Lev D. Kudrjavzev

Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium

Übersetzung und Bearbeitung: Ingrid Müller-Pfeiffer, Prof. Hans Triebel
1983 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 112
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Mit der wachsenden Bedeutung der Mathematik in der modernen Wissenschaft und Technik benötigt gegenwärtig eine ungewöhnlich große Anzahl künftiger Ingenieure, Biologen, Ökonomen, Soziologen usw. eine solide mathematische Ausbildung, die ihnen die Möglichkeit bietet, mit mathematischen Methoden neue Probleme zu untersuchen, die moderne Rechentechnik anzuwenden und theoretische Erkenntnisse in die Praxis umzusetzen.

Dafür ist es zumindest notwendig, dass sie eine richtige allgemeine Vorstellung davon erhalten, was Mathematik und was ein mathematisches Modell ist, worin das mathematische Vorgehen bei der Untersuchung der Erscheinungen der realen Wirklichkeit besteht, wie man die Mathematik anwenden und was sie bieten kann. Wesentliche Elemente des Problems der mathematischen Ausbildung sind: die Auswahl des Umfangs und des Inhalts mathematischer Kurse, die Bestimmung der Ausbildungsziele, die richtige Kombination von Breite und Tiefe der Darstellung, der Strenge und der Anschaulichkeit, d.h. die Wahl der effektivsten und rationellsten Ausbildungswege, und das alles unter Berücksichtigung der begrenzten Zeit, die für das Studium der Mathematik zur Verfügung steht.

Das ist ein gewaltiges Problem, dennoch gelang es dem Autor in hohem Maße, das Wesentliche und das Vorrangige hervorzuheben.

Vor uns liegt ein Buch, das von einem bekannten Wissenschaftler, leitenden wissenschaftlichen Mitarbeiter des Mathematischen Instituts V. A. Steklov der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und talentierten Pädagogen geschrieben wurde, der viele Jahre den Lehrstuhl für höhere Mathematik des Moskauer Physikalisch-Technischen Instituts leitete. L. D. Kudrjavzev leistete einen großen Beitrag zur Entwicklung der mathematischen Ausbildung in unserem Lande.

Sein Lehrbuch "Mathematische Analysis" ist weithin bekannt und wurde in einigen Bildungseinrichtungen des Landes zum Hauptlehrbuch erklärt. Das System der Mathematikausbildung, wie es am Moskauer Physikalisch-Technischen Institut (MFTI) ausgearbeitet wurde - mit einem hohen spezifischen Anteil des Selbststudiums der Studenten -, hat sich gut bewährt und erwies sich als effektiv auch an solchen großen Hochschulen unseres Landes wie dem Moskauer Energetischen Institut, dem Nowosibirsker Elektrotechnischen Institut u.a.

L. D. Kudrjavzev ist der stellvertretende Vorsitzende des Präsidiums des Wissenschaftlich-Methodischen Rates für Mathematik des Ministeriums für Hochschulwesen. 1974 wurde er auf dem Weltkongress der Mathematiker zum Mitglied des Exekutivkomitees der Internationalen Kommission für mathematische Ausbildung gewählt.

Der Grundgedanke, den der Autor in diesem Buch entwickelt, besteht darin, dass es keine "reine" und "angewandte" Mathematik gibt, dass trotz der äußeren Getrenntheit ihrer Teildisziplinen die Mathematik eine Einheit ist und diese Einheit im Wesen der Mathematik selbst begründet liegt.

Der Autor geht davon aus, dass man die Mathematikausbildung nicht durch das Lehren einer Reihe von Anwendungen und Methoden ersetzen kann, ohne das Wesen der mathematischen Begriffe zu klären und ohne die innere Logik der Mathematik selbst zu berücksichtigen. Sonst kann es geschehen, dass ausgebildete Spezialisten bei der Untersuchung einer konkreten Erscheinung hilflos sind, weil ihnen die notwendige mathematische Kultur fehlt und sie die Betrachtung abstrakter mathematischer Modelle nicht gelernt haben.

Wir unterstreichen das konstruktive Herangehen des Autors an das zu betrachtende Problem: Er hat 10 Thesen vorgeschlagen und analysiert, die als Grundlage für die Mathematikausbildung dienen könnten.

Das weite Feld der hier betrachteten Fragen, ihre Aktualität, das Wohlwollen des Autors, wenn er seine reichen pädagogischen Erfahrungen mitteilt, die Vielzahl der Lehrbeispiele - das alles empfiehlt das Buch einem breiten Leserkreis und weckt zweifellos nicht nur das Interesse derer, die Mathematik lehren, sondern auch derer, die sie studieren oder mit ihr bei ihrer Tätigkeit in Berührung kommen.

Mai 1977 P. S. Alexandroff

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Es ist unbestritten, dass die Lösung vieler technischer und naturwissenschaftlicher Probleme der heutigen Industriegesellschaft ohne umfangreiche mathematische Kenntnisse unmöglich ist. Der Anteil der benötigten Mathematik wächst ständig, quantitativ und qualitativ.

Die Universitäten und Hochschulen haben die Aufgabe, ihre Absolventen in entsprechender Weise auszubilden. Die Frage lautet:
Welche Teile der Mathematik sollen gelehrt werden und in welchem Umfang soll dies geschehen?

Eine naheliegende Antwort lautet: Man untersuche, welche Mathematik heute in der Industrie, in der Technik und in den Naturwissenschaften benötigt wird und man orientiere die Lehre schwerpunktmäßig auf diese Teile der Mathematik.

Eine solche Antwort scheint mir aber weniger als die halbe Wahrheit zu sein. Die Fähigkeit, mathematisch denken zu können und mit mathematischen Strukturen schöpferisch umgehen zu können, ist und bleibt das höchste Ziel mathematischer Bildung und Ausbildung, auch und gerade im Lichte der heutigen gestiegenen Anforderungen. Ein Mathematiker, Naturwissenschaftler, Techniker usw. der eine solide mathematische Grundausbildung hat und der gelernt hat, eigene mathematische Wege zu gehen, wird später leicht in der Lage sein, sich in neue, ihm bis dahin unbekannte Gebiete und Verfahrenstechniken einzuarbeiten.

Es ist selbstverständlich, dass es zu diesen Problemen unterschiedliche Meinungen gibt. Es ist deshalb von hohem Wert, die Ansicht kompetenter Mathematiker zu dieser Frage kennenzulernen. Dieses Büchlein ist ein Beitrag hierzu.

Der Verfasser, Prof. L. D. Kudrjavzev ist ein ausgezeichneter Mathematiker und ein hervorragender Pädagoge. Basierend auf jahrzehntelangen Erfahrungen, hat er hier eine Reihe von Gedanken niedergelegt, die sich mit der Mathematik und insbesondere der Art, wie sie gelehrt werden sollte, beschäftigen.

Der Teubner Verlagsgesellschaft in Leipzig und insbesondere Frau Ziegler möchte ich für die Bereitschaft danken, dieses Büchlein in deutscher Sprache zu publizieren.

Frau Müller-Pfeiffer danke ich für die sorgfältige Obersetzung des sprachlich komplizierten Originals. Die Übersetzung wurde anhand der ersten Auflage des Buches vorgenommen.
Prof. Kudrjavzev hat freundlicherweise umfangreiches ergänzendes Material zur Verfügung gestellt, so dass der hier publizierte Text etwa der in der Zwischenzeit in der Sowjetunion erschienenen Neuauflage entspricht.
Ferner hat Prof. Kudrjavzev in einem Brief einige Quellenangaben präzisiert. Für seine aktive Mitarbeit bei der Entstehung der deutschen Übersetzung möchte ich ihm auch an dieser Stelle herzlich danken.

Jena, Sommer 1982 Hans Triebel

Inhaltsverzeichnis

Einführung **6**

1 Zu allgemeinen Prinzipien der Lehrmethodik **9**
1.1 Zur Spezifik des Lehrens 9
1.2 Zu Prüfungen 20
1.3 Zum Wesen der Mathematik 27
1.4 Zum Mathematikstudium 39

2 Grundlegende Thesen über das Lehren der Mathematik **45**
2.1 Zum Inhalt mathematischer Kurse 45
2.2 Zur Einheit der Mathematik 47
2.3 Zur inneren Logik der Mathematik 57
2.4 Zum Ziel der Mathematikausbildung 57
2.5 Zu den Prinzipien der Mathematikmethodik 60
2.6 Was man in der Mathematik lehren sollte 74
2.7 Zu Existenzsätzen 79
2.8 Zur Deduktion und Induktion 81
2.9 Zum Lösen von Anwendungsaufgaben 84
2.10 Zur Wahl des Bildungsinhaltes und seiner Realisierung 88

3 Literaturverzeichnis **92**

Einführung

"Das, was auf Wahrheit beruht,
sollte man vertreten und sich nicht scheuen,
dadurch lästig zu werden." N. I. Pirogov

Das vorliegende Buch befasst sich im wesentlichen mit der Rolle der Mathematik in der modernen Gesellschaft sowie dem Mathematikstudium von Personen, deren künftiges Spezialgebiet nicht die Mathematik selbst ist, die sich jedoch bei ihrer Tätigkeit in hohem Maße mathematischer Methoden bedienen werden.
Der Autor kann sich auf zahlreiche Diskussionen stützen, die er im Verlauf der letzten dreißig Jahre geführt hat, in denen er sich der Mathematikausbildung von Studenten physikalischer Fachrichtungen widmete.

Unmittelbarer Anlass für dieses Buch war der Vortrag "Die zeitgemäße mathematische Ausbildung des Ingenieurs", der vom Autor am 18. Dezember 1975 im zentralen Hörsaal der Allunionsvereinigung "Wissenschaft" gehalten wurde, sowie der Vortrag "Über die mathematische Ausbildung an Technischen Hochschulen" vom 20. August 1976 auf dem 3. Internationalen Kongress über den Mathematikunterricht in Karlsruhe, BRD.

Bei der Vorbereitung des Manuskripts für den Druck war T. S. Pigolkina dem Autor eine große Hilfe. Sie hat den gesamten Text aufmerksam durchgelesen und viele nützliche Hinweise gegeben, wofür ihr der Autor seinen aufrichtigen und tiefen Dank ausspricht.

Im ersten Kapitel werden einige allgemeine pädagogische Probleme betrachtet, die bei der Mathematikausbildung besonders wichtig sind, sowie auch spezifische Züge der Mathematik selbst und ihrer Anwendungen. Im zweiten Kapitel werden zehn Grundprinzipien formuliert und erörtert, die man der Mathematikausbildung zugrunde legen kann.

Beim Lesen dieses Buches muss man unbedingt beachten, dass jeder pädagogische Prozess eine überaus komplizierte und vielschichtige Erscheinung ist, die insbesondere die sehr wichtige Frage der Erziehung der Persönlichkeit einschließt.
Um ein vollwertiger Spezialist zu sein, muss man nicht nur eine gute Qualifikation auf seinem Gebiet haben. Früher oder später wird jeder auf unterschiedlichem Niveau mit Aufgaben konfrontiert, die durchaus auch spezifischen Charakter haben können, wobei aber das vorhandene Wissen allein zur Lösung nicht ausreicht.
Dann muss man andere Faktoren beachten; man wird sich vom Verantwortungsgefühl, von Moralprinzipien, sittlichen Normen und Emotionen leiten lassen. Die Achtung vor solchen allgemeinen Werten kommt nicht von selbst, sie muss erarbeitet und anerzogen werden.

Jeder von uns muss in der menschlichen Gesellschaft leben und arbeiten, und man muss das so tun, dass es der Gesellschaft nützt. Man muss die Arbeit gern tun und sie durch gemeinsame Bestrebungen fördern. Man muss sich nicht nur in die Gesellschaft einordnen, sondern sie auch beeinflussen und auf sie einwirken können. Man muss nicht nur positive moralische Kategorien kennen, sondern auch dementsprechend im täglichen Leben handeln.

Wie ist das alles zu erreichen? Wie ist dies alles anzuerziehen?
Wenn man vom Lehren eines Faches spricht, bekommt man nicht selten zu hören, dass für den Erfolg in der Sache zwei Eigenschaften notwendig sind: gute Fachkenntnisse und (das fügen einige hinzu) gute Kenntnisse der Sprache, in der der Unterricht durchgeführt wird.
Zweifellos sind diese Eigenschaften für einen Lehrer notwendig, aber sie sind - wie die Mathematiker sagen - nicht hinreichend dafür, um eine erfolgreiche Ausbildung zu garantieren.
Dem Lehrer, der die angegebenen Eigenschaften besitzt, gelingt es bei all seiner Begeisterung für das Fach durchaus nicht immer, seine Schüler das zu lehren, was er möchte, und darüber hinaus versteht er es nicht immer, beim Studenten die für einen Wissenschaftler, Forscher, Konstrukteur, Ingenieur, Wissenschaftsorganisator, Pädagogen, Arzt usw. erforderlichen Eigenschaften zu entwickeln.

Man kann dies unmöglich erreichen, ohne hohe allgemeinmenschliche Eigenschaften anzuerziehen wie Liebe und Achtung zu den Menschen, eine humanistische Einstellung, Güte, Wahrheitsliebe, Ehrlichkeit, Prinzipientreue, Selbstkritik, Mut, Ausdauer, Bescheidenheit, Gewissenhaftigkeit gegenüber seinen Verpflichtungen und ein natürliches Bedürfnis nach Arbeit. Diese Qualitäten werden sonst nicht zur allgemeinen Verhaltensnorm.
Das alles ist schon seit der Antike gut bekannt. Schon Sokrates sagte im Dialog in Platons "Menexen" (247a): "Jegliches Wissen, das von der Wahrheit und anderen Tugenden losgelöst ist, zeigt sich durch Betrug, aber nicht durch Weisheit."

Der Erziehungsprozess wie auch der Bildungsprozess insgesamt hat zwei Seiten: die der Erzieher und Lehrer und die der zu Erziehenden und Auszubildenden. Der Erfolg dieses Prozesses hängt vor allem von den Lehrern ab; an diese sind deshalb hohe Anforderungen zu stellen.
Nur derjenige hat das Recht zu erziehen und wird dabei erfolgreich sein, der Verantwortung für seine Arbeit fühlt, sich dafür interessiert, sie liebt, um ihr Ergebnis beugt, von der Richtigkeit der Prinzipien überzeugt ist, von denen er sich leiten lässt, wer sich seinen Mitmenschen gegenüber taktvoll verhält, geduldig eine andere Meinung anhören kann und seinen Standpunkt verteidigt, ohne ihn anderen aufzudrängen.

Ein Erfolg in der Erziehungsarbeit ist nicht denkbar, wenn die Lehrer nicht Träger aller jener Eigenschaften sind, die sie den Studenten anerziehen wollen, damit die Beziehungen unter den Lehrern so sind, wie sie sie zwischen den Studenten sehen möchten, dass sie miteinander so sprechen, wie die Studenten miteinander reden sollten, dass sie den Studenten gegenüber genauso höflich sind, wie die Studenten ihnen gegenüber sein sollten.

Nur der Lehrer kann bei der Erziehung der Studenten Erfolg haben, den die Studenten wegen der Begeisterung für seine Sache und seiner Gewissenhaftigkeit in der Arbeit, wegen seiner Güte und Menschlichkeit, Prinzipientreue und Objektivität, Unduldsamkeit gegenüber Ungerechtigkeit lieben und achten, d. h., der bei ihnen Autorität sowohl als Fachmann als auch als Mensch genießt.

Nur wenn ein Kontakt zwischen Studenten und Lehrern besteht, wenn eine Atmosphäre des Vertrauens, der gegenseitigen Achtung und des gegenseitigen Verständnisses vorhanden ist, kann man echte Erfolge bei der Erziehung der Studenten erreichen.
Es versteht sich von selbst, dass man nicht die geringste Unaufrichtigkeit und Scheinheiligkeit in der Beziehung zwischen Lehrer und Student zulassen kann. Die Güte, die auf der Achtung gegenüber dem Menschen beruht, auf der Sorge um ihn, auf Wohlwollen, d.h. echte Güte, darf man nicht mit "äußerer Güte" verwechseln, die bei gewissen Menschen vorhanden ist, die zwar egoistisch und gleichgültig gegenüber anderen sind, für die es jedoch bequemer und angenehmer ist, im Ruf eines guten Menschen zu stehen, solange das kein aktives Handeln erfordert.

Eine Analyse des erzieherischen Aspekts im Bildungsprozess ist nicht Anliegen des vorliegenden Buches, und deshalb beschränken wir uns auf die zu diesem Problem gemachten Bemerkungen.

1 Zu allgemeinen Prinzipien der Lehrmethodik

1.1 Zur Spezifik des Lehrens

Beim Lehren eines jeden Faches treten die Schwierigkeiten schon bei der Stoffauswahl auf und vielleicht noch mehr bei der Aufstellung der Grundsätze, von denen man sich bei der Ausbildung leiten lassen muss.
Diese Schwierigkeiten werden dadurch noch größer, dass gewöhnlich jeder Pädagoge, jeder Spezialist auf seinem Gebiet davon überzeugt ist, dass er weiß, was und wie er in seinem Fachgebiet unterrichten muss, und sich in dieser Hinsicht intolerant gegenüber anderen Meinungen zu diesem Problem verhält.
Selten wird etwas ständig so kritisiert wie das bestehende Bildungssystem. Hier fühlt sich jeder kompetent, viele halten gern Belehrungen ab und bemühen sich, ihren Standpunkt anderen zu oktroyieren.

Schon N. V. Gogol wies auf diesen Umstand hin. Im "Revisor" sagt der Inspektor der Lehranstalten Luka Lukic Chlopov: "Gott bewahre einen vor einem Lehramt, man muss alles und jedes fürchten. Ein jeder mischt sich ein, ein jeder möchte zeigen, dass er auch ein kluger Mensch ist."[10]

Beim Studium der Mathematik wird das Ganze wegen der breiten Anwendung auf den verschiedenen Gebieten der Wissenschaft und Technik erschwert: Oft sind die Fachleute auf diesen Gebieten zutiefst davon überzeugt, dass sie besser als andere und insbesondere besser als die Mathematiker selbst wissen, worin der Sinn der Mathematik besteht und wie man sie lehren muss.
Dabei geht in der Regel jeder vom Umfang seiner mathematischen Kenntnisse aus und meint, dass man gerade das wissen muss, was er weiß, wobei man es so verstehen soll wie er.

Seltsamerweise wird vergessen, dass die Ausbildung von Menschen - wie auch jede andere menschliche Tätigkeit - ihre Fachleute erfordert.
Die Schwierigkeit des Problems Bildung besteht insbesondere darin, dass man erstens ein guter Fachmann auf seinem Wissenschaftsgebiet oder Tätigkeitsfeld sein muss, um zu wissen, was man lehren soll.

Lehren ist nur im Zusammenhang mit Sachkenntnis auf einem Spezialgebiet möglich.
Zweitens unterscheidet sich der Bildungsprozess von anderen Arten der menschlichen Tätigkeit wesentlich dadurch, dass die Menschen auch unabhängig davon, wie er realisiert wird, heranwachsen und ausgebildet werden, mehr noch, sie wachsen heran und lernen irgendetwas, auch wenn man sich überhaupt nicht um ihre Ausbildung und Erziehung kümmert, was (natürlich nicht unbedingt) zu schlechten Resultaten sowohl für die Gesellschaft als auch für das Individuum führen kann.
Man könnte in vielen Fällen schlechte Ergebnisse vermeiden, Wenn man das Problem der Bildung und Erziehung richtig anpackte.

Den Ausbildungs- und Erziehungsprozess der Menschen kann man mit dem Wachstum der Kulturpflanzen vergleichen; denn diese Prozesse können einerseits ohne aktiven

Eingriff des Menschen ablaufen, andererseits beeinflusst ein entsprechender Eingriff das Resultat spürbar.
Natürlich finden im Leben der Menschen auch viele Prozesse statt, die nicht von selbst ablaufen können, keinesfalls ohne "Eingriff von außen". So kann beispielsweise kein Haus gebaut werden, wenn keine Leute da sind, die es errichten.

Eine Pflanze kann sich zwar aus dem Samen entwickeln, der auf die Erde fiel und günstige Bedingungen vorfand, auch wenn sich niemand darum kümmert, aber jeder weiß genau, dass es nicht genügt, nur zu säen - um die gewünschte Ernte zu erhalten, muss man auch bestimmte Leistungen vollbringen.

Ein anderes anschauliches Beispiel liefert ein herrlicher Garten, der ständig von einem guten Gärtner betreut wird, im Vergleich zu einem Garten, in dem die gleichen Pflanzen ohne jegliche Pflege wachsen. Im übrigen darf man natürlich nicht vergessen, dass auch inmitten von Unkraut und Kletten eine prächtige wilde Rose erblühen kann.
Einstweilen beschränken wir uns auf die Feststellung aller dieser Schwierigkeiten; mit ihrer Analyse beschäftigen wir uns später.

Bevor man die Problematik von Inhalt und Methoden der Lehre betrachten kann, muss man die allgemeine und prinzipielle Aufgabe lösen:
Auf welche psychologischen Aspekte der Ausbildung muss man sich konzentrieren und von welchen wesentlichen Grundsätzen muss man sich leiten lassen, damit der Lernprozess möglichst erfolgreich wird?

Dem Autor scheinen folgende Prinzipien wichtig: Stärkung des Selbstbewusstseins beim Schüler und Zusicherung der Hilfe für ihn, wenn dies notwendig wird. Man muss dabei beachten, dass hier weder vom Tadeln noch vom Bestrafen die Rede ist.

Ein überzeugendes Beispiel für den Vorteil der Ausbildung, die auf diesem Grundgedanken beruht, ist die langjährige pädagogische Tätigkeit des Lehrers V.F. Satalov an einer Mittelschule der Stadt Donezk, der die angegebenen Prinzipien bei seiner Arbeit systematisch angewandt hat; seine großen Erfolge bei der Ausbildung der Schüler suchen ihresgleichen.

Leider lassen sich nur wenige Lehrer an Hochschulen von diesen bemerkenswerten Prinzipien leiten. Dadurch verliert ein Teil der Studenten während des Ausbildungsprozesses an einer Hochschule allmählich den Glauben an die eigene Kraft und an die Fähigkeit, das zu meistern, was von ihnen verlangt wird.
Kaum einer der Abiturienten, die sich an einer Hochschuleinrichtung bewerben, glaubt, dass das Lernen hier leicht werden wird, aber natürlich bewirbt sich fast jeder mit der Hoffnung, dass er diese Schwierigkeiten meistern wird. Und viele Schüler haben große Schwierigkeiten!

Sie hängen mit der großen Dichte von Informationen zusammen, mit denen sie von Beginn der Ausbildung an konfrontiert werden, mit dem Mangel an Zeit, um sich mit ihnen vertraut zu machen und sie zu beherrschen, mit den hohen Anforderungen, die an sie gestellt werden, mit der Notwendigkeit, ihre Zeit richtig einzuteilen, und dem Unvermögen, konzentriert zu arbeiten, sich zur rechten Zeit und richtig zu erholen,

sich den Stoff auf dem erforderlichen Niveau anzueignen (wovon die Mehrzahl der Studienanfänger eine ziemlich unklare Vorstellung hat).
In dieser Situation besteht die Gefahr zu straucheln, sich zu irren, mit etwas nicht zurechtzukommen, oft einfach deshalb etwas nicht zu bewältigen, weil man nicht weiß, wie man es anfangen und tun soll. Das ist ganz natürlich.

Man darf nicht vergessen, dass die Studienanfänger noch keine Erwachsenen sind, obwohl sie uns oft im Wuchs überragen. Die beobachtete Akzeleration der Entwicklung der jungen Generation, über die gegenwärtig so viel gesprochen wird, bezieht sich mehr auf die physische als auf die geistige Entwicklung. Jedoch die Fähigkeit und Geschwindigkeit der Aneignung neuen Stoffes haben sich während der letzten Jahrzehnte im Grunde genommen nicht geändert.

Beginnt ein Student zurückzubleiben, wird er gewöhnlich getadelt, wobei er oft den Rest seines Selbstvertrauens verliert. Sieht ein Lehrer jedoch, dass ein Student mit den Anforderungen nicht zurechtkommt, so gelangt er oft zu der Überzeugung, dass es für diesen Studenten nicht zweckmäßig ist, die Ausbildung am Institut fortzusetzen; dadurch wird sein gesamtes weiteres Verhalten diesem Studenten gegenüber bestimmt, das man bestenfalls mit den Worten "ihn aufgeben" ausdrücken kann.

An sich hat der Lehrer von diesem Zeitpunkt an schon nicht mehr das moralische Recht, die Ausbildung dieses Studenten fortzusetzen, denn lehren sollte man in der Regel nur dann, wenn man an einen Erfolg glaubt.

Wesentlich effektiver sind meist nicht Worte des Tadelns, sondern der Ermutigung. Es ist sehr wichtig, sich gegenüber einem Studenten, dem es schwerfällt, aufmerksam zu verhalten, selbst den geringsten Erfolg in seiner Arbeit zu entdecken und ihn dafür zu loben.

Wenn ein Student eine Arbeit nicht ausgeführt hat, sollte man nicht davon ausgehen, dass er faul oder unfähig ist, sondern dass er die erforderliche Arbeit zwar erledigen wollte, es aber nicht konnte, weil er nicht genügend Erfahrung, Fertigkeiten und vielleicht auch Zeit hatte, (weil er einfach nicht in der Lage war oder nicht die Möglichkeit hatte, sie entsprechend einzuteilen), und man muss sich darum bemühen, ihn zu überzeugen, dass er es schaffen kann, die notwendigen Kenntnisse zu erlangen.

Es wäre wesentlich nützlicher, die häufigsten Erziehungsmethoden bei Studenten (und auch bei Kindern), nämlich Tadel und Rügen, also Strafen, äußerst selten, lediglich in Ausnahmefällen, anzuwenden.

Der Lehrer wie überhaupt jeder Erzieher sollte, statt den Studenten für eine Handlung zu bestrafen, versuchen, diese zu verhüten, ihre Ursachen zu beseitigen, die meiste Kraft und Zeit der Erziehung des Studenten zur Aktivität widmen und seine Tätigkeit in die richtigen Bahnen lenken.
Hierfür erweist sich die Ermunterung als eine der besten Methoden. Man sollte die Schüler wesentlich häufiger loben (natürlich verdientermaßen) und es niemals vergessen, wenn klare Gründe dafür vorliegen. Wenn ein Schüler eine Aufmunterung braucht, so sollte man eine Gelegenheit finden, um ihm die notwendigen Worte zu sagen.

Indem wir dem Schüler Güte, Hochherzigkeit und Aufmerksamkeit entgegenbringen, wecken wir damit in ihm diese Eigenschaften. Vom Lehrer entgegengebrachtes Vertrauen, das nicht ständig von Kontrolle begleitet ist, erweist sich im allgemeinen als sehr erfolgreiche Methode der Ausbildung und stimuliert die Entwicklung der Interessen bei den Studierenden.

All das schließt natürlich keinesfalls vernünftige Strenge und hohe Anforderungen im Studium aus. Gerechtigkeit und Objektivität (bei einem wohlwollenden Verhältnis) sind bei der Bewertung der Kenntnisse der Studenten in den Prüfungen besonders wichtig. Man kann den Schaden nicht hoch genug einschätzen, der bei der Heranbildung künftiger Spezialisten dadurch angerichtet wird, dass die Leistungen zu hoch bewertet werden, indem man das Prinzip "möglichst keine ungenügenden Noten geben" einführt.

Zweifellos ist auch eine regelmäßige Kontrolle der Arbeit der Studierenden sehr nützlich. Richtig eingesetzt hilft sie ihnen, die Arbeit systematisch zu organisieren, in jedem Fach das Wesentliche und Wichtige herauszuarbeiten und die Arbeitszeit richtig einzuteilen; dem Lehrer ermöglicht sie, dem Studierenden im richtigen Moment die erforderliche Hilfe zu gewähren. Das alles sichert den Erfolg der Ausbildung.

Das Prinzip der regelmäßigen Kontrolle widerspricht keinesfalls dem Prinzip des nicht von Kontrolle begleiteten Vertrauens dem Studierenden gegenüber: Weder das eine noch das andere ist im absoluten Sinne zu verstehen. Die Fähigkeit, diese beiden Prinzipien im Ausbildungsprozess zum Nutzen der Studierenden zu verbinden, hängt natürlich von der Erfahrung und dem Geschick des Lehrenden ab.

In diesem Zusammenhang taucht natürlich die Frage nach den Grundprinzipien der Ausbildung auf. Es gibt zwei Wege: den der Deduktion, der Schlussfolgerungen aus allgemeinen Überlegungen, und den des pädagogischen Experiments, des Sammelns von Erfahrungen. Gewöhnlich werden beide gleichzeitig benutzt.

Man muss die Verantwortung derer betonen, die ein pädagogisches Experiment durchführen, besonders ihre Verantwortung für die Schlussfolgerungen, die aus diesem Experiment gezogen,sowie für die Empfehlungen, die häufig für ihre allgemeine Realisierung gegeben werden. Das pädagogische Experiment unterscheidet sich wesentlich von Experimenten z.B. in der Physik, Chemie, Biologie usw.

Es ist nicht unter den gleichen Bedingungen reproduzierbar, unter denen es durchgeführt werden ist: Sein Ergebnis hängt sehr stark von der Individualität sowohl der Schüler oder Studenten als auch der Lehrkräfte ab. Ein und dieselbe Methodik, in diesem Fall erfolgreich angewandt, kann sich in einem anderen Fall als völlig ungeeignet erweisen, z.B. bei einem weniger geschickten Pädagogen oder einer anderen Zusammensetzung der Lernenden.
Beim pädagogischen Experiment sieht man sehr leicht, was man sehen will, nicht aber das, was tatsächlich vorhanden ist, weil es keine exakten Normen für die Bewertung der Versuchsergebnisse gibt. All das darf man nicht vergessen.

Von großer Bedeutung ist die prinzipielle Beurteilung der Ausbildungsergebnisse:
Wenn eine Ausbildung, von gewissenhaften und qualifizierten Lehrern durchgeführt, mit

negativen Ergebnis abgeschlossen wird, muss man sich nach der Ursache des Misserfolges fragen. Gewöhnlich sagen die Pädagogen, die sich der Verantwortung entziehen wollen, dass die Studierenden schuld sind - sie haben nicht das gelernt, was sie lernen mussten.

Fragt man jedoch, ob sie denn wirklich auch das lernen konnten, was von ihnen gefordert wurde, so folgt darauf die Antwort: Wenn sie es nicht konnten, so waren sie hier fehl am Platze. Anhänger eines solchen Standpunktes sind größtenteils diejenigen, die es ablehnen, Fragen der Unterrichtsmethodik zu erörtern. Sie betrachten dies als reine Zeitverschwendung.

Übrigens wird dieser Standpunkt häufig auch von Pädagogen geteilt, die eine hinreichende Achtung vor der Unterrichtsmethodik haben, und selbstverständlich sind sowohl die einen als auch die anderen absolut davon überzeugt, dass sie wissen, wie man unterrichten muss, und sie lassen keinen Zweifel an ihren möglicherweise sogar intuitiven Unterrichtsprinzipien zu.

Wir gehen jedoch von der Behauptung aus, dass der Schuldige am Misserfolg der Ausbildung immer der Pädagoge ist und nicht der Studierende, da es die Pflicht eines Pädagogen ist, nicht nur Vorlesungen zu halten, sondern den Studierenden den Stoff auch beizubringen, und dass letzteres immer möglich ist. Selbstverständlich gibt es Studenten, die nicht lernen wollen, aber ein Hochschuldiplom erhalten möchten.
Solchen Studenten gegenüber kann der Lehrer hilflos sein, wenn er ihnen das Geforderte beibringen will.
Wir nehmen an, dass ein solcher Student, im mathematischen Sinne gesprochen, ein "singulärer Punkt" ist.

In einzelnen Fällen kann sich die Menge der singulären Punkte jedoch als ziemlich massiv erweisen - diese Erscheinung ist zweifellos nicht normal -, und man muss alles daransetzen, dass dies eine leere Menge wird. Bei all unseren Überlegungen ziehen wir diese singulären Punkte nicht in Betracht.

Selbstverständlich setzt die ausgesprochene Behauptung auch voraus, dass der Lehrer nicht mit Vorlesungen oder anderen Arbeiten überlastet ist und die Möglichkeit hat, sich normal auf die Vorlesung oder die Durchführung von Seminaren vorzubereiten. Ist der Lehrer überlastet, kann man von ihm natürlich keine gute Arbeit verlangen.
Grundlage für die These über die Verantwortung des Pädagogen ist die Überzeugung, dass jeder normale Mensch eine beliebige Art geistiger Tätigkeit einschließlich der richtigen Anwendung mathematischer Methoden soweit erlernen kann, dass er ein gefragter, nützlicher und zuverlässiger Fachmann auf seinem Gebiet wird.

Ein analoger Standpunkt wurde in den Empfehlungen der XIX. Internationalen Konferenz über Volksbildung fixiert, die von der UNESCO und BIE[1] 1956 nach Genf einberufen worden war:

"... die Psychologie hat festgestellt, dass praktisch jedes menschliche Wesen in einem

[1] UNESCO - Organisation der Vereinten Nationen für Bildung, Wissenschaft und Kultur; BIE - Internationales Büro für das Bildungswesen.

gewissen Maße zu einer mathematischen Tätigkeit befähigt ist, und insbesondere gibt es überhaupt keine Begründung für die Behauptung, dass Mädchen für die Mathematik weniger begabt sind als Jungen ...", "... die mathematische Bildung ist ein Gut, worauf jedes menschliche Wesen ein Recht hat, unabhängig von seiner Nationalität, seinem Geschlecht, seiner Herkunft und Tätigkeit ..."[18, S. 15-22].

Bei einer solchen Problemstellung wächst die Verantwortung des Lehrers für die von ihm zu leistende Arbeit erheblich, eine Verantwortung, über die leider viele Lehrer sehr divergierende Vorstellungen haben.

Die Gegner des oben geäußerten Standpunktes wenden oft ein, dass eine potentielle Begabung beim Studierenden allein nicht ausreicht, er muss auch den Wunsch haben zu lernen, dass es zwecklos ist, denjenigen zu lehren, der nicht lernen will.
Diese Meinung entsteht natürlich dadurch, dass die Ausbildung von Studierenden, die mit Interesse lernen, oft leicht ist, einen vergleichsweise geringen Arbeitsaufwand erfordert und sich als sehr effektiv erweist, während die Ausbildung von Schülern und Studenten, die dem Fach kein Interesse entgegenbringen, beträchtliche Anstrengungen erfordert und dem Pädagogen oft keine Befriedigung, sondern im Gegenteil Unannehmlichkeiten auch dienstlicher Art bringt.

Deshalb ist die Frage berechtigt, ob es überhaupt einen Sinn hat, einen Menschen z.B. in Mathematik zu unterrichten, wenn er kein Interesse und keine Neigung hierfür hat. Wäre es nicht besser, ihm z.B. beizubringen, gut an einer Drehbank zu arbeiten? Diese Frage hängt natürlich vor allem mit der richtigen Berufswahl zusammen.

Das Problem der Berufswahl ist sehr kompliziert. Wir werden es aber nicht analysieren, da es uns etwas zu weit vom Thema wegführen würde.

Zweifellos kommen bei der Berufswahl Fehler vor, auch beim Abiturienten z.B. bei der Wahl der Studienrichtung, für die er sich beworben hat. Dennoch ist das eine Ausnahme.
Im allgemeinen wählen die Jungen und Mädchen die Studienrichtung entsprechend ihren individuellen Neigungen und Interessen und sind am Anfang der Ausbildung davon überzeugt, dass sie für den von ihnen gewählten Beruf geeignet sind.

Es kommt vor, dass jemand, der an einem Institut immatrikuliert wurde, keine rechten Vorstellungen von den wirklichen Schwierigkeiten der Ausbildung an diesem Institut hat, insbesondere von den Schwierigkeiten, die mit dem Studium benachbarter Fächer zusammenhängen, z.B. der Mathematik, die für eine erfolgreiche Beherrschung des Hauptfaches notwendig sind.
Trifft er auf solche Schwierigkeiten, so bringt er schlechte Leistungen, infolgedessen verringert sich sein Interesse an den Studienfächern. Und genau zu diesem Zeitpunkt hört man gewöhnlich:
"Wozu soll man diejenigen ausbilden, die nicht lernen wollen?"

Dabei vergisst man, dass der Student nicht mit der Absicht zu faulenzen, sondern zu lernen ans Institut kommt.
Für das Beherrschen der Fächer, die man an Hochschulen studiert, werden keinerlei spe-

zifische Fähigkeiten und Charakterzüge gefordert. Die Abneigung zu lernen tritt beim Studenten in der Regel erst im Ergebnis eines falsch aufgebauten Ausbildungsprozesses auf.

Der Pädagoge muss klüger sein als der Studierende, und es ist immer möglich und notwendig, den Studierenden das zu lehren, was er braucht, selbst wenn er zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht versteht, wozu es für ihn gut ist. Eine solche Einsicht kann man leider nicht immer erreichen, und in der entsprechenden Situation ist es nicht schlimm, wenn sich die Ausbildung tatsächlich nur auf das Notwendige beschränkt. Damit es tatsächlich so wird, verwendet man viel Zeit auf die Erarbeitung und Vervollkommnung von Lehrplänen und Programmen.

Dennoch reichen Programme und Lehrpläne allein nicht aus, um die Ausbildung möglichst rationell und optimal zu gestalten. Eine richtig ausgearbeitete und bis ins Detail gut durchdachte Unterrichtsmethodik hat für den Erfolg eine wesentliche Bedeutung. Das auf diese Weise erhaltene gute Ergebnis rechtfertigt voll und ganz die Anstrengungen, die für das Durchdenken der Unterrichtsmethodik aufgewendet wurden. Von besonderer Bedeutung ist diese dann, wenn man die Unlust, den inneren Protest des Studierenden überwinden muss oder wenn er nur ein gering ausgeprägtes - passives - Interesse am Studienfach hat.

Nicht weniger wichtig ist eine richtige Methodik auch dann, wenn sich der Studierende zwar hinreichend für das Fach interessiert, jedoch selbst nicht genügend von seiner Fähigkeit überzeugt ist, es im notwendigen Maße beherrschen zu können. In dieser Situation, die man sehr häufig antrifft, können dann ein unbedachter Schritt des Pädagogen; manchmal nur eine Taktlosigkeit, beim Studierenden zum Verlust jeglichen Interesses führen; als Folge davon trifft er dann möglicherweise Entscheidungen, die ihm einen schwer zu behebenden Schaden zufügen können.

Ein aufmerksames und durchdachtes Verhältnis dem Studenten gegenüber hilft ihm bei der richtigen endgültigen Auswahl seines zukünftigen Spezialgebietes und begünstigt eine weitgehende Entfaltung seiner individuellen Fähigkeiten.
Es kommt vor, dass das endgültig gewählte Spezialgebiet durchaus nicht dasjenige ist, welches man ursprünglich vorgesehen hatte.

So ist z.B. am Moskauer Physikalisch-Technischen Institut, das Ingenieure der Fachrichtung Physik auf verschiedenen Gebieten der modernen Wissenschaft und Technik ausbilden (vor einigen Jahren wurde am MFTI außerdem eine Fakultät für Steuerungstechnik und angewandte Mathematik gegründet), das Studium der Mathematik für den größten Teil der Studenten nicht Selbstzweck, sondern eine unabdingbare Notwendigkeit, weil mathematische Methoden bei der Untersuchung physikalischer Erscheinungen eine große Rolle spielen.

Es gibt Studenten, die kein Interesse für die Mathematik haben, die nicht begreifen, wie wichtig deren Beherrschung für ihr zukünftiges Fachgebiet ist, und die darüber hinaus davon überzeugt sind, dass sie sie nicht brauchen werden (und erst recht nicht in dem Umfang, in dem sie von ihnen während der Ausbildung gefordert wird).

Trotzdem gelang es, den Mathematikunterricht am MFTI so zu organisieren, dass in der Regel alle Studenten ausreichend gute fundamentale mathematische Kenntnisse erlangen, die es ihnen nötigenfalls gestatten, zusätzliche mathematische Kenntnisse zu erwerben, die für ihre weitere Arbeit notwendig sind.

Das einzigartige System der Mathematikausbildung, das am MFTI geschaffen wurde, zeichnet sich dadurch aus, dass mathematische Grundbegriffe tiefgehend untersucht und die Studenten nicht mit zweitrangigen Details überlastet werden. Große Aufmerksamkeit wird den stündigen Kontakten zwischen Lehrkörper und Studenten gewidmet, der individuellen Arbeit mit jedem einzelnen Studenten, der rechtzeitigen Hilfe für ihn, der Entwicklung von Initiative, der Fähigkeit zum selbständigen Arbeiten und des Selbstvertrauens auf der Grundlage dauerhafter Kenntnisse.

Dadurch können sich die individuellen mathematischen Neigungen der einzelnen Studenten breiter und freier als gewöhnlich entfalten. Das hat dazu geführt, dass sich manche Studenten ein Spezialgebiet mit viel stärkerer mathematischer Ausrichtung gewählt haben als sie ursprünglich vorhatten, und manche wurden sogar Mathematiker, und nicht einmal "angewandte", sondern "reine", und erzielten in der Mathematik große, z.T. hervorragende Erfolge.

Übrigens waren diejenigen Absolventen des MFTI, die bei ihrer Beschäftigung mit der Mathematik ihre physikalischen Kenntnisse nutzten, Problemstellungen aus angewandten Aufgaben ableiteten und bei deren mathematischer Lösung, wenn nötig, ihre physikalische Intuition zu Hilfe nahmen, ihren Kollegen, die eine rein mathematische Ausbildung erhalten hatten, unbedingt überlegen.
Dieser Vorteil trug bei vielen von ihnen wesentlich zu hervorragenden Erfolgen bei.

Die Problematik der Unterrichtsmethodik darf man auch bei der Ausbildung von Studenten nicht vernachlässigen, die gern und mit Interesse lernen, die eine natürliche Befähigung für das Studienfach haben oder sogar eine besondere Begabung dafür besitzen. Eine nicht richtig organisierte Ausbildung kann auch in diesem Falle dazu führen, dass sich die Studenten das Studienmaterial formal aneignen, es im Grunde genommen nicht beherrschen und daher wertvolle Zeit vergeuden.

Ist z.B. die Fülle der erhaltenen Informationen so groß, dass es praktisch nicht möglich ist, sich alles anzueignen, kann sogar ein befähigter Student das Interesse am Studienfach verlieren. Er wird die entsprechende Disziplin ohne die erforderliche Gewissenhaftigkeit studieren, nur um Testate und Prüfungen ablegen zu können. Natürlich lernt der Student in einer solchen Situation irgendetwas. Dennoch entschädigt ihn das weder für die unnütz verbrauchte Zeit noch für den moralischen Schaden, den er im Zusammenhang mit der Erfahrung erlitten hat, nicht gewissenhaft gearbeitet zu haben.

Das Studium muss so organisiert sein, dass sich der Student, um Sinn und Bedeutung des Dargebotenen richtig bewerten zu können, bei der Wissensvermittlung an der Weisheit derjenigen begeistern kann, die den Menschen diese Erkenntnisse gebracht haben, dass er über die Harmonie (und dort, wo sie nicht vorhanden ist, über die Disharmonie) der Dinge, die er erfährt, ins Staunen gerät.

Das zu lehren, ist nicht einfach. Die emotionale Aufnahme von Naturgesetzen und sogar neuer Entdeckungen ändert sich mit dem Lebensalter. Ein reifer Wissenschaftler kann zweifellos Tiefe, Weite und Schönheit der Gedanken besser bewerten; legt man ihm aber schon längst bekannte Fakten dar, so vermag er schwerlich die Freude der erstmaligen Kenntnisnahme zu empfinden, jene naive Begeisterung, die ein Student erlebt, der gerade eben beginnt, die Gesetze des Weltalls kennenzulernen, oder ein junger Forscher, der die ersten erfolgreichen Schritte in seiner Arbeit macht.
Diesen Unterschied bei der Aufnahme ein und derselben Dinge darf ein Pädagoge niemals vergessen.

Eine der notwendigen Bedingungen zum Erlangen wirklich dauerhafter Kenntnisse ist ausreichend Zeit für die Studenten, damit sie die erhaltenen Informationen verarbeiten und durchdenken können.

Übermäßige Hast bei der Ausbildung kann deren Nutzen wesentlich vermindern. Das Ergebnis der Ausbildung wird nicht nach der Menge der vermittelten Informationen beurteilt, sondern nach der Qualität ihrer Verarbeitung, dem Vermögen, sie zu nutzen und nach der Fähigkeit der Studierenden zu weiterer selbständiger Tätigkeit.

Ein ernsthaftes Studium ist eine große, vielseitige und vielfältige Arbeit, die bei weitem nicht immer angenehm, manchmal schwer, aber trotzdem notwendig ist, um eine vollwertige Hochschulbildung zu erhalten. Die Hochschullehrer müssen den Studenten helfen, dieses zu begreifen.

Die Effektivität des Studiums (wie auch jeder anderen Arbeit) hängt wesentlich von seiner Organisation ab. Gelingt es, während der Ausbildung beim Studierenden das Interesse am Studienfach ständig aufrechtzuerhalten und macht ihm der gesamte Ausbildungsprozess Freude (auch wenn größere Schwierigkeiten zu bewältigen sind), so erwirbt er nicht nur bleibende Fachkenntnisse, sondern es entwickelt sich auch ein echtes Arbeitsbedürfnis, so dass ihm auch im weiteren Leben die Arbeit ein Gefühl der Befriedigung und Freude geben kann.

Natürlich ist die Organisation der Arbeit in der genannten Weise eine sehr schwierige Aufgabe. Hier hat die individuelle Kunstfertigkeit des Lehrers, seine persönliche Einstellung zum Lehrberuf und zu seinem Fach eine besondere Bedeutung.

Im Zusammenhang damit muss noch auf einen häufig anzutreffenden Mangel beim Lehren hingewiesen werden, den man sogar bei durchaus qualifizierten Lehrern beobachtet, die ihren Beruf entsprechend ihren persönlichen Neigungen und ihrer Denkweise ausgewählt haben; sie sind von ihrem Beruf begeistert, er ist für sie häufig das Wesentlichste und Wichtigste im Leben, und sie vergessen, wieviel Zeit sie trotz aller ihrer Begabung auf die Beherrschung ihres Berufes verwendet haben; schließlich denken sie nicht daran, dass dem Studenten dieses Fach seinem inneren Wesen nach fremd sein kann und bei ihm kein Interesse weckt, dass er es nur gezwungenermaßen studiert, zum ersten Mal damit konfrontiert wird und wenig Zeit dafür hat.

Darüber sagte A. N. Krylov sehr gut und eindrucksvoll:
"Den Lehrplänen werden Programme zugrunde gelegt. Jedes Programm wird vom Leiter

und den Lehrkräften eines Wissenschaftsbereichs zusammengestellt, d.h. von Spezialisten des entsprechenden Faches, und diese sind immer geneigt, das Fach "in seinem vollen Umfang" darzulegen, als würden sie vergessen, dass sie selbst in ihrer Lehrtätigkeit ihr Fach 15, 20, 25 Jahre lang und oft länger studiert haben, der Student aber für das Studium dieses Faches nur einen geringen Teil des Jahres oder Semesters zur Verfügung hat, da er gleichzeitig auch eine Reihe anderer Fächer studieren muss, die gleichermaßen notwendig sind und in denen er Prüfungen und Testate abzulegen hat."[16, S. 625]

Misst man das Ergebnis eines pädagogischen Prozesses nicht daran, was "in der Vorlesung geboten wurde", sondern daran, was die Studenten dabei gelernt haben, so kann man die an vielen Hochschulen bestehende Tradition, die Vorlesungen erst unmittelbar vor Beginn der Prüfungsperiode zu beenden, schwerlich als zweckmäßig bezeichnen, da sie den Studenten einfach nicht die Zeit und die Möglichkeit gibt, im notwendigen Umfang das in der Vorlesung dargebotene Material zu beherrschen.

Somit erweisen sich die vielen Anstrengungen der Lehrkräfte als vertane Mühe. Es wäre viel nützlicher, zwischen dem Ende der Vorlesungen und dem Beginn der Prüfungsperiode drei bis vier Wochen Zeit zu lassen für intensive Praktika und Seminare sowie zusätzliche Konsultationen für die, die es wünschen.

Dort, wo so verfahren wird, erzielt man gleichbleibende Erfolge bei der Aneignung des Lehrstoffes durch die Studenten.

Das Fehlen des gegenseitigen Verständnisses zwischen Studenten und Lehrkräften ist ein großer Mangel in jedem pädagogischen Prozess. Man muss immer daran denken, dass es nicht genügt, von richtigen Prinzipien auszugehen (genauer, von Prinzipien, die der Lehrer selbst als richtig erachtet; denn es ist selten möglich, objektive Kriterien aufzustellen, nach denen man beurteilen kann, welches Prinzip richtig ist und welches nicht), sondern man muss sie auch in seiner Arbeit, in den Vorlesungen und Seminaren verwirklichen.

Wie das zu tun ist, bedarf einer eingehenden Untersuchung. Für jeden Lektor oder Lehrer (und nicht nur für den Anfänger) ist es von Zeit zu Zeit nützlich, unmittelbar nach einer Lehrveranstaltung ein Dutzend Hefte mit Vorlesungsnachschriften zu nehmen, um zu sehen, was die Studenten von dem vermittelten Stoff festgehalten haben (sich auf das Gedächtnis zu verlassen, wäre nicht ratsam - das Gedächtnis ist unzuverlässig).
Wenn er in zwei bis drei Heften nicht das findet, was er eigentlich sehen wollte, muss er im weiteren versuchen, seine Methodik zu verändern, damit jeder Student das aufzeichnet, was beabsichtigt war.

Jedoch zeigt die Erfahrung, dass dieser Rat praktisch sehr schwer auszuführen ist, denn es gibt kaum einen Hochschullehrer, der nicht davon überzeugt ist, seine Arbeit auf die bestmögliche Weise zu verrichten; deshalb erachten sie es nicht für notwendig, in die Hefte der Studenten zu schauen.
Aber man sollte doch daran denken, dass solche Kontrollen auch deshalb nützlich sind, weil sie dem Lehrer ermöglichen, den Studenten zu helfen, lernen zu lernen, arbeiten zu

lernen, notwendige Aufzeichnungen zu machen (das alles gehört unbedingt zur Pflicht eines jeden Lehrers, was leider oft vergessen wird). Leider findet man kaum Lehrer, die in den nach ihrer Vorlesung oder ihrem Seminar eingesammelten Aufzeichnungen der Studenten Mängel feststellen und die Schuld bei sich und nicht bei den Studenten suchen.

Das ist natürlich sehr bedauerlich. Offensichtlich vergisst man dabei einfach, dass Lehren ein Beruf ist und dass derjenige, der hierbei Erfolg haben will, weder Zeit noch Energie scheuen darf, um ihn zu beherrschen. Wie auch in jedem anderen Beruf gelingt das dem einen leichter, dem anderen schwerer.

Wir erinnern uns an einen der besten Lektoren der Mechanisch-Mathematischen Fakultät der Moskauer Universität der 40er bis 60er Jahre. Seine Vorlesungen zeichneten sich durch eine ungewöhnliche Exaktheit, Klarheit und Gedankentiefe aus, durch eine große Emotionalität, und bei alldem waren sie sehr leicht nachzuschreiben und gut zu begreifen.
In diesem Zusammenhang erzählte er, dass die Studenten am Anfang seiner pädagogischen Tätigkeit darüber empört waren, dass sie seine Vorlesungen weder verstehen noch mitschreiben konnten, und sich mit der Bitte an den Dekan wandten, ihn durch einen anderen Lektor zu ersetzen.

Damals setzte er sich zum Ziel, die Methodik der Vorlesungen zu beherrschen und sie als eine wichtige und ernsthafte Angelegenheit zu betrachten, und er erreichte eine bewundernswerte pädagogische Meisterschaft.
Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass man nicht verzweifeln soll, wenn mit dem Lehren irgendetwas nicht klappt. Man muss nur selbstkritisch sein, die Gründe für den Misserfolg analysieren und versuchen, den richtigen Weg für die Korrektur der vorhandenen Mängel herauszufinden.
Wenn man ernsthafte Anstrengungen unternimmt und geduldig genug ist, so gelingt es in der Regel immer, positive Ergebnisse zu erzielen und schließlich das Lehren zu lernen.

Spricht man von der Arbeit mit Studenten, muss man betonen, dass die Vorlesungen und Seminarveranstaltungen lediglich dann effektiv sind, wenn der Lehrer den Stoff, den er behandelt, frei beherrscht und keinesfalls Spickzettel benutzt.

Es ist nicht uninteressant, dass der Revolutionskonvent in Frankreich bei der Gründung der Ecole Normale im Jahre 1794 den Professoren verbot, während der Vorlesung ihre Notizen zu benutzen [3, S. 195].

Selbstverständlich darf man diese These nicht verabsolutieren:
Im Vorlesungsstoff können sich einzelne Stellen befinden, die umfangreiche und komplizierte Berechnungen erfordern (im weitesten Sinne dieses Wortes) und die aus irgendeinem Grunde unbedingt in der Vorlesung dargelegt werden müssen. Eine solche Situation ist natürlich die Ausnahme und nicht die Regel in mathematischen Vorlesungen. Eine Bestätigung dessen ist der Rat D. Hilberts
"Führe Berechnungen nicht auf einem höheren Niveau als dem der Multiplikationstabel-

le aus" [28], den er H. Weyl gab, als der seine pädagogische Tätigkeit an der Universität begann.

Sind in der Vorlesung dennoch komplizierte Berechnungen notwendig, so ist es für den Lektor vollkommen zulässig, während der Vorlesung seine Aufzeichnungen zu benutzen. Mehr noch, es ist sogar zweckmäßig, denn dadurch wird den Studenten gezeigt, dass sie sich nicht jede vorgetragene Information vollständig einprägen müssen. Aus diesem Grunde darf man nicht vergessen, den Studenten bei den Prüfungen die Benutzung ihrer Konspekte bei den Fragen zu erlauben, die der Lektor in den Vorlesungen mit Hilfe seiner Aufzeichnungen vorgetragen hat.

Man sollte den Studenten die Benutzung ihrer Konspekte bei den Prüfungen allerdings nicht nur in der erwähnten Situation gestatten.

Nach allen gegebenen Ratschlägen kann man schwerlich noch auf folgenden verzichten: Erfolge beim Lehren kann man nicht erreichen, wenn man andere kritisiert, d.h. sowohl die Lehrenden als auch die Studierenden (das machen alle, auch der Autor), sondern durch Selbstkritik. Dieses Prinzip sollte man öfters auch auf anderen Gebieten der menschlichen Tätigkeit anwenden!

1.2 Zu Prüfungen

Die Prüfung ist eine sehr wichtige Etappe im gesamten Ausbildungsprozess und verdient daher besondere Beachtung. Oft vergessen die Lehrkräfte völlig, dass für sie Prüfungen eine alltägliche Arbeit sind; für den Studenten jedoch ist Prüfung ein Ereignis, insbesondere die erste Prüfung am Institut.

Eine Prüfung muss gut vorbereitet werden. Die Studenten müssen im voraus genau darüber informiert werden, worüber man sie prüfen wird und wo sie das benötigte Material finden können. Es ist sehr schlecht, wenn die Studenten die wertvolle Zeit der Prüfungsvorbereitung nicht nur für das Studium nutzen können, sondern Bücher oder irgendwelche anderen Materialien suchen müssen.

In den Prüfungen muss der Prüfende nicht nur herausfinden, was der Student weiß und wie er es beherrscht. Ein erfahrener Prüfer weiß das mitunter schon nach zwei bis drei Minuten.
Dennoch kann in Prüfungen auch bei erfahrenen Lehrkräften der erste Eindruck vom Studenten falsch sein. Deshalb sollte der Prüfende auch immer selbstkritisch sein. Noch schwieriger ist es für ihn, sein Vorurteil über den Prüfling zu korrigieren, das sich bei ihm aufgrund eines mehr oder weniger langen vorherigen (aber oberflächlichen) Kontakts mit diesem Studenten herausgebildet hat.
Wir werden später ein Beispiel für eine solche Situation erörtern.

Es genügt nicht, die Kenntnisse des Studenten in der Prüfung richtig zu bewerten. Der Student muss auch unbedingt verstehen, warum er für seine Antwort gerade die Prüfungsnote erhalten hat.
Wichtig ist, dass der Student durch die Prüfung die Erfahrung macht: Hätte er die

Vorlesungen sorgfältig durchgearbeitet, die hierin dargelegten Ideen verstanden, die Aufgaben in den Seminaren begriffen, kurz, hätte er sich das angeeignet, was gelehrt wurde, so hätte ihm dies seine Prüfungsvorbereitung wesentlich erleichtert und ihm eine erfolgreiche Prüfung garantiert.

Um eine Prüfung richtig durchzuführen, muss der Prüfende vor allem genau wissen, wie ein bestimmtes Problem in den Vorlesungen dargelegt werden ist, die der Student gehört hat; natürlich muss er auch akzeptieren, dass der Prüfling den Stoff nicht entsprechend den Vorlesungen wiedergibt.

Leider hören die Prüfer nicht selten ziemlich formal die Antworten der Studenten auf die Prüfungsfragen ab und denken dabei:
"Du meine Güte, das hat er sicherlich alles abgeschrieben, während er sich vorbereitet hat".

Anschließend stellen sie Zusatzfragen in Form von Aufgaben und erteilen die Prüfungsnote aufgrund der Antwort auf diese Zusatzfragen.
So entsteht bei den Studenten der Eindruck, dass es sich nicht lohnt, viel Zeit und Kraft für die Aneignung des Lehrstoffes zu investieren und sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten, da das Prüfungsergebnis sowieso davon abhängt, wie sie die Zusatzaufgaben lösen.

Wenn man sich aber auf die Prüfung vorbereitet, sollte man die Fragen der Prüfenden herausfinden. Als Folge einer nicht richtig durchgeführten Prüfung gewinnt der Student eine falsche Einstellung für sein weiteres Studium: Sein Selbstvertrauen nimmt ab und seine Nervosität zu.

Es ist wichtig, in den Prüfungen herauszufinden, ob der Student in dem betreffenden Fach nur formale Kenntnisse besitzt.
Das muss aber nicht unbedingt durch irgendwelche Aufgaben geschehen. Es ist viel einfacher, mit elementaren Fragen zu klären, in welchem Grad er die Begriffe beherrscht, über die er spricht, und wie er deren Zusammenhänge zu anderen ihm bekannten Begriffen kennt. Genau das charakterisiert den Wissensstand des Studenten.
Ob er es aber versteht, die ihm in der Prüfung gestellten Aufgaben zu lösen, sagt oft überhaupt nichts aus. (Selbstverständlich geht es hier nicht um Aufgaben, deren algorithmische Lösung behandelt wurde. Es ist klar, dass solche Aufgaben in der Prüfung gestellt werden müssen.)

Es gibt viele Gründe, warum ein Student mit einer solchen Aufgabe nicht zurechtkommt: Er bekommt Prüfungsangst, macht falsche Ansätze, die Zeit verstreicht, er regt sich auf, gerät in Panik usw. Die Menschen sind nun einmal verschieden und denken verschieden, die einen schnell, die anderen langsam.

Das alles bedeutet durchaus nicht, dass während der Prüfung keine zusätzlichen Fragen gestellt werden sollen, einschließlich solcher Aufgaben, die sich von denen unterscheiden, die der Student bisher kennengelernt hat.
Aber diese Fragen und Aufgaben müssen leicht sein in der Hinsicht, dass sie tatsächlich die Möglichkeit bieten, zu klären, wie der Student die Begriffe beherrscht, die er

in der entsprechenden mathematischen Disziplin gelernt hat. Deshalb muss man den mündlichen Zusatzfragen besondere Aufmerksamkeit widmen.

Leider geschieht es nicht selten, dass diese Fragen und Aufgaben vom Prüfenden entsprechend seinen persönlichen Neigungen formuliert werden und auch nicht immer dem entsprechen, was die Studenten während der Prüfungsvorbereitungen tatsächlich gelernt haben, und, was noch schlimmer ist, dass sie nicht exakt formuliert werden.
Infolgedessen bringt eine solche Frage den Studenten aus der Fassung; er versteht vielleicht nicht, was man von ihm will, gerät in Verwirrung, regt sich auf, verliert die Nerven und ist nicht mehr in der Lage, selbst solche Fragen zu beantworten, die er unter anderen Umständen hätte beantworten können (solche Situationen gibt es bei den Aufnahmeprüfungen für Hochschulen).

Ein deutliches Beispiel dafür, wohin eine unklare Zusatzfrage des Prüfers führen kann, hat sich bei einem Staatsexamen im Jahre 1906 an der Petersburger Universität zugetragen.
Ein Professor fragte A. Block, einen damals schon bekannten Dichter: "Woraus setzen sich die Verse zusammen?"
Block wurde verlegen und wusste nicht, was er antworten sollte. Die Antwort sollte lauten: "Aus Strophen", wie ihm der Professor vorwurfsvoll erklärte.

Offensichtlich ist es bei der mündlichen Befragung zweckmäßig, mit einfachen, leichten Fragen zu beginnen; die Antworten darauf (falls der Prüfling sie weiß) helfen ihm, sicher zu werden und bereiten ihn auf ein ruhiges Nachdenken über die weiteren schwereren Fragen vor.

Es ist sehr wichtig, dass Inhalt und Formulierung dieser Fragen vorher durchdacht, niedergeschrieben und im Institut diskutiert werden, unabhängig davon, ob sie theoretisch sind oder den Charakter von Aufgaben haben. Dabei sollten sie unbedingt den Vorlesungen entsprechen, die die Studenten gehört haben. Der Vorrat an geeigneten Fragen sollte hinreichend groß sein: für den Stoff einer zweistündigen Vorlesung 15 bis 20 Fragen und Aufgaben.

Es wäre durchaus nicht schlecht, wenn die Studenten diese Fragen vor der Prüfung kennen würden. Wenn es einen Studenten gibt, der sie alle schon im voraus lösen kann, so verdient er die Note "Sehr gut".

Man sollte bei den Prüfungen das Wissen der Studenten überprüfen und nicht ihr Auffassungsvermögen, ihre Findigkeit und Geschwindigkeit des Denkens. Das bedeutet aber keineswegs, dass man das Augenmerk nicht auf Auffassungsgabe und Phantasie der Studenten richten sollte, denn diese Eigenschaften sind wichtig und notwendig.

Man sollte auch ihrer Entwicklung große Aufmerksamkeit widmen, sie jedoch nicht ausgerechnet während des Examens überprüfen, sondern dort, wo das tatsächlich möglich ist, z.B. während der verschiedenartigsten fakultativen Veranstaltungen und vor allem beim unmittelbaren individuellen Kontakt zwischen Lehrkraft und Studenten.
Die Auffassungsgabe der Studenten, genauer ihre Zielrichtung (jeder Mensch besitzt eine Auffassungsgabe in einer bestimmten Richtung) ist für die Spezialisierung sowie

für die weitere Arbeit des Studenten sehr wichtig.
Die Auffassungsgabe bezeichnet ein bestimmtes Niveau des schöpferischen Verhältnisses zum Studienfach. Der Entwicklung dieser Eigenschaft sollte im Ausbildungsprozess (nicht aber in der Prüfung) große Beachtung geschenkt und genügend Zeit gewidmet werden, da dies sehr wesentlich, aber andererseits durchaus nicht einfach ist.

Es wäre äußerst zweckmäßig, eine Methodik hierfür auszuarbeiten, die auf die verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik zugeschnitten ist.

Zurück zur Prüfung: Man sollte die Bedeutung ihrer ethischen Seite unterstreichen. Humanität, Wohlwollen, Objektivität und Aufmerksamkeit des Prüfenden gegenüber dem Prüfling sind notwendige Bedingungen für eine gute Prüfung.
Erscheinungen von Ungerechtigkeit in der Prüfung, die für den Prüfenden sogar unbemerkt auftreten können, fügen dem Prüfling häufig eine tiefe, lange nicht heilende Wunde zu. Hierzu zwei Beispiele:

Einer meiner Kollegen, heutzutage ein bekannter Mathematiker, erzählte einst, wie er seine erste Prüfung an der Universität abgelegt hat. Als er nach der Schule, wo der Mathematikunterricht nicht auf einem hinreichend hohen Niveau stattfand, an die Universität kam, hatte er in der ersten Zeit gewisse Schwierigkeiten, insbesondere beim Lösen der Aufgaben in analytischer Geometrie.

Dennoch arbeitete er viel im Selbststudium, arbeitete nicht nur die Vorlesungen durch, deren Nachschrift ihm nicht immer gut gelang, sondern las auch Lehrbücher. In der Prüfung wurde er von der Lehrkraft geprüft, die die Übungen geleitet hatte. Mein Bekannter beantwortete alle Prüfungsfragen sowie alle Zusatzfragen erschöpfend und löste die ihm gestellten Aufgaben richtig.
Daraufhin begab sich der Prüfende zum Professor, der die Vorlesung gehalten hatte, und fragte ihn, welche Note er dem Studenten geben solle: "Der Student", meinte er, "beantwortet jetzt alle Fragen und verdient entsprechend seinen Antworten die Note 'Sehr gut', er ist aber im Verlauf des Semesters nicht mit den gestellten Aufgaben zurechtgekommen".

Der Professor fragte, wie der Student geantwortet habe: nach der Vorlesung oder nach Lehrbüchern. "Nach Büchern", erwiderte der Prüfer. "Dann geben sie ihm 'Gut'", sagte der Professor. Das war das einzige "Gut", das mein Kollege während der gesamten Studienzeit an der Universität erhalten hatte. Und obwohl seitdem mehr als dreißig Jahre vergangen sind, ist bis jetzt bei ihm ein Gefühl der Bitterkeit wegen der unverdient erlittenen Kränkung zurückgeblieben.

Der nachdrückliche Wunsch einiger Prüfer, von den Studenten eine Darlegung des Stoffes nur in der Weise zu hören, in der sie selbst ihn in der Vorlesung dargeboten haben, ist überhaupt nicht zu rechtfertigen. Denn wirkliches Wissen ist etwas Invariantes, das nicht von der Methode und Art und Weise der Vorlesung abhängt.

Zwar sollte jeder Lesende davon überzeugt sein, dass er seine Vorlesung gut hält, sogar besser als andere, aber das darf selbstkritisches Verhalten nicht ausschließen und den Sinn für Humor im Verhältnis zur eigenen Vollkommenheit und Unfehlbarkeit nicht

ersticken.
Er muss verstehen, dass ein Student auch anders denken kann, dass für ihn auch eine andere Art der Darlegung, z.B. in den Lehrbüchern, verständlicher, einfacher und überzeugender sein kann.

Der Unterschied zwischen einem Prüfenden und einem Prüfling besteht insbesondere darin, dass der Prüfende verpflichtet ist, den Kenntnisstand eines Studenten im Rahmen des Prüfungsprogramms einzuschätzen, unabhängig davon, nach welcher Methode der Prüfling den Stoff darlegt.
Für den Studenten genügt es, nur eine Darstellungsmethode zu kennen, wenn im Prüfungsprogramm nicht ausdrücklich etwas anderes vereinbart wurde. Es ist schlecht, wenn ein Prüfer mit einer krankhaften Eigenliebe die Prüfungsnote des Studenten senkt, der ihm nicht gemäß seiner Vorlesung antwortet.

Selbstverständlich haben alle gegebenen Empfehlungen nur bei den Prüfungen einen Sinn, die methodisch richtig durchgeführt werden. Insbesondere ist dabei die Spezifik der mathematischen Disziplinen zu berücksichtigen, die darin besteht, dass hier stets prinzipielle, in der Regel schwierige Schwerpunktfragen vorhanden sind.
Durch verschiedene Methoden der Darstellung können die vorhandenen Schwierigkeiten von einer Stelle auf eine andere verlagert werden. Daher kann es geschehen, dass ein gewisses Problem nach der einen Methode ziemlich kompliziert dargelegt wird, da gerade an dieser Stelle eine der oben erwähnten Schwierigkeiten überwunden wird, das gleiche Problem aber nach einer anderen Methode einfach dargestellt wird, da dieselbe Schwierigkeit an eine andere Stelle verlagert worden ist.

Es wäre schlecht, wenn ein Student einzelne Teile der gehörten Vorlesung anhand verschiedener Quellen "studiert" und jedesmal diejenigen auswählt, in denen diese Teile einfacher dargestellt werden. Dabei begreift er aber nicht die innere Logik dieses Faches und bekommt darüber hinaus weder von den hauptsächlichen Ideen, die ihm zugrunde liegen, noch von den Methoden zur Überwindung der prinzipiellen Schwierigkeiten, noch von der Wichtigkeit und Nützlichkeit der im Endergebnis erzielten Resultate eine klare Vorstellung.

Der Prüfende muss also feststellen, ob der Prüfling den inneren logischen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Teilen der Vorlesung versteht und ihre Grundgedanken insgesamt beherrscht. Im entgegengesetzten Fall würde die Prüfung lediglich Oberflächlichkeit und Gerissenheit fördern, deren Schädlichkeit nicht hoch genug eingeschätzt werden kann.

Der geschilderte Fall, der sich in einer Prüfung zugetragen hatte, ist auch ein Beispiel dafür, wie ein Lehrer sein negatives Vorurteil über einen Studenten, das sich bei ihm im Verlaufe eines Semesters herausgebildet hatte, nicht überwinden konnte.

Man kann auf verschiedene Art und Weise versuchen, ähnliche Situationen auszuschließen. Am wichtigsten allerdings ist die Entwicklung der Selbstkritik bei den Prüfenden. Dennoch helfen mitunter auch organisatorische Maßnahmen.

So hat sich z.B. im Moskauer Physikalisch-Technischen Institut im Wissenschaftsbe-

reich für höhere Mathematik auf Initiative der Lehrer ein System herausgebildet (und zwar von selbst und nicht auf dem Dienstweg festgelegt), nach dem die Lehrkraft, die die Seminare in einer Gruppe geleitet hat, die Studenten dieser Gruppe nicht prüft, sondern nur Studenten anderer Gruppen.
Das schließt nicht nur aus, dass der Prüfende durch eine vorgefasste fehlerhafte Meinung beeinflusst wird, sondern ermöglicht der Lehrkraft auch, ihre Meinung über die Kenntnisse des Studenten mit der Einschätzung eines unbefangenen Prüfers zu vergleichen (man muss hoffen, dass er tatsächlich unbefangen ist).

Natürlich kann er, wenn er es für notwendig hält, während der Prüfung die Lehrkraft konsultieren, die während des Semesters das Seminar bei dem zu prüfenden Studenten geleitet hat (diese Lehrkraft muss bei der Prüfung anwesend sein).
Manchmal geben die Lehrkräfte aller Gruppen vor der Prüfung Vorzensuren, aber natürlich nur für den internen Gebrauch im Wissenschaftsbereich. Bei der Analyse der Arbeit einer Lehrkraft werden diese Vorzensuren mit den Prüfungsnoten verglichen.

Ein anderer Fall liegt noch länger zurück. Er ereignete sich in den dreißiger Jahren bei einem anderen Bekannten. Zu jener Zeit war es üblich, dass jedem Studenten, der auf alle Prüfungs- und Zusatzfragen zum Lehrprogramm richtig geantwortet hatte, nur die Note "Gut" erteilt werden konnte.
Um die Note "Sehr gut" erhalten zu können, musste ein Student unbedingt noch eine außerprogrammäßige Frage richtig beantworten.
In einer Prüfung hatte mein Bekannter mit seiner Antwort die Note "Gut" verdient und wurde gefragt, ob er die Prüfung fortsetzen wolle, um eventuell die Note "Sehr gut" erhalten zu können.

Er war einverstanden, erhielt eine Zusatzfrage und gab nach vierzig Minuten die richtige Antwort. Dennoch erteilte ihm der Professor lediglich die Note "Gut" und sagte, dass mein Bekannter zu lange nachgedacht habe, da seiner Meinung nach zur Beantwortung 15 Minuten ausgereicht hätten.

Mir erscheint es, dass die beiden hier beschriebenen Fälle Beispiele dafür sind, wie man eine Prüfung nicht durchführen sollte. Man muss doch die Nervosität der Studenten während der Prüfung berücksichtigen, die ungewohnte Situation und die unterschiedliche Reaktion der verschiedenen Studenten hierauf.
Es gibt nicht wenige, die während der Vorbereitung an der Tafel (genauso verlief auch die Prüfung im zweiten der oben geschilderten Fälle) nervös werden und sich wesentlich weniger sicher und ruhig fühlen, als wenn sie sich am Tisch sitzend auf die Antwort vorbereiten würden. Das gilt auch für die Prüfung.

Man darf in den Prüfungen nicht alle Studenten über einen Kamm scheren, insbesondere bezüglich der Geschwindigkeit, mit der sie die Fragen beantworten sollen - die menschliche Natur ist viel zu verschiedenartig und kompliziert. Nur der Inhalt der Antwort des zu prüfenden Studenten ist die Grundlage für die Bewertung seiner Kenntnisse in der Prüfung.

Natürlich darf man hier, wie so oft im Leben, dieses Prinzip nicht ad absurdum führen. Wenn zum Beispiel ein Student nach dem Studium der Analysis eine Definition der Stetigkeit geben soll und erst eine halbe Stunde lang nachdenken muss, bevor er die richtige Antwort gibt, so zeugt das zweifellos von Unsicherheit und mangelhaften Kenntnissen. Im übrigen kommt so etwas praktisch nicht vor.

Eine richtig durchgeführte Prüfung, die der Student erfolgreich abgelegt hat, bringt ihm das Gefühl der Bestätigung, der Bedeutung und Notwendigkeit der von ihm geleisteten Arbeit und das Bewusstsein, dass seine Arbeit korrekt bewertet wurde.
Damit werden seine Kräfte für die Bewältigung weiterer Schwierigkeiten mobilisiert, das Vertrauen in die eigene Kraft wächst und bringt ihm unvergleichliche Freude. Es ist sehr gut, wenn der Student in der Prüfung spürt, dass die Prüfung auch für den Prüfenden keine formale Kontrolle seiner Kenntnisse ist, sondern ein Ereignis.

Mir hat die Tradition sehr gefallen, die am Talliner Polytechnischen Institut besteht, wo der Prüfer nach der ersten Prüfung, die ein Student abgelegt hat, aufsteht, ihm gratuliert und ihm die Hand gibt - ein sehr schönes und nachahmenswertes Beispiel!

Man sollte immer daran denken, dass die Prüfung nicht nur eine Kontrolle der während der Ausbildung erworbenen Kenntnisse ist sowie der Fähigkeit, sie zu nutzen, sondern auch eine wichtige Etappe in der Ausbildung des Studenten und ein wesentlicher Teil des Lehr- und Erziehungsprozesses.
Eine Lehrkraft kann den Studenten während der Prüfung vieles lehren, wenn sie sich nicht darauf konzentriert herauszufinden, was der Student nicht weiß, sondern umgekehrt, was er weiß , welches Niveau seine Kenntnisse haben.

Eine taktvoll durchgeführte Prüfung kann den Studenten helfen, seine Wissenslücken zu erkennen (natürlich, falls welche existieren) und ähnliche Lücken bei der weiteren Ausbildung zu vermeiden.
Der Student sollte in der Regel nach der Prüfung des Gefühl haben, dass er dem Prüfenden nicht nur erzählt hat, was er gelernt und worüber er nachgedacht hat, sondern dass er auch selbst in der Prüfung etwas wesentlich Neues und Nützliches für sich gelernt hat.

In einzelnen komplizierten Fällen ist ein individuelles Herangehen an den Studenten erforderlich, das seine spezifischen Charakterzüge und sein Temperament berücksichtigt. Eine bestimmte Art der Durchführung einer mündlichen Prüfung kann für den einen Studenten gut sein, sich aber für einen anderen als sehr schlecht erweisen, so dass damit die oben angegebenen Ziele der Prüfung nicht erreicht werden.

Das Dargelegte bezog sich auf mündliche Prüfungen. Man sollte auch etwas zu den schriftlichen Prüfungen sagen.

Die Durchführung schriftlicher Prüfungen ist aus vielen Gründen zweckmäßig. Insbesondere haben die schriftlichen Prüfungen einen objektiveren Charakter, da allen Prüflingen mehr oder minder einheitliche Fragen gestellt werden; auf die niedergeschriebenen Antworten hat die Persönlichkeit des Prüfenden keinen Einfluss, der äußere Eindruck, den der Prüfling auf den Prüfenden gemacht hat, wirkt sich nicht auf die Bewertung dieser Antworten aus usw.

Man sollte beide Arten von Prüfungen verbinden: die mündliche und die schriftliche. Dadurch können den positiven Seiten der schriftlichen Prüfung die Vorzüge der mündlichen hinzugefügt werden, die aus der unmittelbaren Kommunikation zwischen Prüfer und Prüfling hervorgehen.
Ein solches Prüfungssystem ist am Moskauer Physikalisch-Technischen Institut seit seiner Gründung üblich. Die Prüfungen in den mathematischen Disziplinen bestehen hier aus zwei Teilen: einem schriftlichen und einem mündlichen.

Die vierstündige schriftliche Prüfung findet gleichzeitig für alle Studenten eines bestimmten Studienjahres zwei bis drei Tage vor der mündlichen statt (noch zweckmäßiger wäre es, sie am Tage vor der mündlichen Prüfung durchzuführen, wie das in den ersten Jahren an diesem Institut geschah, jedoch treten in diesem Fall große Schwierigkeiten bei der termingerechten Korrektur der Prüfungsarbeiten auf).

Bei dieser Prüfung wird den Studenten ein Komplex von 8 bis 10 Aufgaben gestellt, die jeweils mit einer bestimmten Punktzahl bewertet werden.
Es gibt eine genaue Anweisung für die Bewertung der Lösungen durch die Korrektoren; wofür Punkte abzuziehen und wofür zusätzliche zu gehen sind und in welchem Umfang. Um zum zweiten Teil der Prüfung, d. h. zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, muss ein Student eine bestimmte Mindestpunktzahl erreichen.

Wenn z.B. die Gesamtzahl der Punkte, mit der alle Aufgaben der gegebenen Variante bewertet werden, 40 beträgt, so muss ein Student, um zum zweiten Teil der Prüfung zugelassen zu werden, in der schriftlichen Prüfung mehr als 10 Punkte erreicht haben. Hat er weniger, so wird ihm nach einem Gespräch mit der Lehrkraft zu seiner Arbeit die Note "Ungenügend" erteilt.

Falls der Student mehr als 10 Punkte erreicht hat, bekommt er Prüfungsfragen, und die Prüfung wird fortgesetzt.
Hierbei hat der Prüfer die korrigierte Prüfungsarbeit zur Hand und benutzt die erreichten Ergebnisse für die Erteilung der Prüfungszensur: Hat der Student 11 bis 20 Punkte erreicht, so kann er nicht mehr als die Note "Genügend" erreichen, bei 21 - 30 Punkten nicht besser als "Gut", und nur bei mehr als 31 Punkten hat er Aussicht auf die Note "Sehr gut".

Die langjährige Erfahrung am Moskauer Physikalisch-Technischen Institut zeigt, dass dieses Prüfungssystem zweckmäßig und sinnvoll ist.

1.3 Zum Wesen der Mathematik

Die Frage, was und wie in der Mathematik zu lehren ist, wird gegenwärtig im Zusammenhang mit der gestiegenen Bedeutung der mathematischen Methoden sowohl bei der Lösung konkreter für die Praxis wichtiger Aufgaben als auch bei der Durchführung verschiedenartiger theoretischer Untersuchungen erneut heftig diskutiert.

Die bereits erwähnte XIX. Internationale Konferenz über Volksbildung schätzt die Rolle der Mathematik wie folgt ein:

"... die Mathematik besaß zu allen Zeiten eine unbestrittene kulturelle und praktische Bedeutung und spielte eine wichtige Rolle bei der wissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Entwicklung, ... unsere Epoche schafft Bedingungen für die Entwicklung der Mathematik, wie es sie bisher noch nicht gegeben hat ..."[18, S. 15-21].

Die mathematische Durchdringung von Wissenschaft und Technik ist ein charakteristischer Zug unserer Zeit. Die Menschheit hat begriffen, dass Kenntnisse - zumindest auf dem Gebiet der Naturwissenschaften - nur dann präzisiert werden können, wenn es gelingt, für ihre Beschreibung ein mathematisches Modell zu benutzen.

Mit der wachsenden Vielfalt ihrer Anwendungen setzt die Mathematik gleichzeitig auch ihre eigene Weiterentwicklung intensiv fort, wobei hierfür sowohl äußere als auch innere Faktoren stimulierend wirken.

Ein überzeugendes Beispiel für den Inhaltsreichtum der inneren Entwicklung der Mathematik und den Nutzen, der daraus auch für ihre Anwendung entsteht, ist die Theorie der Kegelschnitte, die durch Mathematiker des alten Griechenlands geschaffen wurde und die 2000 Jahre lang keine Anwendung fand, "bis Kepler sie für die Schaffung der exakten Theorie der Bewegung der Himmelskörper benutzte, und Newton aus dieser Theorie danach die Mechanik schuf, die als Grundlage der gesamten Physik und Technik dient" [16, S. 589]

Als weiteres analoges Beispiel kann die Gruppentheorie gelten, die Ende des 18. Jh. in Schoße der Mathematik selbst entstanden ist (im Jahre 1771 betrachtete J. Lagrange Permutationsgruppen im Zusammenhang mit der Untersuchung algebraischer Gleichungen, die durch Radikale gelöst werden) und erst Ende des 19. Jh. ihre fruchtbare Anwendung in der Kristallographie und später in der theoretischen Physik gefunden hat.

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass die "nichteuklidische Geometrie"" N.I. Lobatschewskis aus mathematischen Überlegungen heraus entstanden ist und eine sehr wichtige Rolle gespielt hat sowohl bei der Entwicklung der Mathematik selbst als auch bei der Evolution unserer erkenntnistheoretischen Vorstellungen über die uns umgebende Welt.

Äußere Einflüsse können die Mathematik auf verschiedene Weise beeinflussen. Das kann einerseits mit der Untersuchung realer Erscheinungen mit mathematischen Methoden zusammenhängen. So führte z.B. die Untersuchung von Problemen aus der Mechanik, der Gesetze der Bewegung materieller Körper, die Berechnung von Flächen und Rauminhalten zur Entstehung der Differential- und Integralrechnung.
Andererseits kommt es vor, dass die Beobachtung irgendeiner Erscheinung zur Formulierung eines rein mathematischen Problems führt, das um seiner selbst willen, ohne Zusammenhang mit dieser Erscheinung, behandelt wird.

So hatten die alten Griechen bemerkt, dass die Höhe der Töne von der Länge der Saiten abhängt; sie beschäftigten sich mit der Untersuchung der Zahlenverhältnisse und nannten diesen Teil der Mathematik Musik.

Gegenwärtig ergeben sich durch die moderne Rechentechnik qualitativ neue Möglichkeiten der Anwendung mathematischer Methoden, und zwar nicht nur dort, wo dies seit langem geschah (z.B. in Mechanik und Physik), sondern auch dort, wo vor 20 bis 30 Jahren noch niemand daran dachte (in der Ökonomie, der Geologie, der Soziologie, der Linguistik, der Biologie, der Medizin, der Steuerung usw.).
Die große Bedeutung, die die Ökonomie in der Entwicklung eines modernen entwickelten Staatswesens spielt, drückte schon vor Jahren der amerikanische Präsident John F. Kennedy bildhaft aus, indem er sagte, wenn heutzutage in Amerika alle Rechenmaschinen stehenblieben, so wäre das eine so große Katastrophe, wie sie sein Land noch niemals je zuvor in ähnlicher Weise erlebt habe.

Mit der Entstehung neuer Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik durch die moderne Rechentechnik haben auch die Methoden der klassischen Mathematik, insbesondere qualitative mathematische Untersuchungen, nichts von ihrer Bedeutung eingebüßt.
Mit Hilfe entsprechender Methoden wird z.B. die richtige Formulierung mathematischer Probleme vorgenommen, die Schaffung neuer mathematischer Modelle, die Selektion des Materials für seine Bearbeitung auf Rechenmaschinen sowie die Entwicklung neuer Rechenmethoden.

Die Frage nach Rolle, Bedeutung und Inhalt der Mathematik gewann in letzter Zeit an Aktualität. Es wurden viele kritische Bemerkungen an die moderne Mathematik und die Mathematiker gerichtet.
Das geht auch aus den Titeln der in der Literatur erschienenen Beiträge hervor: "Ist die Mathematik noch zu retten?" [33], [8], [20], "Physiker contra Mathematiker?" [21], "Mathematiker in eigener Sache" [31] usw.

Man stößt auf Äußerungen, aus denen eine unverkennbare Enttäuschung über die Möglichkeiten spricht, mit Hilfe mathematischer Methoden wesentliche Erfolge bei der Lösung vieler lebenswichtiger Probleme zu erzielen, obwohl das vor kurzem noch als greifbar nahe und möglich erschien.

Das hängt damit zusammen, dass sich die ersten Anwendungen der Rechentechnik für die Lösung konkreter Aufgaben durchaus als sehr erfolgreich erwiesen, z.B. bei ingenieurtechnischen Problemen oder Fragen der Leitung und Planung der Produktion. Das führte zur weitverbreiteten Meinung über die Universalität und Allmacht mathematischer Methoden:
Man muss die Mathematik nur in entsprechender Weise in der Ökonomie, Biologie oder irgendeiner anderen Wissenschaft anwenden, damit sich in diesen automatisch ein großer Fortschritt vollzieht.
Zur Ehre der Mathematiker sei bemerkt, dass sie selbst an der Entstehung dieser sehr naiven Meinung nicht beteiligt waren.

Das weitere Geschehen zeigte, dass in jeder beliebigen Wissenschaft (z.B. in Ökonomie oder Biologie) ein wesentlicher Schritt nach vorn nur mit Hilfe der Anwendung mathematischer Methoden ohne eigene experimentelle und theoretische Forschung nicht möglich ist. Für den Aufbau kompakter mathematischer Modelle in der Ökonomie oder Biologie ist die Kenntnis der ökonomischen bzw. biologischen Gesetze unumgänglich, sind vor allem fundierte ökonomische und biologische Hypothesen notwendig.

Den heutigen Stand der Mathematik kann man mit der erfolgreichen Tätigkeit einer Firma vergleichen, deren Aktien im Wert ständig steigen (die Bedeutung der Mathematik nimmt tatsächlich stetig und ständig zu).
Infolge des Ansteigens der Aktienwerte erhöht sich natürlich die Nachfrage nach ihnen; das führt zu einer Erhöhung ihres Marktwertes, der somit höher ist als ihr tatsächlicher Wert. Etwas ähnliches ist auch mit der Mathematik geschehen:

Im Zusammenhang mit den gewaltigen Erfolgen, die im Ergebnis der Anwendung moderner Rechner bei der Lösung aktueller wissenschaftlicher und ökonomischer Probleme erzielt wurden, haben einige nicht sehr kompetente Spezialisten einen Boom um die Mathematik erzeugt, was zu einer gewissen Fetischisierung der Mathematik geführt hat.

Diese Erfolge wirkten sich auch auf die Situation der Mathematiker aus, die in der Gesellschaft eine wichtigere Rolle zu spielen begannen (natürlich auf Kosten einiger ihrer Kollegen aus anderen Zweigen der Wissenschaft, die bestimmte Positionen verloren, was bei manchen von ihnen eine gewisse Verärgerung ausgelöst hat).

Als die Proportionen wiederhergestellt waren, sich die realen Konturen der Anwendung mathematischer Methoden hinreichend klar abzeichneten und die Fehler deutlich wurden, die bei der Heranbildung von Kadern für die moderne Rechentechnik zugelassen worden waren, tauchte bei einigen Leuten eine gewisse Skepsis im Verhältnis zur Mathematik auf (bei manchen war sie immer vorhanden); es kam zu erneuten Auseinandersetzungen darüber, dass die Mathematik sozusagen keine Wissenschaft, sondern eine Sprache sei (ein Ausspruch, der auf den bekannten Physiker Gibbs zurückgeht), dass die Mathematik mit Mühlsteinen zu vergleichen sei, die an und für sich nichts erzeugen, sondern nur das mahlen, was man auf sie schüttet (Huxley) usw.

Alles das ist nicht neu, wie Gardner sagte [9]: "Niemals hat es der Mathematik an Schmähern gefehlt."

Der Gerechtigkeit halber ist zu bemerken, dass Äußerungen ähnlicher Art nicht nur von außen her an die Mathematik gerichtet wurden, sondern auch sozusagen aus dem "Inneren der Mathematik" kommen.
So kann man z.B. nicht selten von Mathematikern, die sich mit "klassischen Fragen" beschäftigen, hören, dass die Funktionsanalysis keine Wissenschaft, sondern eine Sprache sei, von denen, die an EDV-Anlagen arbeiten, dass die klassische Mathematik Scholastik sei. Das alles sind Äußerungen, die den gleichen Stellenwert haben.

Was auch einzelne Skeptiker sagen mögen, trotzdem wächst die Bedeutung der Mathematik gegenwärtig weiter, und entsprechend nimmt die Anzahl derjenigen zu, die sich mit Mathematik beschäftigen.
So gab es z.B. in den USA [35] laut Statistik im Jahre 1963 42100 Mathematiker. Gemäß dem Büro für Arbeitsstatistik der USA sollte diese Zahl bis 1975 auf 87200 anwachsen, d.h, um 107,8 %, das ist mehr als der für den gleichen Zeitraum prognostizierte Zuwachs an Ingenieuren, Chemikern, Physikern, Biologen und anderen Natur-

wissenschaftlern, z.B. Geowissenschaftlern, Metallurgen usw.

In Kanada werden folgende Empfehlungen für die Zukunft gegeben [6, S. 181]:
"In verschiedenen Bereichen unserer Gesellschaft, darunter an Universitäten, in der Sphäre des Business, in der Industrie, in den entsprechenden Departments der Bundesregierung und der örtlichen Machtorgane ist es notwendig, bestimmte Anstrengungen zu unternehmen, die auf eine effektivere Entwicklung der Mathematik und die Heranbildung von Spezialisten, die die Mathematik beherrschen, gerichtet sind."

Die Lage in Frankreich wird folgendermaßen beschrieben [13, S. 104]: "Man muss ebenfalls zugeben, dass den Arbeitsbedingungen der Mathematiker bisher recht wenig Beachtung geschenkt wurde. Der fünfte Fünfjahresplan sicherte ihnen Hilfe in Form von wissenschaftlichen Sekretären, technischen Hilfskräften und Fachübersetzern zu.
Es wurden ebenfalls Geldmittel für die Beschaffung von Literatur und eine wesentliche Erleichterung bei der Veröffentlichung mathematischer Arbeiten vorgesehen. Die Mathematiker verfügen über beträchtliche Mittel für Auslandsreisen und für Einladungen bedeutender Wissenschaftler aus dem Ausland nach Frankreich."

Weiter heißt es dort:

Gegenwärtig bahnt sich eine Wende zu neuen Sphären der Anwendung mathematischer Methoden an, und zwar durch die Praxiologie, eine Wissenschaft, die eine fundamentale Bedeutung auch bei der Vorbereitung bedeutender sozialer Entscheidungen erhält, die die Zukunft der Menschheit bestimmen: die Planung, und zwar die Planung für die Bebauung von Gebieten, Verkehrswegen, die Modernisierung landwirtschaftlicher Einrichtungen, die Entwicklungspolitik gegenüber rückständigen Ländern usw."
Eine ähnliche Situation ist typisch für alle hoch entwickelten Länder.

Was ist denn nun eigentlich Mathematik?

Die Mathematik - das ist die Wissenschaft spezieller logischer Strukturen, der sogenannten mathematischen Strukturen, bei denen bestimmte Beziehungen zwischen ihren Elementen beschrieben sind. Wir werden nicht versuchen, eine Definition einer mathematischen Struktur zu geben.

Die Formulierung einer solchen Definition aus allgemeiner Sicht würde eine Vertiefung in die Finessen der Philosophie erfordern, die konkrete Definition jedoch, d.h. die Beschreibung aller möglichen mathematischen Strukturen, würde einen ziemlichen Aufwand erfordern - sowohl das eine als auch das andere führte uns zu weit weg vom Grundanliegen dieses Buches.

Deshalb bemerken wir lediglich, dass einige der mathematischen Strukturen direkte Modelle realer Erscheinungen sein können, während andere mit realen Erscheinungen nur über eine Kette von Begriffen und anderen logischen Strukturen verbunden sind.
Diese Kette kann aus vielen Gliedern bestehen. Die mathematischen Strukturen des zweiten Typs sind das Produkt der inneren Entwicklung der Mathematik selbst.

Die Mathematik ist die logisch aufgebaute tiefgehende Gesamtheit der Kenntnisse über mathematische Strukturen mit ihren Problemen; sie hat eigene Entwicklungswege, be-

dingt durch innere und äußere Ursachen und Aufgaben. Die Mathematik ist vor allem um ihrer selbst willen, als Gesamtheit objektiver Wahrheiten von Interesse. Außerdem liefert die Mathematik geeignete und produktive Methoden für die Beschreibung verschiedenartiger Erscheinungen der realen Welt und erfüllt hiermit in diesem Sinne tatsächlich die Funktion einer Sprache.
Diese Rolle der Mathematik hat schon Galilei vortrefflich erkannt, indem er sagte:

"Die Philosophie ist in einem grandiosen Buch niedergeschrieben - dem Universum, das unserem erstaunten Blick geöffnet ist. Aber verstehen kann dieses Buch nur derjenige, der gelernt hat, seine Sprache und Zeichen zu verstehen, in die es gefasst ist. Niedergeschrieben ist es in der Sprache der Mathematik ..." [34, S. 237 - 238].

Schließlich, und auch das ist wichtig, bietet die Mathematik den Menschen leistungsfähige Methoden für die Untersuchung und das Erkennen ihrer Umwelt, Methoden für die Erforschung sowohl theoretischer als auch rein praktischer Probleme.[2] Mit Hilfe der Mathematik kann man viele wichtige und aktuelle technische und ökonomische Probleme lösen, die für die Wissenschaft eines Landes erstrangige Bedeutung haben, was die Mathematik zu einer Produktivkraft machte.

Kurz gesagt ist die Mathematik ein Bereich des menschlichen Wissens, in dem mathematische Strukturen untersucht werden. Die mathematische Sprache ist geeignet zur Beschreibung realer Erscheinungen, während mathematische Methoden aussichtsreiche Methoden für ihre Untersuchung sind.

Wir werden philosophische und linguistische Argumente beiseite lassen und das als Mathematik bezeichnete Gebiet menschlichen Wissens trotzdem als Wissenschaft bezeichnen und nicht als Sprache, unabhängig davon, ob man unter einer Sprache nur die Sprache der Beschreibung oder auch die Sprache einer logischen Schlussfolgerung versteht.
Wir werden uns nicht mit dem philosophischen Inhalt beschäftigen und in das Wesen der Begriffe "mathematische Struktur" und "Mathematik" vertiefen. Das sind fundamentale philosophische Fragen, deren Betrachtung nicht unsere Aufgabe ist.

Wenn trotzdem jemand fortfährt, die Mathematik als Sprache zu betrachten, so möge sich der jedesmal, wenn von der Mathematik als von einer Wissenschaft gesprochen wird, sagen: Sprache, Sprache, Sprache. Damit ändert sich im Verstehen des Nachfolgenden überhaupt nichts, und es beeinflusst den Sinn des Weiteren nicht.

Wir kehren nun zum Platz und zur Rolle der Mathematik im Leben und Wirken der Menschheit zurück und führen ein Zitat aus "Mathematical sciences in Canada" [6, S. 46] an.

"Im 20. Jahrhundert entwickelt sich das Kernstück der mathematischen Wissenschaften, die traditionell sog. reine Mathematik, sehr schnell. Diejenigen, die sich heute dem Studium der reinen Mathematik zuwenden, haben es mit erstaunlichen mathematischen Strukturen zu tun, von denen vor hundert Jahren niemand auch nur zu träumen

[2] Eine populärwissenschaftliche, interessant geschriebene und zugleich tiefgehende Erläuterung der Fragen, die mit dem Wesen der Mathematik zusammenhängen, findet der Leser in [29].

vermochte.
Die Untersuchungen, die von reinen Mathematikern durchgeführt werden, sind nicht selten weit von ihrer praktischen Anwendung entfernt und stellen schöne und elegante abstrakte mathematische Systeme dar. Sie sind eine sich entwickelnde Form der Kunst, deren Ausdrucksmittel nicht Worte, Töne oder Farben sind, sondern Gedanken. Die Ergebnisse der reinen Mathematik werden nicht nach dem unmittelbaren Nutzen bewertet, den sie bringen und der gewöhnlich nicht vorhanden ist, sondern nach ihrer logischen Vollkommenheit und der Meisterschaft ihrer Ausführung.
Sogar wenn einige davon völlig "nutzlos" sind, nehmen sie zweifellos einen Platz unter den Kulturschätzen der Menschheit ein."

Dieses Zitat bestätigt noch einmal den bereits geäußerten Gedanken, dass der Wert der Mathematik nicht nur in ihrer praktischen Anwendung besteht, sondern in ihr selbst als selbständige Wissenschaft.

Die Erweiterung der Nutzung und Anwendung mathematischer Methoden, die auf vielen Gebieten der Wissenschaft und Technik benötigt werden, ist ohne die Entwicklung der Mathematik selbst undenkbar, und unsere Zeit bestätigt das ausdrücklich:
Heutzutage sind wir Augenzeugen der äußerst stürmischen Entwicklung sowohl der Mathematik selbst als auch einer zunehmenden Anwendung mathematischer Methoden in anderen Wissenschaften.

In den Naturwissenschaften hat die Mathematik schon immer eine hervorragende Rolle gespielt und wird dies in zunehmendem Maße auch weiterhin tun, aber jetzt tut sie das auch in den Gesellschafts- und Sozialwissenschaften. Ihre Methoden zur Erforschung und Beschreibung von Erscheinungen, ihre Modellierung durchdringen spürbar alle Wissenschaften, und mit ihrer Hilfe gelingt es oft, einen bedeutenden Fortschritt zu erzielen.

Als Beispiele seien die Entdeckungen des Planeten Neptun, der elektromagnetischen Wellen oder des Positrons genannt, die zunächst mathematisch "auf dem Papier" gemacht wurden und erst danach ihre experimentelle Bestätigung gefunden haben.
Im Zeitalter der stürmischen Entwicklung der Rechentechnik werden bei der mathematischen Modellierung neben den "alten" klassischen Teilgebieten der Mathematik, wie z.B. Algebra, Theorie der Differential-, Integral- und Differenzengleichungen, Wahrscheinlichkeitstheorie, auch neuere benutzt wie mathematische Logik, Funktionalanalysis, Theorie der Maschinensprachen, Informationstheorie, Operationsforschung und viele andere.

Eine der verbreitetsten Methoden zur Untersuchung von Erscheinungen mit mathematischen Methoden ist nach wie vor die Modellierung durch Differentialgleichungen.
Für ihre Aufstellung muss man lediglich lokale Zusammenhänge kennen und benötigt keine Information über die Erscheinung als Ganzes. Das erleichtert das Problem wesentlich, da - bildlich gesprochen - im Kleinen alles linear ist.

So benutzt man z.B. bei der Aufstellung der Schwingungsgleichungen nicht die Tatsache, dass die aus der Gleichgewichtslage gebrachte Seite eine Schwingung ausführt,

sondern nur den elastischen Charakter der Kohäsionskräfte ihrer einzelnen Elemente.
So erhält man eine Gleichung, deren Lösung Schwingungscharakter hat.
Mit ihrer Hilfe kann man eine qualitative und quantitative Analyse der Gesamtbewegung der Seite durchführen, da diese hinreichend gut der real stattfindenden Erscheinung entspricht.

Somit wurde die Information über das Gesamtverhalten eines Objekts in Informationen über sein lokales Verhalten verlagert; auf der Grundlage dieser Information wird das mathematische Modell aufgebaut, das wiederum die Möglichkeit bietet, die Erscheinung in ihrer Gesamtheit zu studieren, ihre Entwicklung vorauszusagen und qualitative Abschätzungen zeitabhängiger Veränderungen zu geben.

Wir erinnern, dass in ähnlicher Weise auch die wellenförmige Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen entdeckt worden ist: von den lokalen Eigenschaften der Erscheinung zu den Gleichungen und von den Gleichungen zur Beschreibung der Gesamterscheinung.
Dennoch ist es nützlich, darauf hinzuweisen, dass es erst nach der experimentellen Bestätigung der tatsächlichen Existenz der elektromagnetischen Schwingungen durch Hertz möglich wurde, die Maxwellschen Gleichungen als ein mathematisches Modell der realen physikalischen Erscheinung zu betrachten.

Die Richtigkeit der physikalischen Interpretation eines mathematischen Modells kann nur durch einen direkten Versuch festgestellt werden. Solange er nicht realisiert worden ist und nicht zu positiven Resultaten geführt hat, ist eine "mathematische Entdeckung" auf einem Gebiet der Physik, d.h. Schlussfolgerungen über die Eigenschaften irgendwelcher realer Erscheinungen, die aufgrund eines mathematischen Modells gezogen werden sind, noch keine physikalische Entdeckung.
Nachdem z.B. der Monopol theoretisch entdeckt wurde, können erst zukünftige Experimente zeigen, ob es sich um eine wirkliche Entdeckung handelt oder nicht.

Bei der Anwendung mathematischer Methoden zur Lösung praktischer Aufgaben entstehen neue mathematische Modelle, die dann oft um ihrer selbst willen untersucht werden, ohne Beziehung zu den konkreten Problemen, aus denen sie hervorgegangen sind. So etwas gab es schon häufig, z.B. bei der Schaffung der Differential- und Integralrechnung aufgrund der Untersuchung von Problemen aus der Mechanik.

Das verläuft auch jetzt so, wenn mathematische Modelle in der Ökonomie, Biologie, Theorie der Steuerungs- und Regelungstechnik und in anderen Wissenschaften geschaffen werden.
Es ist schwierig, neue mathematische Modelle sowie überhaupt die Ergebnisse theoretischer Untersuchungen unmittelbar nachdem sie gefunden worden sind einzuschätzen; die Geschichte kennt nicht wenige Fehler, die bei der Beurteilung neuer Theorien gemacht wurden.

Es genügt, an die abwertende Beurteilung der nichteuklidischen Geometrie Lobatschewskis durch Ostrogradski zu erinnern oder an das feindselige Verhalten Kroneckers zur Mengenlehre Cantors oder daran, dass solche Gebiete wie Topologie und mathematische Logik während ihrer Entstehungsphase von vielen Mathematikern abgelehnt wurden.

Auch hier geht es nicht um den isolierten Standpunkt einzelner Wissenschaftler; z.B. waren in den erwähnten Fällen Ostrogradski und Kronecker die Repräsentanten der Meinung einer großen kompetenten Gruppe von Mathematikern.

Die eigenständige Untersuchung entstehender mathematischer Strukturen und ihrer Verallgemeinerungen ist gesetzmäßig und zwangsläufig. Nur die Zeit kann zeigen, welche dieser Strukturen dauernde Beachtung verdienen und welche nicht.

Nicht unwichtig ist die Bemerkung, dass die theoretischen mathematischen Forschungen, im Gegensatz zu vielen anderen, den Staat praktisch nichts kosten, da für ihre Durchführung außer Feder und Papier (und natürlich jemandes Kopf) nichts benötigt wird.
Die Mathematiker, die theoretische Forschung betreiben, üben normalerweise eine Lehrtätigkeit aus und bringen damit der Gesellschaft einen unmittelbaren und spürbaren Nutzen; dafür erhalten sie eine Bezahlung, die für sie eine sichere Existenzgrundlage darstellt.

Es versteht sich von selbst, dass man sich bei der Untersuchung konkreter Aufgaben nicht auf theoretische Untersuchungen allein beschränken soll; der praktische Wert mathematischer Untersuchungen wird vor allem durch konkrete Resultate bestimmt - nur sie sind das wirkliche Kriterium für ihren Stellenwert.

Dass die Bedeutung der Mathematik für den wissenschaftlichen Fortschritt falsch eingeschätzt, ihr Platz in der Wissenschaft und ihre Rolle bei der Lösung konkreter Aufgaben der Gesellschaft zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht richtig beurteilt wird, liegt oft an falschen Vorstellungen über das Wesen mathematischer Kenntnisse, über den Begriff des mathematischen Modells, über die Mathematik selbst sowie über die mathematischen Methoden.

Oft werden das mathematische Modell und die reale Erscheinung, für deren Beschreibung es in gewisser Weise geeignet ist, nicht sauber voneinander getrennt. Das kann mitunter auch zu einer Verzerrung der Ziele des Mathematikstudiums führen.
In der Tat kommt es dadurch zu äußerst umstrittenen Aussagen sowie einer Flut von Belehrungen in Zeitschriftenartikeln und Vorträgen, die der Frage gewidmet sind, wie man heutzutage die Mathematik lehren sollte, um Fachleute zu erhalten, die die Mathematik erfolgreich zur Lösung angewandter Aufgaben einsetzen können (dazu gehört natürlich auch der vorliegende Aufsatz).

Am Beispiel einer alten Anekdote möchte ich meine Gedanken erläutern.

Ein theoretischer Physiker und ein Mathematiker arbeiteten an ein und demselben Problem, das durch eine gewisse Gleichung beschrieben wird. Eines Tages lief der Mathematiker frohgemut zum Physiker und sagte, er habe heute endlich bewiesen, dass die Gleichung, an der sie arbeiten, eine Lösung hat.

"Mein Lieber", antwortete ihm der Physiker und klopfte ihm herablassend auf die Schulter, "wenn ich auch nur eine Minute daran gezweifelt hätte, dass eine Lösung existiert, hätte ich längst aufgehört, mich mit diesem Problem zu beschäftigen!"

Diese Anekdote zeigt doch, - da sieht man es wieder einmal, was für Einfaltspinsel die Mathematiker sind; sie beschäftigen sich mit fruchtlosen Tüfteleien, die für niemanden außer ihnen selbst unentbehrlich sind. Dennoch, sieht man etwas genauer hin, kann man unschwer erkennen, dass das keineswegs eine Anekdote über einen "armen Tropf" von Mathematiker ist, der sich mit nutzlosen Dingen beschäftigt, sondern eine Anekdote darüber, wie die Menschen einander nicht verstehen wollen (aber auch mitunter vielleicht nicht können); darüber, dass Menschen scheinbar eine Sprache sprechen, tatsächlich aber verschiedene; darüber, dass sie glauben, über ein und dasselbe Problem zu urteilen, tatsächlich aber verschiedene im Sinn haben.

Der tiefere Sinn dieser Anekdote besteht darin, dass der Physiker von einer physikalischen Erscheinung spricht, der Mathematiker aber von seinem mathematischen Modell. Das mathematische Modell einer physikalischen Erscheinung ist nicht mit der Erscheinung identisch und adäquat und kann es nicht sein. Jegliche mathematische Beschreibung einer Erscheinung bedeutet bekanntlich eine logische Idealisierung.

Wir wollen gar nicht von der Genauigkeit dieser Beschreibung sprechen, wenn eine Reihe von Faktoren vernachlässigt wird, die ungeachtet ihrer scheinbaren "Bedeutungslosigkeit" und "Kleinheit" in irgendeiner Weise einen wesentlichen Einfluss auf das Endergebnis haben können. Daher folgt aus der Existenz der Lösung einer physikalischen Aufgabe, die der Physiker im Sinn hatte, nicht die Existenz der Lösung der entsprechenden mathematischen Aufgabe; ihre Existenz kann man nur mit mathematischen Überlegungen beweisen oder widerlegen.

Wenn man aber annimmt, dass aus der Existenz der Lösung einer physikalischen Aufgabe die Existenz der Lösung ihres mathematischen Modells folgt und dass damit das mathematische Modell in diesem Sinne gleichbedeutend mit der physikalischen Erscheinung ist, würde man der Mathematik eine solche Kraft und Allgemeinheit zuschreiben, die sie nicht besitzt.

Diese Situation ändert sich auch durch die Entwicklung und Vervollkommnung der Rechentechnik nicht:
Selbst das "klügste" Bauteil des vollkommensten Rechners enthält nur das mathematische Modell, das ihm eingegeben oder von der Maschine aus anderen ihr eingegebenen mathematischen Modellen hergeleitet wurde, jedoch nicht die physikalische Erscheinung selbst, die durch das betrachtete mathematische Modell beschrieben wird.

Dabei geht es natürlich nicht um die Anwendung der physikalischen Intuition bei der Untersuchung des Modells einer physikalischen Erscheinung mit mathematischen Methoden. Physikalische Intuition und begründete physikalische Schlussfolgerungen sind in diesem Falle unbedingt zweckmäßig und sehr nützlich.
Zum Problem der Intuition kehren wir noch zurück.

Bei der Untersuchung eines mathematischen Modells haben physikalische Überlegungen lediglich hinführenden wahrheitsähnlichen Charakter und keine Beweiskraft. Erst wenn mathematisch bewiesen worden ist, dass die Lösung einer Gleichung existiert, durch die eine physikalische oder eine andere reale Erscheinung modelliert wird, oder dass mindestens numerisch eine Näherung dieser Lösung gefunden werden ist, von der experimentell festgestellt wurde, dass sie der realen Situation entspricht, kann man davon sprechen, dass das mathematische Modell die Erscheinung hinreichend gut beschreibt, so dass man es mit hinreichendem Erfolg zu ihrer Erforschung, der Prognostizierung weiterer Ereignisse, für die Steuerung zu ihr gehöriger Objekte usw. benutzen kann.

Natürlich darf man nicht denken, jede mathematische Lösung einer Aufgabe, die eine reale Erscheinung modelliert, müsse empirisch kontrolliert werden. Wenn bereits festgestellt wurde, dass ein mathematisches Modell einen bestimmten Problemkreis hinreichend gut beschreibt (z.B. die Newtonschen Gesetze die mechanischen Bewegungen), ist natürlich eine experimentelle Überprüfung nicht notwendig.

Die oben angeführte Anekdote spiegelt auch eine weit verbreitete Tendenz wider: Oft werden Mathematiker beschuldigt, zu stark an Existenztheoremen zu hängen, z.B. wenn sie konkrete Aufgaben mit mathematischen Methoden untersuchen oder künftige Physiker, Ingenieure usw. ausbilden. Zu diesem Problem kehren wir noch zurück.

Wir betonen nochmals, dass die Mathematik mathematische Strukturen untersucht; diese Strukturen können jedoch mathematische Modelle realer physikalischer, chemischer, biologischer, ökonomischer, sozialer und anderer Erscheinungen sein. Wenn wir also diese Modelle untersuchen, untersuchen wir damit die genannten realen Erscheinungen, d.h., mit Hilfe mathematischer Modelle bietet die Mathematik die Möglichkeit, die in unserer Umwelt ablaufenden Prozesse zu untersuchen.

Hierin liegt die überaus große erkenntnistheoretische Bedeutung der Mathematik. Dabei sollte man nicht vergessen, dass ein und dasselbe mathematische Modell völlig verschiedenen realen Erscheinungen entsprechen kann.

So werden z.B. mit Hilfe der Laplaceschen Gleichung die stationäre Wärmeverteilung im festen Körper, das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten, die Kumulationserscheinung usw. beschrieben.

Diese Eigenschaft mathematischer Strukturen verdeutlicht die Abstraktheit der Mathematik. Aus diesem Grunde sagte H. Poincaré scharfsinnig: "Mathematik - das ist die Kunst, verschiedenen Dingen eine einheitliche Bezeichnung zu geben."

Man könnte ergänzen, nicht nur "eine einheitliche Bezeichnung geben", sondern auch verschiedene Dinge mit ein und derselben Methode zu untersuchen.

Somit sehen wir, dass der Satz "die Mathematik untersucht mathematische Strukturen" in Wirklichkeit nicht so einfach ist, wie dies auf den ersten Blick erscheint.

Die Abstraktheit der Mathematik schafft bestimmte Schwierigkeiten bei ihrer Anwendung auf konkrete Probleme; gleichzeitig gibt die Abstraktheit der Mathematik ihre Kraft, Universalität und Allgemeinheit. Man darf die Mathematik und ihre Anwendung nicht in einen Topf werfen.

Die Mathematik selbst ist eine abstrakte Wissenschaft, ihre Anwendungen jedoch können sehr konkret sein. Dabei sollte man stets daran denken, dass man nicht die Anwendungen der Mathematik lehren darf, ohne vorher die Mathematik selbst gelehrt zu haben.

Spricht man von der Mathematik und von mathematischen Modellen, so sollte man auch einige Worte zur mathematischen Modellierung sagen. An anderer Stelle wurde bereits betont, dass man für den Aufbau eines mathematischen Modells nicht nur mathematische, sondern auch fundierte Spezialkenntnisse besitzen muss.
Dennoch darf man nicht glauben, dass man für eine erfolgreiche mathematische Modellierung unbedingt das Wesen des zu modellierenden physikalischen, biologischen, ökonomischen oder anderen Prozesses verstehen und die Ursachen kennen muss, die diesen Prozess auslösen.

Möglicherweise ist dies überhaupt noch nicht bekannt; wenn jedoch bestimmte Zusammenhänge verschiedener Teilaspekte der Erscheinung bekannt sind, ist es trotzdem möglich, ein mathematisches Modell zu schaffen, das die notwendigen äußeren Aspekte der Erscheinung hinreichend gut wiedergibt und somit die Möglichkeit bietet, sie zu untersuchen und ihre weitere Entwicklung zu prognostizieren.[3]
Darin kommt die gesamte Abstraktheit der Mathematik zum Ausdruck. Wir betonen noch einmal: Es ist falsch, wenn man eine Erscheinung und ihr mathematisches Modell in einen Topf wirft.

Durch den intensiven Prozess der Mathematisierung unseres Wissens und die breite Anwendung von Rechnern zur Untersuchung verschiedenartiger Erscheinungen wird gegenwärtig die mathematische Modellierung zu einem der aktuellsten und grundlegendsten Aspekte in der Entwicklung der modernen Wissenschaft.
Die große und komplizierte Frage der mathematischen Modellierung, die Bindeglied zwischen der Mathematik und den anderen Wissenschaften ist, verdient natürlich eine besondere Betrachtung im Leben der heutigen Gesellschaft.[4] Wir werden diese Frage erst im Abschnitt 2.9. streifen, wenn wir die mit dem Lehren der Mathematik verbundenen Probleme betrachten.

Ein Charakteristikum mathematischer Wahrheiten ist ihr absoluter und ewiger Charakter, folglich ändern sie sich nicht und können sich auch nicht mit der Entwicklung unseres Erkenntnisstandes ändern.
So erfuhren unsere Vorstellungen über die uns umgebende Welt und die sie steuernden Gesetzmäßigkeiten in den letzten 2000 Jahren wesentliche Veränderungen, aber z.B. der Satz des Pythagoras blieb und wird immer das bleiben, was er schon im alten Griechenland war.

Das schließt natürlich nicht aus, dass viele mathematische Begriffe und Behauptungen im Verlauf ihrer historischen Entwicklung nicht sofort ihre logisch vollendete Form erhielten und erhalten, das schließt insbesondere auch nicht aus, dass während des Entwicklungsprozesses ein und dieselben in der Mathematik untersuchten Objekte von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet werden; das wiederum kann zur Entde-

[3] Das gilt gleichermaßen auch für nichtmathematische Modelle, deren Betrachtung jedoch nicht unsere Aufgabe ist.
[4] Siehe dazu auch [19].

ckung neuer Eigenschaften dieser Objekte führen, sie mit neuem Inhalt erfüllen und dadurch unsere Vorstellungen über ihre Bedeutung oft wesentlich verändern.

1.4 Zum Mathematikstudium

Bei der Mathematikausbildung ergibt sich angesichts der gegenwärtigen Mathematisierung der Wissenschaft für den künftigen Anwender die grundlegende Frage: "Was muss man in Mathematik am Institut vor allem lernen?"

Dabei kann aber die Zeit, die jetzt für die Mathematikausbildung an den Hochschulen zur Verfügung steht, künftig nicht wesentlich erweitert werden. Auch auf die folgende Frage muss man unbedingt eingehen:
Welcher Art soll die Wechselbeziehung zwischen der diskreten und der stetigen Mathematik sein? In welchem Verhältnis sollen sie im Grundkurs Mathematik vertreten sein? Wie und auf welcher Grundlage soll man numerische Methoden erlernen? Wo ist ihr Platz im Grundkurs Mathematik? Wo und wie soll man die Studenten den Umgang mit der Rechentechnik lehren?

Natürlich ist für verschiedene Berufe ein unterschiedliches Niveau mathematischer Kenntnisse erforderlich. Wir wollen einige allgemeine Aspekte der Mathematikausbildung der Studenten betrachten, die nach Abschluss ihres Studiums bei der Arbeit auf ihrem Fachgebiet mathematische Methoden anwenden, und zwar zur Lösung konkreter Probleme und für theoretische Untersuchungen, die unmittelbar mit der Praxis zusammenhängen (Mechanik, Physik, Technik, Biologie, Ökonomie, Steuerung usw.).

Übrigens sind die im weiteren formulierten allgemeinen Thesen über das Lehren der Mathematik auch auf die Ausbildung von Diplommathematikern anwendbar, weil sich gut durchdachte Unterrichtsmethodik und Inhalt der Lehrprogramme immer bewähren.

Zweifellos gibt es bei der Heranbildung von Mathematikern noch eine Reihe zusätzlicher Besonderheiten, weil ein Mensch, der etwas von Mathematik weiß, noch kein Mathematiker ist.
Um Mathematiker zu sein, d.h. um in der Mathematik schöpferisch arbeiten zu können, muss man eine bestimmte Begabung haben, muss die Mathematik lieben, ein inneres Bedürfnis verspüren, über mathematische Probleme nachzudenken und ein natürliches Interesse an ihrer Lösung haben.

Alles das zusammen führt dazu, dass ein solcher Mensch nicht zur Beschäftigung mit der Mathematik gezwungen werden muss. Der interessierte Leser kann sich darüber in der Broschüre von A. N. Kolmogorov "Über den Beruf des Mathematikers" [15] informieren.

Man darf nicht vergessen, dass die gegenseitige Verständigung zwischen denen, die in ihrer Tätigkeit reale Erscheinungen mit mathematischen Methoden untersuchen, und den sog. "reinen" Mathematikern sehr schwierig ist.
Dort, wo eine solche Verständigung gelingt, beginnt eine fruchtbare Zusammenarbeit zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen. Sind für die betrachteten Anwen-

dungsfälle bereits fertige mathematische Begriffe und mathematische Grundmodelle vorhanden, so ist die gegenseitige Verständigung einfach.

Das Problem ist jedoch dort sehr kompliziert, wo selbst elementare mathematische Modelle für einfachste Erscheinungen fehlen und man sie erst noch schaffen muss, wie heutzutage bei einer Reihe von Problemen der Ökonomie, Biologie, Medizin, Soziologie, Linguistik. Ständig entstehen neue Schwierigkeiten, wenn man Mathematik lehrt, auch in Hinblick auf die innermathematische Entwicklung, obwohl natürlich in der Regel zwischen der Entstehung neuer Ideen und ihrer Einführung in die Lehre viel Zeit vergeht.

Zuerst ist die Frage zu beantworten: Welche spezifischen Probleme stehen gegenwärtig vor den technischen Hochschulen und anderen Fachhochschulen angesichts der allgemeinen Mathematisierung der Wissenschaft? Womit hängt die Entstehung dieser neuen Aufgaben unmittelbar zusammen?

Der Grund für ihre Entstehung waren veränderte Anforderungen, die an die mathematische Ausbildung der Studenten ingenieurtechnischer, ökonomischer, landwirtschaftlicher und einer Reihe anderer Fachrichtungen gestellt wurden.
Diese Veränderungen wurden erstens durch die breite Einführung der EDV in verschiedene Bereiche der menschlichen Tätigkeit hervorgerufen, zweitens durch das hohe Entwicklungstempo von Wissenschaft und Technik, das es praktisch unmöglich macht, an den Hochschulen "Spezialisten" auszubilden, die für alle Probleme, denen sie im Arbeitsprozess begegnen, fertige Rezepte haben.

Recht oft sind schon zum Zeitpunkt des Studienabschlusses die Methoden veraltet, die gelehrt wurden. Unter den neuen Arbeitsbedingungen muss jedoch jeder Spezialist in der Lage sein, sich weiterzubilden, um seine Qualifikation auf dem für die Arbeit erforderlichen Niveau zu halten.
Es wäre natürlich schlecht, wenn ein Student während seiner Ausbildung an der Hochschule nicht die konkreten Kenntnisse in Mathematik erhielte und nicht die richtigen Methoden und Sätze kennenlernen würde, die er für die Arbeit in seinem Fach unbedingt benötigt.

Dennoch wäre dies nicht so schlimm, wenn er dabei die notwendige mathematische Bildung und ein festes Wissensfundament sowie die Fähigkeit erworben hat, sich selbständig weiterzubilden. Wenn er die Grundbegriffe der von ihm benötigten Theorie beherrscht, wird er sich leicht zusätzliche Kenntnisse aneignen können, wenn es erforderlich ist. Wenn jemand erkennt, dass das, was er studiert, für seine spätere Tätigkeit unbedingt erforderlich ist, und wenn er auf dieses Studium gut vorbereitet ist, wird er leicht und interessiert lernen, das Wissen buchstäblich in sich "aufsaugen".
Eine gute Vorbereitung bedeutet, dass die schon vorhandenen Kenntnisse auf einer festen Grundlage basieren, dass das Denkvermögen gut entwickelt wurde und die Allgemeinbildung in den Grundlagenfächern ein hinreichend hohes Niveau hat.

Eine der wertvollsten Eigenschaften eines Fachmannes ist die Fähigkeit, schöpferisch an die Lösung der vor ihm stehenden Probleme in seiner Arbeit heranzugehen.
Was mathematische Methoden betrifft, so bedeutet das z.B., ein mathematisches Mo-

dell aufzubauen (wenn noch keines vorhanden ist) und zu untersuchen. Das Lehren von Methoden für die schöpferische Lösung von Aufgaben, die natürlich vorrangig vom Profil der zukünftigen Fachrichtung des Studenten bestimmt werden, sowie die Anerziehung einer schöpferischen Initiative überhaupt, müssen einen wesentlichen Platz in der Ausbildung einnehmen, was sie auch tun.

Dennoch ist es unbedingt notwendig, diese Orientierung in der Ausbildung nicht nur in den speziellen, sondern auch in den allgemeinen Disziplinen zu verstärken. Dies ist erst möglich, wenn man der Verbesserung der Allgemeinbildung in den Grundlagenfächern eine hinreichend große Aufmerksamkeit widmet.

Die Einführung der Rechentechnik in unser Leben erforderte eine stärkere Praxisorientierung des Mathematikkurses an den technischen, ökonomischen, landwirtschaftlichen und vielen anderen speziellen Hochschulen; Absolventen dieser Hochschulen benötigen deshalb Grundkenntnisse auf solchen Gebieten der Mathematik wie mathematische Logik, Graphentheorie, Algorithmentheorie, Informationstheorie; dadurch können stochastische Methoden, Methoden der Spieltheorie, der Optimierung, der mathematischen Modellierung (nicht nur deterministische, sondern auch stochastische Methoden) usw. wesentlich vielseitiger und effektiver genutzt werden.

Wegen der Bedeutung dieser Methoden wurden an vielen Spezialhochschulen die entsprechenden Komplexe in die Mathematikprogramme aufgenommen; ihr Studium ist jedoch nur auf der Basis fundierter allgemein-mathematischer Kenntnisse möglich.

Somit führen die Veränderungen, die gegenwärtig und in nächster Zeit in der Organisation der mathematischen Ausbildung an den Hochschulen, insbesondere den ingenieurtechnischen, stattfinden und noch stattfinden werden, zu der Notwendigkeit, die angewandten Richtungen des Mathematikkurses zu verstärken und das Niveau des mathematischen Grundwissens zu erhöhen.

Zur erfolgreichen Bewältigung dieses Problems ist vor allem eine kontinuierliche mathematische Qualifizierung des Spezialisten notwendig, die auch nach Abschluss des Hochschulstudiums fortgesetzt wird.
An der Hochschule selbst sollte sie sich nicht auf die Grundkurse in Mathematik, Programmieren und Rechentechnik beschränken, sondern sie sollte auch bei der Spezialausbildung der Studenten fortgesetzt werden.

Wir wollen versuchen, die Hauptziele der mathematischen Ausbildung, z.B. an den technischen Hochschulen, zu formulieren. Die Absolventen solcher Hochschulen sollten entsprechend ihrem Fachgebiet in der Lage sein:

a) mathematische Modelle aufzubauen;
b) mathematische Aufgaben zu formulieren;
c) die geeignete Methode und den Algorithmus zur Lösung einer Aufgabe auszuwählen;
d) numerische Methoden unter Einsatz moderner Rechentechnik zur Lösung von Aufgaben anzuwenden;
e) qualitative mathematische Untersuchungsmethoden anzuwenden;
f) auf der Grundlage einer durchgeführten mathematischen Analyse praktische Emp-

fehlungen zu geben.

Natürlich können die mathematischen Wissenschaftsbereiche allein die gestellten Ziele nicht erreichen; man wird dies nur bei einer gut koordinierten Zusammenarbeit zwischen den mathematischen und den anderen Fachbereichen bewältigen können.

Die hier formulierten Prinzipien wirken sich bereits auf die Mathematikausbildung an den Hochschulen aus, wo recht wesentliche Veränderungen erkennbar sind, die einen günstigen Einfluss auf die mathematische Ausbildung der Ingenieure haben.
Der Mathematikkurs wurde gegenüber früher stärker auf Anwendung ausgerichtet. Die Studenten werden in der Anwendung der Rechentechnik zur numerischen Lösung von Aufgaben ausgebildet. In das Lehrprogramm wurden die dafür notwendigen Teilgebiete aufgenommen, wie z. B. Elemente der Theorie der Differenzensysteme, Elemente der mathematischen Logik usw.

Die Ausbildung in numerischen Methoden stützt sich in der Regel auf eine gründlichere allgemein-mathematische Ausbildung als früher. Es findet eine Synthese von Analysis und linearer Algebra statt, die Rolle von Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischer Statistik ist gewachsen, was darin zum Ausdruck kommt, dass ihnen eine höhere Stundenzahl im Grundkurs Mathematik zugeteilt wurde.
Überhaupt ist ein höheres allgemeines Niveau der Mathematikausbildung festzustellen.

Als nützliche methodische Neuerungen kann man die Betrachtung des Funktionsbegriffes als Zuordnung und nicht mit Hilfe des Begriffs der Variablen hervorheben (das beginnt schon im Schulunterricht und bringt eine qualitativ neue Betrachtung der Funktion zum Ausdruck), und in der Analysis das Studium der Methode der Abspaltung des Hauptteils der Funktion als grundlegende Methode zur Untersuchung ihrer lokalen Eigenschaften.
Somit findet allmählich eine kontinuierliche Veränderung der Lehrprogramme für Mathematik an den technischen Hochschulen statt. Dieses dosierte Vorgehen ist vernünftig, da die traditionelle Lehre der Mathematik zweifellos viel Wertvolles und Nützliches enthält.

Das Studium einer Reihe qualitativer analytischer und geometrischer Methoden bewährt sich und wird sich auch noch viele Jahre lang bewähren. Andererseits stellt die Anwendung von Computern überall neue Anforderungen an die Fachleute, die an unseren technischen und anderen Hochschulen ausgebildet werden. Diese Anforderungen müssen schon heute bei der Ausbildung der Studenten berücksichtigt werden.

Trotzdem ist es auf jeden Fall noch zu früh, ernsthaft von einer Ablösung der stetigen (klassischen) Mathematik durch die diskrete Mathematik zu sprechen: Ungeachtet der großen Möglichkeiten moderner Rechner haben die stetigen mathematischen Modelle bei der Untersuchung angewandter Aufgaben gegenwärtig eine sehr große Bedeutung.

Das Argument der Anhänger der diskreten Mathematik, dass man der diskreten Mathematik den Vorzug geben sollte, weil die reale Welt diskret ist und die diskrete Mathematik diese besser beschreibt als die stetige, ist nicht seriös.
Sowohl das stetige als auch das diskrete mathematische Modell sind der realen Er-

scheinung nicht adäquat. Welches besser zur Anwendung geeignet ist, hängt von dem konkreten Problem ab, von den Fragen, auf die man eine Antwort finden muss, und vom Entwicklungsstand der mathematischen Methoden, die angewendet werden können.

Insgesamt muss man eingestehen, dass wir noch nicht wissen, wie die Mathematik bei den gegenwärtigen Anforderungen am rationellsten und effektivsten zu lehren ist, weil darüber noch nicht genügend Erfahrungen vorhanden und die erforderlichen Lehrbücher noch nicht geschrieben sind.
Letzteres ist besonders wichtig, denn so detailliert ein Programm auch fixiert sein mag, es kann nicht in allen seinen Teilen effektiv realisiert werden, wenn kein ihm entsprechendes Lehrbuch veröffentlicht ist.

Gleichzeitig haben verschiedene Hochschulen schon interessante Erfahrungen mit der Modernisierung der Mathematikausbildung gesammelt; deshalb sind das Studium dieser Erfahrungen, die Ausarbeitung allgemeiner Empfehlungen und Programme auf dieser Grundlage, die Herausgabe der notwendigen Bücher, sowohl Lehrbücher als auch Aufgabensammlungen, wichtig und vordringlich.

Bei der Einführung neuer Ideen in die Mathematikausbildung ist es unerlässlich, dass die Studierenden diese Ideen aktiv anwenden und bei der Lösung von Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades benutzen können, angefangen von formalen Übungen und algorithmischen Aufgaben bis zu Aufgaben, für deren Lösung eine bestimmte Kreativität erforderlich ist; dabei muss die Auswahl sowohl dieser als auch jener Aufgaben hinreichend groß sein.

Man muss den Studenten lehren, so zu denken und zu arbeiten, dass er in der Lage ist, Begriffe und Ideen aktiv anzuwenden, die er während seiner Ausbildung kennengelernt hat; das geht aber am besten, wenn er die Aufgaben selbständig löst.
Auch wenn dies scheinbar Selbstverständlichkeiten sind, muss man darüber schreiben, so wie man seine Meinung darüber äußert, wie etwas zu verändern ist. Bei den gegenwärtigen Veränderungen der Rolle der Mathematik wird erst die Zeit zeigen, welcher Weg für das Mathematikstudium an den Hochschulen besser, ökonomischer, rationeller und effektiver ist.

Ungeachtet aller dieser Schwierigkeiten sollte man versuchen, einige allgemeine Grundprinzipien für das Mathematikstudium in der Gegenwart zu formulieren und sie für bestimmte Hochschuleinrichtungen zu detaillieren. (Denn es ist hinreichend bekannt, dass man ein allgemeines Grundprinzip sehr unterschiedlich interpretieren kann.

Zum Beispiel ist jetzt die Meinung weit verbreitet, dass es notwendig sei, die Ausbildung an den Universitäten und technischen Hochschulen anzunähern. Und was für Interpretationen gibt es da nicht alles!

Nicht selten interpretieren ein theoretischer Wissenschaftler und ein praktisch tätiger Ingenieur diesen Satz fast diametral.)

Zum Abschluss der Erörterungen über die Besonderheiten des Mathematikstudiums wollen wir seine Bedeutung bei der Gestaltung der gesamten menschlichen Kultur hervorheben und damit die große Verantwortung, die die Mathematiker in dieser Hinsicht der Gesellschaft gegenüber tragen.

Wir wollen diese Seite des Mathematikstudiums eingehender erläutern. Es vervollkommnet die allgemeine Kultur des Denkens, diszipliniert sie, lehrt den Menschen, logisch zu urteilen, erzieht ihn zur Genauigkeit und Stichhaltigkeit in der Argumentation.
Die Mathematik lehrt, die Forschung nicht mit unnötigen Details zu belasten, die keinen Einfluss auf das Wesen der Sache haben und umgekehrt, nichts zu vernachlässigen, was für das zu untersuchende Problem von prinzipieller Bedeutung ist. Das alles gibt die Möglichkeit, die verschiedensten neuen Probleme effektiv zu untersuchen und zu durchdenken.

Die Züge des Mathematikstudiums, die die menschliche Kultur beeinflussen, wurden sehr plastisch von V. Servais in seinem Vortrag auf der XIX. Internationalen Konferenz über Volksbildung formuliert:

"Von den intellektuellen Eigenschaften, die durch die Mathematik entwickelt werden, werden am häufigsten diejenigen erwähnt, die sich auf das logische Denken beziehen: deduktive Betrachtung, Fähigkeit zur Abstraktion, zur Verallgemeinerung, Spezialisierung, die Fähigkeit zu denken, zu analysieren, zu kritisieren.
Die Übung in der Mathematik fördert das Erlangen rationeller Denkqualitäten und ihrer Ausdrucksformen: Ordnung, Genauigkeit, Klarheit, Knappheit.
Sie fordert Phantasie und Intuition. Sie gibt das Gefühl für Objektivität, intellektuelle Ehrlichkeit, Freude am Forschen und bewirkt somit die Herausbildung des wissenschaftlichen Verstandes.

Das Studium der Mathematik erfordert ständige Anspannung, Aufmerksamkeit, die Fähigkeit sich zu konzentrieren; es erfordert Ausdauer und festigt gute Gewohnheiten. Somit erfüllt die Mathematik eine wichtige Rolle sowohl bei der Entwicklung des Intellekts als auch bei der Charakterbildung."

2 Grundlegende Thesen über das Lehren der Mathematik

2.1 Zum Inhalt mathematischer Kurse

Es ist bemerkenswert, dass schon allein die Auffassung vom Fach Mathematik, das heißt sein Inhalt und die Akzente, die hierbei gesetzt werden, Meinungsverschiedenheiten hervorruft. Wir wollen von folgender grundlegender These ausgehen.

Erste These: Im Mathematikkurs werden mathematische Modelle untersucht.

Die Untersuchungsobjekte in der Mathematik sind nicht reale Erscheinungen, sondern abstrakte logische Objekte und Strukturen, bei denen eine Reihe von Beziehungen zwischen ihren Elementen bestehen (wir wollen sie wie bisher mathematische Strukturen nennen).
Es sind keine dimensionsbehafteten Größen, sondern dimensionslose.

Solche mathematischen Strukturen können direkte mathematische Modelle realer Erscheinungen sein. In den Mathematikkursen an den Spezialhochschulen soll man in erster Linie natürlich auch mathematische Strukturen studieren, die eine reale Erscheinung modellieren (wie z.B. die Ableitung die Geschwindigkeit eines Massepunktes, das Integral die Arbeit, die Elemente der mathematischen Logik die Arbeitsschritte der Rechner usw.).

Mathematische Strukturen jedoch, die keine direkten Modelle einer realen Erscheinung sind, soll man nur soweit berücksichtigen, als sie ein geeigneter mathematischer Apparat zur Untersuchung mathematischer Modelle realer Erscheinungen sind.

Die Mathematik betrachtet quantitative und qualitative Beziehungen zwischen den Elementen mathematischer Modelle.
Für die Mathematik ist nicht die Natur der zu betrachtenden Objekte wichtig, sondern nur die zwischen ihnen vorhandenen Beziehungen. Ein und dasselbe mathematische Modell kann (mit bestimmter Näherung) die Eigenschaften realer Erscheinungen beschreiben, die ihrem konkreten Inhalt nach weit voneinander entfernt sind. So kann z.B. die Formel

$$f = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

sowohl das Newtonsche Massenanziehungsgesetz als auch das Coulombsche Gesetz der Elektrostatik beschreiben.
Die Größen von Masse und Ladung, die in diesen Gesetzen auftreten, werden in unterschiedlichen Einheiten gemessen und haben unterschiedliche Dimensionen.

In der Formel jedoch werden die diesen Gesetzen entsprechenden mathematischen Operationen (im vorliegenden Fall Multiplikation und Division) entsprechend den Rechenregeln durchgeführt, unabhängig davon, welchen physikalischen Größen sie zugeordnet sind.

Aus der These folgt, dass die Bedeutung eines mathematischen Begriffes nicht vom

Gebiet seiner weiteren Anwendung abhängt, insbesondere nicht von der Fachrichtung des Studenten, dem dieser Begriff erklärt wird.

Hierbei sollte man den Unterschied zwischen Bedeutung und Inhalt eines mathematischen Begriffs und der konkreten Erscheinung betonen, zu deren Beschreibung er benutzt wird, wie z.B. den Unterschied zwischen dem Begriff der Ableitung einer Vektorfunktion und dem Begriff der Geschwindigkeit einer mechanischen Bewegung, dem Integralbegriff und dem Begriff der Arbeit usw.

Beim Studium der Mathematik muss vor allem das Wesen der Mathematik bei der Erklärung der wirklichen Bedeutung der untersuchten mathematischen Begriffe zum Ausdruck kommen.

Diese Forderung, die vielen unbestreitbar erscheint, wird trotzdem oft angefochten. Einige sind der Ansicht, dass diejenigen, die sich nicht für die Mathematik an sich, sondern nur für die mathematischen Methoden zur Untersuchung konkreter Aufgaben, d.h. die Anwendungen der Mathematik interessieren, eine spezielle Mathematik studieren sollten, aber nicht die Mathematik, mit der sich die Mathematiker beschäftigen.

Eine solche spezielle Mathematik gibt es jedoch nicht. Die Bedeutung des Satzes des Pythagoras oder der Lagrangeschen Formel des Restgliedes hängt nicht davon ab, wer sie benutzt: ein Ingenieur oder ein Wissenschaftler, ein Anwender oder ein reiner Mathematiker.

Von der zukünftigen Fachrichtung des Studenten hängen lediglich Inhalt und Umfang des Mathematikkurses ab, die Auswahl der mathematischen Begriffe und Fakten, die allgemeine und detaillierte Darstellung und die Wahl der Beispiele, die die Anwendung der mathematischen Begriffe und Methoden bei der Lösung angewandter Aufgaben veranschaulichen.

Prinzipiell kann man die Anwendung der Mathematik anstelle der Mathematik selbst lehren, indem man von der zukünftigen Fachrichtung ausgeht. Man kann z.B. künftigen Mechanikern sagen, dass die Ableitung die mechanische Geschwindigkeit ist, dass das Integral die Arbeit der Kraft ist, und nur dimensionsbehaftete Größen betrachten. Das ist natürlich keine Mathematik.
Das kann in seltenen Einzelfällen zweckmäßig sein. Grundsätzlich ist jedoch eine solche Ausbildungsmethode abzulehnen: Hat jemand einen solchen spezialisierten Kursus absolviert, so wird er hilflos sein, wenn er auf einen nicht von ihm erlernten konkreten Sachverhalt trifft, obwohl zu dessen Untersuchung im wesentlichen der gleiche mathematische Apparat erforderlich ist, den er an konkreten Beispielen kennengelernt hat.

Er wird hilflos sein, weil er die allgemeine Betrachtungsweise nicht gelernt und man ihn die Untersuchung im wesentlichen der gleiche mathematische Apparat erforderlich ist, den er an konkreten Beispielen kennengelernt hat.
Er wird hilflos sein, weil er die allgemeine Betrachtungsweise nicht gelernt und man ihn die Untersuchung abstrakter mathematischer Modelle nicht gelehrt hat.

Gegenwärtig beobachtet man eine ausgeprägte Tendenz zur Annäherung der Ausbildung an Universitäten und technischen Hochschulen auf der Grundlage einer allgemeineren Betrachtungsweise der Studienfächer. Beim heutigen Entwicklungstempo von Wissenschaft und Technik wäre es wegen der schnellen Veränderung der konkreten Arbeitsbedingungen nachteilig, Schmalspurspezialisten auszubilden.

Zur Zeit steigt der Bedarf an Fachleuten, die sich bei einer Veränderung der Situation schnell orientieren können und in der Lage sind, die stattfindenden Veränderungen richtig zu beurteilen, die ihrerseits zu qualitativ völlig neuen Erscheinungen führen können. Zu solchen Qualitäten führt nicht eine eng spezialisierte Ausbildung, sondern nur eine breite Allgemeinausbildung im Stil der Universitäten.
Schon jetzt studiert man an vielen führenden Hochschulen Mathematik (aber ebenso Physik, Chemie u.a.) nach einem einheitlichen Programm, das nicht von der künftigen Fachrichtung der Studenten (z.B. Physik, Chemie, Aerodynamik usw.) abhängt.

Häufig wird auch die Meinung vertreten, dass man die Ingenieure die Mathematik nach besonderen Methoden lehren sollte und nicht so, wie das die Mathematiker tun. Dieses Problem werden wir später behandeln, wenn wir uns mit der Methodik des Lehrens beschäftigen.

Das hier Gesagte setzt zweifellos voraus, dass man die mathematischen Begriffe studiert, um sie zur Untersuchung technischer oder anderer Probleme mittels mathematischer Methoden benutzen zu können. In diesem Falle ist es oft nicht nötig, sich mit dem Inhalt des betreffenden mathematischen Begriffs auseinanderzusetzen, und man kann sich darauf beschränken, ihn intuitiv kennenzulernen.
Mit diesem Problem werden wir uns später eingehender beschäftigen, wenn wir die fünfte These erörtern.

2.2 Zur Einheit der Mathematik

Zweite These: Die Mathematik ist eine Einheit.

Diese These bedeutet, dass die Mathematik nicht in reine und angewandte Mathematik eingeteilt werden kann, dass die reine und angewandte Mathematik Teile eines einzigen unteilbaren Ganzen - der Mathematik - sind und dass man diese Teile nicht streng voneinander trennen kann.

Manche sehen als Beweis für die Existenz einer reinen und einer angewandten Mathematik die Tatsache an, dass es an den Hochschulen sowohl einfach mathematische (oder mechanisch-mathematische, physikalisch-mathematische) Fakultäten sowie Fakultäten der angewandten (oder numerischen) Mathematik gibt. Das ist natürlich sehr formal.
Hier geht es nicht um eine Einteilung der Mathematik, sondern um die Einteilung der Menschen, die sich für die verschiedenen Richtungen der mathematischen Forschung und für die unterschiedlichen Anwendungen der mathematischen Resultate außerhalb und auch innerhalb der Mathematik interessieren.

Um die Gültigkeit der These über die Einheit der Mathematik zu bestätigen, muss man vor allem die Fragen beantworten: Was ist reine Mathematik? Was ist angewandte Mathematik? Die Antworten hierauf sind durchaus nicht so einfach.

Unter reiner Mathematik versteht man gewöhnlich den Teil der Mathematik, bei dem mathematische Modelle um ihrer selbst willen untersucht werden, ohne Zusammenhang mit realen (physikalischen, chemischen, biologischen, ökonomischen, sozialen oder sonstigen) Erscheinungen, die durch sie modelliert werden können.
Dabei werden in der reinen Mathematik die (qualitativen und quantitativen) Untersuchungen mit hinreichender Allgemeinheit durchgeführt; es werden nicht einzelne konkrete Objekte untersucht, sondern bestimmte Klassen von Objekten, und es werden allgemeine Methoden und Algorithmen zur Lösung eines weiten Problemkreises erarbeitet.

In der angewandten Mathematik dagegen werden mathematische Modelle untersucht, die reale Erscheinungen modellieren.
Wie schon im ersten Kapitel bemerkt, beginnt die mathematische Untersuchung realer Objekte mit ihrer mathematischen Modellierung, d.h. ihrer Beschreibung durch mathematische Modelle, die teils bereits bekannt sind, teils speziell für diesen Fall geschaffen werden.

Im Ergebnis der Untersuchung dieser Modelle entstehen oft andere mathematische Modelle, die dann ihrerseits wieder untersucht werden, so dass sich die angewandte Mathematik auf diese Weise als ein ergiebiger Quell neuer mathematischer Modelle erweist.
Die Untersuchungen in der angewandten Mathematik führen oftmals zur Herausbildung neuer wissenschaftlicher Richtungen. Auf diese Weise bildeten sich in der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts die Informationstheorie, die Operationsforschung, die Theorie stochastischer Prozesse, die Theorie der optimalen Steuerung, die mathematische Ökonomie usw. als selbständige Zweige der Mathematik heraus.

Das Ziel der Untersuchung mathematischer Modelle in der angewandten Mathematik ist letztlich die Erforschung der entsprechenden konkreten realen Erscheinung. Deshalb nimmt in der angewandten Mathematik neben der Erforschung allgemeiner Methoden die Erforschung spezieller Methoden, die unmittelbar mit dem vorliegenden realen Objekt zusammenhängen, einen breiten Raum ein.
Sowohl beim Aufstellen des Modells für eine entsprechende Erscheinung als auch bei seiner Untersuchung gelingt es natürlich nicht immer, die in der Mathematik vorhandenen Ressourcen zu nutzen.

Selbst wenn schon Methoden zur Untersuchung des benötigten mathematischen Modells vorhanden sind, können sich diese als untauglich erweisen, um die erforderlichen Resultate zu erhalten. Dann muss man neue spezielle Methoden zur Lösung der gestellten Probleme entwickeln, die oft eine Quelle neuer allgemeiner Methoden in der Mathematik sind.

Die mathematische Beschreibung konkreter Erscheinungen, Prozesse, Ereignisse usw. erhält man auf der Grundlage numerischer Kennwerte. Deshalb spielen in der angewandten Mathematik die numerischen Methoden eine große Rolle.

Daher ist es angebracht, beliebige numerische Methoden zur angewandten Mathematik zu zählen und nicht zur reinen, unabhängig davon, ob sie sich auf die Lösung eines konkreten Problems oder eines hinreichend breiten Problemkreises beziehen (z.B. die numerische Lösung der Laplacegleichung ohne Betrachtung des konkreten Objekts, für das sie das mathematische Modell sein kann). Die numerischen Methoden gewinnen immer mehr an Bedeutung, und zwar nicht nur für Untersuchungen in der angewandten, sondern auch in der reinen Mathematik, was im weiteren am Beispiel der Lösung des Vierfarbenproblems gezeigt werden soll.

Geht man zur numerischen Lösung eines Problems über, das zuvor qualitativ untersucht worden ist, so muss man oft mit der erneuten mathematischen Modellierung des Objekts beginnen, da das mathematische Modell, das für die qualitative Untersuchung des Objekts geeignet war, für die numerische Berechnung häufig ungeeignet ist.
Somit sind die numerischen Methoden wie auch die gesamte angewandte Mathematik eine der Quellen neuer mathematischer Modelle und Methoden.

Viele mathematische Modelle und Untersuchungsmethoden, die im Schoße der angewandten Mathematik entstanden sind, werden um ihrer selbst willen oder zur Untersuchung mathematischer Modelle ohne Beziehung zu realen Objekten erforscht und somit zum Bestandteil der reinen Mathematik.

Man kann zweifellos auch die umgekehrte Erscheinung beobachten, wobei die Methoden, die in der reinen Mathematik entstanden sind, in der angewandten Mathematik ihre effektive Nutzung finden und darüber hinaus unmittelbar zur Lösung angewandter Aufgaben eingesetzt werden. Darüber wurde bereits im ersten Kapitel eingehend gesprochen.

All das zeigt schon die untrennbare Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik. Dennoch ist diese Verbindung in Wirklichkeit wesentlicher und tiefer - sie durchdringt das gesamte Wesen der mathematischen Methoden. In der reinen Mathematik ist das Kriterium für die Bewertung der erzielten Resultate ihre logische Vollkommenheit, die Herstellung neuer Zusammenhänge zwischen äußerlich entfernten Begriffen, die Existenz von Methoden, mit denen man neue Probleme lösen kann, kurz der Fortschritt bei der Erforschung mathematischer Strukturen.

In der angewandten Mathematik aber ist das Kriterium für den Wert eines Resultates seine praktische Bedeutung, die Möglichkeit seiner Anwendung auf eine bestimmte Erscheinung und die Prognose ihres weiteren Zustandes usw.
Es geht darum, dass die Ziele sowohl der reinen als auch der angewandten Mathematik auf ein und dieselbe Weise zu erreichen sind - durch die Untersuchung abstrakter mathematischer Strukturen. Das ist auch die Grundlage für die Einheit der Mathematik.

Wir wollen die Einheitlichkeit der Methoden in der Mathematik am Beispiel numerischer Methoden eingehender analysieren. Überzeugend ist die Aussage S. L. Sobolevs im Vorwort zu seiner Monographie "Einführung in die Theorie der Kubaturformeln" [32] über mathematische Methoden, die scheinbar weit von Anwendungen entfernt sind:

"... die Theorie der numerischen Mathematik kann man sich jetzt ebensowenig ohne Banachräume wie ohne Rechner vorstellen."

Die numerische Lösung einer Aufgabe ist gewöhnlich die Abschlussetappe ihrer Lösung nach der festgelegten qualitativen Untersuchung. Wir wollen das am Beispiel der Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen erklären, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist (es wurde von A. N. Tichonov angeführt). Wir betrachten zwei Fragen.

Erstens: Wann existiert eine eindeutige Lösung eines solchen Systems?
Zweitens: Falls sie existiert, wie findet man sie?

Die Theorie gibt auf beide Fragen eine erschöpfende Antwort: Eine eindeutige Lösung existiert dann und nur dann, wenn die Determinante des Systems ungleich null ist. Zur Lösung des Systems hat man in diesem Fall die Cramersche Regel zur Verfügung.

Man könnte meinen, dass damit das Problem auch vom numerischen Standpunkt aus gelöst ist. Das ist jedoch nicht so. Aus der Sicht numerischer Methoden ist die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung nicht sinnvoll - von einem bestimmten Standpunkt aus ist sie immer nicht eindeutig.

Tatsächlich werden in der Praxis die Koeffizienten eines Systems immer mit einem gewissen Grad der Genauigkeit vorgegeben, und deshalb kann man auch nur von einem gewissen Grad der Genauigkeit einer Lösung sprechen:
Jede beliebige Auswahl von Zahlenwerten, die dem System mit der angegebenen Genauigkeit genügen, ist eine Näherungslösung. Somit stoßen wir bei der numerischen Lösung des Problems auf eine völlig neue, kompliziertere Fragestellung, im Grunde genommen auf die Aufgabe, Ungleichungen und nicht Gleichungen zu lösen.
Außerdem erweist es sich als unzweckmäßig, die Cramersche Regel zur Bestimmung der Unbekannten zu benutzen.

Wenn die Determinante des Systems "annähernd null" ist (z.B. wenn sich ihr Wert null im Bereich der zulässigen Genauigkeitsangabe der Koeffizienten befindet), so kann das Ergebnis der numerischen Berechnung nach der Cramerschen Regel keine praktische Bedeutung haben, und die Aufgabenstellung erfordert eine weitere Präzisierung.

Auch dann, wenn die Determinante des Systems ungleich null ist im Rahmen der Genauigkeit der Werte ihrer Koeffizienten, ist die Cramersche Regel für die numerische Lösung des Systems ungeeignet, da die Anzahl der bei dieser Lösungsmethode notwendigen Operationen mit der Zunahme der Anzahl der Unbekannten sehr schnell anwächst, so dass der Umfang der notwendigen Rechnungen praktisch nicht realisierbar ist.

An diesem Beispiel erkennt man, dass aus angewandter Sicht die theoretische Lösung eines Problems lediglich die objektive Gewissheit für die Existenz einer Lösung gibt.
Das ist sehr wichtig; wenn man weiß, dass eine Lösung existiert, kann man mit einiger Aussicht auf Erfolg versuchen, die korrekte Aufgabenstellung für die numerische Lösung der Gleichungen und die Methoden zu ihrer praktischen Bestimmung zu finden.
Im betrachteten Fall erweisen sich hierfür die Methoden der Eliminierung der Variablen

oder der sukzessiven Approximation als zweckmäßig.

Wenn wir wissen, dass das Objekt, das wir untersuchen, auch tatsächlich existiert, erleichtert uns das die Wahl der Richtung, in der wir suchen müssen. Wenn wir immer solche Kenntnisse hätten, könnten wir uns viele überflüssige Anstrengungen, vertane Zeit und fruchtlose Arbeit ersparen:

Es genügt, an die Dreiteilung des Winkels oder die Quadratur des Kreises mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu erinnern (sie werden noch heute von denen fortgesetzt, die Existenzsätze und Sätze über die Nichtexistenz nicht anerkennen) oder die Versuche zur Schaffung eines perpetuum mobile.

Man sollte aber nicht vergessen, dass auch auf einem falschen Weg nützliche und wichtige Entdeckungen gemacht werden können. So entstand die Chemie aus den fruchtlosen Versuchen der Alchimisten, den Stein der Weisen zu finden, und viele Entdeckungen in der Astronomie verdanken wir den Astrologen, die die Himmelskörper untersucht haben, um Horoskope aufzustellen.

Trotzdem bleibt unumstritten, dass eine richtige Aufgabenstellung wesentlich zur zweckmäßigen Auswahl der Bemühungen zu ihrer Erforschung beiträgt und somit eine wichtige Etappe auf dem Wege zu ihrer Lösung darstellt.

So führen Fragen der numerischen Lösung zu neuen Problemen, zu neuen Aufgabenstellungen, und es zeigt sich, dass die qualitativen theoretischen Untersuchungen (insbesondere die Existenzsätze) helfen, sie richtig zu formulieren. In der "reinen" Mathematik tauchen neue, für numerische Methoden charakteristische Aufgaben auf:
die Suche nach "geeigneteren" Verfahren zur numerischen Lösung, die Frage der Stabilität des angewandten numerischen Verfahrens usw. Selbst die klassische Form mathematischer Theoreme "wenn ..., dann ..." gewinnt nach den Worten A. N. Tichonovs einen neuen Aspekt. Es kommen nur die "wenn" in Betracht, die man in der Praxis überprüfen und mit der notwendigen Genauigkeit vergeben kann.

Es ist eine ideale Situation, wenn die numerischen Methoden zur Lösung einer Aufgabe benutzt werden, nachdem diese theoretisch hinreichend vollständig untersucht worden ist. Diese ist jedoch nicht immer vorhanden.
Oft werden numerische Methoden zur Lösung von Aufgaben benutzt, für die die Existenz einer Lösung nicht bewiesen und außerdem die Korrektheit der angewandten numerischen Methoden nicht begründet werden sind. Die mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Lösung solcher Aufgaben auftreten, werden von niemandem bezweifelt und bedürfen natürlich sehr sorgfältiger Untersuchungen.

Die enge Wechselwirkung zwischen reiner und angewandter Mathematik zeigt sich auch darin, dass die moderne Rechentechnik den Mathematikern prinzipiell neue Möglichkeiten nicht nur für die Gewinnung der numerischen Lösungen von Aufgaben, sondern auch für die Untersuchung theoretischer Probleme in die Hand gibt.

Ein bemerkenswertes Beispiel für die Anwendung moderner Rechner in der reinen Mathematik ist die Lösung des bekannten Vierfarbenproblems, das schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts aufgestellt werden war.

Dieses Problem besteht in folgendem: Eine Ebene wird durch endlich viele glatte Kurven, die sich nicht selbst schneiden sollen, in Gebiete eingeteilt (die man als "Länder" bezeichnet).
Zwei verschiedene dieser Kurven schneiden sich nicht, oder sie haben gemeinsame Endpunkte; ein Endpunkt einer Kurve ist auch Endpunkt mindestens einer anderen Kurve. Dann wird jede solche Kurve zur Grenze zwischen genau zwei Ländern, die man als benachbart bezeichnet. Die Gesamtheit der endlich vielen Länder, die man auf diese Weise erhält, nennt man "Karte".

Das Problem bestand darin, die minimale Anzahl verschiedener Farben zu finden, mit denen eine beliebige Karte so gefärbt werden kann, dass jeweils zwei benachbarte Länder verschiedene Farben haben (eine solche Färbung der Karte bezeichnet man als regulär).

Ende des 19. Jahrhunderts wurde festgestellt, dass für das Färben einer beliebigen Karte fünf verschiedene Farben genügen. Aber kann man das vielleicht auch mit vier Farben erreichen?

Trotz der zahlreichen Versuche, diese Frage (eben das Vierfarbenproblem) zu beantworten, konnte bis in die jüngste Zeit keine Antwort gefunden werden.
Wegen seiner einfachen Formulierung zog dieses Problem ständig die Aufmerksamkeit nicht nur der Berufsmathematiker, sondern auch zahlreicher Mathematikliebhaber auf sich. Vor wenigen Jahren wurde eine Mitteilung veröffentlicht, dass das Vierfarbenproblem von den amerikanischen Mathematikern K. Appel und W. Haken [2, S. 711 - 712] gelöst worden ist.

Sie haben die Lösung dieses Problems im wesentlichen durch die Benutzung moderner Computer erreicht. Auf den ersten Blick erscheint das unerwartet und sogar unwahrscheinlich: der Beweis eines rein geometrischen Theorems mit Hilfe von Berechnungen auf einem Rechner!

Zur Erläuterung wollen wir bemerken, dass man dem Vierfarbenproblem einen arithmetischen Charakter geben kann, was man, nebenbei gesagt, schon im 19. Jahrhundert begriffen hatte. Dazu formuliert man das Vierfarbenproblem in der Sprache der Graphen, indem man von der vorliegenden Karte zu ihrem sogenannten dualen Graph übergeht. Man wählt pro Land einen Punkt (Knotenpunkt) aus; diese Punkte sind untereinander dann und nur dann durch Kurven (Kanten) verbunden, wenn sie benachbarte Länder repräsentieren.

Damit kann man das Problem der regulären Färbung der Karte durch das Problem der regulären Färbung der Knotenpunkte des erhaltenen planaren Graphen ersetzen, d.h. einer Färbung, bei der zwei Knotenpunkte ein und derselben Kante verschiedene Farben haben.

Schon im 19. Jh. begann man, den Zusammenhang des Vierfarbenproblems mit den arithmetischen Eigenschaften eines Graphen zu untersuchen. Erste numerische Abschät-

zungen dazu stammen von dem englischen Mathematiker P. Heawood (1890).[5]
Im Verlauf der folgenden fast hundert Jahre wurden dank der Bemühungen vieler Mathematiker wesentliche Fortschritte erzielt, aber erst 1976 hat man eine positive Lösung des gesamten Problems erreicht.

Aber wie wurde nun mit Hilfe von Computern bewiesen, dass für die reguläre Färbung der Knotenpunkte der betrachteten planaren Graphen vier Farben ausreichen?
Mit einem Computer kann man nämlich nur für einen konkreten Graphen, wenn auch mit einer großen Anzahl von Knoten und Kanten, Berechnungen durchführen. Wie kann man hiervon auf das Färben eines beliebigen endlichen planaren Graphen schließen?

Dafür ist es notwendig, logische Schlüsse zu ziehen, die Rechner (jedenfalls gegenwärtig) in dem erforderlichen Maße nicht ziehen können. Denn ein Computer ist nicht allmächtig:
Er kann z.B. die Summe einer bestimmten Reihe mit der für uns erforderlichen Genauigkeit berechnen, aber er kann die Konvergenz der Reihe nicht untersuchen. Derartige Tätigkeiten sind zur Zeit noch ein Vorrecht des Menschen.

Natürlich wurde das Vierfarbenproblem nicht ausschließlich durch Berechnungen gelöst. Es wurde zunächst auf gewisse Teilfragen reduziert, die rein arithmetischen Charakter hatten und die man durch konkrete numerische Berechnungen beantworten konnte.
Diese Berechnungen erforderten eine sehr große Anzahl von Rechengängen, die die Kräfte eines Menschen übersteigen, der nicht über moderne Rechentechnik verfügt. Daher ist es nicht verwunderlich, dass man das Vierfarbenproblem auf diese Weise nicht lösen konnte, solange es die moderne Rechentechnik nicht gab.

An diesem Beispiel erkennt man deutlich, wie der Anwendungsbereich von Computern immer größer wird: Mit ihrer Hilfe werden immer vielfältigere Probleme gelöst, die in den verschiedenen Gebieten der menschlichen Tätigkeit auftauchen.

Da die Mathematik eine Einheit ist, muss man die reine Mathematik und die numerischen Methoden auch als einheitliches Ganzes studieren, denn die theoretischen qualitativen Untersuchungen und die numerischen Methoden sind eng miteinander verflochten, wobei die numerischen Methoden auf verschiedenen theoretischen Untersuchungen basieren und in der Sprache abstrakter mathematischer Begriffe dargestellt werden.
Aus all diesen Gründen ist es vernünftig, numerische Methoden auf der Grundlage des theoretischen Kurses kennenzulernen und den theoretischen Kurs nicht durch ein Sortiment einzelner Rezepte zur numerischen Lösung von Aufgaben zu ersetzen.

Dabei muss man sich vor allem darüber im klaren sein, was es bedeutet, gleichzeitig reine und angewandte Mathematik zu studieren, was die angewandte Richtung des Kurses der höheren Mathematik bedeutet und worin das konkrete Ziel der Mathematikausbildung an einer technischen Hochschule besteht.

Um dieses Ziel zu erreichen, empfiehlt es sich normalerweise, in den Mathematikkurs verschiedenartige numerische Methoden zur Lösung bestimmter Aufgaben einzubrin-

[5] Ausführlich kann man sich über die arithmetischen Beziehungen, die mit dem Vierfarbenproblem zusammenhängen, in [30] und [36] informieren.

gen. wie Näherungsberechnungen von Funktionswerten, Näherungsmethoden zur Berechnung von Integralen, zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, zur Berechnung der inversen Matrizen, der Eigenwerte von Matrizen usw.
Dabei ist es wünschenswert, auch Methoden zur Abschätzung der Fehler der erhaltenen Resultate anzugeben - denn wenn man nicht wenigstens eine grobe Abschätzung der Abweichung der Näherungslösung von der wirklichen geben kann, sind entsprechende Methoden nicht interessant.

Mitunter muss man sich mit der Tatsache abfinden, dass es nicht gelingt, den dringend benötigten Fehler zu bestimmen, sondern dass man ihn für einige konkrete Fälle nur experimentell überprüfen kann. Das ist natürlich kein Beweis für die erhaltene Abschätzung, ist aber mitunter für den angegebenen praktischen Zweck ausreichend.

Alle diese Empfehlungen sind zweifellos begründet:
Das Studium einzelner numerischer Methoden ist ein unveräußerlicher Teil der allgemeinmathematischen Ausbildung, und es ist nicht nur für die künftigen Anwender der Mathematik nützlich, sondern auch für diejenigen, die theoretische Probleme auf verschiedenen Gebieten des menschlichen Wissens einschließlich der reinen Mathematik bearbeiten werden. Aber es ist ein Irrtum, anzunehmen, dass damit allein das Problem der angewandten Ausrichtung der mathematischen Ausbildung gelöst wäre.

Dies ist tatsächlich viel komplizierter. Zum Beispiel ist es für einen Geodäten kaum hilfreich, die Methoden zu beherrschen, nach denen die Tabellen zusammengestellt worden sind, die er täglich verwendet, oder jene Prinzipien zu kennen, die den von ihm benutzten Rechnerprogrammen zugrunde liegen.
Für ihn ist die Fähigkeit wesentlich wichtiger, eine mathematische Aufgabe aufzustellen, ihre notwendige vorläufige qualitative Analyse durchzuführen und sie für die numerische Lösung vorzubereiten; aber der Lösungsprozess an sich ist für ihn nicht von Interesse.

Das grundlegende Kriterium für die Bewertung der Ausbildung zukünftiger "angewandter" Mathematiker und ihrer richtigen Orientierung ist die Fähigkeit, mathematische Methoden so zur Lösung praktischer Aufgaben zu benutzen, dass man die erforderlichen Resultate erhält.
Hierfür reicht die Beherrschung einzelner numerischer Methoden nicht aus (obwohl das zweifellos notwendig ist), sondern es ist eine umfangreiche Kenntnis der Mathematik im ganzen erforderlich, da alle konkreten Aufgaben zum größten Teil mit Hilfe und auf der Grundlage vorhandener Theorien, einschließlich der mathematischen, gelöst werden.

Um das angegebene Ziel zu erreichen, hat die Stoffauswahl für das Studium eine vorrangige Bedeutung. Es wäre nicht richtig, sich im wesentlichen auf das Studium der Methoden zu beschränken, die den numerischen Methoden verwandt sind oder eng mit ihnen zusammenhängen. Hier denkt man z.B. an die Methoden der Abspaltung des Hauptteils einer Funktion in der Umgebung eines Punktes oder die Methoden zur Approximation von Funktionen in ihrer Gesamtheit, die Anwendung dieser Methoden zur Lösung verschiedener Aufgaben, die qualitative Untersuchungen betreffen und auch den Charakter von Abschätzungen haben.

Zweifellos ist das Studium entsprechender Methoden notwendig und sehr nützlich und sollte deshalb ein integrierter Bestandteil der Mathematikausbildung sein. Es ist schädlich, diesen in gewissem Sinne konkreten Teil zu vernachlässigen und bereits in den Anfängen der Mathematikausbildung verfrühte Begeisterung für allgemeine Theorien zu wecken.

Dennoch ist es notwendig, zur Darstellung allgemeiner Gesichtspunkte an den zu untersuchenden Objekten überzugehen; das gibt einem modernen Spezialisten den nötigen Weitblick, die notwendige mathematische Kultur. Man muss nur daran denken, dass allgemeine Theorien dann besonders nützlich sind, wenn es spezielle Anwendungsbeispiele dafür gibt, die für die Studierenden gut bekannt und leicht verständlich sind.

Aus all dem Gesagten folgt, dass die Tendenz zur Praxis in der Mathematikausbildung vor allem hinreichenden Reichtum und Vielfalt des Lehrstoffes erfordert.

Im Zusammenhang damit sollte man unbedingt noch einmal auf die Gefahr hinweisen, den Stoff "in vollem Umfang" darzulegen. Man muss immer daran denken, dass es nicht darum geht, dem Studierenden ein Dutzend Sätze mitzuteilen, sondern vor allem darum, dass er die Grundbegriffe aktiv beherrscht.
Man sollte der Ausbildung den Satz zugrunde legen, dass "es besser ist, weniger, aber gut zu wissen", statt eine oberflächliche Kenntnis vieler Probleme zu haben. Auf der Grundlage solider Kenntnisse kann eine mathematische Kultur anerzogen werden, die für die richtige Anwendung des mathematischen Apparates notwendig ist.
Man muss das für den Studenten notwendige Minimum an Wissen immer sorgfältig auswählen, und erst, wenn er den Stoff beherrscht, kann man eine Erweiterung des Lehrstoffes zulassen. Sind solide Kenntnisse vorhanden, kann man auf ihrer Grundlage leicht die weitere Ausbildung in der notwendigen Richtung fortsetzen. In diesem Fall geht die Qualität leicht in Quantität über.

Sehr wichtig sind die philosophisch-ideologischen Grundlagen des Kurses der höheren Mathematik. In diesem Kurs sollte man den Studenten von Anfang an bei der Untersuchung der theoretischen Grundlagen ideologisch auf die numerische Lösung von Aufgaben vorbereiten, und zwar im Sinne der nächsten komplizierteren Stufe der Untersuchung mathematischer Modelle, und ihm damit praktische Fertigkeiten im Umgang mit der modernen Rechentechnik vermitteln:

Für einen Studenten von heute sollte die Benutzung der Rechner genauso selbstverständlich und einfach sein wie für den Schüler die Logarithmentafel und die Winkelfunktionen. Wie ist das alles zu erreichen?

Vor allem sollte man bei der Mathematikausbildung an Hochschulen von Anfang an zweckmäßigerweise dem Charakter der Beweise der behandelten Sätze große Aufmerksamkeit widmen und angeben, wann ein Beweis algorithmisch ist und wann nicht. Zum Beispiel ist es nützlich zu zeigen, dass der Beweis des Satzes über die Existenz von Extremwerten einer auf einem Intervall stetigen Funktion, der mit Hilfe des Kompaktheitsprinzips durchgeführt wird, nicht die Möglichkeit bietet, die Extremalpunkte tatsächlich zu finden.

Andererseits hat der Beweis der Tatsache, dass eine auf einem Intervall stetige Funktion, deren Funktionswerte an den Intervallenden verschiedene Vorzeichen haben und die in einem bestimmten Punkt verschwindet, der mit Hilfe einer sukzessiven Halbierung der Intervalle durchgeführt wird, algorithmischen Charakter, da er es gestattet, den erwähnten Punkt mit beliebiger Genauigkeit zu ermitteln.

Zum Beispiel beruht der Beweis des Weierstraßschen Existenzsatzes über das Maximum einer auf einem Intervall stetigen Funktion ebenfalls auf dieser sukzessiven Halbierung der Intervalle; es wird jeweils dasjenige der beiden Intervalle ausgewählt, auf dem der Wert des Supremums der Funktion nicht kleiner ist als auf dem anderen; es ist interessant, dass dieser Beweis nicht algorithmisch ist.
Diese Methode der Auswahl der Intervalle ist weder effektiv noch algorithmisch. Zum Beispiel ist folgendes Kriterium "faktisch" nicht zu beweisen:

Von zwei Intervallen wird dasjenige ausgewählt, für welches ein zugehöriger Funktionswert existiert, der größer ist als ein beliebiger Funktionswert für das andere Intervall.
Anders verhält es sich bei dem Kriterium der Auswahl der Intervalle beim Beweis des Cauchyschen Satzes über die Existenz von Nullstellen einer stetigen Funktion, deren Funktionswerte an den Enden eines Intervalls verschiedene Vorzeichen annehmen. Im letzten Fall erfolgt die Auswahl des Intervalls nach jedem Schritt durch Vergleich der Vorzeichen der Funktionswerte an den Enden des Intervalls.

Man sollte auch beachten, dass es nicht zweckmäßig ist, jeden beliebigen algorithmischen Prozess in der Praxis zu nutzen (z.B. ist es bei der numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme nicht ratsam, die Cramersche Regel zu benutzen), und dass bei Verwendung eines Algorithmus für numerische Berechnungen die Anzahl der Operationen und die benötigte Speicherkapazität von großer Bedeutung sind.

Es ist sehr zweckmäßig, parallel zur Betrachtung der Grundbegriffe der mathematischen Analysis die numerische Lösung der Aufgaben zu behandeln, die die untersuchten Begriffe und ihre Eigenschaften veranschaulichen.
Ein dankbares Thema für solche Aufgaben ist beispielsweise die numerische Bestimmung der Extremwerte von Funktionen sowohl mit Hilfe des Satzes über die Eigenschaften der Ableitungen in den Extremalpunkten als auch mit der direkten Bestimmungsmethode. Es ist auch nützlich, die Größenordnung der Operationen zu vergleichen, die man zur Lösung der Aufgabe mit diesen Methoden benötigt.

Mitunter hört man Vorwürfe, dass man in den Mathematikkursen eine Vorliebe für das Studium innermathematischer Begriffe hat, die für die Anwendungen nicht benötigt werden. Gewöhnlich treffen diese Vorwürfe nur die Form der Darstellung, nicht aber den Inhalt des Kurses.

Um keinen Anlass für entsprechende Vorwürfe zu liefern und um den Studenten beim Studium der Mathematik gleich richtig zu orientieren (insbesondere bei der Ausbildung künftiger Anwender der Mathematik), ist es zweckmäßig, gleich von Anfang an auf den Zusammenhang solcher Begriffe mit numerischen Methoden hinzuweisen, wie Intervallschachtelung, Häufungsgrenze, das Aufschreiben der reellen Zahlen mittels unendlicher

Dezimalbrüche, die $\varepsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit einer Funktion (s. auch 2.5.) usw.

Ein solcher methodischer Aufbau mathematischer Kurse garantiert die untrennbare Verbindung theoretischer (qualitativer und analytischer) und numerischer Methoden, ohne sie in Gegensatz zueinander zu bringen.

2.3 Zur inneren Logik der Mathematik

Dritte These: Der Inhalt der mathematischen Grundausbildung darf nicht von rein pragmatischen Gesichtspunkten bestimmt werde, die nur auf der Spezifik der künftigen Fachrichtung des Studierenden beruhen, ohne die innere Logik der Mathematik selbst zu berücksichtigen.

Jede Wissenschaft besitzt ihre innere Struktur und ihre innere Logik, besitzt innere Bindeglieder, die nicht immer unmittelbar über die Grenzen des betreffenden Wissensgebietes hinausreichen, die aber eine prinzipielle Rolle spielen und zum Verständnis des Wissenschaftsgebietes, seiner Aneignung und Anwendung notwendig sind.
Das ist unbestritten, wird aber oft vergessen, wenn es um den konkreten Inhalt einer Wissenschaftsdisziplin geht.

Als ein konkretes Beispiel für ein inneres Bindeglied kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung[6] angeben. Er ist nicht nur an sich interessant, sondern vielmehr auch dadurch, dass man mit ihm leicht viele nützliche Behauptungen beweisen kann: die Abschätzung des Restgliedes in der Taylorformel, die Herleitung der l'Hospitalschen Regel zur Berechnung des Grenzwertes der Quotienten von Funktionen.

Eine überzeugende Bestätigung der formulierten Behauptung ist die Äußerung A. N. Krylovs [16, S. 612]: "Beim Studium der Analysis und Mechanik sowie entsprechender Teile der analytischen Geometrie und höheren Algebra sollten ein abgestuftes Vorgehen und eine gewisse Vollständigkeit beachtet werden; vieles mag überflüssig und nicht direkt anwendbar erscheinen; es ist aber für das klare Verständnis des Weiteren notwendig und kann nicht einfach übergangen werden wie ein langweiliges Kapitel in einem Roman."

Folglich muss das Kriterium der Nützlichkeit für die künftige Fachrichtung des Studierenden beachtet werden, wenn das Studienprogramm für eine mathematische Disziplin erarbeitet wird; aber sich nur darauf zu beschränken, wäre ein großer Fehler.

2.4 Zum Ziel der Mathematikausbildung

Vierte These: Das Ziel der Mathematikausbildung ist die Aneignung eines bestimmten Wissens durch die Studierenden, die Herausbildung der Fähigkeit, die erlernten mathematischen Methoden anzuwenden, die Entwicklung der mathematischen Intuition und die Erziehung zu mathematischer Kultur.

Ein Wissenschaftler oder Ingenieur von heute sollte in ausreichendem Maße sowohl

[6] auch Satz von Cauchy genannt.

die klassischen als auch die modernen Untersuchungsmethoden beherrschen, die auf seinem Gebiet angewendet werden. Um mathematische Methoden erfolgreich zur Untersuchung eines Problems nutzen zu können, braucht man natürlich vor allem die notwendigen Kenntnisse, um mit dem mathematischen Apparat richtig umgehen zu können, und muss die Grenzen der Anwendbarkeit des betrachteten mathematischen Modells kennen.

Das scheint selbstverständlich zu sein, stimmt jedoch häufig nicht mit der Realität überein. Ich möchte das an einem anekdotenhaften Fall erläutern, der sich tatsächlich zugetragen hat.

Ein Aspirant, der eine Dissertation zu einem ökonomischen Thema schrieb, kam eines Tages zu einem meiner Schüler und sagte, dass er den prozentualen Zuwachs der Schweine in einem Sowchos berechne, wobei die Mathematik Resultate liefere, die dem gesunden Menschenverstand widersprächen.

"Es geht um folgendes", sagte er: "Zunächst gab es in dem Sowchos keine Schweine, aber nach einem Jahr waren es 50. Um den prozentualen Zuwachs zu berechnen, teilte ich 50 durch null und multiplizierte mit 100, kürzte die Nullen und erhielt $\frac{50\cdot 100}{0} = 500\%$. Jedoch sagte mir mein gesunder Menschenverstand, wenn anfangs ein Schwein dagewesen wäre und es nach einem Jahr wieder so wären, dann müsste der prozentuale Zuwachs geringer sein; dennoch liefert die gleiche Rechnung $\frac{50\cdot 100}{1} = 5000\%$. Irgendetwas stimmt mit eurer Mathematik nicht", sagte der Aspirant (es wäre natürlich interessant zu wissen, wie er das werden konnte).

Das ist natürlich ein einmaliger Fall, aber leider kommt es auch auf höherem Niveau vor, dass ein mathematischer Apparat über die zulässigen Anwendungsgrenzen hinaus benutzt wird. Ich erinnere mich an den Fall einer Dissertation B in Mechanik, wo für "große" Geschwindigkeiten eine Formel benutzt wurde, die nur für hinreichend kleine hergeleitet werden war, was natürlich zu falschen Schlussfolgerungen führte.

Mit den in These 4 genannten Aufgaben sind die Ziele der Mathematikausbildung der Studenten noch nicht erschöpft. Die sinnvolle und erfolgreiche Anwendung mathematischer Methoden hängt natürlich vom notwendigen Wissen, vom richtigen Umgang mit der Mathematik und vom Erkennen der Grenzen ab, die dem Einsatz des jeweils angewandten mathematischen Apparates gesetzt sind. Es gilt, ihn schöpferisch, aber nicht formal anzuwenden, nicht nur fertige Formeln zu benutzen, sondern auch neue zu erarbeiten, wenn es notwendig ist.

Für eine richtige Aufgabenstellung, für die Beurteilung der gegebenen Daten und für die Auswahl der wesentlichen hieraus sowie die Wahl des Lösungsweges sind mathematische Intuition, Phantasie und Harmoniegefühl notwendig, die es ermöglichen, das erforderliche Resultat vorauszusehen. Dennoch genügt es bei weitem nicht, das erwartete Resultat intuitiv vorauszufühlen und das Vorgehen mit Hilfe plausibler Überlegungen festzulegen.
Das intuitive Harmoniegefühl in der Mathematik ist nur eine erste, wenn auch sehr wichtige Stufe; intuitive Auffassungsgabe und plausible Überlegungen werden dann mit

dem Urteil des kühlen Verstandes bewiesen oder widerlegt.

Dabei ist zu bemerken, dass die Richtigkeit eines betrachteten Sachverhalts nicht dadurch bewiesen wird, dass man ihn an einigen Beispielen oder durch Experimente überprüft; dies hat für die Mathematik keine Beweiskraft. Ein Beweis ist nur auf rein logischen Wege und entsprechend den Gesetzen der formalen Logik möglich.

Natürlich spielen sowohl Experimente als auch Beispiele bei mathematischen Untersuchungen eine große Rolle: Sie können entweder die Behauptung veranschaulichen oder sie widerlegen oder zu einer (evtl. neuen) Idee führen. In den letzten Jahren nahm im Zusammenhang mit der schnellen Entwicklung der Rechentechnik die Bedeutung des mathematischen Experiments besonders bei angewandten Untersuchungen zu: Hier eröffneten sich qualitativ vollkommen neue Möglichkeiten und Perspektiven.

Ein "numerisches Experiment", das für den Computer richtig und zutreffend aufgebaut werden ist, kann zu fruchtbaren Hypothesen führen, deren Untersuchung es gestattet, das Wesen der Erscheinung zu begreifen und letztlich die benötigte Theorie zu entwickeln.

Beim mathematischen Beweis sind die Hypothesen, bei der mathematischen Lösung eines Problems die richtige Auswahl von Apparat und Methode die Gewähr für den Erfolg und darüber hinaus oft der Grund dafür, dass man im Ergebnis eine bessere Information über den zu untersuchenden Gegen- stand erhält, als man vorher vermutet hat.
Das hängt damit zusammen, dass der mathematische Apparat viele verborgene Informationen und Reichtümer in sich birgt, die sich im Verlauf der Jahrhunderte angehäuft haben, wodurch die Formeln "klüger" sein können als diejenigen, die sie anwenden, und mehr liefern können, als man von ihnen erwartet hat (wir erinnern beispielsweise an die Entdeckung des Positrons durch Dirac).

Zweifellos ist dieses Schema sehr idealisiert.

Die Anwendung der Kenntnisse, des mathematischen Apparates, der Intuition, des Harmoniegefühls, der Phantasie, der Logik, des Experiments verläuft nicht etappenweise nacheinander, sondern steht im Verlauf des gesamten Prozesses in gegenseitiger Wechselwirkung. Ferner gelingt es bei weitem nicht immer, die Untersuchungen zum gewünschten Ziel zu führen, aber es wäre zum Beispiel ein großer Irrtum zu glauben, dass für die Mathematik nur bewiesene Behauptungen von Bedeutung sind, nur Untersuchungen, die im üblichen Sinne zum logischen Abschluss gebracht worden sind.

Man kann viele Beispiele mathematischer Theorien und Behauptungen anführen, die, obwohl sie nur als Hypothesen formuliert worden sind, trotzdem einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen ausübten und ausüben.

Als Ergebnis der im Ausbildungsprozess erworbenen mathematischen Kenntnisse und Intuitionen kommt beim Studierenden das zum Vorschein, was man allgemein als mathematische Kultur bezeichnet. Ihr Niveau soll nach Abschluss der Ausbildung an der

Hochschule die Fähigkeit gewährleisten, sich in mathematischen Methoden zurechtzufinden, die für die Arbeit auf dem entsprechenden Fachgebiet erforderlich sind, auch wenn sie an der Hochschule nicht gelehrt wurden, die erforderliche Literatur zu lesen und die mathematische Ausbildung fortzusetzen.

Der Analyse des Prozesses der mathematischen Tätigkeit und der Benutzung mathematischer Methoden zur Lösung von Problemen sind viele interessante Untersuchungen gewidmet.[7]

2.5 Zu den Prinzipien der Mathematikmethodik

Wenn das Ausbildungsziel definiert worden ist, taucht natürlich die Frage auf: Wie ist es zu erreichen? Welche Lehrmethodik ist anzuwenden?

Wie keine andere ist diese Frage Gegenstand der Kritik - sowohl von innen seitens der Mathematiker selbst als auch von außen seitens der Fachleute, die in diesem oder jenem Umfang mathematische Methoden benutzen. Sogar innerhalb eines Wissenschaftsbereichs kann es oft sehr schwer sein, Absprachen über eine einheitliche Darstellungsmethode des Stoffes zu treffen (übrigens ist das durchaus nicht immer erforderlich).

Die Situation ist deshalb so kompliziert und schwierig, weil die Lehrmethodik in der Mathematik gegenwärtig noch kein wissenschaftliches Niveau erreicht hat; sie beruht lediglich auf der nicht systematisierten Erfahrung einzelner Lehrkräfte (leider beschränken sich viele nur auf persönliche Erfahrungen) sowie auf ihrem Glauben an die eigene Redlichkeit und Unfehlbarkeit.

In allen methodischen Diskussionen treten Unversöhnlichkeit und Intoleranz gegenüber anderen Standpunkten besonders scharf zutage, wie das immer dort geschieht, wo Dogma und Glaube zugrunde liegen. Viele nicht seriöse Dinge wurden und werden von soliden und seriösen Leuten bezüglich der Lehrmethoden in der Mathematik gesagt.
Wir werden die entsprechenden Zitate nicht anführen, um ihre Verfasser nicht zu kränken, uns aber bemühen, einige grundlegende Prinzipien zur Methodik im Fach Mathematik (intuitiv) zu formulieren.

Fünfte These: Das Lehren der Mathematik muss nach Möglichkeit einfach, klar und natürlich sein und auf vernünftiger Strenge basieren.

Da jeder diese These von seinem Standpunkt aus verstehen und auslegen kann, möchten wir uns bemühen, etwas genauer zu erklären, was der Verfasser hiermit meint.

Die These von der Einfachheit der Darstellung bedeutet vor allem einen einfachen Aufbau des Kurses insgesamt.
Seine Struktur soll die Akzente auf die hauptsächlichen, prinzipiellen Ideen setzen und den größten Teil der Zeit und der Aufmerksamkeit den grundlegenden Methoden und Fakten widmen, derentwegen die Vorlesung gehalten wird. Hilfsmittel und zweitrangige Dinge müssen deutlich untergeordnet werden, ihre Aneignung darf keinen unnötigen

[7] Wir verweisen auf folgende Literatur zu diesem Problem: [1], [15], [11], [22], [23], [24], [17] und [26].

Aufwand erfordern. Obwohl die Theorie der reellen Zahlen die Basis der mathematischen Analysis ist, ist es z.B. nicht zweckmäßig, ihr an den technischen Hochschulen viel Zeit zu widmen, da sie in diesem Fall nur eine Hilfsfunktion erfüllt, aber nicht ein grundlegender Teil des Mathematikkurses ist.

Ferner sollte bei der Darlegung eines Problems unter gleichen Bedingungen der einfacheren Methode der Vorzug gegeben werden. Natürlich tauchen sofort verschiedene "aber" auf. Wir wollen das an Beispielen erläutern. Es ist zweckmäßig, denjenigen Beweis als einfacher zu betrachten, der natürlich und nicht künstlich ist. Zweifellos sind diese Begriffe relativ. Gemäß einer scharfsinnigen Bemerkung von Polya und Szegö [25] erscheint ein Verfahren, das zum ersten Mal angewendet worden ist, als künstlich; wendet man es jedoch zum zweiten Mal an, wird es zur Methode.

Wir ergänzen noch, dass man in der Regel den direkten Beweisen den Vorzug gegenüber indirekten geben sollte sowie Überlegungen, die auf der unmittelbaren Anwendung von Definitionen und bekannten Sätzen beruhen und keine zusätzlichen Konstruktionen erfordern.
Dabei kann die gründliche Untersuchung der vorhandenen Situation, die Analyse der möglichen Einzelfälle mitunter auch sehr umfangreich sein, aber sie ist verständlicher, anschaulicher, leichter zu begreifen und gestattet, das Wesen der Sache besser zu erkennen, obwohl sie manchmal weniger elegant als ein künstliches Vorgehen ist.

Schließlich sollte man bevorzugt jene Methoden und Beweise auswählen, die eine weitere Verallgemeinerung gestatten. Das Wichtigste ist, dass der Student Idee und Methode der Untersuchung versteht.
Aus diesem Grunde sollte man das Problem nicht nur mit der größtmöglichen Allgemeinheit darstellen, sondern sich auch bemühen, sein Wesen an einfachsten Beispielen zu erläutern.

Es ist nützlich, sich daran zu erinnern, dass D. Hilbert, als er mit der Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen begann, die Gleichungen

$$y'' = 0 \qquad \text{und} \qquad y'' + y = 0$$

hinschrieb und sagte: "Meine Herren, hieran können Sie die gesamte Theorie studieren und sogar den Unterschied zwischen Anfangswert- und Randwertaufgaben verstehen." [28]

Zu den verbreitetsten Vorwürfen gegen die Methodiker im Fach Mathematik gehört, dass sie die Intuition vernachlässigen, dass sie die Mathematik als formale Kette logischer Schlussfolgerungen und Beweise lehren, deren Strenge für niemanden als die Mathematiker selbst notwendig sei und nur zu einem Triumph "über den gesunden Menschenverstand", zur Scholastik führe.

Mitunter werden direkte Zweifel geäußert, ob die Durchführung von Beweisen [14] bei der Mathematikausbildung derer notwendig ist, die sich nur für ihre Anwendungen interessieren. Weiter wird behauptet, dass die Mathematiker Beweise nur zur eigenen Befriedigung durchführen; logisch strenge Beweise hätten noch niemanden überzeugt, dagegen genüge es, dem Studenten eine mathematische These intuitiv so zu erklären, dass er sie erfolgreich anwenden kann.

Es ist interessant, dass alle diese Äußerungen gewöhnlich zur Mathematikausbildung an den Hochschulen gemacht werden, aber dass es im Schullehrplan der Elementarmathematik Sätze und deren Beweise gibt, ruft keine derartigen Einwände hervor.

Eine andere Überlegung, die die Gegner von Beweisen äußern, besteht darin, dass man bei der praktischen Anwendung der Mathematik durchaus nicht nur bewiesene mathematische Fakten benutzen muss.
So ist z.B. bis jetzt das Newtonsche Dreikörperproblem theoretisch nicht vollständig untersucht werden, aber Raumflugkörper fliegen erfolgreich.
Es heißt, dass auf Rechnern Gleichungen mit der erforderlichen Genauigkeit gelöst werden, obwohl es weder gelingt, die Geschwindigkeit der Konvergenz des angewandten numerischen Prozesses festzustellen noch seine Konvergenz zu beweisen.
Es wird auf die erfolgreiche Anwendung intuitiver Überlegungen und heuristischer Methoden bei der numerischen Lösung von Aufgaben hingewiesen.

Das ist natürlich alles richtig. Zweifellos sind intuitives Herangehen und heuristische Methoden zweckmäßig und immer dann gerechtfertigt, wenn sie zu Resultaten führen, die mit den realen Erscheinungen übereinstimmen und den praktischen Notwendigkeiten genügen. Die Untersuchung und Entwicklung heuristischer Methoden ist eine sehr wichtige und notwendige Aufgabe.

Dennoch muss man sich darüber im klaren sein, dass die Anwendung solcher mathematischer Methoden gewöhnlich nur eine erzwungene Notwendigkeit darstellt, wenn ein exaktes mathematisches Modell und seine Theorie fehlen.
Mit dem gleichen Erfolg kann man Beispiele für Aufgaben angeben, bei deren Lösung numerische und heuristische Methoden nicht das erforderliche Resultat liefern; Versuche, sie anzuwenden, führen zu divergenten Prozessen, und wenn die Theorie fehlt, kann man die Ursache hierfür nicht ermitteln; es ist auch nicht bekannt, wie man an die Lösung dieser Aufgaben herangehen soll.

Da sich die Mathematiker nicht in der Fähigkeit unterscheiden, einen Beweis mehr oder weniger streng zu führen, sondern nur in ihrer Intuition, ist man sogar der Meinung, dass das von der Belanglosigkeit strenger Beweisführung und der Wichtigkeit von Intuition und plausiblen Überlegungen zeugt (wir werden an der logischen Harmonie ähnlicher Schlussfolgerungen keine Kritik üben, sondern uns auf ihre intuitive Wahrnehmung beschränken).

Wahrscheinlich besteht das wichtigste Argument der Gegner streng logischer Beweise darin, dass in der Mathematik keine Entdeckung nur auf streng logischen Wege gemacht wird, sondern vor allem durch intuitive Vorstellungen, plausible Überlegungen, Phantasie und der Voraussehbarkeit des Endergebnissen auf Grund allgemeiner und konkreter Erwägungen.

Das ist alles richtig. Die Mathematiker wissen das auch selbst sehr gut. Doch einer der charakteristischen Ansätze jeder Kritik (nicht nur der an der gegenwärtigen Mathema-

tikausbildung) ist es, jemanden der Sünden anzuklagen, deren er sich de facto nicht schuldig gemacht hat, die man aber bequem, leicht und angenehm kritisieren kann.
Das bezieht sich z.B. auch darauf, dass man die Mathematiker der Geringschätzung der Intuition beschuldigt.

Ich bin der Meinung, dass sicher von keinem Mathematiker jemals die Wichtigkeit und Notwendigkeit der mathematischen Intuition bestritten werden ist, ohne die man niemals eine mathematische Entdeckung machen und in der Regel auch keine praktischen Aufgaben lösen kann. Kein Mathematiker wird jemals dagegen protestieren, die physikalische Intuition bei der mathematischen Lösung eines Problems zu benutzen, besonders wenn das mathematische Modell zuverlässig ist.

Der Mathematiker begründet seine Behauptungen durchaus nicht deshalb logisch, weil er von der Strenge der Betrachtungen fasziniert ist und die Mathematik anderen Wissenschaften gegenüberstellen und unterstreichen will, dass nur die Mathematik es mit logisch begründeten Behauptungen zu tun hat, sondern wegen der objektiven Notwendigkeit und weil logische Überlegungen (die ihrer Natur nach, falls sie richtig sind, auch streng sind) die Methode der Mathematik darstellen, ohne die die Mathematik undenkbar ist.

Obwohl es sonderbar erscheinen mag, aber viele verstehen die objektive Notwendigkeit logischer Überlegungen nicht und beschuldigen die Mathematiker, dass sie nicht die Mathematik lehren, die man braucht.
Darauf kann man nur antworten, dass sich die Mathematik nicht auf Logik reduzieren lässt, dass es aber ohne Logik keine Mathematik gibt.

Deshalb hat M. Klain nicht ganz recht, wenn er sagt: "Die Mathematik ist eine Frau und die Logik ihre Kleidung." [14], da die Mathematik ohne Logik undenkbar ist.
Als Kleidung der Mathematik kann man eher die äußere Form des Aufschreibens mathematischer Fakten bezeichnen, die (besonders für den Nichtfachmann) eine deprimierend monotone Kette logischer Symbole darstellt.

Diese Symbole sind tatsächlich nur das äußere Abbild des Wesens der Mathematik, ähnlich der Notenschrift als Abbild der Musik. Nahezu alle Mathematiker (d.h. alle, bis auf endlich viele) verstehen gut, dass eine über das gesunde Maß hinausgehende formale Darlegung des mathematischen Stoffes in Form einer untadeligen logischen harmonischen Kette von Definitionen, Lemmata und Sätzen ohne Betrachtung von Beispielen und ohne Lösen von Aufgaben (jedenfalls für künftige Anwender der Mathematik) verglichen werden kann mit dem Studium der Musik einzig und allein mit Hilfe von Notenzeichen ohne Wiedergabe musikalischer Klänge.

Zweifellos muss man bei der Mathematikausbildung die Fähigkeit entwickeln, das Endergebnis intuitiv vorauszusehen, plausible, heuristische Überlegungen durchzuführen und die mathematische Intuition zu entwickeln.

Deshalb wurde in der vierten These die Bedeutung der mathematischen Intuition als eines der Ausbildungsziele in der Mathematik besonders unterstrichen.

Natürlich kommt es vor, dass bei der Anwendung mathematischer Methoden plausible Überlegungen nicht erforderlich sind, und man sofort die "strengen" mathematischen Methoden benutzen kann. Eine solche Situation kann es geben, wenn für das betrachtete Problem ein vollständig definierter Algorithmus vorhanden ist, von dem (aus irgendwelchen Gründen) bekannt ist, dass man gerade ihn in dem gegebenen Fall anwenden muss.
Es sei übrigens darauf hingewiesen, dass diese Gründe auf plausiblen Überlegungen beruhen.

Das alles widerspricht keinesfalls der Notwendigkeit, logische Beweise durchzuführen. Die logischen Beweise helfen den Studenten, die notwendigen Fähigkeiten für die Benutzung des mathematischen Apparates herauszubilden, mathematische Methoden zu beherrschen und die für eine sachkundige Anwendung erforderliche mathematische Kultur zu erwerben, zu der das logische Denken gehört. Durch einen Beweis erkennt man die Grenzen des mathematischen Apparates besser und wird somit vor möglichen Fehlern in seiner Anwendung gewarnt.

Man darf nicht vergessen, dass die Intuition mitunter auch trügerisch sein kann.
Gut bekannt ist das historische Beispiel von Leibniz [4, S. 190], [5, S. 200], der lange über das Problem nachgedacht hat, ob die Ableitung des Produktes von Funktionen gleich dem Produkt ihrer Ableitungen ist.
Man findet hier kaum ein besseres Verfahren, die Wahrheit zu finden, als den direkten Beweis der entsprechenden Formel.

Eine Zeit lang glaubte man intuitiv, dass offensichtlich jede stetige Funktion differenzierbar sei. Das Herausfinden des tatsächlichen Sachverhaltes ist nicht die Frage der formalen Strenge, sondern des Wesens der Sache. Nichtdifferenzierbare stetige Funktionen sind keine Erfindung der Mathematiker, da z.B. sprunghafte Änderungen der Geschwindigkeit auch in mathematischen Modellen realer physikalischer Erscheinungen vorkommen können.
Dabei darf man aber nicht vergessen, dass alles vom exakten Inhalt des Begriffes der Ableitung abhängt; denn versteht man sie als Ableitung einer verallgemeinerten Funktion, so sind tatsächlich alle stetigen Funktionen differenzierbar.

Wir wollen die Nützlichkeit und Notwendigkeit eines strengen Beweises an einem weiteren historischen Beispiel veranschaulichen. Cauchy hatte nicht hinreichend scharf nachgedacht und kam zu dem Schluss, dass die Summe jeder konvergenten Reihe stetiger Funktionen eine stetige Funktion ist.
Nachdem ein Gegenbeispiel diese Behauptung widerlegte, war ein Beweis mit Hilfe des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe das einfachste Verfahren, um die richtige Behauptung zu erhalten. (Es ist interessant anzumerken, dass der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz zuerst von dem englischen Physiker G. Stokes und unabhängig davon von dem deutschen Mathematiker Seidel in den Jahren 1847 und 1848 eingeführt worden ist [5, S. 208, 215].)

Die angeführten Beispiele zeigen, dass ein durchgeführter Beweis die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung gesetzmäßig und natürlich nachweist.

Alle Beweise haben diese Eigenschaft, und zwar um so mehr, je natürlicher sie sind. Dennoch sollte man, wie bereits bemerkt, den direkten Beweisen gegenüber den indirekten Beweisen den Vorzug geben, obwohl sie logisch gleichwertig sind; denn bei der Lösung praktischer realer Probleme muss man davon ausgehen, was ist, und nicht davon, was nicht ist. Alle Beweise, die auf einem Algorithmus beruhen, sind direkte Beweise.

Ein anderer Vorzug der Beweise besteht darin, dass sie den Inhalt der eingeführten mathematischen Begriffe klären und damit helfen, sie zu beherrschen und in der Praxis richtig anzuwenden.
So hilft z.B. der auf der analytischen Definition der Ableitung beruhende Beweis, dass an der Stelle des relativen Extremums die Ableitung, falls sie existiert, gleich null ist, das Wesen des Extremums besser zu begreifen. Der Beweis des Satzes von Rolle, der auf der erwähnten Eigenschaft der Extrema beruht, hilft seinerseits, den Satz besser zu verstehen und sich einzuprägen usw.

Indem die Beweise die logische Struktur einer mathematischen Vorlesung verdeutlichen und die Verbindung zwischen ihren einzelnen Teilen herstellen, erleichtern sie das Einprägen und Aneignen des Stoffes gegenüber einer Darstellungsmethode, die auf einer schrittweisen Realisierung von Vorschriften beruht.
Es ist wichtig, dass bei der Durchführung von Beweisen die Anwendung mathematischer Ideen und Begriffe, d.h. des gesamten mathematischen Apparates in Aktion gezeigt wird; damit erwirbt der Studierende das Wichtigste, nämlich die Fähigkeit, ein Problem mit mathematischen Methoden zu lösen.

Man darf auch nicht vergessen, dass der logische Rahmen ein unentbehrlicher Teil des mathematischen Lösungsprozesses ist, auch wenn fertige Algorithmen verwendet werden.

Zweifellos gibt es Situationen; in denen es zweckmäßiger ist, den Studierenden mit einer bestimmten Behauptung vertraut zu machen, ohne ihren Beweis anzugeben,und stattdessen ihren Inhalt zu erklären. Dies ist jedoch in der ersten Etappe der Ausbildung nicht wünschenswert und zweckmäßig.

Wir betonen, dass ein mathematischer Beweis auf der Grundlage gewisser Voraussetzungen den untrennbaren logischen Zusammenhang zwischen den Ausgangsdaten und der Behauptung enthält.
Dieser Gedanke wurde von J. Dieudonné im Vorwort zu seinem Buch "Lineare Algebra und elementare Geometrie" betont:
"Einen hohen erzieherischen Wert für das Denken hat die Suche nach der Ökonomie der Mittel und die Anpassung der Hypothesen an Schlussfolgerungen." [7, S. 18]

Diese Seite der Mathematik hängt eng mit dem indirekten Nutzen zusammen, den ihr Studium bringt, indem es das allgemeine Denkvermögen vervollkommnet (davon war bereits am Ende des ersten Kapitels die Rede).

Es ist verständlich, dass man bei "strengen Beweisen" in vernünftigen Grenzen bleiben muss, man darf nicht immer alles auf Axiome zurückführen, sondern muss daran denken, dass der Begriff der Strenge relativ und historisch bedingt ist. Der Grad der Strenge bei mathematischen Methoden wird von den Bedürfnissen der Praxis bestimmt.

So muss man z.B. bei der Definition einer stetigen Funktion als einer Funktion, deren Bild man zeichnen kann, ohne den Bleistift vom Papier oder die Kreide von der Tafel zu nehmen (dies gibt eine bestimmte Information über das zu betrachtende Objekt), offensichtlich nicht beweisen, dass sie in einem gewissen Punkt verschwindet, wenn ihre Funktionswerte an den Intervallenden verschiedene Vorzeichen haben, weil sich dies unmittelbar anschaulich aus der Definition ergibt.

Bei der klassischen Definition einer stetigen Funktion dagegen muss man diesen Sachverhalt mit dem "üblichen" Grad der Strenge beweisen. Die Anführungsstriche stehen hier deshalb, weil es möglich ist, mit den Schlussweisen der konstruktiven Mathematik ein Gegenbeispiel zu konstruieren, d.h. eine auf einem Intervall stetige Funktion, die an den Intervallenden Funktionswerte mit verschiedenen Vorzeichen annimmt und nirgends verschwindet.
Dieses unerwartete Ergebnis ist damit zu erklären, dass es in der konstruktiven Mathematik andere "Spielregeln" gibt als in der klassischen.

Leider, und das ist offenbar unvermeidlich, muss man sogar innerhalb einer mathematischen Vorlesung einzelne Teile mit unterschiedlicher Strenge darstellen. So kann man am Anfang der Analysis den Begriff der Ableitung, die Merkmale des Extremums, die Eigenschaften stetiger und differenzierbarer Funktionen völlig in "klassischer Strenge" darstellen, darauf achten, dass in den Formulierungen der Sätze keine überflüssigen Voraussetzungen enthalten sind, und dies durch eine entsprechende Analyse bestätigen.

Beim Übergang zu Funktionen mehrerer Variabler ändert sich die Situation deutlich. Da die Objekte komplizierter sind, ist es hier nicht immer zweckmäßig, die Sätze mit minimalen Voraussetzungen zu beweisen - umfassendere Voraussetzungen vereinfachen den Beweis oft wesentlich und erklären die Hauptsache.
So kann man z.B. den Satz über implizite Funktionen wesentlich einfacher für stetig differenzierbare als für differenzierbare Funktionen beweisen.

Gewöhnlich ändert sich bei der Betrachtung von Funktionen mehrerer Variabler auch der Grad der Strenge der durchgeführten Überlegungen.
Für Funktionen einer Variablen lassen sich die Sätze in der Vorlesung mühelos nach klaren logischen Schemata beweisen, und anschauliche Vorstellungen dienen nur zu ihrer Illustration. Für Funktionen mehrerer Variabler jedoch erweisen sich anschauliche Vorstellungen mitunter als Grundlage der Betrachtung, z.B. beim Studium der Feldtheorie der Begriff der Orientierung einer Fläche nach der "Dreifingerregel" (eine logisch strenge Darlegung dieses Problems würde zu viel Zeit und Anstrengungen erfordern, die an einer technischen oder einer anderen Hochschule nicht gerechtfertigt sind).

Das ist unvermeidlich, und es ist nicht nötig, sich davor zu fürchten und danach zu streben, den gesamten Mathematikkurs mit der gleichen Strenge aufzubauen wie die Anfänge der Analysis. Es ist schon gut, die Anfänge der Vorlesung so zu gestalten, aber um dieses Niveau den ganzen Kurs über zu behaupten, reichen vor allem die Stunden nicht aus, die der Mathematik zur Verfügung stehen, und außerdem wäre es oft auch unzweckmäßig, selbst wenn genug Zeit vorhanden wäre.

Beim Aufbau einer Mathematikvorlesung sollte man sich nicht nur auf deren innere logische Harmonie beschränken, selbst wenn man sie als formal logische Folge von Definitionen, Lemmata, Sätzen und ihren Beweisen bringt. Man sollte seine Aufmerksamkeit auch der Klärung von Begriffen, der Betrachtung anschaulicher Beispiele, der Lösung spezieller Aufgaben und auch möglichen "lyrischen Abweichungen" widmen.

Denn bei den Studenten, die Mathematik nicht zu ihrem künftigen Spezialgebiet gewählt haben, sollte man besonders sorgfältig nur den Stoff auswählen, der für sie notwendig und zugänglich ist und in dem zur Verfügung stehenden Zeitraum begriffen werden kann, so- wie den Stoff, durch den man ihnen die notwendige mathematische Kultur anerziehen kann, von der bei der Definition der Ausbildungsziele in der Mathematik die Rede war (siehe 2.4.).

Obwohl offensichtlich beim Studium der Mathematik logisch strenge Überlegungen und exakte logische Beweise der formulierten Behauptungen zweckmäßig sind, sind bei weitem nicht alle damit einverstanden.
Es gibt Meinungen, dass Anwender der Mathematik strenge Definitionen mathematischer Begriffe nicht unbedingt kennen müssten, sondern dass es zweckmäßig sei, diese "anschaulich" einzuführen, wobei man sich lediglich auf ein intuitives Vorgehen beschränkt. Das ist durchaus kein einfaches Problem.

Wenn wir ein Kind mit dem Begriff "Stuhl" vertraut machen wollen, so sollten wir ihm vernünftigerweise nicht eine logische Definition dieses Begriffes geben, sondern ihm einfach einen Stuhl zeigen.
Wenn jedoch ein Stuhl angefertigt werden soll, muss eine hinreichend genaue Beschreibung vorliegen, damit der angefertigte Stuhl den Wünschen des Auftraggebers entspricht.

Ähnlich verhält es sich auch mit mathematischen Begriffen. Bei Problemen, bei denen die mathematische Sprache nur zur Beschreibung einer Erscheinung benutzt wird (wie z.B. der Terminus Diagramm zur graphischen Darstellung der Arbeit des Herzens auf dem Kardiogramm), kann man über mathematische Begriffe jeden beliebigen Unsinn oder überhaupt nichts sagen - das hat keinerlei Bedeutung und kann das Weitere nicht beeinflussen.
So ist es nicht erforderlich, dass ein Kardiologe, der ein EKG zur Untersuchung des Herzens eines Kranken benutzt, den Funktionsbegriff kennen muss, da die Kenntnis dieses Begriffes ihm keine weitere wichtige Information über den Zustand des Herzens des Patienten liefert.

In den Fällen jedoch, wo ein abstrakter Begriff von seinem Wesen her verwendet werden muss, kann eine anschauliche Einführung die exakte Definition nur vorbereiten, aber nicht ersetzen.

Ein anderes Beispiel: Wenn die Diracsche Deltafunktion nur zur Beschreibung eines gewissen physikalischen Begriffes benötigt wird, sagen wir dem des Kraftmoments, so passiert überhaupt nichts, wenn man sagt, dass die Deltafunktion eine gewöhnliche Funktion ist, die überall gleich null ist mit Ausnahme eines einzigen Punktes, wo sie den Wert unendlich annimmt, wobei das Integral über diese Funktion gleich eins ist.

Das alles ist natürlich vom Standpunkt eines Mathematikers aus unverständlich; insbesondere ist hier der Begriff des gewöhnlichen Integrals als Grenzwert von Integralsummen oder der allgemeinere Begriff des uneigentlichen Integrals nicht anwendbar.
Dennoch führt das Gesagte nicht zu einem Missverständnis, wenn hier die Deltafunktion nur "die mathematische Beschreibung" des Kraftmoments ist, ungeachtet dessen, dass ihm der mathematische Inhalt fehlt.

Wenn man jedoch mit dem Begriff der Deltafunktion arbeiten und ihn bei theoretischen Untersuchungen anwenden muss, so kann eine solche Einführung der Deltafunktion zu Fehlern führen; deshalb ist es zweckmäßig, mit einigen ergänzenden Sätzen das Wesen der Sache zu erklären (was die Physiker sonderbarerweise nicht gern tun).

Zum Beispiel sagt man, dass das Kraftmoment eine Idealisierung der realen Erscheinung ist, dass eine gewisse $\delta-\varepsilon$-Kraft während der Zeitdauer ε wirkt.
Wenn diese Kraft dieselbe Bewegungsmenge überträgt (die man gleich eins setzt) wie das betrachtete Kraft"moment", so definiert man, dass das Integral des Kraftmoments, d.h. der Deltafunktion, gleich dem Grenzwert gewöhnlicher Integrale der beschriebenen $\delta-\varepsilon$-Kräfte ist, wenn ε gegen null strebt.
Danach wird alles klar und verständlich.

Natürlich kann man bei der weiteren Anwendung der Deltafunktion auch eine vollständigere Beschreibung ihrer Eigenschaften und Beziehungen zu anderen mathematischen Objekten bis zur modernen Theorie verallgemeinerter Funktionen fordern.

Wird die Mathematik als Untersuchungsmethode angewendet, so erweist sich die intuitive Einführung der Grundbegriffe gewöhnlich als unzureichend. Außerdem kann die intuitive Anwendung mathematischer Begriffe ohne genaues Verstehen ihres Inhalts zu Fehlern führen. Davon wurde schon bei der Erörterung der vierten These gesprochen.
Man sollte immer daran denken, dass für eine erfolgreiche Nutzung des mathematischen Apparates eine klare Vorstellung über die verwendeten mathematischen Begriffe notwendig ist. Diese Auffassung hängt nicht vom "Ort der Handlung" ab, sie gilt sowohl an Universitäten als auch an technischen Hochschulen.

Der Autor musste auch erfahren, dass man an technischen Hochschulen die Lagrangesche Formel für finite Inkremente unter Benutzung einer entsprechenden Zeichnung einfacher darstellt als an Universitäten, wo man alle Schlüsse rein analytisch durchführt.
Eine solche Gegenüberstellung ist nicht richtig. Wer die Lagrangesche Formel kennenlernt, muss natürlich sowohl den Sinn ihres analytischen Ausdrucks als auch dessen geometrische Interpretation verstehen.
Das eine zu verstehen und das andere nicht, bedeutet, überhaupt nichts zu verstehen.

Nur wenn klare Vorstellungen über die verwendeten mathematischen Begriffe vorhanden sind, kann es eine objektive Gewissheit für die Richtigkeit der Schlussfolgerungen geben.
Um die Mathematik als Untersuchungsmethode anwenden zu können, muss man den

Inhalt und die Wechselbeziehungen ihrer grundlegenden Ideen und Begriffe verstehen und gut beherrschen.

In diesem Fall kann man ohne weiteres plausible Überlegungen benutzen, da sie nur dann aussichtsreich sind, wenn sie auf wirklichem Wissen beruhen. Die gesamte Mathematik auf plausiblen Überlegungen aufzubauen, ist jedoch offenkundig unzulässig, weil es damit unmöglich ist, die Grenzen der zulässigen Anwendung des mathematischen Apparates exakt zu bestimmen.

Die freie Beherrschung mathematischer Methoden, von Wissen und Intuition werden durch langwierige und beharrliche Arbeit erworben und entwickelt. Wer sich die Mathematik konsequent aneignet und festes und exaktes Wissen über mathematische Sachverhalte erwirbt, wird sich sicher weiterentwickeln, und die Mathematik wird in seinen Händen zu einem gehorsamen Instrument.

Es gibt oft Ansichten über die Schwierigkeiten des Mathematikstudiums, die mit einer verschwommenen und unklaren Darstellung der Mathematik zusammenhängen. Die scheinbare Schwierigkeit mancher mathematischen Methoden ist oft dadurch bedingt, dass diese Methoden nicht rechtzeitig gut erklärt wurden und somit unverständlich geblieben sind.

Besser als eine intuitive Darlegung bewährt sich bei der Anwendung in der Regel die klare Einführung eines mathematischen Begriffes; sie ermöglicht, ihn richtig zu benutzen, und bedarf keiner zusätzlichen Erklärungen. Die Entwicklung einer richtigen mathematischen Intuition beim Studierenden beruht vor allem auf festen mathematischen Kenntnissen und auf der Beherrschung mathematischer Methoden.
Daher führt es beim Studenten zur Herausbildung einer falschen Intuition, die offensichtlich schädlich ist, wenn man ihm sinnlose oder falsche Dinge sagt, was oft bei dem Versuch geschieht, die Mathematik auf einem intuitiven Niveau zu lehren.

Zum Schluss der Überlegungen über die Notwendigkeit und Nützlichkeit mathematischer Strenge führe ich ein Zitat von D. Hilbert zu diesem Problem an:

"Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dass die Strenge in der Beweisführung eine Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, dass die strenge Methode auch zugleich die einfachere und leichter fassliche ist.
Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schlussweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwicklungsfähiger sind als die alten Methoden von geringerer Strenge."[8]

Kehren wir zum Problem der Kritik an der Methodik im Fach Mathematik zurück.
Es ist zu bemerken, dass die Angriffe auf die angeblich falsche Methodik im Fach Mathematik oft mit Unverständnis oder dem Widerwillen zusammenhängen, das Wesen der Sache zu verstehen.

So besteht z.B. einer der verbreitetsten Vorwürfe gegen die Mathematiker darin, dass

[8] Das Zitat stammt aus dem berühmten Vortrag von D. Hilbert, "Mathematische Probleme" , den er auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris gehalten hat [12].

die Studenten die von niemandem benötigte ε-δ-Sprache lernen sollen, insbesondere dass sie mit Hilfe von ε und δ die Stetigkeit einer Funktion definieren und irgendwelche künstlichen Beweise durchführen sollen, z.B. dass x^3 eine stetige Funktion ist, obwohl sofort daraus folgt, dass die Funktion $f(x) = x$ offensichtlich stetig und das Produkt stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist.
Dieser Vorwurf beruht auf einem deutlichen Missverständnis und der Ablehnung, sich mit diesem Problem richtig auseinanderzusetzen. Denn die Definition der Stetigkeit einer Funktion in der ε-δ-Sprache sagt doch einfach aus, mit welcher Genauigkeit man den Wert des Arguments einer Funktion vorgeben muss, um die Funktionswerte selbst mit der vorgegebenen Genauigkeit zu erhalten - die Notwendigkeit, das zu begreifen, wird von keinem Anwender bezweifelt.

Das Problem der Stetigkeit von x^3 kann man natürlich zweckmäßiger formulieren: Mit welcher Genauigkeit muss man das Argument einer Funktion vergeben, um den Funktionswert im gegebenen Punkt mit der gewünschten Genauigkeit zu erhalten? Der Nutzen solcher Aufgaben ist offensichtlich.

An diesem Beispiel ist abermals gut zu sehen, dass man den Mathematikern oft Sünden zur Last legt, die nicht charakteristisch für sie sind. Ich möchte feststellen, dass ungeachtet der existierenden Meinung die Mathematiker keine Scholastiker sind.
Sie verstehen durchaus, dass die Anwendung der Mathematik nicht auf logische Übungen hinausläuft. Sie sind sich selbst über die Notwendigkeit der intuitiven Denkweise im klaren, verstehen dabei aber sehr gut, dass an erster Stelle das Wissen steht.

Zweifellos nehmen die Mathematiker vernünftige Kritik von anderer Seite an. Es muss jedoch betont werden, dass die Methodik im Fach Mathematik vor allem eine Angelegenheit der Mathematiker selbst ist, natürlich unter der Voraussetzung, dass die Studenten das notwendige mathematische Wissen erhalten. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt wird, so liegt das an der unzureichenden Qualifikation derjenigen, die die Mathematik lehren.

Tatsächlich ist eine entsprechende Qualifikation die notwendige Voraussetzung für eine gute inhaltliche Organisation eines jeden Lehrprozesses.

Dabei sollte man nicht vergessen, dass infolge des ständigen wissenschaftlichen Fortschritts der Begriff der hohen Qualifikation einer zeitlichen Änderung unterworfen ist; deshalb muss man ihre Aufrechterhaltung auf dem entsprechenden Niveau ständig beachten und rechtzeitige Maßnahmen zu ihrer Erhöhung treffen.

Ein Absinken des Wissensstandes und Erscheinungen des Dilettantismus unter den Lehrkräften sind insofern gefährlich, da sie lawinenartig Absolventen hervorbringen, die die gleichen Mängel aufweisen.
Es wird auch oft vergessen, dass bei weitem nicht jeder Mathematiker, der auf seinem Gebiet gut ist (gut in dem Sinne, dass er wissenschaftliche Erfolge erzielt hat), auch ein guter Lehrer ist (selbst auf seinem engen Spezialgebiet).

Lassen wir die Kunst zu lehren beiseite, so ist noch zu bemerken, dass man zwar große Erfolge in der Mathematik auf einem relativ engen Gebiet und mit einem nur geringen

Kenntnisumfang erreichen kann, dass man aber, um ein guter Pädagoge zu sein, vor allem fundierte mathematische Kenntnisse haben muss.
Im übrigen sollte man dem Problem umfassender Kenntnisse nicht nur bei der Heranbildung von Lehrenden, sondern auch von Wissenschaftlern große Aufmerksamkeit widmen (damit sie tatsächlich Wissenschaftler sind und nicht unnötigerweise erneut das Fahrrad erfinden).
Hieraus folgt, dass gegenwärtig die Weiterbildung der Mathematiklehrkräfte sowie ihre Spezialausbildung äußerst aktuell und wichtig sind.

Wie sind denn nun aber die genannten Schwierigkeiten beim Lehren der Mathematik zu überwinden? Wie muss die Methodik aufgebaut sein, damit die Mathematik tatsächlich so gelehrt werden kann, wie das in der fünften These formuliert werden ist?

Leider gibt es keine genauen Rezepte, wie die verschiedenen Teile der Mathematik gelehrt werden sollten. Die Methodik des Faches Mathematik ist keine Wissenschaft, sondern eine Kunst.

Das ist wahr, aber es bedeutet keinesfalls, dass man die Methodik im Fach Mathematik nicht lehren müsse. Auch jede Kunst kann und muss man lehren: Es studieren sowohl Maler als auch Musiker, Artisten und Schriftsteller. Man kann viele Beispiele dafür anführen, wo die Kunst im Ergebnis einer richtig geführten Ausbildung zum Handwerk geworden ist. Es ist schwer zu sagen, ob das mit der Kunst zu lehren jemals so werden wird, aber jeder, der sich ernsthaft mit dieser Tätigkeit beschäftigen will, muss versuchen, lehren zu lernen.

Es ist sehr schwierig, eine Methodik und begründete Empfehlungen zu erarbeiten; denn diese Empfehlungen und die ihnen zugrunde liegenden Prinzipien sind nicht beweisbar, sondern beruhen auf Überzeugungen. Selbst wenn man einige formulieren kann, ist es schwer, andere von ihrer Zweckmäßigkeit zu überzeugen.
Außerdem glauben die meisten, dass es das beste sei, andere auch so zu lehren, wie sie selbst gelernt haben (bei irgendjemandem oder selbständig); dabei vergessen sie, dass seitdem oft 40 bis 50 Jahre vergangen sind; sie meinen auch, dass das, was ihnen seinerzeit gut gefallen hat oder was sie gut begriffen haben, auch jetzt das Wichtigste und Notwendigste sei.

Was der Lehrende selbst überhaupt nicht oder erst später gelernt hat, erscheint ihm oft kompliziert, auserlesen, schwierig und deshalb auch für die Allgemeinbildung nicht erforderlich.

Ich erinnere mich, wie mir ein betagter Mathematiker seine Verwunderung über die Einführung der Tensoren bei den Studenten des ersten Studienjahres ausdrückte, weil er annahm, dass sie es nicht verstehen würden.
Er verwies darauf, dass er und seine Mathematikerkollegen das ganze Leben gebraucht hätten, um sich an diesen Begriff zu gewöhnen. Seine Einstellung ist leicht zu erklären:

Als er studierte, wurde die analytische Geometrie nur nach der Koordinatenmethode behandelt, erst später eignete er sich die Vektormethode an, und noch viel später lernte er den Tensor kennen. Daher ist es nicht verwunderlich, dass letzteres bei ihm ein solches ehrfurchtsvolles Verhältnis hervorruft.

Ein ähnliches Verhältnis kann man gegenwärtig bezüglich der Theorie der verallgemeinerten Funktionen beobachten.
Wie schon gesagt, scheint dem Lehrenden oft, dass sich die Lernenden den Stoff auch so aneignen und ihn so verstehen müssten wie er, jedoch sind die individuellen Fähigkeiten und Denkweisen der Menschen durchaus verschieden.
Darauf kommen wir noch bei der Betrachtung der achten These zurück, aber zunächst wollen wir nur feststellen, dass es in der Methodik im Fach Mathematik mehr als genug Schwierigkeiten gibt.

Wir fügen noch hinzu, dass die Methodik wesentlich von der Form der Darbietung abhängig ist:
Die Methodik einer Vorlesung unterscheidet sich von der Methodik, ein Lehrbuch zu schreiben; die Methodik einer Vorlesung vor einem Auditorium ist eine andere als die einer Vorlesung im Fernsehen; die Methodik einer Vorlesung vor einem Auditorium hängt sowohl von der Anzahl der Hörer ab (es ist ein großer Unterschied, ob man für fünf oder für zweihundert Hörer liest) als auch von ihrer Vorbereitung sowie von vielen anderen Faktoren.

Es ist schlecht, wenn sich eine Vorlesung auf eine mehr oder weniger wörtliche Nacherzählung eines Lehrbuches beschränkt. Eine Vorlesung sollte leicht und ungezwungen wirken.
Der Vorlesungsstoff sollte so sorgfältig ausgewählt werden, dass er alles Grundsätzliche und Notwendige enthält, trotz seines in der Regel im Vergleich zum Lehrbuch geringeren Umfanges. Bei der gegenwärtig praktizierten Ausbildung an den Hochschulen reichen in der Regel die Informationen, die der Student in der Vorlesung erhält, d.h. der Student könnte auf das Lesen eines Lehrbuches verzichten.

Das ist an sich nicht schlecht, da das Aneignen gut gehaltener Vorlesungen auch eine hervorragende Methode zur Vorbereitung auf die Arbeit mit dem Buch ist.

Bei den Lehrbüchern steht an erster Stelle für die Beurteilung ihrer Qualität ihr wissenschaftlicher Inhalt, ihre methodische Durchdringung sowie die Klarheit und Einfachheit der Sprache. Ein gutes Buch zu schreiben, ist sehr schwierig.
Schon die Festlegung des erforderlichen Allgemeinheitsgrades, mit dem der Stoff dargestellt werden soll, ist nicht einfach. Es kann passieren, dass das Streben nach Allgemeinheit die Darstellung kompliziert, dass dadurch die Grundidee überschattet wird, die der Leser vor allem begreifen soll. Um die einem Beweis zugrunde liegende Idee besser hervorzuheben, ist es in der Regel zweckmäßig, die Voraussetzungen zu verschärfen, damit der Beweis nicht durch zusätzliche Schwierigkeiten erschwert wird (obwohl es möglich ist, dass diese auch mit anderen interessanten Ideen zusammenhängen, die für bestimmte Zwecke nützlich sind, jedoch im vorliegenden Fall nicht verfolgt werden).

Viele Probleme, die auf der einen Ausbildungsstufe Schwierigkeiten bereiten, werden auf einer höheren einfach und leicht verständlich. So sollte man z.B. beim Riemannschen Integral die Formel für die partielle Integration zweckmäßigerweise nur für glatte oder höchstens stückweise glatte Funktionen darstellen und nicht für Funktionen, die im Riemannschen Sinne integrierbare Ableitungen haben, da man letzteres ohne Schwierigkeiten aus der Theorie des Lebesgueschen Integrals erhalten kann.

In einem Lehrbuch müssen Akzente gesetzt und nicht nur Fakten einfach aufgezählt werden; man muss dem Leser helfen, das Wesentliche herauszufinden, das Wichtige vom Unwichtigen zu trennen, ohne dabei in Weitschweifigkeit zu verfallen. Das ist schwerer als bei einer Vorlesung.

Von A. Ja. Chincin erzählt man folgendes: Als er in der Analysisvorlesung zum Satz über die Existenz der Stammfunktion einer stetigen Funktion und der Newton-Leibnizschen Formel kam, begann er mit der Darlegung am Anfang einer zweistündigen Vorlesung und schloss sie nach der ersten Stunde ab.
Danach sagte er den Hörern, dass für sie heute ein denkwürdiger Tag sei - sie hätten eine Perle unter den mathematischen Gedanken kennengelernt, den grundlegenden Satz der Differential- und Integralrechnung; er möchte, dass sie sich ihr ganzes Leben lang an diesen Tag erinnern und könne nach dem Beweis dieses bemerkenswerten Satzes nicht über Dinge von geringerer Bedeutung sprechen; deshalb setze er die Vorlesung nicht fort, und alle mögen nach Hause gehen.

Der Autor eines Lehrbuches hat weit geringere Möglichkeiten, um dem Leser die Tiefe und Bedeutung eines Satzes nahezubringen; ihm stehen nur einige Sätze zur Verfügung.

Sehr wichtig ist der Stil, in dem er schreibt. Eine übermäßige Formalisierung oder, wie J. Littlewood sagte, ein Stil, "der eindeutig vom Teufel beseelt ist" , erschwert genauso wie sein Gegenteil, der "beschreibende" Stil, das Durcharbeiten eines Lehrbuches.
In einem Lehrbuch muss die Darstellung kurz, anschaulich, logisch klar, aber nicht trocken sein. Ein Lehrbuch sollte nicht nur eine Aufzählung der entsprechenden Fakten enthalten (Definitionen, Lemmata, Sätze, Beispiele), sondern auch die notwendigen kurzen und dabei exakten Erläuterungen hierfür.

Es ist nicht sinnvoll, wenn der Leser eines Lehrbuches darüber nachdenken muss, was der Autor gedacht hat, als er von der einen Behauptung zur anderen überging.
Ähnlich ist es, wenn man "triviale Dinge" weglässt; deshalb sollte man entsprechende Kürzungen nicht vornehmen. Littlewood sagte: "Zwei weggelassene Trivialitäten können zusammen ein unüberwindliches Hindernis bilden." [17, S. 33]

Beim Studium des Lehrstoffes braucht der Student nicht auf die Nützlichkeit des Dargebotenen hingewiesen zu werden; diesem Zweck dienen die Übungsaufgaben. Der Text eines Lehrbuches muss jedoch in sich logisch geschlossen sein.
Der Autor eines Lehrbuches sollte den Leser geschickt auf den begeisternden Weg der Erkenntnis führen, ihn leiten, ihm Inhalt und Bedeutung der auftauchenden Begriffe und Sätze erläutern und an Beispielen die Anwendung der dargestellten Theorien veranschaulichen.

Leider wird mitunter auch die äußere Gestaltung der Lehrbücher vernachlässigt, und dadurch werden ihre anderen Werte zunichte gemacht. Der Druck in einem Lehrbuch sollte klar sein, die Ausstattung solide, der Text leicht lesbar.

Die Formeln sollte so angeordnet sein, dass sie bequem gelesen werden können. Jeder neue Gedanke sollte mit einem Absatz beginnen. Grundlegende Behauptungen sollten nach Möglichkeit prägnant formuliert werden (aber nicht zum Nachteil der Sprache) und sofort ins Auge springen: Ich habe es gesehen und es mir für immer eingeprägt.

Die großen Schwierigkeiten bei der Wahl der Lehrmethodik an den Hochschulen hängen auch damit zusammen, dass der Ausbildung von Hochschullehrern offensichtlich zu geringe Aufmerksamkeit gewidmet wird.
Während es für die Ausbildung der Lehrer an allgemeinbildenden Schulen viele unterschiedliche Bildungseinrichtungen für verschiedene Niveaustufen gibt, wird der Ausbildung von Hochschullehrern in den Lehrplänen der Hochschulen keine Zeit eingeräumt.

Die Sache wird dadurch noch schlimmer, dass es viel zu wenig Literatur zur Methodik im Fach Mathematik gibt. Alles, was bei der Erläuterung der fünften These gesagt werden ist, zeugt von den Schwierigkeiten, die Mathematik zu lehren, und davon, dass es unmöglich ist, exakte Prinzipien zu formulieren, von denen man sich leiten lassen muss.
Im Ergebnis unserer Betrachtungen stellen wir fest, dass wir uns von dem am Anfang Gesagten nicht weit entfernt haben, d.h., dass die Darstellung der Mathematik möglichst einfach, klar und natürlich sein und auf einer vernünftigen Strenge beruhen sollte, ohne näher auf Einzelheiten einzugehen, was das bedeutet.

2.6 Was man in der Mathematik lehren sollte

Sechste These: Man sollte das lehren, was notwendig und was schwer zu erlernen ist.

Diese These besagt, dass es notwendig ist, bei der Ausbildung grundlegende, prinzipielle Probleme auszuwählen (das muss sich auch deutlich im Programm widerspiegeln), die man vorrangig lehren und auf die man sich konzentrieren sollte.

So muss ein Student in der Analysis lernen, mit Funktionen umzugehen, die durch Formeln gegeben sind; er muss lernen, ihr Verhalten in gewissen Punkten und auf Intervallen zu beurteilen, ihren Hauptteil zu erkennen, die für das betrachtete Problem unwesentlichen Zusätze wegzulassen, d.h. die Taylorsche Formel zu beherrschen - das alles ist die Grundlage der Analysis.

Wenn ein Student das beherrscht, so kann er auch Grenzwerte berechnen, Asymptoten finden und Kurvenbilder herstellen, das Konvergenzverhalten von Reihen und Integralen untersuchen sowie näherungsweise Integrale, Funktionswerte, Summen von Reihen usw. berechnen.
Statt dieser grundlegenden Methode und dem Hauptinstrument zur Untersuchung von Funktionen - der Taylorformel - hört man in der Analysisvorlesung oft einen Satz nach dem anderen und zum Teil ohne Beweis.

Die Studenten eignen sich diese Dinge nur intuitiv an und bringen sie später in den Prüfungen durcheinander. Sie sind dann nicht in der Lage, diese später in ihrer praktischen

Tätigkeit zu verwenden.
Leider hängt das oft damit zusammen, dass die Taylorformel in den Lehrbüchern und Programmen die Stellung eines armen Verwandten einnimmt. Mir scheint es, dass hier nicht die richtigen Akzente gesetzt werden: Die Basis wird mit dem Überbau verwechselt.

Es kann vorkommen, dass im Lehrprozess unnötig viel Zeit für Dinge verwendet wird, die zwar notwendig, aber einfach sind. Wir wollen das zuerst an einem nichtmathematischen Beispiel erklären.

Wenn ein Mensch nach Abschluss der Schule eine Arbeit aufnehmen will, so stellt es sich heraus, dass er sogar oftmals nicht weiß, wie man die Bewerbung und den geforderten Lebenslauf schreiben muss.
Im Zusammenhang damit wurde in der Presse darüber diskutiert, dass man in der Schule ein (ich erinnere mich nicht genau, halb- oder ganzjähriges) Fach "Korrespondenz und Umgang mit Akten" einführen sollte.

Zweifellos ist es sehr schlecht, dass jemand, der die Schule absolviert hat, nicht weiß, wie man eine Bewerbung und einen Lebenslauf schreiben muss, aber deswegen ein Fach "Korrespondenz und Umgang mit Akten" einzuführen, wäre mehr als unvernünftig - das kann man nebenbei lernen: Es genügt, dafür im Jahr ein- bis zweimal einige Minuten zu opfern.

Eine ähnliche Situation treffen wir auch oft beim Mathematikstudium an. So wird z.B. die Meinung vertreten, dass bei der Berechnung eines bestimmten Integrals ein Ausdruck, der trigonometrische Umkehrfunktionen und Radikale enthält, für einen Ingenieur keine Lösung sei; deshalb sollte bei ähnlichen Aufgaben die Lösung immer auf eine Dezimalzahl hinführen.
Daher wird empfohlen, während des Mathematikstudiums das Hauptaugenmerk auf das Aufschreiben des Endergebnisses in Form einer Dezimalzahl zu richten.

Diese Forderung ist gerechtfertigt (ein Ingenieur braucht eine Lösung in dieser Form), die Konsequenzen jedoch rufen Widerspruch hervor. Bereits in der Schule lernen die Kinder, Tabellen zu benutzen.
Natürlich ist es empörend, wenn ein Student einer technischen Hochschule den Wert des Arkustangens nicht in der Tabelle finden oder nicht mit Rechenstab oder Taschenrechner umgehen kann, aber man muss sich darüber im klaren sein, dass man sich bei der Mathematikausbildung an einer technischen Hochschule nicht damit befassen kann.

Zweifellos muss ein Student so etwas können, wenn er es aber wider Erwarten nicht kann, so muss er es nebenbei lernen, ohne daraus ein Ereignis zu machen und es als Ziel der Mathematikausbildung an einer technischen Hochschule zu betrachten.

Zugleich wollen wir noch auf folgendes hinweisen: Wenn ein Student in Numerik ausgebildet und ihm die Achtung vor der numerischen Lösung anerzogen werden soll, muss in wesentlich stärkerem Maße als bisher die interdisziplinäre Zusammenarbeit genutzt werden, insbesondere durch solche Aufgaben, bei denen der Zahlenwert der numerischen Lösung für die Untersuchung der betrachteten Erscheinung von prinzipieller Bedeutung ist (z.B. ob sich als Lösung eine Geschwindigkeit ergibt, die unter oder über der Schallgeschwindigkeit liegt).

Neue Schwierigkeiten in der Frage "Was soll man lehren?" traten im letzten Jahrzehnt im Zusammenhang mit der stürmischen Entwicklung der Rechentechnik auf. Ohne ihre richtige Anwendung ist die Arbeit der meisten Fachleute von heute (Wissenschaftler, Konstrukteure, Ingenieure usw.) undenkbar.

Dafür genügt es nicht, nur die Elemente der Programmierung gut zu kennen und mit Rechnerprogrammen umgehen zu können wie ein Schüler mit trigonometrischen Tabellen, nicht nur Computer, darunter auch Taschenrechner benutzen zu können wie früher ein Student den Rechenstab, sondern man muss auch verstehen, wie ein Problem sachkundig mathematisch beschrieben wird, wie man es korrekt stellen muss, wie man an die Lösung herangehen sollte, welche numerischen Lösungsmethoden existieren, welche im vorliegenden Fall am zweckmäßigsten sind, welche qualitativen Untersuchungen unter den gegebenen Bedingungen ohne Zuhilfenahme von Computern notwendig und nützlich sind.
All das erfordert solide Kenntnisse und eine solide klassische mathematische Bildung.

Auf den ersten Etappen der Ausbildung in der Rechentechnik und ihrer Anwendung ist es notwendig, die Elemente der Mengenlehre und der mathematischen Logik kennenzulernen.

Leider wird das mitunter zum Selbstzweck, die weitere mathematische Ausbildung dagegen vernachlässigt (dabei kann es vorkommen, dass das Studium der mathematischen Logik und der finiten Mathematik mitunter auf elementaren pseudowissenschaftlichem Niveau erfolgt oder dass es umgekehrt überflüssige Ausmaße annimmt). Es erweist sich als großes Übel, Fachleute auf diese Weise auszubilden.

Man muss sich darüber im klaren sein, dass ein Einzelbeispiel kein Beweis ist, trotzdem führe ich einen Fall an, der sich einstmals mit L.A. Ljusternik ereignet hat, und von dem ich hier mit seinem freundlichen Einverständnis berichten möchte.

Vor einigen Jahren wurde er als Berater an ein Institut eingeladen, und die erste Aufgabe, mit der er es zu tun hatte, bestand darin, die Werte eines dreifachen Integrals (wenn ich mich recht erinnere) einer Funktion zu tabellieren, die von mehreren Parametern abhing.
Die Programme zur Berechnung der entsprechenden Tabellen waren schon zusammengestellt werden, hiernach sollte die Rechenzeit etwa ein halbes Jahr auf dem Rechner vom Typ "Strela" in Anspruch nehmen.

L.A. Ljusternik kam es vor, als erinnere ihn das betrachtete Integral an irgendetwas aus der Theorie der Besselfunktionen. Nach zwei bis drei Tagen gelang es ihm tatsächlich, das unglückselige Integral auf ein einfaches zurückzuführen, indem er bei der Transformation von Integralen Analogien aus der genannten Theorie benutzte.
Die entsprechenden Berechnungen auf dem genannten Rechner erforderten jetzt weniger als 24 Stunden. Der Nutzeffekt durch die Anwendung dieses Satzes war gewaltig.

Dieser Fall ist natürlich ein überzeugendes Beispiel für die Bedeutung mathematischen Könnens und einer grundlegenden mathematischen Kultur, ein Beispiel dafür, was die richtige Anwendung analytischer Methoden geben kann, ein Beispiel für wirkliche mathematische Bildung.

Es sei daran erinnert, dass die Mathematikausbildung für Anwender auf zwei Ziele gerichtet sein muss: auf die Beherrschung bestimmter Algorithmen und darauf, sie zu finden.
Zweifellos sollte man dabei die auf den entsprechenden Gebieten vorhandenen fertigen Algorithmen zugrunde legen, z.B. in der Analysis die Methode der Abspaltung des Hauptteils einer Funktion, die Eliminierung von Variablen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme, verschiedene Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, bestimmte Differenzenmethoden zur näherungsweisen numerischen Lösung von Differentialgleichungen usw.

Leider, oder vielleicht glücklicherweise, läuft die Anwendung der Mathematik nicht vollständig auf die Benutzung bereits ausgearbeiteter Algorithmen hinaus. Oft muss man - um die Mathematik erfolgreich zur Lösung neuer Aufgaben anwenden zu können - ein bestimmtes Maß an Phantasie, Kunstfertigkeit bei analytischen Transformationen und einen bestimmten Erfindergeist zeigen, d.h. Züge, die unabdingbar in den Begriff mathematische Kultur eingehen.
Auch das muss man irgendwo lehren, aber das ist zweifellos wesentlich schwerer zu erlernen als die Anwendung fertiger Algorithmen.

In diesem Zusammenhang darf man die wiederholten Vorwürfe nicht vergessen, dass die Mathematiker die Studenten in der von niemandem benötigten Technik der Berechnung unbestimmter Integrale und der Lösung besonders ausgesuchter Differentialgleichungen ausbilden und dass das alles ein Anachronismus sei; denn in der späteren Praxis werden bei ähnlichen Aufgaben einfach Nachschlagewerke benutzt. Ich denke, dieser Vorwurf ist nicht gerechtfertigt.

Hier sei daran erinnert, dass zu dem Prüfungsminimum, das L.D. Landau von seinen künftigen Schülern forderte, auch eine Mathematikprüfung gehörte, bei der unbestimmte Integrale berechnet werden mussten.
Zweifellos war sich L.D. Landau völlig darüber im klaren, dass seine Schüler später keine Integrale berechnen mussten; denn auch wenn sie diese benötigten, würden sie Tabellen benutzen.

Es geht insgesamt darum, dass man einem Studenten während seiner Mathematikausbildung unbedingt die Grundelemente analytischer Transformationen beibringen muss, die Fähigkeit, dabei Erfindergeist zu zeigen und ein bestimmtes analytisches Fingerspitzengefühl zu entwickeln; die Berechnung uneigentlicher Integrale sowie später die Lösung von Differentialgleichungen liefern hierfür einfaches und zugleich aufschlussreiches Material, wofür sich kaum etwas Geeigneteres finden lässt.

Es wäre falsch, die Ausbildung in der Kunst analytischer Transformationen durch die Ausbildung in der Benutzung entsprechender Nachschlagewerke zu ersetzen; das ist

nicht Gegenstand der Ausbildung, obwohl es sehr nützlich wäre zu zeigen, wie man Nachschlagewerke benutzt.
Man sollte aber nicht vergessen, dass die Benutzung von Nachschlagewerken ein bestimmtes Wissensniveau voraussetzt:
Man muss wissen, was man suchen muss und wie und wo man es finden kann.

Die Entwicklung der Selbständigkeit, des Vorstellungsvermögens und der Findigkeit, die Erziehung zum Schöpferischen sowie die Ausbildung im wissenschaftlichen Denken sind sehr wichtige Bestandteile der Ausbildung an einer Hochschule, besonders (wie bereits im ersten Teil dargelegt) bei den gegenwärtigen Anforderungen an die Spezialisten; das ist natürlich nur auf der Basis fundierter Kenntnisse möglich.

Um dies zu erreichen und dabei die erworbenen Kenntnisse zu festigen, sind - was die Mathematik betrifft - Aufgaben sehr wichtig, deren Lösung die Kombination von Methoden aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik erfordert, solche Aufgaben, bei denen ein Student selbständig die geeignete Lösungsmethode auswählen muss, aber auch solche, die keine determinierte Lösung haben; hier muss er erst selbst klären, welche Behauptung begründbar ist.
Die Lösung von Aufgaben des letzteren Typs stellt den ersten einfachen Versuch einer selbständigen wissenschaftlichen schöpferischen Tätigkeit dar. Die Auswahl solcher Aufgaben hängt in hohem Maße von der Erfahrung, dem Wissensstand, der Qualifikation und dem pädagogischen Können der Lehrkraft ab.

Ein Student muss den ihm gestellten Aufgaben gewachsen sein, und sie müssen sein Interesse wecken. Wiederholte fruchtlose Versuche eines Studenten, diese Aufgaben zu lösen, können zu einem unerwünschten Resultat führen:
Das Vertrauen in die eigenen Möglichkeiten und Fähigkeiten lässt nach.

Eine besonders effektive Methode zur Entwicklung schöpferischen Arbeitens ist die Einbeziehung von Studenten höherer Semester in die laufende Forschungsarbeit. Dieses System wird am Moskauer Physikalisch-Technischen Institut umfassend angewendet und zeigt gute Ergebnisse.

Zum Abschluss der Erläuterung der sechsten These wollen wir noch auf eine große Gefahr hinweisen: Verdeckt unter der modernistischen Losung "Die klassische Mathematik ist veraltet!" gibt es Bestrebungen, die Mathematikausbildung durch primitive Methoden zur numerischen Lösung von Aufgaben auf Rechnern und Versuche zur mathematischen Modellierung komplizierter Aufgaben zu ersetzen.

Gewiss ist auch das notwendig und wichtig. Es gibt auch eine Ausbildungsstufe, wo man sich auf diese Dinge beschränken kann, aber man muss sich darüber im klaren sein, dass es dort nicht ausreicht, wo eine seriöse Anwendung mathematischer Methoden erforderlich ist.

Die Bestrebungen, das gründliche Durcharbeiten des Stoffes durch dessen oberflächliches Kennenlernen zu ersetzen, die Geringschätzung gegenüber den prinzipiellen Schwierigkeiten, die man überwinden muss, um festes Wissen zu erlangen, und das Ersetzen der Hauptwege durch Nebenwege, die nicht zum gleichen Ziel, sondern zu einem qualitativ niedrigeren Niveau der Ausbildung führen, stellen eine sehr schädliche Tendenz in der Hochschulausbildung dar.

2.7 Zu Existenzsätzen

Siebente These: Existenzsätze sind für die Mathematikausbildung von Anwendern der Mathematik notwendig.

Diese These hat einen wesentlich spezielleren Charakter als alle übrigen, dennoch muss sie formuliert werden, da die Einbeziehung sogenannter "reiner Existenzsätze" in die Mathematikvorlesung zahlreiche Angriffe seitens der Anwender der Mathematik hervorruft.

Im ersten Kapitel wurde bereits erwähnt, dass dieses oft am mangelnden Verständnis dafür liegt, dass das mathematische Modell der Erscheinung nicht adäquat ist, zu deren Beschreibung es verwendet wird. Weil aus der Existenz der Lösung eines realen Problems (z.B. eines physikalischen, chemischen, soziologischen, ökonomischen, linguistischen, biologischen usw.) nicht die Existenz der Lösung des entsprechenden mathematischen Problems folgt und nicht aus Liebe zur Logik beweisen die Mathematiker Existenzsätze und begründen ihre Schlussfolgerungen mathematisch.

Der Beweis von Existenzsätzen ist eine der Mathematik eigene Kontrolle, ein mathematisches Experiment, das die Untersuchung des Modells einer Erscheinung bestätigt. Wenn es gelingt, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie die Korrektheit der Aufgabenstellung zu beweisen, so ergibt sich die objektive Gewissheit dafür, dass die Untersuchungen in der richtigen Richtung durchgeführt werden. Das ist sehr wichtig; der Erfolg einer Arbeit wird in erster Linie vom richtigen Erfassen des Problems sowie der richtigen Aufgabenstellung bestimmt. Ich möchte das am Beispiel einer weiteren Anekdote erklären.

Nach langer Trennung trafen sich einst zwei alte Freunde.
"Weißt du", sagte der eine, "bei mir hat sich ein neues Talent gezeigt, ich bin ein Telepath und kann jedem suggerieren, was ich will, und er wird meinen inneren Befehl widerspruchslos ausführen."
"Was, ist das möglich?!" bezweifelte sein Freund.
"Soll ich's beweisen? Stell mir eine beliebige Aufgabe, damit du dich von meinen Fähigkeiten überzeugen kannst!" beharrte der erste.
"Gut", stimmte sein Bekannter zu. "Siehst du, da vorn geht ein junges Mädchen. Suggeriere ihr, dass sie sich nach uns umsieht."
"Mit Vergnügen", erwiderte jener, schaute angespannt hinter dem Mädchen her, und dieses sah sich tatsächlich nach den Freunden um und lächelte sogar.
"Das ist ja allerhand", wunderte sich der Freund des Telepathen. "Aber was hat das eigentlich mit deiner Telepathie zu tun", bemerkte er nach einigem Nachdenken. "Da lief ein lustiges Mädchen, sie langweilte sich, sah in der Gegend herum und schaute auch uns an."
"Gut", sagte der Telepath gereizt. "Siehst du, auf der Brücke geht ein alter Mann. Willst du, dass ich ihm suggeriere, dass er einen Schuh auszieht und ihn in den Fluss

wirft?"
"Nun, wenn du das kannst, bin ich überzeugt", lautete die Antwort.

Der Telepath konzentrierte sich und, oh Wunder, der Alte blieb stehen, bückte sich, zog einen Schuh aus und - indem er sich selbst darüber wunderte, was er tat - warf ihn ins Wasser.
"Hervorragend", gab der Freund des Telepathen verwundert von sich. "Wer weiß, wie viele Verrückte in der Stadt herumlaufen", begann er nachdenklich, "vielleicht gehörte der Alte dazu. Was fällt so einem Verrückten denn nicht alles ein! Besteht darin deine Telepathie?"
"Ach, was soll's!" wurde der Telepath vollends böse.
"Zweifelst du immer noch? Gleich wirst du dich überzeugen, wozu ich fähig bin. Schau her, links siehst du ein mehrstöckiges Haus. Zeige mir ein beliebiges Fenster in diesem Haus, und demjenigen, der dort wohnt, werde ich befehlen, das Fenster zu öffnen und seinen Fernsehapparat auf die Straße zu werfen."
"Nun, wenn du das fertigbringst, werde ich natürlich nicht mehr zweifeln", erwiderte sein Freund. "Suchen wir uns in der dritten Etage das zweite Fenster von links aus."
Der Telepath blieb angespannt stehen. Oh weh, das Fenster öffnete sich nicht, und niemand versuchte, einen Fernsehapparat hinauszuwerfen. Der Telepath schaute finster drein, konzentrierte sich noch einmal ganz stark und, oh Wunder, am Fenster erschien jemand, riss es auf und schrie:
"He, lass mich in Ruhe! Ich habe keinen Fernseher!"

Wir sehen also, dass selbst der zuverlässigste Algorithmus wirkungslos ist, wenn die Bedingungen des Existenzsatzes nicht erfüllt sind!

Kehren wir nach diesem Scherz zur Erörterung der Frage zurück. Wir stellen fest, dass es mit Hilfe von Existenzsätzen, auch wenn deren Beweise nicht effektiv sind, mitunter gelingt, Lösungen in Form einer mathematischen Formel zu erhalten, die zur Gewinnung von Näherungslösungen geeignet sind.
Betrachten wir z.B. die Aufgabe, die Wurzel aus einer positiven Zahl zu bestimmen. Es sei die Zahl $a > 0$ gegeben sowie eine Zahl $x_0 > \sqrt{a}$;für $n = 1, 2, 3...$ gelte

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \tag{1}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Folge (x_n), $n = 1, 2, ...$, monoton ist, und zwar streng fallend, aber da sie nach unten beschränkt ist,

$$x_n > 0, \qquad n = 1, 2, ... \tag{2}$$

hat sie nach dem Weierstraßschen Satz über die Existenz eines Grenzwertes einer monotonen beschränkten Folge einen endlichen Grenzwert. Wir wollen ihn mit x bezeichnen. Führt man in der Gleichung (1) den Grenzübergang aus, so erhält man

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Hieraus folgt

$$x^2 = a$$

und da wegen (2) $x > 0$ gilt, folgt

$$x = \sqrt{a}$$

Der Weierstraßsche Satz ist ein reiner Existenzsatz. Die bekannten Beweismethoden liefern kein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Grenzwerte beschränkter monotoner Folgen.
Außerdem wird in der konstruktiven Analysis bewiesen, dass monotone Folgen existieren, für die kein Algorithmus existiert, durch den man ihren Grenzwert mit einer vorgegebenen Genauigkeit bestimmen könnte (solche Folgen sind in der konstruktiven Mathematik nicht konvergent).

Somit gelingt es, durch Anwendung des Satzes über die Existenz des Grenzwertes einer beschränkten monotonen Folge die Rekursionsformel (1) zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln zu erhalten.
Diese Formel ist zur praktischen Anwendung gut geeignet: sie hat eine einfache Form, und die damit erhaltenen sukzessiven Näherungen x_n der Werte der Wurzel aus a streben sehr schnell gegen den tatsächlichen Wert der Wurzel aus a.

Es kommt häufig vor, dass wir die Existenz der Lösung der von uns untersuchten Aufgaben nicht beweisen können; trotzdem gelingt es Näherungslösungen zu finden, indem man verschiedene Algorithmen aufbaut, oft sogar ohne ihre Konvergenz beweisen zu können; in solchen Fällen können keine Aussagen zur Fehlerabschätzung gemacht werden.

Solche Situationen gibt es, aber sie sollten nicht die Regel sein. Oftmals scheitern auch Versuche der numerischen Lösung eines Problems völlig. In solchen Fällen können qualitative Untersuchungen zu Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und der korrekten Aufgabenstellung eine wesentliche Hilfe darstellen und entscheidende Bedeutung für den Erfolg der Untersuchung haben.
Kehren wir nun wieder zu allgemeineren Problemen des Lehrens der Mathematik zurück.

2.8 Zur Deduktion und Induktion

Achte These: Zu Beginn der Ausbildung sollte man der induktiven Methode den Vorzug geben und allmählich die deduktive Behandlung vorbereiten und anwenden.

Das Problem der induktiven und der deduktiven Methode der Darstellung des Stoffes in der Mathematik erfordert unbedingt eine besondere Betrachtung, denn es gehört zu den Grundlagen der Lehre eines jeden Faches.
Es gibt viele Anhänger sowohl der einen als auch der anderen Methode.

Leider beharren viele auf ihrem Standpunkt und gehen nur von einen bequemen Vorlesungsaufbau aus, ohne den pädagogischen Aspekt dieses Problems zu betrachten.

Insbesondere denken sie nicht darüber nach, wie man den Studenten das Verstehen des Vorlesungsstoffes erleichtern kann.

In den letzten Jahren sind Bestrebungen zu beobachten, die induktive Behandlung nach Möglichkeit durch die deduktive zu ersetzen, deren Zweckmäßigkeit aber oft fragwürdig ist.
Die Wahl des richtigen Weges bei der Einführung neuer Probleme (z.B. der induktiven oder deduktiven Methode der Darlegung), durch den die Studierenden den Stoff möglichst schnell, gut und aktiv beherrschen sollen, wird durch die großen Schwierigkeiten bei der Ausarbeitung einer einheitlichen Lehrmethode erschwert, da die individuellen Fähigkeiten der Studenten bezüglich Auffassungs- und Denkvermögen unterschiedlich sind. Das ist natürlich ein allgemeines Problem, das in jeder Disziplin bei der Ausbildung auftritt.

Die Spezifik der Mathematikausbildung besteht darin, dass die einen sich die Begriffe besser in knapper, eleganter Darstellung aneignen, die anderen in Form einer ausführlichen, allseitigen Beschreibung, dem einen liegt mehr ein Herangehen von unten, vom Besonderen zum Allgemeinen (induktiv), dem anderen mehr ein Herangehen von oben, vom Allgemeinen zum Besonderen (deduktiv), dem einen ein konstruktives, dem anderen ein axiomatisches Herangehen, dem einen ein logisch begründetes, dem anderen ein intuitives, dem einen ein analytisches, dem anderen ein geometrisches Beschreiben usw. Recht unterschiedlich ist auch der Zeitaufwand, den die verschiedenen Menschen zur Aneignung von Informationen benötigen.
Gerade hierin unterscheiden sich auch die Studierenden grundlegend voneinander.

Zweifellos kann man das nicht alles berücksichtigen, und keine Vorlesung bzw. kein Lehrbuch kann den Stoff in einer für jeden Studierenden optimalen Weise darstellen.
Dennoch darf man diese für den Lehrprozess sehr wichtigen Aspekte in keinem Fall vergessen. Besonders die Seminare, wo es der Lehrende mit einer relativ kleinen Gruppe von Studenten zu tun hat, bieten eine gute Möglichkeit, die Ausbildung unter Berücksichtigung der individuellen Besonderheiten der Studenten durchzuführen.

Trotz dieser komplizierten Situation kann man versuchen, gewisse allgemeine Prinzipien zu formulieren, an die man sich bei der Darstellung des Stoffes zweckmäßigerweise halten sollte. Vor allem muss man danach streben, dass die Studenten die Grundbegriffe sicher beherrschen. Deshalb sollten sie in der Regel in einem bereits bekannten Zusammenhang eingeführt werden, der nicht durch zusätzliche unwesentliche Begriffe belastet ist.

Zum Beispiel kann man die Analysis von Anfang an in metrischen Räumen darstellen, wobei man sehr viel Zeit gewinnt und die Vorlesung logisch sehr harmonisch aufbauen kann.
Dennoch wird es meist nicht so gemacht, da der Hörer für eine solche Vorlesung hinreichend gut vorbereitet sein muss. Es ist nicht zweckmäßig, die Theorie der Grenzwerte in metrischen (oder gar topologischen) Räumen darzustellen, wenn die Hörer keine anderen Beispiele metrischer Räume außer dem dreidimensionalen kennen.

Die formale Definition anderer metrischer Räume, z.B. der Funktionenräume, rettet die Sache auch nicht, da man sich erst an diese Räume gewöhnen muss. Sie müssen einem vertraut sein, und man muss die Zweckmäßigkeit und den Nutzen ihrer Einführung verstehen, was beim Fehlen entsprechender Kenntnisse offensichtlich kaum möglich ist.

Ohne die Begriffe der gleichmäßigen Stetigkeit und des bestimmten Integrals kann man unmöglich die Eigenschaften (z.B. die Vollständigkeit) der wichtigsten Funktionenräume richtig verstehen. Daher bringt das Studium der Grundlagen der Analysis nicht den erwarteten Nutzen, wenn es sofort in metrischen Räumen durchgeführt wird.
Den Begriff des metrischen Raumes wie auch jede andere mathematische Abstraktion muss man sich selbstverständlich erarbeiten. Die Funktion an sich ist ein inhaltsreicher Begriff, aber bevor man sie als Punkt eines Funktionenraumes betrachtet, sollte man sich mit ihren Eigenschaften befassen.

So ist der Grenzwert einer Funktion ein sehr wichtiger und notwendiger Begriff; seine sofortige Betrachtung als Spezialfall jedoch, z.B. als Grenzwert auf der Basis des Filters, kann den Studierenden die Aneignung des Grenzwertbegriffes unnötig erschweren. Außerdem ist die Einführung des Filterbegriffes im Anschluss an Grenzwerte von Funktionen und Integralsummen selbstverständlich und gesetzmäßig.

Man kann auch sofort den Begriff des Lebesgueschen Integrals konstruktiv einführen. Das geschieht auf der Grundlage der Theorie messbarer Funktionen oder als Abschließung des linearen Funktionals über Treppenfunktionen, das gleich der Fläche der entsprechenden Treppenfigur in der entsprechenden Norm ist. Dennoch ist zu bezweifeln, ob es zweckmäßig ist, so vorzugehen und den Begriff des Riemannschen Integrals zu einem Zeitpunkt zu vermeiden, wo die Idee des Integrals so naheliegend ist.

Werden Begriffe eingeführt, durch die bereits bekannte Begriffe verallgemeinert werden, sollte man diese unbedingt erwähnen. Spricht man von Fréchetschen oder Gateauxschen Ableitungen, muss man ihren Zusammenhang mit einer gewöhnlichen Ableitung zeigen. Beweist man Sätze der linearen Algebra in mehrdimensionalen Räumen, ist es sehr nützlich zu zeigen, was hieraus für die Ebene und den dreidimensionalen Raum folgt. Denn es geschieht häufig, dass ein Student, nachdem er verschiedene allgemeine Sätze bewiesen hat, nicht in der Lage ist, diese auf den einfachsten konkreten Fall anzuwenden.

Die induktiven Methoden der Stoffdarlegung, bei denen eine sukzessive Verallgemeinerung der Begriffe erfolgt, scheinen für die aktive Aneignung des Stoffes durch die Studenten günstiger zu sein. In diesem Sinne ist die Bevorzugung der induktiven Methode vor der deduktiven zu verstehen.
Man sollte hier noch an einen Rat D. Hilberts erinnern, den er H. Weyl gab: "Beginne mit einfachsten Beispielen." [28]

Was jedoch den Zeitaufwand betrifft, so sollte man ihn nicht nach der Zahl der Vorlesungsstunden rechnen, sondern nach der Zahl der Stunden, die die Studenten für die Aneignung des Stoffes brauchen. Er wird bei der induktiven Methode kaum größer sein als bei der deduktiven.

Bedauerlicherweise gibt es Mathematiklehrer, die sich am Formalismus und an Abstraktionen begeistern, dabei den Stoff aber leider sehr konstruiert und unverständlich darlegen. Das spart meist viel Zeit bei der Darlegung, ist aber vom Standpunkt der aktiven Aneignung des Stoffes nicht gerechtfertigt.

Ob ein Objekt konkret oder abstrakt betrachtet wird, hängt vor allem vom mathematischen Niveau der Studierenden ab.
So wird z.B. für einen Studenten, der nur im Hydrodynamikkurs mit partiellen Differentialgleichungen zu tun hatte, das Studium verschiedener Randwertaufgaben für die Laplacegleichung und der allgemeinen Eigenschaften harmonischer Funktionen zu einem Schritt vom Konkreten zum Abstrakten.

Für jemanden, der die allgemeine Theorie der Differential- oder darüber hinaus der Pseudodifferentialoperatoren studiert, ist die Laplacegleichung ein konkretes Beispiel.
Analog sind in der Theorie der Operatoren im Banachraum die Differentialoperatoren lediglich konkrete Beispiele. Dennoch ist es bei der Darstellung neuer Begriffe, neuer allgemeiner Theorien immer notwendig und zweckmäßig, genügend Zeit für ihre konkrete Veranschaulichung, für die Untersuchung von Beispielen und die Analyse spezieller Situationen aufzuwenden. Erfüllt man diese Bedingungen, kann auch die deduktive Darstellungsmethode gerechtfertigt sein.

Man sollte stets daran denken, dass jede These über die Methodik leicht ad absurdum zu führen ist, wenn sie in einer kategorischen Form ausgesprochen wird. Das bezieht sich auch auf die These über die Bevorzugung der induktiven Methode gegenüber der deduktiven.
Mitunter wird diese Bevorzugung in dem Sinne verstanden, dass man die Einführung eines mathematischen Begriffes durch die Wiederholung des historischen Weges seiner Entstehung und Entwicklung vorbereiten muss. Meist ist das natürlich nicht gerechtfertigt und führt zu nutzlosem Zeitaufwand.

Ein Student von heute ist psychologisch und ausbildungsmäßig hinreichend gut vorbereitet, mathematische Begriffe unmittelbar aufzunehmen, ohne die Analyse ihrer Entstehung zu kennen.
Andererseits sind geschichtliche Rückblicke sehr nützlich, sowohl vom allgemeinbildenden als auch vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus; darüber hinaus beleben sie die Darlegung und dienen damit einer besseren Aneignung des Stoffes.

2.9 Zum Lösen von Anwendungsaufgaben

Neunte These: Die Ausbildung im Lösen von Anwendungsaufgaben mit mathematischen Methoden ist nicht Aufgabe der Mathematik-, sondern der Fachausbildung.

Diese These berührt eines jener Probleme, derentwegen sowohl die Mathematikvorlesungen an technischen Hochschulen als auch die entsprechenden Mathematikbücher besonders häufig kritisiert werden. Zweifellos sind einfachste konkrete Beispiele sehr nützlich, die veranschaulichen, wie mathematische Begriffe zur Untersuchung realer Erscheinungen angewandt werden; beispielsweise wird die Ableitung durch die Geschwindigkeit eines Massepunktes oder die lineare Dichte eines Stabes veranschaulicht, das Integral durch die Arbeit der Kraft, die Aufstellung von Differentialgleichungen durch die Herleitung der Gleichung für den radioaktiven Zerfall usw.

Mehr noch, es wäre ein Fehler, die neunte These so zu verstehen, dass in der Mathematikausbildung das Lösen von Anwendungsaufgaben nicht geübt werden sollte. Das war bis jetzt so und wird auch so bleiben, weil es notwendig und nützlich ist.

Entscheidend ist, dass die systematische Ausbildung der Studenten im Anwenden mathematischer Methoden (die in der Mathematikausbildung erlernt wurden) auf das Lösen praktischer Probleme unbedingt in den Fachbereichen der technischen oder anderen Fachhochschulen erfolgen muss. Das sollte für diese Fachbereiche unbedingte Pflicht sein.
Nur so können die Studierenden davon überzeugt werden, wie nützlich und notwendig die Kenntnis und Nutzung mathematischer Methoden in ihrem Beruf sind.

Geschieht das in den Fachbereichen nicht, so ist das möglicherweise ein Zeichen dafür, dass in dieser Fachrichtung die Mathematik nicht in dem Umfang benötigt wird, wie sie an der betreffenden Hochschule gelehrt wird; vielleicht ist es aber auch ein Zeichen für die ungünstige Situation der Spezialdisziplinen an dieser Einrichtung.

Jedenfalls ist die Mathematikausbildung dort wesentlich effektiver, wo die Mathematik während der gesamten Ausbildung in den Fachdisziplinen umfassend genutzt wird und die mathematischen Kenntnisse für die betreffenden Fachrichtungen auch nach der Grundausbildung ständig erweitert werden.

An den Mathematikvorlesungen wird oft beanstandet, dass nicht in ausreichendem Umfang Differentialgleichungen hergeleitet werden, die reale Erscheinungen beschreiben.
Diese Art von Kritik hängt häufig mit der bei vielen Leuten vorhandenen Gewohnheit zusammen, andere für eigene Versäumnisse zu kritisieren. Mir scheint, dass man sich bei dieser Frage voll und ganz darüber im klaren sein muss, dass die mathematische Modellierung realer Erscheinungen nicht Aufgabe der Mathematik ist.

Wie bereits bemerkt, besteht die Aufgabe der Mathematik im Studium mathematischer Strukturen, ihrer Eigenschaften und Besonderheiten. Man sollte sich nicht darüber wundern, dass in den Mathematikvorlesungen nicht alle mathematischen Modelle entwickelt, nicht alle Differentialgleichungen hergeleitet werden, die für die betreffende Fachrichtung notwendig sind, sondern darüber, dass das nicht in den Fachverlesungen geschieht.

So findet man z.B. kaum eine allgemeine Physikvorlesung (natürlich ist hier nicht die theoretische Physik gemeint), in der die Laplacegleichung oder die Wärmeleitungsgleichung zur Beschreibung einer Erscheinung hergeleitet würde.
Noch schwerer ist es, in diesen Vorlesungen eine Analyse der verschiedenen Randbedingungen für die hier betrachteten Gleichungen zu finden (man setzt offenbar voraus, dass die Mathematiker das alles zu erledigen hätten, aber selbst wenn sie es wollten, hätten sie keine Möglichkeit, es in der Zeit zu tun, die ihnen zur Verfügung steht).

Zu den Kritiken an den Mathematikvorlesungen gehört auch der Vorwurf, dass die Studenten nach Abschluss der Vorlesung den physikalischen Sinn eines bestimmten Terms einer Gleichung häufig nicht kennen. Mir scheint es, dass solche Vorwürfe an den Grundkurs Mathematik nicht gerechtfertigt sind.

Die Erläuterung der konkreten physikalischen Bedeutung eines Terms einer Gleichung ist ebenfalls Angelegenheit der Fachdisziplinen und sollte nicht auf die Schultern der Mathematiker abgewälzt werden (wir betonen nochmals, dass es um den mathematischen Grundkurs geht und nicht um Fachkurse, die eine konkrete Ausrichtung entsprechend dem zukünftigen Beruf des Studenten haben).

Da die Mathematik mathematische Modelle untersucht, gehören z.B. beim Studium von Gleichungen folgende Fragen dazu:
Wie beeinflusst die Veränderung eines bestimmten Terms einer Gleichung die Existenz der Lösung, ihre Eindeutigkeit, ihr asymptotisches Verhalten, die Korrektheit der Aufgabenstellung, die Stabilität der Lösung usw. Es ist keinesfalls einfach, das zu erlernen, aber wenn ein Student diese Dinge beherrscht, begreift er auch die konkreten Fakten leicht, die er in seinem Fach benötigt und die in der Fachausbildung behandelt werden müssen.

Zweifellos ist die Herausbildung der Fähigkeit, mathematische Modelle realer Erscheinungen aufzubauen, eine vorrangige Aufgabe während der Ausbildung von Fachleuten in den genannten Fachrichtungen. Man sollte dieser Aufgabe bedeutend mehr Zeit und Aufmerksamkeit widmen, als das oftmals geschieht.

Besonders wichtig und notwendig für viele Fachrichtungen ist die Fähigkeit, nicht nur determinierte mathematische Modelle, sondern auch stochastische Spielmodelle aufzubauen, hierfür statistische und experimentelle Daten zu benutzen und diese gegebenenfalls mit Hilfe der modernen Rechentechnik zu bearbeiten. Die Methodik dieser Ausbildung ist gegenwärtig noch völlig unzureichend entwickelt.

Dennoch wäre es nicht richtig, den Mathematikern die Hauptarbeit in dieser Richtung zu übertragen. Die Hauptarbeit müssen hier die Fachleute leisten (Physiker, Chemiker, Biologen, Ökonomen usw.).
Natürlich sollen sich die Mathematiker an der Entwicklung mathematischer Modelle beteiligen und dies auch lehren. Das ist nicht nur wünschenswert, sondern auch notwendig. Obwohl die mathematische Modellierung nicht zur Mathematik gehört, gehört sie doch zum Aufgabenfeld der Mathematiker. Daher muss diese Ausbildung von den Fachleuten und den Mathematikern gemeinsam durchgeführt werden. Das sollte aber auf einem hohen fachlichen Niveau unter Berücksichtigung des Wesens der Sache in Fachverlesungen erfolgen.

Es stimmt, dass gegenwärtig die Ausbildung von Fachleuten in mathematischer Modellierung in den Händen der Mathematiker liegt. Das ist notwendig, da dieses Problem nur auf dem Niveau einer guten mathematischen Bildung qualifiziert zu lösen ist. Vielleicht ist der Tag nicht fern, wo auch Studenten physikalischer, biologischer, technischer, medizinischer, ökonomischer und anderer Fachrichtungen die notwendige mathematische

Bildung haben werden, die es gestatten wird, die Ausbildung der benötigten Fachleute in mathematischer Modellierung an den entsprechenden Hochschulen durchzuführen.

Wir betonen nochmals, dass die Ausbildung in mathematischer Modellierung ein Bestandteil der Fachausbildung sein muss und nicht zu Lasten der allgemeinmathematischen Ausbildung gehen darf.
Das Studium der Mathematik darf nicht durch die Ausbildung im Aufbau mathematischer Modelle ersetzt werden. In den Mathematikvorlesungen kann die mathematische Modellierung lediglich der Veranschaulichung dienen.

Den Problemen der mathematischen Modellierung sollte in den Bereichen besondere Beachtung geschenkt werden, in denen gegenwärtig nur grundlegende mathematische Modelle für spezielle Zwecke geschaffen werden. Hierzu gehören beispielsweise Ökonomie, Biologie, Medizin, Planung und Leitung, Soziologie, Linguistik.

Die mathematische Modellierung verdient besondere Beachtung, da sie eine immer größere Rolle auf vielen Gebieten der modernen Wissenschaft und Technik spielt und sich als ökonomisch vorteilhaftes Mittel sowohl bei der Durchführung der Forschung als auch bei der Ausführung mannigfaltiger experimenteller und konstruktiver Arbeiten erweist. So ist z.B. die Benutzung mathematischer Modelle bei der Projektierung von Flugzeugen und Schiffen und ihre Bearbeitung auf Rechnern ökonomisch vielfach günstiger als die Herstellung von Versuchsmustern. Außerdem kann man mathematische Experimente unter Benutzung mathematischer Modelle sogar in den Fällen durchführen, in denen ein reales Experiment unmöglich ist. Beispielsweise kann man sogar die Zukunft des Weltalls in Millionen Jahren vorausberechnen.

Dadurch liefert die mathematische Modellierung in Verbindung mit der modernen Rechentechnik den Wissenschaftlern qualitativ neue Methoden der Untersuchung und der Steuerung sowohl für natürlich ablaufende als auch für vom Menschen geschaffene Prozesse. Ihre umfassende Nutzung ist für eine erfolgreiche Entwicklung der Wissenschaft notwendig.
Die mathematische Modellierung ist für den Prozess der Wissensakkumulation außerordentlich wichtig. Aus diesem Grunde müssen qualifizierte Fachleute herangebildet werden, die nicht nur ihr Fachgebiet beherrschen, sondern auch die Mathematik, die die Methoden der mathematischen Modellierung kennen und in der Lage sind, sie schöpferisch anzuwenden.

Das Problem der Heranbildung solcher Spezialisten wird jetzt zu einem der wichtigsten und aktuellsten Probleme einer zeitgemäßen Ausbildung. Die richtige Organisation der Ausbildung in mathematischer Modellierung ist nur bei einer guten Zusammenarbeit der Mathematiker und der entsprechenden Fachleute möglich.

2.10 Zur Wahl des Bildungsinhaltes und seiner Realisierung

Zehnte These: Welche Teilgebiete der Mathematik in welchem Umfang zu lehren sind, müssen die Fachleute des betreffenden Gebietes nach Konsultation der Mathematiker festlegen, aber wie zu lehren ist, bleibt den Mathematikern überlassen.

Es ist sehr schwer, über diese These zu diskutieren. Der Inhalt ist vollkommen klar; aber jeder glaubt, besser als alle anderen zu wissen, wie die Mathematik zu lehren ist, und es ist praktisch unmöglich, ihn zu überzeugen, besonders dann, wenn er kein Mathematiker, sondern Anwender der Mathematik ist.

Wir unterstreichen, dass der Sinn dieser These nicht darin besteht, die Einflusssphären aufzuteilen, sondern vielmehr eine Zusammenarbeit und Koordinierung der Mathematikbereiche mit den Fachbereichen zu erreichen.

Vernünftiger erscheint der Grundsatz (der in der Regel an den Hochschulen auch realisiert wird, jedoch von Zeit zu Zeit heftige Kritik seitens der Fachbereiche hervorruft), dass der Umfang mathematischer Kenntnisse, der Grad ihrer Beherrschung und die Fähigkeiten, die die Studenten erwerben sollen, von führenden Fachleuten der betreffenden Fachrichtung bestimmt werden.
Die Zeit, die für das Studium dieses Stoffes zur Verfügung steht, muss natürlich von den Vertretern der Fachbereiche und den Mathematikern gemeinsam festgelegt werden. Dabei sollte man beachten, dass alle für den inneren Zusammenhang notwendigen Bestandteile berücksichtigt werden, die sowohl für die Mathematik als auch für die Fachwissenschaft wesentlich sind.

Planung, Erarbeitung der Lehrmethodik und Durchführung der Mathematikausbildung sollten voll und ganz den Mathematikern selbst obliegen. In Wirklichkeit verläuft das meist nicht so glatt und wird von Zeit zu Zeit durch Konflikte zwischen Mathematik- und Fachbereichen erschwert.

Mitunter sind an diesen Konflikten die Mathematiklehrkräfte selbst schuld. (Ich denke jedoch, solche Fälle sind selten und nicht typisch, wenn ausreichend qualifizierte Kader vorhanden sind. Das Problem der Heranbildung von Lehrkräften für technische Hochschulen ist jedoch so kompliziert, dass wir es hier nicht berühren wollen. Wir gehen davon aus, dass Kader mit der notwendigen Qualifikation vorhanden sind, obwohl das in Wirklichkeit nicht immer der Fall ist.)

Es kommt vor, dass sie durch eine Art Snobismus den Wünschen der Fachbereiche kein Gehör schenken, sondern einen Satz nach dem anderen dogmatisch abhandeln, ohne die Notwendigkeit zu beachten, dass die Studenten den Stoff schöpferisch beherrschen lernen, ihre Intuition in der notwendigen Richtung entwickeln und einen praxisbezogenen Standpunkt gewinnen, der den mathematischen Apparat zur Lösung konkreter Aufgaben benutzt, ihn aber nicht als Selbstzweck betrachtet.
Man trifft gelegentlich unter denjenigen, die die Mathematik lehren, besonders bei solchen, die im Geiste der reinen Mathematik erzogen werden sind, auf eine Unterschätzung und sogar auf ein verächtliches Verhalten gegenüber den numerischen Lösungs-

methoden und auf eine Überschätzung allgemeiner qualitativer Theorien sowie auf die Abneigung, sich über den Unterschied zwischen dem Existenzbeweis der Lösung einer Aufgabe und dem Ermitteln einer stabilen algorithmischen Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung klar zu werden.

Das geschieht ungeachtet dessen, dass solche Aufgabenstellungen rein mathematischer Natur sind. Sie sind sehr wichtig und nicht selten schwieriger und tieferliegend als entsprechende Probleme der "reinen" Mathematik.

Es sei noch auf einen ähnlich gelagerten Vorwurf an die Mathematiker hingewiesen. Wenn mathematische Begriffe erklärt werden, die in der Physik (oder einem anderen Bereich der Wissenschaft) Anwendung finden, versäumen sie oftmals, die Verbindung dieser Begriffe zu ihren traditionellen Anwendungen herzustellen. Das sollte man jedoch unbedingt tun.
Ähnlich ist es z.B. auch bei der Deltafunktion oder der Theorie der Skalar- und Vektorfelder. Der Autor konnte sich mehrfach davon überzeugen, dass es den Studenten schwerfiel - nachdem sie in der Analysisvor1esung die Begriffe der Divergenz, den Fluss eines Vektorfeldes und den Beweis des Satzes von Gauß-Ostrogradski kennengelernt hatten - die Frage zu beantworten:
Wie groß ist die Divergenz des Feldes einer punktförmigen elektrischen Ladung in einem gewissen Abstand von ihr?

So etwas ist natürlich unzulässig; der Gerechtigkeit halber sei gesagt, dass die Fachbereiche Mathematik und Physik in gleichem Maße hierfür verantwortlich zeichnen. Nachdem der Student in der Mathematik bestimmte Begriffe kennengelernt hat, dürfte ihre Anwendung in der Physik keine Schwierigkeiten bereiten.

Mängel beim Lehren der Mathematik führen statt zur Analyse der Ursachen häufig zu einer aktiven Einmischung der Fachbereiche in die Mathematikausbildung, was im allgemeinen nicht zur Verbesserung der Mathematikausbildung führt. Die mir bekannten Versuche von Nichtmathematikern, die Mathematikausbildung in die Hände zu nehmen, haben nicht zu positiven Resultaten geführt, was zu erwarten war. Zweifellos kann niemand die Mathematik besser lehren als ein guter Mathematiker; dafür ist er auch ein versierter Spezialist auf seinem Gebiet. Nur er, der das Fach als Ganzes beherrscht, kann wirklich entscheiden, was man allgemein oder speziell oder überhaupt nicht beweisen sollte und welche Beispiele man am zweckmäßigsten betrachtet.

Um die Mathematikvorlesung richtig aufzubauen, muss ein bestimmtes Niveau gegenseitigen Verständnisses zwischen Mathematik- und Fachbereichen vorhanden sein. Ist dieses Niveau hoch genug - und dafür gibt es viele Beispiele - zeigt sich auch der Erfolg.

Wir haben hier zehn grundlegende Thesen für die Mathematikausbildung an Hochschulen formuliert. Selbstverständlich hätte man auch von anderen Thesen ausgehen können:

In der Methodik kann man nicht allein durch logische Überlegungen feststellen, was richtig und was falsch ist. Nur gute Ausbildungsergebnisse bei der Anwendung einer

Lehrmethode sind das Kriterium für deren Zweckmäßigkeit. Die hier angegebenen zehn Prinzipien werden im Grunde genommen an vielen Hochschulen bei der Mathematikausbildung verwirklicht und bieten die Möglichkeit, qualifizierte Absolventen heranzubilden, die den mathematischen Apparat bei ihrer Arbeit erfolgreich nutzen können.

Dennoch darf man sich mit den erzielten Erfolgen nicht zufrieden geben, wenn man das ungeheure Tempo der Entwicklung der Wissenschaft, auch der Mathematik, betrachtet, besonders, weil dieses Tempo ständig zunimmt.
Die direkte Folge des schnellen Wachstums und Fortschritts der Forschung sowie der damit verbundenen Zunahme des Anteils der Wissenschaftler an der Gesamtbevölkerung ist eine gewaltige Informationslawine.

Auch der Umfang neuer mathematischer Informationen nimmt beständig zu: Es werden vielfältige Aufgaben gelöst (theoretische, experimentelle, angewandte), neue Begriffe entstehen, neue mathematische Modelle werden geschaffen, alte Theorien weiterentwickelt und verallgemeinert, neue aufgebaut, neue Untersuchungsmethoden entwickelt, neue Sätze bewiesen, neue Hypothesen aufgestellt, und das alles findet seinen Niederschlag in der ständig wachsenden Zahl publizierter wissenschaftlicher und methodischer Beiträge, Monographien, Lehrbücher (obwohl letztere nach wie vor häufig mangelhaft bleiben - die Lehrbuchliteratur kann nicht rechtzeitig die neuesten Ergebnisse der modernen Wissenschaft und Technik wiedergeben), deponierter Manuskripte und Dissertationen.

Die Anzahl wissenschaftlicher Verlage nimmt zu, immer neue mathematische Zeitschriften werden gegründet, Preprints werden verbreitet, die für einen schnellen Informationsaustausch immer mehr an Bedeutung gewinnen usw.

Es geht nicht nur um eine quantitative Zunahme der Informationen. Hier finden auch große qualitative Veränderungen statt. Ein bedeutender Teil der Informationen ist stark spezialisiert und kann deshalb nur von einem kleinen Kreis von Fachleuten verstanden und richtig bewertet werden. Die ungeheure Informationsflut, die eine Fülle durchaus nützlicher, aber auch qualitativ sehr unterschiedlicher Informationen enthält, zwingt dazu, die vorhandenen Informationen zu systematisieren.

Eine solche Systematisierung trägt wesentlich dazu bei, nützliche Informationen rechtzeitig zu erlangen und den Teil herauszufinden, der notwendig ist, um ein gestelltes Ziel zu erreichen. Insbesondere müssen die Informationen optimal ausgewählt werden, die sich die Studenten während ihrer Ausbildung an einer Hochschule aneignen müssen.
Das ist eine sehr komplizierte Aufgabe.

Deshalb liegt jetzt auf den Vertretern der älteren Generation von Wissenschaftlern die Verantwortung, das notwendige und wichtigste Material aus dem gesamten Wissensschatz der modernen Wissenschaft auszuwählen, das für die Jugend tatsächlich notwendig ist und ihr deshalb vorrangig vermittelt werden muss. Hier ist das Gefühl für das rechte Maß besonders wichtig.

Zum Schluss sei nochmals daran erinnert, dass sich ein Studierender nur eine begrenzte Informationsmenge aneignen kann. Von welchen Prinzipien wir bei der Auswahl des

Stoffes auch ausgehen, den wir unseren Schülern übermitteln wollen, welche Ziele wir uns dabei auch stellen, wenn wir Erfolge in der Ausbildung erreichen wollen, sollten wir immer an einen Aphorismus Koz'ma Prutkovs [27] denken, der (in etwas freierer Übersetzung) lautet:

"Man kann nicht alles verzehren, was ein reichlich gedeckter Tisch bietet."

3 Literaturverzeichnis

[9] [1] Alexandroff, P. S., Die Welt des Wissenschaftlers, Nr. 8, 1974, 2 - 9.

[2] Appel, K.; Haken, w.: Every planar map is four colorable. Bulletin of the Am. Math. Soc., 33 (1976) S.

[3] Bell, E. T.: Men of Mathematics. New York: Dover Publications 1937. Deutsche Übersetzung: Die großen Mathematiker. Düsseldorf, Wien: Econ-Verlag 1967.

[4] Bourbaki, N.: Funktionen einer reellen Veränderlichen. Elementare Theorie.

[5] Bourbaki, N.: Skizzen zur Geschichte der Mathematik.

[6] Coleman, A. J.; Edwards, G. D.; Beitsner, K. P.: Mathematical sciences in Canada. Science Council of Canada, Nr. 38, 1975.

[7] Diendonné, J.: Lineare Algebra und elementare Geometrie 1972.

[8] Dorodnicyn, A. A.: Was soll man retten?. Nr. 2,1973, 50 - 53.

[9] Gardner, M.: Mathematik für Mußestunden. 1972.

[10] Gogol, N.V.: Gesammelte Werke in 5 Bänden, Band 4. 1959.

[11] Hadamard, J.: Die psychologische Untersuchung des Schöpferischen in der Mathematik. 1970.

[12] Die Hilbertschen Probleme. 2. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1979.

[13] Ilecko, B.: Wissenschaftliche Forschung in Frankreich. 1971.

[14] Klein, M.: Logik kontra Pädagogik. 1973

[15] Kolmogorov, A. N.: Über den Beruf des Mathematikers. 1954.

[16] Krylov, A. N.: Erinnerungen und Skizzen. 1956.

[17] Littlewood, J.: Verschiedenes aus der Mathematik. 1965.

[18] Mathematische Bildung - 1957.

[19] Moiseev, N. N.: Ein Mathematiker stellt Fragen. 1974.

[20] Novikov, S. P.: Die Umgestaltung der Mathematikausbildung ist unumgänglich. 1973.

[21] Pis'men, L.: Physiker kontra Mathematiker?. 1972.

[22] Poincaré, H.: Mathematisches Schaffen

[23] Polya, G.: Mathematik und plausibles Schließen (Obere. a. d. Engl.), 2 Bde., 2.

[9] Die nicht genauer gekennzeichneten Werke beziehen sich auf in russischer Sprache in der UdSSR veröffentlichte Ausgaben.

Aufl. Basel: Birkhäuser Verlag 1969 u. 1975.

[24] Polya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben - Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren (Übers. a. d. Engl.), 2 Bde., Basel: Birkhäuser Verlag 1967.

[25] Polya, G.; Szegö, G. - Hanna, F., Care, F.: Aufgaben und Sätze aus der Analysis). 1956.

[26] Postnikov, A. G.: Kultur der Mathematikausbildung. 1975.

[27] Prutkov, K.: Aufsätze. 1953.

[28] Reid, C.: Hilbert. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1970.

[29] Renyi, A.: Dialoge über Mathematik (Übers. a. d. Ung.), 2. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972.

[30] Sachs, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil II. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972.

[31] Srejder, Ju.: Mathematiker in eigener Sache. 1972.

[32] Sobolev, S. L.: Einführung in die Theorie der Kubaturformeln. 1974.

[33] Spohn, W. G. jr.: Ist die Mathematik zu retten?. 1973.

[34] The Assayer, Discoveries and opinions of Galileo. New York: Doubleday Anchor Books 1957.

[35] Wissenschaftspolitik der USA. 1971.

[36] Zykov, A. A.: Theorie der endlichen Graphen, Das Vierfarbenproblem. 1969.

Ergänzende Literatur

[37] Auth, J.; Körber, K.-H.; Lotze, W.: Zu einigen Fragen der mathematisch-physika1ischen Grundausbildung. Hochschulwesen, Heft 2, 1982, 32 - 36.

[38] Greuel, O.; Körth, H.; Manteuffel, K.; Schneider, H.: Zur Mathematikausbildung von Ingenieuren und Ökonomen. Mitt. Math. Ges., Heft 2, 1978, 53 - 73.