H.-J. Sprengel / O. Wilhelm

Funktionen und Funktionalgleichungen

1984 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 114
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Sieben alte Bücher hecken leicht ein neues aus.
Sprichwort

Sicher gibt es mindestens sieben alte Bücher über Funktionalgleichungen, das eigentliche Ziel unserer Betrachtungen. Warum also ein weiteres?
Wir haben versucht, unser Büchlein so zu schreiben, dass möglichst wenige Vorkenntnisse benötigt werden und somit z.B. bereits Schülern ein Zugang zu diesem interessanten und wesentlichen Gebiet der Mathematik ermöglicht wird.

Mit Ausnahme von Kapitel 7 reicht zum Verständnis - ein intensives Mitarbeiten vorausgesetzt -das Schulwissen der 8. Klasse aus. Weiterhin haben wir uns um einen Aufbau bemüht, der sehr unterschiedlichen Ansprüchen gerecht werden kann.
Für eine erste Einführung genügt das Studium der Kapitel 1 bis 4 und der Abschnitte 5.1. und 6.1., die schwierigeren Probleme sind ohnehin durch * besonders gekennzeichnet.

Leser, die bereits grundlegende Kenntnisse besitzen, können diese in den ersten Kapiteln an den Aufgaben überprüfen und etwa mit Abschnitt 4.2 das systematische Studium aufnehmen. Da ein tieferes Verständnis erst mit der aktiven Beschäftigung entstehen kann, ist die große Anzahl von Aufgaben als ein von uns gewollter, wesentlicher Bestandteil anzusehen.

Wir hoffen, insgesamt ein Büchlein vorzulegen, das für Schüler (etwa ab Klasse 10), Lehrer (insbesondere AG-Leiter), Studenten der ersten Semester von Nutzen ist und auch von manchem Experten noch mit Interesse gelesen wird.

Für die Hinweise, die uns bei der Arbeit nützlich waren und uns in unserem Vorhaben bestärkten, danken wir Prof. Dr. H. Bausch und Prof. Dr. D. Ilse.
Unser Dank gilt auch Frau Kirmse, die das Manuskript mit gewohnter Zuverlässigkeit schrieb, dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit sowie dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam 1983

H.-J. Sprengel, O. Wilhelm

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Was ist eine Funktion?

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.
D. Hilbert

Täglich betrachten und nutzen wir Zusammenhänge, die wir als funktional bezeichnen können.
Beobachten wir den Zeigerausschlag z eines Tachometers, so ist offensichtlich, dass er von der Anzahl n der Umdrehung der Räder pro Zeiteinheit abhängt; jeder Zahl n ist genau ein Wert z zugeordnet.

Bleiben wir bei Bewegungsproblemen! Setzen wir die Geschwindigkeit v eines Fahrzeuges als konstant voraus, so können wir mittels der Formel $s = v \cdot t$ den nach einer vorgegebenen Zeit t zurückgelegten Weg s berechnen; jeder Zeit t wird so genau ein Wert s zugeordnet.
Möchten wir die zum Zurücklegen eines bestimmten Weges s benötigte Zeit t berechnen, so geschieht das einfach nach der Formel $t = \frac{1}{v} \cdot s$; dabei ist jedem vorgegebenen Weg s genau ein Wert t zugeordnet.

Auf unsere einfachen Beispiele würde bereits der Funktionsbegriff zutreffen, wie er 1718 von Johann Bernoulli gegeben wurde:

D (1.1) Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.[1]

Betrachten wir die Formeln in unseren Beispielen als einfache analytische Ausdrücke, so erkennen wir auch die von Euler aus dem Jahre 1748 stammende Präzisierung als zutreffend:

D (1.2) Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist.[2]

Eine einerseits umfassende, andererseits aber auch völlig scharfe Definition des Begriffes "Funktion" gelang erst mit den Prinzipien der Mengenlehre, wie sie am Ende des 19. Jahrhunderts von Georg Cantor geschaffen wurden.
Ausgehend vom Begriff der Menge, wollen wir jetzt eine Kette von Begriffen erläutern, an deren Ende der Funktionsbegriff steht.[3] Den Begriff "Menge" verwenden wir dabei als Grundbegriff und benutzen die berühmte Cantorsche Definition nur als Umschreibung zum besseren gegenseitigen Verständnis:

[1] zitiert nach [1], S. 191
[2] zitiert nach [1], S. 192
[3] Für ausführlichere Darstellungen verweisen wir auf [2], S. 15-56, oder auf die mit vielen Beispielen aus der Schulmathematik angereicherten Ausführungen in [3], S. 7-15, 47-50, 136-148, bzw. in [4], S. 28-136.

D (1.3) Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.[4]

Handelt es sich dabei um eine Zusammenfassung von endlich vielen Elementen, so lässt sich die Menge durch die Aufzählung aller dieser Elemente angeben.

B (1.4) $M = \{O, L\}$ bzw. $N = \{OO, OL, LO, LL\}$ bedeutet, dass die Menge M die Zusammenfassung von den zwei Elementen O und L ist und N die der vier Elemente OO, OL, LO und LL.

Wichtiger ist - insbesondere für die Erfassung von Mengen mit unendlich vielen Elementen - die Beschreibung von Mengen mittels einer erzeugenden Aussageform. [5]

B (1.5) $M = \{x : x \in \mathbb{N}$ und $x^2 > 50\}$ bedeutet, dass M genau die natürlichen Zahlen zu enthält, deren Quadrat größer als 50 ist, d.h., dass z.B. die natürliche Zahl 8 in M enthalten ist, da $8^2 > 50$ gilt, 7 ist dagegen in M nicht enthalten, da 7^2 kleiner als 50 ist. In unserem Beispiel ist $x^2 > 50$ die erzeugende Aussageform, $x \in \mathbb{N}$ gibt den Grundbereich der Variablen x an.

Aus dem "Paradies" der Mengenlehre benötigen wir noch die Begriffe Teilmenge und Produktmenge.

D (1.6) Man nennt eine Menge M eine Teilmenge der Menge N, wenn jedes Element der Menge M auch Element der Menge N ist, und schreibt hierfür $M \subseteq N$.

D (1.7) Sind M und N beliebige Mengen, so versteht man unter der Produktmenge $M \times N$ der Mengen M und N die Menge aller geordneten Paare[6] (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, d.h. $M \times N = \{(x, y) : x \in M$ und $y \in N\}$.

A (1.8) Man bilde mit den in B (1.4) angegebenen Mengen die Produktmengen $M \times N$ und $N \times M$.

D (1.9) Eine beliebige Teilmenge F einer Produktmenge $M \times N$ nennt man Korrespondenz[7] aus M in N.

Die Menge $F_0 = \{(OO, L), (OL, L), (LO, L), (LL, O)\}$ wäre eine der (wie vielen?) möglichen Korrespondenzen aus N in M bezüglich der Aufgabe A (1.8).

Wie aber beschreiben wir die Auswahl einer unendlichen Teilmenge aus einer unendlichen Produktmenge? Wiederum benutzen wir eine erzeugende Aussageform, allerdings in zwei Variablen.

[4]zitiert nach [1], S. 279

[5]Bezüglich der hier benötigten Einführung in die Grundbegriffe der Logik verweisen wir z.B. auf [5], S. 7-12, [6], Kap. 15.1 und 15.2, oder [4], Kap. 1, bezüglich des verwendeten Mengenbildungsprinzips auf [2], S. 20.

[6]Diesen Begriff setzen wir als bekannt voraus, verweisen ansonsten auf [4], S. 56-59, oder [2], S. 43/44.

[7]Diese Bezeichnung verwenden wir in Übereinstimmung mit Asser (vgl. [2], S. 48), von anderen Autoren werden auch die Begriffe "Abbildung" oder "Relation" verwendet.

B (1.10) $F_1 = \{(x,y) : x \in mathbbR$ und $y \in \mathbb{R}$ und $y = x+1\}$ ist eine Teilmenge der Produktmenge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Durch die erzeugende Aussageform $y = x+1$ wird festgelegt, wie die Teilmengenbildung erfolgt. Es gilt z.B. $(2,3) \in F_1$; da $2 \in \mathbb{R}$ und $3 \in mathbbR$ und $3 = 2+1$ gilt. Dagegen gilt $(3,2) \notin F_1$, da zwar $3 \in \mathbb{R}$ und $2 \in \mathbb{R}$, aber $2 \neq 3+1$ gilt.

A (1.11) Es sei $F_2 = \{(x,y)z : x \in \mathbb{R}$ und $y \in R$ und $x^2+y^2 = 4\}$. Man stelle fest, welche der geordneten Paare $(0,-2)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3},1)$ und $(0,4)$ Elemente der Korrespondenz F_2 sind.[8]

Unter Verwendung des Begriffes Eindeutigkeit erreichen wir nun das Ende unserer Begriffskette Menge - Produktmenge - Korrespondenz - Funktion.

D (1.12) Man nennt eine Korrespondenz F eindeutig, wenn für alle x, y_1. y_2 aus $(x,y_1) \in F$ und $(x,y_2) \in F$ die Gleichheit $y_1 = y_2$ folgt.
Jede eindeutige Korrespondenz heißt eine Funktion.

Veranschaulichen wir die Mengen M und N wie in Abb. 1, so können wir die durch die Korrespondenz zwischen den Elementen von M und N hergestellte Zuordnung durch Pfeile angeben. Wir nennen eine solche Veranschaulichung Graph der Korrespondenz.[9] Abb. 1a veranschaulicht eine Funktion, die in Abb. 1b dargestellte Korrespondenz ist dagegen nicht eindeutig. (Warum?)

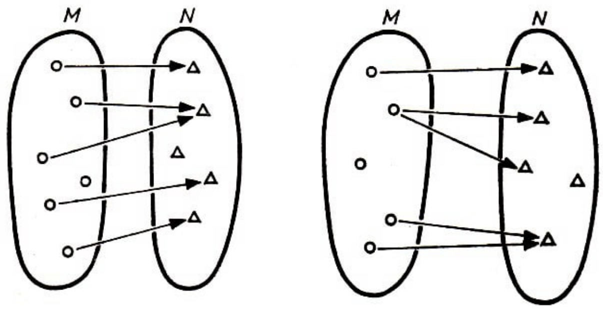


Abb. 1a und b

A (1.13) Für die Korrespondenz $F_0 = \{(OO,L),(OL,L),(LO,L),(LL,O)\}$ zeichne man einen Graphen und begründe, dass F_0 sogar eine Funktion ist.

Eine solche Begriffsbestimmung hat nun den Vorteil, dass man mit dem Fundament der Mengenlehre festen Boden unter den Füßen spürt und auch die Entscheidung über das Zutreffen der Definition prinzipiell leicht ist. Unsere einführenden Beispiele lassen sich z.B. zunächst als Korrespondenzen schreiben:[10]

$$F_3 : \{(t,s) : t \in \mathbb{R}_+ \text{ und } s \in \mathbb{R}_+ \text{ und } s = v \cdot t\}$$

wobei v eine beliebig, aber fest gewählte positive reelle Zahl sei, bzw.

$$F_4 : \{(s,t) : s \in \mathbb{R}_+ \text{ und } t \in \mathbb{R}_+ \text{ und } t = \frac{1}{v}s\}$$

[8]Wir weisen darauf hin, dass $\mathbb{R}$ - im Unterschied zum derzeitigen Schulgebrauch - bei uns die Menge der reellen Zahlen bezeichnet (vgl. S. 79).
[9]Vgl. [6], S. 115.
[10]Mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

F_3 und F_4 sind dann als Funktionen nachgewiesen, wenn die Eindeutigkeit bewiesen ist. Das ist jedoch sehr leicht.

A (1.14) Man entscheide, ob F_1 (aus B(1.10)) und F_2 (aus A (1.11)) Funktionen sind.

Unsere gewählte Definition ist aber auch umfassender als ihre "Vorgänger", ihr zufolge ist beispielsweise F_0 (aus A (1.13)) eine Funktion, nach den Definitionen D (1.1) bzw. D (1.2) hätte man F_0 aber wohl kaum Funktion zu nennen.[11]

Wir wollen nun noch einige Begriffe klären und für unsere weiteren Betrachtungen wichtige Abmachungen treffen.

Ist eine Korrespondenz sogar eine Funktion, so wollen wir das in der Bezeichnung dadurch deutlich machen, dass wir kleine Buchstaben, z.B. f zur Bezeichnung verwenden. Gilt $(x, y) \in f \subseteq M \times N$, so bedeutet das zwar, dass $x \in M$ gilt, umgekehrt muss aber wegen der Teilmengenbeziehung nicht jedes Element aus M in einem der Paare aus f vorkommen. Daher ist die folgende Definition angebracht.

D (1.15) Die Menge aller zu aus M, zu denen ein y aus N mit $(x, y) \in f$ existiert, heißt der Definitionsbereich $D(f)$ der Funktion f aus M in N, seine Elemente nennt man auch Argumente von f.

Wenn wir nun vereinbaren, dass $M = N = \mathbb{R}$ gelten soll,[12] so wird doch f nur noch von der erzeugenden Aussageform H_f abhängen. Unter dieser Vereinbarung genügt es also, zur Festlegung von f lediglich H_f anzugeben.
Für F_1 aus B (1.10) schreiben wir also kurz $y = x + 1$.

Abschließend wollen wir noch vereinbaren, uns auf solche Funktionen zu beschränken, für die H_f wesentlich durch eine Gleichung $y = f(x)$ beschrieben wird. $f(x)$ sei dabei ein Term, in dem nur eine Variable x auftritt. Die Gleichung $y = f(x)$ nennen wir Funktionsgleichung.[13]

A (1.16) Man ermittle $D(f)$, wobei f durch die erzeugende Aussageform wie folgt festgelegt ist:[14]
a) $y = x^2$, b) $y = x^2$ und $x \geq 0$, , c) $y = \frac{1}{x}$ und $x \neq 0$, , d) $y = \sqrt{4 - x^2}$[15].

Trotz unserer vereinbarten Einschränkungen bleibt uns genügend Raum, hinreichend viele interessante und auch schwierige Probleme zu formulieren und zu lösen.

[11] Gerade solche Booleschen Funktionen sind heute auch von Interesse; vgl. etwa [7].
[12] In der Bezeichnung von Görke ([4], S. 125) sind das die "Zahl-Zahl-Funktionen".
[13] Häufig spricht man auch kurz von "der Funktion $y = f(x)$" oder von "der Funktion $f(x)$", obwohl es exakt heißen müsste "die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$".
[14] In diesen wie auch den folgenden Fällen müsste, streng genommen, zunächst die Eindeutigkeit nachgewiesen werden. Wir überlassen das dem Leser.
[15] Da für den Radikanden $r \in \mathbb{R}_+$ gelten muss, wäre wie in c) eine zusätzliche Einschränkung bezüglich x nötig. Diese lässt man aber häufig weg, da sie sich eben aus $r \in \mathbb{R}_+$ ergibt.

1.2 ... und eine Funktionalgleichung?

Nicht Kunst und Wissenschaft allein,
Geduld will bei dem Werke sein.
J. W. v. Goethe

Wir betrachten nun Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x)$ beschrieben sind. Wie wir mit den folgenden Beispielen zeigen werden, kann es sinnvoll und wichtig sein, die Funktionswerte, die die Funktion f für verschiedene Argumente annimmt, miteinander zu vergleichen.

B (1.17) Um den radioaktiven Zerfall eines Stoffes zu beschreiben, verwendet man die für ein radioaktives Element charakteristische Halbwertszeit T. Sie gibt dasjenige Zeitintervall an, in dem sich die Hälfte der ursprünglichen Masse des zerfallenden Elementes umgewandelt hat.
Für eine Funktion f, die den Zerfallsprozess in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, muss

$$f(t+T) = \frac{1}{2} f(t)$$

gelten.

B (1.18) In der Zinseszinsrechnung werden die Zinsen für ein Kapital K_0 unter der Annahme berechnet, dass die bereits erhaltenen Zinsen wiederum verzinst werden. Nach der Zeit t ergibt sich ein Kapital $f(t) \cdot K_0$, wobei $f(t)$ die Vervielfachung des Kapitals beschreibt.
Wird die Verzinsung nach diesem Prinzip um die Zeit t^* verlängert, so ergibt sich, betrachtet man $f(t) \cdot K_0$ als Ausgangskapital, das Endkapital $f(t^*) \cdot f(t) \cdot K_0$. Dieses Kapital muss sich aber auch ergeben, wenn K_0 über den Zeitraum $t + t^*$ nach diesem Prinzip verzinst wird, d.h., es muss

$$f(t^*) \cdot f(t) \cdot K_0 = f(t + t^*) \cdot K_0$$

gelten.

B (1.19) Die Wirkung einer Kraft x_i auf einen Körper (Bewegung, Deformation o.ä.) werde durch die Funktion f beschrieben. Häufig ist zu beobachten, dass die Summe solcher Wirkungen, die durch zwei Kräfte erzeugt werden, gleich derjenigen Wirkung ist, die durch die Summe der beiden Kräfte erzielt wird. Dieser Sachverhalt lässt sich mit Hilfe der Gleichung

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

ausdrücken.

B (1.20)[16] Im "Liber abaci", einem Mathematikbuch des 13. Jahrhunderts, wird die Vermehrung eines Kaninchenpaares betrachtet. Dabei wird angenommen, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt und die Kaninchen gebären vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an.

[16] Dieses Beispiel wird von uns später nicht wieder aufgegriffen, wir verweisen daher Interessenten auf [8].

Ist $f(n)$ die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n, so gilt demnach

$$f(1) = f(2) = 1 \qquad \text{und für } n > 2 \qquad f(x) = f(n-1) + f(n-2)$$

In jedem der angeführten Beispiele wurde der Sachverhalt im mathematischen Sinne durch eine Gleichung erfasst.
Für diese Gleichung, die wir eine Funktionalgleichung in der Funktion f nennen wollen, erweist sich in allen Fällen als wesentliche Eigenschaft, dass Funktionswerte einer unbekannten Funktion f für verschiedene Argumente zueinander in Beziehung gesetzt sind.
Dabei ist der Definitionsbereich der Funktion durch den vorgegebenen Sachverhalt bestimmt. In den Beispielen B (1.17) und B (1.18) gilt $D(f) = \mathbb{R}_+$, im Beispiel B (1.20) dagegen gilt $D(f) = \mathbb{N}$.

Ist die Funktion f wie in Abschnitt 1.1 gegeben, so lässt sich $D(f)$ ermitteln (vgl. A (1.16)), bei unseren jetzigen Betrachtungen kennen wir aber f nicht, sondern nur gewisse Eigenschaften, die sich in einer Funktionalgleichung ausdrücken. In diesem Fall stellt also die Angabe von $D(f)$ eine weitere wichtige Information über die Funktion f dar.

$D(f)$ steht in einem engen Zusammenhang mit den Grundbereichen der Variablen, die im Argument der Funktion auftreten (aber auch an anderen Stellen auftreten können). In B (1.18) fordern wir wegen des realen Sachverhaltes $t \in \mathbb{R}_+$; daraus folgt zwangsläufig, da $f(t)$ in der Funktionalgleichung auftritt, dass $\mathbb{R}_+ \subseteq D(f)$ gilt.
An anderen Beispielen könnte man feststellen, dass in solchen Gleichungen außer Konstanten auch bekannte Funktionen und. weitere unbekannte Funktionen auftreten können.
D (1.21)[17] Eine Funktionalgleichung in den Funktionen $f1, ..., f_k$ ist eine Gleichung, welche n unabhängige Veränderliche $x_1, ..., xn$ $(n \geq 1)$ und k unbekannte Funktionen $f_1, ..., f_k$ $(k \geq 1)$ sowie eine endliche Zahl von bekannten Funktionen enthält. Dabei treten die n unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ - bzw. ein Teil von ihnen - als Argumente der Funktionen auf.

Die Menge aller n-Tupel $(x_1, ..., x_n)$, die die möglichen Belegungen der n unabhängigen Veränderlichen darstellt, nennt man den Definitionsbereich D der Funktionalgleichung, der Grundbereich der Variablen f_i $(i = 1, ..., k)$ heißt die zugelassene Funktionenklasse F.

Außer der Gleichung selbst gehört zur vollständigen Beschreibung einer Funktionalgleichung also auch die Angabe von D und F.

B (1.22) $f(x_1 + x_2) - 2f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2f(x_2) = x_2 - 2$ (*)
Hier gilt $n = 2$ und $k = l$, außerdem tritt die bekannte Funktion $g(x) = x - 2$ auf. Als Argumente der Funktion f treten die unabhängigen Veränderlichen x_1 und x_2 und ihre Linearkombinationen $x_1 + x_2$ und $x_1 - x_2$ auf.

[17]Die hier gegebene Definition entspricht unseren Absichten. Interessenten für andere (eben auch nicht einheitliche) Definitionen verweisen wir z.B. auf [9], S. 20, oder [10], Bd. I, S. 573.

Zur vollständigen Beschreibung von (*) als Funktionalgleichung fehlt noch die Angabe von D und F. Es könnte z.B. festgelegt sein:

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und F Sei die Menge F^* aller Funktionen; oder aber $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und F sei die Menge aller Funktionen f mit

$$f = \{(x - y) : x \in \mathbb{R} \text{ und } y = f(x) = mx + n\}$$

wobei m und n beliebige, aber fest gewählte reelle Zahlen sind.

Welche Aufgabenstellungen sind mit Funktionalgleichungen verbunden?
Allgemein gesprochen geht es um die Gewinnung weiterer Informationen aus den gegebenen. Dabei kann man verschiedene Ansprüche stellen. So kann man zunächst versuchen, einzelne Funktionswerte zu berechnen. Wie groß ist z.B. die Anzahl der Kaninchenpaare im 5. Monat (in B (1.20))?

Für $n = 3$ gilt $f(3) = f(2) + f(1)$, d.h. $f(3) = 2$. Weiter folgt $f(4) = f(3) + f(2) = 3$ und $f(5) = f(4) + f(3) = 5$.

Ein höherer Anspruch ist, die in der Funktionalgleichung auftretenden Funktionen $f_1, ..., f_k$ zu ermitteln, d.h., ihre Funktionsgleichung anzugeben. Dann wären nämlich die Fragestellungen, die zur Funktionalgleichung führten, leichter - weil direkter - zu beantworten.

2 Das Lösen von Funktionalgleichungen

2.1 Erste einfache Aufgaben

Aller Anfang ist schwer!
Das mag in einem gewissen Sinne wahr sein;
allgemeiner aber kann man sagen:
Aller Anfang ist leicht,
und die letzten Stufen werden am schwersten
und seltensten erstiegen.
J. W. v. Goethe

Das Problem des Lösens einer Funktionalgleichung stellt sich in der Weise wie bei anderen Arten von Gleichungen auch: Wir suchen für die Variablen f_i solche Belegungen mit Funktionen, die eine vorgegebene Funktionalgleichung erfüllen.
Im allgemeinen verlangt man die Ermittlung aller Funktionen, die Lösung sind; viel einfachere Aufgaben ergeben sich zumeist, wenn man nur die Existenz einer Lösung nachzuweisen hat.

A (2.1) Man gebe für jede der folgenden Funktionalgleichungen eine Lösung an:

a) $f(x_1 + x_2) = f(x_1 + f(x_2)$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F = F^*$.
b) $f(x+1) = f(x) + 1$, $D = \mathbb{R}$, $F = F^*$.
c)* $f_1(x_1) + f_2\left(\dfrac{1}{x_2}\right) = (2x_1 + x_2)$, $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $F = F^*$ und $f_1 \neq f_2$.

Da nur eine Lösung gesucht ist, können wir eine solche vielleicht durch Probieren finden. Da mit $F = F^*$ alle Funktionen als Lösungen zugelassen sind, haben wir diesbezüglich "freie Wahl".
Wir beginnen unser Probieren mit einfachen Funktionen und wählen beispielsweise f mit $f(x) = x$. Damit haben wir schon eine Lösung für a) und auch für b) gefunden.
Für $f(x) = x$ gilt doch $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ und damit für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auch $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Der Fall b) ergibt sich daraus als Spezialfall mit $x_1 := x$ und $x_2 := 1$.

Im Fall c) ist ein Paar (f_1, f_2) gesucht. f_1 und f_2 können nicht beide lineare Funktionen sein. (Warum?) Eine der Funktionen - etwa f_2 - beliebig zu wählen und nach f_1 aufzulösen, bereitet Schwierigkeiten, da ja dann immer noch $f_1(x_1)$ und $f_1(x_2)$ auftreten.
Lässt man sich von der Form der Argumente $\frac{1}{x_i}$ anregen, so wird man gebrochen rationale Funktionen in die Überlegung einbeziehen. Wir machen einen Versuch mit $f_1(x) = \frac{a}{x}$ und $f_2(x) = mx$ und werden für a und m gegebenenfalls geeignete Zahlen einsetzen. Es gilt dann

$$f_1(x_i) = \frac{a}{x_i} \qquad \text{und} \qquad f_2\left(\frac{1}{x_i}\right) = m \cdot \frac{1}{x_i} \quad (i = 1, 2)$$

Soll (f_1, f_2) Lösung sein, so müsste

$$\frac{a}{x_1} + \frac{m}{x_2} = (2x_1 + x_2) \cdot \frac{a}{x_2} \cdot \frac{m}{x_1}$$

gelten, d.h.

$$\frac{mx_1 + ax_2}{x_1x_2} = \frac{2amx_1 + amx_2}{x_1x_2}$$

Für $m = 1$ und $a = 1/2$ ist diese Gleichung für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ erfüllt. Damit ist (f_1, f_2) mit $f_1(x) = \frac{1}{2x}$ und $f_2(x) = x$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$ eine Lösung.

A (2.2) Man zeige, dass die Funktionalgleichung in A (2.1)b) unendlich viele verschiedene Lösungen hat.

Die Ermittlung aller Lösungen der in A (2.1) gegebenen Funktionalgleichungen wäre dagegen ein recht schwieriges Unterfangen. War uns beim Suchen einer Lösung die Vorgabe $F = F^*$ angenehm, so wird das Auffinden aller Lösungen dagegen durch die Einschränkung der zugelassenen Funktionenklasse F erleichtert.
Als Beispiele wählen wir zwei Aufgaben aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR.

A (2.3)[18] Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x

$$f(x) = f(x + 1) - a$$

gilt.
Der Text besagt, dass $D = \mathbb{R}$ und F die Menge aller linearen Funktionen f ist. Dann gilt $f(x + 1) = m(x + 1) + n$, d.h. $f(x + 1) = mx + m + n$.
Ein $f \in F$ erfüllt also genau dann die Funktionalgleichung, wenn $mx + n = mx + m + n - a$, d.h. $m = a$ gilt. Genau alle Funktionen f mit $f(x) = ax + n$ $(n \in \mathbb{R})$ lösen die Aufgabe.

A (2.4)[19] Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(z + 1) = f(-x)$ erfüllen.

2.2 Die Substitutionsmethode

Was wir suchen, ist immer in der letzten Tasche,
in die wir die Hand stecken.
G. Chr. Lichtenberg

In den beiden letzten Aufgaben war F so stark eingeschränkt, dass alle zur Lösung zugelassenen Funktionen in die zu lösende Gleichung eingesetzt werden konnten und man somit sehr einfach die Lösungsmenge erhielt. Jetzt wollen wir dagegen für F die Klasse aller Funktionen einer reellen Veränderlichen Wählen.

[18] Das ist die Aufgabe 101033 der OJM in ihrer originalen Formulierung.
[19] Das ist die Aufgabe 101044 der OJM in ihrer originalen Formulierung.

Wir zeigen an Beispielen mit steigendem Schwierigkeitsgrad, wie man dann vorgehen kann.

A (2.5) $f(x_1+x_2)+2f(x_1-x_2)+f(x_1)+2f(x_2)=4x_1+x_2$, $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Angenommen, es gibt eine Lösung f, dann muss die gegebene Gleichung erst recht für spezielle Belegungen der Veränderlichen gelten. Setzt man in A (2.5) $x_2:=0$, so erhält man schon eine Gleichung in $f(x_1)$, nämlich

$$f(x_1)+2f(x_1)+f(x_1)+2f(0)=4x_1$$

Den benötigten Wert f(0) erhält man aus A (2.5), indem man $x_1=x2=0$ setzt:

$$f(0)+2f(0)+f(0)+2f(0)=0, \qquad \text{also} f(0)=0$$

Damit erhalten wir $4f(x_1)=4x_1$.
Gibt es also eine Lösung $f(x)$, so ist das die Funktion f mit

$$f(x)=x \tag{*}$$

Die Bedingung (*) ist eine notwendige Bedingung für die Lösung. Wir müssen noch zeigen, dass $f(x)=x$ tatsächlich die Gleichung für alle reellen x_1 und x_2 erfüllt, d.h., dass (*) auch hinreichend für die Lösung ist. Es ist

$$x_1+x_2+2(x_1-x_2)+x_1+2x_2=4x_1+x_2$$

Dieser Rückschluss[20] ist unbedingt erforderlich, da es bei unserem Lösungsweg prinzipiell möglich wäre, dass die Funktionalgleichung zwar für $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2=0$ durch $f(x)=x$ erfüllt wird, nicht aber auch für beliebiges x_2.

A (2.6) $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=x_1^2+2+x_2^2, \quad D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

A (2.7) $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=x_1^2+2x_1x_2x_2^2, \quad D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Bei diesen Aufgaben führte also die Belegung einer der Variablen x_1 mit einem speziellen Wert schon zum Ziel.
Sind alle Argumente von f von der Art $x_1+kx_"$ ($k\in\mathbb{R}$), so kann man versuchen, mit dem Ansatz $x_2=0$ zum Ziel zu kommen. Allerdings muss man damit nicht Erfolg haben!

A (2.8)[21] $f(x_1+x_2)-2f(x_1-x_2)+f(x_1)-2f(x_2)=x_2-2, \quad D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Obwohl der formale Unterschied zu A (2.5) gering ist, wirkt er sich beträchtlich aus. $x_2=0$ ergibt nämlich nur das Resultat $f(0)=1$. Setzen wir $x_1=0$, so erhalten wir

$$f(x_2)-2f(-x_2)+1-2f(x_2)=x_2-2 \quad , \quad -2f(-x_2)-f(x_2)=x_2-3 \tag{*}$$

In (*) treten die zwei verschiedenen Argumente x_2 und $-x_2$ bzw. die zwei Funktionswerte $f(x_2)$ und $f(-x_2)$ auf.

[20] Im Schulunterricht Probe genannt.
[21] Vgl. B (1.22).

Eine zweite Gleichung in den Funktionswerten $f(x_2)$ und $f(-x_2)$ würde uns vielleicht die Möglichkeit geben, $f(-x_2)$ zu eliminieren. Wegen der Vorgabe von $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muss (*) für alle reellen Zahlen x_2 erfüllt werden; also ist es möglich, x_2 durch $-x_2$ zu ersetzen. Das ergibt die Gleichung

$$-2f(x_2) - f(-x_2) = -x_2 - 3 \tag{**}$$

Multipliziert man (**) mit -2 und addiert zu der erhaltenen Gleichung die Gleichung (*), so erhält man

$$3f(x_2) = 3x_2 + 3$$

Gibt es eine Lösung, so ist das $f(x) = x + 1$. Durch Einsetzen erhält man, dass die Funktion f mit $f(x) = x + 1$ tatsächlich A (2.8) erfüllt.

Als wesentliche Lösungsidee erwies sich also eine geschickte Substitution. Substitution heißt soviel wie Einsetzung (Ersetzung). Der Begriff ist - im mathematischen Sinne - nicht streng definiert. Wir verwenden ihn hier, wenn Variable durch andere Variable oder durch Funktionen anderer Variabler ersetzt werden. Eine Belegung kann demnach auch als Spezialfall einer Substitution angesehen werden.

A (2.9) $f(x_1 + x_2) - 2f(x - 1 - x_2) + f(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2, \quad D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Welche Substitution angebracht ist, ergibt sich wesentlich aus dem Charakter der verschiedenen Argumente.

A (2.10) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot x_2$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

In diesem Fall ergibt $x_2 = 0$ den Wert $f(0) = 0$ ($x_1 = 0$ erzielt das gleiche Resultat). Die Lösung erhält man aber einfach durch die Belegung $x_1 = 1$ oder auch durch die Substitution $x_2 = \frac{1}{x_1}$ (für $x_1 \neq 0$). In jedem Fall erhält man $f(x) = c \cdot x$ mit $c = f(1) \in \mathbb{R}$.

A (2.11) $2x \cdot f(x) + \frac{1}{2x} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$, $D = \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Diese naheliegenden Substitutionen können aber schon bei einfach aussehenden Funktionalgleichungen versagen. Betrachten wir z.B.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \qquad D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{I}$$

aus A (2.1), so liefern die obigen Lösungsansätze nur triviale Aussagen und lassen nicht erkennen, wie man zur Lösung gelangen könnte.
Ein wesentlicher Unterschied zwischen den bisherigen Aufgaben und (I) besteht darin, dass in (I) die Variablen x_1 und x_2 nur als Argumente von f auftreten.
Damit enthält (I) zu wenig Information für eine elementare Lösung. Eine solche ist aber möglich, wenn weitere Informationen gegeben werden bzw. (I) mit einschränkenden Forderungen verknüpft wird, wie z.B. in der folgenden Aufgabe, die wir den Olympiaden Junger Mathematiker entnommen haben.

A (2.12)[22] Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x

[22] Das ist die Aufgabe 191233 A der OJM in ihrer originalen Formulierung.

definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Für alle Paare (x_1, x_2) reeller Zahlen gilt

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Zunächst wird man wohl auch bei solchen Aufgaben mit speziellen Belegungen und einfachen Substitutionen beginnen, die evtl. später verwendbare Zwischenresultate liefern. Aus (1) folgt mit $x_1 = x_2 = 0$ oder auch $x_2 = 0$, x_1 beliebig, dass

(4) $f(0) = 0$

gilt. Ersetzt man x_2 durch $-x_1$, so erhält man aus (1) zusammen mit (4)

(5) $f(-x) = -f(x)$

Eine Lösung werden wir wahrscheinlich nur dann erzielen, wenn wir auch die Bedingung (3) in die Überlegungen einbeziehen. Eine möglichst einfache Substitution wäre z.B. $x_1 = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$, $x_1 \neq 0$) und $x_2 = 1$. Dann folgt zunächst aus (1), (2) und (3)

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) \qquad , \qquad f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^2} f(x) + 1 \tag{6}$$

Auf $f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1+x}{x}\right)$ kann man wiederum (3) anwenden, indem man im Argument zum Kehrwert übergeht. Man erhält

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 f\left(\frac{x}{1+x}\right) \quad , \quad f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 f\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \tag{7}$$

Diese letzte elementare Umformung im Argument ist wesentlich, da jetzt wieder die Anwendung von (1) möglich wird:

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 \left[f(1) + f\left(-\frac{1}{1+x}\right)\right]$$

Mit (2) und unserem Zwischenresultat (5) ergibt sich

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 \left[1 - f\left(\frac{1}{1+x}\right)\right] \tag{8}$$

Um aus (6) und (8) schließlich $f(x)$ zu berechnen, wäre in (8) mittels (3), (1) und (2) noch $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$ durch $f(x)$ auszudrücken.

$$f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} f(1+x) \qquad , \qquad f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} [1 + f(+x)]$$

Durch Einsetzen des letzten Resultates in (8), Gleichsetzen von (6) und (8) und Auflösen nach $f(x)$ erhält man (9) $f(x) = x$.

(9) erfüllt auch die Bedingungen (1), (2) und (3) und ist damit die einzige Lösung unserer Aufgabe.

A (2.13) Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Für alle Paare (x_1, x_2) reeller Zahlen gilt $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(2) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt

$$f(1+x) = f(1) + f(x)\left[1 + \frac{2}{x}\right]$$

A (2.14) Es sei f eine für alle positiven ganzen Zahlen definierte Funktion, deren Funktionswerte nur nichtnegative ganze Zahlen sind. Weiterhin gelte:

(1) Für alle Zahlen m und n des Definitionsbereiches nimmt $f(m+n) - f(m) - f(n)$ entweder den Wert 0 oder den Wert 1 an.
(2) $f(2) = 0, f(3) > 0$ und $f(9999) = 3333$.

a) Man beweise: f mit $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$ ist eine Funktion der geforderten Art.
b) Man berechne $f(1983)$.

3 Die graphische Darstellung einer Funktion

3.1 Anschaulichkeit als Prinzip

Ein Gramm Anschauung wiegt manchmal schwerer
als eine Tonne guter Gründe.
E. Klein

Bisher haben wir von einer Veranschaulichung keinen Gebrauch gemacht. Damit haben wir quasi gezeigt, dass sie nicht notwendig ist; jetzt wollen wir zeigen, dass sie sehr nützlich sein kann.

Wir benutzen dazu ein rechtwinkliges Koordinatensystem, welches praktisch aus zwei in 0 aufeinander senkrecht stehenden Zahlenstrahlen besteht.

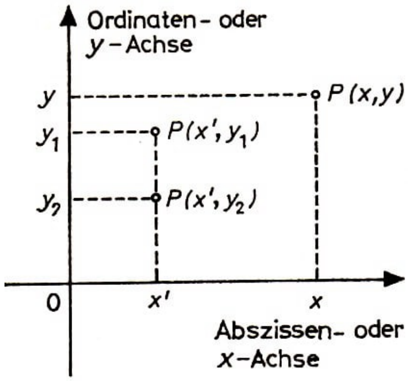


Abb. 2

Wie in Abb. 2 dargestellt, lässt sich jedem geordneten Paar (x, y) reeller Zahlen genau ein Punkt $P(x, y)$ in der Ebene ε des Koordinatensystems zuordnen. Damit ist jeder Korrespondenz aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ - und erst recht jeder Funktion - genau eine Punktmenge f^* in ε zugeordnet.[23]
Umgekehrt entspricht jeder Punktmenge in ε eine Korrespondenz. Welchen Punktmengen f^* in ε entspricht aber eine eindeutige Korrespondenz?

Gilt $P(x', y_1) \in f^*$ und $P(x', y_2) \in f^*$, so muss dann wegen D (1.2) auch $y_1 = y_2$ gelten, d.h., auf jeder Parallelen zur Ordinatenachse darf höchstens ein Punkt von f^* liegen.
Häufig bildet die Punktmenge f^* eine "zusammenhängende" Linie. In einigen Fällen sind uns diese Linien als geometrische Objekte wohlbekannt.

A (3.1) Man beweise, dass f^* für die Funktion f
a) mit $f(x) = mx + n$; $m, n \in \mathbb{R}$ eine Gerade,
b) mit $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ein Halbkreis
ist.

Für ein weiteres Beispiel erklären wir das Symbol $[x]$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau eine ganze Zahl $g \in \mathbb{Z}$ mit $g \leq x < g + 1$. Damit ist eine Funktion f aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$ erklärt:

[23] Diese Zuordnung wäre übrigens wiederum eine Funktion, nämlich aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in ε.

$f = \{(x, g) : x \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{Z}$ und $g \leq x < g + 1\}$
wir schreiben $f(x) = [x]$. Es gilt z.B. $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in f$ bzw. $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, wegen $0 \leq \frac{1}{2} < 1$; $(\pi, 3) \in f$ bzw. $[\pi] = 3$ wegen $3 \leq \pi < 4$.

Da jeder reellen Zahl x mit $g \leq x < g + 1$ die gleiche Zahl g zugeordnet wird, besteht die Veranschaulichung in ε für diese Argumente aus einer Parallelen zur Abszisse im Abstand g. Insgesamt erhalten wir eine solche "Treppe", wie sie für $-2 \geq x < 3$ in Abb. 3 angegeben ist.[24]

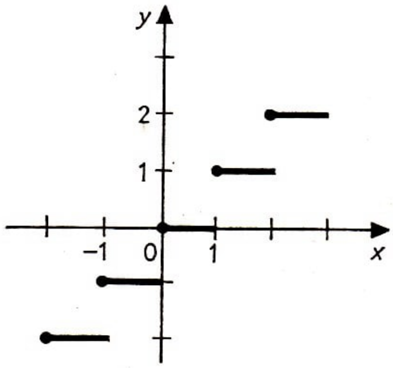


Abb. 3

Später werden wir diese Funktion eine an den Stellen $x = g$ unstetige Funktion nennen.

Bei den meisten Funktionen können wir aber kaum beweisen, dass f^* eine bestimmte geometrische Form hat. Wir markieren dann für "hinreichend viele" Paare aus f die Punkte von f^* in ε und ergänzen den "Rest".
Wenn wir richtig ergänzen, dann erhalten wir so recht schnell einen Überblick über den typischen Verlauf von f^*, aus dem man z.B. Eigenschaften der zugehörigen Funktion f "ablesen" kann.

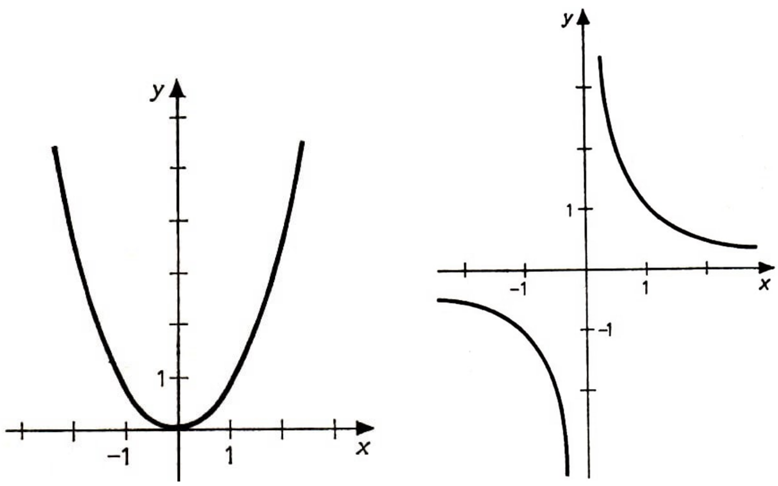


Abb. 4 und 5

Für die Funktionen aus A (1.16)a) und c) erhält man Abb. 4 und 5. Schwieriger ist es z.B., den "typischen Verlauf" für die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 35,4x - 22,8, \qquad D(f) = \mathbb{R}$$

[24]Dabei haben wir die den Paaren (g, g) zugeordneten Punkte stärker markiert.

zu finden. Wer sich hier auf die Berechnung von $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$ beschränkt, kommt vielleicht zu der in Abb. 6 punktiert gezeichneten Geraden, wer noch $f(0)$ berücksichtigt, wird evtl. eine Linie für richtig halten, wie wir sie gestrichelt eingezeichnet haben.

Richtig - und doch wohl andere Eigenschaften offenbarend - ist dagegen die in Abb. 6 stark ausgezeichnete Kurve. Mit diesem Beispiel möchten wir zunächst vor manchem oberflächlichen Gebrauch und voreiligen Schluss warnen.[25]
Wie aber vermeidet man Fehler der angedeuteten Art?

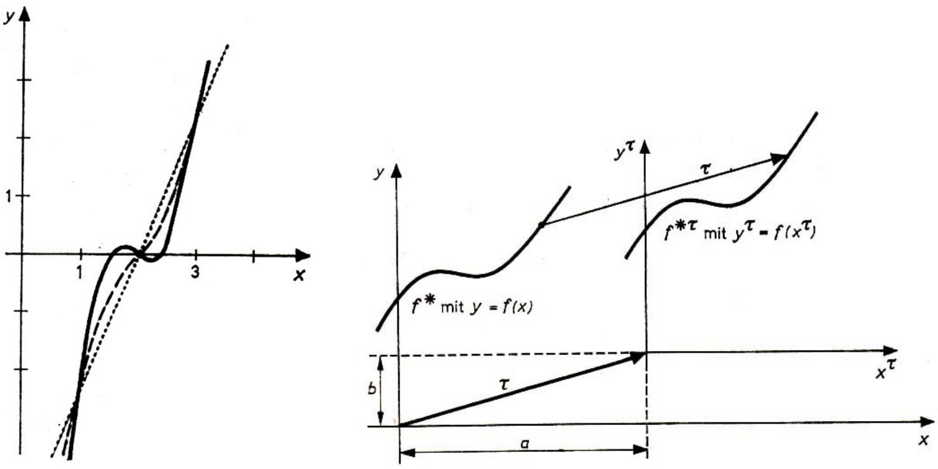


Abb. 6 und 7

3.2 Wir schieben, dehnen, spiegeln

Glotzen ist nicht sehen.
B. Brecht

Sehen heißt, das Wesentliche sehen. Wollen wir Fehler vermeiden, wie sie im letzten Beispiel angedeutet wurden, so wäre neben einer kritischen Aufmerksamkeit sicher nützlich, das Wesentliche nicht nur für eine einzelne Kurve, sondern gleich für alle Kurven einer Funktionenklasse zu erkennen.

In einem gewissen Umfang wird das, ausgehend von einfachsten Funktionen, schon möglich, wenn wir die Wirkung der folgenden elementaren Transformationen erfassen. Wir betrachten zuerst die Translationen oder Verschiebungen.

Wir wenden auf das $x;y$-Koordinatensystem der Abb. 7 nacheinander eine Verschiebung um a in Richtung der Abszissenachse und um b in Richtung der Ordinatenachse an. Das Resultat ist gleich dem einer Verschiebung $\tau = (a,b)$. Wir erhalten das x^τ, y^τ-Koordinatensystem, f^* geht in $f^{*\tau}$ über, und es gilt

(1) $x = x^\tau + a$ und $y = y^\tau + b$

$f^{*\tau}$ ist also (nach Voraussetzung) die graphische Darstellung der Funktion f^τ mit

[25] Ein umfangreiches Übungsmaterial für die Veranschaulichung von Funktionen findet man in [11].

$y\tau = f(x^\tau)$ und nach (1) die graphische Darstellung der Funktion für $y-b = f(x-a)$ bzw. $y = f(x-a)+b$.[26]
Umgekehrt erhält man die graphische Darstellung für $y = f(x-a)+b$, indem man die der Funktion f um $\tau = (a,b)$, d.h. um a "längs der x-Achse" und um b "längs der y-Achse", verschiebt.

A (3.2) Man ermittle f^* für
a) $f(x) = (x-2)^2 - 1$ mit $0 \leq x \leq 4$,
b)$f(x) = x^2 + 2x + 1$ mit $-3 \leq x \leq 0$,
c) $f(x) = \frac{-x}{x+1}$ mit $-4 \leq xy - 1$ und $-1 < x \leq 4$,
d) $f(x) = [x+1] - 4$ mit $-1 \leq x < 2$.

Mit Aufgaben der folgenden Art erhält man schon Einsichten in den Kurvenverlauf für eine ganze Funktionenklasse.

A (3.3) Man beweise, dass sich die graphischen Darstellungen aller Funktionen f mit

(1) $y = f(x) = x^2 + px + q$ mit $p, q \in \mathbb{R}$

aus Translationen der "Normalparabel" (Abb. 4) ergeben.
Die Funktionsgleichung ist so umzuformen, dass die Behauptung ablesbar ist. Es gilt

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

Durch die Translation

$$\tau = \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

der "Normalparabel" erhalten wir also das zugehörige f^*.

Weitere elementare Transformationen sind Dehnungen (bzw. Stauchungen) und Spiegelungen. Die geometrische Bedeutung dieser Begriffe setzen wir als bekannt voraus.

A (3.4) Man beweise:
a) Gilt $c > 0$ (bzw. $d > 0$), so erhält man die graphische Darstellung von $y = f(x/c)$ (bzw. $y/d = f(x)$, d.h. $y = d \cdot f(x)$) aus der graphischen Darstellung von $y = f(x)$ durch Dehnung um den Faktor c in Richtung der x-Achse (bzw. um den Faktor d in Richtung der y-Achse).[27]

b) Ersetzt man in $y = f(x)$ das Argument x durch $-x$ (bzw. y durch $-y$), so erhält man die graphische Darstellung der dadurch entstandenen Funktion aus der ursprünglichen durch Spiegelung an der Ordinatenachse (bzw. Abszissenachse).

Elementare Transformationen verändern den "typischen" Verlauf von f^* nicht. Besser formulieren wir, dass wir gerade diejenigen Eigenschaften als "typisch" ansehen wollen, die durch elementare Transformationen nicht verändert werden, z.B. das "Auf-und-ab" eines Kurvenverlaufes.

[26] Natürlich setzen wir hier und auch später voraus, dass diese Ausdrücke sinnvoll sind, d.h. hier $x - a \in D(f)$.
[27] In den Fällen $0 < c < 1$ bzw. $0 < d < 1$ spricht man häufig von Stauchung statt von Dehnung.

Ein abschließendes Beispiel soll die Möglichkeiten dieser Betrachtungsweise deutlich machen.

A (3.5) Für alle Funktionen f mit

$$y = f(x) = \frac{mx+n}{kx-l} \qquad \text{mit} \qquad ml \neq nk, k \neq 0$$

gilt, dass ihre graphischen Darstellungen aus der für $y = \frac{1}{x}$ durch die Nacheinanderausführung elementarer Transformationen gewonnen werden können.[28] Es gilt

$$\frac{mx+n}{kx+l} = \frac{1}{k} \cdot \frac{m\left(x+\frac{l}{k}\right) - \frac{ml}{k} + n}{x+\frac{l}{k}} = \frac{nk-ml}{k^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{l}{k}} + \frac{m}{k}$$

Der Faktor $d = \frac{nk-ml}{k^2}$ ist nach Voraussetzung ungleich Null. Gilt $d > 0$, so bedeutet er eine Dehnung in Richtung der Ordinate, gilt $d < 0$, so schließt d in seiner Bedeutung eine Spiegelung an der Abszissenachse ein.
Insgesamt ist ablesbar, dass auf die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{x}$ eine Verschiebung um $-\frac{l}{k}$ "längs der x-Achse", eine Dehnung um den Faktor $\frac{nk-ml}{k^2}$, evtl. eine Spiegelung an der x-Achse (diese Transformationen sind in ihrer Reihenfolge auch vertauschbar) und danach eine Verschiebung um $\frac{m}{k}$ "längs der y-Achse" wirkte, um die der gegebenen Funktion zu erhalten. (Diese Gesamtheit von Transformationen ist auch durch eine andere - bei entsprechend anderer arithmetischer Umformung - ersetzbar.)[29]

3.3 Transformationen und Funktionalgleichungen

Bewegung fesselt mehr den Blick als Ruhendes.
W. Shakespare

Elementare Transformationen lassen sich also durch gewisse Veränderungen des Arguments der Funktion oder solche der Funktionswerte ausdrücken. Greifen wir jetzt die Gleichung

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

aus Abschnitt 2.1 wieder auf, so lässt sich die linke Seite als Translation längs der Abszisse, die rechte als solche längs der Ordinate interpretieren.
Schreiben wir so bedeutet das, dass f^* bei Nacheinanderausführung der Translationen um -1 längs der Abszisse und um -1 längs der Ordinate in sich übergeht (vgl. Abb. 8).
Ersetzt man x durch $x-1$, so erhält man

$$f(x) = f(x-1) + 1$$

mit der Interpretation, dass f^* bei entsprechenden Translationen um $+1$ in sich übergeht.

[28] Ein erstes Beispiel dafür stellte A (3.2) c) dar.
[29] Damit ist auch die Aufgabe 041234 der OJM (vgl. [12], S. 37) gelöst.

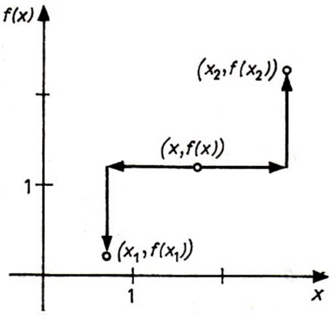


Abb. 8

Umgekehrt ist jede Funktion, die eine solche Eigenschaft hat, Lösung der gegebenen Funktionalgleichung. Gibt man also im Intervall $0 \leq x < 1$ die Funktionswerte $f(x)$ beliebig vor und definiert $f(x)$ in den Intervallen $n \leq x < n+1$ (n ganz) durch

$$x = \overline{x} + n \quad , \quad f(x) = f(\overline{x}) + n \quad \text{mit} \quad 0 \leq \overline{x} < 1$$

so erfüllt jede dieser Funktionen die Funktionalgleichung (vgl. Abb. 9). Die Behauptung der Aufgabe A (2.2) ist also gar nicht überraschend.

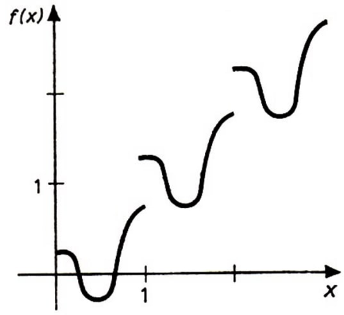


Abb. 9

Die Funktionalgleichung aus B (1.17) bedeutet aus dieser Sicht, dass eine Funktion gesucht ist, deren graphische Darstellung bei Translationen um $-T$ längs der Abszissenachse die gleiche Kurve ergibt wie bei einer Stauchung längs der Ordinatenachse mit dem Faktor 0,5.

Umgekehrt kann man solche Eigenschaften von f^* durch eine Funktionalgleichung beschreiben. Durch die Lösung dieser Funktionalgleichung kann man dann die Funktionen finden, die f^* zuzuordnen sind.

A (3.6) Man ermittle alle Funktionen f mit $D(f) = \mathbb{R}$, die der folgenden Bedingung genügen: Für jede reelle Zahl r ($r \neq 0$) gilt, dass f^* nach Dehnung längs der Abszissenachse um den Faktor $\frac{1}{r}$ mit f^* nach Dehnung längs der Ordinatenachse um den Faktor r übereinstimmt.
Dieser Text entspricht nach unseren Erkenntnissen aus Abschnitt 3.2 der Funktionalgleichung

$$f(rx) = rf(x)$$

Da diese für beliebige r gelten soll, entspricht sie der aus A (2.10) mit der Lösung $f(x) = cx$.

A (3.7) Gibt es eine Funktion f ($f(x) \neq 0$)[30], so dass folgende Bedingungen gelten?

[30] $f(x) = 0$ soll die Funktion $f = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ bedeuten; $f(x) \neq 0$ bedeutet dann eine Funktion, für die mindestens ein x mit $f(x) \neq 0$ existiert.

(1) $D(f) = \mathbb{R}$
(2) Jede Dehnung längs der Ordinatenachse mit dem Faktor $r \neq 0$ kann durch eine Dehnung längs der Abszissenachse mit dem Faktor r ersetzt werden.

4 Beschreibung von Eigenschaften einer Funktion durch Funktionalgleichungen

4.1 Gerade und ungerade Funktionen

Gotha ist nicht viel weiter von Erfurt entfernt,
als Erfurt von Gotha.
J. G. A. Galletti

Im allgemeinen werden durch eine Funktionalgleichung Eigenschaften der in ihr auftretenden unbekannten Funktionen f_i beschrieben.
Genauer gesagt, sind es solche Eigenschaften, die sich durch die Beziehungen der Funktionswerte für verschiedene Argumente beschreiben lassen. Praktische Probleme führen ja gerade darum auf Funktionalgleichungen, weil ihre Lösung Funktionen mit bestimmten Eigenschaften erfordern, man betrachte nochmals die Beispiele B (1.17) und B (1.18).

Dabei kann es vorkommen, dass es genau eine Funktion gibt, die diese Eigenschaften hat. Aber auch den anderen Fall, dass es unendlich viele Funktionen mit diesen Eigenschaften gibt, haben wir schon kennengelernt.
Zum Beispiel bedeutet $f(-x) = f(x)$ nach A (3.4)b), dass für eine solche Funktion f deren graphische Darstellung f^* bei Spiegelung an der Ordinatenachse in sich übergeht. Die obige Funktionalgleichung beschreibt also nicht mehr (und nicht weniger) als diese Symmetrieeigenschaft.

D (4.1) Gilt mit $x \in D(f)$ auch $-x \in D(f)$, so nennt man eine Funktion f, die die Funktionalgleichung

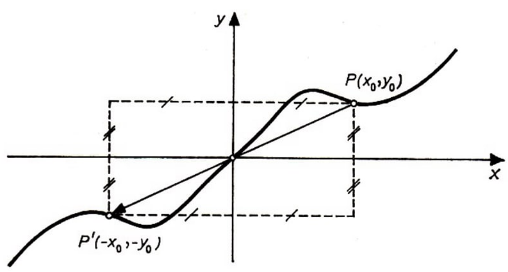
$$f(-x) = f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(-x) = -f(x)$$

erfüllt, gerade bzw. ungerade.

A (4.2) Man ermittle, welche von den in A (1.16) angegebenen Funktionen gerade und welche ungerade sind.

Spiegelt man das Bild einer ungeraden Funktion nacheinander an der Ordinaten- und Abszissenachse, so geht es nach D (4.1) in sich über. (Da diese Achsen im rechtwinkligen Koordinatensystem aufeinander senkrecht stehen, können wir diese beiden Geradenspiegelungen auch durch eine Punktspiegelung am Ursprung ersetzen, man vgl. Abb. 10.)

Abb. 10



Auf weitere schöne Eigenschaften, die man in vielen Büchern findet,[31] wollen wir hier nicht eingehen.

Allerdings wollen wir mit einem Beispiel dazu anregen, solche Eigenschaften beim Lösen von Funktionalgleichungen zu berücksichtigen. Wir nehmen uns nochmals A (2.1)c) vor, d. h.

$$f_1(x_1) + f_2\left(\frac{1}{x_2}\right) = (2x_1 + x_2) f(x_2) f_2\left(\frac{1}{x_1}\right) \tag{1}$$

Wahrscheinlich hat die angegebene Lösung manchen ohnehin nicht befriedigt, da der Ansatz recht willkürlich ist. Dass nun gerade oder ungerade Funktionen eine Rolle spielen sollen, verblüfft möglicherweise auch, denn die gesuchten Funktionen f_1 und f_2 sollen ja in A (2.1)c) nur für positive Argumente erklärt sein.

Wir müssen zunächst den Definitionsbereich D erweitern und zuletzt prüfen, ob die erhaltene Lösung auch die ursprüngliche Aufgabe erfüllt. Wie soll einem aber überhaupt der Gedanke an gerade oder ungerade Funktionen kommen?
Unterdessen haben wir in Abschnitt 2.2 die Substitutionsmethode kennengelernt, und die Substitution $x_2 = -2x_1$ liefert uns immerhin eine Null bzw.

$$-f_1(x_1) = f_2\left(-\frac{1}{2x_1}\right) \tag{2}$$

Die Beziehung (2) enthält allerdings verschiedene Funktionen mit unterschiedlichen Argumenten. Wer einen Blick für Ähnlichkeiten hat, wird eben doch auch an D (4.1) denken.
Könnte man bei oberflächlicher Betrachtung von (2) nicht vermuten, dass die Funktionen f_1 und f_2 ungerade sind? Probieren wir es mit dem einfachen Beispiel $f_2(x) = x$, dann folgt aus (2)

$$+f_1(x) = +\frac{1}{2x}$$

Einen Rückschluss erfordert dieses Vorgehen natürlich unbedingt! Eine Einschränkung auf den in A (2.1)c) geforderten Definitionsbereich macht keine Schwierigkeit.
Das Ergebnis regte uns zu einer weiteren Aufgabe an.

A (4.3) Man beweise: Gibt es eine Lösung (f_1, f_2) von (1) und ist f_1 eine ungerade Funktion, dann ist auch ja eine ungerade Funktion.

Ist $x \in D(f_1)$, so setzen wir $x_1 = x_2 = x$ und erhalten aus (1)

$$f_1(x) + f_2\left(\frac{1}{x}\right) = 3x f_1(x) f_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

(Da (f_1, f_2) nach Voraussetzung Lösung von (1) ist, gilt also $x \in D(f_1)$ genau dann, wenn $1/x \in D(f_2)$ ist.) Mit $x_1 = x_2 = -x$ erhalten wir aus (1) mit der Voraussetzung $f_1(-x) = -f_l(x)$

$$-f_1(x) + f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x f_1(x) f_2\left(-\frac{1}{x}\right) \tag{4}$$

[31] z.B. [11], S. 18, 98, 114

(Es gilt also auch $-\frac{1}{x} \in D(f_2)$.)
Die Addition von (3) und (4) ergibt

$$f_2\left(\frac{1}{x}\right) + f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = \left[f_2\left(\frac{1}{x}\right) + f_2\left(-\frac{1}{x}\right)\right] 3x f_1(x) \qquad (5)$$

Jetzt haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Für alle $x \in D(f_1)$ bzw. $\frac{1}{x} \in D(f_2)$ gilt $f_2\left(\frac{1}{x}\right) + f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$. Das heißt aber, ja ist ungerade, wie behauptet.

Fall 2. Es gibt $x \in D(f_1)$ mit $f_2\left(\frac{1}{x}\right) + f_2\left(-\frac{1}{x}\right) \neq 0$. Für alle diese x folgt aus (5)

$$f_1(x) = \frac{1}{3x} \qquad (6)$$

Setzen wir (6) in (3) ein, so erhalten wir den Widerspruch $\frac{1}{3x} = 0$.
Wenn es also eine Lösung (f_1, f_2) gibt, dann muss mit f_1 auch f_2 ungerade sein.

4.2 Periodische Funktionen

Jemand beschrieb eine Reihe Weidenbäume,
die in gewissen Distanzen gepflanzt waren, so:
erst stand ein Baum, alsdann keiner,
den wieder einer und dann wieder keiner.
G. Chr. Lichtenberg

Bewegungsabläufe, die sich nach einer bestimmten Zeit wiederholen - wie z.B. Schwingungen - nennen wir periodisch (vgl. auch Abb. 11; Abb. 11 a zeigt das Diagramm der Momentanwerte einer Wechselstromspannung, Abb. 11 b das Diagramm einer durch eine periodische niederfrequente Schwingung modulierten Hochfrequenzschwingung). Für eine exakte Definition verwenden wir eine Funktionalgleichung.

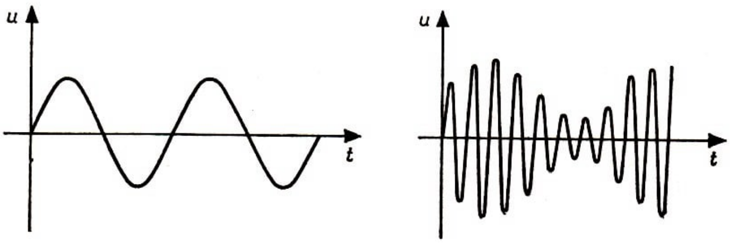


Abb. 11

D (4.4) Gibt es zu einer Funktion f eine von Null verschiedene Zahl p, für die[32]

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{für alle} \qquad x \in D(_f)$$

gilt, so heißt f periodisch mit der Periode p. Gibt es eine kleinste positive reelle Zahl p, die (1) erfüllt, so heißt sie die primitive Periode der Funktion f.

[32]Wir wollen in diesem ganzen Kapitel $D(f) = \mathbb{R}$ annehmen.

A (4.5)[33] a) Man beweise, dass die durch

$$y = (-1)^{[x]}$$

erklärte Funktion f periodisch ist.
b) Man beweise, dass f eine primitive Periode hat, und ermittle diese.

Nach Definition der Funktion von $[x]$ gilt

$$[x] = \left\{ \begin{array}{lll} 2k & \text{für} & 2k \leq x < 2k+1 \\ 2k+1 & \text{für} & 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{array} \right\} k \in \mathbb{Z}$$

Daher gilt also in jedem Intervall $2k \leq x < 2k+2$ mit der Länge 2

$$(-1)^{[x]} = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad 2k \leq x < 2k+1 \\ -1 & \text{für} \quad 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{cases} \tag{2}$$

Damit ist 2 eine Periode der Funktion. (Der Beweis lässt sich auch mit der leicht zu beweisenden Beziehung $[x+2] = [x]+2$ führen.)

Wir beweisen nun indirekt, dass $p = 2$ auch primitive Periode ist. Angenommen, es gibt eine Periode p' mit $0 < p' < 2$. Dann gilt $0 < \frac{p'}{2} < 1$, und für $x_1 = 2k+1-\frac{p'}{2}$ gilt

$$2k < x_1 < 2k+1 \qquad \text{und} \qquad 2k+1 < x_1 + p' < 2k+2$$

Nach (2) gilt dann $f(x_1) \neq f(x_1 + p')$ im Widerspruch zu D (4.4).

A (4.6) a) Man beweise, dass die durch

$$y = x - [x]$$

erklärte Funktion f periodisch ist.
b) Man beweise, dass f eine primitive Periode hat, und ermittle diese.
c) Man gebe die graphische Darstellung der Funktion f im Intervall $-2 \leq x < 3$ an.

A (4.7) Muss für jede periodische Funktion auch eine primitive Periode existieren?

Nehmen wir in (1) Substitutionen vor, wie wir sie in Abschnitt 2.2 zur Lösung von Funktionalgleichungen verwendet haben, so erhalten wir z.B. bei der Ersetzung von p durch $x+p$ in (1)

$$f(x+2p) = f(x+p)$$

und wegen (1)

$$f(x+2p) = f(x)$$

d.h., mit p ist auch $2p$ eine Periode; allgemein lässt sich zeigen, dass jedes ganzzahlige Vielfache kp von p wieder eine Periode ist. Interpretieren wir nun die Ersetzung von x durch $x+kp$ wie in Abschnitt 3.2 als Translation längs der x-Achse, so bedeutet

[33] verkürzte Fassung von Aufgabe 151036 der OJM

(1), dass die graphische Darstellung von f bei einer Translation um kp längs der x-Achse in sich übergeht, ein Ergebnis, was ohnehin unseren anschaulichen Erwartungen entspricht.
Man kann auch Beziehungen zu anderen Transformationen herstellen.

A (4.8) Von der graphischen Darstellung einer gegebenen Funktion f sei bekannt: Führt man nacheinander eine Spiegelung an der x-Achse und eine beliebige Translation längs der y-Achse aus, so ist das Ergebnis gleich dem einer bestimmten Translation längs der x-Achse. Man beweise, dass dann f eine periodische Funktion ist.

Die Voraussetzung lässt sich unter Verwendung von Abschnitt 3.2 in Form einer Funktionalgleichung wiedergeben:

$$-f(x) + b = f(x + a) \tag{3}$$

Ersetzen wir in (3) x durch $x + a$, so erhalten wir

$$-f(x + a) + b = f(x + 2a) \qquad \text{und mit (3)} \qquad f(x) = f(x + 2a)$$

d.h., $2a$ ist eine Periode der Funktion f.

In diesem Beispiel ergab sich aus dem Sachverhalt die Funktionalgleichung (3). Es blieb nachzuweisen, dass alle Funktionen, die (3) erfüllen, auch periodisch sind. Das gelang mittels einer Substitution. In Wettbewerbsaufgaben ist häufig - wie in den folgenden - die Funktionalgleichung direkt gegeben.

A (4.9)[34] Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x + a) = \sqrt{4 - f(x)^2} \tag{4}$$

Man beweise, dass dann f eine periodische Funktion ist.

Aus (4) ergibt sich

$$0 \leq f(x) \leq 2 \tag{5}$$

Ersetzen wir wiederum x durch $x + a$, so erhalten wir

$$f(x + 2a) = \sqrt{4 - f(x + a)^2}$$

Aus (4) folgt auch $f(x + a)^2 = 4 - f(x)^2$. Unter Berücksichtigung von (5) bekommen wir damit $f(x + 2a) = f(x)$, d.h., $2a$ ist eine Periode der Funktion f.

A (4.10)[35] Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x + a) = \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1}$$

[34] in Anlehnung an eine Aufgabe aus der X. Internationalen Mathematikolympiade
[35] verkürzte Fassung von 141236 B der OJM

Man beweise, dass dann f eine periodische Funktion ist.

An diese drei Aufgaben wollen wir noch zwei Fragen anschließen, die Frage nach der Existenz einer solchen Funktion und die nach der Konstruktion solcher Aufgaben.

Die Existenz einer solchen Funktion ist durch ein Beispiel nachgewiesen. Bestandteil der erwähnten Wettbewerbsaufgaben war auch immer die Forderung nach einem Beispiel. Die Lösungsvorschläge enthalten dann meist recht komplizierte Beispiele, die z.B. auf trigonometrische Funktionen Bezug nehmen. Dabei ist es doch so einfach!
Die Funktionalgleichung, die in unseren Beispielen stets die Form $f(x+a) = G(f(x))$ hat, drängt uns die Konstruktion eines Beispiels geradezu auf. Diese Form besagt doch, dass die Funktionswerte im Intervall $0 \leq x < a$, über die wir weitestgehend frei verfügen können, diejenigen im Intervall $a \leq x < 2a$ festlegen. Legen wir z. B.

$$f(x) = 1 \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x < a$$

(für alle drei Beispiele!) fest, dann ergibt sich
aus (3) $f(x) = -1 + b$ für $a \leq x < 2a$,
aus (4) $f(x) = \sqrt{3}$ für $a \leq x < 2a$,
aus (6) $f(x) = \frac{1}{2}$ für $a \leq x < 2a$.

Damit erhalten wir über dem Intervall $0 \leq x < 2a$ eine "stückweise konstante" Funktion, die sich ja wegen der (bereits nachgewiesenen) Periodizität für alle x fortsetzen lässt. Setzen wir in A (4.9) $a = 1$, so ergibt sich das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; 2n \leq x < 2n+1 \\ \sqrt{3} & \text{für } \; 2n+1 \leq x < 2n+2 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

welches in Abb. 12 veranschaulicht ist.

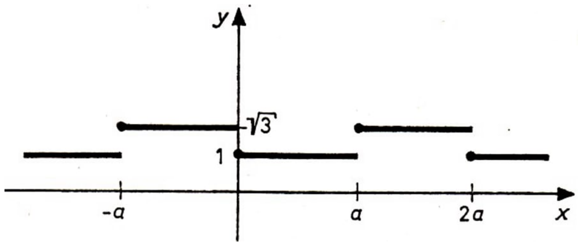


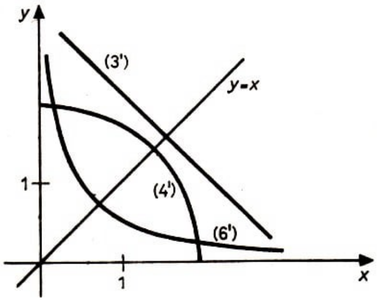
Abb. 12

Die angegebenen Aufgaben sind für Übungszwecke oder als Wettbewerbsaufgaben formuliert worden. Steckt hinter dem Erfinden dieser Aufgaben ein Prinzip? Die recht unterschiedliche Struktur von (3), (4) und (6) spricht dagegen, das Lösungsverfahren und das Ergebnis (Periode jeweils $2a$) sprechen dafür.

Wir ersetzen die Funktionalgleichungen einmal durch Funktionsgleichungen gleicher Struktur und erhalten

(3') $y = -x + b$,
(4') $y = \sqrt{4 - x^2}$ mit $0 \leq x \leq 2$,
(6') $y = \frac{x}{3x-1}$

Die graphischen Darstellungen (vgl. Abb. 13) dieser Funktionen lüften das Geheimnis, sie sind in jedem Fall symmetrisch zum Bild der Geraden $y = x$. Das heißt, dass bei einer Vertauschung der Variablen x und y in (3'), (4') oder (6') keine andere Funktion entsteht, diese Vertauschung also keine Wirkung hat.

Abb. 13


Setzen wir nun $y = f(x+a)$ und $x = f(x)$, so erhalten wir unsere Funktionalgleichungen, für die die Vertauschung von $f(x+a)$ mit $f(x)$ ebenfalls keine Wirkung hat, d.h., es gilt $f(x) = G(f(x+a))$,
andererseits gilt nach dem Substitutionsverfahren $f(x+2a) = G(f(x+a))$. Es gilt also $f(x+2a) = f(x)$, wie wir schon wissen. Jetzt kann man selbst weitere Aufgaben von diesem Typ finden.

Eine gewisse Variation ist bei der folgenden Aufgabe zu berücksichtigen.
A (4.11)[36] Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen zu definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

Man beweise, dass dann f eine periodische Funktion ist, und gebe ein Beispiel für eine solche Funktion an.

A (4.12) Von einer Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R}$ sei bekannt, dass ein $p > 0$ mit $f(p) = 0$ existiert und dass f die Funktionalgleichung

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1) \cdot f(x_2)$$

erfüllt. Man beweise, dass die Funktion gerade und periodisch ist.

Wer mit trigonometrischen Funktionen schon gut vertraut ist, wird vielleicht gemerkt haben, dass $f(x) = \cos(ax)$ die Funktionalgleichung in A (4.12) erfüllt. Für die Lösung der Aufgabe ist diese Kenntnis aber keine Hilfe, da wir ja nicht wissen, ob diese Funktionen die einzigen Lösungen sind.

[36]veränderte Fassung der Aufgabe 051223 der OJM

5 Die Cauchysche Gleichung

5.1 Solange x rational ist

Allerdings bemerkt man immer,
was darin steckt und von wo -
Chr. Morgenstern

Nach Cauchy ist die Gleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{I}$$

(vgl. auch A (2.12)) benannt. Augustin Cauchy lebte von 1789 bis 1857 und war einer der hervorragendsten Mathematiker, die es jemals in der Welt gab. Er veröffentlichte 1821 in Paris seine Ideen zu der angegebenen Gleichung und wird daher zu den Mitbegründern der Theorie von den Funktionalgleichungen gezählt.

Wir wollen uns mit den Überlegungen vertraut machen, die zur Lösung führen, weil sie anderswo auch anwendbar sind.

Zunächst wollen wir noch einmal daran erinnern, dass jede Lösung von (I) notwendigerweise ungerade ist. Wir dürfen uns daher z.B. bei Beweisen auf $x \geq 0$ beschränken.

S (5.1) Wenn f Lösung von (I) ist, gilt

$$f(rx) = r \cdot f(x) \tag{1}$$

für alle rationalen Zahlen r und alle reellen Zahlen x.

Beweis. Es sei also f eine Lösung von (I). Zunächst ist

$$f(2x) = f(x+x) = 2f(x) \quad , \quad f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$$

Allgemein erhält man für alle natürlichen Zahlen m die Gleichung[37]

$$f(mx) = mf(x) \tag{2}$$

Nun sei $r = \frac{m}{n}$ eine beliebige nichtnegative rationale Zahl. Dann gilt wegen (2)

$$f(n \cdot rx) = n \cdot f(rx) \qquad \text{sowie} \qquad f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x)$$

und damit

$$f8rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) \tag{3}$$

Der Rest folgt daraus, dass f ungerade ist.

Was folgt aus S (5.1)? Für $x := 1$ hat man

$$f(r) = f(1) \cdot r \tag{4}$$

[37] Exakt lässt sich diese Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Zu dieser Beweismethode vgl. etwa [13].

Diese Gleichung legt die Vermutung nahe, dass wir unser Ziel bereits erreicht haben: f ist für alle rationalen Argumente bestimmt, wenn man $f(1)$ kennt oder festlegt. Andererseits ist ja die Funktion f mit

$$f(x) = c \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$$

Lösung von (I), und c ist - in Übereinstimmung mit (4) - gerade der Wert von f an der Stelle $x = 1$. Die lineare Funktion f mit $f(x) = cx$ ist also Lösung, und jede Lösung hat für rationale Argumente diese Gestalt.

Nun weiß man, dass die rationalen Zahlen dicht liegen: Zwischen je zwei rationalen Zahlen a und b, so dicht beieinander sie auch liegen mögen, kann man eine beliebige Anzahl weiterer rationaler Zahlen finden. So liegen z.B. alle

$$r_i = a + \frac{i}{n+1}(b-a) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, ..., n$$

zwischen a und b. (Beweis?)

Da sollte man doch annehmen, dass für jene reellen Argumente, die keine rationalen Zahlen sind, kaum noch etwas aufregend Neues geschehen kann. Dass wir mit dieser Vermutung gründlich auf dem Holzweg wären, wollen wir in den nächsten Abschnitten zeigen.

Betrachten wir dagegen - wie eben - nur Funktionen für rationale Argumente, so lassen sich nach der demonstrierten Methode auch andere Funktionalgleichungen lösen.

A (5.2)[38] Von einer Lösung f der Gleichung $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, die nicht überall gleich Null ist, beweise man die folgenden Eigenschaften:
(1) f verschwindet höchstens für $x = 0$,
(2) $f(x) > 0$ für $x > 0$,
(3) gilt $f(0) = c = 0$, dann ist $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(4) $f(1) = 1$.
(5) f ist durch die Werte für $0 < x < 1$ bereits vollständig bestimmt,
(6) $|f(-x)| = f(x)$ für alle $x > 0$,
(7) für $r = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \sqrt[n]{f(x)^m} \qquad \text{bzw.} \qquad f(x^r) = f(x)^r$$

5.2 Ein Satz von Darboux und seine merkwürdigen Konsequenzen

Oft erfährt man, was man gefragt hat,
erst aus der Antwort.
J. Cocteau

[38] Vgl. A (2.13).

Das Ergebnis von S (5.1) könnte auch so beschrieben werden:
Ist f eine Lösung der Cauchyschen Gleichung (I), so liegen die Punkte von f^*, deren x-Koordinate rational ist, auf einer Geraden. Über das Verhalten der Funktion für irrationale Argumente konnten wir bisher keine Aussagen machen.
Ist es z.B. möglich, dass für alle rationalen Argumente $f(x) = x$ gilt und $f(\sqrt{2}) = 3$?

Diese Frage wollen wir - beginnend mit einem Satz von Darboux[39] - schrittweise beantworten.

S (5.3)[40] Ist f eine für alle reellen x definierte Funktion und gilt
a) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,
b) es gibt ein Intervall $[a, b]$[41], und es gibt Zahlen m und M derart, dass $m \leq f(x) \leq M$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt, dann folgt daraus $f(x) = c \cdot x$ mit $c = f(1)$.

Anmerkung. Von einer Funktion f, die b) erfüllt, sagt man, dass sie auf $[a, b]$ beschränkt sei. Die Funktion f mit $f(x) = 1/x$ ist z.B. auf dem Intervall $[-1, 1]$ unbeschränkt, dagegen ist sie beschränkt auf dem Intervall $[1, 2]$ mit $m = 0$, $M = 1$.

Beweis. Da wir $f(x) - f(1) \cdot x = 0$ beweisen sollen, betrachten wir die Hilfsfunktion g mit

$$g(x) = f(x) - f(1) \cdot x$$

Die Funktion g erfüllt ebenfalls a) und b). In der Tat ist

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= f(x_1 + x_2) - f(1)(x_1 + x_2) = f(x_1) - f(1) \cdot x_1 + f(x_2) - f(1) \cdot x_2 \\ &= g(x_1) + g(x_2) \end{aligned}$$

Um b) nachzuprüfen, muss man $f(1) = c \geq 0$ und $c < 0$ unterscheiden. Wir führen nur den Fall $c \geq 0$ vor: Aus $a \leq x \leq b$ folgt $-ca \geq -cx \geq -cb$.
Zusammen mit b) ergibt sich

$$m - cb \leq f(x) - cx = g(x) \leq M - ca$$

g hat überdies noch wegen S (5.1) die Eigenschaft,' für alle rationalen Argumente zu verschwinden:

$g(r) = 0$ für alle rationalen Zahlen r.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt demnach

$$g(x + r) = g(x) + g(r) = g(x)$$

Jetzt können wir zeigen, dass g überall beschränkt ist. In der Tat, sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein rationales r so, dass $x + r$ in $[a, b]$ liegt. Und wegen $g(x) = g(x + r)$ liegt $g(x)$ zwischen denselben Schranken wie die Funktionswerte auf $[a, b]$.

Nun beenden wir den Beweis. Es sei x_0 irgendeine (irrationale) Zahl mit $g(x_0) \neq 0$.

[39] Gaston Darboux, 1842-1917, französischer Mathematiker.
[40] Vgl. [9], S. 45/46, oder [15], S. 10/11.
[41] $[a, b]$ ist die abkürzende Schreibweise für $\{x : a \leq x \leq b \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $g(x_0) > 0$ an. Für alle natürlichen Zahlen n gilt aber (vgl. S (5.1))

$$g(nx_0) = n \cdot g(x_0)$$

Wählt man n geeignet, dann kann man so jede obere Schranke für die Funktionswerte übertreffen im Widerspruch zu der eben bewiesenen Beschränktheit von g. Also ist $g(x) = f(x) - f(1) \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter der Bedingung b) sind die Funktionen f mit $f(x) = f(1) \cdot x$ und nur diese Lösungen der Gleichung a).

Wir wollen jetzt kräftig von der Aussagenlogik Gebrauch machen.[42] Dort zeigt man, dass "Wenn A gilt, so folgt B", gleichwertig ist mit "Wenn B nicht gilt, so folgt, dass A nicht gilt."

Ferner sind "C und D gilt nicht" sowie "Es gilt nicht C oder es gilt nicht D" gleichwertige Aussagen. Das wenden wir auf den eben bewiesenen Satz an. Dort haben wir die Aussage:

"Wenn a) und b) gilt, so ist $f(x) = c \cdot x$."
Dies ist also gleichbedeutend mit der Aussage:
"Wenn $f(x) \neq cx$, so ist f nicht Lösung der Cauchy-Gleichung, oder b) gilt nicht."

Nun wollen wir ja unter allen Umständen Lösungen unserer Funktionalgleichung (I) haben. Bleibt also die Aussage "b) gilt nicht". Und das heißt:

Die Funktion ist auf keinem Intervall, so klein wir es auch wählen (!), beschränkt.

Dieses Ergebnis ist beeindruckend. Immer dringender stellt sich die Frage, ob es solche Funktionen überhaupt gibt. Und wenn es sie gibt, was hätte man sich unter ihrer graphischen Darstellung vorzustellen?

5.3 Eine Funktion wie eine Staubwolke

Fad und unfruchtbar sind die Wunder,
die man seziert, ehe man sie glauben durfte.
Chr. Wolf

Wir wollen einmal annehmen, dass es die merkwürdigen Funktionen, auf die wir soeben gestoßen sind, überhaupt gibt und das Ausmaß ihrer Merkwürdigkeit in einem Satz aufdecken. Dazu müssen wir Vorbereitungen treffen.

A (5.4) Man beweise die sogenannte Dreiecksungleichung

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \qquad \text{für} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Im folgenden wollen wir präzisieren, was eine Umgebung eines Punktes P_0 ist: Es soll ein Quadrat mit dem Mittelpunkt P_0 und der Seitenlänge $2a$ sein (vgl. Abb. 14a).

[42] z.B. [5], S. 10/11

Wir bezeichnen es mit $Q(P_0, a)$. Man könnte natürlich auch Kreise, Ellipsen oder andere ebene Figuren benutzen, um Umgebungen zu charakterisieren. Quadrate haben den Vorteil, dass sich leicht formulieren lässt, wenn ein Punkt P in der Umgebung $Q(P_0, a)$ mit $P_0 = (x_0, y_0)$ liegt:

$$P = (x, y) \in Q(P_0, a) \quad \text{genau dann, wenn} \quad |x - x_0| < a \quad \text{und} \quad |y - y_0| < a$$

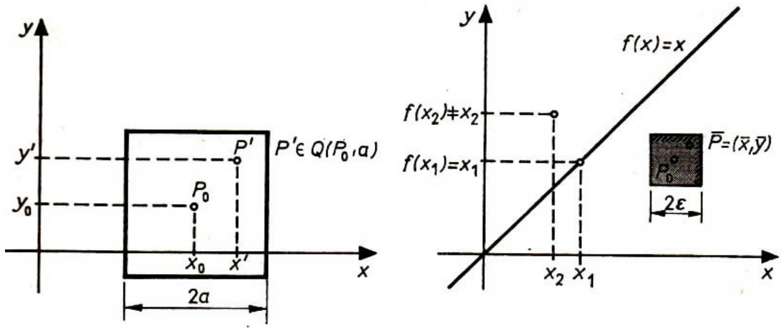


Abb. 14

S(5.5) Voraussetzungen.
a) f ist Lösung der Cauchy-Gleichung mit $f(1) = 1$.
b) Es gibt eine Stelle x_2 mit $f(x_2) \neq x_2$.
c) ε ist eine beliebige positive Zahl und $P_0 = (x_0, y_0)$ ein beliebiger Punkt.

Behauptung. Es gibt einen Punkt $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}) \in Q(P_0, \varepsilon)$ derart, dass $\overline{y} = f(\overline{x})$.
Wir haben versucht, den einfachen geometrischen Inhalt dieses Satzes in Abb. 14 b deutlich zu machen.

Beweis. Wir benutzen irgendein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = f(x_1) \neq 0$, z.B. eine beliebige rationale Zahl, und betrachten das Gleichungssystem

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = x_0 \qquad , \qquad \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = y_0 \tag{1}$$

Die Unbekannten sind α und β. Als Lösung erhält man (wegen $f(x_2) \neq x_2$ und $x_1 \neq 0$)

$$\alpha = \frac{x_0 f(x_2) - y_0 x_2}{x_1(f(x_2) - x_2)} \qquad , \quad \beta = \frac{y_0 - x_0}{f(x_2) - x_2}$$

An α und β interessiert uns im weiteren nur, dass es sie gibt und dass sie wohlbestimmt sind.
Wenn nun zufällig α und β rationale Zahlen sind, dann gilt, wie wir aus Abschnitt 5.1 wissen,

$$y_0 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = f(x_0)$$

In diesem Fall erfüllt also P_0 selbst die Behauptung. Im allgemeinen sind α oder β jedoch irrational. Wir können sie aber durch rationale Zahlen r_1, r_2 mit beliebiger Genauigkeit annähern:

$$\alpha = r_1 + h_1 \qquad , \qquad \beta = r_2 + h_2 \tag{2}$$

Die Bestimmung der Fehler h_1 und h_2 behalten wir uns noch vor. Jetzt erhält das Gleichungssystem die Gestalt

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 = x_0 - (h_1 x_1 + h_2 x_2) \qquad , \qquad r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) = y_0 - (h_1 \cdot f(x_1) + h_2 \cdot f(x_2)) \tag{3}$$

und wir werden sehen, dass

$$\overline{x} = r_1x-1+r_2x_2 \qquad \text{und} \qquad \overline{y} = f(\overline{x}) = f(r_1x_1+r_2x_2) = r_1f(x_1)+r_2f(x_2) \quad (4)$$

die Behauptung des Satzes erfüllen, wenn wir nur h_1 und h_2 geeignet wählen. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich nämlich aus (3) und (4)

$$\begin{aligned} |\overline{x}-x_0| &= |h_1x_1+h_2x_2| \leq |h-1x_1| + |h-2x_2| = |h_1|\cdot|x_1| + [h_2|\cdot|x_2| \\ |\overline{y}-y_0| &= |h_1f(x_1)+h_2f(x_2)| \leq [h_1|\cdot|f(x_1)| + |h_2|\cdot|f(x_2)| \end{aligned} \quad (5)$$

Nun stellen wir folgende Forderungen:

$$|h_i| < \frac{\varepsilon}{2|x_i|} \qquad \text{und} \qquad |h_i| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_i)|} \quad (i=1,2) \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\begin{aligned} |\overline{x}-x_0| &= \frac{\varepsilon}{2|x_1|}\cdot|x_1| + \frac{\varepsilon}{2|x_2|}\cdot|x_2| = \varepsilon \\ |\overline{y}-y_0| &= \frac{\varepsilon}{2|f(x_1)|}\cdot|f(x_1)| + \frac{\varepsilon}{2|f(x_2)|}\cdot|f(x_2)| = \varepsilon \end{aligned}$$

Die letzten Ungleichungen besagen, dass $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ im willkürlich gewählten Quadrat $Q(P_0, \varepsilon)$ liegt, außerdem gilt $\overline{y} = f(\overline{x})$ nach Definition (vgl. (4)).

Da in S (5.5) der Punkt P_0 jeder Punkt der Ebene sein kann, bedeutet das, dass in einer beliebig kleinen Umgebung eines jeden Punktes ein Punkt von f^* liegt, wahrlich ein Bild, das sich mit einer Staubwolke vergleichen lässt.

In Abschnitt 3.1 haben wir erkannt, dass die graphische Darstellung einer Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R}$ eine wichtige Eigenschaft hat:
Jede zur x-Achse senkrechte Gerade trifft f^* in genau einem Punkt. Widerspricht das denn nicht dem Bild einer Staubwolke? Trifft eine beliebige Gerade durch diese Staubwolke tatsächlich immer nur ein einziges Staubkorn?

Die Antwort darauf ist: Ja, es gibt derartige Funktionen. Bewiesen wurde das von Georg Hamel.[43]
Wir können seinen Beweis nicht nachvollziehen, weil dazu genaue Kenntnisse über tiefliegende Eigenschaften reeller Zahlen nötig sind. Aber das Prinzip, nach dem Hamel vorgegangen ist, können wir darstellen. Dazu benutzen wir als Definitionsbereich der Cauchy-Gleichung eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Wir benutzen nur solche Zahlen, die sich in der Form

$$r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3} + r_3$$

schreiben lassen, wobei r_1, r_2 und r_3 beliebige rationale Zahlen sind:

$$M = \{x : x = r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3} + r_3 \text{ und } r_1, r_2, r_3 \text{ rational}\}$$

[43] Georg Hamel, 1877-1954, deutscher Mathematiker.

Wenn wir $M \times M$ als Definitionsbereich D unserer Funktionalgleichung verwenden wollen, müssten wir uns, um $f(x_1 + x_2)$ uneingeschränkt bilden zu können, davon überzeugen, dass die Addition nicht aus M herausführt.
Weiterhin benötigten wir eine Aussage über die Eindeutigkeit der obigen Darstellung.

Auch müsste man sich davon überzeugen, dass x genau dann rational ist, wenn $r_1 = r_2 = 0$ gilt. Wir überlassen die dazugehörigen Beweise dem interessierten Leser. Dann können wir eine Funktion der angekündigten Art konstruieren.

D (5.6) Für alle $x = r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3} + r_3 \in M$ sei f durch

$$f(x) = r_1 a + r_2 b + r3 \cdot x \tag{*}$$

definiert, wobei $a \neq c\sqrt{2}$ oder $b \neq c\sqrt{3}$ gewählt seien. c sei irgendeine reelle Zahl.

Wir zeigen, dass f folgende wesentliche Eigenschaften hat. Die Funktion f genügt der Cauchy-Gleichung: Mit $x_1 = r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3} + r_3$ und $x_2 = \overline{r_1}\sqrt{2} + \overline{r_2}\sqrt{3} + \overline{r_3}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= (r_1 + \overline{r_1})a + (r_2 + \overline{r_2})b + (r_3 + \overline{r_3})c \\ &= (r_1 a + r_2 b + r_3 c) + (\overline{r_1} a + \overline{r_2} b + \overline{r_3} c) = f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

Die Konstanten a, b und c enthüllen sich als spezielle Funktionswerte:
Aus $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = 0$ folgt $f(\sqrt{2}) = a$. In analoger Weise folgt $f(\sqrt{3}) = b$, $f(1) = 0$.

Jetzt erkennt man auch, dass mindestens an einer der beiden Stellen $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ die Funktionswerte nicht auf der Geraden g^* mit $g(x) = c \cdot x$ liegen.
Andererseits gilt für alle rationalen $x = r_3$ die Gleichung $f(r_3) = c \cdot r_3$. Damit ist klar: Wir haben wenigstens auf M eine solche "Staubwolkenfunktion" konstruiert.
(Der Leser überzeuge sich, dass der Satz S (5.5) auch für Funktionen f mit $D(f) = M$ gültig ist.)

Man ahnt nun vielleicht auch, welche Schwierigkeiten G. Hamel zu überwinden hatte, um eine entsprechende Funktion auf $\mathbb{R}$ zu erhalten.

Wir haben unseren Definitionsbereich M mit Hilfe der "Basiszahlen" $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und 1 linear zusammengesetzt.
Hamel musste versuchen, eine solche Basis zu finden, die es ihm ermöglichte, alle reellen Zahlen zu erzeugen. Dabei kommt man nicht mehr mit endlich vielen Basiszahlen aus. Die dazu nötigen Überlegungen sind sehr kunstvoll und trugen zu Beginn unseres Jahrhunderts wesentlich zur Bereicherung der Mathematik bei.

6 Stetige Funktionen

6.1 Stetig und unstetig

Willst du dich am Ganzen erquicken,
so musst du das Ganze im Kleinsten erblicken.
J. W. v. Goethe

Erinnern wir uns daran; woher die merkwürdigen Ergebnisse der letzten Abschnitte rührten. Liegt auch nur ein Punkt der Lösung der Cauchy-Gleichung (I) nicht auf der Geraden $y = cz$, so ergab sich als Konsequenz die "Staubwolken" funktion. Eine Abweichung, ein Sprung, eine einzige Unstetigkeit und solche Folgen!

Schließen wir solche Unstetigkeiten aus, beschränken wir uns also auf stetige Funktionen, so beschränken wir auch die zugelassene Funktionenklasse F der Funktionalgleichungen und vereinfachen damit wesentlich die Lösungswege. Andererseits müssen wir uns den neuen Begriff der Stetigkeit exakt aneignen und sorgfältig gebrauchen.

Wir gehen von einem geometrischen Sachverhalt aus: Wir nennen erst einmal eine Funktion f stetig, wenn ihre graphische Darstellung f^* eine durchgehende, ununterbrochene Linie bildet. Das Problem besteht gerade darin, für diese anschaulich so einfache Aussage eine brauchbare mathematische Formulierung zu finden.

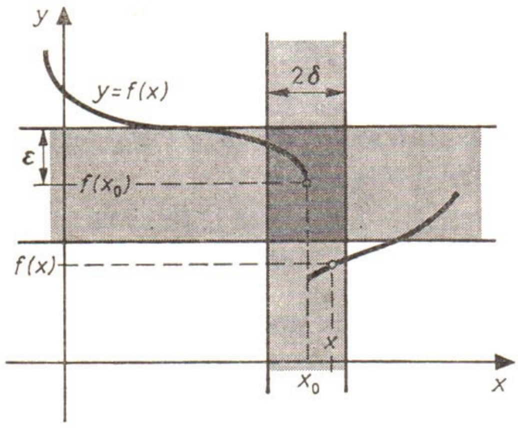


Abb. 15

Manchmal ist es leichter, das Gegenteil einer Eigenschaft als diese Eigenschaft selber zu charakterisieren. Das wollen wir im vorliegenden Fall versuchen.
In Abb. 15 haben wir eine an der Stelle x_0 unstetige Funktion veranschaulicht. Der Graph ist dort "zerrissen". Wie kann man das beschreiben?

Wir haben es in der Zeichnung angedeutet: Man findet einen - zur x-Achse parallelen - Streifen der Breite 2ε, der so gewählt werden kann, dass es Funktionswerte $f(x)$ außerhalb dieses Streifens gibt, wie dicht man auch x bei x_0 wählt. Wie nahe x bei x_0 liegt, messen wir mit einem δ-Streifen, der senkrecht auf der x-Achse steht.

Beide Streifen liegen symmetrisch zu x_0 bzw. $f(x_0)$. Die Projektionen der Streifen auf die Achsen nennen wir Umgebungen von x_0 bzw. $f(x_0)$ mit den Radien δ bzw. ε. Wir werden sie mit $U_\delta(x_0)$ bzw. $U_\varepsilon(f(x_0))$ bezeichnen. Sie sind die eindimensionalen

Analoga der in Abschnitt 5.3 benutzten Quadrate:

$$
\begin{aligned}
U_\delta(x_0) &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ und } x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x : |x - x_0| < \delta \text{ und } x \in \mathbb{R}\} \\
U_\varepsilon(f(x_0)) &= \{y : |y - f(x_0)| < \varepsilon \text{ und } y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir alles vorbereitet, um eine korrekte Definition aussprechen zu können:

D (6.1) Die Funktion f ist am der Stelle $x_0 \in D(f)$ unstetig genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ mit $x \in U_\delta(x_0)$ und $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ existiert.

A (6.2) Man beweise, dass die Funktion f mit $f(x) = [x]$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{Z}$ unstetig ist.

Nun werden wir vernünftigerweise sagen, dass f an der Stelle x_0 stetig ist genau dann, wenn f dort nicht unstetig ist: Wir haben D (6.1) zu negieren!

D (6.3) Die Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 \in D(f)$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D(f)$ folgendes gilt:
Wenn $x \in U_\delta(x_0)$, so ist $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Wer die Techniken der formalen Logik noch nicht so virtuos beherrscht, kann D (6.3) schrittweise wie folgt gewinnen. Wir bezeichnen Teilsätze mit großen Buchstaben.

A. Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $x \in D(f)$ mit $x \in U_\delta(x_0)$ und $f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$.
B. Es gibt ein $x \in D(f)$ mit $x \in U_\delta(x_0)$ und $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.
C. $x \in U_\delta(x_0)$ und $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Und nun erzeugen wir schrittweise die Negation von D (6.1). Dabei soll das Zeichen "$\equiv$" zwischen inhaltlich gleichwertigen Formulierungen stehen:

f stetig in $x_0 \in D(f) \equiv$ es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass A gilt,
f stetig in $x \in D(f) \equiv$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt A nicht,
A gilt nicht $\equiv$ es gibt ein $\delta > 0$, so dass B nicht gilt,
B gilt nicht $\equiv$ für alle $x \in D(f)$ gilt C nicht,
nicht C $\equiv$ aus $x \in U_\delta(x_0)$ folgt $f(x) \in U\varepsilon(f(x_0))$.

Diese Teilaussagen werden nun wieder zusammengesetzt, substituiert, als wären es Formelausdrücke. Als Ergebnis gewinnt man die obige Definition.

Die Definitionen D (6.1) und D (6.3) sind von grundsätzlicher Bedeutung in der Mathematik. Sich mit ihnen auseinanderzusetzen, bleibt keinem erspart, der genau sein will.
Der Stetigkeitsbegriff in dieser Gestalt ist anwendbar auf Abbildungen, die wesentlich allgemeiner sind als die von uns behandelten Funktionen. Übrigens ist der Begriff in der vorliegenden Form nicht von heute auf morgen entstanden.

Er hat sich nur langsam und weltweit erst in unserem Jahrhundert herausgebildet und durchgesetzt. Es ist also nicht gar so verwunderlich, dass es Mühe kostet, ihn inhaltlich zu erfassen. Das Auswendiglernen einer solchen Definition ist sinnlos.

Eine geometrische Vorstellung von der Sache lässt sich dagegen besser reproduzieren. Abbildung 16 soll diesem Zweck dienen:

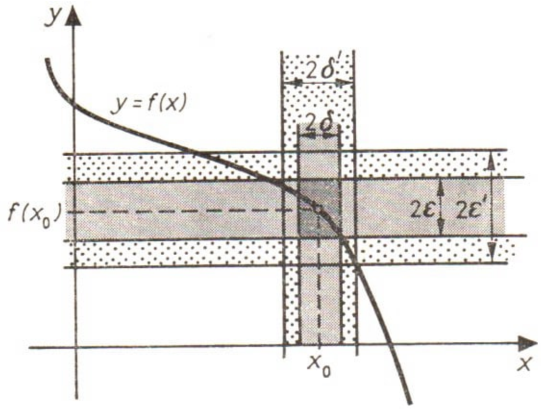


Abb. 16

Wie schmal wir auch den ε-Streifen wählen, stets finden wir einen δ-Streifen so, dass die vom δ-Streifen ausgeblendeten Funktionswerte im ε-Streifen liegen.

Aus der Definition wird deutlich: Stetigkeit (oder Unstetigkeit) ist eine Eigenschaft, die in jedem Punkt $x_0 \in D(f)$ zu überprüfen ist. Man spricht von einer lokalen Eigenschaft.

D (6.4) Eine Funktion f heißt auf $M \subseteq D(f)$ stetig genau dann, wenn f in allen Punkten von M stetig ist. f heißt stetig, wenn $M = D(f)$ ist.

A (6.5) Man beweise, dass jede Funktion f mit $f(x) = mx + n$, wobei $m, n \in \mathbb{R}$, $m = 0$ und $D(f) = \mathbb{R}$ ist, stetig ist.

A (6.6) Man beweise, dass eine in einem Punkt x_0 stetige Funktion auf einem gewissen Intervall beschränkt ist.

Aus der Lösung dieser Aufgabe und dem Darbouxschen Satz S (5.3) folgt sofort, dass als Lösungen der Cauchy-Gleichung (I) nur die Funktionen f mit $f(x) = f(1) \cdot x$ möglich sind, wenn man Stetigkeit an einer Stelle fordert.

6.2 Anschaulich und unanschaulich

Wer sich einiger Dinge sicher ist,
bleibt offen für Neues, ist nicht am Ende,
sondern auf der Suche.
G. de Bruyn

Manchem, der uns bis hierher gefolgt ist, mögen die Definitionen (6.1) und (6.3) sehr theoretisch vorgekommen sein. Sie sind aber auch praktikabel, wie wir an den folgenden Beispielen nachweisen möchten.

B (6.7) $f(x) = x^2$; $D(f) = \mathbb{R}$.
Abb. 4 führt zu der Vermutung, dass f (überall) stetig ist.

Beweis. Es sei x_0 irgendeine reelle Zahl, ε eine beliebige positive Zahl. Dazu muss nun

ein geeignetes δ gefunden werden. Wenn ein solches gefunden ist, erfüllt auch jedes kleinere δ die Forderungen der Definition.
Deshalb können wir von vornherein $\delta \leq 1$ wählen. Das erlaubt für alle $x \in U_\delta(x_0)$ die Abschätzung

$$|x + x_0| \leq |x0| + |x| \leq |x_0| + |x_0 \pm 1| \leq 2|x_0| + 1 \tag{1}$$

(Dabei haben wir die Dreiecksungleichung aus A (5.4) verwendet.) Daraus folgt nun

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0|(2|x_0| + 1)$$

Jetzt ist klar, dass für Zahlen x mit

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \qquad \text{und} \qquad |x - x_0| < 1$$

die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}(2|x_0| + 1) = \varepsilon$$

gilt.
Wir fassen zusammen: Zu vorgegebener positiver Zahl ε wähle man für δ die kleinere der beiden Zahlen 1 und $\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Ist $|x - x_0| < \delta$, dann folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, oder, ist $x \in U_\delta(x_0)$, dann ist $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

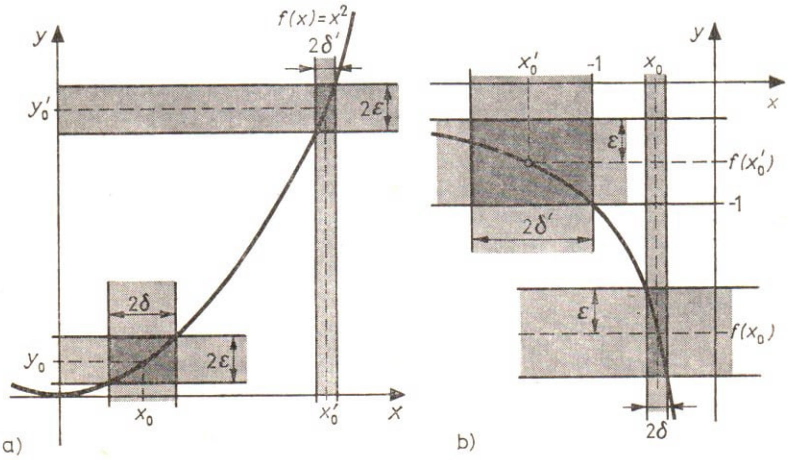


Abb. 17

In Abb. 17a wird anschaulich, was unsere Rechnung erbracht hat: Bei festem ε wird der δ-Streifen schmaler, wenn man $|x_0|$ vergrößert.

B (6.8) $f(x) = \frac{1}{x}$; $D(f) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 0\}$.
Behauptung. f ist stetig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in D(f)$. Wir setzen den δ-Streifen jetzt so fest, dass $0 \notin U_\delta(x_0)$ ist, z.B.

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{2}|x_0|$$

Dann folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung (vgl. A (5.4)) die Ungleichung $\frac{1}{2}|x_0| \leq |x_0| - |x|$ bzw.

$$|x| \geq \frac{1}{2}|x_0| \tag{1}$$

Daraus folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} \leq |x - x_0| \frac{2}{|x_0|^2}$$

Falls $|x - x_0| < \frac{\varepsilon \cdot |x_0|^2}{2}$ ausfällt, ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Für δ kann man also das Minimum von $\frac{|x_0|}{2}$ und $\frac{\varepsilon x_0^2}{2}$ nehmen (vgl. Abb. 17 b).

An dieser Stelle wollen wir eine Bemerkung einschieben über einen Erkenntnisprozess, der in der Mathematik häufig ist.
Wir hatten uns im vorigen Abschnitt ein anschaulich klares Problem vorgelegt. Es kostete - historisch gesehen - erheblichen Aufwand, dafür eine mathematisch geeignete Fassung zu finden. Die wenigen vorgestellten Beispiele vermitteln den begründeten Eindruck, dass wir unsere geometrischen Vorstellungen in den Definitionen D (6.1) und D (6.3) wiederfinden.

Nun soll ein Beispiel folgen, das B. Riemann[44] untersucht hat. Diese Funktion zeigt, dass wir mit unserem Stetigkeitsbegriff in Bereiche vorgedrungen sind, in denen unsere Anschauung versagt. Wir haben ein viel weiteres Gebiet mathematischen Wissens erschlossen, als wir von vornherein ahnen konnten.

B (6.9)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für} \quad x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd}, p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \text{ irrational} \end{cases}$$

$D(f) = \{x : 0 < x < 1 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$.

Behauptung. f ist stetig für alle irrationalen Argumente und unstetig für alle rationalen.

Beweis. Es sei zunächst $x_0 = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(x_0) = \frac{1}{q} < 1$.
Man wählt $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. Nun gibt es aber in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 irrationale Zahlen x, für die ja $f(x) = 0$ ist. Für diese Funktionswerte gilt also

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \varepsilon \qquad \text{d.h.} \qquad f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$$

Die Funktion f ist in x_0 unstetig.

Es sei nun x_0 irrational, also $f(x_0) = 0$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten den dazugehörigen ε-Streifen um $f(x_0) = 0$, also symmetrisch zur x-Achse. Außerhalb dieses Streifens liegen nur die Funktionswerte, für die

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon \qquad q \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

[44] Bernhard Riemann, 1826-1866, deutscher Mathematiker.

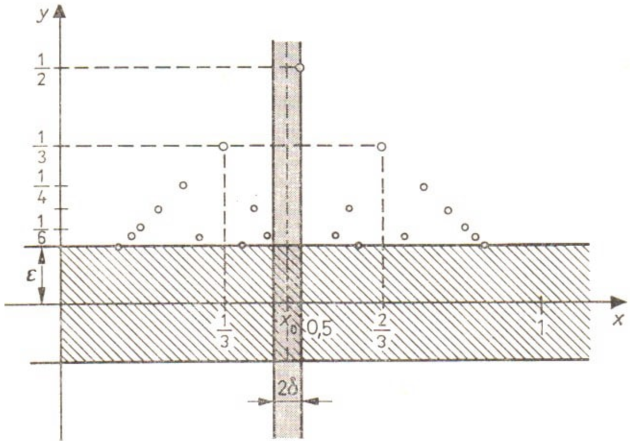


Abb. 18

ist. Da $q \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ eine endliche Zahl ist, kann diese Ungleichung nur für endlich viele q erfüllt sein. Damit kann $f\left(\frac{p}{q}\right) \geq \varepsilon$ auch nur für endlich viele Argumente gelten. Den δ-Streifen kann man dann immer so schmal wählen, dass alle diese endlich vielen Argumente außerhalb von $U_\delta(x_0)$ liegen. (In Abb. 18 haben wir diesen Sachverhalt für den Fall $x_0 = \sqrt{0,23}$ und $\varepsilon = \frac{1}{8}$ veranschaulicht.

In die Abbildung wurden alle Punkte $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q}\right)$ eingetragen, für die $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{8}$ gilt, der δ-Streifen ist so gewählt, dass er keinen dieser Punkte überdeckt.)

Es gibt folglich ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, in dem keine Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $f\left(\frac{p}{q}\right) \geq \varepsilon$ liegen.
In diesem Intervall liegen also nur solche Argumente, für die $f(x) = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Damit ist die Stetigkeit gezeigt, ein Ergebnis, welches man von der Anschauung her - vorausgesetzt, man kann sich f^* vorstellen - wohl nicht erwartet hätte.

A (6.10) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^2} & \text{für } x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd}, p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \\ 1 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

$D(f) = \{x : 0 < x < 1 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$. Gibt es Punkte, in denen diese Funktion stetig ist?

7 Weitere Funktionalgleichungen

Es bleibt immer etwas ungetan, immer entweder etwas mehr
zu sagen oder eine bessere Art, etwas zu sagen,
oder zumindest ein störendes vages Gefühl,
dass die vollkommene Hinzufügung oder Verbesserung
greifbar nahe ist und die Befürchtung,
das die Unterlassung ein ewig andauernder Grund
des Bedauerns sein würde.
P. R. Halmos

7.1 Verwandte der Cauchy-Gleichung

Wir wollen in diesem Kapitel die Funktionalgleichungen

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{I}$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \tag{II}$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{III}$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \tag{IV}$$

gleichzeitig studieren. Allerdings wollen wir voraussetzen, dass die zugelassene Funktionenklasse F die der stetigen Funktionen ist. Über (I) wissen wir ja genau Bescheid. Die anderen Gleichungen sind zunächst formal mit (I) verwandt.[45]

Diese Verwandtschaft erstreckt sich aber auch auf die Lösungsmethoden. Man könnte z.B. die Untersuchungen in Abschnitt 5.1 sinngemäß übertragen. (Das ist für (IV) in A (5.2) verlangt.) Wegen der Stetigkeit von f kann man anschließend die Lösungen für alle reellen Argumente angeben.

Rationeller ist es, die Gleichungen (II), (III) und (IV) durch geeignete Substitutionen auf (I) zurückzuführen. Wir zeigen das für (IV). Dazu müssen wir die Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ und ihre Umkehrfunktionen g mit $g(x) = \log_a x$ benutzen.

Es sei also f stetige Lösung von (IV).
Aus der Lösung von A (5.2) ist bekannt, dass man sich auf $x > 0$ beschränken kann und dass dann $f(x) > 0$ ist, wenn man die triviale Lösung $f(x) = 0$ ausschließt. Das erlaubt die Darstellung

$$x = 10^u \qquad \text{bzw.} \qquad u = \lg x \quad (-\infty < u < +\infty);$$

$$f(x) = 10^{\varphi(\lg x)} \qquad \text{oder} \qquad f(10^u) = 10^{\varphi(u)} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(u) = \lg[f(10^u)]$$

Nun ergibt sich bei Anwendung der Potenzgesetze und unter Ausnutzung von (IV)

$$\varphi(u_1 + u_2) = \lg[f(10^{u_1+u_2})] = \lg[f(10^{u_1} \cdot 10^{u_2}] = \lg[f(10^{u_1}) \cdot f(10^{u_2})]$$

[45]Wegen der Struktur der linken Seite spricht man auch von Additions- bzw. Multiplikationstheoremen, vgl. [16], Bd. III, S. 234.

Mittels eines Logarithmengesetzes folgt weiter

$$\varphi(u_1 + u_2) = \lg[f(10^{u_1})] + \lg[f(10^{u_2})] = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

Die Funktion φ erfüllt also (I). Bleibt noch zu überlegen, ob φ auch stetig bzw. S (5.3) anwendbar ist. Mit den uns zu Gebote stehenden Kenntnissen können wir das so begründen:

Die Funktion f ist stetig. Es existiert also ein Intervall, auf dem f beschränkt ist:

$$0 < m \leq f(10^u) \leq M \quad \text{für} \quad a \leq u \leq b$$

Da $\lg z$ eine monoton wachsende Funktion ist, ergibt sich die Beschränktheit von φ:

$$m' = \lg m \leq \lg[f(10^u)] \leq \lg M = M'$$

Damit ist S (5.3) anwendbar. Wir erhalten

$$\varphi(u) = \varphi(1) \cdot u \qquad , \qquad f(x) = 10^{\lg[f(10)] \cdot \lg x} = x^{\lg[f(10)]}$$

$$f(x) = x^a \qquad \text{mit} \qquad a = \lg[f(10)]$$

Nun besinnen wir uns noch einmal auf A (5.2). Für $x > 0$ erhält man dort $|f(-x)| = f(x)$. Das führt zu den beiden Funktionen F_1, F_2 mit

$$F_1(x) = |x|^2 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \neq 0$$
$$F_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x > 0 \\ -|x|^a & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dass F_1 und $_F2$ tatsächlich auch Lösungen sind, bestätigt man leicht.

Bleibt noch eine Bemerkung zur Stelle $x = 0$ übrig. Aus (IV) folgt $f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0)^2$, also

$$f(0) = 0 \quad \text{oder} \quad f(0) = 1$$

Im Fall $f(0) = 1$ erhält man nach A (5.2) $f(x) = 1$. Das entspricht dem Fall $a = 0$. Ansonsten muss $f(0) = 0$ als notwendige Bedingung erfüllt sein.

Jetzt prüfen wir, ob wir stetige Funktionen erhalten haben. Fordern wir $D(f) = \mathbb{R}$, so erhalten wir für $a < 0$ Lösungen, die an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig sind, da $F_1(0) = F_2(0) = 0$ und $|x|^a = \frac{1}{|x|^{-a}}$ in der Nachbarschaft von $x_0 = 0$ über alle Grenzen wächst. Für $a = 0$ erhält man die stetige Funktion f mit $f(x) = 1$ und für $a > 0$ die Funktionen F_1, F_2 mit $F_1(x) = |x|^a$ bzw. $F_2(x) = \operatorname{sgn}(x) - |x|^a$, deren Stetigkeit wir als bekannt voraussetzen wollen.

Schränkt man $D(f)$ z. B. auf $\mathbb{R}_+^*$ ein, so erhalten wir auch für $a < 0$ die (auf R_+^*) stetige Lösung $f(x) = x^a$.
Wir sehen also, dass (IV) nichts anderes als ein Potenzgesetz ausdrückt.

A (7.1) Man ermittle alle stetigen Funktionen f mit $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-2) = 3$ und

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) + f(x_1) + f(x_2)$.

A (7.2) Es sei a eine positive reelle Zahl. Man beweise, dass dann
a) $f(x) = a^x$ die einzige stetige Lösung f von (II) mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(1) = a$ ist,
b) $f(x) = \log_a x$ die einzige stetige Lösung f von (III) mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(a) = 1$ ist.

A (7.3) Man ermittle Funktionen f, die den in B (1.17) und B (1.18) dargestellten Problemen genügen.

Da bei geeigneter Festlegung des jeweiligen Definitionsbereiches und eines einzigen Funktionswertes die Gleichungen (I) bis (IV) unter den stetigen Funktionen genau eine Lösung haben, kann man auch umgekehrt diese Funktionen durch die entsprechenden Funktionalgleichungen definieren.

Neben den Additionstheoremen (I) und (II) sind dem Leser vielleicht auch andere bekannt, z.B. die der trigonometrischen Funktionen. Auch in diesen Fällen kann man danach fragen, ob es noch andere Funktionen gibt, die diese "trigonometrischen" Additionstheoreme erfüllen, oder ob bei zusätzlichen Bedingungen die trigonometrischen Funktionen die einzigen Lösungen sind.[46]
Wie nicht anders zu erwarten, ist die Stetigkeit dann wieder von fundamentaler Bedeutung.

7.2 Ein Maß ist gesucht

Die Streckenmessung ist uns so geläufig, dass ihre genauere Betrachtung kaum Interessantes verspricht. Trotzdem wollen wir fragen, welche Beziehungen zu unserem Thema bestehen. Durch eine Streckenmessung ordnen wir jeder Strecke eindeutig eine reelle Zahl zu, Grundlage ist also eine Funktion m. Diese Funktion hat Eigenschaften, von denen uns einige einerseits als selbstverständlich, andererseits als besonders wichtig erscheinen:[47]

(1) Es gibt eine Strecke s_0 mit $m(s_0) = 1$ (Normiertheit).
(2) Für kongruente Strecken s_1 und s_2 gilt $m(s_1) = m(s_2)$ (Invarianz gegenüber Bewegungen).
(3) Aus $s_1 \cap s_2 = \varnothing$ folgt $m(s_1 \cup s_2) = m(s_1) + m(s_2)$ (Additivität).
(4) Aus $s_1 \subseteq s_2$ folgt $m(s_1) \leq m(s_2)$ (Monotonie).

Mit dem für Funktionalgleichungen geschärften Blick erkennen wir, dass (3) der Cauchyschen Gleichung sehr ähnlich ist. Der einzige, aber sehr schwerwiegende Unterschied ist der, dass die Argumente der Funktion m Strecken, also Punktmengen sind.
Bisher waren immer reelle Zahlen als Argumente benutzt werden, mit ihnen lässt sich außerordentlich bequem rechnen. Sie haben gute Eigenschaften, die wir z.B. beim Beweis von S (5.3) benutzt haben.

[46] Vgl. z.B. eine derartige Untersuchung in [17].
[47] Ausführliche Betrachtungen zu dem Problem der Streckenmessung findet man z.B. in [15], S. 23-29, oder [16], Bd. V, S. 81-85.

Mit Punktmengen lässt sich dieser Beweis nicht führen. Man muss sich erst einmal überlegen, welche Rechenregeln man zur Verfügung hat. Diese Arbeit wurde um die Jahrhundertwende von den beiden französischen Mathematikern Borel und Lebesgue geleistet. Ihre Betrachtungen des Problems führten zur sogenannten Maßtheorie, die ihrerseits sehr viele Gebiete der mathematischen Forschung beeinflusst und vorangetrieben hat.

Wurden Maße in der Geometrie schon lange vor einer axiomatischen Definition benutzt, so gibt es in der modernen Mathematik genügend Beispiele dafür, dass das Maß sich zwangsläufig aus den im Sinne der Problemstellung wesentlichen Forderungen ergibt.
In dieser Situation befand sich Shannon[48], als er in den 40er Jahren unseres Jahrhunderts ein Maß für den Informationsgehalt bei Nachrichtenübertragungen suchte.

Das Informationsmaß H soll von der Anzahl k der Zeichen abhängen, unter denen ein Sender zur Informationsübertragung auswählen kann. H soll eine Funktion der Anzahl k sein, also $H = H(k)$.
Nimmt ein Empfänger die Information zweier Sender S_1 und S_2 auf, so soll $H_{gesamt} = H(k_1) + H(k_2)$ gelten.
Nun könnte man sich an Stelle von S_1 und S_2 auch einen Sender S vorstellen, der die Zeichen von S_1 und S_2 zu (geordneten) Paaren koppelt und dann aussendet. Für solche Paare gibt es dann $k_1 \cdot k_2$ Möglichkeiten, und S würde dieselbe Information senden wie die parallel arbeitenden Sender S_1 und S_2, also müsste

$$H(k_1 \cdot k_2) = H(k_1) + H(k_2)$$

gelten. Vergleichen wir (*) mit (III) und A (7.2)b), so lassen schon diese ersten einfachen Überlegungen vermuten, dass die Logarithmusfunktion wesentlich für ein Informationsmaß sein wird.[49]

7.3 Das Skalarprodukt

Mit der Betrachtung des Skalarproduktes unter dem Gesichtspunkt der Funktionalgleichungen wollen wir die Andeutungen von den weitreichenden Beziehungen der Funktionalgleichungen zu verschiedenen Gebieten der Mathematik abschließen.

In diesem Fall handelt es sich um das bedeutende Gebiet der Funktionalanalysis, das in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts entwickelt wurde. Dieses Gebiet demonstriert, wie das Suchen und Erfassen tiefliegender Gemeinsamkeiten in traditionellen, scheinbar sehr unterschiedlichen Zweigen der Mathematik zwangsläufig zu neuen "übergreifenden" Begriffsbildungen führt, z.B. zu den Begriffen Vektorraum und Skalarprodukt.

Erklärt man für die Elemente einer Menge M eine als Addition geschriebene Verknüpfung und eine als Multiplikation geschriebene Verknüpfung mit reellen Zahlen, die aus der Menge M nicht herausführen und für die bestimmte Regeln gelten, so nennt man $V = (M, +, \cdot)$ einen Vektorraum.[50] Statt einer exakten Erklärung wollen wir nur zwei

[48] Claude Elwood Shannon, geb. 1916, amerikanischer Mathematiker.
[49] Für die Fortsetzung solcher Betrachtungen vgl. etwa [18].
[50] Für eine exakte Begriffserklärung vgl. etwa [6], S. 394.

charakteristische Beispiele angeben, auf die wir dann wieder Bezug nehmen werden.

Die reellen Zahlen mit der "üblichen" Addition und Multiplikation bilden den Vektorraum $\mathbb{R}^1$.
Definiert man für n-Tupel a bzw. b reeller Zahlen a_i bzw. b_i eine Addition $a+b$ durch

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

und eine Multiplikation $\lambda \cdot a$ durch

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$$

so erhält man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.
Auf einem Vektorraum V können wir nun ein Skalarprodukt definieren.

D (7.4) Eine Funktion

$$q = \{((x, y), z) : (x, y) \in V \times V \text{ und } z \in \mathbb{R} \text{ und } z = q(x, y)\}$$

heißt Skalarprodukt, wenn folgende Regeln gelten:

(1) Für alle reellen Zahlen λ_1, λ_2 und alle x_1, x_2, y aus V gilt

$$q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \cdot q(x_1, y) + \lambda_2 \cdot q(x_2, y)$$

(2) für alle x, y aus V gilt $q(x, y) = q(y, x)$,
(3) für alle $x \in V$ gilt $q(x, x) \geq 0$, und $q(x, x) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = \mathbb{O}$ ist.[51]

Wir sehen also, dass das Skalarprodukt eine Funktion[52] ist, deren wesentliche Eigenschaften (1) und (2) in der Definition durch Funktionalgleichungen beschrieben werden.

Ein erstes Anliegen wäre wiederum, für einen Vektorraum eine Funktion q zu finden, die die Funktionalgleichungen (1) und (2) und natürlich auch (3) erfüllt. Wir lösen diese Aufgabe für unsere obigen Beispiele:

Für $V = \mathbb{R}^1$ erfüllt $q_1(x, y) = c \cdot x \cdot y$ mit $C = q(1, 1)$ und für $V = \mathbb{R}^n$ erfüllt $q_n(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ diese Aufgabenstellung. Der Nachweis ist in beiden Fällen leicht.

Welchen Vorteil bringt uns aber die Einführung des abstrakten Begriffes?
Sicherlich auch den, dass die aus D (7.4) abgeleiteten allgemeinen Sätze damit auch für jeden speziellen Fall bewiesen sind. Bevor wir abschließend dafür ein Beispiel bringen, möchten wir unsere Leser um die Bereitstellung weniger Hilfsmittel bitten.

A (7.5) Man beweise, dass für jedes Skalarprodukt q auf V

$$q(x, \mathbb{O}) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_3 y_1 + \lambda_4 y_2) = {} & \lambda_1 \lambda_3 \cdot q(x_1, y_1) + \lambda_1 \lambda_4 \cdot q(x_1, y_2) \\ & + \lambda_2 \lambda_3 \cdot q(x_2, y_1) + \lambda_2 \lambda_4 \cdot q(x_2, y_2) \end{aligned} \tag{5}$$

[51] Dabei ist $\mathbb{O}$ das Nullelement von V, d.h., für alle $x \in V$ gilt $x + \mathbb{O} = x$.
[52] allerdings keine Zahl-Zahl-Funktion mehr!

gilt.

S (7.6) Für jedes Skalarprodukt gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$[q(x,y)]^2 \leq q(x,x) \cdot q(y,y) \tag{6}$$

Beweis. Für $y = \mathbb{O}$ gilt wegen (4) und (3) in (6) das Gleichheitszeichen. Wir können uns also auf den Fall $y \neq \mathbb{O}$ beschränken. λ sei zunächst eine beliebige Zahl, die wir später geeignet wählen.
Wenn wir in (3) x durch $x + \lambda y$ ersetzen, gilt $0 \leq q(x + \lambda y, x + \lambda y)$, und aus (5) folgt

$$0 \leq q(x,x) + 2\lambda q(x,y) + \lambda^2 \cdot q(y,y) \tag{7}$$

Multiplizieren wir (7) unter Verwendung von (3) mit $q(y,y)$, so können wir durch eine Umordnung schon die rechte Seite von (6) erzeugen:

$$-2\lambda q(x,y)q(y,y) - \lambda^2[q(y,y)]^2 \leq q(x,x) \cdot q(y,y)$$

Nun erinnern wir uns, dass wir über λ noch verfügen können. $\lambda = -\frac{q(x,y)}{q(y,y)}$ liefert (6)!

Für das Skalarprodukt $q_(a,b)$ ergibt sich speziell

$$\left(\sum_{i_1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i_1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i_1}^{n} b_i^2\right)$$

eine Ungleichung, die mancher Leser vielleicht schon mit ganz anderen Mitteln bewiesen hat, nicht ahnend, dass auch nur irgendein Zusammenhang zu Funktionalgleichungen bestehen könnte.

8 Lösungen und Lösungshinweise

Und kennst du Besseres, teile mir freundlich es mit,
wenn nicht, benutze dies mit mir
Horaz

A (1.8)
$M\times N = \{(O,OO),(O,OL),(O,LO),(O,LL),(L,OO),(L,OL),(L,LO),(L,LL)\}$,
$N\times M = \{(OO,O),(OL,O),(LO,O),(LL,O),(OO,L),(OL,L),(LO,L),(LL,L)\}$

A (1.11) Genau (0, 4) ist nicht Element aus F_2.

A (1.13) Vgl. Abb. 19. D (1.12) ist bereits erfüllt, da jede mögliche Belegung von x genau einmal auftritt.

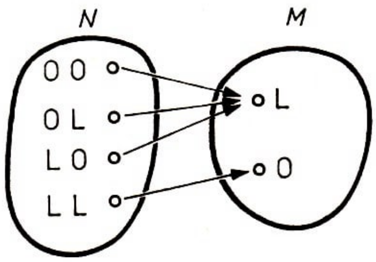


Abb. 19

A (1.14) F_1 ist Funktion, F_2 nicht.

A (1.16) a) $D(f) = \mathbb{R}$, b) $D(f) = \mathbb{R}_+$, c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d) $D(f) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$.

A (2.2) Zum Beispiel $f(x) = x + c$ mit c beliebig.

A (2.4) Die Aufgabenstellung besagt: $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = ax^2 + bc + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$f(x-1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

und

$$f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

d.h., $f(x+1) = f(-x)$ gilt genau dann, wenn

$$ax^2 + (2a+b)x + a + b + c = ax^2 - bx + c \quad \text{d.h.} \quad (a+b)(2x+1) = 0 \qquad (*)$$

ist. (*) ist für alle x genau dann erfüllt, wenn $b = -a$ gilt.

$$f(x) = ax^2 - ax + c \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}$$

sind Lösungen.

A (2.6) $x_2 = 0$ ergibt

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \qquad (*)$$

damit ergibt sich

$$f(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+1 \quad , \quad f(x_1-x_2)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+1$$

und somit

$$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=x_1^2+2+x_2^2$$

d.h., (*) ist Lösung.

A (2.7) $x_2=0$ ergibt $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)$ erfüllt aber nicht für alle Paare $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ die gegebene Funktionalgleichung (man wähle beispielsweise $x_1=x_2=1$). Folglich existiert keine Lösung.

A (2.9) $f(0)=0$. Aus $x_1=0$ und $x_2=x$ folgt

$$f(x)-2f(-x)+c=-x^2 \qquad (*)$$

Aus $x-1=0$ und $x_2=-x$ folgt

$$f(-x)-2f(x)+c=-x^2 \qquad (**)$$

Addiert man das Doppelte von (**) zu (*), so erhält man $f(x)=x^2+c$. Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung wird bestätigt, dass $f(x)=x^2+c$ mit $c\in\mathbb{R}$ Lösungen sind.

A (2.11) Ersetzt man in der gegebenen Gleichung x durch $\frac{1}{x}$ und subtrahiert von der erhaltenen das Vierfache der gegebenen Gleichung, so erhält man $f(x)=\frac{2b}{5x}$. (Rückschluss!)

A (2.13) Aus (1) folgt mit $x_1=x_2=1$, dass $f(1)=0$ oder $f(1)=1$ ist. Aus $f(1)=0$ folgt mit $x_1=1$ und $x_2=x$, dass $f(x)=0$ gilt.
$f(x)=0$ erfüllt auch (2) und ist damit Lösung. Für alle weiteren Lösungen muss also $f(1)=1 \quad$ (3) gelten.
Aus (1) folgt mit $x_1=x_2=0$, dass $f(0)=0$ oder $f(0)=1$ gilt. Aus $f(0)=1$ folgt aber mit $x_1=0$ und $x_2=x$ aus (1), dass $f(x)=1$ gilt. Diese Funktion erfüllt nicht (2). Für alle Lösungen muss also gelten $f(0)=0 \quad$ (4).
Jetzt sei $x\neq 0$. Wir setzen in (2) $x=-1$ und erhalten mit (3) und (4), dass $f(-1)=1$ gilt. Damit folgt aus (1) mit $x_1=-1$ und $x_2=x$, dass $f(-x)=f(x) \quad$ (5) gilt. Es gilt weiter

$$f(1-x)^2=f(1-x)f(1+x) \qquad \text{(wegen (1))}$$

$$f(1-x)^2=f(1)+f(-x^2)\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \qquad \text{(wegen (2))}$$

folglich

$$f(1-x)f(1+x)=1+f(x)^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \qquad \text{(mit (3), (5) und (1))}$$

Setzen wir auf der linken Seite die (2) entsprechenden Ausdrücke ein, so erhalten wir mit (3) und (5)

$$\left(1+f(x)\left(1-\frac{2}{x}\right)\right)\cdot\left(1+f(x)\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)=1+f(x^2)\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

und nach Umformung

$$f(x)\left(\frac{2}{x^2}f(x)-2\right)=0$$

Zusammen mit (4) ergibt sich daraus als weitere mögliche Lösung $f(x)=x^2$.
Es gilt in der Tat $(x_1\cdot x_2)^2=x_1^2\cdot x_2^2$ und

$$(1+x)^2=1+2x+x^2=1^2+x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

Damit ist auch $f(x)=x^2$ Lösung.

A (3.1) a) mittels Ähnlichkeit, vgl. Abb. 20a. b) unter Verwendung des Satzes von PYTHAGORAS (Abb. 20 b).

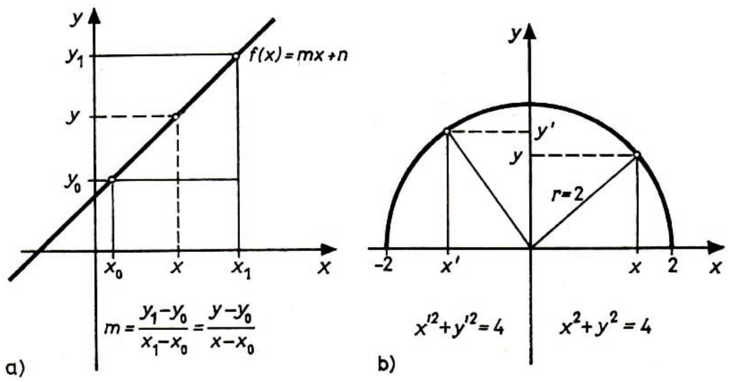


Abb. 20

A (3.2) Vgl. Abb. 21a-d.

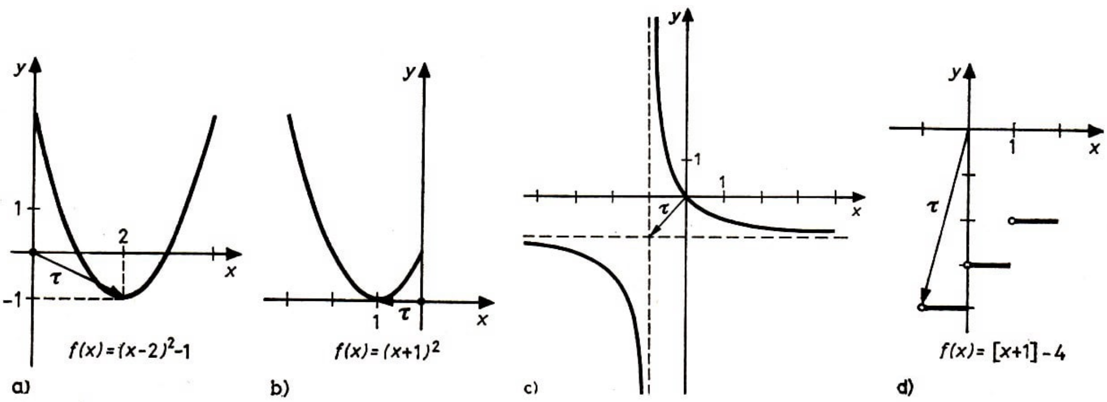


Abb. 21

A (3.4) Vgl. [16], Bd. III, S. 18-21.

A (3.7) Ja, beispielsweise $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$

A (4.2) a) und d) sind gerade Funktionen, c) ist eine ungerade Funktion, b) ist weder gerade noch ungerade, da $D(f)$ nicht symmetrisch zu $x = 0$ ist.

A (4.6) a) Es sei $n \leq x < n + 1$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt $x = n + r$ mit $0 \leq r < 1$ und $[x] = n$, d.h. $y = r$. Damit ist $p = 1$ eine Periode.

b) Angenommen, es existiert eine Periode $p' < 1$. Für $x = 0$ gilt dann $f(0) = 0$, aber $f(p') = p'$. Also ist $p = 1$ die kleinste Periode. c) Vgl. Abb. 22.

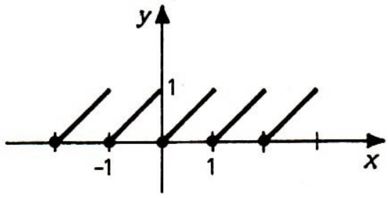


Abb. 22

A (4.7) Nein, z.B. ist für $f(x) = c$ jede positive reelle Zahl eine Periode und für

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \text{ rational} \\ 0 & \text{für} \quad x \text{ irrational} \end{cases}$$

jede positive rationale Zahl (warum?), es gibt aber keine kleinste positive (rationale) Zahl.

A (4.10) Wir ersetzen in (6) x durch $x + a$ und setzen für $f(x + a)$ den durch (6) gegebenen Bruch ein:

$$f(x + 2a) = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{3\frac{f(x)}{3f(x)-1}} = f(x)$$

$2a$ ist also eine Periode.

A (4.11) Wir verfahren zunächst wie in A (4.10):

$$f(x + a) = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$$

Wir ersetzen jetzt x durch $x + 2a$ und erhalten $f(x + 4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = f(x)$. Also ist $4a$ eine Periode. Ein Beispiel lese man aus Abb. 23 ab.

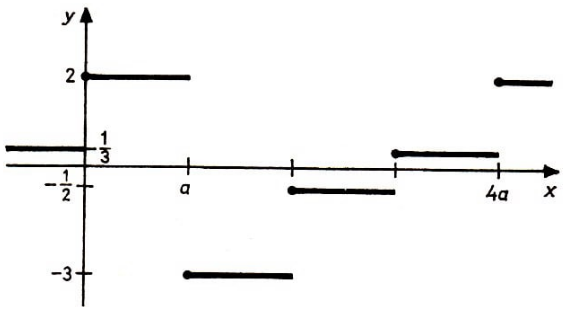


Abb. 23

A (4.12) Aus $x - 1 = x_2 = 0$ folgt entweder $f(x) = 0$ (das ist eine gerade und periodische Funktion) oder $f(0) = 1$. Mit $x_1 = 0$ folgt aus $f(0) = 1$

$$f(x_2) + f(-x_2) = 2f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(-x) = f(x)$$

Mit $x_2 = p$ ergibt sich

$$f(x_1 + p) + f(x_1 - p) = 0$$

bzw., wenn man $u = x_1 + p$ setzt, $f(u) = -f(u + 2p)$.
Mit $u = x + 2p$ erhält man $f(x) = f(x + 4p)$.

A (5.2) Zu (1): Aus $x_1 \neq 0$ und $f(x_1) = 0$ folgt für alle $x = x_1 \cdot x_2$, dass $f(x) = 0$ ist im Widerspruch zur Voraussetzung.
Aus $x_1 = x_2 = 0$ folgt $f(0) = [f(0)]^2$, d.h. $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$.

Zu (2): Aus $x_1 = x_2 > 0$ folgt $f(x_1^2) = [f(x_1)]^2 > 0$.

Zu (3): Gilt $f(0) = c \neq 0$, dann gilt nach (1) $c = 1$. Aus $x_2 = 0$ folgt $1 = f(x_1)$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$.

Zu (4): Aus $x_1 = x_2 = 1$ folgt $f(1) = [f(1)]^2$, d.h. $f(1) = 0$ im Widerspruch zu (1) oder $f(1) = 1$.

Zu (5): Für $x > 1$ ist $0 < \frac{1}{x} < 1$. Wegen (4) gilt

$$1 = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

folglich $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$. Für negative x siehe (6).

Zu (6): Aus $x_1 = x_2 = -1$ folgt $f(-1)^2 = f(1) = 1$ (wegen (4)), also $f(-l) = \pm 1$. Aus $x_2 = -1$ folgt damit $f(-x_1) = \pm f(x_1)$.

Zu (7): Analog zum Beweis für S (5.1) ergibt sich

$$f(x_1^m) = f(x_1)^m \quad (*) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_1^{m \cdot n}) = f(x_1)^{m \cdot n} \quad (**)$$

Mit $x = x_1^n$ und $x_1 > 0$ folgt aus (**)

$$f(x^m) = f\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m \cdot n}$$

und wegen (2) ist $\sqrt[n]{f(x^m)} = f(\sqrt[n]{x})^m$. Mit (*) und einem Wurzelgesetz folgt $\sqrt[n]{f(x)^m} = f(\sqrt[n]{x^m})$.

A (5.4) Vgl. etwa [19], S. 19.

A (6.2) Der Vergleich der Abbildungen 15 und 3 lässt vermuten, dass man z.B. mit $\varepsilon = 0,5$ Erfolg haben wird. In der Tat gibt es dann für jedes $\delta > 0$ ein $x \in U_\delta(x_0)$, nämlich $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$, für welches wegen $x_0 \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung $[x] = \left[x_0 - \frac{\delta}{2}\right] \leq x_0 - 1$ gilt, d.h.

$$|f(x_0) - f(x)| = \left|[x_0] - \left[x_0 - \frac{\delta}{2}\right]\right| \geq 1 > \varepsilon$$

A (6.5) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ mit folgender Eigenschaft:
Aus $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|m|}$ folgt $|mx - mx_0| < \varepsilon$, $|mx + n - (mx_0 + n)| < \varepsilon$, d.h. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A (6.6) Wählen wir in Abhängigkeit von einem $\varepsilon > 0$ für das gewisse Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, so ergeben sich wegen der Stetigkeit die Schranken $m = f(x_0 - \varepsilon$ und $M = f(x_0) + \varepsilon$.

A (7.1) Wir addieren auf beiden Seiten der Funktionalgleichung 1 und erhalten

$$f(x_1 \cdot x_2) + 1 = f(x_1) \cdot f(x_2) + f(x_1) + f(x_2) + 1$$
$$f(x_1 \cdot x_2) + 1 = (f(x_1) + 1)(f(x_2) + 1)$$

Für $g(x) = f(x) + 1$ ist (IV) erfüllt, d.h., wegen $g(-2) = 4$ gilt $g(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 1$.

A (7.2) Zu a): Aus $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$ folgt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Falls $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, ist

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese triviale Lösung ausgeschlossen, erhält man $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$;

$$a = f(1) \qquad , \qquad \varphi(x) = \log_f(x)$$

φ erfüllt die Cauchy-Gleichung. Mit S (5.3) folgt $\varphi(x) = \varphi(1) \cdot x$ und $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$ (vgl. auch [16], Bd. III, S. 236-238, bzw. [19], S. 48-51).

Zu b): Vgl. [16], Bd. III, S. 236-238, bzw. [19], S.52.

A (7.3) Da diese praktischen Probleme ("stillschweigend") stetige Funktionen voraussetzen, gilt für B (1.18) nach Vergleich mit (II) $f(t) = a^t$.
In B (1.17) liegt eine Spezialisierung von (II) vor:

$$f(t + T) = f(T) \cdot f(t) \quad \text{mit} \quad f(T) = \frac{1}{2}$$

Folglich gilt $f(t) = a^t$ mit $a^T = \frac{1}{2}$ bzw. $f(t) = 2^{-t/T}$.

A (7.5) Zu (4): $\mathbb{O} = x - x$, d.h. $q(x, \mathbb{O}) = q(x, x - x)$. Wegen (2) und (1) folgt $q(x, \mathbb{O}) = q(x, x) - q(x, x) = 0$.

Zu (5):

$$q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_3 y_1 + \lambda_4 y_2) = \lambda_1 q(x_1, \lambda_3 y_1 + \lambda_4 y_2) + \lambda_2 q(x_2, \lambda_3 y_1 + \lambda_4 y_2)$$

(wegen (1)). Nun wenden wir auf jeden der Summanden (2) an und danach nochmals (1).

9 Literatur

[1] WUSSING, H., Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, MfL Bd. 13, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.

[2] ASSER, G., Grundbegriffe der Mathematik I, MfL Bd. 1, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.

[3] FANGHÄNEL, G., und H. VOCKENBERG, Arbeiten mit Mengen, Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin 1978 (MSB Nr. 92).

[4] GÖRKE, L., Mengen, Relationen, Funktionen, 4. Aufl., Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin 1973.

[5] HASSE, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, 7. Aufl., Leipzig 1981 (MSB Nr. 2).

[6] Kleine Enzyklopädie Mathematik, 11. Aufl., VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1979.

[7] METZ, J., und G. MERBETH, Schaltalgebra, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1970.

[8] WOROBJOW, N. N., Die Fibonaccischen Zahlen, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977 (MSB Nr. 19).

[9] ACZEL, J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

[10] NAAS, J., und H. L. SCHMIDT, Mathematisches Wörterbuch, 2 Bände, Nachdr. d. 3. Aufl., Akademie-Verlag/BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Berlin, Leipzig 1974.

[11] GELFAND, I. M., E. G. GLAGOLEWA, und E. SCHNOL, Funktionen und ihre graphischen Darstellungen, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974 (MSB Nr. 58).

[12] Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I, Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin 1972.

[13] SOMINSKI, I. S., Die Methode der vollständigen Induktion, 12. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978 (MSB Nr. 8).

[14] ILSE, D., Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität $f(x) = cx$, Mathematik in der Schule 9 (1971), 16-37.

[15] ILSE, D., Systematische Behandlung gewisser Klassen von Funktionalgleichungen und deren Verwendbarkeit in einem modernen Unterricht, Humboldt-Universität Berlin 1968.

[16] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. III, 4. Aufl.; Bd. V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978 bzw. 1971.

[17] THIEL, S., Eine funktionale Charakterisierung der Sinusfunktion, Wiss. Z. Humbold-Univ. Berlin, math.-nat. Reihe, 6 (1978), 669-672.

[18] JAGLOM, A. M., und I. M. JAGLOM, Wahrscheinlichkeit und Information, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984.

[19] BREHMER, S., und H. APELT, Analysis I, MfL Bd. 4, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982.

10 Bezeichnungen und Symbole

Zur Strukturierung des Textes

A() dient der Nummerierung von Aufgaben
B() dient der Nummerierung von Beispielen
D() dient der Nummerierung von Definitionen
S() dient der Nummerierung von Sätzen
Dabei gibt die erste Ziffer in der Klammer das entsprechende Kapitel an, die zweite ist eine laufende Nummer.

Abkürzung mathematischer Objekte/Sachverhalte

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
R_+ Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
R_+^* Menge der positiven reellen Zahlen
$D(f)$ Definitionsbereich der Funktion f
f^* graphische Darstellung von f
$F^* = \{f : f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und f ist Funktion$\}$
$x \in M$ x ist ein Element der Menge M
$x \notin M$ x ist nicht als Element in M enthalten

Sonstige Abkürzungen

OJM Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
In diesem Zusammenhang werden Aufgaben durch Ziffernfolgen bezeichnet, die mit den ersten beiden Ziffern die Olympiade, mit den nächsten beiden die Olympiadeklasse, mit der darauffolgenden die Stufe und mit dem Rest die Aufgabennummer angeben.