Ebene AED.

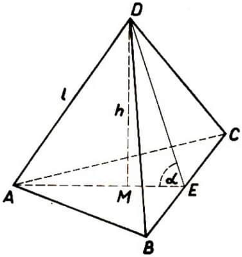


Abb. 85

b) Lösungsweg:

Es gilt $\tan\alpha = \dfrac{\overline{DM}}{\overline{EM}}$, wobei $\overline{DM} = h$ und $\overline{EM} = \dfrac{1}{2}\overline{AM}$ sind, denn die Seitenhalbierenden teilen einander im Verhältnis 1 : 2.

Die Strecke $\overline{AM}$ wird aus dem Dreieck AMD bestimmt ($\overline{AD} = l$).

Lösung: $\alpha = \arctan \dfrac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$.

607. Es ist $\alpha = \sphericalangle MBE$ (Abb. 86), weil $\overline{BM}$ die senkrechte Projektion der Kante $\overline{BE}$ auf die Ebene der Grundfläche darstellt. Um den Winkel φ zwischen den Ebenen der Grund- und Seitenfläche zu veranschaulichen, verbindet man den Halbierungspunkt F der Kante $\overline{AB}$ mit M und E (s. Bemerkung zur Aufgabe 606).

Weil $A_G = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$ ist, kann man das Volumen mit Hilfe von $h = \overline{EM}$ und $d = \overline{BD}$ bestimmen. Im Dreieck MBE gilt $h = \dfrac{d}{2}\tan\alpha$ und nach Voraussetzung $\dfrac{d}{2}h = A_S$. Multipliziert und dividiert man beide Gleichungen mit- bzw. durcheinander, so erhält man

$$h^2 = A_S \tan\alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = A_S \cot\alpha.$$

Folglich ist $V = \frac{1}{3} A_S \cdot h = \frac{2}{3} A_S^{\frac{3}{2}} \cot^{\frac{1}{2}} \alpha$.

Den Winkel φ bestimmt man im Dreieck MFE. Hier ist

$$\overline{MF} = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

und

$$\tan \varphi = \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = h : \frac{d}{2\sqrt{2}} = \sqrt{A_S \tan \alpha} : \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_S \cot \alpha} = \tan \alpha \cdot \sqrt{2}.$$

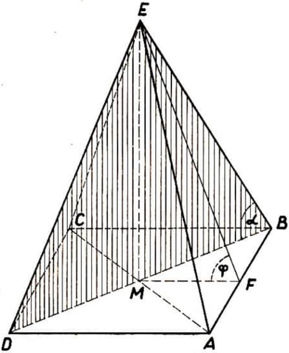


Abb. 86

Lösung: $V = \frac{2}{3} A_S^{\frac{3}{2}} \cot^{\frac{1}{2}} \alpha$; $\tan \varphi = \sqrt{2} \cdot \tan \alpha$.

608. *a) Darstellungsverfahren:*

Die Grundfläche der Pyramide ist ein regelmäßiges Fünfeck, denn aus der Gleichung $180° \, (n - 2) = 540°$ folgt $n = 5$. Im regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ (Abb. 87a) teilt jede Diagonale (z. B. $\overline{AD}$) die andere (z. B. $\overline{BE}$) innen in einem konstanten Verhältnis.

So ist z. B. $\overline{DN} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \overline{AD} \approx 0{,}6 \, \overline{AD}$ (genauer: $0{,}61803 \ldots \cdot \overline{AD}$). Außerdem läuft eine Diagonale parallel zu jeweils einer Fünfeckseite (z. B. $\overline{AD} \parallel \overline{DC}$). Der Mittelpunkt M liegt im Schnittpunkt der Strecken $\overline{EL}$ und $\overline{CN}$. Deshalb ist es möglich, die Grundfläche der Pyramide wie folgt darzustellen: Man zeichnet ein beliebiges Dreieck ABD (Abb. 87b). Dann teilt man die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ durch die Punkte L und N in Teilstrecken, die sich wie $\overline{AN} : \overline{DN} = 2 : 3$ verhalten (Näherungskonstruktion, d. Übers.).

Dazu teilt man eine Seite und konstruiert $\overline{LN} \parallel \overline{AB}$. Ebenso wird $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ bis zum Schnittpunkt mit der über N verlängerten Strecke $\overline{BN}$ konstruiert. Analog findet man C. Das Bild des Mittelpunktes M liegt im Schnittpunkt von $\overline{CN}$ und $\overline{EL}$.

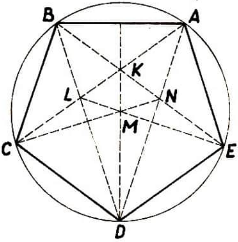


Abb. 87a

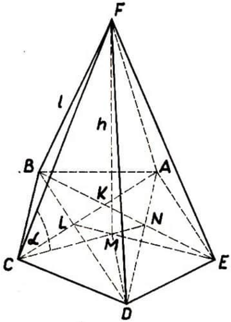


Abb. 87b

b) Lösungsweg:
Aus dem Dreieck CMF (es sind $\sphericalangle FCM = \alpha$ und $\overline{CF} = l$) bestimmt man

$$h = \overline{FM} = l \sin \alpha, \quad \overline{CM} = l \cos \alpha.$$

Die Grundfläche ist

$$A = 5 \cdot \frac{1}{2} \overline{CM} \cdot \overline{DM} \cdot \sin \sphericalangle DMC = \frac{5}{2} \overline{CM}^2 \cdot \sin 72^\circ$$

$$A = \frac{5}{2} l^2 \cos^2 \alpha \sin 72^\circ.$$

Lösung: $V = \frac{1}{3} Ah = \frac{5}{6} l^3 \sin 72^\circ \cos^2 \alpha \sin \alpha.$

609.[1] Um den Winkel α zu bestimmen, betrachtet man das Dreieck CMF (Abb. 88). Hier ist $\overline{CF} = \overline{BC} = a$, denn nach Voraussetzung ist das Dreieck BCF gleichseitig. Die Strecke $\overline{CM}$ (der Radius des Umkreises) kann durch a im Dreieck CMU ausgedrückt werden. Es sind $\sphericalangle CMU = 36^\circ$ und $\overline{CU} = \frac{a}{2}$. Also gilt

$$\overline{CM} = \frac{a}{2 \sin 36^\circ}, \text{ so daß } \cos \alpha = \frac{\overline{CM}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2 \sin 36^\circ} \text{ ist.}$$

Den Winkel φ bestimmt man aus dem Dreieck UMF, wobei $\overline{FU} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist (Höhe eines gleichseitigen Dreiecks!).

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide s. vorige Aufgabe!

Ferner gilt $\overline{MU} = \dfrac{a \cot 36^\circ}{2}$ (s. Dreieck CMU).

Es gilt dann $\cos\varphi = \dfrac{\overline{MU}}{\overline{FU}} = \dfrac{a \cot 36^\circ}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\cot 36^\circ}{\sqrt{3}}$.

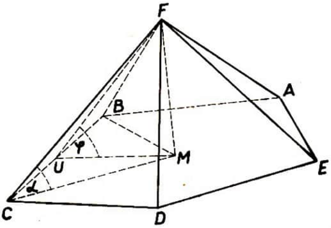


Abb. 88

Lösung: $\alpha = \arccos \dfrac{1}{2 \sin 36^\circ}$; $\varphi = \arccos \dfrac{\cot 36^\circ}{\sqrt{3}}$.

610. Es gelte (s. Abb. 88) $\overline{BC} = a$ und $\overline{MU} = \dfrac{a}{2} \cot \dfrac{180^\circ}{n}$.
Die Grundfläche ist dann

$$A_G = \frac{n \cdot a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{180^\circ}{n} = \frac{na^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

Die Beziehung $V = \dfrac{1}{3} A_G \cdot h$ liefert $h = \dfrac{3V}{A_G} = \dfrac{12V}{na^2} \tan \dfrac{180^\circ}{n}$.

Den Winkel FCM bezeichnet man mit α.

Dann gilt $\tan\alpha = \dfrac{h}{\overline{CM}}$, wobei $\overline{CM} = \dfrac{a}{2 \sin \dfrac{180^\circ}{n}}$ ist.

$$\textit{Lösung:}\ \alpha = \arctan \frac{24V \sin \dfrac{180^\circ}{n} \tan \dfrac{180^\circ}{n}}{na^3}.$$

Vorbemerkung zur Aufgabe 611 und zu den folgenden Aufgaben:
Wenn alle Seitenkanten einer Pyramide mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden, dann gilt:

1. Alle Seitenkanten sind gleich lang.
2. Um die Grundfläche läßt sich ein Umkreis konstruieren.
3. Die Höhe der Pyramide hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Umkreises.

Nachweis: Es mögen $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ usw. (Abb. 89) mit der Ebene $ABCDE$ gleiche Winkel bilden. Dann betrachtet man die rechtwinkligen Dreiecke AMS und MBS ($\overline{MS}$ ist die Höhe der Pyramide). Da in beiden Dreiecken die Höhen und die spitzen Winkel SAM und MBS gleich sind (alle Kanten sollen mit der Grundfläche gleiche Winkel einschließen), ist $\overline{BS} = \overline{AS}$. Ebenso zeigt man, daß $\overline{BS} = \overline{CS}$ ist usw.
Aus den kongruenten Dreiecken SAM und MBS folgt auch $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ usw., d. h., auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt in M und mit dem Radius $\overline{AM}$ liegen die Punkte B, C usw.

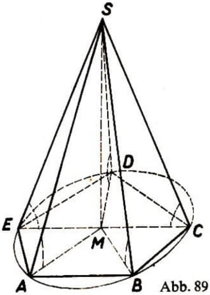


Abb. 89

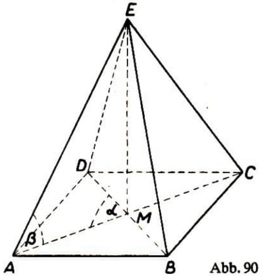


Abb. 90

611. Wie gezeigt, liegt der Fußpunkt der Höhe $\overline{EM}$ im Mittelpunkt des Umkreises, d. h. im Schnittpunkt M der Diagonalen (Abb. 90). Die Fläche eines Parallelogramms errechnet sich aus dem halben Produkt der Diagonalen und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels:

$$A = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha .$$

Aus dem Dreieck AME erhält man

$$h = \overline{AM} \cdot \tan\beta = \frac{b}{2} \tan\beta .$$

Lösung: $V = \dfrac{1}{12} b^3 \sin\alpha \tan\beta .$

612. *a) Darstellungsverfahren:*
Die Höhe der Pyramide muß (s. Vorbemerkung zur Aufgabe 611) ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Umkreises des gleichschenkligen Dreiecks ABC haben (Abb. 91). Da der Winkel $\alpha = \sphericalangle CAB$ beliebig gewählt werden kann,

stellt man den Mittelpunkt M durch einen beliebigen Punkt M auf der Strecke $\overline{AE}$ dar (E ist der Halbierungspunkt von $\overline{BC}$). Man kann sogar M auf der Verlängerung von $\overline{AE}$ festlegen. (In diesem Falle wäre der Winkel α in Wirklichkeit stumpf.)

b) Lösungsweg:
Die Höhe $\overline{DM}$ der Pyramide bestimmt man aus dem Dreieck AMD. Hier ist $\sphericalangle DAM = \beta$ und $\overline{AM} = r$ der Radius des Umkreises. Nach dem Sinussatz ist die Länge der Seite $\overline{BC}$ gleich dem Produkt aus der Länge des Umkreisdurchmessers $2r$ und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels α. Es gilt also

$$r = \frac{\overline{BC}}{2 \sin \alpha}.$$

Die Größe von $\dfrac{\overline{BC}}{2} = \overline{BE}$ bestimmt man im Dreieck ABE $\left(\dfrac{\overline{BC}}{2} = a \sin \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Folglich ist

$$h = r \tan \beta = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta}{\sin \alpha}$$

und damit $A = \dfrac{1}{2} a^2 \sin \alpha$.

Lösung: $V = \dfrac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta}{6}$.

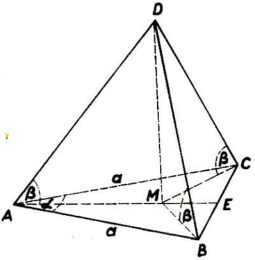


Abb. 91

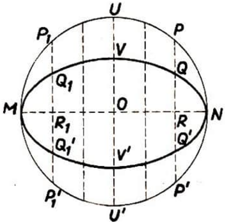


Abb. 92

613. *a) Darstellungsverfahren:*
Die Parallelprojektion eines Kreises auf eine Ebene ist (im allgemeinen) eine Ellipse. Die Ellipse wird wie folgt konstruiert: In einem Kreis legt man einen Durchmesser $\overline{MN}$ fest (Abb. 92). Von einem beliebigen Punkt P auf der

Peripherie des Kreises wird das Lot $\overline{PP'}$ auf den Durchmesser $\overline{MN}$ gefällt. Der Punkt R sei der Schnittpunkt von $\overline{PP'}$ und $\overline{MN}$. Man verkürzt die Strecke $\overline{PR}$ in einem beliebigen Verhältnis (z. B. 2 :1) und trägt die verkürzte Strecke $\overline{QR}$ auf der Strecke $\overline{PP'}$ von R aus naoh beiden Seiten ab ($\overline{QR} = \overline{Q'R}$). So erhält man punktweise die Ellipse.

Die Ellipse ist symmetrisch zur Strecke $\overline{MN}$ (der *großen* oder *Hauptachse* der Ellipse) und zur Strecke $\overline{UU'}$ (diese steht in O senkrecht auf $\overline{MN}$). Die Strecke $\overline{VV'}$ ist die *kleine* oder die *Nebenachse* der Ellipse. Der Punkt O ist der Mittelpunkt der Ellipse.

Um den Kreis, der einem Rechteck umbeschrieben ist, darzustellen, ist es bequemer, erst die Ellipse $ABCD$, d. h. das Bild des Umkreises, zu konstruieren (Abb. 93). Dazu ordnet man die Hauptachse schräg an.[1]

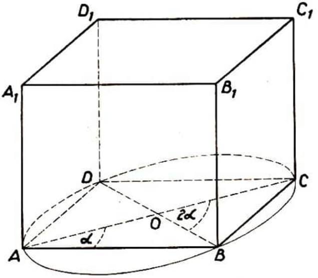


Abb. 93

Eine Seite des Rechteckes kann durch eine beliebige Sehne $\overline{AB}$ in der Ellipse dargestellt werden. Diese Sehne zeichnet man zweckmäßigerweise waagerecht. Im Mittelpunkt O der Ellipse schneiden einander die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$. Das Viereck $ABCD$ ist das Bild des Rechtecks.

b) Lösungsweg:

Der Peripheriewinkel CAB ist gleich α, denn der zu $\overline{BC}$ gehörige Zentriwinkel ist gleich 2α. Aus dem Dreieck ABC erhält man

$$\overline{AB} = 2r \cos \alpha, \quad \overline{BC} = 2r \sin \alpha$$

und damit $A = 2(\overline{AB} + \overline{BC})\, h = 4r(\cos \alpha + \sin \alpha)\, h$.

$$h = \frac{A}{4r(\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

[1] In Abbildung 93 ist die große Achse der Ellipse als Diagonale $\overline{AC}$ des Rechteckes angenommen. Das vereinfacht die Abbildung, ist aber nicht unbedingt erforderlich.

Nun berechnet man $V = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot h$.
Die Voraussetzung, daß der Zentriwinkel 2α zur kleineren Seite des Rechteckes gehöre, ist überflüssig.

Lösung: $V = \dfrac{A\, r \cos\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{A\, r \sin 2\alpha}{\sqrt{8}\cos(45^\circ - \alpha)}$.

614. Die Grundfläche ist $A = \frac{1}{4} a^2 \tan\beta$ (Abb. 94). Nach Voraussetzung ist

$$A_M = 2A = \frac{1}{2} a^2 \tan\beta.$$

Andererseits gilt

$$A_M = \left(a + 2\frac{\frac{a}{2}}{\cos\beta}\right) h = \frac{2a\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta} h.$$

Man setzt die beiden Ausdrücke für A_M einander gleich und erhält

$$h = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{a}{2}\tan\frac{\beta}{2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{a^3}{8}\tan\beta\tan\dfrac{\beta}{2}$.

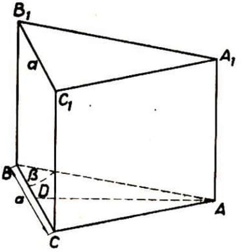


Abb. 94

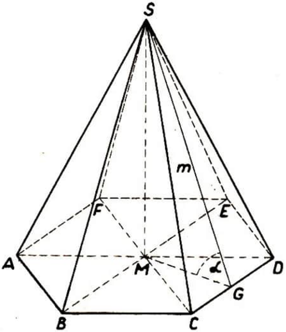


Abb. 95

615.[1] Man verbindet den Halbierungspunkt G der Seite $\overline{CD}$ mit M und S (Abb. 95). Der Winkel $SGM = \alpha$ ist derjenige Winkel, den die Ebene der Seitenfläche

[1] Zur Darstellung eines regelmäßigen Sechseckes in Parallelprojektion s. S. 109, Vorbemerkung zur Aufgabe 598.

mit der Ebene der Grundfläche einschließt (s. Bemerkungen zur Lösung der Aufgabe 606).
Folglich ist

$$\overline{GM} = \overline{GS} \cos \alpha = m \cdot \cos \alpha.$$

Aus dem Dreieck CGM ($\sphericalangle GMC = 30°$) bestimmt man

$$\overline{CG} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \alpha.$$

Weiter erhält man

$$A_G = 6 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3} \quad \text{und} \quad A_M = 6 \frac{a}{2} m.$$

Man setzt für $\frac{a}{2}$ den gefundenen Ausdruck ein und erhält

$$A_n = A_G + A_M = 2\sqrt{3}\, m^2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Lösung: $A_n = 4\sqrt{3}\, m^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

616. Nach Voraussetzung sind die in der Skizze verkürzten Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ einander gleich (Abb. 96), d. h., auch ihre Projektionen sind gleich: $\overline{AD} = \overline{BD}$. Der Winkel CFD (F ist die Seitenmitte von $\overline{AB}$) ist der Winkel zwischen den Ebenen E und ABC. Da das Dreieck ABC in C rechtwinklig ist, folgt

$$\overline{CF} = \overline{AF} = \frac{c}{2}.$$

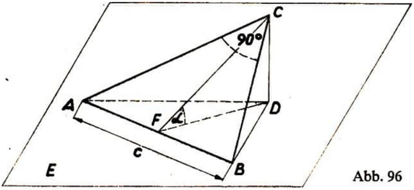


Abb. 96

Demnach ist $\overline{DF} = \frac{c}{2} \cos \alpha$.
Schließlich gilt noch $\overline{AD} = \overline{BD} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{DF}^2} = \frac{c}{2}\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$.

Lösung: $A_{ABD} = \dfrac{c^2 \cos\alpha}{4}$, $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} = c(1 + \sqrt{1 + \cos^2\alpha})$.

Vorbemerkung zur Aufgabe 617 und zu den folgenden Aufgaben:

Wenn alle Seitenflächen der Pyramide mit der Grundfläche den gleichen Winkel α einschließen und wenn die Höhe ihren Fußpunkt in irgendeinem Punkt O der Grundfläche hat, dann gilt:

1. Die Höhen aller Seitenflächen sind gleich lang.
2. In die Grundfläche der Pyramide läßt sich ein Kreis einbeschreiben, dessen Mittelpunkt O ist.
3. $A_G = A_M \cdot \cos\alpha$.

Nachweis:

1. (Abb. 97.) Man zeichnet die Höhe $\overline{FM}$ der Seitenfläche BCF ein und verbindet M mit O. Die Strecke $\overline{MO}$ ist die Projektion von $\overline{FM}$ auf die Ebene $ABCDE$. Folglich steht $\overline{MO}$ senkrecht auf $\overline{BC}$, d. h., der Winkel $OMF = \alpha$ gibt die Größe des Winkels an, den die Seitenflächen mit der Grundfläche einschließen. Im Dreieck OMF gilt

$$\overline{FM} = \frac{\overline{FO}}{\sin\alpha}; \quad \overline{MO} = \overline{FO} \cdot \cot\alpha.$$

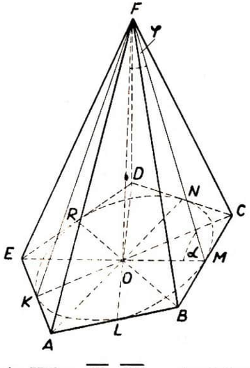


Abb. 97

Alle weiteren Höhen $\overline{FL}$, $\overline{FN}$, ... der Seitenflächen sind, wie man ebenso beweist, gleich

$$\frac{\overline{FO}}{\sin\alpha}.$$

2. Die Strecken $\overline{LO}$, $\overline{MO}$ usw. stehen jeweils auf den entsprechenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ usw. senkrecht, und jede hat die Länge

$$\overline{FO} \cdot \cot \alpha .$$

Deshalb läßt sich um O ein Kreis mit dem Radius $\overline{MO}$ konstruieren, der der Inkreis der Grundfläche $ABCDE$ ist.

3. Der Punkt O (Fußpunkt der Höhe der Pyramide) ist Mittelpunkt dieses Inkreises.

4. $A_{BCO} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{MO} = \frac{1}{2} \overline{BC}(\overline{FM} \cos \alpha)$

$$A_{BCO} = \left(\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{FM}\right) \cos \alpha = A_{BCF} \cdot \cos \alpha .$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $A_{ABO} = A_{ABF} \cos \alpha$ ist usw.
Durch Summation findet man $A_G = A_M \cos \alpha$.

617. Die Höhe $\overline{FM}$ des Dreiecks BCF (Abb. 97) ist die Projektion der Höhe $\overline{FO}$ der Pyramide auf diese Seitenfläche. Deshalb ist $\sphericalangle MFO = \varphi$. Weiter folgt: $\alpha = 90° - \varphi$, d. h., alle Seitenflächen schließen mit der Grundfläche den gleichen Winkel ein.
Es wurde gezeigt, daß $A_M = \dfrac{A_G}{\cos \alpha} = \dfrac{A_G}{\sin \varphi}$ gilt.

Lösung: $A_M = \dfrac{A_G}{\sin \varphi}$.

$$A_n = A_G\left(1 + \frac{1}{\sin \varphi}\right) = \frac{2A_G \cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \varphi}.$$

618. Aus dem Dreieck OED findet man (Abb. 98[1]):

$$h = \overline{EO} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{3} \cdot \overline{CE} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha .$$

Es gelten dann folgende Beziehungen:

$$A_G = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \quad \text{und} \quad A_M = \frac{A_G}{\cos \alpha}.$$

(Vergleichen Sie auch mit den Vorbemerkungen zur vorigen Aufgabe!)

Lösung: $V = \dfrac{a^3 \tan \alpha}{24}$; $\quad A_n = \dfrac{a^2 \sqrt{3}\,(1 + \cos \alpha)}{4 \cos \alpha} = \dfrac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}$.

[1] Vergleichen Sie mit der Darstellung in Abbildung 82 auf Seite 112!

Bemerkung: Ein geschlossener Ausdruck für die Oberfläche einer Pyramide, deren Seitenflächen mit der Grundfläche gleiche Winkel einschließen, läßt sich in der Form

$$A_n = A_G + A_M = A_G\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{2A_G \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

angeben.

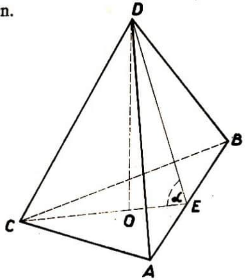


Abb. 98

619. Es wird die Beziehung

$$A_n = \frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}$$

benutzt, die in Aufgabe 618 gefunden wurde.

Lösung: $a = \dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{2A_n\cos\alpha}{\sqrt{3}}}$.

620. a) *Darstellungsverfahren:*

Die Strecke $\overline{LN}$, die die Berührungspunkte L und N auf den gegenüberliegenden Seiten des Rhombus (Abb. 99a) miteinander verbindet, geht durch den Mittelpunkt des Inkreises. Man zeichnet deshalb zuerst die Ellipse (Abb. 99b), die das Bild des Inkreises darstellt[1], dann legt man durch ihren Mittelpunkt O zwei Strecken $\overline{LN}$ und $\overline{KM}$. Durch die Endpunkte dieser Strecken (sie liegen auf der Ellipse) werden Tangenten an die Ellipse gelegt. Man erhält das Parallelogramm $ABCD$, das Bild des Rhombus.

b) *Lösungsweg:*

Zur Berechnung der Grundfläche benötigt man die Höhe $\overline{DF}$ und die Seite $\overline{AB}$ des Rhombus. In Abbildung 99a erkennt man, daß $\overline{DF} = 2\overline{KO} = 2r$ ist. Im

[1] Zur Ellipsenkonstruktion vergleichen Sie mit der Lösung der Aufgabe 613!

Dreieck AFD ($\sphericalangle DAF = \alpha$) gilt

$$a = \overline{AD} = \frac{\overline{DF}}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

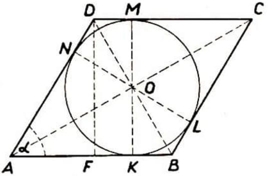


Abb. 99a

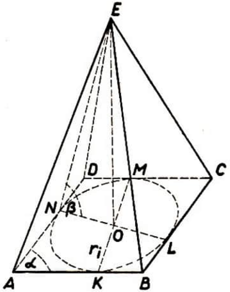


Abb. 99b

Weiterhin erhält man

$$A_G = \overline{AB} \cdot \overline{DF} = a \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Im Dreieck NOE (Abb. 99b), in dem $\overline{NO} = r$ und $\sphericalangle ENO = \beta$ ist, bestimmt man h. Zur Bestimmung von A_n verwendet man die Beziehung aus der vorigen Aufgabe.

Lösung: $V = \dfrac{4r^3 \tan\beta}{3 \sin\alpha}$; $A_n = \dfrac{8r^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin\alpha \cos\beta}$.

621. Es werden die Hinweise zur Lösung der Aufgabe 618 ausgewertet.

Lösung: $\varphi = \arccos \dfrac{A_G}{A_M}$.

622. a) *Darstellungsverfahren:*[1]
Die Schnittfläche A_S ist das Parallelogramm A_1BCD_1 (Abb. 100). Um den Winkel zwischen ihr und der Grundfläche darzustellen, zeichnet man das Bild der Höhe des Rhombus $ABCD$, die Strecke $\overline{DM}$, ein. Da in Wirklichkeit die Strecken $\overline{DM}$ und $\overline{DD_1}$ auf der Kante $\overline{AD}$ senkrecht stehen, muß die Ebene $DMND_1$ ebenfalls auf $\overline{AD}$ (und damit auf $\overline{BC}$) senkrecht stehen. Diese Ebene schneidet die Schnittfläche in der Strecke $\overline{D_1M}$, so daß also $\sphericalangle DMD_1 = \beta$ ist.

b) *Lösungsweg:*
Die Mantelfläche ist die Summe der Flächen von vier gleichen Rechtecken (die Grundfläche ist ein Rhombus!).

[1] Siehe Seite 113, Aufgabe 604: Darstellung eines geraden Parallelepipeds!

Die Seitenfläche ADD_1A_1 berechnet sich aus $A_K = \overline{A_1D_1} \cdot \overline{DD_1}$, die Schnittfläche ist gleich

$$A_S = \overline{A_1D_1} \cdot \overline{D_1M}.$$

Im Dreieck DMD_1 gilt $\overline{DD_1} = \overline{D_1M} \cdot \sin\beta$.

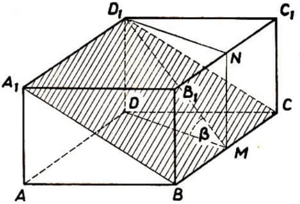


Abb. 100

Es ist also $A_K = A_S \sin\beta$.

Lösung: $A_M = 4A_S \sin\beta$.

623. Man beachte die Vorbemerkungen zur Aufgabe 617. Nach Voraussetzung ist $\overline{EM} = d$ (Abb. 101). Der Punkt E ist Halbierungspunkt der Hypotenuse $\overline{DF}$ des Dreiecks FMD und damit Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks FMD.

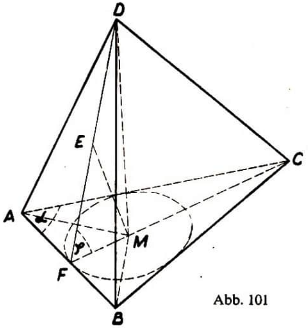


Abb. 101

Deshalb ist $\overline{DF} = 2\overline{DE} = 2\overline{EM} = 2d$. Im Dreieck FMD bestimmt man ferner den Radius $\overline{FM} = r$ des Kreises, der der Grundfläche einbeschrieben ist: $r = 2d\cos\varphi$, wobei $\varphi = \sphericalangle DFM$ ist. Zur Berechnung der Pyramidengrundfläche benötigt man $\overline{AF}$ (die halbe Basislänge des gleichschenkligen Dreiecks ABC) und die zugehörige Höhe $\overline{CF}$.

Der Mittelpunkt M des Inkreises liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels CAB, d. h. $\sphericalangle MAF = \frac{\alpha}{2}$.

Aus dem Dreieck AFM erhält man $\overline{AF} = r \cot \frac{\alpha}{2}$.

Aus dem Dreieck AFC erhält man $\overline{CF} = \overline{AF} \cdot \tan \alpha$. Folglich ist

$$A_G = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \overline{AF} \cdot \overline{CF} = \overline{AF}^2 \cdot \tan \alpha$$

$$A_G = r^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha = 4d^2 \cos^2 \varphi \cot^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha .$$

Hieraus (s. Bemerkungen zur Aufgabe 618) folgt

$$A_n = \frac{2A_G \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Lösung: $A_n = 8d^2 \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cot^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha .$

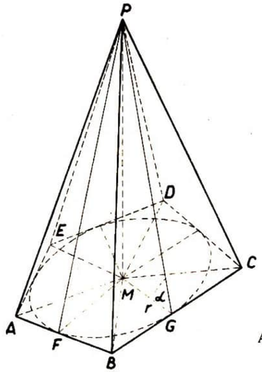


Abb. 102

624. Man beachte die Vorbemerkung zur Aufgabe 617[1].
Die Höhe der Pyramide bestimmt man mit Hilfe des Dreiecks MGP (Abb. 102): $h = r \tan \alpha$.

[1] Konstruktion einer Ellipse (Darstellung des Inkreises einer Grundfläche) siehe Seite 120 (Aufgabe 613)!

Wenn $a_1, a_2, \ldots$ die Seiten der Grundfläche sind, so ist

$$A_G = A_{ABM} + A_{BCM} + \ldots = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{FM} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{GM} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}a_1 r + \frac{1}{2}a_2 r + \ldots$$

$$A_G = \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \ldots) = \frac{1}{2}r \cdot 2s = r \cdot s.$$

Lösung: $V = \dfrac{r^2 s \tan\alpha}{3}$.

625. a) *Darstellungsverfahren:*
Man zeichnet das Bild einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Abb. 103)[1] und konstruiert das Dreieck $A_1B_1C_1$ so hinein, daß seine Seiten parallel zu den entsprechenden Seiten der Grundfläche ABC verlaufen und daß seine Eckpunkte auf den Bildern der Kanten der Pyramide liegen. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ stellt die Deckfläche des Pyramidenstumpfes dar. Das Bild des

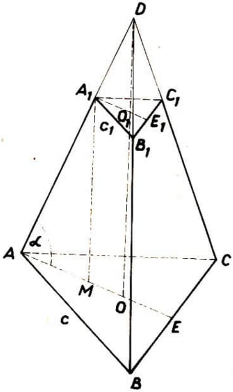


Abb. 103

Mittelpunktes O_1 der Deckfläche liegt im Schnittpunkt der Strecke $\overline{DO}$ mit einer der Seitenhalbierenden (z. B. $\overline{A_1E_1}$) des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Die Strecke $\overline{A_1M}$ ist eine Parallele zu $\overline{OO_1}$ und schneidet die Seitenhalbierende $\overline{AE}$ des Dreiecks ABC

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide s. S. 112 (Abb. 82).

im Punkt M. Die Strecke $\overline{A_1M}$ stellt das Lot vom Punkt A_1 auf die Grundfläche der Pyramide dar.

b) *Lösungsweg:*

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes berechnet sich aus

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2}),$$

wobei A_1 und A_2 die Inhalte der Grundfläche bzw. der Deckfläche, im vorliegenden Fall der Dreieckflächen ABC bzw. $A_1B_1C_1$ sind.
Für die Grundfläche und die Deckfläche erhält man in dieser Aufgabe

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \quad \text{bzw.} \quad A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c_1^2.$$

Die Höhe $h = \overline{A_1M}$ bestimmt man aus dem Dreieck AMA_1, wobei $\sphericalangle A_1AM = \alpha$ und $\overline{AM} = \overline{AO} - \overline{A_1O_1}$ sind. Die Strecken $\overline{AO}$ und $\overline{A_1O_1}$ sind die Radien der Umkreise der Dreiecke ABC bzw. $A_1B_1C_1$.
Deshalb gilt

$$\overline{AO} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \overline{A_1O_1} = \frac{c_1}{\sqrt{3}},$$

das heißt

$$\overline{AM} = \frac{c - c_1}{\sqrt{3}}.$$

Folglich ist

$$h = \frac{c - c_1}{\sqrt{3}} \tan \alpha.$$

Lösung: $V = \frac{1}{12}(c^3 - c_1^3) \tan \alpha.$

626. a) *Darstellungsverfahren:*

Der Pyramidenstumpf wird wie in der vorangegangenen Aufgabe dargestellt. Um den Winkel zu veranschaulichen, den die Seitenflächen mit der Grundfläche einschließen, zeichnet man $\overline{A_1E}$ und $\overline{B_1F}$ (Abb. 104) parallel zu $\overline{MM_1}$ bis zum Schnittpunkt mit den Flächendiagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Dann zeichnet man durch E und F eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade. Diese schneidet $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in G bzw. H. Die Ebene GHB_1A_1 steht senkrecht auf $\overline{AD}$, denn in ihr liegen die Strecken $\overline{A_1E}$ und $\overline{GH}$, die beide zu $\overline{AD}$ senkrecht verlaufen. Folglich ist $\sphericalangle A_1GE = \varphi$ der gesuchte Winkel.

b) *Lösungsweg:*

Aus dem Trapez GHB_1A_1 erhält man $\overline{EG} = \frac{a-b}{2}$.

Die Höhe des Pyramidenstumpfes bestimmt man im Dreieck AEA_1. Hier gilt

$$\overline{AE} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Dann ist

$$h = \overline{A_1E} = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \tan\alpha.$$

Das Volumen berechnet man nach der Formel

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

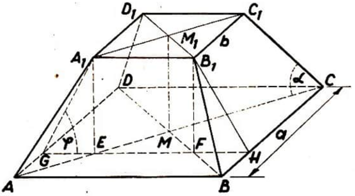


Abb. 104

Den gesuchten Winkel $\varphi = \sphericalangle A_1GE$ bestimmt man im Dreieck GEA_1, wobei

$$\overline{EG} = \frac{a-b}{2}$$

ist.

Damit gilt

$$\tan\varphi = \frac{\overline{A_1E}}{\overline{EG}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \tan\alpha : \frac{a-b}{2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{(a^3 - b^3)\tan\alpha}{3\sqrt{2}}$; $\quad \varphi = \arctan(\sqrt{2}\tan\alpha)$.

627. Siehe Vorbemerkung zur Aufgabe 611 auf Seite 118!
Die Höhe der Pyramide muß ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche haben. Im rechtwinkligen Dreieck ABC (Abb. 105) liegt aber dieser Mittelpunkt auf der Seitenmitte der Hypotenuse $\overline{AC}$ im Punkt E. Folglich sind $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$ Projektionen der Seitenkanten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ auf die Ebene der Grundfläche, so daß $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DCE = \beta$ gilt. Das Volumen

der Pyramide bestimmt man nach der Formel

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}\,\overline{DE}.$$

Im Dreieck ABC ist $\overline{AB} = b \cdot \cos\alpha$, $\overline{BC} = b \cdot \sin\alpha$, im Dreieck AED ist $\overline{DE} = \frac{b}{2}\tan\beta$.

Die Winkel an der Spitze bezeichnet man folgendermaßen:

$$\sphericalangle CDA = \theta_1, \quad \sphericalangle CDB = \theta_2, \quad \sphericalangle BDA = \theta_3.$$

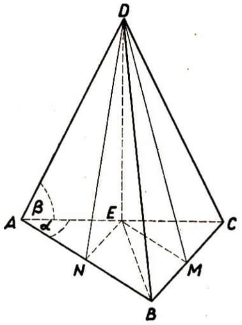


Abb. 105

Die Dreiecke ABD, BCD und ACD sind gleichschenklig. Die Höhen dieser Seitenflächen haben also ihre Fußpunkte in den Seitenmitten des Grundflächendreiecks. Aus Dreieck ACD folgt $\theta_1 = 180° - 2\beta$.
Im Dreieck BCD gilt

$$\sin\frac{\theta_2}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}$$

und im Dreieck ABD

$$\sin\frac{\theta_3}{2} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AD}}.$$

Man erhält ferner (Dreieck AED)

$$\overline{AD} = \overline{CD} = \frac{b}{2\cos\beta}$$

und (Dreieck ABC)

$$\overline{CM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{b}{2}\sin\alpha; \quad \overline{AN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{b}{2}\cos\alpha.$$

Lösung: $V = \dfrac{b^3 \sin 2\alpha \tan\beta}{24};$

$$\theta_1 = 180° - 2\beta;$$

$$\theta_2 = 2\arcsin(\sin\alpha\cos\beta);$$

$$\theta_3 = 2\arcsin(\cos\alpha\cos\beta).$$

628. Es ist das Volumen der Pyramide $ABCC_1$ zu bestimmen (Abb. 106). Da die Seitenkanten dieses Körpers untereinander gleich sind, müssen sie mit der Grundflächenebene gleiche Winkel einschließen. (Die Umkehrung dieses Satzes wurde in den Vorbemerkungen zur Aufgabe 611 auf Seite 118 gezeigt). Die Körperhöhe $\overline{C_1O}$ hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt O des Umkreises der

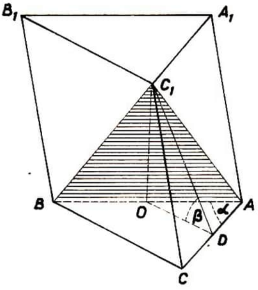


Abb. 106

Grundfläche ABC. Der Punkt O liegt auf dem Halbierungspunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$, da das Dreieck ABC rechtwinklig ist. (Vgl. Sie mit der Bemerkung zur vorigen Aufgabe!) Der Winkel ODC_1 (D ist die Mitte der Kathete $\overline{AC}$) stellt den Winkel, den die Seitenfläche CAA_1C_1 mit der Grundfläche bildet, dar. Die Längen der Katheten bestimmt man mit Hilfe der Gleichungen

$$\overline{BC} + \overline{AC} = m \quad \text{und} \quad \overline{BC} = \overline{AC}\cdot\tan\alpha.$$

Es ergibt sich dann:

$$\overline{AC} = \frac{m}{1+\tan\alpha} = \frac{m\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}, \quad \overline{BC} = \frac{m\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Nunmehr berechnet man $A_G = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AC}$.

Die Körperhöhe h erhält man im Dreieck ODC_1.

Hier ist $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ (Mittellinie im Dreieck).

Lösung: $V = \frac{1}{12} \cdot \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3} \tan \beta$

$$V = \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24\sqrt{2} \cos^3 (\alpha - 45°)} \tan \beta.$$

629. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC (Abb. 107). (Vgl. Sie hierzu die Vorbemerkung zur Aufgabe 611 auf Seite 118!) Der Radius des Kreises ist $\overline{AM} = r$. Das Volumen der Pyramide ist gleich

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AE}}{2} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AE} \cdot \overline{DM}}{2} \overline{BC} = \frac{1}{3} A_S \cdot \overline{BC};$$

denn es gilt

$$\frac{\overline{AE} \cdot \overline{DM}}{2} = A_S.$$

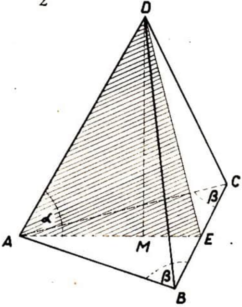


Abb. 107

Mit Hilfe des Sinussatzes erhält man

$$\overline{BC} = 2r \sin (180° - 2\beta) = 2r \sin 2\beta.$$

Da $\Delta AMD \sim \Delta BEA$ (denn $\sphericalangle MDA = \sphericalangle ABE = \beta$), gilt

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{BE}}^{1}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{AM} \cdot \overline{BE} = \overline{AE} \cdot \overline{DM}.$$

[1] Die Abbildung 107, in der $\overline{AM} < \overline{AE}$ ist, entspricht offenbar nicht dieser Bedingung. Eine Abbildung, in der die Beziehung $\alpha = 90° - \beta$ ihren Ausdruck fände, wäre aber wenig übersichtlich.

In diese Gleichung setzt man $\overline{AM} = r$, $\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{2}$, $\overline{AE} \cdot \overline{DM} = 2A_s$ ein und erhält

$$\frac{r \cdot \overline{BC}}{2} = 2A_S.$$

Nachdem man die so gefundene Beziehung nach r aufgelöst hat, erhält man

$$\overline{BC} = \sqrt{8A_S \sin 2\beta}.$$

Lösung: $V = \frac{1}{3}(2A_S)^{\frac{3}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} 2\beta$

630. Wenn die Flächen ADE und DCE (Abb. 108) senkrecht auf der Ebene der Grundfläche stehen, dann ist die Kante $\overline{DE}$ die Höhe der Pyramide. Der Winkel EAD gibt die Größe des Neigungswinkels zwischen der Seitenfläche ABE und der Grundfläche an, da die Ebene ADE senkrecht auf der Kante $\overline{AB}$ steht (nachweisen!).

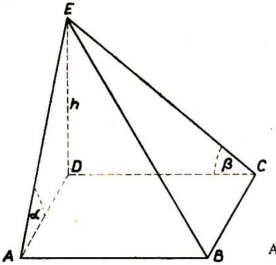


Abb. 108

Es sind also $\sphericalangle EAD = \alpha$ und analog $\sphericalangle DCE = \beta$. Aus den Dreiecken ADE und DCE, in denen $\overline{DE} = h$ ist, bestimmt man $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ und setzt die gefundenen Ausdrücke in die Formel

$$V = \frac{1}{3}\overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot h$$

ein.

Lösung: $V = \frac{1}{3}h^3 \cot\alpha \cot\beta$.

631. Im Dreieck DBE (Abb. 109) ist $\sphericalangle DBE = \beta$. Man erhält

$$\overline{DE} = l \sin\beta \quad \text{und} \quad \overline{BD} = l \cos\beta,$$

d. h., es ist

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \frac{l\cos\beta}{\sqrt{2}}.$$

Aus dem Dreieck ADE bestimmt man $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2}$. Der Winkel φ, den die Kante $\overline{AE}$ mit der Ebene der Grundfläche einschließt, ist $\sphericalangle EAD$ (nachweisen!).

Im Dreieck ADE gilt ferner $\tan\varphi = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$.

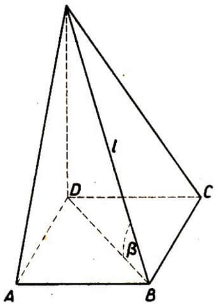


Abb. 109

Lösung: $\overline{DE} = l \cdot \sin\beta$;

$$\overline{AE} = \overline{CE} = l\sqrt{\frac{1 + \sin^2\beta}{2}};$$

$$\varphi = \arctan(\sqrt{2}\tan\beta).$$

632. Die Seitenfläche ABD in Abbildung 110 ist die größte, da ihre Flächenhöhe $\overline{DE}$ größer ist als die Höhe $\overline{CD} = h$ der beiden anderen Seitenflächen und da die Grundlinien aller drei Seitenflächen gleich sind. Im Dreieck ACD gilt

$$\overline{AD} = \frac{a}{\cos\beta} \quad \text{und} \quad h = a\tan\beta.$$

Weiterhin erhält man im Dreieck AED

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\beta} - \frac{a^2}{4}}.$$

Der Neigungswinkel der größten Seitenfläche gegenüber der Grundfläche ist der Winkel DEC (nachweisen!). Es gilt $\tan\alpha = \dfrac{h}{\overline{CE}}$, wobei $\overline{CE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ist.

Lösung: $A = \dfrac{a^2}{4\cos\beta}\sqrt{4 - \cos^2\beta}$; $\quad \alpha = \arctan\dfrac{2\tan\beta}{\sqrt{3}}$.

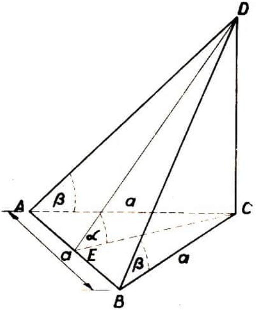


Abb. 110

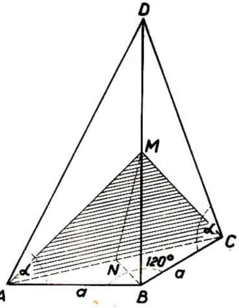


Abb. 111

633. Die Schnittfläche A ist gleich $\dfrac{1}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{MN}$ (Abb. 111). Im rechtwinkligen Dreieck ABN (hier ist $\sphericalangle NAB = 30°$) erhält man

$$\overline{AN} = \frac{1}{2}\,\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \quad \text{und} \quad \overline{BN} = \frac{1}{2}\,a.$$

Im Dreieck NBM gilt $\overline{MN} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$,

wobei $h = a\tan\alpha$ aus dem Dreieck ABD bestimmt werden kann.

Lösung: $A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

634. *a) Darstellungsverfahren*[1]*:*

Um die Schnittfläche, die senkrecht auf der Grundfläche ABC (Abb. 112) steht und die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ dieser Grundfläche halbiert, darzustellen, wird die Verbindungsstrecke $\overline{MN}$ der Seitenmitten dieser beiden Seiten konstruiert.

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei auf die Aufgabe 603 auf Seite 112 verwiesen.

Durch den Schnittpunkt F dieser Strecke mit der Seitenhalbierenden $\overline{AE}$ konstruiert man eine Parallele $\overline{FK}$ zur Höhe $\overline{DO}$. Das Dreieck NMK ist die darzustellende Schnittfläche, denn in ihrer Ebene liegt die Strecke $\overline{FK}$, die auf der Ebene ABC senkrecht steht. Der Winkel zwischen Grund- und Seitenfläche wird durch den Winkel AED dargestellt (nachweisen!). In der Ebene AED liegt die Strecke $\overline{FK}$, weil die Punkte K und F in der Ebene AED liegen.

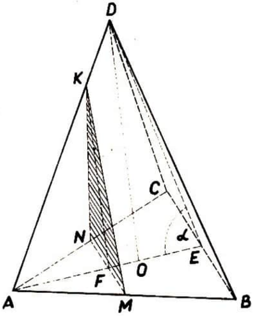


Abb. 112

b) Lösungsweg:
Als Grundfläche des Pyramidenrestes $AMNK$ werde das Dreieck AMN angenommen. Seine Fläche beträgt $\frac{1}{4}$ der Fläche des Dreiecks ABC, d. h.

$$A = \frac{1}{16} a^2 \sqrt{3}.$$

Die Höhe $\overline{FK}$ kann durch die Höhe $\overline{DO}$ ausgedrückt werden, indem man die Ähnlichkeit der Dreiecke AFK und AOD beachtet. Da $\overline{AF} = \frac{3}{4}\overline{AO}$ gilt, $\left(\text{denn } \overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AE},\ \overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AE}\right)$, folgt $\overline{FK} = \frac{3}{4}\overline{DO}$. Die Länge der Strecke $\overline{DO}$ bestimmt man aus dem Dreieck OED. Hier ist $\overline{EO} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ und

$$\sphericalangle OED = \alpha.$$

Lösung: $V = \dfrac{a^3 \tan \alpha}{128}$.

635. Die Strecke $\overline{MN}$ in (Abb. 113), in der sich Grund- und Schnittfläche schneiden, verläuft parallel zu $\overline{BC}$. Um den Winkel φ darzustellen, wird die Strecke $\overline{FO}$ parallel zu $\overline{AB}$ gezeichnet und der Punkt K, der durch Schnitt von $\overline{MN}$ und $\overline{FO}$

entsteht, mit E verbunden. Dann ist $\sphericalangle OKE = \varphi$ (nachweisen!). Die Schnittfläche ist gleich $A = \frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{EK}$, wobei $\overline{MN} = a$ und $\overline{EK} = \frac{h}{\sin\varphi}$ sind.
Die Körperhöhe h wird aus dem Dreieck OFE, worin

$$\overline{FO} = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \overline{EF} = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

(siehe Dreieck BFE) sind, bestimmt. Man erhält

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\sin\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

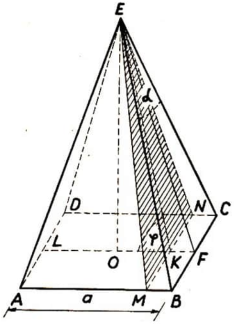


Abb. 113

Lösung: $A = \dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi}$.

636.[1] Durch den Schnitt der genannten Ebene mit der Pyramide erhält man das Dreieck NKD (Abb. 114). Wie in der Aufgabe 634 wird gezeigt, daß die Ebene AED senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$ steht, d. h., daß sie auch senkrecht auf der Verbindungsgeraden $\overline{KN}$ der Seitenmitten steht. Folglich stellt der Winkel DME den Winkel α zwischen der Grund- und der Schnittfläche dar. Im Dreieck MOD, in dem

$$\overline{MO} = \frac{1}{6}\overline{AE} = \frac{1}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei auf die Abbildung 82 auf Seite 112 verwiesen.

ist, findet man

$$\overline{DM} = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}.$$

Die Schnittfläche ist

$$A = \frac{1}{2}\,\overline{KN} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48 \cos \alpha}.$$

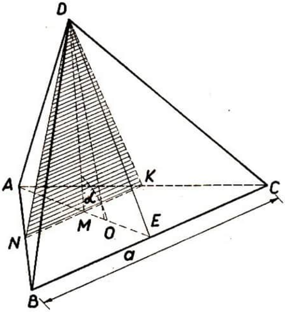


Abb. 114

Die Grundfläche der Pyramide $ANKD$ beträgt $\frac{1}{4}$ der Grundfläche der Pyramide $ABCD$, während die Höhen beider Körper gleich sind. Deshalb ist das Volumen V_1 der Pyramide $ANKD$ gleich $\frac{1}{4}V$, wenn V das Volumen der Pyramide $ABCD$ ist. Folglich ist das Volumen der Pyramide $NBCKD$ $V_2 = \frac{3}{4}V$. Es ist $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} \tan \alpha$.

Lösung: $A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{48 \cos \alpha}$; $V_1 = \dfrac{a^3}{192} \tan \alpha$; $V_2 = \dfrac{a^3}{64} \tan \alpha$.

637. Nach Voraussetzung ist $\overline{BE} : \overline{AE} = 2 : 1$ (Abb. 115). Das Dreieck ECD stellt die Schnittfigur dar. Es wird seine Fläche A berechnet. Das Dreieck ECD ist gleichschenklig, denn es ist $\overline{CE} = \overline{DE}$, wie aus den kongruenten Dreiecken AEC und AED hervorgeht. ($\overline{AC} = \overline{AD}$; die Seite $\overline{AE}$ haben beide Dreiecke gemeinsam, und die Winkel CAE und DAE betragen jeweils 60°). Nun wird die Höhe $\overline{EN}$

des Dreiecks ECD konstruiert. Dann ist

$$A = \frac{a \cdot \overline{EN}}{2}.$$

Um $\overline{EN}$ berechnen zu können, muß man erst $\overline{CE}$ im Dreieck AEC bestimmen. Bei der Anwendung des Kosinussatzes ergibt sich:

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AE} \cdot \overline{AC} \cos 60° = \frac{7}{9} a^2.$$

Jetzt findet man im Dreieck ECN

$$\overline{EN} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CN}^2} = \sqrt{\frac{7}{9} a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{6}\sqrt{19}.$$

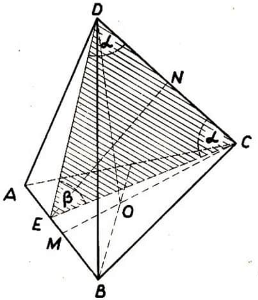


Abb. 115

Bezeichnet man die beiden gleichgroßen Winkel ECD und CDE mit α, dann ist

$$\sphericalangle DEC = \pi - 2\alpha.$$

Im Dreieck ECN ist $\cos \alpha = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Lösung: $A = \frac{a^2\sqrt{19}}{12}$, $\alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{7}}$, $\beta = \pi - 2 \arccos \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

638.[1] Die Seitenfläche BCC_1B_1 (Abb. 116) ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $\overline{BC} = a$ und $\overline{B_1C_1} = b$ $(a > b)$ und mit dem Winkel α an der Grundseite a. Die Strecke $\overline{B_1N}$ ist die Höhe in diesem Trapez. Es ist

$$\overline{B_1N} = \frac{a - b}{2} \tan \alpha.$$

[1] Zur Darstellung eines Pyramidenstumpfes sei auf die Aufgaben 625 und 626 verwiesen.

Im Dreieck FNB_1 $\left(\text{hier ist } \overline{FN} = \frac{a-b}{2}\right)$ erhält man

$$h = \overline{B_1F} = \sqrt{\overline{B_1N}^2 - \overline{FN}^2} = \frac{a-b}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - 1}.$$

Das Volumen ist

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab) = \frac{a^3 - b^3}{6}\sqrt{\tan^2\alpha - 1}.$$

Bemerkungen:

1. Wäre der spitze Winkel α kleiner als 45°, dann wäre der Radikand negativ. Es kann nämlich α nicht kleiner oder gleich 45° werden, da die Summe der beiden Winkel $BCC_1 = \alpha$ und $DCC_1 = \alpha$ der räumlichen Ecke in C immer größer als der dritte Winkel BCD sein muß. Weil aber $\sphericalangle BCD = 90°$ ist, muß $2\alpha > 90°$ sein, d. h. $\alpha > 45°$.

2. Den Ausdruck $\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$ kann man umformen:

$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Da 2α größer als 90° und kleiner als 180° ist (es gilt $90° > \alpha > 45°$), muß $\cos 2\alpha$ stets negativ sein. Das heißt, der Radikand ist stets positiv.

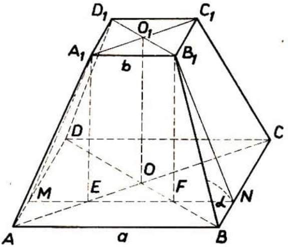


Abb. 116

Lösung: $V = \frac{a^3 - b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3 - b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{\cos(180° - 2\alpha)}.$

639. Die Strecke $\overline{BC_1}$ (Abb. 117) stellt die Projektion der Raumdiagonalen $\overline{BD_1}$ auf die Fläche BCC_1B_1 dar. Deshalb ist $\sphericalangle D_1BC_1 = \alpha$. Aus dem Dreieck D_1BC_1 (es ist $\overline{C_1D_1} = b$) folgt $\overline{BC_1} = b\cot\alpha$.

Im Dreieck BC_1B_1 gilt

$$h = \sqrt{\overline{BC_1}^2 - \overline{B_1C_1}^2} = \sqrt{b^2 \cot^2 \alpha - b^2} = \frac{b\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.$$

Dann ist

$$V = b^2 h = b^3 \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.$$

Bemerkung: Der Radikand $\cos 2\alpha$ ist hier (siehe Bemerkung 2 zur Lösung der Aufgabe 638) immer positiv, denn es ist $\alpha < 45°$.

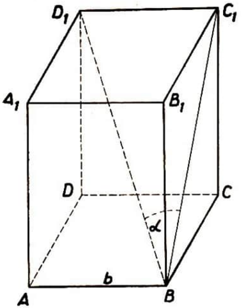


Abb. 117

Es gilt nämlich

$$\tan \alpha = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC_1}},$$

da $\overline{B_1C_1}$ eine Kathete und $\overline{BC_1}$ die Hypotenuse im Dreieck BC_1B_1 ist. Deshalb ist $\tan \alpha < 1$, d. h. $\alpha < 45°$.

Lösung: $V = b^3 \dfrac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$.

640. Wenn $\overline{BD}$ (Abb. 118) die Höhe auf der Hypotenuse $\overline{AC} = b$ im Dreieck ABC ist (in der Abbildung kann $\overline{BD}$ beliebig innerhalb des Winkels ABC eingezeichnet werden), dann ist $\sphericalangle B_1DB = \beta$ (nachweisen!).

Es gilt dann $\overline{BD} = \overline{AC} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} b \cdot \sin 2\alpha$ und $h = \overline{BB_1} = \overline{BD} \cdot \tan \beta$.

Diese Ausdrücke setzt man in die Volumenformel der Pyramide ein und erhält

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b \cdot \overline{BD} \cdot h.$$

Lösung: $V = \frac{1}{24} b^3 \sin^2 2\alpha \tan \beta.$

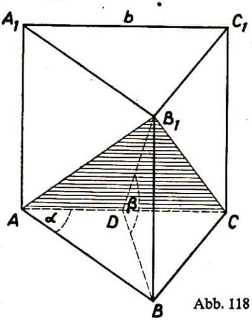


Abb. 118

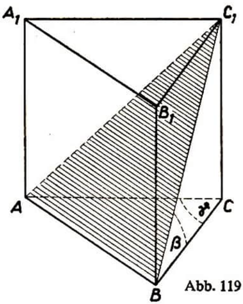


Abb. 119

641. Ein Teil des Prismas ist die dreiseitige Pyramide $ABCC_1$ (Abb. 119). Ihr Volumen ist $V_1 = \frac{1}{3} V$, wobei V das Volumen des Prismas ist. Das heißt, der Rauminhalt V_2 der vierseitigen Pyramide $ABB_1A_1C_1$ ist gleich $\frac{2}{3} V$. Nunmehr wird V berechnet. Nach Voraussetzung ist $\overline{BC} + \overline{AC} = m$.
Im Dreieck ABC gilt $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \cos \gamma$. Folglich ist

$$\overline{BC} = \frac{m \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} = \frac{m \cos \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

Die Grundfläche des Prismas ist

$$A_G = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{BC}^2 \tan \gamma.$$

Die Höhe $h = \overline{CC_1}$ kann im Dreieck BCC_1 bestimmt werden, wobei $\sphericalangle C_1BC = \beta$ ist (nachweisen!). Man erhält

$$h = \overline{BC} \cdot \tan \beta.$$

Lösung: $$V_1 = \frac{m^3 \cos^3 \gamma \tan \gamma \tan \beta}{48 \cos^6 \frac{\gamma}{2}};$$

$$V_2 = \frac{m^3 \cos^3 \gamma \tan \gamma \tan \beta}{24 \cos^6 \frac{\gamma}{2}}.$$

642. Man beachte die Vorbemerkung zur Aufgabe 617:

$$A_G = A_M \cdot \cos \varphi = A_M \cdot \sin \gamma .$$

Andererseits gilt

$$A_G = \frac{a^2 \tan \gamma}{4}.$$

Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$a = 2\sqrt{A_M \cos \gamma}.$$

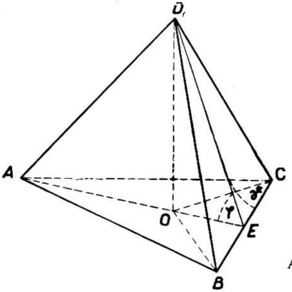


Abb. 120

Der Punkt O (der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, Abb. 120) liegt auf dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Also ist

$$\sphericalangle ECO = \frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \overline{EO} = \overline{CE} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2} \tan \frac{\gamma}{2}.$$

Im Dreieck OED ist $h = \overline{EO} \cdot \tan \varphi$.

Lösung: $V = \frac{1}{3}(A_M \cos \gamma)^{\frac{3}{2}} \tan \frac{\gamma}{2}, \quad A_O = A_M(1 + \cos \varphi)$

$$A_O = 2A_M \cos^2\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

643. Nach Abbildung 121 ist $\overline{CO} = \overline{BO} = r$, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist. Ferner ist $\overline{AC} = \overline{BC} = a$. Auf Grund der Forderung $\alpha > 45°$ muß der Punkt O innerhalb des Dreiecks ABC liegen. Für $\alpha < 45°$ wäre der Winkel γ in C ($\gamma = 180° - 2\alpha$) stumpf. Der Mittelpunkt des Umkreises läge außerhalb des Dreiecks ABC, und die betrachtete Ebene würde die Pyramide nicht durchdringen.

Die Höhe der Pyramide verläuft durch O. (Vgl. Sie mit den Vorbemerkungen zur Aufgabe 611 auf S. 118!) Aus dem Dreieck COD erhält man $h = r \cdot \tan \beta$.

Weil nach dem Sinussatz $\overline{BC} = a = 2r \sin \alpha$ gilt, muß

$$h = \frac{a}{2 \sin \alpha} \tan \beta$$

sein.

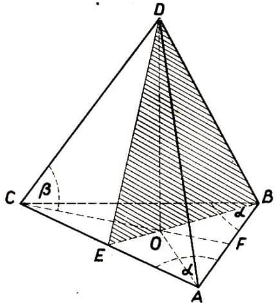


Abb. 121

Jetzt bestimmt man die Grundlinie $\overline{BE}$ der Schnittfigur im Dreieck CEB. In ihm ist $\sphericalangle BCE = 180° - 2\alpha$, und $\sphericalangle EBC$ ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks BCO ($\overline{BO} = \overline{CO} = r$) mit der Größe

$$\sphericalangle BCO = \frac{1}{2} \sphericalangle BCE = 90° - \alpha, \quad \text{d. h.} \quad \sphericalangle CEB = 3\alpha - 90°.$$

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\overline{BE}}{\sin (180° - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin (3\alpha - 90°)},$$

woraus

$$\overline{BE} = \frac{a \sin (180° - 2\alpha)}{\sin (3\alpha - 90°)} = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin (3\alpha - 90°)}$$

folgt.

Bemerkung: Im Nenner könnte man $-\cos 3\alpha$ schreiben. Der Winkel 3α liegt aber zwischen 135° und 270°, da $45° < \alpha < 90°$ sein muß. Also ist $-\cos 3\alpha$ positiv. Deshalb ist es bei Berechnungen unter Verwendung von Tabellen vorteilhafter, mit dem Winkel $3\alpha - 90°$, der zwischen 45° und 90° liegt, zu rechnen.

Lösung: $A_S = \dfrac{a^2 \cos\alpha \tan\beta}{2 \sin(3\alpha - 90°)}$.

644. 1. Es wird die Größe A_G der Grundfläche des Prismas (Abb. 122) berechnet. Es gilt $A_G = A_1 + A_2$, wobei A_1 die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ABC und A_2 die des rechtwinkligen Dreiecks ACD ist.

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{l \sin\alpha \, l \cos\alpha}{2} = \frac{l^2 \sin 2\alpha}{4}$$

und

$$A_2 = \frac{l^2 \sin 2\beta}{4}.$$

Folglich ist

$$A_G = \frac{l^2}{4} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$$

$$A_G = \frac{l^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2}.$$

2. Die Höhe h des Prismas berechnet man aus der Voraussetzung $A_S = \overline{BD} \cdot h$. Da im Viereck $ABCD$ die Summe der Innenwinkel bei B und D gleich 180° ist, muß ein Umkreis konstruierbar sein, dessen Durchmesser die Diagonale

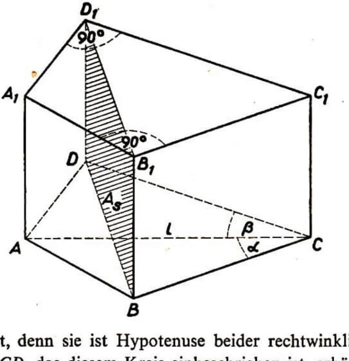


Abb. 122

$\overline{AC}$ ist, denn sie ist Hypotenuse beider rechtwinkliger Dreiecke. Im Dreieck BCD, das diesem Kreis einbeschrieben ist, erhält man nach dem Sinussatz

$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \sin \sphericalangle BCD = l \sin(\alpha + \beta).$$

Folglich ist

$$h = \frac{A_S}{\overline{BD}} = \frac{A_S}{l \sin(\alpha + \beta)}.$$

Lösung: $V = \frac{1}{2} A_S \, l \cos(\alpha - \beta)$.

645. Die Seitenflächen ADE und BCE sind gleichschenklige Dreiecke (Abb. 123). Die Ebene MNE (M und N sind Kantenmitten von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$) steht senkrecht auf $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. In dieser Ebene verläuft die Höhe $\overline{EF}$ der Pyramide (nach-

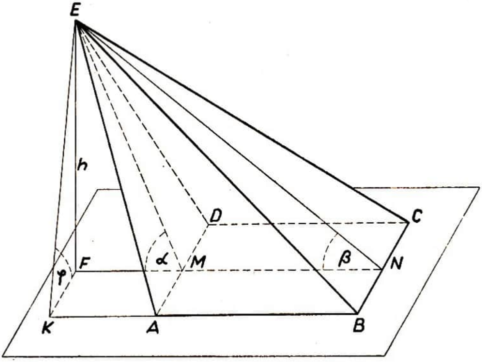


Abb. 123

weisen!). Nach Voraussetzung ist der Außenwinkel α des Dreiecks MNE (zwischen $\overline{EM}$ und der Verlängerung von $\overline{MN}$) spitz. Deshalb schneidet die Höhe $\overline{EF}$ die Verlängerung von $\overline{MN}$.

Um V zu bestimmen, berechnet man die Seite $\overline{AB}$ des Quadrates $ABCD$. Es gilt

$$\overline{AB} = \overline{MN} = \overline{FN} - \overline{FM} = h(\cot\beta - \cot\alpha).$$

Folglich ist

$$V = \frac{1}{3}\overline{AB}^2 \cdot h = \frac{1}{3} h^3 (\cot\beta - \cot\alpha)^2.$$

Der Winkel, der von der Seitenfläche ABE und der Grundfläche eingeschlossen wird, werde mit φ bezeichnet. Dazu bringt man die Ebene ABE zum Schnitt mit der Ebene EFK. Letztere steht senkrecht auf der Verlängerung von $\overline{AB}$.

Durch F wird eine Gerade parallel zu $\overline{AD}$ gezogen. Sie schneidet die Verlängerung von $\overline{AB}$ in K (nachweisen!). Aus dem Dreieck EFK erhält man

$$\tan \varphi = \frac{h}{\overline{FK}} = \frac{2h}{\overline{AB}} = \frac{2}{\cot \beta - \cot \alpha}.$$

Lösung: $V = \frac{1}{3} h^3 (\cot \beta - \cot \alpha)^2 = \frac{1}{3} h^3 \frac{\sin^2 (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$

$$\varphi = \arctan \frac{2}{\cot \beta - \cot \alpha} = \arctan \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

646. Die Höhe $\overline{EF}$ der Pyramide (Abb. 124) liegt in der Seitenfläche CED, die senkrecht auf der Ebene der Grundfläche steht. Die Ebene, die durch $\overline{EF}$ senkrecht

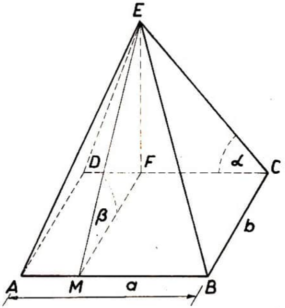


Abb. 124

zur Kante $\overline{AB}$ verläuft, schneidet die Grundfläche der Pyramide in der Strecke $\overline{FM} \parallel \overline{BC}$. Die Seitenfläche ABE wird von der gleichen Ebene in der Strecke $\overline{EM}$ geschnitten ($\overline{EM}$ steht senkrecht auf $\overline{AB}$, $\sphericalangle EMF = \beta$).
Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ stehen senkrecht auf der Ebene DEC, so daß $\sphericalangle BCE = 90°$ und $\sphericalangle ADE = 90°$ sind. (Weisen Sie diese Angaben nach!) Man berechnet die Höhe $h = \overline{EF}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{EF} + \overline{EM} = m$. Außerdem gilt

$$\overline{EM} = \frac{\overline{EF}}{\sin \beta}.$$

Deshalb ist

$$\overline{EF}\left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) = m,$$

woraus

$$h = \overline{EF} = m : \left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) = m : \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = \frac{m \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

folgt.
Weiterhin erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck DCE

$$a = \overline{CD} = \frac{\overline{CE}}{\cos \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Schließlich findet man

$$b = \overline{BC} = \overline{FM} = h \cot \beta = h \tan \alpha.$$

Folglich ist

$$V = \frac{1}{3} hab = \frac{1}{3} h^3 \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h^3}{3 \cos^2 \alpha}.$$

Die Summe $A_1 + A_2$ der beiden Seitenflächen BCE und DEA ist gleich

$$\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} b (\overline{CE} + \overline{DE}) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{\sin \alpha} + \frac{h}{\cos \alpha}\right).$$

Lösung: $V = \dfrac{m^3 \cos \alpha}{24 \cos^6 \frac{\alpha}{2}}$

$$A_1 + A_2 = \frac{m^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)}{8 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{m^2 \cos (45^\circ - \alpha)}{4 \sqrt{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

647. a) *Darstellungsverfahren:*

Die Höhe $\overline{EF}$ (Abb. 125) errichtet man im Mittelpunkt F der Seite $\overline{CD}$. Der Punkt E wird geradlinig mit der Seitenmitte M von $\overline{AB}$ verbunden. Dann ist $\varphi = \sphericalangle FEM$ das Bild des Winkels zwischen den Seitenflächen ABE und DCE (nachweisen!).

b) *Lösungsweg:*

Das Dreieck BCE ist rechtwinklig, und in ihm ist $\sphericalangle CEB = \alpha$ (nachweisen!), also $\overline{BC} = b \sin \alpha$.
Im Dreieck ABE gilt $\overline{AB} = 2b \sin \alpha$ und $\overline{EM} = b \cos \alpha$.
Aus dem Dreieck MFE, in dem $\overline{FM} = \overline{BC} = b \sin \alpha$ gilt, findet man

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EM}^2 - \overline{FM}^2} = b \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\overline{EF} = b \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Bemerkung: Der Radikand $\cos 2\alpha$ ist hier stets positiv, wenn $2\alpha < 90°$ ist. Tatsächlich muß die Summe der beiden ebenen Winkel

$$\sphericalangle ABE = \frac{180° - 2\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle EBC = 90° - \alpha$$

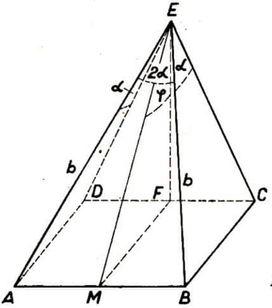


Abb. 125

der räumlichen Ecke in B größer als der dritte ebene Winkel $ABC = 90°$ sein, d. h.

$$\frac{180° - 2\alpha}{2} + (90° - \alpha) > 90°, \quad \text{so daß} \quad 2\alpha < 90°$$

folgt. Den Winkel φ bestimmt man am besten mit Hilfe des Sinus.

Lösung: $V = \frac{2}{3} b^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$;

$\varphi = \arcsin (\tan \alpha)$.

648. Die Ebene BCE (Abb. 126) verläuft durch die Kante $\overline{BC}$ senkrecht zur Kante $\overline{AS}$. Die Winkel zwischen den Seitenflächen sind gleich und haben die Größe $\varphi = \sphericalangle CEB$. Das Dreieck BCE ist gleichschenklig. Um die Schnittfläche A und den Winkel φ zu bestimmen, muß $\overline{DE}$ (D ist Seitenmitte von $\overline{BC}$) berechnet werden. Dazu bestimmt man zunächst $\overline{BS}$ aus dem Dreieck BDS. Hier ist

$$\overline{BD} = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle DSB = \frac{\alpha}{2}.$$

Dann ermittelt man $\overline{BE}$ aus dem Dreieck BSE. Hier ist $\sphericalangle BSE = \alpha$. Schließlich bestimmt man

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2}.$$

Man findet

$$\overline{DE} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}.$$

Jetzt berechnet man

$$A = \frac{a}{2}\cdot\overline{DE} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

und

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Bemerkungen:

1. Die Summe der ebenen Winkel an der Spitze S muß immer kleiner als 360° sein. Deshalb folgt für α:

$$0 < \alpha < 120°.$$

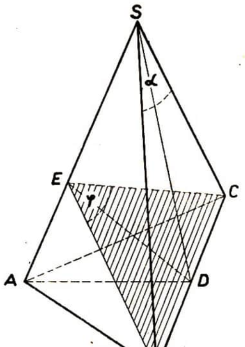


Abb. 126

Unter dieser Voraussetzung ist $2\cos\frac{\alpha}{2} > 1$, d. h. $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} < 1$, so daß die Gleichung

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

immer eine Lösung hat.

2. Wenn $\alpha > 90°$, d. h., wenn der Winkel BSA an der Spitze der Seitenfläche stumpf ist, dann schneidet die Höhe $\overline{BE}$ des Dreiecks ABS die Verlängerung der Seite $\overline{AS}$ und damit erzeugt der Schnitt „Pyramide–Ebene BCE" keine Fläche mehr. Die Formel

$$A = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

gibt allerdings auch für stumpfe Winkel α (kleiner als 120°, s. Bemerkung 1) bestimmte Werte für A!

Lösung: $\varphi = 2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$;

$$A = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

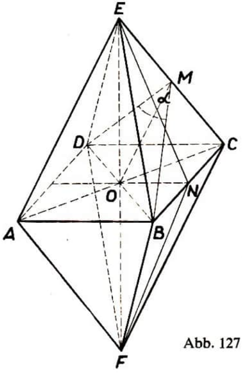


Abb. 127

649. Alle acht Flächen des Oktaeders sind gleichseitige Dreiecke. Es gilt also (Abb. 127)

$$\overline{EN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Ebene, in der dieses Quadrat liegt, teilt das Oktaeder in zwei gleiche regelmäßige Pyramiden, so daß

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \overline{EO}$$

gilt, wobei

$$\overline{EO} = \sqrt{\overline{EN}^2 - \overline{NO}^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ist. Alle Winkel zwischen den Seitenflächen sind gleich. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle BMD$ (M ist die Mitte der Kante $\overline{CE}$) stellt den Winkel zwischen den Seitenflächen BCE und EDC dar (nachweisen!).
Im Dreieck OBM gilt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \overline{BO} : \overline{BM} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Lösung: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$; $\alpha = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,(= 109^\circ\, 28'\, 48'')$.

650.[1] Die gleichschenkligen Dreiecke ABM und FMA sind kongruent (Abb. 128). Deshalb haben die Lote, die man von B und F auf die gemeinsame Seite $\overline{AM}$

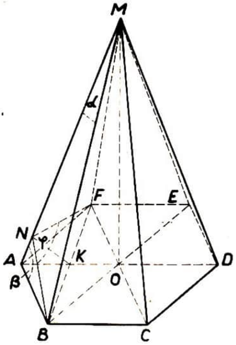


Abb. 128

fällen kann, einen gemeinsamen Schnittpunkt N auf $\overline{AM}$ und die gleiche Länge: $\overline{BN} = \overline{FN}$. Der Winkel FNB ist gleich φ (nachweisen!). Den Winkel $\beta = \sphericalangle MAB$ kann man durch den gesuchten Winkel $\alpha = \sphericalangle BMA$ mit Hilfe der Beziehung

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

[1] Zur Darstellung eines regelmäßigen Sechsecks sei auf die Bemerkungen zur Aufgabe 598 auf Seite 109 verwiesen.

ausdrücken. Man verwendet zuerst eine trigonometrische Funktion des Winkels β. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABN erhält man:

$$\sin\beta = \frac{\overline{BN}}{a} \qquad \text{(}a\text{ ist Grundkante der Pyramide).}$$

Im gleichschenkligen Dreieck BFN findet man

$$\overline{BN} = \frac{\overline{BK}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Es ist aber

$$\overline{BK} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

(Höhe im gleichseitigen Dreieck ABO.) Folglich gilt

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \text{d. h.} \quad \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Bemerkung: Der Winkel zwischen den benachbarten Seitenflächen einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist immer größer als der Winkel FAB (man betrachte die Dreiecke BFN und BFA), d. h. größer als 120°. Deshalb ist der Wert von $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ stets kleiner als 1.

Lösung: $\alpha = 2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

651. Die Flächen BAM und FAM (Abb. 129a) haben die senkrecht zur Ebene $ABCDEF$ stehende Kante $\overline{AM}$ gemeinsam und bilden mit der Grundfläche rechte Winkel. Man bestimmt die Größe des Winkels β, den beide Seitenflächen CBM und EFM mit der Grundfläche bilden. Dazu fällt man von A das Lot auf die Verlängerung von $\overline{EF}$ und erhält den Punkt G. (Das Bild des Lotes muß parallel zu $\overline{CE}$ verlaufen. Betrachten Sie dazu die Abbildung 129b!) Dann ist $\beta = \sphericalangle MGA$ (nachweisen!).

Man findet $\tan\beta = \dfrac{h}{\overline{AG}}$, wobei $\overline{AG} = \overline{EK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Abb. 129b) ist. Im Dreieck DAM ist $\tan\alpha = \dfrac{h}{2a}$, folglich gilt $\tan\beta = \dfrac{2h}{a\sqrt{3}} = \dfrac{4\tan\alpha}{\sqrt{3}}$.

Da $\overline{AE}$ senkrecht auf $\overline{DE}$ steht (nachweisen!), stellt der Winkel $\gamma = \sphericalangle MEA$ den Winkel dar, unter dem die Flächen DEM (und auch DCM) zur Grundfläche geneigt sind. Im Dreieck EAM findet man

$$\tan \gamma = \frac{h}{\overline{AE}},$$

wobei $\overline{AE} = a\sqrt{3}$ (Abb. 129b) ist.

Lösung: $\beta = \arctan \frac{4 \tan \alpha}{\sqrt{3}}$; $\gamma = \arctan \frac{2 \tan \alpha}{\sqrt{3}}$.

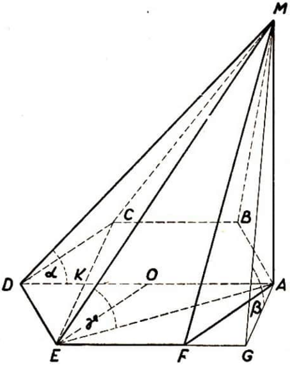


Abb. 129a

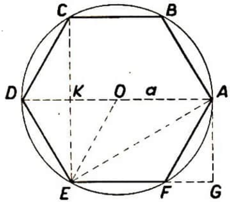


Abb. 129b

652. Durch eine Gerade kann eine Ebene senkrecht zu einer anderen Geraden nur dann gehen, wenn diese Geraden selbst senkrecht zueinander verlaufen. Man zeigt, daß $\overline{BC}$ senkrecht zu $\overline{AS}$ verläuft (Abb. 130). Dazu legt man eine Ebene AOS durch die Kante $\overline{AS}$ und durch die Höhe $\overline{OS}$. Da die Punkte A und O sowohl in der Ebene AOS als auch in der Ebene ABC liegen, müssen diese beiden Ebenen einander in der Geraden AO schneiden, d. h. in der Höhe $\overline{AD}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Die Dreiecke ODC und OBD sind kongruent (nachweisen!), deshalb ist $\overline{BO} = \overline{CO}$. Folglich sind auch die Strecken $\overline{CS}$ und $\overline{BS}$ gleich, d. h., die Strecke $\overline{DS}$ ist Seitenhalbierende (und zugleich Höhe) im gleichschenkligen Dreieck BCS. Da die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DS}$ senkrecht auf der Kante $\overline{BC}$ stehen, wie bereits gesagt wurde, folgt, daß die Kante $\overline{BC}$ senkrecht auf der Ebene ADS steht. Damit ist aber gezeigt, daß die Strecke $\overline{AS}$, die in der Ebene ADS liegt, senkrecht zu $\overline{BC}$ verläuft, wie zu zeigen war. Um eine Ebene zu konstruieren, die senkrecht zu $\overline{AS}$ durch $\overline{BC}$ verläuft, muß man das Lot von D auf $\overline{AS}$ fällen. Man erhält E. Die Ebene BCE steht senkrecht auf $\overline{AS}$, denn in ihr liegen zwei Strecken, die senkrecht auf $\overline{AS}$ stehen ($\overline{DE}$ und $\overline{BC}$). Die Ebene ADS, die senkrecht auf der Kante $\overline{BC}$ steht, liefert durch Schnitt

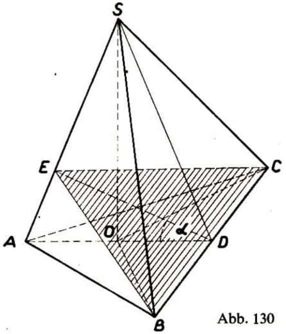


Abb. 130

mit den Ebenen ABC und BCE den Winkel $\alpha = \sphericalangle ADE$, d. h. den Winkel, den diese beiden Ebenen miteinander bilden. Das Dreieck ADS ist gleichschenklig, da die Höhe $\overline{OS}$ ihren Fußpunkt in der Mitte der Basis $\overline{AD}$ hat.
Folglich ist $\sphericalangle DSA = 2 \sphericalangle OSA = 2\alpha$.
($\sphericalangle OSA = \sphericalangle ADE = \alpha$ sind Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.) Das Verhältnis des Volumens V_1 der Pyramide $EBCS$ zum Volumen V der Pyramide $ABCE$ (diese beiden Pyramiden haben die Fläche BCE gemeinsam) ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Höhen, d. h.

$$V_1 : V = \overline{ES} : \overline{AE}.$$

Im Dreieck EDS findet man

$$\overline{ES} = \overline{DE} \cdot \cot \sphericalangle DSE = \overline{DE} \cdot \cot 2\alpha,$$

aus dem Dreieck ADE

$$\overline{AE} = \overline{DE} \tan \alpha.$$

Folglich ist $V_1 : V = \cot 2\alpha : \tan \alpha$.

Lösung: $V_1 = V \cdot \cot \alpha \cdot \cot 2\alpha$.

653.[1] Um die Lage der geforderten Ebene zu bestimmen, muß man den Winkel zwischen den Seitenflächen ABD und CBD an der Kante $\overline{BD}$ kennen (Abb. 131).

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei auf die Lösung der Aufgabe 603 auf Seite 112 verwiesen.

Diese beiden Flächen schneiden einander unter dem Winkel ADC, denn die Ebene ADC steht senkrecht auf der Kante $\overline{BD}$. Dieser Schluß geht wie in der Lösung der vorigen Aufgabe daraus hervor, daß die Kante $\overline{BD}$ senkrecht zur Kante $\overline{AC}$ verläuft. Außerdem steht im vorliegenden Falle die Kante $\overline{BD}$ senk-

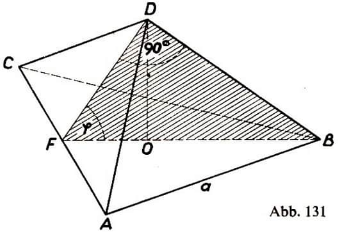


Abb. 131

recht auf $\overline{DF}$. Nach Voraussetzung ist das Dreieck FBD rechtwinklig. Die Winkel in A und F sind sicher spitz, also liegt der Scheitel des rechten Winkels in D:

$$\sphericalangle BDF = 90^\circ.$$

Da $\overline{FO} = \frac{1}{2}\overline{BO} = \frac{1}{2}r$ ist, folgt $\overline{DO} = \sqrt{\overline{FO}\cdot\overline{BO}} = \frac{r}{\sqrt{2}}\left(\text{wobei } r = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ ist}\right)$.

Der Winkel $\varphi = \sphericalangle DFB$ stellt den Winkel dar, den die Seitenfläche CAD mit der Grundfläche einschließt. Es gilt

$$\tan\varphi = \overline{DO} : \overline{FO} = \frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{r}{2} = \sqrt{2}.$$

Bemerkung: Die Seitenkante $\overline{BD}$ bildet mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ rechte Winkel. Da es sich in diesem Falle um eine regelmäßige Pyramide handelt, stehen auch $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ senkrecht aufeinander.

Lösung: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; $\varphi = \arctan\sqrt{2}$.

654. Um die Oberfläche berechnen zu können, muß man die Seitenhalbierende $\overline{DN}$ kennen. Zu ihrer Bestimmung verwendet man zuerst die Abschnitte $\overline{AM}$ und $\overline{DM}$ (Abb. 132), in die die Kante $\overline{AD}$ durch ihre Senkrechte $\overline{MN}$ (N ist die Seitenmitte von $\overline{BC}$) geteilt wird. Dann bestimmt man im Dreieck ANM $\left(\text{in ihm ist } \overline{AN} = \frac{q\sqrt{3}}{2}\right)$ die Strecke $\overline{MN}$ und schließlich im Dreieck MND die Strecke $\overline{DN}$. In der Aufgabenstellung wurde nicht gesagt, welches der beiden Verhältnisse $\overline{AM}:\overline{DM}$ oder $\overline{DM}:\overline{AM}$ gleich $m:n$ ist. Deshalb kann man etwa $\overline{DM}$ mit mx und $\overline{AM}$ mit nx bezeichnen, so daß $\overline{AD} = (m+n)x$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ANM und AOD erhält man $\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AD}}$, wobei $\overline{AN} = \frac{q\sqrt{3}}{2}$ und $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AN} = \frac{q\sqrt{3}}{3}$ ist.

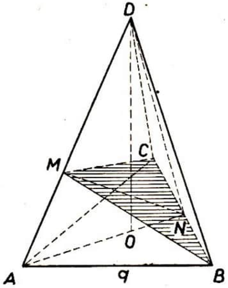


Abb. 132

Es ergibt sich die Gleichung

$$nx \cdot (m+n)x = \frac{q\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{q\sqrt{3}}{3}$$

und daraus

$$x = \frac{q}{\sqrt{2n(m+n)}}.$$

Es ist also

$$\overline{DM} = \frac{mq}{\sqrt{2n(m+n)}} \quad \text{und} \quad \overline{AM} = \frac{nq}{\sqrt{2n(m+n)}}.$$

Weiter gilt

$$\overline{MN}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{AM}^2 = \frac{q^2(n+3m)}{4(m+n)}$$

und

$$\overline{DN}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{q^2(n+2m)}{4n}.$$

Jetzt findet man

$$A_n = \frac{q^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3q \cdot \overline{DN}}{2}.$$

Lösung: $A_n = \frac{q^2\sqrt{3}}{4}\left[1 + \sqrt{\frac{3(n+2m)}{n}}\right]$.

655. Es ist bekannt (Abb. 133): $\sphericalangle BD_1A = \alpha$ und $\sphericalangle CD_1B = \alpha$ (nachweisen!). Die Dreiecke ABD_1 und BCD_1 sind kongruent (nachweisen!). Folglich ist die Grundfläche $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = d \sin \alpha$. Weiter erhält man

$$\overline{AD_1} = d \cos \alpha$$

und

$$h = \sqrt{\overline{AD_1}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Die Ebene ACD_1 bildet mit der Ebene der Grundfläche den Winkel

$$\varphi = \sphericalangle DOD_1.$$

Es ist also

$$\tan \varphi = \frac{\overline{DD_1}}{\overline{DO}} = h : \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Lösung: $V = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$; $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{2 \cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$.

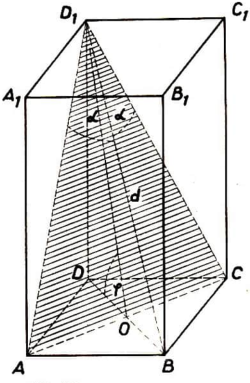


Abb. 133

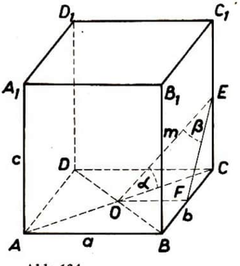


Abb. 134

656. Der Winkel EOC ist gleich α (Abb. 134). Um den Winkel β, den die Strecke $\overline{EO}$ mit der Seitenfläche BCC_1B_1 einschließt, darzustellen, benötigt man das von O auf $\overline{BC}$ gefällte Lot $\overline{FO}$. $\overline{EF}$ ist die Projektion von $\overline{EO}$ auf diese Seitenfläche.

Es ist also $\sphericalangle FEO = \beta$. Wählt man die Bezeichnungen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CC_1} = c$, dann ist $V = abc$ und $A_M = 2(a + c)\,b$.

Aus dem Dreieck OFE bestimmt man: $\frac{a}{2} = \overline{FO} = m \sin\beta = m \sin 2\alpha$;

$$\overline{EF} = m \cos\beta = m \cos 2\alpha.$$

Im Dreieck OCE gilt $\frac{c}{2} = \overline{CE} = m \sin\alpha$ und im Dreieck FCE

$$\frac{b}{2} = \overline{CF} = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{CE}^2} = m\sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Nun soll der Radikand so gestaltet werden, daß er bequem zu logarithmieren ist:

$$\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{2}$$

$$= \cos 3\alpha \cos\alpha.$$

Folglich ist $b = 2m\sqrt{\cos 3\alpha \cos\alpha}$.

Bemerkung: Der Winkel $\beta = \sphericalangle FEO$ muß kleiner als $\sphericalangle CEO = 90° - \alpha$ sein. (Man vergleiche die Sinus dieser Winkel!) Da nach Voraussetzung $\beta = 2\alpha$ ist, muß $2\alpha < 90° - \alpha$ sein.
Folglich gilt $\alpha < 30°$.

Lösung: $V = 8m^3 \sin 2\alpha \sin\alpha \sqrt{\cos 3\alpha \cos\alpha}$

$$A_M = 16m^2 \sin\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos 3\alpha \cos\alpha}.$$

657. a) *Darstellungsverfahren:*

Den Halbkreis stellt man durch eine Halbellipse dar. Dabei ist $\overline{AD}$ irgendein Durchmesser der Ellipse (Abb. 135[1]). $\overline{BC}$ verläuft parallel zu $\overline{AD}$. Die Strecken, die senkrecht auf $\overline{AD}$ stehen, stellt man als Abschnitte auf Parallelen zu den Tangenten AG und DL dar.

b) *Lösungsweg:*

Wählt man die folgenden Bezeichnungen: $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BF} = \overline{CE} = h_a$, dann ist $V = \frac{a + b}{2} h_a \cdot h$.

[1] Zur Konstruktion einer Ellipse sei auf die Aufgabe 613 auf Seite 120 verwiesen.

Nach Voraussetzung ist $a = 2r$. Die Seite b berechnet man aus dem rechtwinkligen Dreieck MHC, aus dem $\sin\alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{CM}} = \frac{b}{2r}$, also $b = 2r\sin\alpha$ folgt.

Im Dreieck FBM ist $\overline{BM} = r$, $\sphericalangle BMA = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.

Man erhält $h_a = \overline{BF} = r\sin(90° - \alpha) = r\cos\alpha$.

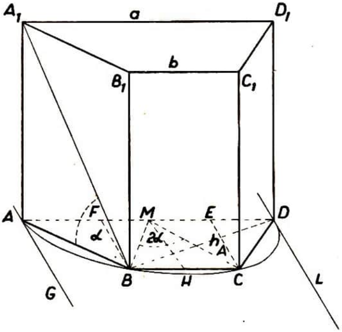


Abb. 135

Die Körperhöhe berechnet man im Dreieck ABA_1. Dabei ist $\sphericalangle ABA_1 = \alpha$ (nachweisen!), und $\overline{AB}$ kann im rechtwinkligen Dreieck ABD bestimmt werden

$$\left(\sphericalangle BDA = 45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Es ergibt sich $h = 2r\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\tan\alpha$.

Es folgt

$$V = 2r^3(1 + \sin\alpha)\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\tan\alpha\cos\alpha.$$

Es können nun einige Umformungen vorgenommen werden, z. B.

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

usw.

Lösung: $V = r^3\sin 2\alpha\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

658. Die Strecke $\overline{AD_1}$ ist die Projektion der Raumdiagonalen $\overline{BD_1}$ auf die Seitenfläche ADD_1A_1 (Abb. 136). Deshalb ist $\beta = \sphericalangle BD_1A$. Der Winkel α zwischen der Ebene der Schnittfläche DBB_1D_1 und der Ebene DAA_1D_1 wird durch den Winkel BDA dargestellt (nachweisen!). Aus dem Dreieck ABD_1 erhält man $\overline{AB}$

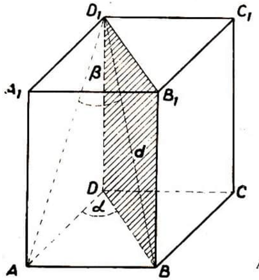


Abb. 136

und $\overline{AD_1}$, aus dem Dreieck ABD die Kante $\overline{AD}$ und aus dem Dreieck ADD_1 dann $\overline{DD_1} = h$:

$$h = \sqrt{\overline{AD_1}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - d^2 \cos^2 \alpha \cot^2 \alpha}$$

$$h = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Bemerkung: Der Winkel β ist immer kleiner als der Winkel α. (Man vergleiche ihre Tangenswerte!) · Da nach Voraussetzung $\beta = 90° - \alpha$ ist, muß $90° - \alpha < \alpha$, d. h. $\alpha > 45°$ sein.
Aus der Ungleichung $45° < \alpha < 90°$ folgt, daß der Winkel 2α im zweiten Quadranten liegt, so daß $\cos 2\alpha < 0$ und $-\cos 2\alpha > 0$ sind.
Bei numerischen Berechnungen wird die Quadrantenbeziehung
$-\cos 2\alpha = \cos (180° - 2\alpha)$ verwendet, denn der Winkel $(180° - 2\alpha)$ liegt im ersten Quadranten.

Lösung: $V = d^3 \cos \alpha \cot^2 \alpha \sqrt{\cos (180° - 2\alpha)}$

659. Die genannten Strecken seien $\overline{A_1N}$ und $\overline{C_1M}$ (Abb. 137). Dann ist das Viereck MNC_1A_1 ein gleichschenkliges Trapez (nachweisen!). Im gleichschenkligen Dreieck MNG ist $\sphericalangle NGM = \alpha$ und $\overline{MN} = \frac{b}{2}$. Man erhält $\overline{DG} = \frac{b}{4} \cot \frac{\alpha}{2}$. Aus dem Dreieck A_1GC_1 bestimmt man $\overline{E_1G} = \frac{b}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$. Addiert man beide

Gleichungen, so erhält man $\overline{DE_1} = \frac{3b}{4}\cot\frac{\alpha}{2}$. Aus dem Dreieck DE_1E, worin $\overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{BE} = \frac{1}{4}\,b\sqrt{3}$ ist, findet man

$$h = \overline{EE_1} = \frac{3b}{4}\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}}$$

$$h = \frac{3b}{4}\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2} - \cot^2 60^\circ} = \frac{3b}{4}\sqrt{\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot 60^\circ\right)\left(\cot\frac{\alpha}{2} - \cot 60^\circ\right)}$$

$$h = \frac{3b\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin 60^\circ}.$$

Lösung: $V = \dfrac{3b^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

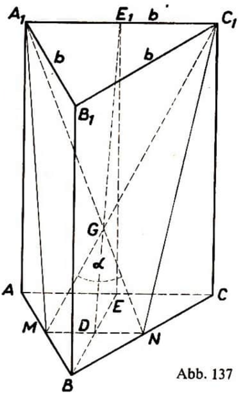


Abb. 137

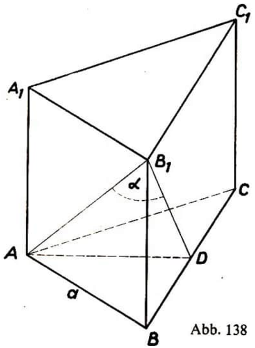


Abb. 138

660. Um den Winkel, den die Flächendiagonale $\overline{AB_1}$ mit der Seitenfläche BCC_1B_1 bildet, darzustellen, muß man die Projektion dieser Diagonalen auf die genannte Seitenfläche bestimmen (Abb. 138). Die Projektion des Punktes A auf die Seitenfläche BCC_1B_1 liefert D, die Mitte der Kante $\overline{BC}$ (nachweisen!). Also ist $\overline{B_1D}$ die Projektion von $\overline{AB_1}$ und $\sphericalangle DB_1A = \alpha$. Aus dem Dreieck BDB_1 bestimmt man

$$h = \overline{BB_1} = \sqrt{\overline{B_1D}^2 - \overline{BD}^2}.$$

Die Länge der Strecke $\overline{B_1D}$ findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB_1. Durch Umformung erhält man h wie in der vorangegangenen Aufgabe.

Lösung: $A_M = \dfrac{3a^2\sqrt{\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha)}}{\sin\alpha}$.

661. Die Projektion der Diagonalen $\overline{AB_1}$ auf die Fläche CAA_1C_1 liefert $\overline{AC_1}$ (Abb. 139), so daß $\sphericalangle B_1AC_1 = \beta$ ist. Die Höhe des Prismas errechnet sich aus $\overline{CC_1} = \sqrt{\overline{AC_1}^2 - \overline{AC}^2}$, wobei $\overline{AC_1}$ aus dem Dreieck B_1AC_1 bestimmt werden kann.
Man erhält

$$\overline{CC_1} = \sqrt{b^2\tan^2\alpha\cot^2\beta - b^2}$$
$$= b\cot\beta\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}$$

$$\overline{CC_1} = \frac{b}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Lösung: $V = \dfrac{b^3\tan\alpha}{2\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

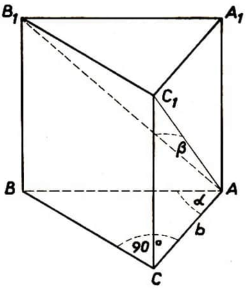


Abb. 139

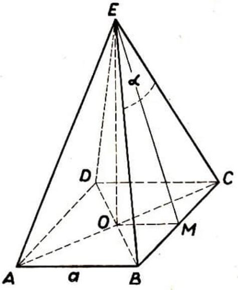


Abb. 140

662. Nach Voraussetzung ist $A_O = a^2 + 2a \cdot \overline{EM}$ (Abb. 140).

Im Dreieck BME gilt: $\overline{EM} = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$, folglich ist $A_O = a^2\left(1 + \cot\frac{\alpha}{2}\right)$, woraus

$$a = \sqrt{\frac{A_O}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}}}$$

folgt.

Ferner erhält man im Dreieck OME

$$h = \sqrt{\overline{EM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_O\left(\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\cot\frac{\alpha}{2} + 1}}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{A_O\left(\cot\frac{\alpha}{2} - 1\right)}.$$

Den Ausdruck $\cot\frac{\alpha}{2} - 1$ formt man um:

$$\cot\frac{\alpha}{2} - 1 = \cot\frac{\alpha}{2} - \cot 45^\circ$$

$$= \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 45^\circ \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Lösung: $h = \sqrt{\dfrac{A_O \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}.$

663. Im Dreieck AFM (Abb. 141) ist

$$\sphericalangle FMA = \frac{180^\circ}{n}, \quad \overline{FM} = \frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{n},$$

d. h.

$$A_G = \frac{na^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}.$$

Aus dem Dreieck FME erhält man

$$h = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{FM}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2} - \cot^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

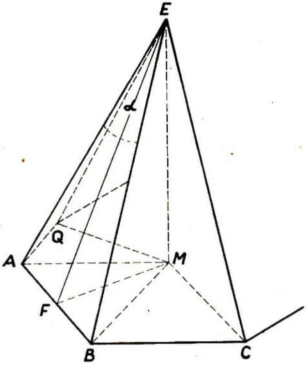


Abb. 141

Den Radikanden formt man wie in der Lösung der Aufgabe 659 um.

Lösung: $V = \dfrac{na^3\cot\dfrac{180^\circ}{n}\sqrt{\sin\left(\dfrac{180^\circ}{n} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{180^\circ}{n} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}}{24\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{180^\circ}{n}}.$

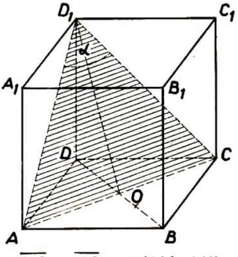


Abb. 142

664. Setzt man $\overline{DO} = \overline{AO} = x$ (Abb. 142), so erhält man

$$\overline{D_1O} = \overline{AO}\cot\frac{\alpha}{2} = x\cot\frac{\alpha}{2}$$

und

$$h = \overline{DD_1} = \sqrt{\overline{D_1O}^2 - \overline{DO}^2} = x\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Die Oberfläche der Pyramide $ACDD_1$ ist gleich

$$A = \overline{DO}\cdot\overline{AO} + \overline{AD}\cdot h + \overline{AO}\cdot\overline{D_1O}$$

$$A = x^2 + x\sqrt{2}x\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1} + x\cdot x\cot\frac{\alpha}{2},$$

woraus

$$x^2 = \frac{A\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}}$$

folgt.
Die Oberfläche des Prismas ist gleich

$$A_O = 4x^2 + 4x\cdot h\sqrt{2} = 4x^2\left(1 + \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Lösung: $A_O = \dfrac{4A\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}.$

665. Die Pyramidenhöhe $\overline{DM}$ hat ihren Fußpunkt in M (Abb. 143a), dem Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, in dem $\overline{AB} = \overline{AC} = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\overline{BC} = 2l\sin\frac{\beta}{2}$ ist.[1]

Der Punkt M liegt auf der in K errichteten Mittelsenkrechten zur Seite $\overline{AC}$ in der Ebene ABC. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MKA und LCA folgt die Proportion

$$\overline{AM} : \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AL}$$

[1] Vergleichen Sie mit den Vorbemerkungen zur Aufgabe 611 auf Seite 118!

und daraus

$$\overline{AM} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}^2}{\overline{AL}} = \frac{2l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Weiter erhält man aus dem Dreieck MAD

$$h = \sqrt{l^2 - \overline{AM}^2} = l \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}$$

und

$$V = \frac{1}{3 \cdot 2} \overline{BC} \cdot \overline{AL} \cdot h = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

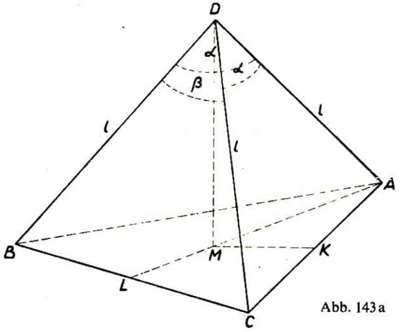


Abb. 143 a

Den Radikanden kann man so umformen, wie es in Aufgabe 656 gezeigt wurde. Ein anderes Verfahren führt folgendermaßen zur Lösung:
Man betrachtet die Seitenfläche BCD als Grundfläche der Pyramide (Abb. 143 b), ihre Fläche ist $A_G = \frac{1}{2} l^2 \sin \beta$. Die Seitenfläche BCD steht senkrecht auf der Ebene DLA (nachweisen!). Folglich liegt die Höhe $\overline{AM_1}$ der Pyramide in dieser Ebene. Man konstruiert $\overline{EM_1}$ senkrecht zu $\overline{CD}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke M_1ED und LCD folgt

$$\frac{\overline{DM_1}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DL}}.$$

Im Dreieck ADE ist

$$\overline{DE} = l\cos\alpha,\quad \overline{CD} = l \quad \text{und} \quad \overline{DL} = l\cos\frac{\beta}{2},$$

dann ist

$$\overline{DM_1} = \frac{l\cos\alpha}{\cos\dfrac{\beta}{2}}.$$

Aus dem Dreieck ADM_1 erhält man

$$h = \overline{AM_1} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DM_1}^2} = \frac{l}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Lösung: $V = \dfrac{1}{3}l^3\sin\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}.$

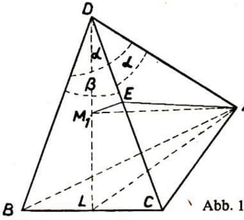


Abb. 143 b

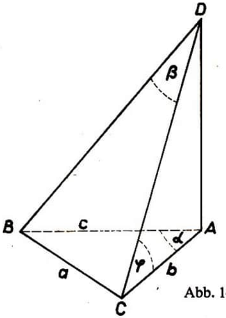


Abb. 144

666. Da das Dreieck ABC (Abb. 144) die Projektion des Dreiecks BCD auf die Ebene der Grundfläche darstellt, muß $\overline{AD}$ senkrecht auf der Grundfläche stehen.

Die Fläche A_G des Dreiecks ABC ist gleich $A_G = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}a^2\cot\alpha$.

Die Fläche A_1 des Dreiecks BCD ist $A_1 = \dfrac{1}{2}a^2\cot\beta$.

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{1}{2}a^2(\cot\beta - \cot\alpha) = A,$$

woraus

$$a = \sqrt{\frac{2A}{\cot\beta - \cot\alpha}}$$

folgt.
Die Fläche A_2 der Seitenfläche CAD hat die Größe $A_2 = \frac{1}{2}bh$, die Fläche A_3 der Seitenfläche ADB die Größe $A_3 = \frac{1}{2}ch$.
Folglich ist

$$A_3 - A_2 = \frac{1}{2}h(c - b) = \frac{1}{2}ah(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha).^1$$

Die Höhe h bestimmt man aus dem Dreieck CAD. Man erhält

$$h = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2\cot^2\beta - a^2\cot^2\alpha}.$$

Folglich ist

$$A_3 - A_2 = \frac{1}{2}a^2\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}\cdot(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2A}{\cot\beta - \cot\alpha}\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}\cdot(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha)$$

$$= \frac{A(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}{(\cot\beta - \cot\alpha)^2}}$$

$$A_3 - A_2 = A\tan\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha}}.$$

Die Seitenflächen CAD und ADB bilden mit der Grundfläche rechte Winkel. Die Seitenfläche BCD bildet mit der Grundfläche den Winkel $\varphi = \sphericalangle DCA$.
Also gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}.$$

Lösung: $A_3 - A_2 = A\tan\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}$; $\quad \varphi = \arccos\left(\frac{\cot\alpha}{\cot\beta}\right)$.

[1] $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, analog $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

667. Alle Seitenkanten der Pyramide sind Schenkel der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke (Abb. 145) und damit gleich lang. Außerdem muß die Pyramidenhöhe $\overline{DO}$ durch den Mittelpunkt O des Grundflächenumkreises verlaufen:

$$A = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha .$$

Aus dem Dreieck OCD erhält man

$$h = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CO}^2},$$

dabei ist $\overline{CD} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ und $\overline{CO} = r$ (der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC).

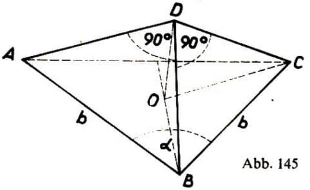


Abb. 145

Da das Dreieck BCO gleichschenklig ist ($\overline{BO} = \overline{CO} = r$), folgt

$$\overline{BC} = 2r \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$\overline{CO} = r = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Lösung: $V = \dfrac{1}{6} b^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

668. Die Pyramidenhöhe hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt M des Umkreises der Grundfläche[1] (Abb. 146). Die Winkelhalbierenden der Winkel DEA und CEB sind gleichzeitig Symmetrieachsen der gleichschenkligen Dreiecke ADE und BCE. Die gesuchte Schnittfläche LNE hat die Größe

$$\frac{\overline{LN}}{2} \cdot \overline{EM}, \quad \text{wobei} \quad \frac{\overline{LN}}{2} = \overline{AK} = l \sin\frac{\alpha}{2}$$

[1] Vergleichen Sie mit den Vorbemerkungen zur Aufgabe 611 auf Seite 118!

ist. Aus dem Dreieck MKE erhält man

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EK}^2 - \overline{KM}^2}.$$

Dabei ist $\overline{EK} = l \cos \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{KM} = \overline{BN} = l \sin \frac{\beta}{2}$, so daß

$$\overline{EM} = l \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

gilt.

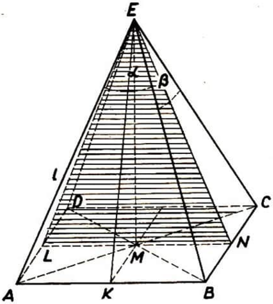


Abb. 146

Lösung: $A = l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$.

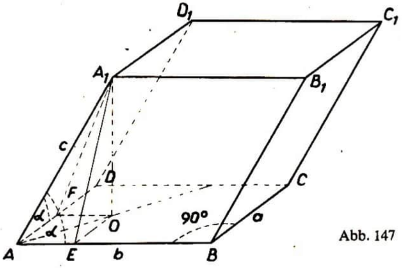


Abb. 147

669. Man legt durch den Eckpunkt A_1 (Abb. 147) die Ebene EOA_1 senkrecht zu $\overline{AB}$ und die Ebene FOA_1 senkrecht zu $\overline{AD}$. Diese Ebenen stehen senkrecht auf der Grundfläche (nachweisen!) und schneiden einander in der Höhe $\overline{A_1O}$ des

Parallelepipeds. Man betrachtet nun die rechtwinkligen Dreiecke AEA_1 und AFA_1. Sie sind kongruent, denn sie haben die Hypotenuse $\overline{AA_1} = c$ gemeinsam, und es gilt $\sphericalangle A_1AE = \sphericalangle A_1AF = \alpha$. Folglich ist $\overline{A_1E} = \overline{A_1F}$, und deshalb sind die Dreiecke EA_1O und FOA_1 kongruent. Also ist $\overline{EO} = \overline{FO}$, und $\overline{AO}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels DAB. Man findet

$$h = \sqrt{\overline{A_1E}^2 - \overline{EO}^2}.$$

Da die Fläche $AEOF$ ein Quadrat ist, muß $\overline{EO} = \overline{AE}$ sein. Man bestimmt $\overline{AE}$ und $\overline{A_1E}$ aus dem Dreieck AEA_1 und erhält

$$h = c\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Bemerkung: Zwei ebene Winkel der räumlichen Ecke in A sind gleich α und einer gleich 90°. Folglich muß die Summe der beiden ebenen Winkel 2α größer als der dritte (90°) sein, d. h. $2\alpha > 90°$ oder $\alpha > 45°$. Unter dieser Voraussetzung ist $-\cos 2\alpha > 0$, folglich hat h einen reellen Wert. Die Seitenkante $\overline{AA_1}$ bildet mit der Ebene der Grundfläche den Winkel $A_1AO = \varphi$, weil $\overline{AO}$ die Projektion dieser Kante auf die Grundfläche ist:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AO}}{\overline{AA_1}} = \sqrt{2}\cos\alpha.$$

Lösung: $V = abc\sqrt{\cos(180° - 2\alpha)}$; $A_m = 2c(a+b)\sin\alpha$;

$$\varphi = \arccos(\sqrt{2}\cos\alpha).$$

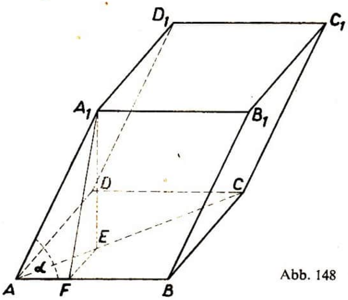


Abb. 148

670. Diese Aufgabe wird wie die vorige gelöst. Die Winkelhalbierende des Winkels DAB ist die Diagonale $\overline{AC}$ des Rhombus (Abb. 148); es ist

$$A_G = a^2\sin\alpha.$$

Im Dreieck AEA_1 gilt

$$h = \sqrt{\overline{AA_1}^2 - \overline{AE}^2},$$

wobei $\overline{AA_1} = a$ ist. Um $\overline{AE}$ bestimmen zu können, muß man zuerst $\overline{AF}$ aus dem Dreieck AFA_1, dann $\overline{AE}$ aus dem Dreieck AFE errechnen. Man erhält

$$\overline{AE} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

woraus

$$h = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

folgt.

Lösung: $V = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$.

671. Die Aufgabe wird analog wie die vorige gelöst. Man kann dazu die Abbildung 148 verwenden, wenn man beachtet, daß $\sphericalangle A_1AB = \alpha$, $\sphericalangle DAB = \alpha$ und $\sphericalangle A_1AD = \varphi$ sind.

Lösung: $V = 2a^2b \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

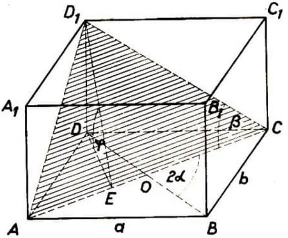


Abb. 149

672. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Rechteck (Abb. 149). Zur Konstruktion des Winkels, den die Schnittfläche mit der Grundfläche bildet, legt man durch die Kante $\overline{DD_1}$ eine Ebene senkrecht zu $\overline{AC}$. Es entsteht der Winkel $DED_1 = \varphi$.

Es gilt dann

$$\cos\varphi = \frac{\overline{DE}}{\overline{D_1E}} = \frac{h_1}{h}.$$

Es werden nun die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a; \quad \overline{BC} = \overline{AD} = b(a > b); \quad \overline{DD_1} = H;$$

$$\overline{D_1E} = h; \quad \overline{DE} = h_1.$$

Im gleichschenkligen Dreieck ABO ist die Summe der Innenwinkel an der Basis $\overline{AB}$ gleich dem Außenwinkel 2α. Folglich ist $\sphericalangle CAB = \alpha$. Aus dem Dreieck ABC erhält man

$$a = 2r\cos\alpha; \quad b = 2r\sin\alpha,$$

aus dem Dreieck DEC ($\sphericalangle ACD = \alpha$)

$$h_1 = a\sin\alpha = 2r\cos\alpha\sin\alpha$$

und

$$\overline{CE} = a\cos\alpha = 2r\cos^2\alpha.$$

Im Dreieck ECD_1 ist $h = \overline{CE}\cdot\tan\beta = 2r\cos^2\alpha\tan\beta$. Aus dem Dreieck DED_1 erhält man

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\overline{D_1E}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{h^2 - h_1{}^2} \\ &= \sqrt{4r^2\cos^4\alpha\tan^2\beta - 4r^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ H &= 2r\cos^2\alpha\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha}. \end{aligned}$$

Den Ausdruck $\tan^2\beta - \tan^2\alpha$ kann man wie in der Lösung der Aufgabe 659 umformen.

Lösung: $A_M = 8r^2\cos\alpha\cos(45° - \alpha)\sec\beta\sqrt{2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$;

$$A_S = 2r^2\cos^2\alpha\tan\beta; \quad \varphi = \arccos\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}.$$

673. Wenn die Kathete $\overline{AB}$ (Abb. 150) Sehne eines Kreisbogens mit dem Zentriwinkel 2γ ist, dann muß $\sphericalangle BCA$ als Peripheriewinkel in diesem Kreis gleich γ sein. In der Ebene, die durch die Diagonale $\overline{BC_1}$ senkrecht zur Seitenfläche BCC_1B_1 verläuft, muß auch $\overline{AB}$ liegen, denn $\overline{AB}$ steht senkrecht auf dieser Seitenfläche. Die Schnittfläche schneidet die Grundfläche unter dem Winkel $C_1BC = \gamma$. Die Hypotenuse $\overline{AC}$ ist Durchmesser des Umkreises, folglich gilt $\overline{AC} = 2r$. Es werden nun die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\overline{BC} = a; \quad \overline{AB} = c; \quad \overline{AC} = b.$$

Die Ebene ABC_1 schneidet aus dem Prisma die vierseitige Pyramide $ABB_1A_1C_1$ heraus. Da das Volumen der Pyramide $ABCC_1$ gleich $\frac{1}{3}$ des Prismenvolumens ist, beträgt das Volumen der vierseitigen Pyramide $\frac{2}{3}$ des Prismenvolumens. Bezeichnet man mit V_1 das Volumen der Pyramide $ABB_1A_1C_1$ und mit V das Volumen des Prismas, dann ist

$$V_1 = \frac{2}{3} V = \frac{2}{3} \cdot \frac{ac}{2} \cdot h = \frac{ach}{3}.$$

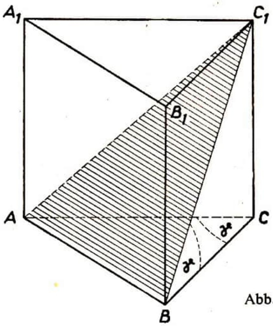


Abb. 150

Aus dem Dreieck ABC erhält man a und c und aus dem Dreieck BCC_1 die Höhe h. Man erhält für die Mantelfläche folgenden Ausdruck:

$$A_M = (2r\cos\gamma + 2r\sin\gamma + 2r) \cdot 2r\cos\gamma\tan\gamma$$

$$A_M = 4r^2\sin\gamma(\cos\gamma + \sin\gamma + 1).$$

Den Ausdruck in der Klammer formt man so um, daß er bequem zu logarithmieren ist:

$$\cos\gamma + \sin\gamma + 1 = (1 + \cos\gamma) + \sin\gamma$$

$$= 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2} \cdot 2\sin 45°\cos\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Lösung: $A_M = 8\sqrt{2}\, r^2 \sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)$

$V_1 = \frac{4}{3} r^3 \sin\gamma \sin 2\gamma.$

674. Die Höhe $\overline{EM}$ (Abb. 151a) hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt M des Umkreises der Grundfläche $ABCD$[1]. Die Kreisbogen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ und $\widehat{CD}$ (Abb. 151b)

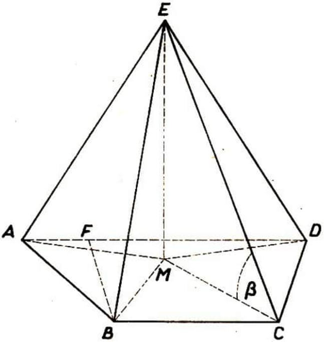


Abb. 151 a

sind gleich lang, da nach Voraussetzung die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. $\sphericalangle CDA = 180^\circ - \alpha$ ist gleich dem halben Zentriwinkel, der zum Bogen $\widehat{ABC}$ gehört, d. h., die Kreisbogen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ und $\widehat{CD}$ haben gleiche Zentriwinkel

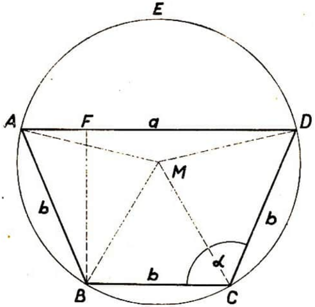


Abb. 151 b

[1] Vergleichen Sie auch mit den Vorbemerkungen zur Aufgabe 611 auf Seite 118!

$(180° - \alpha)$. Folglich ist der Zentriwinkel des Bogens $\widehat{DEA}$:

$$\sphericalangle DMA = 360° - 3(180° - \alpha) = 3\alpha - 180°.$$

Im Dreieck AMD ist $\overline{AD} = a$. Man erhält

$$\overline{AM} = r = \frac{a}{2\sin\dfrac{3\alpha - 180°}{2}} = -\frac{a}{2\cos\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

(Der Wert von $\cos\dfrac{3\alpha}{2}$ ist negativ, da α ein stumpfer Winkel ist, so daß $135° < \dfrac{3\alpha}{2} < 270°$ gilt.)

Aus dem Dreieck BCM findet man

$$\overline{BC} = b = 2r\sin\frac{180° - \alpha}{2} = -\frac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

Aus dem Dreieck ABF (hier ist $\overline{AB} = b$ und $\sphericalangle DAB = 180° - \alpha$) kann man die Höhe des Trapezes ermitteln:

$$\overline{BF} = h_a = b\sin\alpha = -\frac{a\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

Im Dreieck MDE (Abb. 151a) ist $\overline{DM} = r$ und $\sphericalangle MDE = \beta$.
Man erhält $h = r\tan\beta$. Nun wird die Grundfläche berechnet:

$$A = \frac{1}{2}(a + b)\,h_a = -\frac{a^2\left(\cos\dfrac{3\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{3\alpha}{2}}$$

$$= \frac{a^2\sin^3\alpha}{2\cos^2\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

Lösung: $V = -\dfrac{a^3\sin^3\alpha\tan\beta}{12\cos^3\dfrac{3\alpha}{2}} = \dfrac{a^3\sin^3\alpha\tan\beta}{12\cos^3\left(180° - \dfrac{3\alpha}{2}\right)}.$

675. Die Pyramidenhöhe $\overline{EM}$ hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt M des Umkreises des Trapezes $ABCD$ (Abb. 152a und b).

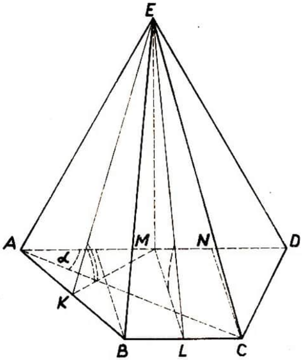


Abb. 152 a

Der Winkel $ACD = 90°$ ist Peripheriewinkel über dem Durchmesser in diesem Kreis. Also muß der Mittelpunkt M auf der Seite $\overline{AD}$ liegen. Da das Trapez $ABCD$ dem Kreis einbeschrieben ist, muß es gleichschenklig sein. Folglich gilt

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CDA.$$

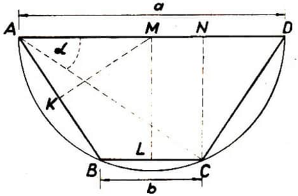


Abb. 152 b

Zur Vereinfachung mögen folgende Bezeichnungen gelten:

$$\overline{AD} = a, \quad \overline{BC} = b; \quad \sphericalangle AED = \varphi = 2\alpha.$$

Nach Voraussetzung ist $A = \frac{1}{2} ah$. Im gleichschenkligen Dreieck DEA ist

$$a = 2h \tan\frac{\varphi}{2} = 2h \tan\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$h = \sqrt{A \cot \alpha} \quad \text{und} \quad a = 2\sqrt{A \tan \alpha}.$$

Die Seite $b = \overline{BC}$ findet man aus dem Dreieck ABC, das dem Kreis mit dem Durchmesser a einbeschrieben ist. In diesem Dreieck gilt:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = \sphericalangle CDA - \sphericalangle DAC.$$

Da das Dreieck ACD rechtwinklig ist, muß $\sphericalangle CDA = 90° - \sphericalangle DAC$ sein. Folglich ist

$$\sphericalangle CAB = 90° - 2 \sphericalangle DAC = 90° - 2\alpha,$$

und man erhält

$$b = a \sin (90° - 2\alpha) = a \cos 2\alpha.$$

Schließlich findet man $\overline{CN} = h_a = \overline{AC} \sin \alpha = a \cos \alpha \sin \alpha$.
Also gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a + b}{2} h_a \cdot h = \frac{1}{6} a^2(1 + \cos 2\alpha) \cos \alpha \sin \alpha \cdot h$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 4A \tan \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{A \cot \alpha}$$

$$V = \frac{\sin^2 2\alpha}{3} \sqrt{A^3 \cot \alpha}.$$

Die Seitenfläche DEA bildet mit der Ebene $ABCD$ einen rechten Winkel. Um den Winkel φ_1, den die Seitenfläche ABE mit der Ebene $ABCD$ bildet, zu bestimmen, müssen wir von M das Lot auf $\overline{AB}$ fällen. (Es wird durch die Strecke $\overline{KM}$ dargestellt und verläuft parallel zur Diagonalen $\overline{BD}$, da diese ebenfalls senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Die Diagonale $\overline{BD}$ ist in der Abbildung nicht dargestellt; $\sphericalangle EKM = \varphi_1$.) Im Dreieck AKM ist der Winkel MAK gleich dem Winkel

$$CDA = 90° - \sphericalangle DAC = 90° - \alpha.$$

Deshalb ist

$$\overline{KM} = \overline{AM} \cdot \sin (90° - \alpha) = \frac{a}{2} \cos \alpha$$

und

$$\tan \varphi_1 = \frac{h}{\overline{KM}} = \frac{2h}{a \cos \alpha} = \frac{2h}{2h \tan \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Zur Bestimmung des Winkels φ_2, den die Fläche BCE mit der Ebene $ABCD$ bildet, konstruiert man $\overline{LM}$ senkrecht zu $\overline{BC}$; $\sphericalangle MLE = \varphi_2$. Da $\overline{LM} = \overline{CN} = h_a$ ist, folgt

$$\tan \varphi_2 = \frac{h}{h_a} = \frac{h}{a \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\sin^2 2\alpha}{3} \sqrt{A^3 \cot \alpha}$;

$$\varphi_1 = \arctan (\operatorname{cosec} \alpha); \quad \varphi_2 = \arctan \left(\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right).$$

676. Es soll die Summe der Dreiecksflächen ABC, ABD und ACD bestimmt werden (Abb. 153). Die Fläche A_1 des Dreiecks ABC ist gleich

$$A_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3},$$

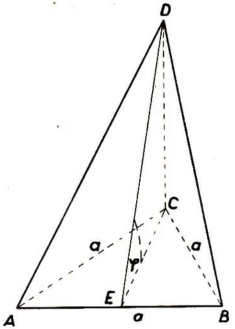


Abb. 153

die Fläche A_2 des Dreiecks ABD ist gleich

$$A_2 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \frac{\overline{CE}}{2 \cos \varphi} = \frac{A_1}{\cos \varphi}$$

und die Fläche A_3 des Dreiecks ACD ist gleich

$$A_3 = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CE} \tan \varphi = A_1 \tan \varphi.$$

Folglich ist

$$A_M = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi} (1 + \cos \varphi + \sin \varphi).$$

Den Ausdruck in der Klammer formt man so um, wie es in der Lösung der Aufgabe 673 gezeigt wurde. Man erhält dann

$$2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Denkt man sich in der Gleichung für A_M im Nenner $\cos\varphi$ als $\sin(90^\circ - \varphi)$, dann kann der Ausdruck für A_M durch $\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ gekürzt werden.

Lösung: $A_M = \dfrac{a^2\sqrt{6}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}$.

677. Da die Ebene der Grundfläche ABC (Abb. 154) durch die Strecke $\overline{AC}$, die Schnittebene A_1BC_1 aber durch die Strecke $\overline{A_1C_1} \parallel \overline{AC}$ verläuft, müssen sich die beiden Ebenen in der Geraden g, die parallel zu $\overline{AC}$ und $\overline{A_1C_1}$ verläuft,

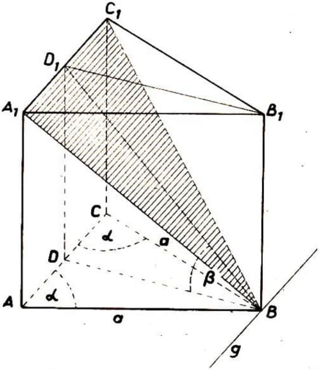


Abb. 154

schneiden. Zur Darstellung des Winkels zwischen beiden Ebenen konstruiert man $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ und $\overline{BD_1} \perp \overline{A_1C_1}$. (Die Punkte D und D_1 sind die Mittelpunkte von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{A_1C_1}$). Man erhält

$$A_M = (2\overline{AB} + \overline{AC})\,\overline{DD_1} = (2\overline{AB} + \overline{AC})\,\overline{BD}\tan\beta$$

$$A_M = 2a^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha\tan\beta.$$

Das Volumen V_1 der vierseitigen Pyramide ACC_1A_1B ist gleich $\frac{2}{3}$ des Prismenvolumens V (siehe Lösung der Aufgabe 673). Folglich gilt

$$V_1 = \frac{2}{3} A_G \cdot \overline{DD_1},$$

wobei $A_G = \frac{1}{2} a^2 \sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha$ ist.

Lösung: $A_M = 4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha \tan\beta;$

$$V_1 = \frac{a^3}{3} \sin 2\alpha \sin\alpha \tan\beta.$$

678. Wie in der Lösung der Aufgabe 630 zeigt man, daß die Seitenflächen BCE (Abb. 155) und CDE mit der Ebene der Grundfläche $ABCD$ die Winkel $\alpha = \sphericalangle EBA$ bzw. $\alpha = \sphericalangle ADE$ bilden. Beide Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke ($\sphericalangle EBC = \sphericalangle CDE = 90°$). Die Fläche A_1 des Dreiecks EBA (und auch die Fläche des Dreiecks EAD) ist gleich

$$A_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

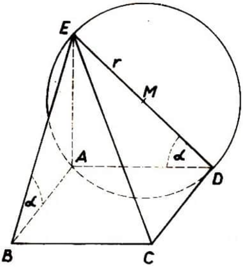


Abb. 155

Im Dreieck ADE ist $\overline{DE} = 2r$. Man erhält

$$\overline{AD} = 2r\cos\alpha, \quad \overline{AE} = 2r\sin\alpha,$$

so daß $A_1 = 2r^2 \sin\alpha \cos\alpha$ ist.

Die Fläche A_2 des Dreiecks BCE (und auch die des Dreiecks CDE) ist gleich

$$A_2 = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{DE} = 2r^2 \cos\alpha.$$

Man erhält:

$$A_n = A + 2A_1 + 2A_2 = 4r^2(\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$A_n = 4r^2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha + 1).$$

Den Ausdruck in der Klammer formt man so um, wie es in der Lösung der Aufgabe 673 gezeigt wurde.

Lösung: $A_n = 8\sqrt{2}\,r^2\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

679. Die Schnittebene EBD (Abb. 156), die parallel zur Hypotenuse $\overline{AC}$ verläuft, schneidet die Seitenfläche ACC_1A_1 in der Strecke $\overline{DE}$ parallel zu $\overline{AC}$. Man fällt von B aus die Lote $\overline{BM}$ und $\overline{BF}$ auf die Strecken $\overline{AC}$ bzw. $\overline{DE}$ und erhält das rechtwinklige Dreieck MBF. Hier ist $\sphericalangle BFM = \gamma$ (nachweisen!).

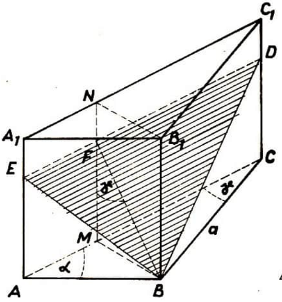


Abb. 156

Folglich ist $\Delta MBF \cong \Delta MBC$, denn beide Dreiecke haben die Kathete $\overline{BM}$ gemeinsam, und ferner gilt nach Voraussetzung $\sphericalangle BCM = 90^\circ - \alpha = \gamma$. Nunmehr muß das Volumen V der Pyramide $EACDB$ bestimmt werden. Die Grundfläche $EACD$ dieser Pyramide ist ein Rechteck. Die Pyramidenhöhe ist

$$\overline{BM} = a\sin\gamma = a\cos\alpha.$$

Es gilt

$$V = \frac{1}{3}\overline{AC}\cdot\overline{FM}\cdot\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{AC}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BC}^2\cdot\overline{BM} = \frac{1}{3}a^3\cos\alpha.$$

(Die Kathete $\overline{BC}$ ist die mittlere Proportionale zwischen $\overline{AC}$ und $\overline{CM}$.) Weiter gilt

$$A_M = (\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB})\,h = ah\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right).$$

Dabei ist ah die Fläche des Rechtecks BCC_1B_1, die nach Voraussetzung gleich der Fläche A_S des Dreiecks BDE ist. Folglich ist

$$A_S = ah = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{a^2}{2\sin\alpha},$$

d. h.

$$A_M = \frac{a^2}{2\sin\alpha}\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) = \frac{a^2}{2\sin^2\alpha}(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha).$$

Den Ausdruck in der Klammer formt man wie in der Lösung der Aufgabe 673 um.

Damit die Ebene BDE die Seitenfläche CC_1A_1A schneidet, müssen die Strecken $\overline{FM} = \overline{CM} = a\sin\alpha$ kleiner als die Strecke

$$\overline{MN} = h = \frac{a^2}{2\sin\alpha} : a = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

sein.

Aus der Ungleichung $a\sin\alpha < \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ erhält man

$$\sin^2\alpha < \frac{1}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Winkel α muß also kleiner als 45° sein.

Lösung: $V = \dfrac{a^3\cos\alpha}{3}$; $\quad A_M = \dfrac{\sqrt{2}\,a^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$, $(\alpha < 45°)$.

680. Die Mantelfläche der Pyramide (Abb. 157) ist

$$A_M = \frac{h^2\cot\alpha}{2} + \frac{h^2\cot\beta}{2} + \frac{h^2\cot\beta}{2\sin\alpha} + \frac{h^2\cot\alpha}{2\sin\beta}.$$

Daraus erhält man

$$A_M = \frac{h^2}{2\sin\alpha\sin\beta}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\beta + \cos\alpha).$$

Den Ausdruck in der Klammer kann man so umformen, daß er bequem zu logarithmieren ist. Wenn man beachtet, daß die Beziehungen

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

und

$$\cos\beta + \cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

gelten, so erhält man

$$\sin(\alpha+\beta) + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

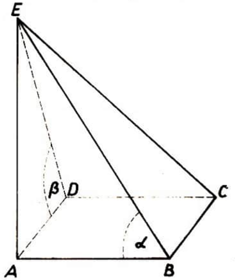


Abb. 157

Der Ausdruck $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ wird durch $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ersetzt.

Formt man dann den Klammerausdruck wie die Summe zweier Sinus um, so erhält man:

$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

Lösung: $$A_M = \frac{2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

681. Es sei $r = \overline{GM}$ der Radius des Inkreises der Pyramidengrundfläche[1]. Aus dem Dreieck MGD (Abb. 158) erhält man $\overline{DM} = h = r\tan\alpha$. Da der Mittelpunkt M des Inkreises auf dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Winkel BCA und CAB liegt, muß

$$\sphericalangle MAF = \frac{\alpha}{2} \quad\text{und}\quad \sphericalangle GCM = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

[1] Vergleichen Sie mit den Vorbemerkungen zur Aufgabe 617 auf Seite 124!

sein. Der Winkel ABC ist ein rechter, also ist das Viereck $FBGM$ ein Quadrat und $\overline{BF} = \overline{BG} = r$.
Folglich gilt

$$\overline{AB} = c = \overline{AF} + \overline{BF} = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + 1\right)$$

und

$$\overline{BC} = a = r\left[\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + 1\right].$$

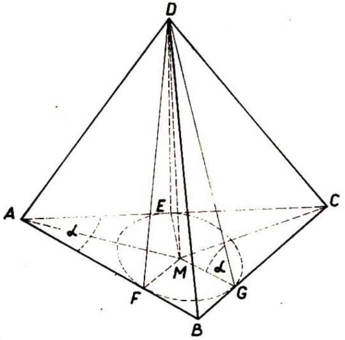


Abb. 158

Den Klammerausdruck formt man wie in der Lösung der Aufgabe 662 um:

$$A_G = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2}\,r\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$A_G = r^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Folglich ist

$$V = \frac{1}{3}A_G\cdot h = \frac{1}{3}r^3\tan\alpha\cot\frac{\alpha}{2}\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, wenn man bedenkt, daß

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

ist.

Die Mantelfläche A_M und die Oberfläche A_O berechnet man nach den Formeln[1]:

$$A_M = \frac{A_G}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad A_O = \frac{2A_G \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Lösung: $$V = \frac{r^3 \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3\sin^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)}; \quad A_M = \frac{r^2 \cot\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)};$$

$$A_O = \frac{r^2 \cot\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

682. Die Ebene schneidet aus dem Prisma die Pyramide $ABCB_1$ (Abb. 159) heraus. Die Höhe dieser Pyramide hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt M des Inkreises der Grundfläche, deshalb müssen alle Seitenflächen der Pyramide mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden. Folglich gilt[1]:

$$A_O = \frac{2A_G \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Man erhält

$$A_G = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2} = \overline{CD}\cdot\overline{AD}.$$

Aus dem Dreieck MDC $\left(\overline{DM} = r \text{ und } \sphericalangle DCM = \dfrac{\alpha}{2}\right)$ erhält man

$$\overline{CD} = r\cdot\cot\frac{\alpha}{2}$$

und aus dem Dreieck ADC

$$\overline{AD} = \overline{CD}\cdot\tan\alpha = r\cot\frac{\alpha}{2}\tan\alpha.$$

Folglich ist

$$A_G = r^2\cot^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha$$

[1] Vergleichen Sie mit den Vorbemerkungen zu den Aufgaben 617 und 618 auf den Seiten 124 bzw. 126!

und

$$A_O = \frac{2r^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \tan\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

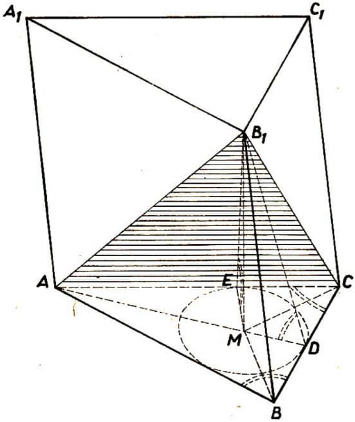


Abb. 159

Die erhaltenen Ausdrücke können noch vereinfacht werden, indem man $\tan\alpha$ durch

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

ersetzt.

Das Volumen des Prismas ist $V = A_G \cdot h$, wobei $h = r \cdot \tan\alpha$ (siehe ΔMDB_1) ist.

Lösung: $$A_O = \frac{4r^2 \cos^4 \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha};$$

$$V = r^3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \tan^2 \alpha.$$

683. Aus dem Dreieck BCM (Abb. 160) ist ersichtlich:

$$\sphericalangle BCM = 45^\circ; \quad \sphericalangle MBC = 180^\circ - (45^\circ + \alpha) - 45^\circ = 90^\circ - \alpha.$$

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{m}{\sin(90^\circ - \alpha)}.$$

Daraus findet man

$$\overline{BC} = a = \frac{m \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}.$$

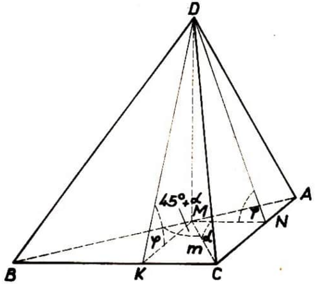


Abb. 160

Aus dem Dreieck ABC erhält man

$$\overline{AC} = b = a\cot\alpha = \frac{m\sin(45^\circ + \alpha)}{\sin\alpha},$$

und aus dem Dreieck MCD dann

$$h = m\tan\alpha.$$

Die Seitenflächen CAD und BCD bilden mit der Grundfläche die Winkel MND und DKM. Diese Winkel sind gleich, da die Dreiecke MKC und MNC (die Hypotenuse und der spitze Winkel stimmen in beiden überein) und die Dreiecke DKM und DNM (die Hypotenuse und eine Kathete stimmen in beiden überein) kongruent sind.
Diese beiden Winkel mögen die Größe φ haben. Dann ist

$$\tan\varphi = \frac{h}{\overline{MN}}, \quad \text{wobei} \quad \overline{MN} = \frac{m}{\sqrt{2}} \text{ ist.}$$

Lösung: $V = \frac{1}{6} m^3 \frac{\sin^2(45^\circ + \alpha)}{\cos^2\alpha}$; $\quad \varphi = \arctan(\sqrt{2}\tan\alpha)$.

684. Es sei ABE (Abb. 161a) die erste und ADE die zweite Seitenfläche. Nach Voraussetzung schneiden sie die Grundfläche unter dem Winkel α. Daraus folgt, daß der Fußpunkt O der Höhe auf der Flächendiagonalen $\overline{AC}$ liegen muß.

Fällt man vom Fußpunkt O (Abb. 161b) die Lote $\overline{OM}$ und $\overline{ON}$[1] auf die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$, so ist $\sphericalangle EMO = \alpha$ und $\sphericalangle ENO = \alpha$ (nachweisen!). Folglich gilt $\overline{MO} = h \cot \alpha$ und $\overline{NO} = h \cot \alpha$, d. h. $\overline{MO} = \overline{NO}$. Das bedeutet, der Punkt O

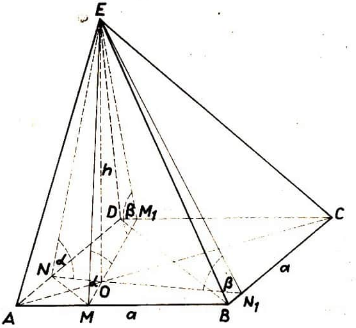


Abb. 161a

liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels DAB, also auf der Diagonalen $\overline{AC}$ des Rhombus $ABCD$.

Ebenso erhält man $\overline{M_1O} = \overline{N_1O}$ ($\overline{M_1O}$ und $\overline{N_1O}$ sind die Verlängerungen von $\overline{MO}$ und $\overline{NO}$). Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke OM_1E und ON_1E. Dann ist $\sphericalangle ON_1E = \sphericalangle OM_1E$, was zu beweisen war.

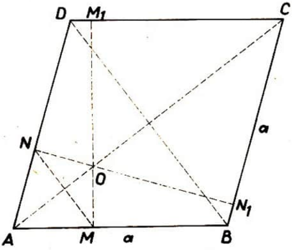


Abb. 161b

Aus dem Dreieck EMO erhält man $\overline{MO} = h \cot \alpha$ und aus dem Dreieck OM_1E dann $\overline{M_1O} = h \cot \beta$.

[1] In der räumlichen Darstellung (Abb. 161a) kann eines dieser Lote, z. B. $\overline{OM}$, durch eine beliebige Strecke dargestellt werden, dann ist aber das zweite eine ganz bestimmte Strecke, denn die Strecke $\overline{MN}$ muß parallel zur Diagonalen $\overline{BD}$ verlaufen. Das läßt sich leicht an der ebenen Darstellung (Abb. 161b) zeigen.

Folglich ist die Höhe h_a des Rhombus gleich $h_a = \overline{MM_1} = h(\cot\alpha + \cot\beta)$. Das bedeutet

$$V = \frac{1}{3} A_G h = \frac{1}{3} a h_a h = \frac{1}{3} a h^2 (\cot\alpha + \cot\beta).$$

Es gilt

$$A_O = A_G + 2A_{ABE} + 2A_{BCE} = a(h_a + \overline{EM} + \overline{EN_1}),$$

wobei

$$\overline{EM} = \frac{h}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \overline{EN_1} = \frac{h}{\sin\beta}$$

sind. Dann gilt

$$A_O = ah\left(\cot\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \cot\beta + \frac{1}{\sin\beta}\right)$$

$$A_O = ah\left(\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta}\right).$$

Drückt man die Zähler und Nenner durch $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$ aus, so kann man kürzen und erhält

$$A_O = ah\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right).$$

Lösung: $V = \frac{1}{3} ah^2(\cot\alpha + \cot\beta) = \frac{1}{3} ah^2 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$;

$$A_O = ah\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) = \frac{ah \sin\frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}.$$

685. Es sei $\sphericalangle DAB$ (Abb. 162) der spitze Winkel des Rhombus, so daß $\overline{AC}$ die größere Diagonale und $\sphericalangle DAO = \frac{\alpha}{2}$ ist.

Man konstruiert $\overline{KM} \perp \overline{AC}$ und $\overline{MN} \perp \overline{BD}$.[1]

Ferner sei φ der Winkel, unter dem die Ebene ACE die Ebene der Grundfläche schneidet. Dann ist $\sphericalangle MKE = \varphi$ und $\sphericalangle MNE = \psi$. Zur Bestimmung von h drückt man $\overline{MK}$ und $\overline{MN}$ durch h aus und erhält

$$\overline{KM} = h\cot\varphi \quad \text{und} \quad \overline{MN} = h\cot\psi.$$

[1] In der Abbildung 162 verlaufen $\overline{KM} \parallel \overline{BD}$ und $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, weil die Diagonalen eines Rhombus aufeinander senkrecht stehen. Vergleichen Sie auch mit der vorherigen Fußnote!

Diese Ausdrücke setzt man in

$$a = \overline{AD} = \overline{AM} + \overline{DM} = \frac{\overline{KM}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\overline{MN}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ein und erhält

$$a = h\left(\frac{\cot\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cot\psi}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

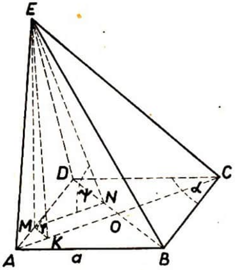


Abb. 162

Lösung: $V = \dfrac{a^3 \sin\alpha}{3\left(\dfrac{\cot\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cot\psi}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)} = \dfrac{a^3 \sin^2\alpha}{6\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cot\varphi + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\psi\right)}.$

Die Ebene, die die Grundfläche unter dem Winkel φ schneidet, hat die größere Diagonale, die unter dem Winkel ψ schneidende die kleinere Diagonale als Schnittlinie.

686. In der Abbildung 163 stellt die Strecke $\overline{AC}$ die Hypotenuse der Grundfläche dar. Zur Kennzeichnung des Winkels α, den die Seitenflächen CAA_1C_1 und CBB_1C_1 miteinander bilden, muß man eine Ebene senkrecht zur Kante $\overline{CC_1}$ festlegen. Im gegebenen Falle kann diese Ebene durch die Kathete $\overline{AB}$ verlaufen. Um das zu zeigen, muß man nachweisen, daß $\overline{AB}$ senkrecht zu $\overline{CC_1}$ verläuft. Nach Voraussetzung ist D, die Mitte von $\overline{BC}$, die Projektion von C_1. Wenn man durch C eine Gerade g senkrecht zu $\overline{BC}$ legt, dann muß g auch senkrecht zu $\overline{CC_1}$ verlaufen (Satz über drei Senkrechte). Da $\overline{AB}$ parallel zu g ist, muß $\overline{AB}$ senkrecht zu $\overline{CC_1}$ verlaufen, was zu beweisen war. Man legt durch $\overline{AB}$ eine Ebene ABE senkrecht zu $\overline{CC_1}$. Die Mantelfläche des Prismas ist dann gleich dem Produkt des Umfanges $\overline{BE} + \overline{AB} + \overline{AE}$ des senkrechten Schnittes mit der

Kantenlänge $\overline{CC_1}$. Im rechtwinkligen Dreieck BEC ist $\sphericalangle ECB = \beta$ (nachweisen!) und $\overline{BC} = a$. Man erhält $\overline{BE} = a \sin \beta$. Die Gerade g und damit auch die zu ihr parallele Strecke $\overline{AB}$ stehen senkrecht auf der Fläche BB_1C_1C. Deshalb ist das Dreieck ABE rechtwinklig in B. Das bedeutet

$$\overline{AB} = \overline{BE} \tan \alpha \quad \text{und} \quad \overline{AE} = \frac{\overline{BE}}{\cos \alpha},$$

so daß

$$\overline{BE} + \overline{AB} + \overline{AE} = a \sin \beta \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$$

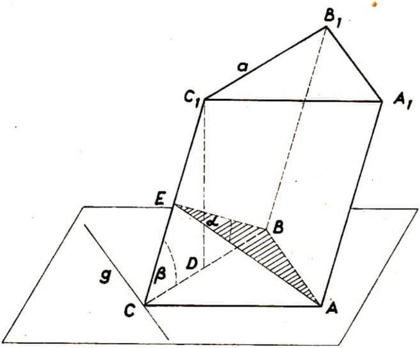


Abb. 163

ist. Die Länge der Kante $\overline{CC_1}$ berechnet man aus dem Dreieck DCC_1 $\left(\overline{CD} = \frac{a}{2}\right)$. Man erhält

$$\overline{CC_1} = \frac{a}{2 \cos \beta},$$

so daß

$$A_M = (\overline{BE} + \overline{AB} + \overline{AE}) \cdot \overline{CC_1} = \frac{a^2 \tan \beta}{2} \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$$

gilt.

Man formt nun den Ausdruck in der Klammer wie in der Lösung der Aufgabe 673 um und ersetzt $\cos \alpha$ so, wie es in der Aufgabe 681 gezeigt wurde.

Lösung: $$A_M = \frac{a^2 \tan \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

687. Wie in der Lösung der vorigen Aufgabe zeigt man, daß die Kante $\overline{AA_1}$ senkrecht zu $\overline{BC}$ (Abb. 164) verläuft, daß folglich auch $\overline{BB_1} \perp \overline{BC}$ und daß die Fläche BB_1C_1C ein Rechteck ist. $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1AB = 2\alpha$. (Zum Beweis vergleichen Sie mit der Lösung der Aufgabe 669!) Folglich gilt:

$$ACC_1A_1 \cong ABB_1A_1.$$

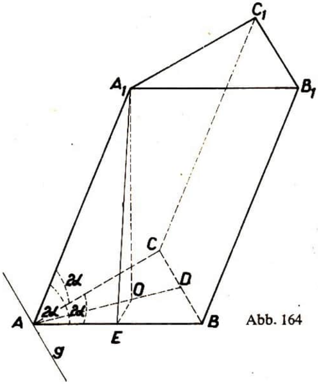


Abb. 164

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Grundkante $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{EO}$ steht senkrecht auf $\overline{AB}$ (O ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC). Dann ist $\overline{A_1E} \perp \overline{AB}$ (Satz über drei Lote).
Der Sinussatz liefert

$$\overline{AB} = 2r \sin(90^\circ - \alpha) = 2r \cos\alpha.$$

Dann ist

$$A_G = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 \sin 2\alpha = 2r^2 \cos^2\alpha \sin 2\alpha.$$

Aus dem Dreieck AEA_1 erhält man

$$\overline{AA_1} = l = \frac{\overline{AE}}{\cos 2\alpha} = \frac{\overline{AB}}{2\cos 2\alpha} = \frac{r\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

und aus dem Dreieck AOA_1

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{r}{\cos 2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha}.$$

Den Radikanden formt man so um, wie es in der Lösung der Aufgabe 656 gezeigt wurde. Die Seite $\overline{BC}$ ist gleich

$$2\overline{BD} = 2\overline{AB} \sin \alpha .$$

Folglich gilt

$$V = A_G \cdot h = 2r^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha \frac{r}{\cos 2\alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$$

$$V = 2r^3 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$$

und

$$A_M = 2A_{ABB_1A_1} + A_{BB_1C_1C} = 2l \cdot \overline{AB} \cdot \sin 2\alpha + 2l \cdot \overline{AB} \cdot \sin \alpha$$

$$A_M = 2l \cdot \overline{AB} \cdot (\sin 2\alpha + \sin \alpha).$$

Lösung: $V = 2r^3 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha \sqrt{\sin 3\alpha \sin \alpha}$:

$$A_M = \frac{8r^2 \cos^2 \alpha \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}.$$

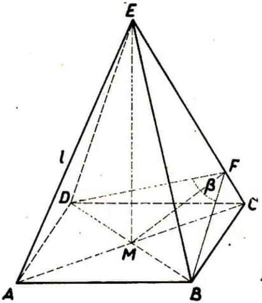


Abb. 165

688. Man konstruiert im Dreieck MCE (Abb. 165) die Höhe $\overline{FM}$. Dann ist $\sphericalangle BFD = \beta$ (nachweisen!). Nun wird $\overline{CM} = \overline{BM}$ durch x ersetzt und x aus der Formel $\overline{CM}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CF}$ errechnet, wobei $\overline{CE} = l$ und $\overline{CF} = \sqrt{x^2 - \overline{FM}^2}$ sind. Aus dem Dreieck MBF erhält man

$$\overline{FM} = \overline{BM} \cot \frac{\beta}{2} = x \cot \frac{\beta}{2},$$

so daß

$$\overline{CF} = x \sqrt{1 - \cot^2 \frac{\beta}{2}}$$

ist.

Setzt man die gefundenen Ausdrücke in die Formel $\overline{CM}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CF}$ ein, so erhält man die Gleichung

$$x^2 = l \cdot x \sqrt{1 - \cot^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Die Wurzel $x = 0$ ist offensichtlich nicht sinnvoll, so daß

$$x = \overline{CM} = l \sqrt{1 - \cot^2 \frac{\beta}{2}}$$

ist.

Folglich ist $h = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CM}^2} = \sqrt{l^2 - x^2} = l \cot \frac{\beta}{2}$.

Jetzt erhält man $V = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 h$.

Bemerkung:

Der Wert von $\cos\beta$ ist negativ, da $\frac{\beta}{2} > 45°$ ist $\left(\text{denn } \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{FM}};\right.$ die Strecke $\overline{CM}$ ist aber länger als die Senkrechte $\overline{FM}$, folglich ist $\left.\tan\frac{\beta}{2} > 1\right)$.

Lösung: $V = \frac{2}{3} l^3 \cot\frac{\beta}{2}\left(1 - \cot^2\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{2}{3} l^3 \frac{\cot\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

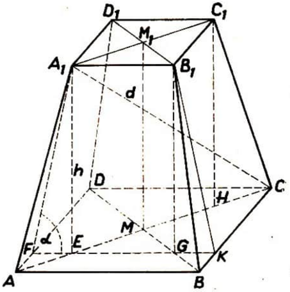


Abb. 166

689. Aus dem Dreieck FEA_1 (Abb. 166) mit dem Winkel $A_1FE = \alpha$ erhält man $\overline{EF} = h \cot\alpha$ und aus dem Dreieck ECA_1, in dem $\overline{A_1C} = d$ ist, $\overline{CE} = \sqrt{d^2 - h^2}$.

Folglich ist $\overline{EK} = \frac{\overline{CE}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{d^2 - h^2}{2}}$.

Jetzt bestimmt man die Seiten der Grundflächen

$$\overline{AB} = a = \overline{EK} + \overline{EF} \quad \text{und} \quad \overline{A_1B_1} = \overline{EG} = b = \overline{EK} - \overline{GK}$$
$$= \overline{EK} - \overline{EF}.$$

In der Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes kommt die Summe $a^2 + ab + b^2$ vor. Man erhält dafür den Ausdruck

$$(\overline{EK} + \overline{EF})^2 + (\overline{EK} + \overline{EF})(\overline{EK} - \overline{EF}) + (\overline{EK} - \overline{EF})^2 = 3\,\overline{EK}^2 + \overline{EF}^2.$$

Lösung: $V = \frac{h}{3}(3 \cdot \overline{EK}^2 + \overline{EF}^2) = \frac{h}{6}[3(d^2 - h^2) + 2h^2 \cot^2 \alpha]$

690. Der Lösungsweg dieser Aufgabe wird gleichfalls an der Abbildung 166 veranschaulicht. Hierzu gelten die Bezeichnungen: $\overline{AA_1} = l$ und $\sphericalangle A_1AC = \beta$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACA_1 erhält man

$$\overline{AC} = \frac{l}{\cos\beta},$$

so daß

$$a = \overline{FK} = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\beta}$$

ist.

Im Dreieck AEA_1 ist $h = l\sin\beta$ und $\overline{AE} = l\cos\beta$, so daß

$$\overline{EF} = \frac{l\cos\beta}{\sqrt{2}}$$

gilt.

Folglich ist

$$b = \overline{EG} = \overline{FK} - 2\overline{EF} = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\beta}(1 - 2\cos^2\beta) = -\frac{l\cos 2\beta}{\sqrt{2}\cos\beta}.$$

Jetzt erhält man

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{l^3\sin\beta}{6\cos^2\beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta).$$

Wenn man den Bruch mit $(1 + \cos 2\beta)$ erweitert und einige trigonometrische Umformungen vornimmt, so erhält man einen sehr einfachen Ausdruck.

Bemerkung: Der Winkel β muß größer als 45° sein, da $\overline{FK} > 2\overline{EF}$ sein muß. Deshalb ist $\cos 2\beta < 0$.

Lösung: $V = \frac{l^3\sin\beta}{6\cos^2\beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta)$

$$= \frac{l^3\sin\beta(1 + \cos^3 2\beta)}{12\cos^4\beta}.$$

691. Aus den Dreiecken AEA_1 und ECA_1 (Abb. 167[1]) erhält man

$$\overline{AE} = h \cot \alpha \quad \text{und} \quad \overline{CE} = h \cot \beta .$$

Die Mantelfläche ist gleich

$$A_M = 4 \frac{a+b}{2} \overline{A_1N} = 2(a+b)\,\overline{A_1N}.$$

Die Flächenhöhe $\overline{A_1N}$ kann im Dreieck A_1NE bestimmt werden. Hier ist

$$\overline{EN} = \frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}} \cot \alpha .$$

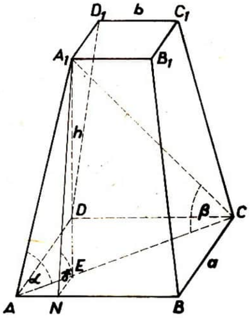


Abb. 167

Man erhält $\overline{A_1N} = h \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cot^2 \alpha}$.

Nun bestimmt man den Wert der Summe

$$a + b = \overline{AB} + \overline{A_1B_1} = 2\overline{A_1B_1} + 2\overline{AN} = 2\overline{BN} = \overline{CE} \cdot \sqrt{2} = h\sqrt{2} \cot \beta .$$

Folglich ist

$$A_M = 2h\sqrt{2} \cot \beta \cdot h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cot^2 \alpha}.$$

Lösung: $A_M = 2h^2 \cot \beta \sqrt{2 + \cot^2 \alpha}$.

692. Im Dreieck NEA_1 (ebenfalls Abb. 167) ist

$$\overline{EN} = \overline{AN} = \frac{\overline{AB} - \overline{A_1B_1}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

[1] Zur Darstellung eines Pyramidenstumpfes vergleichen Sie die Lösung der Aufgabe 626 auf Seite 131!

Man erhält

$$h = \overline{A_1E} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)\tan\gamma$$

und

$$\overline{A_1N} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2\cos\gamma}.$$

Jetzt können das Volumen und die Mantelfläche bestimmt werden:

$$V = \frac{h}{3}(3a^2 + a^2 + a^2\sqrt{3}) = \frac{a^3}{6}(\sqrt{3} - 1)(4 + \sqrt{3})\tan\gamma$$

und

$$A_M = 2(\overline{AB} + \overline{A_1B_1})\cdot\overline{A_1N} = 2a(\sqrt{3} + 1)\frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2\cos\gamma} = \frac{2a^2}{\cos\gamma}.$$

Folglich ist

$$A_O = A_M + 3a^2 + a^2 = \frac{2a^2(1 + 2\cos\gamma)}{\cos\gamma}.$$

Den Ausdruck in der Klammer formt man so um, daß er bequem zu logarithmieren ist.

Lösung: $V = \dfrac{a^3(3\sqrt{3} - 1)\tan\gamma}{6} \approx 0{,}7a^3\tan\gamma;$

$$A_O = \frac{2a^2(1 + 2\cos\gamma)}{\cos\gamma} = \frac{8a^2\cos\left(\frac{\gamma}{2} + 30^\circ\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2} - 30^\circ\right)}{\cos\gamma}.$$

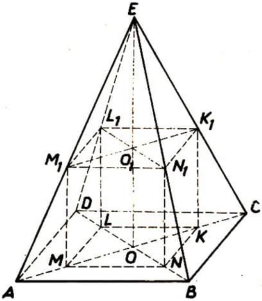


Abb. 168

693. Die Länge der Würfelkante sei x (Abb. 168). Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke O_1K_1E und OCE folgt

$$\frac{\overline{EO_1}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{K_1O_1}}{\overline{CO}}.$$

Hierbei sind

$$\overline{EO_1} = \overline{EO} - \overline{OO_1} = h - x, \quad \overline{EO} = h, \quad \overline{K_1O_1} = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \overline{CO} = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Folglich ist $\dfrac{h - x}{h} = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 - h^2}}$.

Lösung: $x = \dfrac{h\sqrt{2(l^2 - h^2)}}{h + \sqrt{2(l^2 - h^2)}}$.

694. Im Dreieck OFE (Abb. 169) ist $\overline{FO} = \dfrac{a}{2}$ und $\sphericalangle FEO = \alpha$.

Man findet $h = \dfrac{a}{2}\cot\alpha$. Folglich ist das Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{6}a^3\cot\alpha.$$

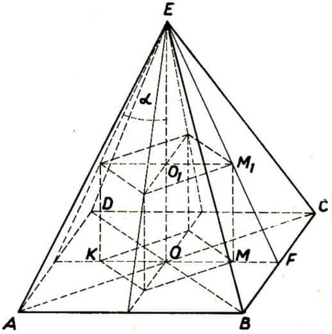


Abb. 169

Drückt man die Seitenlänge a durch die Kantenlänge $x = \overline{MM_1}$ des Würfels aus, so erhält man

$$a = 2\overline{FO} = 2\overline{MO} + 2\overline{FM} = \overline{KM} + 2\overline{MM_1}\tan\alpha = x\sqrt{2} + 2x\tan\alpha.$$

Folglich ist

$$V = \frac{x^3(\sqrt{2} + 2\tan\alpha)^3\cot\alpha}{6}.$$

Dabei ist $x^3 = V_1$ das Volumen des Würfels.

Lösung: $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{(\sqrt{2} + 2\tan\alpha)^3\cot\alpha}{6}$.

695. a) *Darstellungsverfahren:*

Zuerst stellt man die Schnittfläche $A_1B_1M_1$ (Abb. 170) dar, in der die „obere" Fläche $K_1L_1M_1N_1$ des Würfels liegt. Diese Schnittfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in M_1. Da die Eckpunkte K_1, L_1, M_1 und N_1 auf den Seitenflächen liegen sollen, müssen sie auf den Seiten des Dreiecks $A_1B_1M_1$ liegen. (Der Punkt M_1 fällt mit dem Scheitel des rechten Winkels zusammen. Die Strecke $\overline{K_1M_1}$ stellt die Winkelhalbierende des rechten Winkels

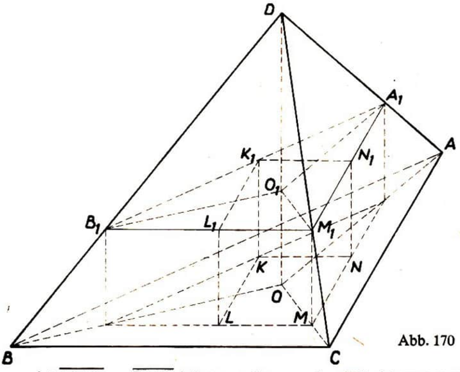


Abb. 170

dar, denn es ist $\overline{M_1N_1} = \overline{L_1M_1}$.) Jetzt stellt man den Würfel $KLMNK_1L_1M_1N_1$ dar. Innerhalb des Vierecks $K_1L_1M_1N_1$ legt man einen beliebigen Punkt O_1, das Bild des Schnittpunktes der Höhe $\overline{DO}$ mit der Fläche $K_1L_1M_1N_1$, fest und verbindet ihn geradlinig mit einem entsprechend im Viereck $KLMN$ gelegenen Punkt O. Nun werden die Strecken $\overline{A_1O_1}$, $\overline{B_1O_1}$, $\overline{M_1O_1}$ und dazu die parallelen Geraden durch O konstruiert. Die Geraden durch DA_1, DB_1 und DM_1 schneiden diese Geraden in den Punkten A, B und C.

b) *Lösungsweg:*

Nach Voraussetzung sind $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm und $\overline{DO} = 24$ cm.[1]

Die Kantenlänge des Würfels sei x cm.

Dann sind $\overline{OO_1} = x$ cm und $\overline{DO_1} = 24\text{ cm} - x$ cm.

Da die Schnittfläche parallel zur Grundfläche der Pyramide liegt, gilt

$$\overline{B_1M_1} : \overline{BC} = \overline{DO_1} : \overline{DO}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{B_1M_1} : 8\text{ cm} = (24 - x)\text{ cm} : 24\text{ cm},$$

woraus

$$\overline{B_1M_1} = \frac{8(24 - x)}{24}\text{ cm} = \frac{24 - x}{3}\text{ cm}$$

folgt.

[1] In der Abbildung 170 wurden diese Maße nicht berücksichtigt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $K_1B_1L_1$ und ABC folgt $\overline{K_1L_1} : \overline{B_1L_1} = 6:8$. Hierbei sind $\overline{K_1L_1} = x$ cm und

$$\overline{B_1L_1} = \overline{B_1M_1} - \overline{L_1M_1} = \frac{24-x}{3}\,\text{cm} - x\,\text{cm} = \frac{24-4x}{3}\,\text{cm}.$$

Folglich ist

$$x : \frac{24-4x}{3} = 6:8,$$

woraus $x = 3$ cm folgt.

Lösung: $x = 3$ cm.

696. Die Schnittfläche BCC_1B_1 (Abb. 171) ist ein Trapez (nachweisen!). Nun wird die Ebene MNE betrachtet. (Die Punkte M und N sind Mitten der Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.) Sie schneidet die Ebene BCC_1B_1 in der Strecke $\overline{KN}$. (Der Punkt K ist Seitenmitte von $\overline{B_1C_1}$.) Es ist

$$\sphericalangle EMN = \sphericalangle MNE = \alpha \quad \text{und} \quad \sphericalangle MNK = \beta$$

(nachweisen!). Die Höhe $\overline{KN}$ des Trapezes BCC_1B_1 bestimmt man aus dem Dreieck MNK. Hier sind $\overline{MN} = a$ und $\sphericalangle NKM = 180° - (\alpha + \beta)$. Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\overline{KN}}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{KN} = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

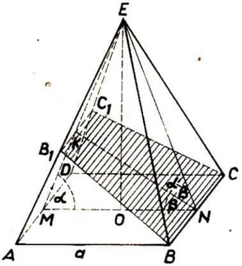


Abb. 171

Jetzt bestimmt man die obere Grundseite $\overline{B_1C_1}$ des Trapezes. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADE und B_1C_1E folgt

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a \cdot \overline{EK}}{\overline{EM}} = \frac{a \cdot \overline{EK}}{\overline{EN}}.$$

Den Wert des Verhältnisses $\dfrac{\overline{EK}}{\overline{EN}}$ bestimmt man aus dem Dreieck KNE. Hier sind $\sphericalangle KNE = \alpha - \beta$ und $\sphericalangle EKN = \alpha + \beta$ (Außenwinkel des Dreiecks MNK). Man erhält

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{EN}} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Folglich ist

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Die Schnittfläche ist

$$A_S = \frac{a + \dfrac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Lösung: $A_S = \dfrac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$.

697. a) *Darstellungsverfahren:*

Zunächst stelle man die Pyramide $HPGQE$ (Abb. 172) dar und zeichne die Strecke $\overline{MN}$ ein, in der sich die beiden genannten Ebenen schneiden sollen. Diese Strecke verläuft parallel zur Seite $\overline{HP}$ der Grundfläche und schneidet die Achse $\overline{EO}$ im Punkt B. Die Endpunkte M und N der Strecke $\overline{MN}$ liegen auf den Seiten-

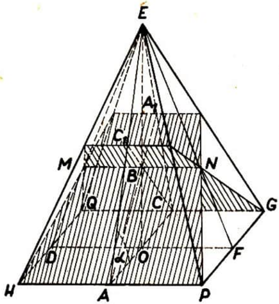


Abb. 172

halbierenden $\overline{EF}$ und $\overline{DE}$ der Seitenflächen. Konstruiert man dann die Geraden durch PN und GN, HM und QM, so erhält man die Darstellung der Ebenen, die einander in $\overline{MN}$ schneiden. Die Punkte A_1 und C_1 sind die Schnittpunkte der Geraden durch AB und CB mit den Seitenhalbierenden $\overline{CE}$ und $\overline{AE}$. (Die Punkte A und C sind die Mitten der Kanten $\overline{HP}$ und $\overline{GQ}$.) Der Winkel CBA stellt den Schnittwinkel der beiden Ebenen dar. Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle CBA = 90°$, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig, und es gilt

$$\overline{BO} = \overline{AO} = \frac{a}{2}.$$

b) *Lösungsweg:*
Es ist $\overline{DF} = a$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MNE und DFE folgt

$$\overline{MN} = a\frac{\overline{BE}}{\overline{EO}}.$$

Der Winkel EAO stellt den Winkel α zwischen Grund- und Seitenfläche dar. Also ist

$$\overline{EO} = \overline{AO} \cdot \tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha.$$

Außerdem ist

$$\overline{BE} = \overline{EO} - \overline{BO} = \frac{a}{2}(\tan\alpha - 1).$$

Folglich gilt

$$\overline{MN} = a\frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha} = a(1 - \cot\alpha).$$

Lösung: $\overline{MN} = a(1 - \cot\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}\,a\sin(\alpha - 45°)}{\sin\alpha}.$

698. a) *Darstellungsverfahren:*
Man konstruiert die Strecke $\overline{CM}$ (Abb. 173). Sie stellt das Lot von C auf $\overline{AE}$ dar. Der Punkt O_1 liegt im Schnittpunkt von $\overline{CM}$ mit der Körperhöhe $\overline{EO}$. Durch O_1 legt man $\overline{KN} \parallel \overline{BD}$. Das Viereck $KCNM$ stellt die Schnittfläche dar. Der Beweis geht aus der nachfolgenden Lösung hervor.

b) *Lösungsweg:*
Da die Ebene $KCNM$ senkrecht auf der Kante $\overline{AE}$ steht, müssen auch die Seiten $\overline{KM}$ und $\overline{MN}$ sowie die Diagonale $\overline{CM}$ der Schnittfläche $KCNM$ senkrecht auf $\overline{AE}$ stehen. Da die Diagonale $\overline{CM}$ in der Ebene des gleichschenkligen Dreiecks ACE liegt, muß sie die Strecke $\overline{EO}$, die Höhe dieses Dreiecks, schneiden. Andererseits liegt die Diagonale $\overline{KN}$ in der Ebene des Dreiecks BDE und verläuft, wie nachfolgend gezeigt wird, parallel zur Basis dieses Dreiecks. Auch sie schneidet die Strecke $\overline{EO}$, die Höhe des Dreiecks BDE. Da aber die Ebene $KCNM$ mit der Strecke $\overline{EO}$ nur einen Punkt O_1 gemeinsam hat, müssen die Diagonalen

$\overline{KN}$ und $\overline{CM}$ einander in diesem Punkt schneiden. Die Ebene $KCNM$ steht senkrecht auf der Kante $\overline{AE}$, deshalb sind die Winkel KME und EMN gleich 90°. Die rechtwinkligen Dreiecke KME und EMN sind kongruent (nachweisen!), also gilt $\overline{KM} = \overline{MN}$ und $\overline{EK} = \overline{EN}$. Aus den letzten beiden Aussagen folgt,

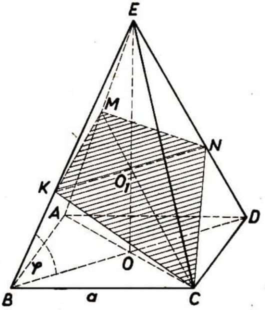


Abb. 173

daß $\overline{KN}$ parallel zu $\overline{BD}$ verläuft und $\overline{KO_1} = \overline{NO_1}$ ist. Also stehen die Diagonalen $\overline{CM}$ und $\overline{KN}$ senkrecht aufeinander, und es gilt $A = \frac{1}{2}\overline{CM} \cdot \overline{KN}$. Die Diagonale $\overline{CM}$ erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM. Dort sind $\sphericalangle MAC = \varphi$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$. Man findet $\overline{CM} = a\sqrt{2}\sin\varphi$.

Die Diagonale $\overline{KN}$ bestimmt man aus dem gleichschenkligen Dreieck KNE ($\sphericalangle EKN = \varphi$). Man erhält $\overline{KN} = 2\overline{EO_1}\cot\varphi$, wobei $\overline{EO_1} = \overline{EO} - \overline{OO_1}$ ist.

Die Strecke $\overline{EO}$ wird aus dem Dreieck AOE (oder BOE) zu $\overline{EO} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$ bestimmt. Die Strecke $\overline{OO_1}$ findet man im Dreieck OCO_1 mit

$$\sphericalangle OCO_1 = 90° - \sphericalangle MAC = 90° - \varphi.$$

Man erhält

$$\overline{OO_1} = \overline{CO}\tan(90° - \varphi) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi.$$

Also ist

$$\overline{KN} = 2\overline{EO_1}\cot\varphi = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi - \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi\right)\cot\varphi$$
$$= a\sqrt{2}(1 - \cot^2\varphi).$$

Folglich gilt

$$A = \frac{1}{2}\overline{CM} \cdot \overline{KN} = a^2(1 - \cot^2\varphi)\sin\varphi = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Bemerkung: Damit die Ebene $KCNM$, die senkrecht auf $\overline{AE}$ steht, die Pyramide schneidet, ist es notwendig, daß ihr Schnittpunkt M mit der Kante $\overline{AE}$ auf dieser Strecke (nicht auf deren Verlängerung) liegt. Der Winkel CEA muß deshalb spitz sein, d. h. $\sphericalangle CEA = 180° - 2\varphi < 90°$. Folglich ist $\varphi > 45°$ und deshalb der Wert von $\cos 2\varphi$ negativ.

Lösung: $A = -\dfrac{a^2 \cos 2\varphi}{\sin \varphi} = \dfrac{a^2 \cos (180° - 2\varphi)}{\sin \varphi}$.

699. Das Viereck $AMKN$ (Abb. 174), das durch den Schnitt einer Ebene mit dem Mantel des Prismas entsteht, ist immer ein Parallelogramm (nachweisen!). Damit ein Rhombus entsteht, muß $\overline{AM} = \overline{AN}$ sein. Aus der Kongruenz der Dreiecke ADN und ABM (nachweisen!) folgt $\overline{DN} = \overline{BM}$. Das bedeutet, die Strecke $\overline{MN}$ verläuft parallel zu $\overline{BD}$ und damit auch parallel zur Ebene $ABCD$.

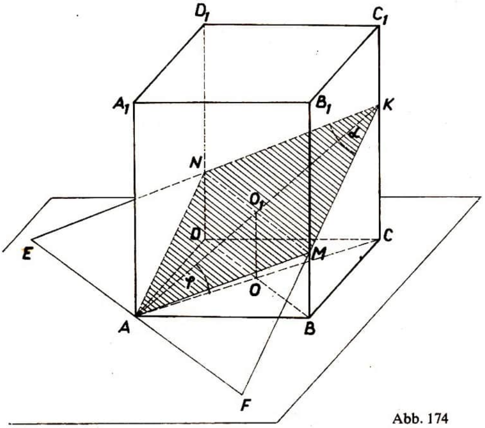


Abb. 174

Also ist die Gerade durch E und F, in der die Ebenen $AMKN$ und $ABCD$ einander schneiden, eine Parallele zur Diagonalen $\overline{MN}$ (und zur Diagonalen $\overline{BD}$) und steht senkrecht auf der anderen Diagonalen $\overline{AK}$ (und auf der Diagonalen $\overline{AC}$) des Rhombus. Daraus folgt, daß $\varphi = \sphericalangle KAC$ der gesuchte Winkel zwischen Schnitt- und Grundflächenebene ist. Die Strecke $\overline{OO_1}$ verbindet den Mittelpunkt des Rhombus mit dem Mittelpunkt der Prismengrundfläche und steht senkrecht auf der Grundfläche (nachweisen!). Im Dreieck AOO_1 gilt

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AO}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{MO_1}}{\overline{AO_1}} = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

Bemerkung: Die Ebene, die durch die Geraden $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$ bestimmt ist, schneidet die Kante $\overline{CC_1}$ nur in dem Falle, daß $\overline{CC_1} \geqq \overline{CK}$ ist, d. h. wenn die Höhe des Prismas nicht kleiner als

$$a\sqrt{2}\tan\varphi = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ist. Anderenfalls ist es unmöglich, durch A oder durch einen anderen Punkt der Kante $\overline{AA_1}$ die gesuchte Ebene zu legen.

Lösung: $\varphi = \arccos\tan\frac{\alpha}{2}$.

Die Aufgabe ist nur für $h \geqq \dfrac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ lösbar.

700.[1] (Vergleichen Sie mit der Lösung der vorigen Aufgabe!)
Da $\overline{MN} = \overline{AC}$ (Abb. 175) und $\overline{BK} > \overline{BD}$ ist, nach Voraussetzung aber $\overline{BK} = \overline{MN}$ gilt, muß $\overline{AC} > \overline{BD}$ sein, d. h. $\overline{AC}$ ist die größere Diagonale des Rhombus, so daß der Winkel ABC der stumpfe und der Winkel DAB der spitze ist. Der

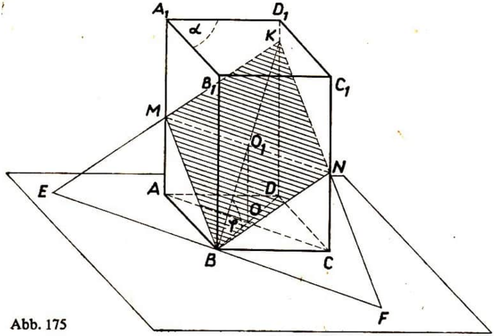


Abb. 175

[1] Zur Darstellung eines geraden Prismas vergleichen Sie mit der Abbildung 83 auf Seite 113!

Winkel $\varphi = \sphericalangle O_1BO$ ist der gesuchte Winkel zwischen Schnitt- und Grundflächenebene. Im Dreieck BOO_1 ist $\cos\varphi = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{BO_1}}$, wobei $\overline{BO} = \overline{AO}\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ist. Da $\overline{AO} = \overline{MO_1} = \overline{BO_1}$ ist, muß

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BO_1}\tan\frac{\alpha}{2}}{\overline{BO_1}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

sein.
Dabei gilt $\tan\dfrac{\alpha}{2} < 1$, weil α ein spitzer Winkel ist.

Lösung: $\varphi = \arccos\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

Die Aufgabe hat nur Lösungen für $\overline{DD_1} \geqq \dfrac{\overline{BD}\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

701. (Vergleichen Sie mit der Lösung der vorigen Aufgabe!)
Die Fläche A des Rhombus $BNKM$ (Abb. 176) ist gleich

$$A = \frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{KB} = 2\overline{MO_1}\cdot\overline{BO_1}.$$

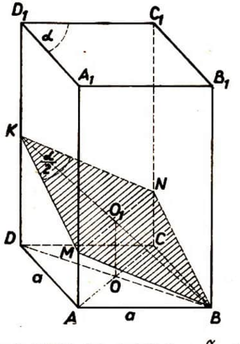


Abb 176

Im Dreieck MBO_1 ist $\sphericalangle MBO_1 = \dfrac{\alpha}{4}$. Man erhält $\overline{BO_1} = \overline{MO_1}\cdot\cot\dfrac{\alpha}{4}$.
Folglich ist

$$A = 2\overline{MO_1}^2\cot\frac{\alpha}{4} = 2\overline{AO}^2\cdot\cot\frac{\alpha}{4}.$$

Die Strecke $\overline{AO}$ bestimmt man aus dem Dreieck ABO. Dort sind $AB = a$ und $\sphericalangle ABO = \frac{\alpha}{2}$.

Man erhält

$$\overline{AO} = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Lösung: $A = 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\alpha}{4}$.

702.[1] Die genannte Ebene möge durch die Mitte M der Kante $\overline{AB}$ (Abb. 177) parallel zu den Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verlaufen. Die Kante $\overline{AC}$ liegt in der Ebene ABC. Deshalb schneidet die Ebene, die durch M parallel zu $\overline{AC}$ verläuft, die Fläche ABC in der Strecke $\overline{MN}$ parallel zu $\overline{AC}$. Das bedeutet, $\overline{MN}$ ist die Verbindung zweier Seitenmitten im Dreieck ABC $\left(\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{b}{2}\right)$. Dann ist also N die Mitte der Kante $\overline{BC}$. Die Kante $\overline{BD}$ liegt in der Ebene CBD, und die Schnittebene verläuft parallel zur Kante $\overline{BD}$. Deshalb liegt $\overline{LN} \parallel \overline{BD}$ $\left(\overline{LN} = \frac{1}{2} BD = \frac{b}{2}\right)$, und L ist die Mitte der Kante $\overline{CD}$. Auf diese Weise zeigt man auch, daß $\overline{KM} = \frac{b}{2}$ ist und daß K die Mitte der Kante $\overline{AD}$ ist.

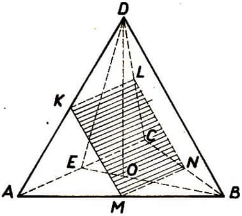


Abb. 177

Folglich ist $\overline{KL} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{KL} = \frac{b}{2}$; d. h., die Schnittfläche $MNLK$ ist ein Rhombus. Außerdem ist aber der Winkel KMN ein rechter. Begründung: Die Kante $\overline{BD}$ liegt in der Ebene EBD (der Punkt E ist die Mitte von $\overline{AC}$). Diese Ebene steht senkrecht auf der Kante $\overline{AC}$. Folglich ist $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Wie aber gezeigt wurde,

[1] Zur Darstellung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide vergleichen Sie mit der Abbildung 82 auf Seite 112!

verlaufen $\overline{KM} \parallel \overline{BD}$ und $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, d. h. $\overline{KM} \perp \overline{MN}$. Aus allem folgt, daß $MNLK$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{b}{2}$ ist.

Lösung: $A_S = \frac{b^2}{4}$.

703. Es sei $\overline{CD}$ (Abb. 178) die Seitenkante, die senkrecht auf der Ebene der Grundfläche steht. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD = \alpha$ ist, muß $\overline{AC} = \overline{BC}$ sein, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig, und nach Voraussetzung ist $\sphericalangle BCA = 90°$. Jede Ebene, die die Pyramide senkrecht zur Grundfläche schneidet, ist ein Viereck $NKLM$ mit zwei rechten Winkeln ($\sphericalangle NKL$ und $\sphericalangle KLM$)[1].

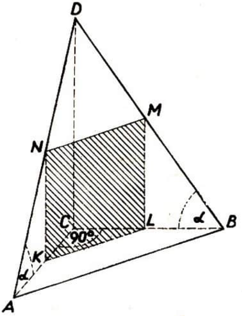


Abb. 178

Damit das Viereck ein Quadrat wird, muß $\overline{KN} = \overline{KL} = \overline{LM} = x$ sein. Aus der Kongruenz der Dreiecke AKN und MLB (nachweisen!) folgt, daß $\overline{AK} = \overline{BL}$, d. h. $\overline{CK} = \overline{CL}$ ist. Also gilt

$$\overline{CK} = \frac{\overline{KL}}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Aus dem Dreieck AKN erhält man $\overline{AK} = \overline{KN} \cdot \cot\alpha = x \cdot \cot\alpha$.
Da $\overline{CK} + \overline{AK} = \overline{AC} = a$ ist, erhält man die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + x\cot\alpha = a,$$

woraus $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}\cot\alpha}$ folgt.

[1] Sofern die genannten Ebenen beide Katheten der Grundfläche schneiden (Anmerkung der Übers.).

Lösung: $A = x^2 = \dfrac{2a^2}{(1 + \sqrt{2}\cot\alpha)^2}$.

704. Als Schnittfläche entsteht das Trapez MND_1A_1 (Abb. 179), das zur Seitenfläche BCC_1B_1 kongruent ist (nachweisen!). Im abgeschnittenen Körper $MBCNA_1B_1C_1D_1$ sind $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{BM}$ (parallele Strecken zwischen

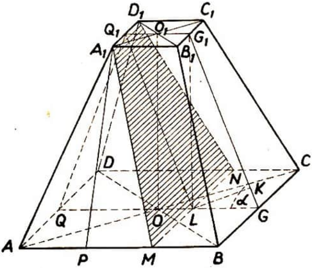


Abb. 179

parallelen Ebenen). Der erhaltene Körper ist ein schiefes Prisma mit der Grundfläche BCC_1B_1. Durch die Symmetrieachse $\overline{GG_1}$ der Seitenfläche des Pyramidenstumpfes und durch $\overline{GO}$ legt man die Ebene QGG_1Q_1. Man erhält $\sphericalangle LGG_1 = \alpha$ (nachweisen!). Das Lot, von L auf die Strecke $\overline{GG_1}$ gefällt, ist die Höhe des Prismas (nachweisen!). Aus dem Dreieck LGK mit $\overline{GL} = \overline{G_1Q_1} = a$ erhält man $\overline{KL} = a \sin\alpha$.

Im Dreieck LGG_1 ist $\overline{GG_1} = \dfrac{\overline{GL}}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Das Volumen V des Prismas berechnet man nach der Formel

$$V = \frac{\overline{B_1C_1} + \overline{BC}}{2}\,\overline{GG_1} \cdot \overline{KL}.$$

Nun wird die Oberfläche A_O des Körpers $AMNDA_1D_1$, der durch die Ebene MND_1A_1 abgeschnitten wurde, bestimmt. Die Fläche D_1A_1AD hat denselben Flächeninhalt wie die Schnittfläche MND_1A_1 (nachweisen!). Jede dieser Flächen hat die Größe

$$A_1 = \frac{a + 3a}{2}\,\overline{QQ_1},$$

wobei $\overline{QQ_1} = \overline{GG_1} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$ ist.

Jede der Seitenflächen AMA_1 und DND_1 hat den Flächeninhalt

$$A_2 = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{A_1P}}{2},$$

wobei $\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{BM} = 3a - a = 2a$ und

$$\overline{A_1P} = \overline{GG_1} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

sind.

Die Seitenfläche $DAMN$ ist gleich

$$A_3 = \overline{AM} \cdot \overline{AD} = 2a \cdot 3a.$$

Man erhält: $A_O = 2A_1 + 2A_2 + A_3$.

Lösung: $V = 2a^3 \tan\alpha$; $\quad A_O = \dfrac{12a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Vorbemerkung zur Aufgabe 705 und zu den folgenden Aufgaben

Zur Lösung der Aufgaben 705 bis 708 benötigt man den folgenden Satz:

> *Wenn ein Vieleck $ABCDE \ldots$, das in der Ebene E liegt, auf eine Ebene E_1 projiziert wird (senkrechte Parallelprojektion), so daß ein Vieleck $A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots$ entsteht, dann besteht zwischen der Fläche A des n-Ecks $ABCDE \ldots$ und der Fläche A_1 des Vielecks $A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots$ die Beziehung $A_1 = A\cos\alpha$, wobei α der Winkel zwischen den Ebenen E und E_1' ist.*

In Aufnahmeprüfungen werden häufig Aufgaben gestellt, bei deren Lösung man ohne diesen Satz kaum auskommt.[1] In unseren Schulen wird dieser Satz aber nicht behandelt. Deshalb wird der Satz nachfolgend bewiesen.

Beweis: Zuerst wird der Fall betrachtet, bei dem das Original ein Dreieck ABC (Abb. 180a) ist, dessen Seite $\overline{AB}$ parallel zur Bildebene E_1' verläuft. Durch $\overline{AB}$ wird eine Ebene E' parallel zur Ebene E_1' gelegt (E ist ihr Schnittpunkt mit dem Projektionsstrahl $\overline{CC_1}$). Man erhält das Dreieck ABE. Es ist zum Dreieck $A_1B_1C_1$ kongruent. Nun wird die Höhe $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC konstruiert. Die Strecke $\overline{DE}$ ist Höhe im Dreieck ABE, und der Winkel CDE ist der Neigungswinkel α zwischen der Ebene des Dreiecks ABC und der Ebene E'. Aus dem Dreieck DEC erhält man $\overline{DE} = \overline{CD}\cos\alpha$. Folglich ist

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}\cos\alpha = A\cos\alpha.$$

[1] Das trifft zum Beispiel für die Aufgaben 705 und 706 zu.

Jetzt betrachtet man den Fall, daß das Dreieck LMN das Original ist (Abb. 180b). Keine Seite der Figur verläuft parallel zu E_1'. Dieses Dreieck kann man in zwei Dreiecke des Typs, der oben behandelt wurde, zerlegen. Dazu legt man durch einen Eckpunkt M (es darf weder der mit der größten noch der mit der kleinsten Entfernung von E_1' sein) eine Ebene E' parallel zu E_1'. Sie schneidet das

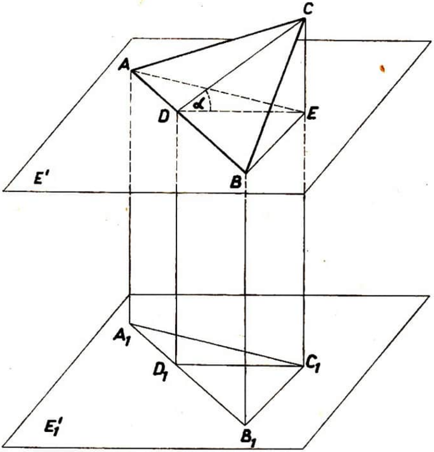


Abb. 180a

Dreieck LMN in der zu E_1' parallelen Strecke $\overline{KM}$. Wenn A' und A'' die Flächen der Dreiecke KMN bzw. LMK sowie A_1' und A_1'' die Flächen ihrer Bilder (der Dreiecke $K_1M_1N_1$ und $L_1M_1K_1$) sind, dann gilt, wie bereits gezeigt wurde,

$$A_1' = A' \cos\alpha \quad \text{und} \quad A_1'' = A'' \cos\alpha.$$

Da aber $A = A' + A''$ und $A_1 = A_1' + A_1''$ sind, folgt

$$A_1 = A_1' + A_1'' = A' \cos\alpha + A'' \cos\alpha = (A' + A'') \cos\alpha = A \cos\alpha.$$

Den Fall, daß das n-Eck mehr als drei Seiten hat, kann man durch Zerlegung in Dreiecke auf den eben behandelten Fall zurückführen und analog die Richtigkeit des allgemeinen Satzes zeigen. Es sei noch vermerkt, daß dieser Satz auch für krummlinig begrenzte ebene Figuren gilt. Um das zu beweisen, muß man der krummlinig begrenzten Figur n-Ecke einbeschreiben und den Grenzwert derselben für wachsendes n betrachten.

705. Es gilt (Abb. 181) $A_G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ und $h = \overline{BB_1} = \overline{BD} + \overline{B_1D}$.

Aus den Dreiecken EBD und E_1DB_1 (E und E_1 sind die Seitenmitten von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{A_1C_1}$) erhält man

$$\overline{BD} = \overline{BE}\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$$

und

$$\overline{B_1D} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\beta.$$

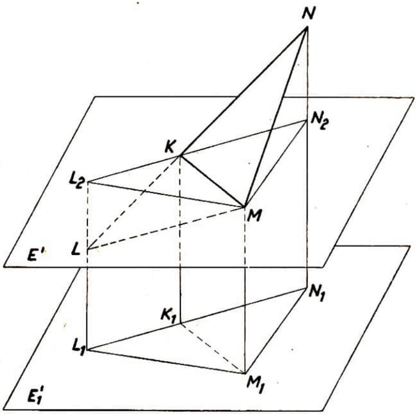


Abb. 180 b

Folglich ist

$$V = A_G \cdot h = \frac{3a^3}{8}(\tan\alpha + \tan\beta) = \frac{3a^3\sin(\alpha+\beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}.$$

Die Projektion der Schnittfläche ADC auf die Ebene der unteren Grundfläche ergibt das Dreieck ABC. Wie in den Vorbemerkungen zur Aufgabe 705 gezeigt, besteht zwischen der Fläche A_S des Dreiecks ADC und der Grundfläche A_G (Dreieck ABC) die Beziehung $A_G = A_S\cos\alpha$. Also gilt

$$A_S = \frac{A_G}{\cos\alpha}.$$

Ebenso zeigt man durch Projektion der Schnittfläche A_1DC_1 auf die Deckfläche, daß die Fläche A_S' des Dreiecks A_1DC_1 gleich $A_S' = \dfrac{A_G}{\cos\beta}$ ist. Folglich gilt

$$A_S + A_S' = A_G\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right).$$

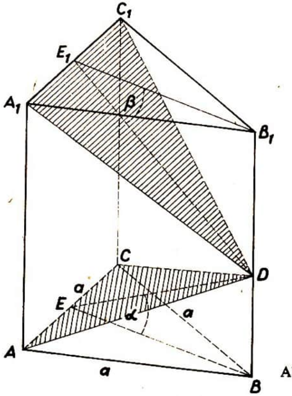


Abb. 181

Lösung: $V = \dfrac{3a^3 \sin(\alpha+\beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}$;

$$A_S + A_S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\sqrt{3}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

706. a) *Darstellungsverfahren:*
Man verbindet die Halbierungspunkte K und L (Abb. 182) der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ miteinander geradlinig. Durch den Punkt E, in dem $\overline{KL}$ und $\overline{AC}$ einander schneiden, zeichnet man die Gerade $\overline{EN}$. Der Winkel NEC stellt den Winkel α zwischen Schnitt- und Grundfläche dar. Die Strecke $\overline{EN}$ schneidet $\overline{OO_1}$, das Bild der Achse, im Punkt O_2. Durch O_2 zeichnet man $\overline{MP} \parallel \overline{BD}$. Das Fünfeck $KLMNP$ stellt die Schnittfläche dar. Der Beweis wird in der nachfolgenden Lösung erbracht.

b) *Lösungsweg:*
Da $\overline{KL} \parallel \overline{BD}$ ist, müssen die Ebene $KLMNP$ (sie verläuft durch $\overline{KL}$) und die durch $\overline{BD}$ verlaufende Ebene DBB_1D_1 in der parallel zu $\overline{KL}$ und $\overline{BD}$ verlaufenden

Strecke $\overline{MP}$ einander schneiden. Die Achse $\overline{OO_1}$ liegt in der Ebene des Diagonalschnittes DBB_1D_1 und schneidet folglich die Strecke $\overline{MP}$. Die Ebene des Diagonalschnittes ACC_1A_1 und die Ebene $KLMNP$ schneiden einander in der Strecke $\overline{EN}$ (E ist Mitte von $\overline{KL}$). Diese Strecke schneidet ebenfalls die Achse $\overline{OO_1}$. Da beide Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{EN}$ in der Ebene $KLMNP$ liegen, die Ebene mit der Achse aber nur einen Schnittpunkt O_2 hat, müssen beide Strecken $\overline{EN}$ und $\overline{MP}$ durch diesen Punkt verlaufen, d. h., der Schnittpunkt der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{EN}$ liegt auf der Achse $\overline{OO_1}$. Die Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{EN}$ stehen senkrecht auf $\overline{KL}$ (Satz über drei Senkrechte), d. h. $\sphericalangle NEC = \alpha$. Die Fläche A des Fünfecks $KLBCD$ ist gleich der Fläche des Quadrates $ABCD$, vermindert um die Fläche des Dreiecks ALK, also

$$A = b^2 - \frac{b^2}{8} = \frac{7}{8}b^2.$$

Die Fläche A_S des Fünfecks $KLMNP$ bestimmt man unter Anwendung des Satzes, der in der Vorbemerkung zur Aufgabe 705 genannt wurde. Man erhält

$$\frac{7}{8}b^2 = A_S \cos\alpha, \quad \text{d. h.} \quad A_S = \frac{7b^2}{8\cos\alpha}.$$

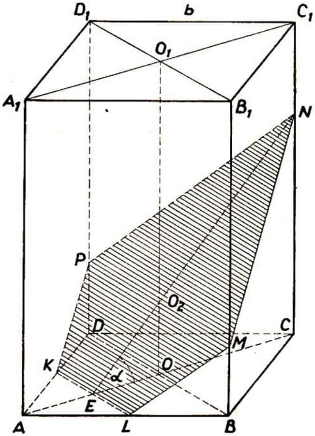


Abb. 182

Vergleicht man die Dreiecke O_2MN und OBC (hier sind $\overline{BO} = \overline{MO_2}$ und $\overline{MN} > \overline{BC}$) miteinander, dann kann man sich überzeugen, daß $\sphericalangle MNO_2 < \sphericalangle BCO$ ist. Da aber $\sphericalangle BCO = 45°$ ist, muß also $\sphericalangle MNO_2 < 45°$ sein. Folglich ist der Winkel $\varphi = \sphericalangle MNP$ spitz. Die restlichen Winkel der Schnittfläche sind stumpf (der spitze Winkel $O_2MN = 90° - \sphericalangle MNO_2$ ist größer als 45°, der Winkel KLM ist gleich $180° - \sphericalangle LMO_2 = 180° - \sphericalangle O_2MN$. Im Dreieck O_2MN gilt

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{MO_2}}{\overline{NO_2}}.$$

Es ist aber

$$\overline{NO_2} = \frac{\overline{CO}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{BO}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{MO_2}}{\cos\alpha},$$

folglich ist

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \cos\alpha.$$

Lösung: $A_S = \dfrac{7b^2}{8\cos\alpha}$; $\varphi = 2\arctan\cos\alpha$.

707. a) *Darstellungsverfahren:*

Man zeichnet zuerst die Grundfläche des Prismas gesondert (Abb. 183a). Dann konstruiert man eine Ellipse (Abb. 183b), das Bild des Inkreises der Grundfläche.[1] Man zeichnet einen beliebigen Durchmesser $\overline{MN}$ der Ellipse ein und konstruiert in M und N die Tangenten CD und AB an die Ellipse. Sie stellen die Geraden dar, auf denen die Grundseiten des gleichschenkligen Trapezes

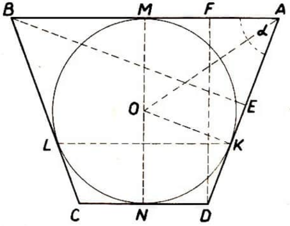


Abb. 183 a

liegen. Nun zeichnet man eine beliebige Gerade parallel zu $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ (zwischen $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$) ein. Durch ihre Schnittpunkte K und L mit der Ellipse konstruiert man die Tangenten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ an die Ellipse. Das Viereck $ABCD$ stellt das gleichschenklige Trapez dar, das dem Kreis umbeschrieben ist. Dann konstruiert man das Prisma $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Die Ebene, die durch die Grundkante $\overline{AD}$ und den Eckpunkt B_1 bestimmt ist, schneidet die Seitenfläche AA_1B_1B in der Strecke $\overline{AB_1}$ und die dazu parallele Seitenfläche in der Strecke $\overline{DG}$ parallel zu

[1] Zur Konstruktion einer Ellipse vergleichen Sie mit der Abbildung 92 auf Seite 120!

$\overline{AB_1}$. Als Schnittfläche erhält man das Viereck AB_1GD. Durch den Punkt B legt man eine Gerade $\overline{BE}$ parallel zum Berührungsradius $\overline{KO}$. Diese Gerade stellt das Lot von B auf $\overline{AD}$ dar. Folglich ist der Winkel BEB_1 die Darstellung des Winkels α zwischen Schnitt- und Grundfläche.

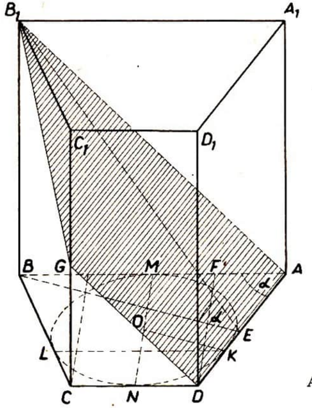


Abb. 183 b

b) *Lösungsweg:*
Im Dreieck DAF sind $\overline{DF} = \overline{MN} = 2r$ und $\sphericalangle DAF = \alpha$.
Man erhält

$$\overline{BC} = \overline{AD} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Man bezeichnet $\overline{AB}$ mit a, $\overline{CD}$ mit b und $\overline{AD} = \overline{BC}$ mit c.
Auf Grund der Eigenschaft des umbeschriebenen Vierecks ist

$$a + b = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2c = \frac{4r}{\sin\alpha}.$$

Man erhält

$$A_G = \frac{a+b}{2}\,h_a = \frac{2r}{\sin\alpha}\cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Folglich (siehe Vorbemerkung zur Aufgabe 705) ist

$$A_S = \frac{A_G}{\cos\alpha} = \frac{4r^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{8r^2}{\sin 2\alpha}.$$

Die Prismenhöhe $h = \overline{BB_1}$ findet man im Dreieck BEB_1, nachdem $\overline{BE}$ im Dreieck BEA bestimmt wurde, wobei

$$\overline{AB} = a = 2\overline{AM} = 2\overline{MO} \cot \sphericalangle OAM = 2r \cot \frac{\alpha}{2}$$

gilt.
Man erhält $\overline{BE} = a \sin \alpha$ und $h = \overline{BE} \tan \alpha$.
Folglich ist

$$h = 2r \cot \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \tan \alpha .$$

Jetzt bestimmt man $A_M = h(a + b + 2c) = 4hc$.

Lösung: $A_M = 16r^2 \tan \alpha \cot \frac{\alpha}{2}$; $\quad A_S = \dfrac{8r^2}{\sin 2\alpha}$.

708. a) *Darstellungsverfahren:*
Die Schnittebene E kann durch eine der beiden Diagonalen der Seitenfläche BCC_1B_1 verlaufen (Abb. 184). Man legt sie z. B. durch die Diagonale $\overline{BC_1}$. Nach Voraussetzung verläuft E parallel zu $\overline{AD}$. Folglich schneidet die Ebene E die Ebene der Grundfläche ABC in der Geraden g parallel zu $\overline{AD}$. (Die Gerade g

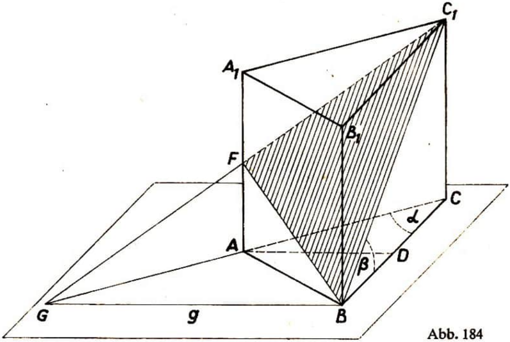


Abb. 184

liegt außerhalb des Dreiecks ABC.) Da die Seitenfläche BCC_1B_1 senkrecht auf $\overline{AD}$ steht, muß sie auch auf der Geraden g senkrecht stehen. Das bedeutet, daß der Winkel C_1BC der Neigungswinkel β der Schnittebene gegenüber der Grundfläche ist. Man zeichnet jetzt das Dreieck, also die Schnittfläche des Prismas mit der Ebene E. Eine Seite dieses Dreiecks, nämlich $\overline{BC_1}$, ist bekannt. Man muß also jetzt den gegenüberliegenden Eckpunkt, d. h. den Schnittpunkt der Ebene E

mit der Kante $\overline{AA_1}$, finden. Dazu genügt es, den Schnittpunkt G der Geraden g mit der Verlängerung der Kante $\overline{AC}$ mit C_1 zu verbinden. Der Punkt F, in dem die Strecke $\overline{C_1G}$ die Kante $\overline{AA_1}$ schneidet, ist der gesuchte Eckpunkt.

Das kann folgendermaßen bewiesen werden:

Da der Punkt G auf der Geraden g, in der einander die Ebenen E und ABC schneiden, liegt, muß er auch in der Ebene E liegen. Andererseits liegt G aber auf der Geraden durch A und C, in der die Ebenen ACC_1A_1 und ABC einander schneiden, d. h., er liegt in der Ebene ACC_1A_1 (er ist auf der ebenen Fortsetzung der Seitenfläche ACC_1A_1 zu finden). Folglich muß der Punkt E auf der Schnittgeraden der Ebenen E und ACC_1A_1 liegen. Der Punkt C_1 liegt nach Voraussetzung auch auf der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen. Folglich schneiden die Ebenen E und ACC_1A_1 einander in der Geraden durch C_1 und G, d. h., auf dieser Geraden liegt die Seite $\overline{C_1F}$ der Schnittfläche. Der Punkt F, in dem $\overline{C_1G}$ und die Kante $\overline{AA_1}$ einander schneiden, ist also der gesuchte Eckpunkt.

b) *Lösungsweg:*

Da das Dreieck ABC die Projektion des in der Ebene E liegenden Dreiecks FBC_1 auf die Ebene der Grundfläche ist, gilt

$$A_S = \frac{A_G}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha}{\cos\beta},$$

wobei $a = \overline{AC}$ die Schenkellänge des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist. Nun wird a^2 durch die Mantelfläche A_M ausgedrückt. Es gilt

$$A_M = (2\overline{AC} + \overline{BC}) \cdot \overline{CC_1}.$$

Dabei sind $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = 2a\cos\alpha$ und $\overline{CC_1} = \overline{BC}\tan\beta = 2a\cos\alpha\tan\beta$.
Folglich ist

$$A_M = 4a^2\cos\alpha(1 + \cos\alpha)\tan\beta = 8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\beta.$$

Lösung: $$A_S = \frac{A_M}{16} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cot\beta}{\cos\beta\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{A_M \tan\frac{\alpha}{2}}{4\sin\beta}.$$

709. a) *Darstellungsverfahren:*

Wenn man die Strecke $\overline{BC}$ (Abb. 185), das Bild einer Kathete der unteren Grundfläche, um die Strecke $\overline{BD} = \overline{BC}$ über B hinaus verlängert, erhält man den Punkt D, der in Wirklichkeit symmetrisch zu C bezüglich der Kathete $\overline{AB}$ liegt. Man legt den Halbierungspunkt M auf der Kante $\overline{AA_1}$ fest und stellt die Schnittfläche dar, die durch den Schnitt des Prismas mit der Ebene P entsteht. Die Ebene P verläuft durch die Punkte C_1, M und D. Dazu verbindet man die

Punkte C_1 und D geradlinig miteinander. Im Schnittpunkt dieser Strecke mit der Kante $\overline{BB_1}$ findet man den Punkt N. Das Dreieck MNC_1 ist das Bild der gesuchten Schnittebene. Der Punkt D liegt tatsächlich auf der Geraden durch $\overline{BC}$, d. h., er liegt in der Ebene BCC_1B_1. Der Punkt D liegt außerdem in der

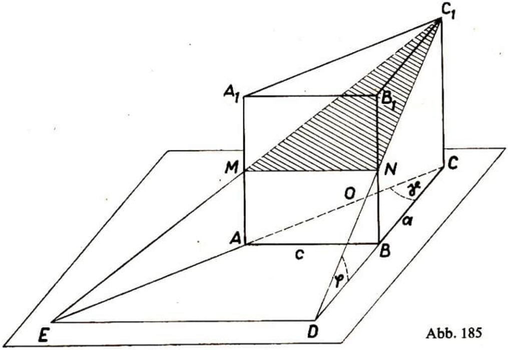


Abb. 185

Ebene P, deshalb befindet er sich auf der Schnittgeraden der Ebenen P und BCC_1B_1. Auch der Punkt C_1 liegt auf dieser Geraden. Das bedeutet, daß die Ebenen P und BCC_1B_1 in der Geraden C_1D einander schneiden. Der Punkt N, in dem $\overline{C_1D}$ die Kante $\overline{BB_1}$ schneidet, ist einer der Eckpunkte der Schnittfläche. Also ist das Dreieck MNC_1 die entstandene Schnittfläche. Da $\overline{BC} = \overline{BD}$ und $\overline{BN} \parallel \overline{CC_1}$ ist, muß $\overline{BN}$ Verbindungsgerade zweier Seitenmitten im Dreieck DCC_1 sein, d. h., N ist die Mitte der Kante $\overline{BB_1}$. Folglich verläuft die Strecke $\overline{MN}$ parallel zur Strecke $\overline{AB}$ ($\overline{AB}$ liegt in der Ebene der unteren Grundfläche). Demzufolge verläuft auch die Strecke $\overline{DE}$, in der die Ebene P die Ebene der Grundfläche schneidet, parallel zu $\overline{AB}$ und senkrecht zur Ebene der Seitenfläche BCC_1B_1. Also ist $\sphericalangle\, C_1DC$ der Winkel φ, den die Ebene P mit der Ebene der unteren Grundfläche bildet.

b) *Lösungsweg:*

Es gilt (siehe Lösung der vorigen Aufgabe)

$$A_S = \frac{A_G}{\cos\varphi} = \frac{ac}{2\cos\varphi} \quad (\text{dabei sind } a = \overline{BC}, \quad c = \overline{AB}).$$

Da $c = a \tan\gamma$ ist, folgt

$$A_S = \frac{a^2 \tan\gamma}{2\cos\varphi}.$$

Nun wird a^2 bestimmt. Nach Voraussetzung ist γ der kleinere der spitzen Winkel des Dreiecks ABC, so daß $c < a$ und die Fläche ch der Seite ABB_1A_1 kleiner als die Fläche ah der Seite BCC_1B_1 ist. Deshalb ist die Differenz A dieser Flächen (es wird vorausgesetzt, daß sie positiv ist) gleich $(a - c) \cdot h$.
Im Dreieck DCC_1 ist $\overline{CD} = 2\overline{BC} = 2a$.
Man erhält $h = 2a \tan \varphi$. Folglich ist $A = 2a^2(1 - \tan \gamma) \tan \varphi$. Daraus kann man a^2 bestimmen.

Lösung: $A_S = \dfrac{A}{4} \cdot \dfrac{\tan \gamma}{(1 - \tan \gamma) \sin \varphi} = \dfrac{A}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sin \gamma}{\sin (45° - \gamma) \sin \varphi}$.

710. Der Winkel zwischen den windschiefen Diagonalen $\overline{A_1D}$ und $\overline{AB_1}$ (Abb. 186) ist gleich dem Winkel $\varphi = \sphericalangle C_1DA_1$ zwischen $\overline{A_1D}$ und der parallel zu $\overline{AB_1}$ verlaufenden Strecke $\overline{C_1D}$. Es gilt $\sphericalangle C_1DC = \sphericalangle B_1AB = \alpha$ und $\sphericalangle A_1DA = \beta$. Um den Winkel φ zu bestimmen, berechnet man $\overline{A_1C_1}^2$ zuerst im Dreieck DA_1C_1

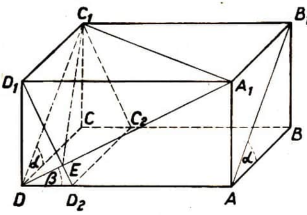


Abb. 186

nach dem Kosinussatz, dann im Dreieck $D_1A_1C_1$ und setzt die gefundenen Ausdrücke gleich. Man erhält

$$\overline{A_1D}^2 + \overline{C_1D}^2 - 2\overline{A_1D} \cdot \overline{C_1D} \cos \varphi = \overline{A_1D_1}^2 + \overline{C_1D_1}^2$$

und daraus

$$2\overline{A_1D} \cdot \overline{C_1D} \cos \varphi = (\overline{A_1D}^2 - \overline{A_1D_1}^2) + (\overline{C_1D}^2 - \overline{C_1D_1}^2) = 2\overline{DD_1}^2.$$

In diese Gleichung setzt man $\overline{A_1D} = \dfrac{\overline{AA_1}}{\sin \beta} = \dfrac{\overline{DD_1}}{\sin \beta}$ (aus dem Dreieck DAA_1) und $\overline{C_1D} = \dfrac{\overline{DD_1}}{\sin \alpha}$ ein.

Man erhält $\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta$.

Anderes Verfahren:
Durch die Kante $\overline{C_1D_1}$ legt man die Ebene $D_1D_2C_2C_1$ senkrecht zu $\overline{A_1D}$. (Das ist möglich, da $\overline{C_1D_1} \perp \overline{A_1D}$.) Es sei E der Schnittpunkt der Strecken $\overline{A_1D}$ und

$\overline{D_1D_2}$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck DEC_1 erhält man $\overline{DE} = \overline{C_1D} \cos \varphi$, aus dem rechtwinkligen Dreieck DED_1 ($\sphericalangle D_1DE = 90° - \beta$)

$$\overline{DE} = \overline{DD_1} \cos (90° - \beta) = \overline{DD_1} \sin \beta.$$

Die Strecke $\overline{DD_1}$ drückt man durch $\overline{C_1D}$ im Dreieck DC_1D_1 aus. Dabei ist $\sphericalangle D_1DC_1 = 90° - \alpha$.
Man erhält $\overline{DD_1} = \overline{C_1D} \cdot \sin \alpha$, d. h. $\overline{DE} = \overline{C_1D} \sin \alpha \sin \beta$. Setzt man die beiden Ausdrücke für die Strecke $\overline{DE}$ einander gleich, so erhält man

$$\overline{C_1D} \cos \varphi = \overline{C_1D} \sin \alpha \sin \beta.$$

Lösung: $\varphi = \arccos (\sin \alpha \sin \beta)$.

711. Man bezeichnet den Winkel zwischen den begrenzenden Ebenen SBC, SAC und SAB, die einander in den Kanten $\overline{CS}$, $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ schneiden, der Reihe nach mit φ_C, φ_A und φ_B (Abb. 187). Man legt dann durch einen beliebigen Punkt F der Kante $\overline{CS}$ die Ebene DEF senkrecht zu $\overline{FS}$. Dann ist $\sphericalangle DEF = \varphi_C$.

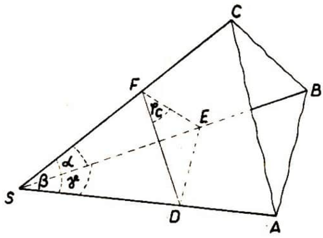


Abb. 187

Nachdem $\overline{DE}^2$ aus den Dreiecken EFD und ESD bestimmt wurde, setzt man die erhaltenen Ausdrücke gleich. Man findet

$$\overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2\overline{EF} \cdot \overline{DF} \cos \varphi_C = \overline{ES}^2 + \overline{DS}^2 - 2\overline{ES} \cdot \overline{DS} \cos \gamma.$$

Daraus folgt

$$2\overline{EF} \cdot \overline{DF} \cos \varphi_C = 2\overline{ES} \cdot \overline{DS} \cos \gamma - (\overline{ES}^2 - \overline{EF}^2) - (\overline{DS}^2 - \overline{DF}^2),$$

d. h.

$$2\overline{EF} \cdot \overline{DF} \cos \varphi_C = 2\overline{ES} \cdot \overline{DS} \cos \gamma - 2\overline{FS}^2.$$

In diese Gleichung setzt man

$$\overline{EF} = \overline{FS} \cdot \tan \alpha, \quad \overline{DF} = \overline{FS} \cdot \tan \beta, \quad \overline{ES} = \frac{\overline{FS}}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{FS}}{\cos \beta}$$

ein und erhält

$$\tan\alpha\tan\beta\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} - 1$$

und daraus

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Analog findet man $\cos\varphi_A$ und $\cos\varphi_B$.

Lösung: $\varphi_A = \arccos\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$;

$\varphi_B = \arccos\dfrac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$;

$\varphi_C = \arccos\dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.[1]

712. Diese Aufgabe wird wie die vorige gelöst.

Lösung: $\gamma = \arccos(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\Theta)$.

713. Vergleichen Sie mit der Lösung der Aufgabe 711!

Lösung: Der gesuchte Winkel beträgt 90°.

714. Der Punkt M möge auf der Ebene E liegen (Abb. 188). Nach Voraussetzung bildet die Strecke $\overline{AM}$ mit $\overline{AB}$ den Winkel α, während die Strecke $\overline{BM}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Wir legen durch $\overline{BM}$ die Ebene senkrecht zur Kante $\overline{AB}$ und fällen

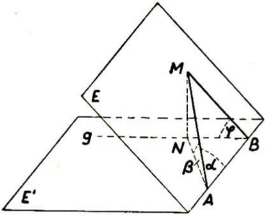


Abb. 188

vom Punkt M das Lot auf g. (Dabei ist g die Schnittgerade der senkrechten Ebene mit der Ebene E.) Die Gerade durch MN (N ist Fußpunkt des Lotes) steht auch senkrecht auf AN und $\sphericalangle NAM = \beta$ (nachweisen!). Man erhält so $\varphi = \sphericalangle NBM$. Den Winkel φ findet man im Dreieck NBM, wobei $\overline{MN} = \overline{AM}\sin\beta$

[1] Man beachte hierbei die zyklische Vertauschung der Argumente.

(siehe Dreieck NAM) und $\overline{BM} = \overline{AM} \sin\alpha$ (siehe Dreieck ABM) sind. Man erhält

$$\sin\varphi = \frac{\overline{MN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AM}\sin\beta}{\overline{AM}\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Lösung: $\varphi = \arcsin\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

715. In der Abbildung 189 stellt $\overline{PQ}$ das gemeinsame Lot der windschiefen Geraden g_1 und g_2 dar. Damit man den Winkel, unter dem die Strecke $\overline{PQ}$ vom Punkt A aus gesehen wird, erhält, zeichnet man die Strecke $\overline{AP}$. Dann ist $\sphericalangle QAP = \alpha$. Analog ist $\sphericalangle QBP = \beta$.

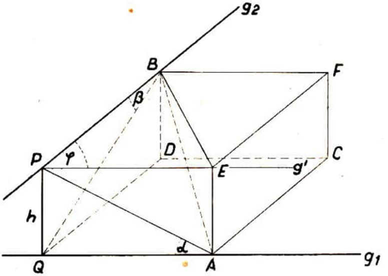


Abb. 189

Man legt durch den Punkt P eine Gerade g' parallel zu g_1. Dann ist der Winkel $\varphi = \sphericalangle BPE$ derjenige, der von den Geraden g_1 und g_2 (nach Definition) gebildet wird. Man fällt nun von A das Lot $\overline{AE}$ auf die Gerade g' und zeichnet die Strecke $\overline{AB}$. (Alle weiteren Strecken, die die Darstellung eines Parallelepipeds mit den Kanten $\overline{PQ}$, $\overline{EP}$ und $\overline{BP}$ ergeben, wurden nur der besseren Anschaulichkeit halber gezeichnet.)

Im rechtwinkligen Dreieck BPQ gilt

$$\overline{BP} = \overline{PQ}\cot\beta = h\cot\beta.$$

Analog ist $\overline{EP} = \overline{AQ} = h\cot\alpha$.

Weiter findet man

$$\overline{BE}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{EP}^2 - 2\cdot\overline{BP}\cdot\overline{EP}\cdot\cos\varphi$$

$$\overline{BE}^2 = h^2(\cot^2\alpha + \cot^2\beta - 2\cot\alpha\cot\beta\cos\varphi).$$

Die Strecke $\overline{AE}$ steht senkrecht auf der Ebene PEB, weil sie parallel zur Strecke $\overline{PQ}$, der gemeinsamen Senkrechten der Strecken $\overline{BP}$ und $\overline{EP}$, verläuft. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AEB erhält man

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = h^2 + \overline{BE}^2.$$

Lösung: $\overline{AB} = h\sqrt{1 + \cot^2 \alpha + \cot^2 \beta - 2 \cot \alpha \cot \beta \cos \varphi}$.

716. Die Abbildung der vorigen Aufgabe kann auch hierbei zur Veranschaulichung dienen. In diesem Falle ist $\varphi = 90°$, und man erhält

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{EP}^2 + \overline{BP}^2} = h\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}.$$

Der Winkel zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ ist gleich dem Winkel zwischen $\overline{AB}$ und der Strecke $\overline{AE} \parallel \overline{PQ}$.
Bezeichnet man diesen Winkel mit γ, so gilt:

$$\tan \gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{h\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}}{h}.$$

Lösung: $\gamma = \arctan \sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}$.

717. Es sei (Abb. 190)

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{AM}} = \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{\overline{DN}}{\overline{BN}} = \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} = \frac{m_3}{n_3}.$$

Zuerst wird das Verhältnis des Volumens V_1 der Pyramide $MNPD$ zum Volumen V der Pyramide $ABCD$ bestimmt. Man betrachtet hierbei die Fläche BCD als Grundfläche der Pyramide $ABCD$ und die Fläche NPD als Grundfläche der

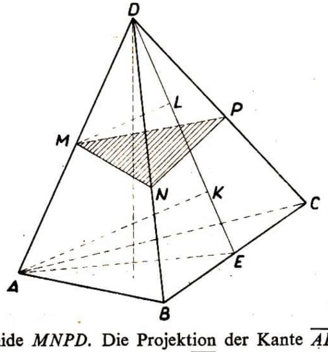


Abb. 190

Pyramide $MNPD$. Die Projektion der Kante $\overline{AD}$ auf die Ebene BCD ergebe einen Abschnitt auf der Strecke $\overline{DE}$. Dann werden die Projektionen der Punkte A und M zwei Punkte K und L auf der Strecke $\overline{DE}$ sein. Folglich liegen die Höhen

$\overline{AK} = h$ und $\overline{ML} = h_1$ in der Ebene AED, und die Dreiecke MLD und AKD sind ähnlich, d. h.

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DM} + \overline{AM}} = \frac{m_1}{m_1 + n_1}.$$

Die Fläche A_1 der Grundfläche NPD verhält sich zur Fläche A der Grundfläche BCD wie $\overline{DN} \cdot \overline{DP}$ zu $\overline{BD} \cdot \overline{CD}$, da die Dreiecke NPD und BCD den Winkel CDB gemeinsam haben, d. h.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\overline{DN}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{CD}} = \frac{m_2}{m_2 + n_2} = \frac{m_3}{m_3 + n_3}.$$

Folglich ist

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h_1}{h} \cdot \frac{A_1}{A} = \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(m_3 + n_3)}.$$

Jetzt wird das Verhältnis $\dfrac{V_1}{V - V_1}$ der Teilvolumina der Pyramide $ABCD$ bestimmt.

Lösung: $$\frac{V_1}{V - V_1} = \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(m_3 + n_3) - m_1 m_2 m_3}$$

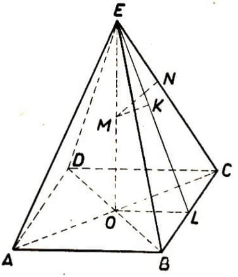


Abb. 191

718. *Lösungsplan:*

Mit Hilfe der Ähnlichkeit der Dreiecke OLE und MKE (Abb. 191) drückt man $\overline{LO}$ durch $\overline{KM} = b$ und $\overline{EM} = \frac{h}{2}$ aus. Die Ähnlichkeit der Dreiecke OCE und MNE ermöglicht es, die Strecke $\overline{CO}$ durch $\overline{MN} = a$ und $\overline{EM} = \frac{h}{2}$ auszudrücken. Man setzt die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung $\overline{CO}^2 = 2\overline{LO}^2$ ein und erhält eine Gleichung, aus der h isoliert werden kann.

Lösungsweg:
Es gilt $\overline{LO} : h = \overline{KM} : \overline{EK}$, d. h.

$$\overline{LO} : h = b : \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - b^2},$$

woraus $\overline{LO}^2 = \dfrac{4b^2h^2}{h^2 - 4b^2}$ folgt.

Ebenso findet man

$$\overline{CO}^2 = \frac{4a^2h^2}{h^2 - 4a^2}.$$

Folglich ist

$$\frac{4a^2h^2}{h^2 - 4a^2} = 2 \cdot \frac{4b^2h^2}{h^2 - 4b^2}.$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung durch h^2 dividiert ($h \neq 0$), so erhält man nach einigen Umformungen

$$h = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2 - a^2}}$$

und weiter

$$\overline{LO}^2 = \frac{4b^2h^2}{h^2 - 4b^2} = \frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2}$$

und schließlich

$$V = \frac{1}{3}(2\overline{LO})^2\, h.$$

Lösung: $V = \dfrac{16a^3b^3}{3(a^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - a^2}}.$

10. Rotationskörper

719. *Lösung:* $V = \dfrac{\pi l^3}{8\sqrt{3}}$.[1]

720. *Lösung:* $V = \dfrac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$.

721. *Lösung:* $V = \dfrac{a^3}{4\pi}$.

722. *Lösung:* $V = \dfrac{d^3 \cos^2\alpha \sin\alpha}{4\pi}$.

723. Der Radius der Grundfläche ist $r = l \sin\alpha$ (Abb. 192)[2], die Höhe des Kegels $h = l\cos\alpha$. Das Volumen ist

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi l^3 \sin^2\alpha \cos\alpha}{3}$$

und die Oberfläche $A_O = \pi r(l + r) = \pi l^2 \sin\alpha(1 + \sin\alpha)$.
Nach Voraussetzung ist $l + h = m$, folglich gilt

$$l = \frac{m}{1 + \cos\alpha} = \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi m^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$; $A_O = \dfrac{\pi m^2 \sin\alpha \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

[1] Hier und in den folgenden Aufgaben handelt es sich stets um gerade Kreiskegel, wenn die Bezeichnung Kegel verwendet wird.

[2] Vergleichen Sie zur Konstruktion einer Ellipse bei der Darstellung des Grundflächenkreises des Kegels mit der Abbildung 92 auf Seite 120!

724. (Abb. 193) Die Ebenen, die durch $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ senkrecht zur Achse $\overline{CM}$ verlaufen, schneiden aus dem Kegel ABC die zu ABC ähnlichen Teilkegel A_1B_1C und A_2B_2C heraus. Ihre Volumina verhalten sich zueinander wie die Kuben der Höhen:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\left(\frac{2}{3}h\right)^3}{h^3} \quad \text{und} \quad \frac{V_2}{V} = \frac{\left(\frac{1}{3}h\right)^3}{h^3}.$$

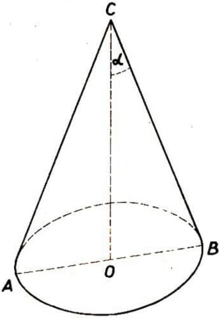


Abb. 192

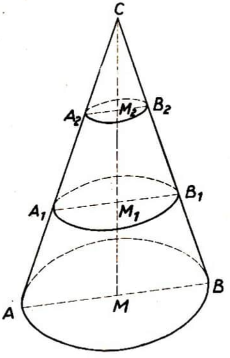


Abb. 193

Das Volumen V_m des mittleren Teils $A_1B_1B_2A_2$ ist gleich $V_1 - V_2$. Man subtrahiert von der ersten Gleichung die zweite und erhält

$$V_m = \frac{7}{27}V.$$

Lösung: $V_m = \dfrac{7}{27}V.$

725. Aus dem Dreieck AEM (Abb. 194) erhält man

$$\overline{AM} = r = \frac{\overline{AB}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

aus dem Dreieck MBD erhält man $h = r\cot\beta$.

Lösung: $V = \dfrac{\pi a^3 \cot\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$

726. Nach Voraussetzung ist $\overline{CM} - \overline{C_1M} = h$ (Abb. 195). Es sind $\overline{CM} = r \cot \beta$ und $\overline{C_1M} = r \cot \alpha$.
Folglich ist

$$r = \frac{h}{\cot \beta - \cot \alpha}.$$

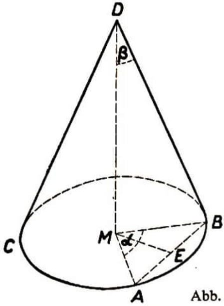


Abb. 194

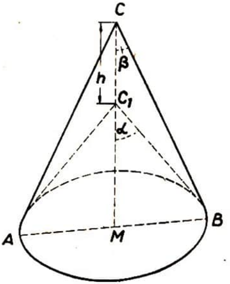


Abb. 195

Das gesuchte Volumen V ist gleich der Differenz der Kegelvolumina ABC und ABC_1. Folglich ist

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(\overline{CM} - \overline{C_1M}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi h^3}{3(\cot \beta - \cot \alpha)^2} = \dfrac{\pi h^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{3 \sin^2 (\alpha - \beta)}.$

727. Nach Voraussetzung ist $\pi r l = A_M$. Die Grundfläche $A_G = \pi r^2$ ist gleich $A_O - A_M$. Wir dividieren die Glieder der Gleichung $\pi r^2 = A_O - A_M$ durch die der Gleichung $\pi r l = A_M$ und erhalten

$$\frac{r}{l} = \frac{A_O - A_M}{A_M}.$$

Bezeichnet man den gesuchten Winkel mit β, dann gilt im Dreieck MBD (Abb. 194)

$$\sin \beta = \frac{r}{l}.$$

Lösung: $\beta = \arcsin \dfrac{A_O - A_M}{A_M}.$

728. Aus dem gleichschenkligen Dreieck ABC (Abb. 196) erhält man $\overline{AC} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Wenn α die Größe des Winkels BCA im Bogenmaß ist, dann gilt

$$\widehat{AB} = \overline{AC} \cdot \alpha = \frac{a \cdot \alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

In der Abwicklung des Kegelmantels ist die Strecke $\overline{AC}$ die Mantellinie des Kegels, so daß

$$l = \overline{AC} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

gilt.

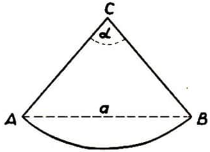


Abb. 196

Der Bogen $\widehat{AB}$ hat die Länge des Umfangs der Grundfläche, so daß

$$2\pi r = \frac{a \cdot \alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

gilt.

Die Höhe h des Kegels ist gleich

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{a}{4\pi\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\alpha^2 a^3 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\pi^2 \sin^3\frac{\alpha}{2}}$. ($\alpha$ im Bogenmaß)

729. Der Winkel DMF (Abb. 197) ist gleich dem Winkel $\varphi = \sphericalangle MED$. Aus den Dreiecken MFD und MEF erhält man

$$\overline{DM} = h = \frac{a}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \overline{EM} = \frac{a}{\sin\varphi},$$

aus dem Dreieck MBE

$$\overline{BM} = r = \frac{\overline{EM}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi a^3}{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}$.

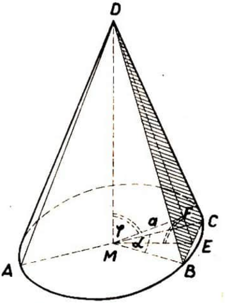


Abb. 197

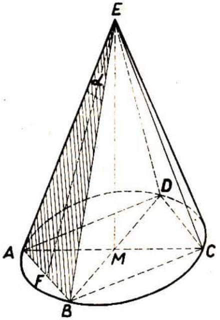


Abb. 198

730. Der Radius der Grundfläche des Kegels ist gleich $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (Abb. 198). Aus dem Dreieck AFE erhält man $\overline{AE} = l = \dfrac{a}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}}$, aus dem Dreieck AME

$$h = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2} = \frac{a}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}}.$$

Die Oberfläche A_O des Kegels ist gleich

$$\pi r(l + r) = \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \left(\frac{a}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi a^2}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Der Ausdruck in der Klammer kann auf folgende Art umgeformt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} = \sin 45° + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{90° + \alpha}{4} \cos \frac{90° - \alpha}{4}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12 \sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

$$A_O = \frac{\pi a^2 \left(1 + \sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^2 \sin\dfrac{90^\circ + \alpha}{4} \cos\dfrac{90^\circ - \alpha}{4}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

731. Im Dreieck AGA_1 (Abb. 199) gilt $\overline{AG} = l\cos\alpha$.

Aus dem Dreieck ABA_1 erhält man $\overline{AB} = 2r = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, so daß

$$\overline{AM} = r = \frac{l}{2\cos\alpha}$$

gilt, d. h.

$$\overline{A_1M_1} = r_1 = \overline{AM} - \overline{AG} = l\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

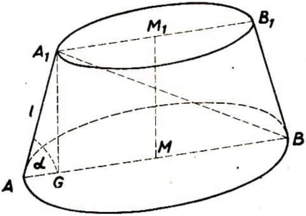


Abb. 199

Jetzt kann die Fläche bestimmt werden:

$$A = \pi l(r + r_1) = \pi l^2 \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

Lösung: $A = \dfrac{\pi l^2 \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \pi l^2 \tan\alpha \sin\alpha.$

732. Aus den Beziehungen $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ und $r = h\cot\alpha$ erhält man

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V\tan^2\alpha}{\pi}} \quad \text{und} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V\cot\alpha}{\pi}}.$$

Zunächst wird der Fall untersucht, bei dem die genannte Ebene die Mantelfläche halbiert.

Da die Kegel ABC und $A_1B_1C_1$ (Abb. 200) ähnlich sind, verhalten sich ihre Mantelflächen A und A_1 zueinander wie $h^2 = \overline{CM}^2$ zu $h_1{}^2 = \overline{CM_1}^2$. Folglich gilt

$$h_1 : h = \sqrt{A_1 : A} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

d. h.

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3V \tan^2 \alpha}{\pi}}.$$

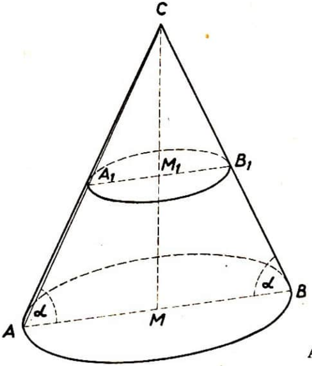


Abb. 200

Jetzt soll eine Ebene die Oberfläche halbieren.
Dann ist

$$\pi r_1 l_1 = \frac{1}{2} \pi (r^2 + rl).$$

Hier setzt man wie folgt an:

$$r_1 = h_1 \cot \alpha, \quad l_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad l = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Dann erhält man:

$$\pi h_1^2 \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \left(h^2 \cot^2 \alpha + \frac{h^2 \cot \alpha}{\sin \alpha} \right),$$

woraus $h_1 = h \cos \frac{\alpha}{2}$ folgt.

Lösung: Wenn die Mantelfläche halbiert werden soll, dann muß

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3V \tan^2 \alpha}{\pi}}$$

sein. Soll die Oberfläche halbiert werden, so ist

$$h_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{3V \tan^2 \alpha}{\pi}}.$$

733. Der Kugelradius (Abb. 201) sei r, die Höhe $\overline{CD}$ des Segmentes ABC sei h, und die Strecke $\overline{AD}$ sei r_1. Das Volumen des Sektors ist dann $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Im Dreieck ADC ist $\sphericalangle CAD = \frac{\alpha}{4}$ (Peripheriewinkel über dem Bogen $\widehat{BC}$, der zum Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2}$ gehört).

Man erhält $h = r_1 \tan \frac{\alpha}{4}$.

Aus dem Dreieck AMD erhält man $r_1 = r \sin \frac{\alpha}{2}$.
Folglich ist

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{4}.$$

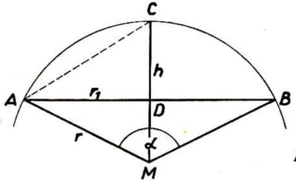


Abb. 201

Die Oberfläche des Sektors besteht aus der Oberfläche der Kugelkappe ABC (sie ist gleich $2\pi rh$) und der Mantelfläche des Kegels AMB (sie ist gleich $\pi r_1 r$). Folglich ist

$$A_O = 2\pi rh + \pi r_1 r = \pi r(2h + r_1).$$

Lösung: $V = \frac{4\pi}{3} r^3 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$; $\quad A_O = \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(2 \tan \frac{\alpha}{4} + 1\right)$.

734. Im Lösungsweg für diese Aufgabe wird noch einmal auf die Abbildung 201 Bezug genommen. Wählt man die Bezeichnungen aus Aufgabe 733, so gilt $A = 2\pi rh + \pi r_1^2$.

Aus dem Dreieck AMD erhält man $\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2$.
Weil $\overline{DM} = r - h$ ist, folgt $r^2 = r_1^2 + (r-h)^2$ und $r_1^2 = 2rh - h^2$, d. h. $A = 4\pi rh - \pi h^2$.
Hierbei ist

$$h_1 = 2r + \frac{\sqrt{4\pi^2 r^2 - \pi A}}{\pi}; \quad h_2 = 2r - \frac{\sqrt{4\pi^2 r^2 - \pi A}}{\pi}.$$

Da $h < r$ ist, entfällt die Wurzel h_1.

Lösung: $h = 2r - \sqrt{4r^2 - \frac{A}{\pi}}$.

735. In der Abbildung 202 ist der Achsenschnitt des Körpers dargestellt, den man durch Rotation des Dreiecks ABC um die Seite $\overline{AB}$ erhält. Dieser Körper be-

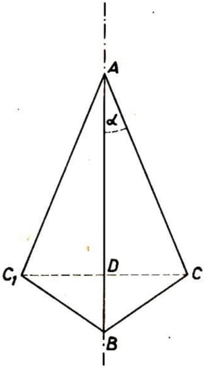


Abb. 202

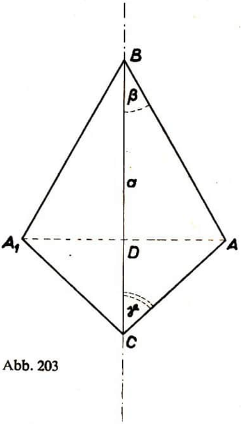


Abb. 203

steht aus zwei Kegeln. Sein Volumen ist

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{BD}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CD}^2(\overline{AD} + \overline{BD}) = \frac{\pi}{3}\,\overline{CD}^2 \cdot \overline{AB}.$$

Da $\overline{CD} \cdot \overline{AB} = 2A$ und $\overline{CD} = b \sin\alpha$ gilt, kann man vereinfachen.

Lösung: $V = \dfrac{2\pi A b \sin\alpha}{3}$.

736. Das Volumen des Rotationskörpers (siehe Lösung der vorigen Aufgabe) ist

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AD}^2(\overline{BD} + \overline{CD}) = \frac{1}{3}\pi a \overline{AD}^2.$$

Um $\overline{AD}$ zu bestimmen, verfährt man folgendermaßen (Abb. 203):
Aus dem Dreieck DAB erhält man $\overline{BD} = \overline{AD}\cot\beta$ und aus dem Dreieck CAD $\overline{CD} = \overline{AD}\cot\gamma$.
Folglich ist $a = \overline{BD} + \overline{CD} = \overline{AD}(\cot\beta + \cot\gamma)$.
Hieraus bestimmt man $\overline{AD}$.

Lösung: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi a^3}{(\cot\beta + \cot\gamma)^2} = \dfrac{\pi a^3 \sin^2\beta \sin^2\gamma}{3\sin^2(\beta + \gamma)}.$

737. Das Volumen des Rotationskörpers (sein Schnitt ist in Abbildung 204 dargestellt) ist gleich der Summe der Volumina zweier gleicher Kegelstümpfe, die durch Drehung der Trapeze $ACBM$ und $ANDC$ um die vorgegebene Achse entstehen, vermindert um die Summe der Volumina zweier gleicher Kegel, die durch

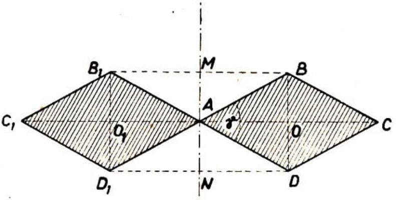


Abb. 204

Drehung der Dreiecke ABM und AND um die gleiche Achse entstehen. Der Radius der einen Grundfläche des Kegelstumpfes ist gleich $\overline{AC} = d$, der der anderen gleich $\overline{BM} = \dfrac{d}{2}$.
Man findet

$$V = 2\left[\frac{\pi \cdot \overline{BO}}{3}\left(d^2 + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{2}\right) - \frac{\pi \cdot \overline{BO}}{3} \cdot \frac{d^2}{4}\right] = \pi d^2 \cdot \overline{BO}.$$

Aus dem Dreieck AOB erhält man

$$\overline{BO} = \frac{d}{2}\tan\frac{\gamma}{2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi d^3 \tan\dfrac{\gamma}{2}}{2}.$

738. Das Volumen V (Abb. 205) des Rotationskörpers ist gleich dem Volumen des Kegelstumpfes, der durch Drehung des Trapezes $OCBO_1$ um die Achse $\overline{OO_1}$ entsteht, vermindert um die Volumina zweier Kegel, die durch Rotation der Dreiecke ABO_1 und OCA um die Achse $\overline{OO_1}$ entstehen. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle CAO$ gilt, folgt

$$\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle CAO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

und damit

$$\sphericalangle ABO_1 = \sphericalangle OCA = \frac{\alpha}{2}.$$

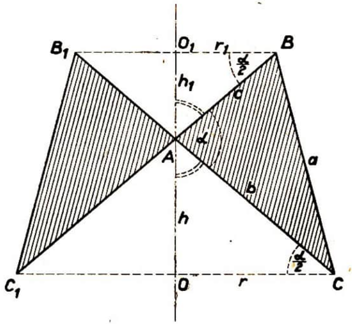


Abb. 205

Wenn man die in Abbildung 205 verwendeten Bezeichnungen einführt, so erhält man

$$h = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad r = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(aus dem Dreieck } OCA\text{)}$$

und

$$h_1 = c \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad r_1 = c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(aus dem Dreieck } ABO_1\text{)},$$

also

$$V = \frac{\pi}{3}(h + h_1)(r^2 + rr_1 + r_1^2) - \frac{\pi}{3}hr^2 - \frac{\pi}{3}h_1r_1^2$$

$$V = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}[(b + c)(b^2 + bc + c^2) - b^3 - c^3].$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi bc(b + c)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{3}.$

739. Die Oberfläche A_O des Rotationskörpers (Abb. 206) setzt sich aus der Summe der Mantelflächen zweier gleicher Kegel mit den Achsenschnitten DAD_1 und C_1BC und der Oberfläche eines Zylinders mit dem Achsenschnitt C_1CDD_1 zusammen. Führt man die in Abbildung 206 verwendeten Bezeichnungen ein, so erhält man:

$$r = b \cdot \sin\alpha, \quad h = \overline{MN} = \overline{AB} - 2\overline{AM} = \frac{b}{\cos\alpha} - 2b \cdot \cos\alpha,$$

also

$$A_O = 2\pi r(b + h) = \frac{2\pi b^2 \sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha).$$

Lösung: $A_O = 2\pi b^2 \tan\alpha\,(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha) = 4\pi b^2 \tan\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\dfrac{3\alpha}{2}.$

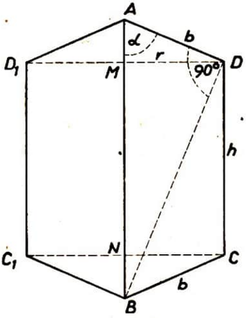


Abb. 206

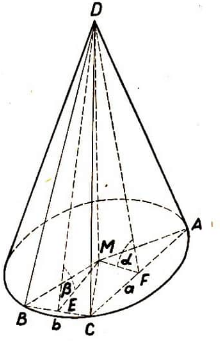


Abb. 207

740. Dreht man die gegebenen Ebenen um die Höhe des Kegels, ohne dabei die Winkel α und β zu verändern, so kann man sie in eine solche Lage bringen (Darstellung in Abb. 207), daß sie einander in einer Mantellinie $\overline{CD}$ des Kegels schneiden. Aus den Dreiecken MCF und MEC erhält man

$$\overline{CM}^2 = r^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{FM}^2 = \frac{b^2}{4} + \overline{EM}^2,$$

dabei sind $\overline{FM} = h\cot\alpha$ und $\overline{EM} = h\cot\beta$.
Folglich gilt

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + h^2\cot^2\alpha \quad \text{und} \quad \frac{a^2}{4} + h^2\cot^2\alpha = \frac{b^2}{4} + h^2\cot^2\beta.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man h und r.

Lösung: $V = \dfrac{\pi(b^2 \cot^2 \alpha - a^2 \cot^2 \beta)\sqrt{b^2 - a^2}}{24(\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta)^{\frac{3}{2}}}$.

741. In der Abbildung 208 ist der Achsenschnitt des Kegels dargestellt. Hierbei ergibt der Kugelschnitt den Inkreis des Dreiecks ABC mit dem Radius $\overline{DM} = r$. Man erhält

$$r = r_1 \tan\frac{\alpha}{2} = l \cos\alpha \tan\frac{\alpha}{2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{4\pi l^3 \cos^3\alpha \tan^3\dfrac{\alpha}{2}}{3}$.

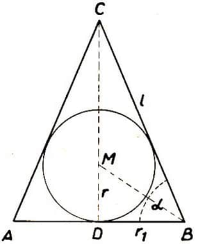


Abb. 208

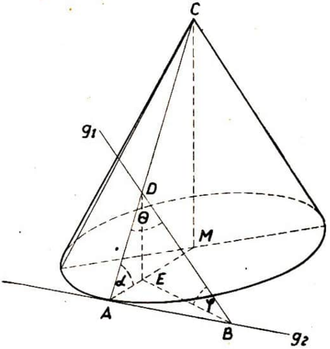


Abb. 209

742. Durch den Punkt D (Abb. 209) der Mantelfläche des Kegels verläuft die Tangente BD und bildet mit der Mantellinie $\overline{AC}$ den Winkel $\Theta = \sphericalangle BDA$.
Es ist außerdem der Winkel $\alpha = \sphericalangle DAM$ bekannt.
Es soll der Winkel φ bestimmt werden, der von der Strecke $\overline{BD}$ und der Ebene, in der die Grundfläche des Kegels liege, gebildet wird.
Die Tangente g_1 an den Kegelmantel schneidet die Ebene in irgendeinem Punkt B, der auf der Tangente g_2 an den Grundflächenkreis (in A konstruiert) liegt.[1] Man fällt vom Punkt D das Lot $\overline{DE}$ auf den Radius $\overline{AM}$ und erhält die Projektion $\overline{BE}$ der Strecke $\overline{BD}$ auf die Ebene E, d. h. $\varphi = \sphericalangle EBD$.
Aus dem Dreieck AED findet man

$$\overline{AD} = \frac{\overline{DE}}{\sin\alpha};$$

[1] Das kann man nur mit Hilfe von Sätzen über die Eigenschaften von Tangenten an einen Kegelmantel zeigen. Diese Sätze werden aber in der elementaren Geometrie nicht gelehrt.

aus $\triangle ABD$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AD}}{\cos\Theta} = \frac{\overline{DE}}{\sin\alpha\cos\Theta}$$

und aus $\triangle DEB$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \sin\alpha\cos\Theta.$$

Lösung: $\varphi = \arcsin(\sin\alpha\cos\Theta)$.

743. Die Oberfläche A_O des Rotationskörpers ist gleich der Summe der Mantelflächen zweier Kegel mit den Achsenschnitten BAB_1 und BCB_1. Verwendet man die Bezeichnungen der Abbildung 210, so findet man $A_O = \pi rc + \pi ra$.

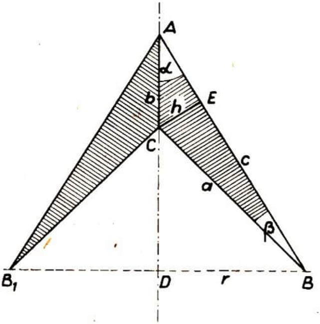


Abb. 210

Aus dem Dreieck CBE folgt $a = \dfrac{h}{\sin\beta}$. Nach dem Sinussatz erhält man

$$\frac{c}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

woraus

$$c = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

folgt.

Im Dreieck DBC ist $\sphericalangle BCD = \alpha + \beta$. Es ist also $r = a\sin(\alpha+\beta)$, d. h.

$$A_O = \frac{\pi h^2 \sin(\alpha+\beta)\,[\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha]}{\sin\alpha\sin^2\beta}.$$

Den Ausdruck in der eckigen Klammer kann man unter Berücksichtigung von Additionstheoremen für die Sinusfunktion umformen.

$$\textit{Lösung: } A_O = \frac{2\pi h^2 \sin(\alpha+\beta)\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\sin^2\beta}.$$

744. In der Abbildung 211 ist der Achsenschnitt des Kegels dargestellt. Dabei gibt $\overline{AC}$ die Wasseroberfläche an. Das Dreieck ABC ist gleichseitig, und der Kreis um M (ein Großkreis der Kugel) ist Inkreis des Dreiecks ABC. Wählt man dieselben Bezeichnungen, die in Abbildung 211 verwendet werden, so gilt

$$r_1 = \overline{DM} \cdot \tan 60° = r\sqrt{3} \quad \text{und} \quad h = \overline{BD} = 3r.$$ [1]

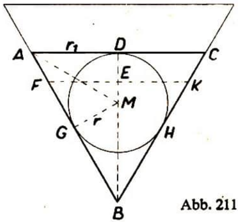


Abb. 211

Das Volumen V des Wassers ist gleich dem Volumen des Kegels ABC vermindert um das Volumen der Kugel, d. h.

$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1{}^2h - 4r^3) = \frac{5}{3}\pi r^3.$$

Nimmt man die Kugel heraus, so sinkt der Wasserspiegel bis zu irgendeiner Stellung FK und bildet den Kegel FBK. Es sei $\overline{BE} = h_1$. Dann ist

$$\overline{EF} = \overline{BE} \cdot \tan 30° = \frac{h_1}{\sqrt{3}},$$

so daß

$$V = \frac{\pi}{3}\overline{EF}^2 \cdot \overline{BE} = \frac{\pi h_1^3}{9}$$

gilt.

Man erhält die Gleichung

$$\frac{\pi h_1^3}{9} = \frac{5}{3}\pi r^3.$$

Lösung: $h_1 = r\sqrt[3]{15}$.

[1] Der Radius des Kreises, der einem gleichseitigen Dreieck einbeschrieben wird, ist gleich einem Drittel der Höhe dieses Dreiecks. Das folgt daraus, daß der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines beliebigen Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1 : 2 teilt.

745. Wenn man den Radius $\overline{A_1M_1}$ (Abb. 212) mit r_1 bezeichnet, dann ist die Höhe $\overline{A_1E}$ des Prismas ebenfalls gleich r_1. Im Dreieck $A_1B_1C_1$ ist $\overline{A_1C_1} = 2r_1$, und man erhält

$$\overline{A_1B_1} = 2r_1 \cos\alpha; \quad \overline{B_1C_1} = 2r_1 \sin\alpha.$$

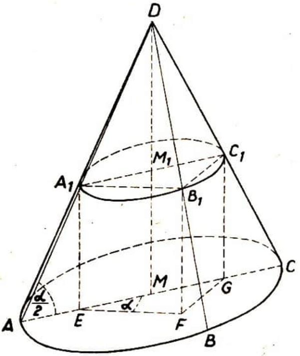


Abb. 212

Die Größe r_1 kann man auch aus dem Dreieck AEA_1 finden. Hier ist $\overline{AE} = r - r_1$.
Es ist

$$r - r_1 = r_1 \cot\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{r}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}}.$$

Jetzt erhält man die Mantelfläche des Prismas:

$$A_M = (2r_1 + 2r_1 \cos\alpha + 2r_1 \sin\alpha) \cdot r_1$$

$$A_M = \frac{2r^2}{\left(1 + \cot\frac{\alpha}{2}\right)^2}(1 + \cos\alpha + \sin\alpha).$$

Lösung: $A_M = \dfrac{2r^2(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\left(1 + \cot\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\alpha}{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

746. Der Radius $r = \overline{FM}$ (Abb. 213) des Zylinders ist gleich $\frac{1}{3}\overline{CF}$.[1]
Es ist aber

$$\overline{CF} = \overline{CE} - \overline{EF} = \overline{CE} - \overline{E_1F}\cot\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}\cot\alpha$$

$$\overline{CF} = \frac{a}{2}(\cot 30° - \cot\alpha) = \frac{a\sin(\alpha - 30°)}{2\sin\alpha\sin 30°} = \frac{a\sin(\alpha - 30°)}{\sin\alpha}.$$

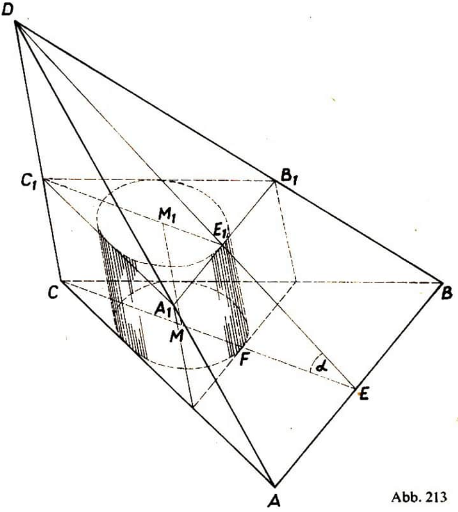


Abb. 213

Deshalb ist das Volumen des Zylinders gleich

$$V_1 = \pi\cdot\overline{FM}^2\cdot\overline{E_1F} = \pi\left[\frac{a\sin(\alpha - 30°)}{3\sin\alpha}\right]^2\cdot\frac{a}{2}.$$

Das Volumen V_2 der Pyramide $A_1B_1C_1D$ ist gleich

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{A_1B_1}}{2}\cdot\overline{C_1E_1}\cdot\overline{C_1D}.$$

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote zur Lösung der Aufgabe 744!

Dabei ist

$$\overline{C_1E_1} = \overline{CF} = \frac{a \sin(\alpha - 30°)}{\sin \alpha}$$

und

$$\overline{C_1D} = \overline{C_1E_1} \cdot \tan\alpha; \quad \overline{C_1E_1} = \frac{\overline{A_1B_1} \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{2} = \frac{\overline{C_1E_1}}{\sqrt{3}}, \quad V_2 = \frac{\overline{C_1E_1}^3 \cdot \tan\alpha}{3\sqrt{3}}.$$

Die Aufgabe ist lösbar für den Fall, daß $\overline{CE} > \overline{EF}$ ist, d. h. für

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2}\cot\alpha$$

oder $\cot 30° > \cot\alpha$, also für $\alpha > 30°$.

Lösung: $V_1 = \dfrac{\pi a^3 \sin^2(\alpha - 30°)}{18 \sin^2\alpha}$; $\quad V_2 = \dfrac{a^3 \sin^3(\alpha - 30°) \tan\alpha}{3\sqrt{3}\sin^3\alpha}$.

Vorbemerkung zu der Aufgabe 747 und zu den folgenden Aufgaben

Die exakten Darstellungsverfahren einer Kugel, an denen man die Schnitte sowie die ein- und umbeschriebenen Körper erkennt, sind kompliziert. Deshalb begnügten sich die Verfasser soweit wie möglich mit schematischen Zeichnungen, die anschaulich sind und dem Leser bei der eigenen Konstruktion nicht zu viele Schwierigkeiten bereiten. In den Fällen, in denen die schematischen Zeichnungen nicht die notwendige Anschaulichkeit hatten, wurden Körperdarstellungen beigefügt.

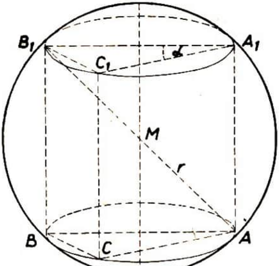


Abb. 214

747. Die Ebenen der Grundflächen (ABC und $A_1B_1C_1$ in Abbildung 214) des Prismas schneiden die Kugel in zwei Kreisen. Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind in diese Kreise einbeschrieben. Deshalb sind die Hypotenusen

$\overline{AB}$ und $\overline{A_1B_1}$ Durchmesser der Kreise. Die Ebene BAA_1B_1 verläuft durch den Mittelpunkt der Kugel. Da nach Voraussetzung AA_1B_1B ein Quadrat ist, gilt

$$h = \overline{AA_1} = r\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{AB} = r\sqrt{2}.$$

Lösung: $V = \dfrac{r^3 \sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

748. Die Ebene der Grundfläche der Pyramide schneidet die Kugel in dem Kreis $ABCD$ (Abb. 215), der der Grundfläche umbeschrieben ist. Die Höhe der Pyramide verläuft durch den Mittelpunkt M_1 dieses Kreises (da alle Kanten mit der

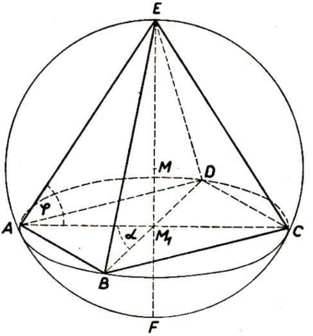


Abb. 215

Grundfläche gleiche Winkel bilden) und ferner durch den Mittelpunkt M der Kugel. Die Ebene, die durch die Diagonale $\overline{AC}$ der Grundfläche und durch die Spitze E bestimmt ist, schneidet die Kugel in einem Großkreis, der dem Diagonalschnitt ACE der Pyramide umbeschrieben ist. Aus dem Dreieck ACE (hier ist $\sphericalangle CEA = 180° - 2\varphi$) erhält man nach dem Sinussatz

$$\overline{AC} = 2r \sin(180° - 2\varphi) = 2r \sin 2\varphi,$$

d. h. $\overline{AM_1} = r \sin 2\varphi$.
Aus dem Dreieck AM_1E findet man die Höhe der Pyramide

$$\overline{EM_1} = h = \overline{AM_1} \cdot \tan\varphi = r \sin 2\varphi \tan\varphi.$$

Lösung: $V = \dfrac{2}{3} r^3 \sin^3 2\varphi \sin\alpha \tan\varphi$.

749. Da der Radius $\overline{EM}$ (Abb. 216) des Inkreises der Grundfläche gleich r ist, folgt

$$\overline{AB} = 2r\sqrt{3}.$$

Aus $\triangle MED$ erhält man $\overline{DM} = h = r \cot \frac{\alpha}{2}$.

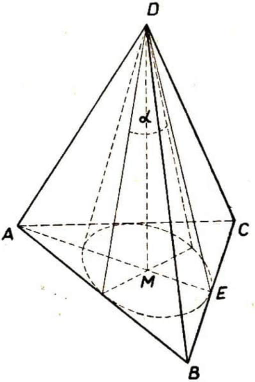


Abb. 216

Lösung: $V = \sqrt{3}\, r^3 \cot \frac{\alpha}{2}$.

750. In der Abbildung 217 ist der Achsenschnitt dargestellt.
Man kennt $A_M = \pi l(r_1 + r_2) = \pi \cdot \overline{AD} \cdot (\overline{AG} + \overline{DH})$.
Es ist aber $\overline{AG} + \overline{DH} = \overline{AE} + \overline{DE} = \overline{AD}$.

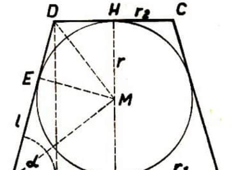


Abb. 217

Deshalb gilt $A_M = \pi \cdot \overline{AD}^2$. Aus dem Dreieck AFD, hier ist $\overline{DF} = \overline{GH} = 2r$, erhält man

$$\overline{AD} = \frac{2r}{\sin \alpha}.$$

Lösung: $A_M = \dfrac{4\pi r}{\sin^2 \alpha}$.

751. Vergleichen Sie mit der Lösung der vorigen Aufgabe! Man verwendet die Formel $A_O = A_M + \pi(r_1^2 + r_2^2)$. Aus dem Dreieck AGM (Abb. 217) erhält man

$$\overline{AG} = r_1 = \overline{MG} \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = r \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Im Dreieck DMH ist $\sphericalangle HDM = \dfrac{180° - \alpha}{2}$, also

$$\overline{DH} = r_2 = r \cot \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = r \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Die Lösung kann man vereinfachen, wenn man den Ausdruck $r_1^2 + r_2^2$ folgendermaßen umformt: $r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2$. Da $r_1 + r_2 = l$ und $A_M = \pi l^2$ sind (siehe Lösung der vorigen Aufgabe), da ferner im rechtwinkligen Dreieck AMD die Gleichung $\overline{AE} \cdot \overline{DE} = \overline{EM}^2 = r_1 r_2 = r^2$ gilt, muß

$$A_O = \pi l^2 + \pi l^2 - 2\pi r^2 = 2\pi(l^2 - r^2)$$

sein. Hierbei setzt man

$$l = \frac{2r}{\sin \alpha}.$$

Lösung: $A_O = 2\pi r^2 \left(\dfrac{4}{\sin^2 \alpha} - 1\right)$.

752. Vergleichen Sie mit der Lösung der vorigen Aufgabe! Es gilt

$$V = \pi \frac{2r}{3}(r_1{}^2 + r_1 r_2 + r_2{}^2) = \frac{2\pi r}{3}[(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2]$$

$$V = \frac{2\pi r}{3}(l^2 - r^2).$$

Hierin wird gesetzt: $l = \dfrac{2r}{\sin \alpha}$.

Lösung: $V = \dfrac{2\pi r^3}{3}\left(\dfrac{4}{\sin^2 \alpha} - 1\right)$.

753. Die Länge der drei gleichen Sehnen $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ (Abb. 218) sei l. Aus dem gleichschenkligen Dreieck BCD erhält man

$$\overline{BC} = 2l \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ebenso findet man, daß $\overline{AB} = \overline{AC} = 2l \sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

Folglich ist das Dreieck ABC gleichseitig. Man fällt vom Punkt D auf die Ebene ABC das Lot $\overline{DM_1}$ und zeigt, nachdem man die Kongruenz der Dreiecke AM_1D, BM_1D und CM_1D festgestellt hat, daß $\overline{AM_1} = \overline{BM_1} = \overline{CM_1}$ gilt, d. h., daß M_1 der Mittelpunkt der Grundfläche ist. Die Pyramide $ABCD$ ist also regelmäßig.

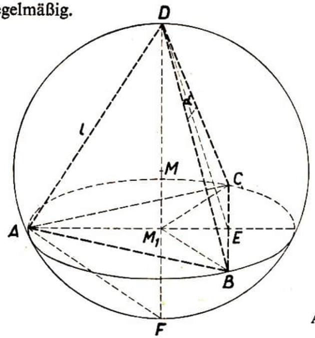


Abb. 218

Da die Punkte A, B und C auf der Oberfläche der Kugel liegen, gilt

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \quad (M \text{ ist der Mittelpunkt der Kugel}).$$

Man fällt vom Punkt M das Lot auf die Ebene ABC und zeigt, daß der Fußpunkt des Lotes der Mittelpunkt des Dreiecks ABC ist, d. h. mit dem Punkt M_1 zusammenfällt.

Folglich liegt $\overline{MM_1}$ (und damit $\overline{DM_1}$) auf einem Durchmesser der Kugel ($\overline{DF}$ in Abb. 218). Aus dem rechtwinkligen Dreieck AFD ($\overline{DF} = 2r$) erhält man

$$l^2 = \overline{AD}^2 = 2r \cdot \overline{DM_1}.$$

Man kann die Strecke $\overline{DM_1}$ nun noch durch l ausdrücken.

Es gilt $\overline{DM_1} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AM}_1^2}$, wobei $\overline{AD} = l$ und

$$\overline{AM_1} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

sind, also

$$\overline{DM_1} = l\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Man setzt diesen Ausdruck in die Gleichung $l^2 = 2r \cdot \overline{DM_1}$ ein und findet

$$l = 2r\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Nun wird dieser Ausdruck so umgeformt, daß er bequem zu logarithmieren ist:

$$l = 2r\sqrt{1 - \frac{2(1-\cos\alpha)}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{3}}\sqrt{2(\cos 60^\circ + \cos\alpha)}$$

$$l = \frac{4r}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Lösung: $l = 2r\sqrt{1 - \dfrac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}} = \dfrac{4r}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

754. Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ (Abb. 219) stellt den Achsenschnitt des Kegelstumpfes dar. Nach Voraussetzung sind $\sphericalangle BMA = \alpha$ und $\sphericalangle DMC = \beta$. Deshalb gilt

$$r_1 = \overline{AE} = \overline{AM}\sin\frac{\alpha}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad r_2 = \overline{DF} = r\sin\frac{\beta}{2}.$$

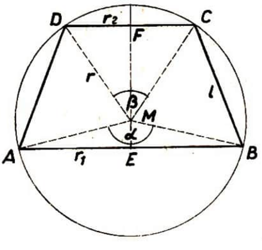


Abb. 219

Der Winkel AMD ist gleich

$$\frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Deshalb ist

$$l = \overline{AD} = 2r\cos\frac{\alpha+\beta}{4}.$$

Man erhält

$$A_M = \pi l(r_1 + r_2) = 2\pi r^2 \cos\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Lösung: $A_M = 2\pi r^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}$.

755. Aus dem Dreieck MFE (Abb. 220) erhält man

$$\overline{FM} = r = m\cos\alpha;\quad \overline{EM} = h = m\sin\alpha.$$

Unter Verwendung der Formel $A_O = \pi r(r + l)$, worin $l = m$ ist, erhält man

$$A_O = \pi m^2\cos\alpha(1 + \cos\alpha)\quad \text{oder}\quad A_O = 2\pi m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Der Winkel $\varphi = \sphericalangle MBE$, unter dem die Seitenkante $\overline{BE}$ die Grundfläche schneidet, bestimmt man aus dem Dreieck MBE. Hierbei ist

$$\overline{BM} = \overline{FM}\sqrt{2} = m\sqrt{2}\cos\alpha.$$

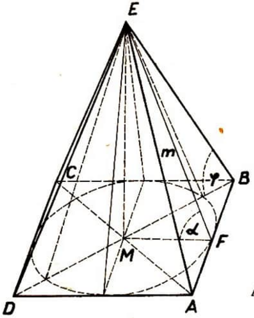


Abb. 220

Man erhält

$$\tan\varphi = \frac{\overline{EM}}{\overline{BM}} = \frac{m\sin\alpha}{m\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Lösung: $A_O = 2\pi m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\varphi = \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{2}}$.

756. Aus dem $\triangle ABS$ (Abb. 221) erhält man $\overline{AB} = 2l \sin\frac{\alpha}{2}$, folglich ist

$$r = \overline{AM} = \overline{AB} = 2l \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Aus dem $\triangle AMS$ erhält man

$$\overline{MS} = h = \sqrt{l^2 - r^2} = l\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Man findet

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\cdot 4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot l\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

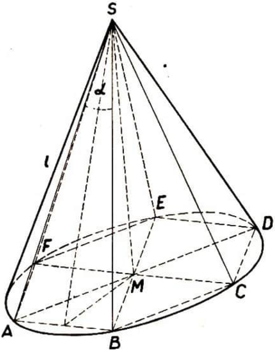


Abb. 221

Den Radikanden kann man wie in der Lösung der Aufgabe 753 so umformen, daß er leicht zu logarithmieren ist. Man erhält

$$1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Lösung: $V = \frac{8}{3}\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

757. Aus dem $\triangle AED$ (Abb. 222) erhält man $\overline{AE} = l \sin\frac{\alpha}{2}$, aus dem $\triangle AEM$

$$r = \overline{EM} = \overline{AE}\cdot\tan 30^\circ = l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$r_1 = \overline{AM} = \frac{\overline{AE}}{\cos 30^\circ} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Aus dem Dreieck AMD erhält man

$$\overline{DM} = h = \sqrt{l^2 - r_1^2} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Das Volumen V des Kegels ist gleich

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{3} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Den Radikanden kann man wie in der Lösung der Aufgabe 753 umformen.

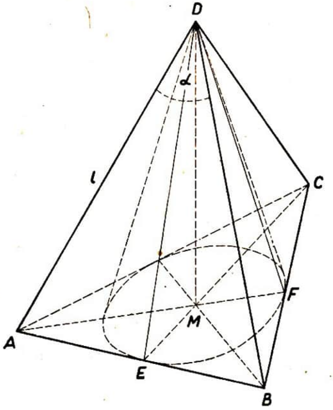


Abb. 222

Lösung: $V = \dfrac{\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{9\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$V = \frac{2\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{9\sqrt{3}}.$$

758. Unter Verwendung der Bezeichnungen von Abbildung 223 ist das Volumen der Kugel gleich $\frac{4}{3}\pi r^3$, das Volumen des Kegels ABC gleich

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot \overline{CM_1} = \frac{1}{3}\pi r_1^2\, h.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2\, h = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi r^3,$$

d. h. $r_1^2 h = r^3$. Eine weitere Beziehung zwischen r_1 und r erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC.
Man findet $\overline{AM_1}^2 = \overline{CM}_1 \cdot \overline{DM}_1$, d. h. $r_1^2 = h(2r - h)$.
Setzt man diesen Ausdruck in die vorige Gleichung ein, so erhält man (nach einigen Umformungen)

$$r^3 - 2h^2r + h^3 = 0.$$

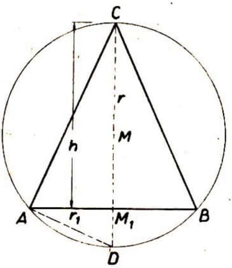


Abb. 223

Obgleich es sich dabei um eine Gleichung dritten Grades in der Unbekannten r handelt, kann man eine ihrer Wurzeln $r = h$ sofort erkennen (man findet sie auch unmittelbar aus der Voraussetzung, weil der Kegel, dessen Grundflächenradius und Höhe gleich dem Radius der Kugel sind, ein Viertel des Volumens der Kugel hat).
Folglich kann man die linke Seite der Gleichung nach dem Satz von BÉZOUT in Faktoren zerlegen, von denen einer gleich $r - h$ ist. Dazu dividiert man $r^3 - 2h^2r + h^3$ durch $r - h$ oder wendet folgende Umformung an:

$$r^3 - 2h^2r + h^3 = (r^3 - h^2r) - (h^2r - h^3)$$

$$r^3 = r(r - h)(r + h) - h^2(r - h) = (r - h)(r^2 + rh - h^2) = 0.$$

Die Gleichung $r^2 + rh - h^2 = 0$ hat eine positive Wurzel

$$r = \frac{h(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

(Die negative Wurzel $r = -\dfrac{h(\sqrt{5} + 1)}{2}$ ist nicht brauchbar.)

Geometrisch bedeutet das, daß der Radius der Kugel gleich dem größeren Teil der Höhe des Kegels ist, der durch harmonische Teilung dieser Höhe entsteht.[1]

Lösung: Die Aufgabe hat zwei Lösungen:

$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 \quad \text{und} \quad V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{5} - 2)\, h^3.$$

759. Die Höhe des Prismas ist gleich dem Durchmesser $2r$ der einbeschriebenen Kugel. Legt man durch den Mittelpunkt M der Kugel eine Ebene parallel zur Grundfläche des Prismas, so erhält man als Schnittfläche mit dem Prisma ein gleichseitiges Dreieck ABC (Abb. 224)[2], das kongruent zur Grundfläche des Prismas ist. Als Schnitt mit der Kugel erhält man den Großkreis DEF, den Inkreis des Dreiecks ABC.

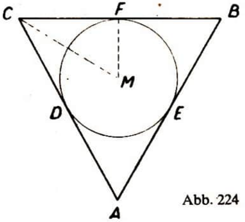


Abb. 224

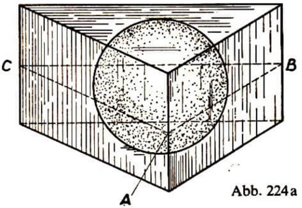


Abb. 224a

Im Dreieck CMF ist $\overline{FM} = r$ und $\sphericalangle FCM = 30°$.
Man findet $\overline{CF} = r\sqrt{3}$. Folglich ist $\overline{BC} = a = 2r\sqrt{3}$.
Die Mantelfläche A_M des Prismas ist gleich

$$A_M = 3ah = 12r^2\sqrt{3}.$$

Die Grundfläche ist gleich

$$A_G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}.$$

Folglich ist $A_O = 12r^2\sqrt{3} + 6r^2\sqrt{3} = 18r^2\sqrt{3}$.
Die Oberfläche der Kugel ist gleich $4\pi r^2$.

Lösung: Das gesuchte Verhältnis ist gleich $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

[1] In der Abbildung 223 wurde diese Tatsache nicht berücksichtigt.

[2] Zur Veranschaulichung wurde zur Abbildung 224 die Zeichnung 224a beigefügt. Sie stellt den Körper räumlich dar. Solche zusätzlichen Zeichnungen werden auch in einigen folgenden Aufgaben gegeben. Ihre Ausführung ist für den Lernenden nicht unbedingt nötig, obgleich sie sehr nützlich ist.

760. a) *Darstellungsverfahren:*

Der Mittelpunkt M_1 der einbeschriebenen Kugel (wenn man überhaupt in die Pyramide eine Kugel einbeschreiben kann) muß von der Seitenfläche BCE und von der Grundfläche $ABCD$ (Abb. 225) gleiche Abstände haben. Deshalb muß er auf der Ebene, die den Winkel φ zwischen den Ebenen BCE und $ABCD$ halbiert, liegen. Ebenso liegt M_1 auf den winkelhalbierenden Ebenen der anderen drei Winkel φ, d. h., alle Seitenflächen der Pyramide $ABCDM_1$ (in der Abbildung nicht eingezeichnet) schneiden die Ebene der Grundfläche unter ein und demselben Winkel $\frac{\varphi}{2}$. Folglich liegt der Fußpunkt der Höhe der Pyramide $ABCDM_1$ im Mittelpunkt M des Inkreises des Rhombus $ABCD$. (Vergleichen Sie auch mit der Bemerkung zur Aufgabe 617 auf Seite 124!) Durch diesen Mittelpunkt verläuft die Höhe $\overline{EM}$ der gegebenen Pyramide, d. h., der Mittelpunkt M_1 der Kugel liegt auf der Höhe $\overline{EM}$.

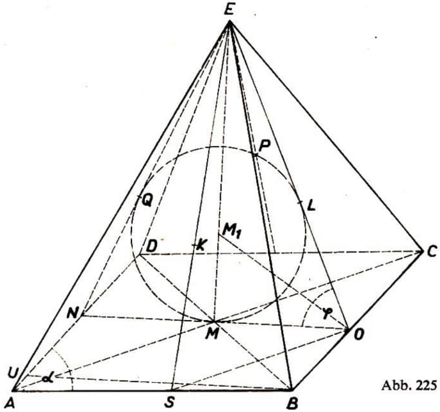


Abb. 225

Der Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene der Seitenfläche BCE ist der Fußpunkt L des Lotes, das man vom Mittelpunkt M_1 der Kugel auf die Ebene BCE fällen kann. Daraus folgt, daß die Ebene M_1LE senkrecht auf der Seitenfläche BCE steht (nachweisen!). Gleichzeitig steht die Ebene M_1LE senkrecht auf der Ebene der Grundfläche $ABCD$, denn in ihr liegt die Höhe $\overline{EM}$. Folglich steht die Ebene M_1LE senkrecht auf der Kante $\overline{BC}$, d. h., die Strecke $\overline{NO}$, in der die Ebenen M_1LE und $ABCD$ einander schneiden, ist die Höhe des Rhombus

(sie verläuft durch den Mittelpunkt M). Ebenso findet man die drei weiteren Berührungspunkte P, Q und K der Kugel mit den Seitenflächen.
Hieraus folgt die nachstehend beschriebene Konstruktion:
Man zeichnet die Höhe $\overline{NO}$ des Rhombus $ABCD$ (es ist günstig, diese Strecke horizontal zu legen), konstruiert die Schnittfläche NOE (ein gleichschenkliges Dreieck) und zeichnet den Inkreis des Dreiecks NOE. Die Punkte L und Q, in denen dieser Kreis die Seiten $\overline{EO}$ und $\overline{EN}$ berührt, sind die Berührungspunkte der Kugel mit den Seitenflächen BCE und ADE. Um den Punkt K zu finden, konstruiert man $\overline{OS} \parallel \overline{AC}$. Dann stellt die Gerade durch MS (in der Abbildung nicht eingezeichnet) die andere Höhe des Rhombus dar (nachweisen!). Nun wird die Strecke $\overline{ES}$ eingezeichnet, und durch den Punkt L wird die Gerade $LK \parallel OS$ gelegt. Den vierten Punkt P konstruiert man analog. Aus dieser Konstruktion folgt, daß die Kugel mit dem Mittelpunkt in M_1 und mit dem Radius $r = \overline{LM_1}$ tatsächlich in die Pyramide einbeschrieben ist.

b) *Lösungsweg:*
Aus dem Dreieck MOM_1 erhält man

$$\overline{MO} = \overline{MM_1} \cot \frac{\varphi}{2} = r \cot \frac{\varphi}{2},$$

so daß

$$h = \overline{EM} = \overline{MO} \cdot \tan \varphi = r \cot \frac{\varphi}{2} \tan \varphi$$

gilt.
Weiter erhält man aus dem Dreieck ABU ($\overline{BU} \parallel \overline{NO}$)

$$\overline{AB} = a = \frac{\overline{BU}}{\sin \alpha} = \frac{2\overline{MO}}{\sin \alpha} = \frac{2r \cot \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha},$$

also

$$A_G = a^2 \sin \alpha = \frac{4r^2 \cot^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha}.$$

Lösung: $$V = \frac{4r^3 \tan \varphi \cot^3 \frac{\varphi}{2}}{3 \sin \alpha}.$$

761. a) *Darstellungsverfahren:*
Der Mittelpunkt M des Äquators der Halbkugel (d. h. des Kreises, der die Halbkugel begrenzt, Abb. 226[1]) liegt auf der Höhe $\overline{M_1S}$ der Pyramide.
Da $\overline{MO} = \overline{MM_1} = r$ gilt, muß der Punkt O auf der Winkelhalbierenden $\overline{M_1O}$ des Winkels MM_1O_1 liegen. Wir bemerken, daß der Punkt O der Schnittpunkt

[1] Vergleichen Sie auch mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

der Strecken $\overline{M_1O}$ und $\overline{FS}$ ist und stellen die Schnittebene $KLON$ dar. Sie liegt parallel zur Grundfläche. Die Mitten K, L, O und N der Seiten dieser Schnittfläche sind die Berührungspunkte des Äquators mit den Seitenflächen. Der Halbkreis KM_1O ist die Schnittfigur, die beim Schnitt der Halbkugel mit der Ebene EFS entsteht.

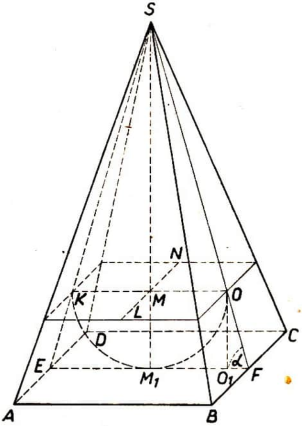


Abb. 226

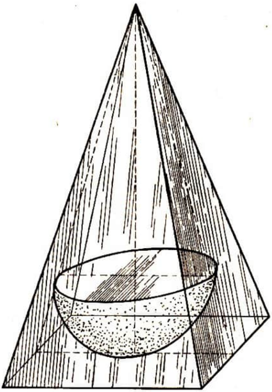


Abb. 226a

b) *Lösungsweg:*

Die Seite a der Grundfläche ist gleich

$$a = \overline{EF} = 2\overline{FM_1} = 2(\overline{M_1O_1} + \overline{FO_1}).$$

Es ist $\overline{M_1O_1} = \overline{MO} = r$ und $\overline{FO_1} = \overline{OO_1} \cdot \cot\alpha = r\cot\alpha$, also $a = 2r(1 + \cot\alpha)$.

Man erhält

$$A_O = \frac{2A_G\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

(Vgl. Hinweis zur Lösung der Aufgabe 619!) Hierbei ist

$$A_G = a^2 = 4r^2(1 + \cot\alpha)^2.$$

Lösung: $A_O = \dfrac{8r^2(1+\cot\alpha)^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \dfrac{4r^2\sin^2(45°+\alpha)}{\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$

762. Die Ebene *EFS* (Abb. 227)[1] schneidet die Halbkugel im Halbkreis *OPN*. Dieser Halbkreis berührt zwei Symmetrieachsen der Seitenflächen in den Punkten *Q* und *G*. Wenn man die Länge der Grundkante der Pyramide mit *a* bezeichnet und den Radius der Halbkugel mit *r*, dann ist die Oberfläche A_1 der Halbkugel

$$A_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2,$$

die Oberfläche der Pyramide gleich

$$A_2 = \frac{2a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

(Vgl. Hinweis zur Lösung der Aufgabe 619!)

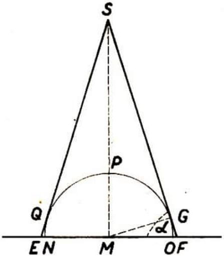


Abb. 227

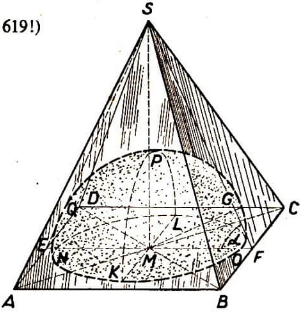


Abb. 227a

Ihr Verhältnis hat den Wert

$$q = \frac{3\pi r^2\cos\alpha}{2a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Aus dem Dreieck *MFG* erhält man $\overline{MG} = \overline{FM}\cdot\sin\alpha$, d. h. $r = \dfrac{a}{2}\sin\alpha$. Diesen Ausdruck setzt man in die vorige Gleichung ein.

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

Zur Berechnung des Volumens V der Halbkugel bestimmt man r aus der Bedingung $a - 2r = m$ und aus der gefundenen Gleichung $r = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Man erhält

$$r = \frac{m \sin\alpha}{2(1 - \sin\alpha)} = \frac{m \sin\alpha}{4\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Lösung: $q = \frac{3\pi}{8}\sin 2\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$; $V = \frac{\pi m^3 \sin^3\alpha}{96\sin^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

763. In der Abbildung 228 ist der Achsenschnitt des Kegels und der einbeschriebenen Kugel dargestellt. Das gesuchte Volumen V errechnet sich aus der Differenz des Volumens des Kegels FGC und des Kugelsegmentes FGE.

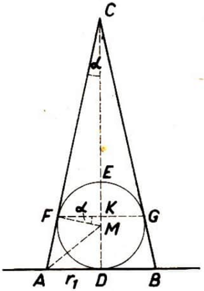


Abb. 228

Folglich ist

$$V = \frac{\pi}{3}\overline{FK}^2 \cdot \overline{CK} - \pi\overline{EK}^2\left(r - \frac{1}{3}\overline{EK}\right).$$

Dabei ist r der Radius der Kugel. Aus dem Dreieck ADM erhält man

$$r = \overline{DM} = \overline{AD} \cdot \tan\frac{\sphericalangle CAD}{2} = r_1 \tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Jetzt erhält man aus dem Dreieck MKF mit $\sphericalangle KFM = \alpha$ (die Schenkel der Winkel KFM und KCF stehen paarweise aufeinander senkrecht)

$$\overline{FK} = \overline{FM} \cdot \cos\alpha = r\cos\alpha \quad \text{und} \quad \overline{KM} = r\sin\alpha,$$

also

$$\overline{EK} = \overline{EM} - \overline{KM} = r(1 - \sin\alpha).$$

Schließlich ist $\overline{CK} = \overline{FK} \cdot \cot\alpha = r\cos\alpha\cot\alpha$.

Folglich gilt

$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \cos^3 \alpha \cot \alpha - \pi r^2 (1 - \sin \alpha)^2 \left[r - \frac{r(1 - \sin \alpha)}{3} \right],$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \left[\frac{\cos^4 \alpha}{\sin \alpha} - (1 - \sin \alpha)^2 (2 + \sin \alpha) \right].$$

Diesen Ausdruck kann man umformen. Man klammert $(1 - \sin \alpha)^2$ aus, nachdem man vorher $\cos^4 \alpha$ umgeformt hat:

$$\cos^4 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^2 = (1 - \sin \alpha)^2 (1 + \sin \alpha)^2.$$

Jetzt erhält man

$$V = \frac{\pi r^3 (1 - \sin \alpha)^2}{3 \sin \alpha} [(1 + \sin \alpha)^2 - (2 + \sin \alpha) \sin \alpha].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist gleich 1.
Wir erhalten

$$V = \frac{\pi r^3 (1 - \sin \alpha)^2}{3 \sin \alpha}.$$

Hier setzt man den gefundenen Ausdruck $r = r_1 \tan \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right)$ ein.

Außerdem kann man die Formel $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right)$ anwenden.

Lösung: $V = \dfrac{4 \pi r_1^3 \tan^3 \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^4 \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right)}{3 \sin \alpha}.$

764. Wenn man die Bezeichnungen in der Abbildung 229 verwendet, dann drückt die Gleichung $\pi r_1 (l + r_1) = n \cdot 4 \pi r^2$ die Voraussetzung der Aufgabe aus. Aus dem Dreieck MBM_1 erhält man $r = r_1 \tan \frac{\alpha}{2}$, und aus dem Dreieck MBC erhält man $\overline{BC} = l = \frac{r_1}{\cos \alpha}$. Die vorige Gleichung erhält nach dem Kürzen durch πr_1^2 die Form

$$1 + \frac{1}{\cos \alpha} = 4n \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Man wendet die Formel

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

an.

Es entsteht die Gleichung

$$\frac{2}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = 4n\tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man $\tan\frac{\alpha}{2} = z$, so erhält man[1]

$$z^4 - z^2 + \frac{1}{2n} = 0, \quad \text{woraus} \quad z^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}$$

folgt.

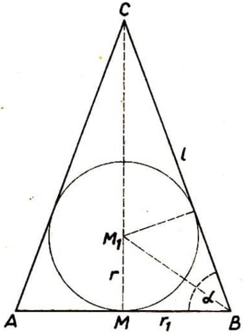


Abb. 229

Hier erkennt man, daß die Aufgabe für $n < 2$ keine Lösung hat (der Radikand würde negativ). Für $n \geqq 2$ sind beide Werte von z^2 positiv $\left(\text{denn } \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}} < \sqrt{\frac{1}{4}}, \text{ d. h. } \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}} < \frac{1}{2}\right)$. Da der Wert von $\tan\frac{\alpha}{2}$ positiv sein muß, können nur zwei Lösungen brauchbar sein:

$$z_1 = \tan\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}}$$

und

$$z_2 = \tan\frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}}.$$

Da der Winkel $\frac{\alpha}{2}$ kleiner als 45° ist, muß $\tan\frac{\alpha}{2}$ kleiner als 1 sein, d. h. $z^2 < 1$.

[1] Nach Multiplikation der Gleichung mit $1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}$ könnten als Lösung der neuen Gleichung die Wurzeln von $\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1$ auftreten. Diese sind aber unbrauchbar, denn sie erfüllen die Ausgangsgleichung nicht.

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, denn

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

und

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}} < \frac{1}{2}.$$

Lösung: Die Aufgabe ist nur lösbar für $n \geqq 2$.

Für $n > 2$ hat sie zwei Lösungen:

$$\frac{\alpha}{2} = \arctan \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}}; \quad \frac{\alpha}{2} = \arctan \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}},$$

für $n = 2$ fallen beide Lösungen zusammen

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

765. Man bezeichnet wie in der Abbildung 229 und erhält

$$\frac{1}{3} \pi r_1^2 h = n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Wenn man hier $r = r_1 \tan \frac{\alpha}{2}$ und $h = r_1 \tan \alpha$ setzt, so erhält man die Gleichung $\tan \alpha = 4n \tan^3 \frac{\alpha}{2}$.

Wendet man nun die Formel

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

an und bezeichnet $\tan \frac{\alpha}{2}$ mit z, so erhält man die Gleichung

$$z \left(\frac{1}{1 - z^2} - 2nz^2 \right) = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Gleichungen. Eine von ihnen ($z = 0$) stimmt mit der Voraussetzung nicht überein (der Winkel α kann nicht gleich Null sein). Die andere Gleichung bringt man auf die Form

$$z^4 - z^2 + \frac{1}{2n} = 0.$$

Sie stimmt mit der Gleichung der vorigen Aufgabe überein. Man erhält infolgedessen zwei Wurzeln:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}}$$

und

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}}}.$$

Für $n = 4$ lautet eine Wurzel

$$\tan\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}}$$
$$= \cos 22^\circ\, 30' \approx 0{,}9239,$$

die andere $\tan\frac{\alpha_2}{2} = \sin 22^\circ\, 30' \approx 0{,}3827$

(hierbei ist $\alpha_1 \approx 85^\circ\, 28'$ und $\alpha_2 \approx 41^\circ\, 53'$).

Lösung: Ebenso wie in der vorigen Aufgabe. Für $n = 4$ erhält man

$$\alpha_1 = 2 \arctan(\cos 22^\circ\, 30') \approx 85^\circ\, 28'$$

$$\alpha_2 = 2 \arctan(\sin 22^\circ\, 30') \approx 41^\circ\, 53'.$$

766. Die Fläche des Achsenschnittes ist gleich rh. Die Oberfläche ist gleich $\pi rl + \pi r^2$. Nach Voraussetzung ist $\frac{\pi(l + r)}{h} = n$. Wenn β der Winkel zwischen der Achse und der Mantellinie ist, dann gilt $r = l \sin\beta$ und $h = l \cos\beta$. Setzt man diese Ausdrücke ein, dann erhält man $\frac{1 + \sin\beta}{\cos\beta} = \frac{n}{\pi}$. Diese Gleichung kann man auf verschiedene Art und Weise lösen. Am besten ist es, die Formel

$$\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$$

anzuwenden. Man erhält

$$\frac{1 + \sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1 + \cos(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

Folglich ist $\cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{n}{\pi}$.

Hieraus kann man den Winkel $45^\circ - \frac{\beta}{2}$ und schließlich β bestimmen.

Diese Aufgabe hat jedoch nicht für jedes beliebige n eine Lösung. In der Tat, der Winkel β liegt in den Grenzen zwischen 0° und 90° und damit der Winkel $45° - \frac{\beta}{2}$ zwischen 0° und 45°, d. h., der Wert von $\frac{n}{\pi} = \cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right)$ muß stets größer sein als 1. Demnach gilt $n > \pi$. Für $n = 1, 2, 3$ hat also die Aufgabe keine Lösung.

Bemerkung: Die Gleichung $\frac{1 + \sin\beta}{\cos\beta} = \frac{n}{\pi}$ kann man auch folgendermaßen lösen:

Man bringt sie auf die Form $\frac{n}{\pi}\cos\beta - 1 = \sin\beta$, quadriert beide Seiten der Gleichung und drückt $\sin^2\beta$ durch $1 - \cos^2\beta$ aus. Man erhält zwei Lösungen. Eine von ihnen ($\cos\beta = 0$) ist unbrauchbar (sie ist Lösung der Gleichung $\frac{n}{\pi}\cos\beta - 1 = -\sin\beta$). Die andere Lösung $\cos\beta = \frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2}$ stimmt mit der vorigen überein. Sie kann allerdings leicht zu dem falschen Schluß führen, daß die Aufgabe auch für $n = 1, 2, 3$ lösbar sei. Für beliebiges positives n liegt der Wert von $\frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2}$ jedoch zwischen 0 und 1 $\left(\text{man erhält } 1 - \frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2} = \frac{(\pi - n)^2}{\pi^2 + n^2} > 0\right)$. Deshalb findet sich in den Grenzen von 0° bis 90° immer ein Winkel, dessen Kosinus gleich $\frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2}$ ist.

Der Fehler dieser Überlegung besteht in folgendem:

Aus der Beziehung $\cos\beta = \frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2}$ und aus der gegebenen Gleichung folgt, daß $\sin\beta = \frac{n^2 - \pi^2}{\pi^2 + n^2}$ ist. Hieraus ist ersichtlich, daß $n > \pi$ sein muß (im anderen Falle wäre der Winkel β negativ, das ist nicht möglich).

Lösung: Wenn $n < \pi$ ist, dann hat die Aufgabe keine Lösung,
ist $n > \pi$, dann ist

$$\beta = 90° - 2 \operatorname{arccot}\frac{n}{\pi}$$

oder

$$\beta = \arccos\frac{2\pi n}{\pi^2 + n^2} = \arcsin\frac{n^2 - \pi^2}{n^2 + \pi^2}.$$

767. Unter Verwendung der Bezeichnungen von Abbildung 230 gilt

$$\frac{r_1(l + r_1)}{2r^2} = \frac{18}{5}.$$

Man erhält (aus dem Dreieck AMD)

$$r = r_1 \cos \sphericalangle AMD = r_1 \cos \sphericalangle MCA = r_1 \cos \frac{\alpha}{2}$$

und (aus dem Dreieck AMC)

$$l = \frac{r_1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Die vorige Gleichung bringt man auf die Form

$$\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{5}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{18}{5}.$$

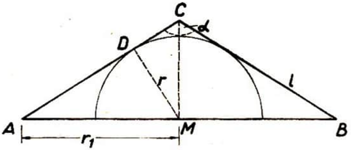


Abb. 230

Man kürzt den Bruch durch $1 + \sin \frac{\alpha}{2}$ (dieser Ausdruck ist ungleich Null). Die Gleichung erhält die Form

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{5}{36} = 0.$$

Lösung: $\alpha_1 = 2 \arcsin \frac{5}{6} (\approx 112° 53')$

und

$\alpha_2 = 2 \arcsin \frac{1}{6} (\approx 19° 11')$.

768. Verwendet man die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\pi}{3} r_1^2 h = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Man bezeichnet den gesuchten Winkel mit β $\left(\text{siehe Abb. 230, } \beta = \frac{\alpha}{2}\right)$. Dann ist $r = r_1 \cos \beta$ und $h = r_1 \cot \beta$. Aus der vorigen Gleichung erhält man

$3 \cot \beta - 8 \cos^3 \beta = 0$. Man multipliziert beide Seiten dieser Gleichung mit $\tan \beta$ (der Wert von $\tan \beta$ kann nach Voraussetzung nicht gleich Null sein) und erhält $3 - 8 \sin \beta \cos^2 \beta = 0$. Daraus folgt $8 \sin^3 \beta - 8 \sin \beta + 3 = 0$.
Zur Lösung dieser kubischen Gleichung verwendet man einen Kunstgriff. So kann man z. B. die linke Seite in Faktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} 8 \sin^3 \beta - 8 \sin \beta + 3 &= (8 \sin^3 \beta - 1) - (8 \sin \beta - 4) \\ &= [(2 \sin \beta)^3 - 1] - 4(2 \sin \beta - 1) \\ &= (2 \sin \beta - 1)\,[(2 \sin \beta)^2 + 2 \sin \beta + 1 - 4]. \end{aligned}$$

Folglich zerfällt die gegebene Gleichung in zwei Gleichungen. Aus der ersten Gleichung erhält man $\sin \beta = \frac{1}{2}$, aus der zweiten $\sin \beta = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$. (Die andere Wurzel der quadratischen Gleichung ist nicht brauchbar.) Die Probe zeigt, daß beide gefundenen Lösungen verwendbar sind.

Lösung: $\beta_1 = 30°$; $\beta_2 = \arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$.

769. Nach Voraussetzung ist die Mantelfläche des Kegels DEC (Abb. 231) gleich der halben Mantelfläche des Kegels ABC. Die Mantelflächen dieser Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Mantellinien, d. h. $\frac{\overline{CE}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{1}{2}$.

Da $\overline{CE} = \overline{CM}$ ist, gilt $\left(\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}\right)^2 = \frac{1}{2}$, d. h. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Lösung: $\alpha = 45°$.

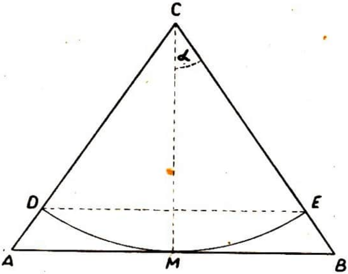


Abb. 231

770. Nach Voraussetzung ist das Volumen V des Kugelsektors $DKEC$ (Abb. 232) gleich dem halben Volumen des Kegels ABC. Man bezeichnet die Strecke KL

mit h und die Höhe des Kegels mit h_1. Dann gilt $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Man erhält die Gleichung

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1,$$

d. h. $4r^2 h = r_1^2 h_1$ oder $4r^2 h = h_1^3 \tan^2 \alpha$.

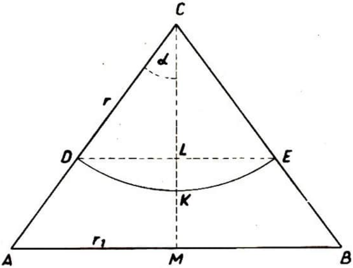


Abb. 232

Man drückt h durch r aus:

$$h = \overline{KL} = \overline{CK} - \overline{CL} = r - r\cos\alpha = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und erhält die Gleichung $8r^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = h_1{}^3 \tan^2 \alpha$.

Lösung: $r = \dfrac{h_1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{\tan^2\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

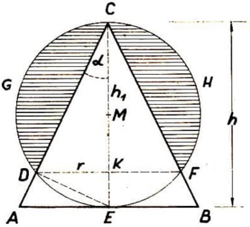


Abb. 233

771. In der Abbildung 233 ist der Achsenschnitt des Teiles der Kugel, dessen Volumen bestimmt werden soll, durch Schraffur gekennzeichnet. Dieses Volumen V erhält man aus der Differenz des Volumens V_1 des Kugelsegmentes *CGDKFH* und des Volumens V_2 des Kegels *DFC*. Man führt folgende Bezeichnungen ein: $\overline{DK} = r$ und $\overline{CK} = h_1$. Da der Radius der Kugel gleich $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{h}{2}$ ist, folgt

$$V = V_1 - V_2 = \pi h_1^2\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{3}\right) - \frac{\pi r^2 h_1}{3}.$$

Hier muß man die Ausdrücke

$$h_1 = \overline{CD}\cdot\cos\alpha = h\cos^2\alpha \text{ und } r = \overline{CD}\cdot\sin\alpha = h\cos\alpha\sin\alpha$$

einsetzen. (Die Rechnung wird einfacher, wenn man vorher $r^2 = \overline{DK}^2$ durch $\overline{CK}\cdot\overline{EK} = h_1(h - h_1)$ ersetzt.) Dann ist $V = \frac{\pi h_1^2 h}{6}$.

Lösung: $V = \dfrac{\pi h^3 \cos^4\alpha}{6}$.

772. Unter Verwendung der Bezeichnungen von Abbildung 234 gilt $A_O = \pi(r + r_1)\,l$. Man konstruiert die Berührungsradien $\overline{DM} = R$ und $\overline{D_1M_1} = R_1$ und die Strecke $\overline{KM_1}$, das Lot von M_1 auf $\overline{DM}$.

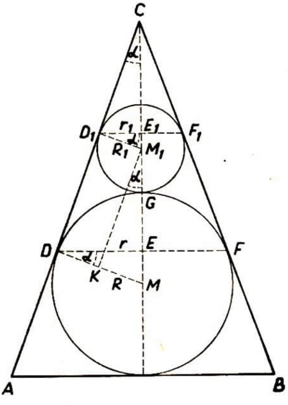


Abb. 234

Man erhält die Dreiecke $M_1E_1D_1$, MED und KMM_1. Sie sind ähnlich, denn sie sind rechtwinklig und haben den gleichen Winkel α.
Im $\triangle\, KMM_1$ gilt $\overline{MM_1} = R + R_1$; $\overline{KM} = R - R_1$; $\overline{KM_1} = \overline{DD_1} = l$.
Folglich ist $l = \sqrt{(R + R_1)^2 - (R - R_1)^2} = 2\sqrt{RR_1}$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MED und KMM_1 folgt

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{R + R_1} \quad \text{und daraus} \quad r = \frac{lR}{R + R_1} = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R + R_1}.$$

Aus den Dreiecken $M_1E_1D_1$ und KMM_1 folgt

$$\frac{r_1}{l} = \frac{R_1}{R + R_1} \quad \text{und daraus} \quad r_1 = \frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R + R_1}.$$

Lösung: $A_O = 4\pi RR_1$.

773. Auf der Ebene E (Abb. 235)[1] liegen vier Kugeln mit dem Radius r. A, B, C und D sind ihre Berührungspunkte mit der Ebene E. Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 haben von der Ebene die Abstände $\overline{AM_1} = \overline{BM_2} = \overline{CM_3} = \overline{DM_4} = r$. Die Entfernung zwischen den Mittelpunkten zweier sich berührender Kugeln ist gleich $2r$, d. h. $\overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_4M_1} = 2r$. Die fünfte Kugel berührt jede der vier anderen, folglich ist ihr Mittelpunkt M_5 von den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und M_4 ebenfalls $2r$ entfernt,

d. h. $\overline{M_1M_5} = \overline{M_2M_5} = \overline{M_3M_5} = \overline{M_4M_5} = 2r$.

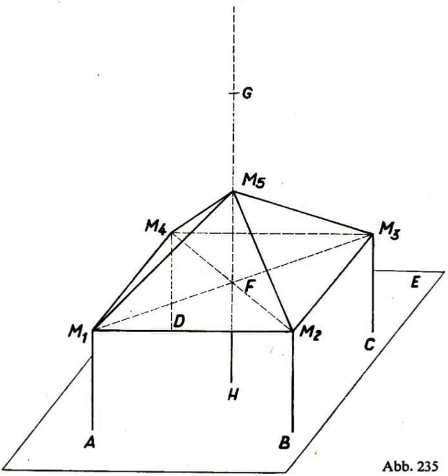


Abb. 235

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

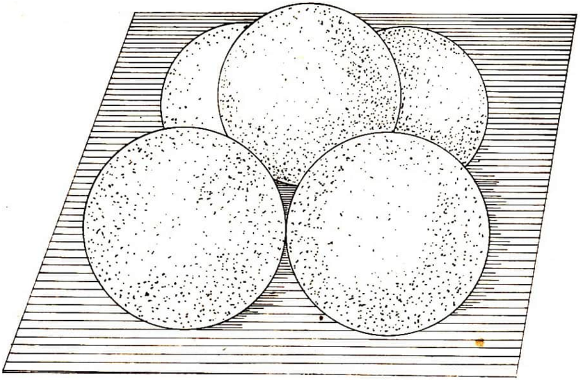


Abb. 235a

Also ist die Figur $M_1M_2M_3M_4M_5$ eine regelmäßige vierseitige Pyramide, deren Kanten (sowohl Grund- als auch Seitenkanten) alle gleich lang sind. Der Mittelpunkt der fünften Kugel hat von der Ebene E den Abstand

$$\overline{FM_5} + \overline{HF} = \overline{FM_5} + r.$$

Der höchste Punkt G der fünften Kugel befindet sich auf der Verlängerung des Lotes $\overline{HM_5}$ in der Entfernung $\overline{GM_5} = r$ vom Mittelpunkt M_5. Aus diesem Grunde ist der Abstand $\overline{GH}$ des höchsten Punktes der fünften Kugel von der Ebene E gleich $2r + \overline{FM_5}$. Die Strecke $\overline{FM_5}$ bestimmt man im rechtwinkligen Dreieck M_1FM_5. Dabei sind

$$\overline{M_1M_5} = 2r \quad \text{und} \quad \overline{FM_1} = \frac{\overline{M_1M_2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}.$$

Lösung: $\overline{GH} = r(2 + \sqrt{2})$.

774. Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der vier Kugeln müssen voneinander die Entfernung $2r$ haben (siehe Lösung der vorigen Aufgabe), d. h., die Figur $M_1M_2M_3M_4$ ist ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge $2r$. Der Kegel ABC (Abb. 236)[1], der den vier Kugeln umbeschrieben ist, berührt eine von ihnen (M_4) im Kreis FH, jede andere (z. B. die Kugel um M_1) in zwei Punkten. Einer dieser Punkte (K) liegt in der Grundfläche, der andere (G) auf dem Mantel.

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

Die Achse des Kegels fällt mit der Höhe $\overline{EM_4}$ des Tetraeders zusammen. Der Mittelpunkt M_1 liegt in der Ebene des Achsenschnittes ADC. Dieser Achsenschnitt verläuft durch den Berührungspunkt G (denn sowohl die Strecke $\overline{GM_1}$

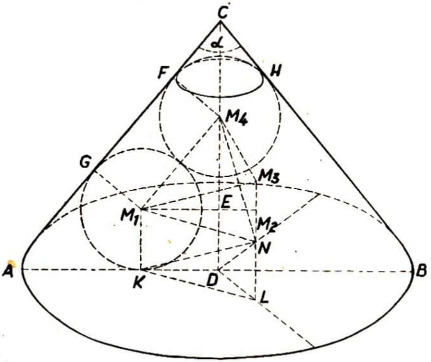


Abb. 236

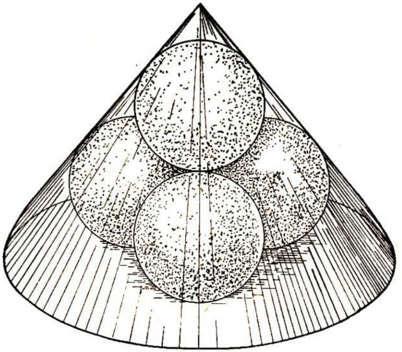


Abb. 236a

steht senkrecht auf der gemeinsamen Berührungsebene von Kegel und Kugel als auch die Ebene des Achsenschnittes ADC). Das heißt, die Ebene ADC schneidet die Kugeln um M_1 und M_4 in Großkreisen. Die Mantellinie $\overline{AC}$ ist die gemeinsame Tangente dieser Großkreise. Folglich ist

$$\overline{AC} \parallel \overline{M_1M_4} \quad \text{und} \quad \sphericalangle EM_4M_1 = \sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2}$$

(α ist der gesuchte Winkel an der Spitze C des Achsenschnittes), d. h.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{EM_1}}{\overline{M_1M_4}}.$$

Da aber $\overline{M_1M_4} = 2r$ ist, ist die Strecke $\overline{EM_1}$ (der Radius des Kreises, der dem Dreieck $M_1M_2M_3$ umbeschrieben ist) gleich

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Man erhält

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Daraus kann man

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

bestimmen.

Lösung: $\alpha = 2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\dfrac{1}{3}$.

775. Die Ebene, die den Schnittwinkel der Ebenen $A_1B_1B_2A_2$ und $A_1C_1C_2A_2$ halbiert, die also durch die Kante $\overline{A_1A_2}$ verläuft (Abb. 237)[1], geht durch die Höhe $\overline{M_1M_2}$ und steht senkrecht auf der Seitenfläche $B_1C_1C_2B_2$ (nachweisen!). Analog verhalten sich die beiden anderen Halbierungsebenen. Deshalb liegt der Mittelpunkt der Kugel, die die Seiten des Pyramidenstumpfes berührt, auf der Höhe (genauer: auf der Mitte der Höhe, da die Kugel auch die Grundflächen berührt). Der Berührungspunkt K der Kugel mit der Seitenfläche $B_1C_1C_2B_2$ liegt auf der Symmetrieachse $\overline{D_1D_2}$ dieser Seitenfläche. Analoge Betrachtungen treffen für die anderen Seitenflächen zu.

Es gilt

$$A_{O_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2) + 3\,\frac{(a_1 + a_2)\,l}{2}$$

($a_1 = \overline{B_1C_1}$ und $a_2 = \overline{B_2C_2}$ sind die Seiten der Grundflächen, und $l = \overline{D_1D_2}$ ist die Symmetrieachse einer Seitenfläche). Wenn $r_1 = \overline{D_1M_1}$ und $r_2 = \overline{D_2M_2}$

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

die Radien der Inkreise der Grundflächen sind, dann ist $a_1 = 2r_1\sqrt{3}$ und $a_2 = 2r_2\sqrt{3}$. Deshalb ist $A_{O_1} = 3\sqrt{3}\,(r_1^2 + r_2^2) + 3\sqrt{3}\,(r_1 + r_2)\,l$.

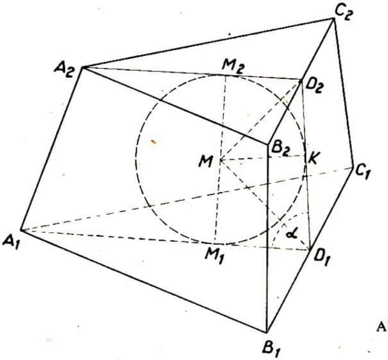


Abb. 237

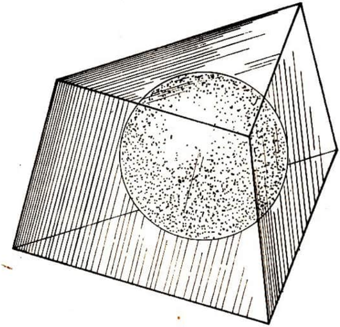


Abb. 237a

Wie in der Lösung der Aufgabe 751 findet man, daß

$$r_1 + r_2 = l \quad \text{und} \quad r_1^2 + r_2^2 = l^2 - 2r^2$$

ist. Dann erhält man

$$A_{O_1} = 6\sqrt{3}\,(l^2 - r^2) = 6\sqrt{3}\left(\frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - r^2\right).$$

Lösung: $\dfrac{A_{O_2}}{A_{O_1}} = \dfrac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}\,(4 - \sin^2\alpha)}$.

776. Man bezeichnet den Radius $\overline{LM}$ des Zylinders (Abb. 238) mit x, den Radius $\overline{BM}$ der Grundfläche des Kegels mit r. Da nach Voraussetzung $\overline{LN} = r$ ist, muß die Oberfläche des Zylinders gleich $A_O = 2\pi x^2 + 2\pi xr$ sein.

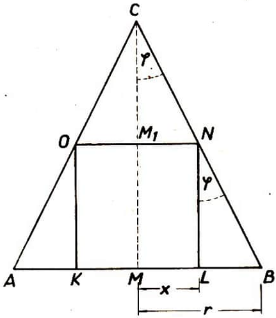


Abb. 238

Nach Voraussetzung ist

$$2\pi x^2 + 2\pi xr = \frac{3}{2}\pi r^2$$

oder

$$x^2 + rx - \frac{3}{4}r^2 = 0,$$

woraus $x = \frac{r}{2}$ folgt $\left(\text{der negative Wert } x = -\frac{3}{2}r \text{ ist nicht brauchbar}\right)$.

Aus dem Dreieck LBN erhält man

$$\tan\varphi = \frac{\overline{BL}}{\overline{LN}} = \frac{r-x}{r} = \frac{1}{2}.$$

Lösung: $\varphi = \arctan\frac{1}{2}$.

777. Der Mittelpunkt M der einbeschriebenen Kugel (Abb. 239) liegt auf der Höhe der Pyramide, die Berührungspunkte K, L, O und N der Kugel mit den Seitenflächen liegen auf den Symmetrieachsen EK_1, EL_1, EO_1 und EN_1 (siehe Lösung der Aufgabe 775). Das Viereck $KLON$ ist ein Quadrat und stellt die Grundfläche der Pyramide dar, deren Volumen bestimmt werden soll.
Man legt durch die Radien $\overline{MO}$ und $\overline{MN}$ die Ebene MON. Sie steht senkrecht auf der Seitenfläche BCE (denn in MON liegt die Strecke $\overline{MO}$, und diese Strecke

steht senkrecht auf BCE). Ebenso steht die Ebene MON senkrecht auf der Seitenfläche DCE (denn in ihr liegt $\overline{MN}$). Folglich steht die Ebene MON senkrecht auf der Kante $\overline{CE}$.

Es sei P der Schnittpunkt der Ebene MON mit der Kante $\overline{CE}$. Dann ist der Winkel OPN der gegebene Winkel α. Im Viereck $MOPN$ sind zwei Winkel rechte (die in den Punkten O und N). Folglich ist $\sphericalangle NMO = 180° - \alpha$, also

$$a = \overline{NO} = 2\overline{MO} \cdot \sin\frac{180° - \alpha}{2} = 2r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

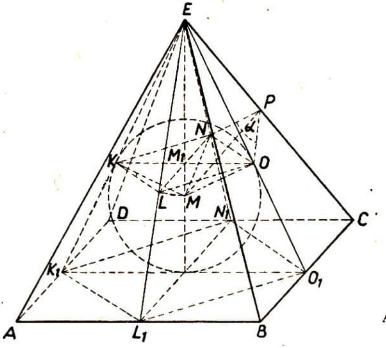


Abb. 239

Im Dreieck MOM_1 ist $\overline{M_1O} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten

$$h = \overline{MM_1} = \sqrt{\overline{MO}^2 - \overline{M_1O}^2} = r\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Lösung: $V = \frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}.$

778. Man kann zwei Ebenen konstruieren, die senkrecht auf einer gegebenen Mantellinie des Kegels ($\overline{AC}$ in Abb. 240) stehen und die einbeschriebene Kugel berühren. Ihre Berührungspunkte (N und N_1) liegen auf dem Durchmesser $\overline{NN_1}$, der parallel zu $\overline{AC}$ liegt. Man nimmt zuerst an, daß es sich um die Ebene durch DN handelt. Sie berührt die Kugel im Punkt N. Das Viereck $MNDK$ (K ist der Berührungspunkt der Mantellinie $\overline{AC}$ mit der Kugel) ist ein Quadrat. Also ist $\overline{DK} = \overline{MN} = r$. Nach Voraussetzung ist $\overline{CD} = d$.
Folglich ist $\overline{CK} = d + r$.

Aus dem Dreieck KMC erhält man $\overline{CM} = \sqrt{(d + r)^2 + r^2}$.
Folglich ist $h = \overline{CF} = \overline{FM} + \overline{CM} = r + \sqrt{(d + r)^2 + r^2}$.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AFC und KMC folgt $\overline{AF} : h = \overline{KM} : \overline{CK}$, woraus

$$r_1 = \overline{AF} = \frac{\overline{KM} \cdot h}{\overline{CK}} = \frac{r[r + \sqrt{(d + r)^2 + r^2}]}{d + r}$$

folgt.

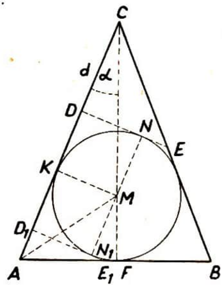


Abb. 240

Verwendet man die Ebene durch D_1N_1, dann ist $d = \overline{CD_1}$, und man erhält auf gleiche Art und Weise

$$h = r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{r[r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2}]}{d - r}.$$

Lösung: $V = \dfrac{\pi r^2[r + \sqrt{(d + r)^2 + r^2}]^3}{3(d + r)^2}$ oder

$$V = \frac{\pi r^2[r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2}]^3}{3(d - r)^2}.$$

779. Der Mittelpunkt M der Kugel (Abb. 241)[1] liegt auf der Raumdiagonale $\overline{AB}$. Folglich ist der Punkt M von den Seitenflächen ANN_1A_1 und QAA_1Q_1 gleich weit entfernt, d. h., er liegt auf der Ebene, die den Winkel zwischen diesen beiden Seitenflächen halbiert. Aus den gleichen Gründen muß M auf der Ebene liegen, die den Winkel zwischen den Seitenflächen ANN_1A_1 und $QANU$ halbiert. Diese beiden Ebenen schneiden einander in der Raumdiagonalen $\overline{AB}$.
Es seien C und D die Berührungspunkte der Kugel mit den Seitenflächen $ANUQ$ und ANN_1A_1 und r der Radius der Kugel.
Dann ist $\overline{CM} = \overline{DM} = r$, und die Ebene $CGDM$ steht senkrecht auf der Kante $\overline{AN}$ und auf der Kante $\overline{BQ_1}$. Da die Kante $\overline{BQ_1}$ nach Voraussetzung die Kugel

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

berührt, schneidet die durch $CGDM$ bestimmte Ebene die Kante in E, dem Berührungspunkt von Kugel und Kante. Folglich ist $\overline{EM} = r$. Andererseits ist der Punkt E ein Eckpunkt des Quadrates $FGKE$, das man als Schnittfigur des Würfels

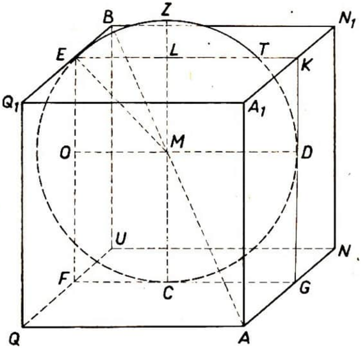
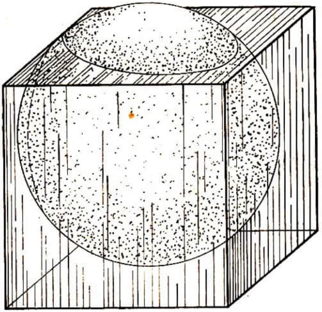


Abb. 241

Abb. 241 a



mit der durch $CGDM$ bestimmten Ebene erhält, d. h., das Viereck $OMLE$ ($\overline{LM}$ und $\overline{MO}$ sind Verlängerungen von $\overline{CM}$ bzw. $\overline{DM}$) ist ein Quadrat. Folglich ist

$$\overline{MO} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Da $\overline{MO} + \overline{DM} = \overline{DO} = a$ ist, gilt $\frac{r}{\sqrt{2}} + r = a$, woraus $r = (2 - \sqrt{2})\,a$ folgt.

Der Teil der Kugeloberfläche, der außerhalb des Würfels liegt, besteht aus drei gleichen Segmenten. Eines von ihnen ist $EZTL$. Die Oberfläche dieses Segmentes ist gleich

$$2\pi r \cdot \overline{LZ} = 2\pi r(\overline{CZ} - \overline{CL}) = 2\pi r(2r - a).$$

Lösung: $r = (2 - \sqrt{2})\,a; \quad A = 6\pi a^2(10 - 7\sqrt{2})$.

780. Der Mittelpunkt der Kugel, die die Kanten des Tetraeders $ABCD$ (Abb. 242 und 242a)[1] berührt, fällt mit dem Mittelpunkt des Tetraeders zusammen (d. h. mit dem Punkt M, der von den Ecken A, B, C und D gleich weit entfernt ist). Die Berührungspunkte der Kugel mit den Kanten sind die Mitten der Kanten. Zum Beispiel ist der Berührungspunkt N die Mitte der Kante $\overline{AD}$. In der Tat, alle sechs gleichschenkligen Dreiecke ABM, BCM, CAM, BDM, CDM und ADM (es ist nur das Dreieck AMD eingezeichnet) sind kongruent, denn sie stimmen in drei Seiten überein. Folglich sind ihre Höhen $\overline{MO}$, $\overline{MN}$ usw. gleich lang. Deshalb muß die einbeschriebene Kugel mit dem Radius $\overline{MN} = r$ die Kanten in den Mitten L, O, N, Q, K und R berühren, so daß $\overline{MN} \perp \overline{AD}$ usw. sind.
Man legt durch die Höhe $\overline{DG}$ des Tetraeders und durch die Kante $\overline{AD}$ eine Ebene AGD. Sie steht senkrecht auf der Kante $\overline{BC}$. (Der Nachweis wurde in der Lösung der Aufgabe 652 gebracht.)

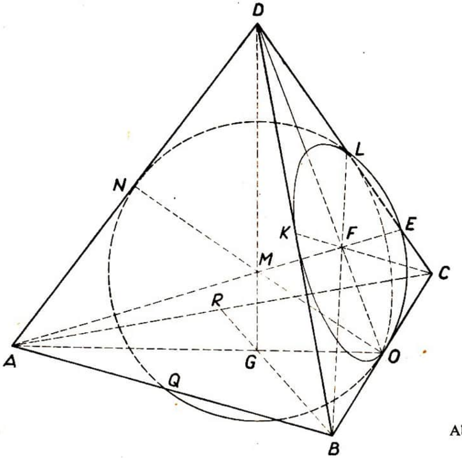


Abb. 242

[1] Vergleichen Sie mit der Fußnote 2 auf Seite 259!

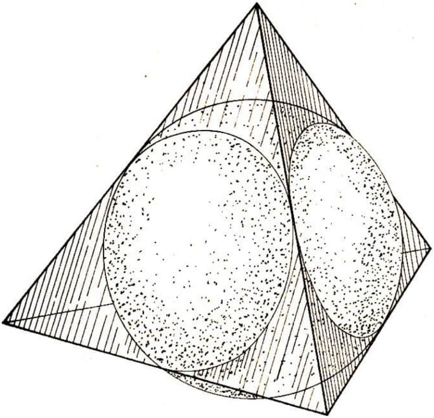


Abb. 242a

Die Ebene AGD schneidet diese Kante in ihrer Mitte O. Als Schnittfigur erhält man das gleichschenklige Dreieck AOD ($\overline{AO} = \overline{DO}$). Man konstruiert die Höhe $\overline{NO}$ dieses Dreiecks (N ist die Mitte von $\overline{AD}$). Der Mittelpunkt M liegt auf $\overline{NO}$ (so daß er von A und D gleich weit entfernt ist).

Folglich ist $\overline{MO} = \overline{MN}$, d. h. $r = \dfrac{\overline{NO}}{2}$.

Die Höhe $\overline{NO}$ bestimmt man aus dem Dreieck AON, hier ist

$$\overline{AN} = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \overline{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC).

Es gilt

$$\overline{ON} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Folglich ist

$$r = \frac{\overline{NO}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Der Teil der Kugel, der außerhalb des Tetraeders liegt, besteht aus vier gleichen Segmenten, die durch die Seitenflächen des Tetraeders von der Kugel abgeschnitten werden. Wir betrachten eine der Seitenflächen, BCD. Der Kreis LKO (er ist „Grundfläche" des Segments) ist dem gleichseitigen Dreieck BCD einbeschrieben, denn die Seiten des Dreiecks berühren die Kugel, d. h., sie berühren auch den Kleinkreis LKO, der in der Ebene BCD liegt. Der Radius dieses Kreises ist $\overline{FO} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Folglich ist

$$\overline{FM} = \sqrt{\overline{MO}^2 - \overline{FO}^2} = \sqrt{r^2 - \overline{FO}^2}$$

$$\overline{FM} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{6}},$$

also die Höhe des Segmentes gleich

$$h = \overline{EF} = \overline{EM} - \overline{FM} = \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3}).$$

Das Volumen V_s eines Segmentes beträgt

$$V_s = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

$$= \pi \left[\frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3})\right]^2 \cdot \left[\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{36}(3 - \sqrt{3})\right]$$

$$V_s = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}\,(9 - 4\sqrt{3})}{432}.$$

Das gesuchte Volumen ist $V = 4V_s$.

Bemerkung: Der Kreis LKO, der dem Dreieck BCD einbeschrieben ist, wird durch eine Ellipse dargestellt, die man leicht freihändig zeichnen kann, wenn außer den Punkten K, L und O noch drei Punkte gewählt werden, die bezüglich des Punktes F zu den genannten Punkten zentralsymmetrisch liegen (F ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks BCD).

Lösung: $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $\quad V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}\,(9 - 4\sqrt{3})}{108}$.

11. Trigonometrische Umformungen

781. Man drückt den Sekans durch den Kosinus aus und erhält auf der linken Seite:

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Weil

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

gilt, ist die linke Seite gleich

$$\frac{2}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{2}{\cos 2\alpha} = 2\sec 2\alpha.$$

782. Man bringt die linke Seite auf den Hauptnenner und formt $2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ wie folgt um:

$$\sin[\alpha+(\alpha+\beta)] + \sin[\alpha-(\alpha+\beta)] = \sin(2\alpha+\beta) + \sin(-\beta).$$

783. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{2(1+\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cdot 2\cdot\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 2\cot\alpha.$$

Um zum Argument $\frac{\alpha}{2}$ übergehen zu können, benutzt man die Formel

$$\cot 2\varphi = \frac{\cot^2\varphi - 1}{2\cot\varphi}$$

$\left(\frac{\alpha}{2}\text{ setzt man für }\varphi\text{ ein}\right)$ und erhält:

$$2\cot\alpha = 2\frac{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cot\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}.$$

784. Man kürzt den Bruch auf der linken Seite durch $\cos\alpha$ und erhält

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}.$$

Weil $1 = \tan 45°$ ist, erhält der Ausdruck folgende Form:

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{\tan 45° + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 45°} = \tan(45° + \alpha),$$

was zu zeigen war.

785. Man erweitert den Bruch der linken Seite mit $\cos\alpha + \sin\alpha$, vereinfacht und erhält $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ oder

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha + \tan 2\alpha.$$

786. Weil $\sin^2\varphi = \dfrac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ ist, erhält man auf der linken Seite

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{2}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2}.$$

Man wendet die Formel für die Differenz der Kosinuswerte (oder auf die Ausdrücke $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$ die Additionstheoreme) an und erhält

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

787. Der Zähler ist gleich $\cos 2\alpha$; den Nenner schreibt man in der Form

$$2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] =$$

$$= 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Da $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ ist, erhält man

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right).$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\cos 2\alpha$, so daß die linke Seite gleich 1 ist.

788. Es gilt

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Man geht vom Argument $\frac{\pi}{4}-\alpha$ zum Argument $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ über, formt mit Hilfe der Gleichungen für den Sinus bzw. Kosinus halber Winkel um und erhält

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

789. Man ersetzt den Tangens und den Kotangens durch den Sinus bzw. Kosinus und erhält

$$\cot^2\alpha-\tan^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Man setzt für den Nenner der linken Seite den erhaltenen Ausdruck ein. Also erhält man auf der linken Seite:

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\cdot\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

790. Man ersetzt $\sin\alpha$ durch $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ sowie $\cos\alpha$ durch $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ und wendet die Additionstheoreme an.

791. Man schreibt die Zahl 1 als $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ und ersetzt $\sin 2\alpha$ durch $2\sin\alpha\cos\alpha$. Im Zähler erhält man $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.
Der Nenner ist gleich $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$.

Man kürzt den Bruch durch $\cos\alpha + \sin\alpha$ und erhält

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Dann dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$ und erhält

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}.$$

In der Lösung der Aufgabe 784 wurde gezeigt, daß dieser Ausdruck gleich $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ist.

792. Wie in der Lösung der Aufgabe 790 ergibt die linke Seite $\cot\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$.

Man wendet die Formel $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ an, setzt für $\frac{\alpha}{2}$ den Ausdruck $\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$ ein und erhält

$$\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)} = \frac{1 + \sin 2y}{\cos 2y}.$$

793. Man ersetzt die linke Seite der gegebenen Identität durch Sinus und Kosinus, führt die Subtraktion der erhaltenen Brüche aus und ersetzt die Differenz der Quadrate.
Dann erhält man auf der linken Seite

$$\frac{(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem auf der rechten Seite.

794. Man wendet die Formel $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$ an und setzt für $\frac{\varphi}{2}$ den Ausdruck $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ ein. Dann erhält man

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Nach dieser Umformung ist die linke Seite gleich der rechten.

795. Man verfährt wie in der Lösung der Aufgabe 794.

796. Man ersetzt $2\cos^2\alpha$ durch $1 + \cos 2\alpha$.
Der Zähler erhält dann die Form $2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)$.
Er läßt sich wie folgt schreiben:

$$(\cos\alpha - \cos 3\alpha) + (\sin 3\alpha - \sin\alpha).$$

Man wendet nun die Formel für die Differenzen des Sinus und des Kosinus an, klammert $2\sin\alpha$ aus und erhält

$$2\sin\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha).$$

Schließlich kürzt man durch $2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)$ und erhält den Ausdruck der rechten Seite.

797. Man formt den Zähler des Bruches der linken Seite um und erhält

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha &= 2\sin 3\alpha\cos 2\alpha - \sin 3\alpha\\ &= \sin 3\alpha(2\cos 2\alpha - 1).\end{aligned}$$

Anschließend führt man die analoge Umformung im Nenner durch und erhält

$$\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha - 1).$$

798. Man formt die Summe der ersten beiden Summanden der linken Seite mit Hilfe der Formel für die Summe der Sinuswerte um. Den dritten Summanden $\sin(b - c)$ formt man mit Hilfe der Gleichung für den Sinus des doppelten Winkels um.
Man erhält

$$\begin{aligned}&2\sin\frac{2a-b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2} + 2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}\\ &= 2\cos\frac{b-c}{2}\left[\sin\frac{2a-b-c}{2} + \sin\frac{b-c}{2}\right].\end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann noch mit Hilfe der Gleichung für die Summe der Sinuswerte vereinfacht werden.

799. Man betrachtet den Ausdruck $\sin^6 x + \cos^6 x$ als Summe zweier Kuben. Man zerlegt ihn in Faktoren und beachtet dabei, daß $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist.
Die linke Seite der Gleichung läßt sich dann folgendermaßen vereinfachen:

$$-\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x + 1 = 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 0.$$

800. Die Summe der beiden letzten Summanden formt man mit Hilfe der Gleichungen für die Summe zweier Sinuswerte um und erhält

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) &= 2\sin(\pi + \alpha)\cos\frac{\pi}{3}\\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha.\end{aligned}$$

Folglich ist die linke Seite gleich 0.

801. Man formt folgendermaßen um

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}$$

$$= \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

Die linke Seite der Gleichung nimmt folgende Gestalt an:

$$\sin(45^\circ + \alpha + 30^\circ - \alpha)\sin(45^\circ + \alpha - 30^\circ + \alpha) -$$

$$- \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha).$$

Da $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ ist, wird der vorstehende Ausdruck weiter umgeformt in

$$\cos 15^\circ \sin(15^\circ + 2\alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) =$$

$$= \sin(15^\circ + 2\alpha - 15^\circ) = \sin 2\alpha,$$

was zu zeigen war.

802. Der Zähler der linken Seite ist gleich

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - 2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi.$$

803. Auf der rechten Seite schreibt man für $\sin 2\alpha$ den Ausdruck $2\sin\alpha\cos\alpha$. Man kürzt den Bruch durch $2\sin\alpha$ und erhält auf der rechten Seite:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Dieser Bruch ist gleich $\tan^2\frac{\alpha}{2}$.

804. Faßt man den zweiten und dritten Summanden der linken Seite zusammen und klammert

$$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$$

aus, so erhält die linke Seite folgende Form:

$$\cos^2\varphi - (\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi).$$

Man vereinfacht weiter:

$$\cos^2\varphi - \cos^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\alpha\sin^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi(1-\cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\sin^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi\cdot\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\varphi.$$

Der letztgenannte Ausdruck ist gleich $\sin^2\alpha$.

805. Man formt $\cos(\alpha + \beta)$ mit Hilfe des Additionstheorems um und erhält

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Läßt man den dritten Summanden vorerst unberücksichtigt, so erhält man:

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) =$$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta.$$

Der ganze Ausdruck hat also die Form:

$$(\sin\alpha\cos\beta)^2 + (\cos\alpha\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2(\alpha + \beta).$$

Lösung: $\sin^2(\alpha + \beta)$.

806. Man vereinfacht die Summe der ersten drei Summanden folgendermaßen:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma.$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,
also gilt: $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.
Man erhält

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin^2(\alpha + \beta) =$$

$$= 1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + [1 - \cos^2(\alpha + \beta)]$$

oder

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist gleich

$$2\cos\alpha\cos\beta.$$

Weil $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ ist, gilt

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta,$$

woraus die Richtigkeit der gegebenen Beziehung folgt.

807. Man erhält auf der linken Seite der Gleichung

$$\cot\alpha\cot\beta + (\cot\alpha + \cot\beta)\cot\gamma.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist gleich $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Da $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist, gilt für $\cot\gamma$:

$$\cot\gamma = \cot[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cot(\alpha + \beta).$$

Folglich ist der gegebene Ausdruck gleich

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

Wendet man das Additionstheorem für den Kosinus an, so erhält man

$$\cot\alpha \cot\beta - \left(\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}\right) =$$

$$= \cot\alpha \cot\beta - (\cot\alpha \cot\beta - 1) = 1.$$

808. Man ersetzt die Faktoren $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$ durch die Ausdrücke

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

Wenn man den Wert der linken Seite berechnet, so erhält man

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Weil aber $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$ gilt, ist die linke Seite gleich $\frac{1}{4}$.

809. Man formt die linke Seite mit Hilfe der Formel für die Summe der Kosinuswerte um und erhält

$$2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}.$$

Die weitere Rechnung verläuft analog zu der in der Lösung der Aufgabe 808.

810. Es ist $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Also erhält der gegebene Ausdruck die Form

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{oder} \quad 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Da $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ist, kann man schreiben:

$$2 \cos \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos 60°\right).$$

Lösung: $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{4} + 30°\right) \cos\left(\frac{\alpha}{4} - 30°\right).$

811. Man formt den gegebenen Ausdruck wie in der Lösung der vorigen Aufgabe um und erhält

$$2 \cos \alpha \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Für $\frac{\sqrt{2}}{2}$ kann man $\cos 45°$ einsetzen.

Lösung: $4 \cos \alpha \sin \frac{45° + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{45° - \alpha}{2}.$

812. Man schreibt den gegebenen Ausdruck in der Form

$$\cos^2 (\alpha + \beta) - \sin^2 (\alpha - \beta)$$

und bringt ihn (wie in der Lösung der Aufgabe 656) auf eine Form, die günstig zu logarithmieren ist.

Lösung: $\cos 2\alpha \cos 2\beta.$

813. Man schreibt die Summe folgendermaßen:

$$(1 + \cos \alpha) + (\tan \alpha + \sin \alpha),$$

klammert aus der zweiten Klammer $\tan \alpha$ aus und erhält

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \tan \alpha).$$

Der Ausdruck $1 + \tan \alpha$ kann auch als

$$\tan 45° + \tan \alpha = \frac{\sin (45° + \alpha)}{\cos 45° \cdot \cos \alpha}$$

geschrieben werden.

Lösung: $\dfrac{2\sqrt{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin (45° + \alpha)}{\cos \alpha}.$

814. Es werden die Formeln

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

verwendet.

Im Zähler erhält man

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right].$$

Der Klammerausdruck ist gleich

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Man wendet die Formel für die Summe zweier Sinuswerte an und schreibt den Ausdruck in der Form

$$\sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Lösung: $2\sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.

815. Der gegebene Ausdruck ist gleich $\dfrac{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha}$.

Der Zähler läßt sich vereinfachen. Man erhält

$$2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

(Siehe Lösung der vorigen Aufgabe!)
Der Bruch läßt sich noch umformen, wobei der Nenner folgende Form annimmt:

$$\sin (90^\circ - \alpha) = 2 \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Lösung: $\dfrac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

816. Weil $\cos \alpha - \cos 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha$ ist, gilt

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha &= 2 \sin 2\alpha \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \sin 2\alpha (\sin \alpha + \sin 30^\circ). \end{aligned}$$

Lösung: $4 \sin 2\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)$.

817. Der gegebene Ausdruck ist gleich

$$\frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} + \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{4\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}, \quad \text{d. h.} \quad 2\,\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Lösung: $2 \tan 2\alpha$.

818. Man ersetzt $\sin 2\beta$ durch $2 \sin\beta \cos\beta$ und kürzt durch $2 \sin\beta$. Man erhält so

$$\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}.$$

Unter Anwendung der Formel

$$\tan\frac{\beta}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}} \quad \text{bzw.} \quad \tan\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}}$$

erhält man die

Lösung: $\tan^2\frac{\beta}{2}$.

819. Nachdem man die Summe $\cos\alpha + \sin\alpha$ im Zähler $\sqrt{2} - (\cos\alpha + \sin\alpha)$ und die Differenz $\sin\alpha - \cos\alpha$ im Nenner wie in der Lösung der Aufgabe 814 umgeformt hat, erhält man:

$$\frac{\sqrt{2}\,[1 - \cos(\alpha - 45^\circ)]}{\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha - 45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\cos\frac{\alpha - 45^\circ}{2}}.$$

Lösung: $\tan\frac{\alpha - 45^\circ}{2}$.

820. Man formt die Summe der beiden letzten Summanden folgendermaßen um:

$$\cot 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \cot\alpha.$$

Lösung: $2 \cot\alpha$.

821. Man ersetzt $\cos 2\alpha$ durch $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ und $\sin 2\alpha$ durch $2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Lösung: 1.

822. Man ersetzt $2\sin^2\alpha - 1$ durch $-\cos 2\alpha$.
Der gegebene Ausdruck erhält dann die Form:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right).$$

Man verwendet die Werte

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Lösung: $2\sin(2\alpha - 30^\circ)$.

823. Der Zähler ist gleich

$$\frac{\cos 2\alpha \cos\alpha + \sin 2\alpha \sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha} = \frac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\cos 2\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha},$$

der Nenner gleich

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}.$$

Lösung: $\frac{1}{2}\tan 2\alpha$.

824. Der gegebene Ausdruck ist gleich (siehe Lösung der Aufgabe 823)

$$2 + \frac{2}{\sin 4\alpha} = \frac{2}{\sin 4\alpha}(1 + \sin 4\alpha),$$

der Ausdruck in der Klammer gleich

$$1 + \cos(90^\circ - 4\alpha) = 2\cos^2\frac{90^\circ - 4\alpha}{2}.$$

Lösung: $\frac{4\cos^2(45^\circ - 2\alpha)}{\sin 4\alpha}$.

825. Der letzte Summand ist gleich $\cos^2 x$, so daß man den gegebenen Ausdruck in folgender Form schreiben kann:

$$(\tan x - 1)(1 - \sin x) + \cos^2 x.$$

Ersetzt man $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$ und klammert $1 - \sin x$ aus, dann erhält man

$$(1 - \sin x)\,[(\tan x - 1) + 1 + \sin x] = (1 - \sin x)(\tan x + \sin x)$$

$$= (1 - \sin x) \tan x\,(1 + \cos x).$$

Der erste Faktor wird wie in der Lösung der Aufgabe 824 vereinfacht.

Lösung: $4 \tan x \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$.

826. Der Zähler des Bruches läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$(1 + \cos 2\alpha) + (\cos \alpha + \cos 3\alpha) = 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos 2\alpha \cos \alpha,$$

der Nenner ergibt $\cos \alpha + \cos 2\alpha$.

Lösung: $2 \cos \alpha$.

827. Der gegebene Ausdruck ist gleich

$$(1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha =$$

$$= \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha\,(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Der Ausdruck $\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$ läßt sich wie in der Lösung der Aufgabe 656 umformen.

Lösung: $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$.

828. Man bringt den gegebenen Ausdruck auf den Hauptnenner $\cos x \cos y \cos z$ und erhält im Zähler

$$\sin x \cos y \cos z + \sin y \cos z \cos x + \sin z \cos x \cos y -$$

$$- \sin\,[(x + y) + z].$$

Das letzte Glied ist gleich $-\sin(x + y) \cos z - \cos(x + y) \sin z$.
Die Summe der ersten beiden Summanden ist gleich dem Ausdruck

$$-\sin(x + y) \cos z.$$

Der Zähler erhält die Form

$$\sin z \cos x \cos y - \cos(x + y) \sin z = \sin z\,[\cos x \cos y - \cos(x + y)].$$

Wendet man auf $\cos(x + y)$ das Additionstheorem an, so erhält man im Zähler $\sin z \sin x \sin y$.

Lösung: $\tan x \tan y \tan z$.

829. Der gegebene Ausdruck ist gleich

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma .$$

Nach Voraussetzung gilt $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Man erhält

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Man klammert $2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ oder, was das gleiche ist,

$$2 \sin \frac{180° - \gamma}{2} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \text{ aus.}$$

In der Klammer erhält man dann den Ausdruck

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dieser Ausdruck wird schließlich noch mit Hilfe der Formel für die Summe der Kosinuswerte umgeformt.

Lösung: $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

12. Goniometrische Gleichungen

830. Formt man die Gleichung um, so erhält man $\sin 5x - \sin 3x = 0$. Wendet man die Formel für die Differenz zweier Sinuswerte an, so ergibt sich

$$2 \sin x \cos 4x = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in zwei Gleichungen auf:

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad \cos 4x = 0.$$

Aus der ersten erhält man $x = \pi n$ (n eine beliebige ganze Zahl), aus der zweiten

$$4x = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, d. h.

$$x = \frac{\pi}{8}(1 + 2n).$$

Es ergeben sich also alle ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{8}$.

Lösung: $x = \pi n$;

$$x = \frac{\pi}{8}(2n + 1),$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

831. Man formt die linke Seite der Gleichung folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \\
&= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) \\
&= 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x \\
&= 2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x) \\
&= 4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x.
\end{aligned}$$

Die Gleichung erhält also die Form:

$$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 0$$

und zerfällt in drei Gleichungen:

$$1.\ \sin\frac{5x}{2} = 0;\quad 2.\ \cos\frac{x}{2} = 0;\quad 3.\ \cos x = 0.$$

Lösung: $x = 72° \cdot n$; $x = 180°(2n + 1)$; $x = 90°(2n + 1)$.

832. Man wendet folgende Umformungen an:

$$\cos(x + 60°) = \cos[90° - (30° - x)] = \sin(30° - x),$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

Die Gleichung erhält dann die Form:

$$\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 2\cos^2 x.$$

Man wendet die Formel für die Summe zweier Sinuswerte an und erhält

$$\sin 30° \cos x - \cos^2 x = 0$$

oder

$$\cos x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 0.$$

Lösung: $x = 90°(2n + 1)$; $x = 60°(6n \pm 1)$.

833. Man formt so um, daß alle Glieder auf der linken Seite der Gleichung stehen und faßt zusammen. Dann erhält man

$$(\sin x + \sin 3x) - (\cos x + \cos 3x) + (\sin 2x - \cos 2x) = 0.$$

Man formt die ersten beiden Klammerausdrücke um:

$$2\sin 2x\cos x - 2\cos 2x\cos x + \sin 2x - \cos 2x = 0$$

oder

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen:

$$2\cos x + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \sin 2x - \cos 2x = 0.$$

Die Lösung der ersten Gleichung lautet:

$$\cos x = -\frac{1}{2},\quad x = 2\pi n \pm \frac{2}{3}\pi.$$

Da $x = 45°$ bestimmt keine Lösung der zweiten Gleichung ist, kann man durch $\cos 2x$ dividieren und erhält:

$$\tan 2x = 1,$$

woraus

$$2x = \pi n + \frac{\pi}{4}$$

folgt.

Lösung: $x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$; $x = \frac{\pi}{8}(4n + 1)$.

834. Man faßt wie folgt zusammen:

$$(\cos 2x + \cos 6x) - (1 + \cos 8x) = 0,$$

wendet die Formel

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

an und formt die Summe der Kosinuswerte um:

$$2 \cos 4x \cos 2x - 2 \cos^2 4x = 0.$$

Man klammert $2 \cos 4x$ aus und erhält eine Differenz zweier Kosinuswerte:

$$\cos 2x - \cos 4x.$$

Diese formt man um und erhält die Gleichung

$$\cos 4x \sin 3x \sin x = 0,$$

die in drei Gleichungen zerfällt:

$$1.\ \cos 4x = 0; \quad 2.\ \sin 3x = 0; \quad 3.\ \sin x = 0.$$

Die dritte Gleichung braucht man nicht zu lösen, da ihre Lösungen in denen der zweiten Gleichung enthalten sind, denn im Falle $\sin x = 0$ gilt auch

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 0.$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi n}{3}$.

835. Auf der rechten Seite schreibt man für $\sin 3x$ den Ausdruck

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$$

Die Gleichung erhält die Form

$$2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

oder

$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

Den Klammerausdruck schreibt man in der Form

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - \cos\frac{3x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Folglich zerfällt die gegebene Gleichung in drei Gleichungen:

$$\sin\frac{3x}{2} = 0; \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Lösung: $x = \dfrac{2\pi n}{3}; \quad x = \dfrac{\pi}{2}(4n - 1); \quad x = \dfrac{\pi}{4}(4n + 1).$

836. Die rechte Seite ergibt:

$$\sin[90° - (x + 30°)] = \sin(60° - x) = -\sin(x - 60°).$$

Die Gleichung erhält die Form

$$\sin(x - 60°) = -\sin(x - 60°)$$

oder

$$\sin(x - 60°) = 0,$$

woraus $x - 60° = 180°n$ folgt.

Lösung: $x = 60°(3n + 1)$.

837. Man ersetzt $2\sin^2 x$ durch $1 - \cos 2x$ und erhält folgende Gleichung:

$$2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0.$$

Diese zerfällt in zwei Gleichungen:

1. $\cos 2x = 0$; 2. $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$. Da $\dfrac{1}{2} = \sin 30°$ gilt, ist die Lösung der zweiten Gleichung $3x = 180°n + (-1)^n\, 30°$.

Lösung: $x = 45°(2n + 1); \quad x = 60°n + (-1)^n\, 10°$.

838. Die rechte Seite formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} 3(\sin x\cos x - \sin^2 x + 1) &= 3(\sin x\cos x + \cos^2 x) \\ &= 3\cos^2 x(\tan x + 1). \end{aligned}$$

Die gegebene Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen:

1. $\tan x + 1 = 0$; 2. $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$.

Die zweite Gleichung ergibt $\tan x = \pm\sqrt{3}$.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$.

839. Man erhält $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$.
Da $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ist, kann man die linke Seite wie folgt umformen:

$$(1 + \cos 4x) + \cos 2x = 2\cos^2 2x + \cos 2x.$$

Man erhält die Gleichung

$$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0,$$

die in zwei Gleichungen zerfällt:

$$1.\ \cos 2x = 0; \quad 2.\ 2\cos 2x + 1 = 0.$$

Als Lösung der zweiten Gleichung erhält man:

$$2x = 360°n \pm 120°.$$

Lösung: $x = 180°n \pm 45°$; $x = 180°n \pm 60°$.

840. Man multipliziert beide Seiten der Gleichung mit $\sin x$. Nachdem man auf der rechten Seite 1 durch $\sin^2 x + \cos^2 x$ ersetzt hat, erhält man die Gleichung

$$\sin x \cos x = \cos^2 x.$$

Bemerkung: Wenn beide Seiten der Gleichung mit $\sin x$ multipliziert werden, erhält man keine Scheinlösung, da $\sin x$ für die berechneten Werte des Arguments verschieden von Null ist.

Lösung: $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

841. Man schreibt die Gleichung folgendermaßen:

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Gleichungen:

$$1.\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ und } 2.\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Die erste Gleichung hat die Lösung

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n + 1),$$

woraus

$$x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$$

folgt; die zweite Gleichung ergibt $x = \frac{\pi}{10}(4n + 1)$.

Lösung: $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; $x = \frac{\pi}{10}(4n + 1)$.

842. Man addiert auf beiden Seiten der Gleichung

$$2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}$$

und erhält auf der linken Seite

$$\sin^4 \frac{x}{3} + 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 = 1.$$

Die Gleichung nimmt also folgende Form an:

$$1 = \frac{5}{8} + 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}$$

oder

$$\frac{3}{8} = 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}.$$

Man multipliziert die Gleichung mit 2, wendet die Formel für den Sinus des doppelten Arguments an und erhält:

$$\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \frac{2x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{2}(3n \pm 1)$.

843. Man schreibt die Gleichung in der Form

$$3 \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) = 1,$$

also gilt

$$\tan x = \pm 1.$$

Lösung: $x = 45°(2n + 1)$.

844. Man ersetzt $1 + \cos 4x$ durch $2 \cos^2 2x$.

Lösung: $x = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi n}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$.

845. Man addiert auf beiden Seiten der Gleichung $2 \sin^2 x \cos^2 x$ und erhält

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \cos 4x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

oder

$$1 - \cos 4x = \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{2} n.$

846. Man ersetzt $\sin 2x$ durch $2 \sin x \cos x$ und dividiert beide Seiten der Gleichung durch $\cos^2 x$, wobei $x \neq 90° \pm 180°n$ sein soll.
Diese Argumente der Winkelfunktion können offensichtlich nicht Lösungen sein, denn für $\cos x = 0$ ist $\sin x = \pm 1$. Diese Werte erfüllen die gegebene Gleichung nicht.
Man erhält

$$3 - \tan^2 x - 2 \tan x = 0,$$

woraus $\tan x = 1$ und $\tan x = -3$ folgt.

Lösung: $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = \pi n - \arctan 3.$

847. Man ersetzt $\sin^2 x + \cos^2 x$ durch 1, dividiert beide Seiten der Gleichung durch $\cos^2 x$ (siehe Bemerkung zur Lösung der vorigen Aufgabe) und erhält

$$\tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0,$$

woraus

$$\tan x = 0, \quad \tan x = -\sqrt{3}$$

folgt.

Lösung: $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{3}(3n - 1).$

848. Man ersetzt 2 durch $2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.
Die Gleichung löst man wie die entsprechende Gleichung in der vorhergehenden Aufgabe.

Lösung: $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = \pi n - \arctan \frac{7}{4}.$

849. *Lösung:* $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$; $x = \pi n + \arctan \frac{3}{2}.$

850. Man ersetzt $\sqrt{3}$ durch $\cot 30°$. (Es wird der „Hilfswinkel" 30° eingeführt.)
Dann kann man die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\sin x + \frac{\cos 30°}{\sin 30°} \cos x = 1$$

oder

$$\sin x \cdot \sin 30^\circ + \cos x \cos 30^\circ = \sin 30^\circ$$

und weiter:

$$\cos (x - 30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Folglich gilt: $x - 30^\circ = 360^\circ n \pm 60^\circ$.

Lösung: $x = 360^\circ n + 90^\circ = 90^\circ(4n + 1)$;

$$x = 360^\circ n - 30^\circ = 30^\circ(12n - 1).$$

851. Die linke Seite kann man als Produkt schreiben:

$$\sqrt{2} \cos (x - 45^\circ).$$

Man erhält folgende Gleichung:

$$\cos (x - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und daraus

$$x - 45^\circ = 360^\circ n - 45^\circ$$

und

$$x - 45^\circ = 360^\circ n + 45^\circ,$$

d. h.

$$x = 360^\circ n = 90^\circ \cdot 4n$$

bzw.

$$x = 360^\circ n + 90^\circ = 90^\circ(4n + 1).$$

Ein anderer Weg führt folgendermaßen zum Ziel:
Man quadriert beide Seiten der Gleichung und erhält

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$$

oder

$$\sin 2x = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$x = 90^\circ n.$$

Es treten außerdem unechte Lösungen auf (verglichen mit den vorstehenden Ergebnissen). Das Erscheinen dieser unechten Lösungen ist dadurch bedingt, daß beide Seiten der Gleichung quadriert wurden.
Außer der gegebenen Gleichung kann man noch $\sin x + \cos x = -1$ in Betracht ziehen. Aus dieser Gleichung erhält man ebenfalls $\sin 2x = 0$. Um die unechten Lösungen zu erkennen, führt man die Probe durch.
Für $n = 0$ erhält man $x = 0^\circ$.
Dieser Wert genügt der Gleichung.

Das gilt auch für $n = \ldots, 4, 8, 12, \ldots$, also allgemein für $n = 4k$, d. h. für

$$x = 90° \cdot 4k = 360°k.$$

Für $n = 1$ erhält man $x = 90°$.
Dieser Ausdruck ist ebenfalls Lösung der gegebenen Gleichung. Das gleiche ergibt sich für $n = \ldots, 5, 9, 13, \ldots$, also allgemein für $n = 4k + 1$, d. h. für

$$x = 90°(4k + 1) = 90° + 360°k.$$

Für $n = \ldots, 2, 6, 10, \ldots$ (allgemein für $n = 4k + 2$) und für $n = \ldots, 3, 7, 11, \ldots$ (allgemein für $n = 4k + 3$) wird die gegebene Gleichung nicht erfüllt.
Diese Werte erfüllen die Gleichung $\sin x + \cos x = -1$.

Lösung: $x = 90° \cdot 4n$; $\quad x = 90°(4n + 1)$.

852. Man formt die rechte Seite der Gleichung um:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2.$$

Die Gleichung erhält dann folgende Form:

$$\sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

oder

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Gleichungen:

$$\sin x + \cos x = 0$$

und

$$\sin x + \cos x - 1 = 0.$$

Die erste Gleichung ergibt

$$x = \frac{\pi}{4}(4n - 1).$$

Die zweite Gleichung löst man analog zu der entsprechenden in der Lösung der Aufgabe 851.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $\quad x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; $\quad x = \frac{\pi}{2} \cdot 4n$.

853. Der Lösungsweg ist analog dem in Aufgabe 851.

Lösung: $x = 15°(8n + 1)$.

854. Man wendet die Formel $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

an und erhält

$$\frac{1}{2}[\cos(x - 7x) - \cos(x + 7x)] = \frac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)].$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$\cos 6x - \cos 2x = 0.$$

Es ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\sin 4x = 0$$

und

$$\sin 2x = 0.$$

Die Lösungen der zweiten Gleichung sind auch Lösungen der ersten.

Lösung: $x = \frac{\pi n}{4}$.

855. Man wendet auf der linken und der rechten Seite der Gleichung folgende Formel an:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Lösung: $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$.

856. Es gilt

$$4\sin x\sin 2x\sin 3x = \sin 2(2x)$$

oder

$$\sin 2x(2\sin x\sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

Man verwandelt $2\sin x\sin 3x$ in $\cos 2x - \cos 4x$ (s. Lösung der Aufgabe 854) und erhält die Gleichung

$$\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$$

oder

$$\sin 2x\cos 4x = 0.$$

Lösung: $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$.

857. Man ersetzt $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$ und erhält $5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$, woraus $\cos x = \frac{\sqrt{19} - 2}{5}$ folgt. Der andere Wert $-\frac{\sqrt{19} + 2}{5}$ ist unbrauchbar, da sein absoluter Betrag größer als 1 ist.

Lösung: $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{19} - 2}{5}$.

858. Man wendet die Formel für $\cos 2\alpha$ an, drückt den Kosinus durch den Sinus aus und erhält

$$10 \sin^2 x + 4 \sin x - 5 = 0.$$

Lösung: $x = \pi n + (-1)^n \arcsin \dfrac{-2 \pm \sqrt{54}}{10}.$

859. Man wendet die Formel für den Tangens einer Summe an, erhält

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

und bringt die gegebene Gleichung[1] auf die Form

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0.$$

Lösung: $x = \pi n + \arctan (2 \pm \sqrt{3}).$

860. Da $\tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ und $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ gelten, erhält man die Gleichung

$$\frac{8(1 - \cos x)}{1 + \cos x} = 1 + \frac{1}{\cos x}.$$

Man bringt sie auf die Form

$$9 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad (3 \cos x - 1)^2 = 0.$$

Lösung: $x = 2\pi n \pm \arccos \dfrac{1}{3}.$

861. Die linke Seite der Gleichung ist gleich

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2},$$

die rechte Seite gleich $\sec^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \tan^2 \dfrac{x}{2}.$

Man erhält $\tan \dfrac{x}{2} = \tan^2 \dfrac{x}{2}.$

[1] Bei der Multiplikation mit dem Hauptnenner kann man eine unechte Wurzel erhalten. In den folgenden drei Aufgaben haben wir keine Betrachtungen dazu angestellt, denn es kommen keine unbrauchbaren Lösungen vor. Diesen Untersuchungen muß von Aufgabe 865 an große Aufmerksamkeit geschenkt werden. Siehe dazu Aufgabe 867!

Lösung: $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$.

862. Da $\cos(\pi - x) = -\cos x$ und $\sin\frac{\pi + x}{2} = \cos\frac{x}{2}$ gelten, erhält man

$$1 + \cos x + \cos\frac{x}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Lösung: $x = \pi(2n + 1)$; $x = \frac{4\pi}{3}(3n \pm 1)$.

863. Man wendet die Formeln

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x \quad \text{und} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cot\frac{x}{2}$$

an und erhält die Gleichung

$$2(1 + \cos x) - \sqrt{3}\cot\frac{x}{2} = 0.$$

Nachdem man die Formel $\cot\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ angewendet hat, zerfällt die Gleichung in zwei Gleichungen:

$$1 + \cos x = 0 \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösung: $x = \pi(2n + 1)$; $x = \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3}$.

864. Man drückt $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$ aus. Nach Umformungen erhält man

$$3\sin x + \cos x = 0 \quad \text{oder} \quad \tan x = -\frac{1}{3}.$$

Lösung: $x = \pi n - \arctan\frac{1}{3}$.

865. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\sin x(1 + \cos x)}.$$

Man kürzt den Bruch durch $(1 + \cos x)$. Dabei ist zu beachten, daß $1 + \cos x \neq 0$ sein muß. (Anderenfalls würde man die Lösung erhalten, für die $\cos x = -1$ wäre. Diese Lösung ist aber unbrauchbar.) Man erhält die Gleichung

$$\frac{1}{\sin x} = 2, \quad \text{d. h.} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

(Für diesen Wert von $\sin x$ ist $\cos x \neq -1$.)

Lösung: $x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

866. Nach den angeführten Formeln ist $\cot(x - \pi) = -\cot(\pi - x) = \cot x$. Die gegebene Gleichung kann man in der Form

$$2 \cot x - (\cos x + \sin x)\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right) = 4$$

schreiben. Bringt man die linke Seite auf den Hauptnenner, so erhält die Gleichung die Form

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = 4,$$

woraus $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ oder $\sin 2x = \frac{1}{2}$ folgen.

Lösung: $x = \frac{\pi}{2} n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$.

867. Die rechte Seite ist gleich

$$\frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{2 \sin x} = \frac{1 - \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x}.$$

Man kürzt den Bruch durch $\sin x$. Dabei ist zu beachten, daß $\sin x \neq 0$ ist. Sonst würde man die Lösung erhalten, für die $\sin x = 0$ ist. Diese Lösung ist unbrauchbar. Die gegebene Gleichung erhält die Form (auf ihrer linken Seite wenden wir eine der nachfolgenden Formeln an)

$$\sin x + \tan x = \frac{1}{2} \tan x \quad \text{oder} \quad \sin x + \frac{1}{2} \tan x = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\sin x \left(1 + \frac{1}{2 \cos x}\right) = 0$$

bringen. Sie zerfällt in zwei Gleichungen, in

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2 \cos x} = 0.$$

Die erste Gleichung liefert eine unbrauchbare Lösung, denn der Bruch wurde durch $\sin x$ gekürzt.

Um das Wesen der Sache besser verständlich zu machen, setzt man in die rechte Seite $\sin x = 0$ ein, dann kann man für $\cos x$ sowohl 1 als auch -1 einsetzen. In beiden Fällen erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Lösung: $x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$.

868. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}} = -\frac{\tan\frac{x}{2}\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\frac{x}{2}}.$$

Man kürzt durch $1 - \tan\frac{x}{2}$ (dabei ist zu beachten, daß $1 - \tan\frac{x}{2} \neq 0$ ist; siehe Lösung der vorigen Aufgabe) und erhält $-\tan\frac{x}{2}$. Die Gleichung hat dann die Form

$$-\tan\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{x}{2}\left(\sec\frac{x}{2} + 2\right) = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Gleichungen, in

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $\frac{x}{2} = 360° \cdot n \pm 120°$ und damit $x = 720° \cdot n \pm 240°$. Die erste Gleichung hat nur die unbrauchbare Lösung $x = 360° \cdot n$. Die Ursache hierfür ist eine andere als in der vorigen Aufgabe. In der gegebenen Gleichung tritt $\cot\frac{x}{2}$ auf. Der Wert $\cot\frac{x}{2}$ verliert für $x = 360° \cdot n$ seinen Sinn („er strebt gegen unendlich, wenn x gegen $360° \cdot n$ strebt"), d. h., die ganze linke Seite der Gleichung ist nicht erklärt.

Bemerkung: Der linken Seite kann man auf folgende Art einen erweiterten Sinn zusprechen. Wenn man den Winkel x unbegrenzt an $360° \cdot n$ (an 0°, 360°, 720° usw.) annähert, dann nähert sich die linke Seite unbegrenzt dem Wert Null. Die Zahl Null (die Grenze der linken Seite) kann man im erweiterten Sinne als Wert der linken Seite auffassen. Dann wäre die Lösung $x = 360° \cdot n$ nicht unbrauchbar. In der Elementarmathematik wird jedoch vom erweiterten Sinn solcher Ausdrücke kein Gebrauch gemacht.

Lösung: $x = 240°(3n \pm 1)$.

869. Man wendet einige der genannten Formeln an und erhält die Gleichung

$$\sin x - \tan x = \sec x - \cos x$$

oder

$$\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x.$$

Man multipliziert beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $\cos x$. Dabei ist zu beachten, daß $\cos x \neq 0$ ist. Wenn nämlich $\cos x = 0$ wäre, so würden die Ausdrücke $\frac{\sin x}{\cos x}$ und $\frac{1}{\cos x}$ ihren Sinn verlieren (sie „streben gegen unendlich").

Man erhält die Gleichung $\cos x \sin x - \sin x = \sin^2 x$. Sie zerfällt in zwei Gleichungen, in

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad \cos x - \sin x = 1.$$

Die zweite Gleichung kann man auf die Form $\sqrt{2} \cos (45° + x) = 1$ (siehe Lösung der Aufgabe 851) bringen. Dann folgen

$$x_1 = 360° \cdot n \quad \text{und} \quad x_2 = 360° \cdot n - 90°.$$

Die Lösung $x_1 = 360° \cdot n$ ist in der Lösung der ersten Gleichung ($x_3 = 180° \cdot n$) enthalten, die Lösung $x_2 = 360° \cdot n - 90°$ ist unbrauchbar, da $\cos (360° \cdot n - 90°) = 0$ ist.

Lösung: $x = 180° \cdot n$.

870. Man wendet die Formeln $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ an und erhält die Gleichung

$$1 - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

die auf die Form $\tan^2 x - \tan x = 0$ gebracht wird.

Lösung: $x = \pi \cdot n; \quad x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

871. Man schreibt die Gleichung in der Form

$$\frac{\sin^3 x(\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dabei ist zu beachten, daß $\sin x \neq 0$ und $\cos x \neq 0$ sind. Man kürzt die Brüche, schreibt die Gleichung so, daß auf einer Seite 0 steht, klammert $\sin x + \cos x$ aus und erhält

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x + \sin x) = 0.$$

Man ersetzt nun $\sin^2 x + \cos^2 x$ durch 1. Die Gleichung zerfällt dann in zwei Gleichungen, in

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{und} \quad \cos x - \sin x = 1.$$

Die erste Gleichung liefert $x_1 = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$, die zweite (siehe Lösung der Aufgabe 869) hat die Lösungen

$$x_2 = 2\pi n \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{\pi}{2}(4n - 1).$$

Die Lösungen x_2 und x_3 sind unbrauchbar, denn für $x = 2\pi n$ erhält man $\sin x = 0$ und für $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ ist $\cos x = 0$.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$.

872. Man wendet die Formeln für trigonometrische Funktionen dreifacher Winkel an:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$[1]

Die linke Seite bringt man auf die Form

$$3 \sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

Die gegebene Gleichung lautet dann $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

Lösung: $x = \frac{\pi \cdot n}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24}$.

873. Man schreibt die gegebene Gleichung folgendermaßen um:

$$\tan 2x = \tan 3x - \tan x.$$

Anschließend dividiert man beide Seiten der Gleichung durch $1 + \tan x \tan 3x$, um auf der rechten Seite die Formel für den Tangens der Differenz zweier Winkel anwenden zu können.

Man erhält

$$\frac{\tan 2x}{1 + \tan x \tan 3x} = \tan (3x - x),$$

daraus folgt

$$\tan 2x = \tan 2x(1 + \tan x \tan 3x)$$

[1] Diese Formeln kann man sich mühelos selbst herleiten, indem man die Formeln für den Sinus und Kosinus der Summen zweier Winkel (2α und α) anwendet und danach die Formeln für den Sinus und Kosinus von 2α benutzt.

oder

$$\tan x \tan 2x \tan 3x = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in drei Gleichungen, in

$$\tan 3x = 0, \quad \tan 2x = 0 \quad \text{und} \quad \tan x = 0.$$

Die Lösung der ersten ist $x = \frac{\pi n}{3}$. Die dritte Gleichung liefert keine neue Lösung, da alle ihre Lösungen ($x = \pi m$) in den Lösungen der ersten enthalten sind $\left(\text{für } n = 3m \text{ ist } \frac{\pi n}{3} = \pi m\right)$. Die zweite Gleichung hat die Lösung $x = \frac{\pi n}{2}$. Für gerades n ist diese Lösung wiederum in der ersten enthalten $\left(\text{für } n = 2k \text{ erhält man } \frac{\pi n}{2} = \pi k\right)$, für ungerades n ($n = 2n' + 1$) ist sie dagegen überhaupt nicht Lösung der gegebenen Gleichung; denn die Funktionen $\tan x$ und $\tan 3x$, die in der Gleichung auftreten, verlieren für $x = \frac{\pi}{2}(2n' + 1)$ ihren Sinn („streben gegen unendlich"). Deshalb muß die zweite Gleichung verworfen werden.

Lösung: $x = \frac{\pi n}{3}$.

874. Man verwendet die Formel für den Kosinus einer Winkeldifferenz und bringt damit die rechte Seite auf die Form $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$. Deshalb drückt man auch die linke Seite durch das Argument $\frac{x}{2}$ aus und erhält:

$$\begin{aligned}(1 + \cos x) + \sin x &= 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Man schreibt die Gleichung so, daß auf der rechten Seite Null steht:

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen. Die Lösung der einen ist $x = 360° \cdot n - 90°$, die der anderen $x = 720° \cdot n \pm 90°$.
Im letzten Ausdruck kann man das doppelte Vorzeichen $\pm$ durch das Vorzeichen „plus" ersetzen, weil sich alle Werte $720° \cdot n - 90°$ unter den Werten

$360° \cdot n - 90°$ befinden. (Wenn man nämlich im Ausdruck $360° \cdot n - 90°$ nur gerade n verwendet, d. h., wenn $n = 2n'$ ist, dann erhält man $720° \cdot n' - 90°$.)

Lösung: $x = 360° \cdot n - 90°$; $x = 720° \cdot n + 90°$.

875. Man schreibt die gegebene Gleichung in die Form $\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$ um. Es folgt dann $\sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos x$. Man formt die Gleichung so um, daß auf einer Seite Null steht und erhält

$$\sin 2x(\sin 2x - 2\cos x) = 0$$

oder

$$2 \sin 2x \cos x(\sin x - 1) = 0.$$

Die Gleichung zerfällt in drei Gleichungen, in

$$\sin 2x = 0, \quad \text{in} \quad \cos x = 0 \quad \text{und in} \quad \sin x = 1.$$

Die beiden letzten braucht man nicht zu betrachten, da alle ihre Lösungen in denen der ersten enthalten sind.
(Es ist $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Also ist $\sin 2x = 0$, wenn $\cos x = 0$ oder $\sin x = 1$ sind.)

Lösung: $x = 90° \cdot n$.

876. Die linke Seite der Gleichung ist gleich $2\cos^2 x - 3\cos x$. Die rechte Seite verliert ihren Sinn für $x = \frac{\pi}{2} n$, denn $\cot 2x$ „strebt gegen unendlich". Deshalb muß $x \neq \frac{\pi}{2} n$ sein. Der Nenner der rechten Seite ist gleich

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{-1}{2 \sin x \cos x},$$

so daß die rechte Seite gleich

$$-\operatorname{cosec}(\pi - x) \cdot 2 \sin x \cos x = -2 \operatorname{cosec} x \cdot \sin x \cos x$$

ist.
Das Produkt $\operatorname{cosec} x \cdot \sin x$ $\left(\text{d. h. } \frac{\sin x}{\sin x}\right)$ kann man durch den Wert eins ersetzen, da die Werte von x, für die der Bruch $\frac{\sin x}{\sin x}$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annimmt, ausgeschlossen sind.
Man erhält die Gleichung

$$2\cos^2 x - 3\cos x = -2\cos x \quad \text{oder} \quad \cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

woraus $\cos x = 0$ oder $\cos x = \frac{1}{2}$ folgen. Im ersten Falle erhält man den Wert $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, der bereits ausgeschlossen wurde.

Lösung: $x = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$.

Bemerkung: Der Wert $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ist dann Lösung, wenn man der rechten Seite einen erweiterten Sinn zuspricht, wie es in der Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 868 (S. 313) geschah.

877. Die linke Seite ist gleich

$$(\cos x + \sin x)^2 + 1 = 2 + 2\cos x \sin x,$$

die rechte gleich $\frac{2\sin^2 x}{\tan^2 x} = 2\cos^2 x$. Dabei muß gefordert werden, daß $\sin x \neq 0$ ist. Die Gleichung erhält die Form

$$2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x \sin x = 0$$

oder

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Gleichungen, in

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{und} \quad \sin x = 0.$$

Für $\sin x = 0$ ist aber die rechte Seite nicht erklärt.

Lösung: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

878. Die rechte Seite ist gleich

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$
$$= \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Weiter löst man die Aufgabe wie die vorige.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \pi n$.

879. Die linke Seite ist gleich $2 - \sin 3x$, die rechte gleich

$$1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$
$$= 1 - \cos 3x.$$

Die Gleichung bringt man auf die Form

$$\cos 3x - \sin 3x + 1 = 0.$$

Man löst sie nach dem (ersten) Verfahren der Aufgabe 851, formt

$$\cos 3x - \sin 3x \quad \text{zu} \quad \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

um und erhält

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{d. h.} \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich ist

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

d. h.

$$3x = \frac{\pi}{4}[1 + (-1)^n] + n\pi.$$

Bei geradem n ist der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich 2, für ungerades n gleich Null. Deshalb erhält man, wenn für $n = 2n'$ (n' eine ganze Zahl) gesetzt wird, $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n'$. Setzt man $n = 2n' + 1$, dann erhält man:

$$3x = \pi(2n' + 1).$$

Außer dem Verfahren, das in der Lösung der Aufgabe 851 gezeigt wurde (es führte unbrauchbare Wurzeln ein), kann man hier und auch in der Aufgabe 851 das folgende anwenden. Nachdem man wie oben die Gleichung

$$\cos 3x - \sin 3x + 1 = 0$$

erhalten hat, wendet man die Formeln

$$1 + \cos 3x = 2\cos^2 \frac{3x}{2}$$

und

$$\sin 3x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

an.

Dann erhält man eine Gleichung, die in zwei Gleichungen zerfällt. Eine davon $\left(\cos \frac{3x}{2} = 0\right)$ ergibt

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}(2n + 1), \quad \text{d. h.} \quad 3x = \pi(2n + 1),$$

die andere

$$\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0\right)$$

ergibt

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \text{d. h.} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{3}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi}{6}(4n + 1)$.

880. Man bringt $1 + \sin 2x$ auf die Form

$$(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2$$

und schreibt für $\tan x$ den Bruch $\frac{\sin x}{\cos x}$. Dann bringt man alle Glieder auf den Hauptnenner ($\cos x$) und multipliziert beide Seiten mit ihm. Dabei fordert man, daß $\cos x \neq 0$ ist. Man erhält die Gleichung

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen, in $\cos x + \sin x = 0$ mit der Lösung $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ und in $\cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0$ oder $\cos 2x - 1 = 0$ mit der Lösung $x = \pi n$.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \pi n$.

881. Man bringt $1 - \sin 2x$ auf die Form $(\cos x - \sin x)^2$ und $\cos 2x$ auf die Form $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$.
Den Bruch kürzt man durch $\cos x - \sin x$ und beachtet dabei, daß diese Differenz verschieden von Null ist.[1]
Man erhält die Gleichung

$$\cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Beseitigt man den Nenner (unter den gleichen Bedingungen), so erhält man

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x) = 0$$

oder

$$(\cos x - \sin x - 1)(\cos x + \sin x) = 0.$$

[1] Dabei ist zu überprüfen, ob die Werte von x, für die $\cos x = \sin x$ ist, Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Wenn man die Gleichung $\cos x + \sin x = 0$ löst, erhält man $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$.
Die Gleichung $\cos x - \sin x - 1 = 0$ löst man folgendermaßen (s. Lösung der Aufgabe 879):
Man bringt sie auf die Form

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1, \quad \text{d. h.} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n.$$

Für gerades n $(= 2m)$ gilt $x = \pi n = 2\pi m$, für ungerades n $(= 2m - 1)$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(4m - 1).$$

Man kann auch das zweite Verfahren der Aufgabe 879 anwenden.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $\quad x = 2\pi n$; $\quad x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$.

882. Die rechte Seite ist gleich $\cos 2x$, die linke gleich

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)^2 (\cos x - \sin x) &= (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= (\cos x + \sin x) \cos 2x.\end{aligned}$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$; $\quad x = 2\pi n$; $\quad x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$.

883. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{1}{4} - \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{4 \cos^2 x} = \frac{1}{4} - \sin^2 x$$

(unter der Voraussetzung, daß $\cos x \neq 0$ ist). Auf der rechten Seite wendet man die Formel

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

an. Man erhält

$$\frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (1 - 2 \sin^2 x)\right] = \frac{-1 + 4 \sin^2 x}{4}.$$

Jetzt hat die Gleichung die Form

$$\frac{1}{4} - \sin^2 x = -\left(\frac{1}{4} - \sin^2 x\right),$$

woraus $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ folgt, d. h. $\sin x = \frac{1}{2}$ oder $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Die beiden Lösungen $x = 180° \cdot n + (-1)^n \cdot 30°$ und $x = 180° \cdot n - (-1)^n \cdot 30°$ kann man zu einer Formel zusammenfassen: $x = 180° \cdot n \pm 30°$.

Lösung: $x = 30°(6n \pm 1)$.

884. Die linke Seite ist gleich $\sin 60° \cos x$, die rechte gleich

$$\tan x \cos^4 x + \cot x \sin^4 x = \sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x.$$

(Bei der letzten Umformung wurde gefordert, daß $\cos x \neq 0$ und $\sin x \neq 0$ sind.) Dieser Ausdruck ist gleich

$$\sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x \cos x.$$

Die Gleichung bringt man auf die Form $\cos x (\sin 60° - \sin x) = 0$. Diese Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen, von denen eine, nämlich $\cos x = 0$, unbrauchbar ist.

Lösung: $x = 180° \cdot n + (-1)^n \cdot 60°$.

885. Man wendet die Formel

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

an und erhält auf der linken Seite $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$. (Da durch $\sin x$ gekürzt wurde, gilt die Bedingung $\sin x \neq 0$.) Die linke Seite ist gleich

$$\frac{\sin(x - 30°) + \sin(x + 30°)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos 30°}{\cos x} = \sqrt{3} \tan x.$$

Die Gleichung bringt man auf die Form $\tan x (\tan x - \sqrt{3}) = 0$. Sie zerfällt in zwei Gleichungen, von denen eine, nämlich $\tan x = 0$, eine unbrauchbare Lösung liefert. (Wenn nämlich $\tan x = 0$ ist, dann ist auch $\sin x = 0$).

Lösung: $x = 60°(3n + 1)$.

886. Den Ausdruck $\tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2}$ bringt man auf die Form

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin x}.$$

Man erhält die Gleichung

$$\sqrt{2}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x}.$$

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$.

887. Die linke Seite ist gleich

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x + \cos x),$$

die rechte gleich

$$\frac{2\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{2(1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = 2(1 - \sin x).$$

Man erhält $2(\sin x + \cos x) = 2(1 - \sin x)$ und formt weiter um:

$$(1 - \cos x) - 2\sin x = 0,$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Lösung: $x = 2\pi n$; $x = 2(\pi n + \arctan 2)$.

888. Der Bruch auf der linken Seite ist gleich

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x - \cos 2x\tan x)\cos^2 x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x)\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x.$$

Die rechte Seite ist gleich

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(Der Übergang zu doppelten Winkeln wäre hier unrationell.)
Die Gleichung schreibt man dann in der Form

$$(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x = 0$$

oder

$$2\sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x = 0.$$

Lösung: $x = 180°\cdot n$; $x = 180°\cdot n + 30°$.

889. Die linke Seite ist gleich $3 \sin x - 4 \sin^3 x$, die rechte gleich $4 \sin x(1 - 2 \sin^2 x)$. Man erhält die Gleichung $\sin x(4 \sin^2 x - 1) = 0$.

Lösung: $x = 180° \cdot n$; $x = 180° \cdot n \pm 30°$.

890. Die rechte Seite ist gleich

$$\sin x + \cos x \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist gleich $\cos\left(x - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2}$, so daß man auf der rechten Seite $\cot \frac{x}{2}$ erhält.

Die linke Seite ist gleich

$$\frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Die Gleichung hat jetzt die Form

$$\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x} - \cot \frac{x}{2} = 0.$$

Man klammert $\cot \frac{x}{2}$ aus und erhält

$$\cot \frac{x}{2}\left(\frac{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos x} - 1\right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \cot \frac{x}{2} (\tan x - 1) = 0.$$

Lösung: $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = 2\pi n + \pi$.

891. Der Nenner des Bruches ist gleich

$$\frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\tan x}{\cos 2x}.$$

Der ganze Bruch ist gleich $\sin 2x$. Die Gleichung hat also die Form

$$\sin 2x - 2 \sin (45° + x) \cos (45° + x) = 0$$

oder

$$\sin 2x - \cos 2x = 0,$$

woraus $\tan 2x = 1$ folgt.

Lösung: $x = 90° \cdot n + 22° 30'$.

892. Es gilt

$$\tan(x - 45°)\tan(x + 45°) = \tan(x - 45°)\cot(45° - x) = -1.$$

Dabei muß $x \neq 45°(2n + 1)$ sein, weil sonst einer der Faktoren gleich Null und der andere nicht definiert wäre.

Den Nenner der rechten Seite bringt man auf die Form

$$-\frac{\cos x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\frac{2\cos x}{\sin x} = -2\cot x.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß $x \neq 180° \cdot n$ ist, weil sonst entweder $\tan\frac{x}{2}$ oder $\cot\frac{x}{2}$ nicht definiert wäre.

Man erhält die Gleichung

$$-\tan x = -\frac{4\cos^2 x}{2\cot x},$$

die unter der Voraussetzung, daß $x \neq 180°n$ ist, auf die Form $\tan x \cos 2x = 0$ gebracht wird. Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 180° \cdot n$ und $x_2 = 45°(2n + 1)$. Diese Lösungen entsprechen aber nicht den geforderten Bedingungen.

Antwort: Die Gleichung hat keine Lösung.

893. Die rechte Seite ist gleich $-\tan x$ (siehe Lösung der vorigen Aufgabe), die linke bringt man auf die Form

$$\frac{1}{2}[\tan(x + 45°) - \cot(x + 45°)] = \frac{\sin^2(x + 45°) - \cos^2(x + 45°)}{2\sin(x + 45°)\cos(x + 45°)}$$
$$= -\cot(2x + 90°).$$

Man erhält die Gleichung $\tan 2x = -\tan x$.

Sie kann in der Form $\tan 2x = \tan(-x)$ geschrieben werden.

Daraus kann geschlossen werden, daß sich die Winkel $2x$ und $(-x)$ um $180° \cdot n$ unterscheiden. Man findet aus der Gleichung $2x = -x + 180° \cdot n$ schließlich $x = 60° \cdot n$.

Lösung: $x = 60° \cdot n$.

894. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x + \alpha)\cos(x - \alpha)} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x)}.$$

Man erhält die Gleichung

$$\frac{2 \sin 2x}{\cos 2\alpha + \cos 2x} = 2 \cot x,$$

wendet die Formeln $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ sowie $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ an und bringt die Gleichung auf die Form

$$\cos x\,(2 \sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha) = 0.$$

Die Gleichung $2 \sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha = 0$ liefert, wenn man $1 - \cos 2x$ statt $2 \sin^2 x$ schreibt, $2 \cos 2x = 1 - \cos 2\alpha$, woraus $\cos 2x = \sin^2 \alpha$ folgt.

Lösung: $x = \dfrac{\pi}{2}(2n + 1)$; $\quad x = \pi n \pm \dfrac{1}{2} \arccos(\sin^2 \alpha)$.

895. Die linke Seite ist gleich $1 - \sin x$, der Nenner der rechten Seite gleich

$$\tan \frac{x}{2} - \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}.$$

Diesen Ausdruck bringt man auf die Form $\dfrac{2}{\sin x}$. Man erhält die Gleichung

$$1 - \sin x = \sin x.$$

Lösung: $x = 180° \cdot n + (-1)^n \cdot 30°$.

896. Die linke Seite ist gleich $\tan x$, die rechte (siehe Lösung der Aufgabe 894) gleich $1 + 2 \tan x$.

Lösung: $x = 45° \cdot (4n - 1)$.

897a. Es gilt

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2,$$

analog ist

$$\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2.$$

Die Gleichung hat jetzt die Form $1 - \cos 2x + \sin 2x = 0$ oder

$$2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

Lösung: $x = \pi n$; $\quad x = \pi n - \dfrac{\pi}{4}$.

897b. Die Gleichung bringt man (siehe Lösung der vorigen Aufgabe) auf die Form

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sin 2x}{2}\right)^2=\frac{9}{8}.$$

Nach einigen algebraischen Umformungen erhält man

$$3-2\cos 2x+\cos^2 2x+2\sin^2 2x=\frac{9}{2}.$$

Man drückt $\sin^2 2x$ durch $1-\cos^2 2x$ aus und erhält die Gleichung

$$\cos^2 2x+2\cos 2x-\frac{1}{2}=0.$$

Sie liefert $\cos 2x=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$. (Der Wert $-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ist nicht brauchbar, denn sein absoluter Betrag ist größer als 1.)

Lösung: $x=\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

898. Die linke Seite der ersten Gleichung bringt man auf die Form

$$\frac{1}{2}(\cos x+\cos y).$$

Man löst das System und findet

$$\cos x=\frac{1}{2};\quad \cos y=\frac{1}{2}.$$

Lösung: $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{3};\quad y=2\pi l\pm\frac{\pi}{3}$.

899. Da $\sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$ ist, kann man die zweite Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2m.$$

Es ist aber $x+y=\alpha$, folglich gilt $\cos(x-y)=2m+\cos\alpha$, woraus

$$x-y=2\pi n\pm\arccos(2m+\cos\alpha)\ .$$

folgt. Das gegebene System zerfällt in zwei Gleichungen

$$x+y=\alpha$$

$$x-y=2\pi n+\arccos(2m+\cos\alpha)$$

und

$$x + y = \alpha$$

$$x - y = 2\pi n - \arccos(2m + \cos\alpha)$$

Lösung: $x = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha)$

$$y = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha)$$

$$x = \pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha)$$

$$y = -\pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha).$$

900. Man wendet die Formel $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ an und schreibt die zweite Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = m.$$

Man ersetzt $\cos x \cos y$ durch

$$\frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2},$$

$x + y$ durch α und erhält

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x - y)} = m$$

oder

$$\cos(x - y) = \frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha.$$

Folglich gilt entweder

$$x - y = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$$

oder

$$y - x = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right).$$

Jede dieser Gleichungen ergibt zusammen mit der Gleichung $x + y = \alpha$ ein System, das gelöst werden muß. Nebenbei sei bemerkt, daß die beiden so erhaltenen Systeme sich voneinander dadurch unterscheiden, daß die Unbekannten ihre Rollen vertauscht haben. Deshalb genügt es, eines der beiden Systeme zu lösen.

Lösung: $x\,(=y) = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin \alpha}{m} - \cos \alpha \right);$

$$y\,(=x) = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin \alpha}{m} - \cos \alpha \right).$$

901. Man löse wie in der vorigen Aufgabe.

Lösung: $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1); \quad y = -\pi n$

$$x = -\pi n; \quad y = \frac{\pi}{4}(4n + 1).$$

902. Da $1 = 2^0$ und $4 = 16^{\frac{1}{2}}$ ist, kann man das gegebene System folgendermaßen schreiben:

$$\sin x + \cos y = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}.$$

Daraus erhält man

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos y = -\frac{1}{2}$$

und

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos y = \frac{1}{2}.$$

Lösung: $x = 180° \cdot n + (-1)^n \cdot 30°; \quad y = 360° \cdot n \pm 120°$

$$x = 180° \cdot n - (-1)^n \cdot 30°; \quad y = 360° \cdot n \pm 60°.$$

903. Die zweite Gleichung kann man auf die Form $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3}$ bringen, worin auf Grund der ersten Gleichung $\sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ ist.

Man erhält das Gleichungssystem

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}; \quad \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

addiert und subtrahiert gliedweise und erhält

$$\cos(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \cos(x + y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt

$$x + y = 2\pi m \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x - y = 2\pi k \pm \frac{\pi}{4};$$

hierbei sind m und k beliebige ganze Zahlen.

In jeder der Gleichungen kann man das positive oder negative Vorzeichen beliebig verwenden.

Bemerkung: Die Zahlen $m + k$ und $m - k$ sind auch ganz, jedoch nicht völlig willkürlich wählbar. (Wenn eine von ihnen geradzahlig ist, dann ist es auch die andere. Ist jedoch eine von ihnen ungeradzahlig, dann ist auch die andere ungeradzahlig.)

Lösung:

$$1.\ x = \pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8};\quad y = \pi t + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$$

$$2.\ x = \pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8};\quad y = \pi t + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$$

$$3.\ x = \pi n - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8};\quad y = \pi t - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$$

$$4.\ x = \pi n - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8};\quad y = \pi t - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8},$$

wobei $n = m + k$; $t = m - k$ (m und k beliebige ganze Zahlen) sind.

904. Man erhebt beide Seiten jeder gegebenen Gleichung ins Quadrat, addiert gliedweise und erhält

$$1 = 4\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y \quad \text{oder} \quad 1 = 4(1 - \cos^2 y) + \frac{1}{4}\cos^2 y.$$

Daraus folgt $\cos^2 y = \frac{4}{5}$ und $\sin^2 y = \frac{1}{5}$. In jeder der Gleichungen

$$\cos y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

kann man ein beliebiges Vorzeichen verwenden (so daß in den Grenzen von 0° bis 360° der Winkel y vier Werte erhält). Wir setzen diese Werte in die gegebene Gleichung ein und finden, daß die Winkel x und y eine der vier folgenden Beziehungen erfüllen:

$$1.\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$2.\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

3. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}};$

4. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Betrachten wir die erste und nehmen eine einzelne Gleichung, z. B.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sie liefert $x = 2\pi n \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Der Winkel $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ muß aber (nach Definition des Hauptwertes des Arkuskosinus) im ersten oder zweiten Quadranten liegen, wo die Sinusfunktion immer positiv ist, d.h., man kann nur das Vorzeichen plus berücksichtigen. Aus der Gleichung $x = 2\pi n \pm \varphi$ folgt tatsächlich

$$\sin x = \pm \sin \varphi = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Uns war indessen nur die Gleichung $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(\text{nicht aber } \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ gegeben.

So verfährt man auch mit dem Winkel y.

Für den Fall 1 erhält man also

$$x = 2\pi n + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y = 2\pi n_1 + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}},$$

wobei n und n_1 beliebige ganze Zahlen sind.

Fährt man so fort, dann findet man, daß im Falle 2

$$x = 2\pi n - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\pi n_1 - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ist, analog im dritten und vierten Fall.

Lösung: $x = 2\pi n \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right); \quad y = 2\pi n_1 \pm \arccos\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

Dabei sind die Vorzeichen in den Klammern für x und y und ebenso die vor dem Arkuskosinus jeweils gleich.

13. Zyklometrische Funktionen

905. Es gilt

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}; \quad \operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4};$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}; \quad \arccos(-1) = \pi.$$

Lösung: $\frac{5\pi}{6}$.

906. Der Winkel $\varphi = \arccos x$ liegt zwischen 0° und 180° (nach Definition des Hauptwertes des Arkuskosinus), d. h., $\sin\varphi$ ist nicht negativ. Es gilt $\cos\varphi = x$, woraus $\sin\varphi = \sqrt{1 - x^2}$ folgt. (Nur das Vorzeichen „plus“ kann berücksichtigt werden.) Folglich ist

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{d. h.} \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x},$$

was zu beweisen war.

907. Siehe Lösung der vorigen Aufgabe!

908. Angenommen, es sei $\operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{4}\right) = \varphi$, dann ist $\cot\varphi = -\frac{3}{4}$. Der Winkel φ liegt zwischen 90° und 180° (denn der Hauptwert des Arkustangens liegt zwischen 0° und 180°).

Man muß auch $\sin\frac{\varphi}{2}$ bestimmen. Dazu wendet man die Formel

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}}$$

an, in der von den beiden Vorzeichen $\pm$ nur das Vorzeichen + verwendet werden kann. (Der Winkel $\frac{\varphi}{2}$ liegt nämlich im ersten Quadranten.) Vorher wird $\cos\varphi$ nach der Formel

$$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

bestimmt. Man erhält

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}.$$

(Vor der Wurzel steht nur das Vorzeichen „plus“, da φ im zweiten Quadranten liegt.)
Jetzt findet man

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Lösung: $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

909. Es sei $\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \varphi$, so daß $\sin\varphi = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ist. Der Winkel φ liegt in den Grenzen von $-90°$ und $0°$. (Der Hauptwert des Arkussinus liegt zwischen $-90°$ und $90°$.) Es soll $\sin\frac{\varphi}{2}$ bestimmt werden. Dieser Wert ist negativ. Deshalb kann in der Formel

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

nur das Vorzeichen „minus“ verwendet werden. Man erhält

$$\sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

worin

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

ist.

Lösung: $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

910. Der Winkel $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{7}\right)$ liegt zwischen 90° und 180° (siehe Lösung der beiden vorigen Aufgaben), d. h., $\cot\frac{\varphi}{2}$ ist positiv, so daß $\cot\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$ gilt.

Hier setzt man $\cos\varphi = -\frac{4}{7}$.

Lösung: $\cot\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right] = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

911. Da $\arctan\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{6}$ und $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ sind, gilt

$$\tan\left(5\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1.$$

Lösung: -1.

912. Es gilt $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ und $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Der weitere Lösungsweg ist analog dem der Aufgabe 911.

Lösung: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

913. *Lösung:* $\frac{1}{2}$.

914. Es sei

(1) $\qquad \arctan(3 + 2\sqrt{2}) = \alpha$

(2) $\qquad \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \beta.$

Dann ist zu zeigen, daß

(3) $\qquad \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

ist. Aus

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

erhält man mit Hilfe von (1) und (2)

(4) $$\tan(\alpha - \beta) = \frac{(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + (3 + 2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Andererseits ist aus (1) und (2) zu erkennen, daß jeder der Winkel α und β zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt und daß $\alpha > \beta$ ist $\left(\text{denn } 3 + 2\sqrt{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Folglich liegt der Winkel $\alpha - \beta$ ebenfalls zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so daß man aus (4) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ erhält, was zu zeigen war.

Bemerkung: Um zu beweisen, daß der Winkel $\alpha - \beta$ gleich $\frac{\pi}{4}$, d. h. gleich 45° ist (nicht aber gleich 225°, −135° usw.), könnte man Tabellen verwenden, in denen man unmittelbar die Winkel α und β ablesen kann. Dabei kann man sich mit groben Annäherungen begnügen (z. B. nur ganze Grade berücksichtigen). Setzt man $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, so findet man $\alpha \approx \arctan 5{,}8$, was etwa bei 80° liegt. (Die Abweichung überschreitet $\frac{1^\circ}{2}$ bewußt nicht.) Ebenso findet man $\beta \approx \arctan 0{,}7$, was bei 35° liegt. (Die Abweichung ist auch hier kleiner als $\frac{1^\circ}{2}$.) Folglich unterscheidet sich $\alpha - \beta$ von 45° um weniger als 1°, d. h., es ist genau gleich 45°.

915. Es sei

$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = \alpha, \quad \arccos \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} = \beta,$$ [1]

so daß

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}$$

sind. Beide Winkel α und β liegen im ersten[2] Quadranten. Es ist zu zeigen, daß $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ ist.

Man bestimmt $\sin(\alpha - \beta)$. Dazu berechnet man vorher

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}.$$

(Die Winkel α und β liegen also im ersten Quadranten.) Man erhält

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{12}},$$

[1] Man kann diese Aufgabe auch ohne Einführung der Hilfsgrößen α und β nach dem Verfahren lösen, welches in der Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 914 genannt wurde.

[2] Der Hauptwert des Arkuskosinus liegt zwischen 0 und π.

so daß

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

ist.

Man zeigt, daß der gefundene irrationale Ausdruck gleich $\frac{1}{2}$ ist. Dazu formt man die „zweifache Irrationalität"

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} \equiv \sqrt{5-\sqrt{24}}$$

um. Die Umwandlung kann man nach der Formel

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

durchführen.

Mit $A = 5$ und $B = 24$ erhält man

$$\sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Außerdem bringt man den Radikanden $5 - 2\sqrt{6}$ auf die Form

$$3 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

und findet dann

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$ [1]

Da jeder der Winkel α und β in den Grenzen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ liegt, muß der Winkel $\alpha - \beta$ in den Grenzen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Dann folgt aber aus der Gleichung

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}, \quad \text{die Gleichung} \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{6},$$

was zu zeigen war.[2]

916. Vergleichen Sie diese Lösung mit den Lösungen der Aufgaben 915 und 914!

[1] Die Zahl $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ist positiv.

[2] Wenn man an Stelle von $\sin(\alpha - \beta)$ den Ausdruck $\cos(\alpha - \beta)$ berechnet, dann würde man $\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten. Zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ könnte man zwei Werte von $\alpha - \beta$, nämlich $-\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{6}$, finden. Deshalb müßte man vorher feststellen, daß $\alpha > \beta$, d. h. $\cos\alpha < \cos\beta$ ist.

Es sei

$$\arcsin\frac{4}{5} = \alpha,\quad \arcsin\frac{5}{13} = \beta,\quad \arcsin\frac{16}{65} = \gamma.$$

Dann ist

$$\sin\alpha = \frac{4}{5},\quad \cos\alpha = \frac{3}{5},\quad \sin\beta = \frac{5}{13},\quad \cos\beta = \frac{12}{13},\quad \sin\gamma = \frac{16}{65},$$

$$\cos\gamma = \frac{63}{65}.$$

Daraus folgt

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65} \quad\text{und}\quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}.$$

Beide Winkel α und β liegen im ersten Quadranten, deshalb liegt der Winkel $\alpha+\beta$ zwischen 0° und 180°. Da aber der Kosinus des Winkels $\alpha+\beta$ positiv ist, muß $\alpha+\beta$ im ersten Quadranten liegen.
Außerdem ist $\cos(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ und $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$.
Deshalb können sich $\alpha+\beta$ und $\frac{\pi}{2}-\gamma$ nur um $2\pi n$ unterscheiden. Da aber $\frac{\pi}{2}-\gamma$ auch im ersten Quadranten liegt, ist $n = 0$. Folglich ist

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}-\gamma,\quad \text{d. h.}\quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2},$$

was zu zeigen war.

917. Es gilt $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Man ersetzt $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ durch β, so daß $\cos\beta = -\frac{1}{7}$ ist. Der Winkel β liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. (Vergleichen Sie mit den Lösungen der Aufgaben 914 bis 916!) Deshalb ist

$$\sin\beta = +\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\quad\left(\text{aber nicht } -\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right),$$

d. h.

$$\sin\beta = \frac{4}{7}\sqrt{3}.$$

Man erhält

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\beta - \sin\frac{\pi}{3}\sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3} = -\frac{13}{14}.$$

Um das Bestehen der behaupteten Identität zu zeigen, muß man sich noch davon überzeugen, ob der Winkel $\frac{\pi}{3} + \beta$ im zweiten Quadranten liegt. [Der Winkel $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$ auf der rechten Seite der Gleichung liegt nämlich im zweiten Quadranten.]

Der Winkel $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Folglich befindet sich der Winkel $\frac{\pi}{3} + \beta$ zwischen $\frac{5\pi}{6}$ und $\frac{4\pi}{3}$. Aus dieser Abschätzung folgt aber noch nicht, daß der Winkel $\frac{\pi}{3} + \beta$ im zweiten Quadranten liegt. (Der Winkel $\frac{4\pi}{3}$ liegt bereits im dritten Quadranten.)

Berücksichtigt man aber, daß $-\frac{1}{7} > -\frac{1}{2}$ ist und daß folglich

$$\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

ist, d. h.

$$\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \frac{2\pi}{3},$$

dann folgt, daß

$$\frac{\pi}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \pi$$

ist.

Da aber nach dem vorher Gesagten dieser Winkel größer als $\frac{5\pi}{6}$ ist, liegt er im zweiten Quadranten. Damit wurde die behauptete Identität bewiesen.

Bemerkung: Die Zugehörigkeit des Winkels $\frac{\pi}{3} + \beta$ zum zweiten (aber nicht zum dritten) Quadranten kann man noch auf folgende Art zeigen:

Es gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\beta + \cos\frac{\pi}{3}\sin\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3} = \frac{3}{14}\cdot\sqrt{3}.$$

Da diese Zahl positiv ist, liegt der Winkel $\frac{\pi}{3} + \beta$ im zweiten Quadranten.

918. Es sei $\arctan\frac{1}{5} = \alpha$ und $\arctan\frac{1}{4} = \beta$.

Daraus folgt $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ und $\tan\beta = \frac{1}{4}$. Man berechnet

$$\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1 - \tan 2\alpha \tan\beta}.$$

Vorher bestimmt man

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

und dann

$$\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{32}{43}.$$

Die Winkel $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ und $\beta = \arctan\frac{1}{4}$ liegen im ersten Quadranten, daraus folgt aber nicht, daß der Winkel $2\alpha + \beta$ im ersten (nicht aber im dritten) Quadranten liegt. Wenn man annimmt, daß jeder der Winkel α und β kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist (da ihre Tangenswerte kleiner als 1 sind), dann folgt daraus, daß $2\alpha + \beta$ kleiner als $\frac{3\pi}{4}$ ist. Da überdies $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{32}{43}$ positiv ist, muß $2\alpha + \beta$ im ersten Quadranten liegen, d. h. $2\alpha + \beta = \arctan\frac{32}{43}$, was zu zeigen war.

Bemerkung: Statt zu zeigen, daß der Winkel $2\alpha + \beta$ die Grenzen des ersten Quadranten nicht überschreitet, kann man diesen Winkel (es genügt sehr grob) mit Hilfe von Tabellen bestimmen. (Siehe Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 914!)

Man erhält:

$$\alpha = \arctan\frac{1}{5} \approx 11^\circ, \quad \beta = \arctan\frac{1}{4} \approx 14^\circ,$$

so daß $2\alpha + \beta \approx 36^\circ$ ist.

919. Es sei

$$\arctan\frac{1}{3} = \alpha, \quad \arctan\frac{1}{5} = \beta, \quad \arctan\frac{1}{7} = \gamma, \quad \arctan\frac{1}{8} = \delta.$$

Man findet zuerst

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{4}{7},$$

danach

$$\tan[(\alpha+\beta)+\gamma] = \frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{7}{9}$$

und schließlich

$$\tan[(\alpha+\beta+\gamma)+\delta] = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}} = 1.$$

Wie in der vorigen Aufgabe wird gezeigt, daß der Winkel $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ im ersten Quadranten liegt.
Folglich ist $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{\pi}{4}$.

920. Es gilt $\arctan(x^2-3x-3) = \frac{\pi}{4}$, woraus

$$x^2-3x-3 = \tan\frac{\pi}{4}, \quad \text{d. h.} \quad x^2-3x-3 = 1$$

folgt.

Lösung: $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

Bemerkung: Würde man an Stelle der Gleichung

$$\arctan(x^2-3x-3) = \frac{\pi}{4}$$

die Gleichung

$$\arctan(x^2-3x-3) = -\frac{3\pi}{4}$$

betrachten, dann hätte diese Gleichung keine Lösung, weil der Hauptwert des Arkustangens nicht gleich $-\frac{3\pi}{4}$ sein kann. Beachtet man diese Tatsache nicht, kann man ebenfalls zur Gleichung $x^2-3x-3=1$ gelangen. Die Wurzeln dieser letzten Gleichung sind jedoch unbrauchbar.

921. Es gilt $\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \frac{\pi}{6}$, woraus $x^2 - 6x + 8{,}5 = 0{,}5$ folgt.

Lösung: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

922. Bildet man den Tangens von beiden Seiten der Gleichung und berücksichtigt, daß $\tan(\arctan\alpha) = \alpha$ ist, so erhält man

$$\frac{(x+2) - (x+1)}{1 + (x+2)(x+1)} = 1,$$

woraus $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$ folgen. Überprüfen wir beide Wurzeln:

Wenn $x = -1$ ist, so ist $\arctan(x+2) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ und

$$\arctan(x+1) = \arctan 0 = 0,$$

so daß die gegebene Gleichung erfüllt wird.
Ebenso zeigt man, daß auch die zweite Wurzel verwendbar ist.

Lösung: $x_1 = -1$; $x_2 = -2$.

Bemerkung: Man sieht am folgenden Beispiel, warum die Probe durchgeführt werden muß:
Betrachten wir die Gleichung

$$\arctan(x+2) - \arctan(x+1) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Sie unterscheidet sich von der gegebenen nur durch den Wert des absoluten Gliedes. Es wurde bereits gezeigt, daß sie keine Lösung hat. (Siehe Lösung der Aufgabe 920!) Wäre z. B. $\arctan(x+2)$ gleich $-\frac{\pi}{3}$ und $\arctan(x+1)$ gleich $\frac{5}{12}\pi$ (diese Werte können Hauptwerte der Arkustangensfunktion sein), dann wäre die linke Seite gleich $-\frac{3\pi}{4}$. Betrachten wir die Tangens beider Seiten der genannten Gleichung, dann erhalten wir erneut die Gleichung

$$\frac{(x+2) - (x+1)}{1 + (x+2)(x+1)} = 1,$$

aber jetzt ist keine der Wurzeln $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$ verwendbar. Siehe auch Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 925!

923. Man bildet den Tangens von beiden Seiten der Gleichung. Vorher bestimmt man

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

und findet dann

$$\frac{\frac{4}{3} - x}{1 + \frac{4x}{3}} = 1.$$

(Siehe Lösung der vorigen Aufgabe!) Die Wurzel dieser Gleichung ist $x = \frac{1}{7}$. Sie muß überprüft werden. (Siehe Bemerkung zur Lösung der vorigen Aufgabe!) Setzt man in der linken Seite der Gleichung $x = \frac{1}{7}$ ein, so erhält man $2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7}$. Der Winkel $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ liegt innerhalb der Grenzen von 0 und $\frac{\pi}{4}$ (da $\tan \alpha = \frac{1}{2} < 1$ ist). In denselben Grenzen liegt der Winkel $\beta = \arctan \frac{1}{7}$. Der Winkel 2α liegt im ersten Quadranten und der Winkel $2\alpha - \beta$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$. Es ist aber $\tan(2\alpha - \beta) = 1$, so daß $2\alpha - \beta = \pi n + \frac{\pi}{4}$ ist. Aber nur für $n = 0$ befindet sich der Winkel $2\alpha - \beta$ innerhalb der gegebenen Grenzen. Folglich wird die gegebene Gleichung erfüllt.

Lösung: $x = \frac{1}{7}$.

924. Man bildet von beiden Seiten der Gleichung die Sinus. Es sei

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} = \alpha \quad \text{und} \quad \arcsin \sqrt{1 - x} = \beta.$$

(Siehe Lösung der Aufgabe 915!) Man kann den Arkussinus beseitigen, wenn man die Formel $\sin(\arcsin x) = x$ (sie folgt unmittelbar aus der Definition des Arkussinus) und die Formel $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ [1] anwendet. Folglich ist der Sinus der linken Seite gleich

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x})^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - x},$$

[1] Diese Formel kann man auf folgende Art herleiten: Es sei $\arcsin x = \alpha$. Dann ist $\sin \alpha = x$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$. Vor dem Wurzelzeichen kann nur das Zeichen plus stehen, da der Winkel $\alpha = \arcsin x$ in den Grenzen von $-90°$ bis $+90°$ liegt (Hauptwert des Arkussinus). Setzt man an Stelle α den Ausdruck $\arcsin x$, so erhält man die genannte Beziehung.

und die gegebene Gleichung erhält die Form

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}}\sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

Löst man sie, so erhält man $x = \frac{2}{3}$. Diese Wurzel muß überprüft werden. (Siehe Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 922!) Das heißt, es ist die Identität

$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} = \arcsin\frac{1}{3}$$

nachzuweisen. Das kann wie in der Lösung der Aufgabe 917 geschehen.

Lösung: $x = \frac{2}{3}$.

925. Man bildet die Tangens von beiden Seiten der Gleichung und erhält

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}} = x,$$

woraus $x = 1$ folgt.
Diesen Wert muß man überprüfen. (Siehe Bemerkung zur Lösung der Aufgabe 922!) Setzt man $x = 1$ in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

(1) $$\arctan\frac{a}{b} - \arctan\frac{a-b}{a+b} = 45^\circ.$$

Man führt folgende Substitution ein:

(2) $$\arctan\frac{a}{b} = \varphi.$$

Hierbei liegt der Winkel φ (der Hauptwert des Arkustangens) in den Grenzen

(3) $$-90^\circ < \varphi < 90^\circ.$$

Unter Verwendung dieser Substitution gilt

(4) $$\arctan\frac{a-b}{a+b} = \arctan\frac{b\tan\varphi - b}{b\tan\varphi + b} = \arctan\tan(\varphi - 45^\circ),$$

so daß die Gleichung

(5) $$\varphi - \arctan\tan(\varphi - 45^\circ) = 45^\circ$$

auf ihre Richtigkeit zu untersuchen ist. Diese Gleichung ist dann und nur dann richtig, wenn

(6) $\arctan \tan (\varphi - 45°) = \varphi - 45°$

ist.

Die Gleichung (6) ist möglich, wenn der Winkel $\varphi - 45°$ (der Hauptwert des Arkustangens) in den Grenzen von

(7) $-90° < \varphi - 45° < 90°$

liegt, d. h. wenn

(8) $-45° < \varphi < 135°$

ist.

Berücksichtigt man die Beziehung (3), so erhält man für den Winkel φ engere Grenzen:

(9) $-45° < \varphi < 90°$.

Aus (2) und (9) erhält man

(10) $\frac{a}{b} = \tan \varphi > \tan(-45°)$, d. h. $\frac{a}{b} > -1$.

Also erfüllt der Winkel φ für $\frac{a}{b} > -1$ die Ungleichung (9). Folglich hat die gegebene Gleichung eine Lösung ($x = 1$) für $\frac{a}{b} > -1$. Für $\frac{a}{b} < -1$ existiert dagegen keine Lösung. Zum Beispiel erhält man für $a = -\sqrt{3}$ und $b = 1$:

$$\arctan \frac{a}{b} = \arctan(-\sqrt{3}) = -60°;$$

$$\arctan \frac{a-b}{a+b} = \arctan \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \approx \arctan 3{,}732 = 75°,$$

so daß die linke Seite der gegebenen Gleichung gleich $-135°$, die rechte Seite dagegen für $x = 1$ gleich $45°$ ist.

Lösung: $x = 1$ für $\frac{a}{b} > -1$.

Die Gleichung hat für $\frac{a}{b} < -1$ keine Lösung.

926. Man bildet von beiden Seiten der Gleichung die Kosinus und erhält

$\sqrt{1 - 9x^2} = 4x$. (Siehe Lösung der Aufgabe 924!)

Diese Gleichung hat eine einzige Wurzel: $x = \frac{1}{5}$.
Wir überprüfen sie.

Der Winkel $\alpha = \arcsin 3x = \arcsin \frac{3}{5}$ liegt im ersten Quadranten, der Winkel $\beta = \arccos 4x = \arccos \frac{4}{5}$ ebenfalls im ersten. Dabei ist $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, folglich $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Andererseits gilt $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Also ist $\alpha = \beta$.

Lösung: $x = \frac{1}{5}$.

927. Man bildet von beiden Seiten der Gleichung die Sinus und erhält

$$2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{10x}{13}.$$

(Siehe Lösung der Aufgabe 924!) Daraus folgen

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{12}{13}; \quad x_3 = -\frac{12}{13}.$$

Wir überprüfen diese Wurzeln.

Lösung: $x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm\frac{12}{13}$.

928. Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\tan(x + y) = \frac{2a}{1 - a^2}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{2a}{1 - a^2}.$$

Man lenkt die Aufmerksamkeit auf die zweite Gleichung. Sie ergibt

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - a^2} = \frac{2a}{1 - a^2} \quad \text{oder} \quad \tan x + \tan y = 2a.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\tan x + \tan y = 2a$$
$$\tan x \cdot \tan y = a^2$$

erhält man $\tan x = a$ und $\tan y = a$. Daraus folgt, daß $x = 180° \cdot n + \arctan a$; $y = 180° \cdot m + \arctan a$ gilt, wobei n und m ganze Zahlen sind. Es kann jedoch nur eine von ihnen in Frage kommen, da gleichzeitig (siehe erste Gleichung) der Wert von $x + y$ als Hauptwert des Arkustangens zwischen $-90°$ und $+90°$ liegen muß.

Um die Werte von n und m zu berechnen, setzt man die gefundenen Ausdrücke in die erste Gleichung ein und erhält

$$\text{(A)} \qquad 180°(n + m) + 2 \arctan a = \arctan \frac{2a}{1 - a^2}.$$

Da gleichzeitig die Bedingung $|a| < 1$ gilt, liegt der Winkel $\arctan a$ zwischen $-45°$ und $45°$, d. h. $2 \arctan a$ liegt zwischen $-90°$ und $+90°$. In diesen Grenzen liegt der Winkel $\arctan \frac{2a}{1 - a^2}$ (Hauptwert des Arkustangens).

Folglich ist die Differenz dieser beiden Winkel kleiner als 180°. Deshalb ist die Gleichung (A) nur möglich für $n + m = 0$.

Lösung: $x = 180° \cdot n + \arctan a$; $\quad y = -180° \cdot n + \arctan a$.