IMO

Junge Mathematiker Heft 53

Aufgaben und Lösungen der

I. bis XV. Internationalen Mathematikolympiade

Wir grüßen
die Teilnehmer der
XVI. Internationalen Mathematikolympiade

Reglement
für die
XVI. Internationale Mathematik-Olympiade
in der DDR

I. Allgemeines

§ 1 Die XVI. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) ist eine Veranstaltung, während der ein Wettbewerb auf dem Gebiet der Mathematik durchgeführt wird.
Teilnehmer können nur Schüler der allgemeinbildenden Schulen, der Berufsschulen und der Spezialschulen sein, sofern sie zum Zeitpunkt des Wettbewerbs ein Alter von 20 Jahren nicht überschritten haben.

§ 2 Der Wettbewerb besteht aus zwei Klausuren, die an zwei Vormittagen durchgeführt werden. In jeder dieser Klausuren sollen die Teilnehmer innerhalb von etwa 4 Stunden 3 Aufgaben lösen.

§ 3 Jedes Teilnehmerland ist berechtigt, zum Wettbewerb eine Mannschaft von 8 Schülern zu entsenden.
Die Leitung der Mannschaft besteht aus dem Delegationsleiter und dem Delegationssekretär, der gleichzeitig Stellvertreter des Delegationsleiters ist.
Der Delegationsleiter und der Delegationssekretär sind unter den Mathematikern oder Mathematiklehrern des Teilnehmerlandes auszuwählen. Sie sollen sich sicher und schnell zu den mathematischen und technischen Problemen des Wettbewerbs äußern können.

§ 4 Die offiziellen Verhandlungssprachen sind deutsch, russisch, englisch und französisch. Der Delegationsleiter und der Delegationssekretär müssen wenigstens eine dieser Sprachen beherrschen.

§ 5 Der Veranstalter legt in der Einladung fest, zu welchem Ort die Teilnehmer anreisen und von welchem sie ihre Rückreise antreten sollen. Die Hin- bzw. Rückreise zu bzw. von diesen Orten werden von den Teilnehmerländern bezahlt. Alle Kosten, die während der XVI. Internationalen Mathematikolympiade anfallen, das sind insbesondere Kosten der Verpflegung, Unterkunft, im Veranstaltungsplan vorgesehene Reisen und Exkursionen sowie Taschengelder, werden vom Veranstalter getragen.

§ 6 Weitere Personen, die von einem Teilnehmerland zur Begleitung der Mannschaft (z. B. als pädagogischer Betreuer) entsandt werden, nehmen nicht an den mit dem Wettbewerb zusammenhängenden Arbeiten teil. Die Kosten für diese Personen trägt das entsendende Land.

II. Leitung des Wettbewerbs

§ 7 Die Leitung des Wettbewerbs erfolgt durch die Jury. Sie besteht aus dem in der Einladung zur XVI. IMO benannten Präsidenten und den Delegationsleitern aller teilnehmenden Länder. Die Jury entscheidet, zu welchen Beratungen die Delegationssekretäre mit beratender Stimme hinzugezogen werden. Der Präsident hat das Recht, sich durch einen von ihm beauftragten Stellvertreter vertreten zu lassen. Jeder Delegationsleiter kann sich durch seinen Delegationssekretär vertreten lassen.

§ 8 Der Präsident kann Mathematiker oder Mathematiklehrer bei der Vorbereitung und Durchführung des Wettbewerbs (z. B. als Koordinatoren) heranziehen. Sie sollen mindestens eine der Verhandlungssprachen beherrschen und haben bei den Sitzungen der Jury beratende Stimme.

§ 9 Die Jury kann nur über Probleme Entscheidungen treffen, die mit der Vorbereitung und Durchführung des Wettbewerbs zusammenhängen oder in diesem Reglement festgelegt sind.
Die Abstimmung erfolgt mit einfacher Stimmenmehrheit. Bei Stimmengleichheit entscheidet die Stimme des Präsidenten.

§ 10 Über die Sitzung der Jury wird ein Protokoll in deutscher Sprache geführt und jedem Jurymitglied zugestellt.

§ 11 Die Jury hat folgende Aufgaben:

1. Sie tritt drei Tage vor der ersten Klausur zusammen, um das detaillierte Programm der XVI. IMO kennenzulernen.
2. Sie legt die Wettbewerbsaufgaben und die dem jeweiligen Schwierigkeitsgrad entsprechenden Punktzahlen so fest, daß für die vollständige Lösung aller 6 Aufgaben 40 Punkte vergeben werden.
3. Sie entscheidet über die Formulierung der Aufgaben in den vier Verhandlungssprachen.
4. Sie legt vor Beginn der Korrekturen in einer Beratung mit den Koordinatoren die Bewertungsgrundsätze fest.
5. Sie prüft, ob alle Teilnehmer dem Reglement entsprechen. Erfüllen Teilnehmer nicht die Bedingungen dieses Reglements, so hat die Jury

das Recht, solche Teilnehmer vom Wettbewerb auszuschließen.

6. Sie prüft, ob die Bewertung der Aufgaben den Bewertungsgrundsätzen entsprechend erfolgt ist, und bestätigt diese Bewertung bzw. legt in Zweifelsfragen die endgültige Bewertung fest.
7. Sie entscheidet über die Vergabe der Preise und Diplome.
8. Sie entscheidet bei Verletzung des Reglements.
9. Sie schätzt in einer Abschlußbesprechung die Ergebnisse des Wettbewerbs ein.

III. Wettbewerbsaufgaben, Klausuren und Bewertung der Lösungen

§ 12 Jedes Teilnehmerland ist aufgefordert, 3 bis 5 Aufgabenvorschläge in einer der offiziellen Verhandlungssprachen (einschließlich Lösungen) an den Präsidenten der Jury einzureichen.
Der Termin der Einsendung wird in der Einladung mitgeteilt.

§ 13 Die Aufgaben sollen so ausgewählt sein, daß ihre Lösungen vom Schüler Findigkeit und ein hohes Leistungsvermögen erfordern.

§ 14 Der Präsident sorgt für die Vervielfältigung der eingereichten Aufgabenvorschläge (ohne Lösungen) und übergibt jedem Delegationsleiter vor Beginn der Jurysitzungen je ein Exemplar der eingereichten Aufgabenvorschläge.

§ 15 Der Präsident unterbreitet einen Aufgabenvorschlag für die beiden Klausuren und benennt 6 weitere Ersatzaufgaben. Die Aufgaben des Vorschlags und die Ersatzaufgaben legt er mit Lösungen in den offiziellen Verhandlungssprachen der Jury vor. Die Jury berät über den Vorschlag und legt die Wettbewerbsaufgaben endgültig fest. Der Präsdient führt die Verhandlungen dabei so, daß nach Möglichkeit die Zustimmung aller Mitglieder der Jury zu den Aufgaben erreicht wird.

§ 16 Die Texte der Aufgaben werden von den Delegationsleitern in die Landessprache der Schüler übersetzt und vervielfältigt. Die Verantwortung für die Richtigkeit der Übersetzung trägt der Delegationsleiter. Er kann dabei den Delegationssekretär zu seiner Unterstützung heranziehen.

§ 17 Die Schüler können bei Beginn einer jeden Klausur innerhalb der ersten 30 Minuten schriftlich Fragen zum Aufgabentext an die Jury stellen.
Diese legt fest, ob und in welchem Umfange die Fragen beantwortet werden.
Die Beantwortung erfolgt schriftlich.

§ 18 Die Lösungen der Teilnehmer werden von der jeweiligen Delegationsleitung einer ersten Korrektur unterzogen.
Die Reihenfolge der Korrekturen wird vom Präsidenten festgelegt.
Danach erfolgt eine Zweitkorrektur durch den Koordinator. Dieser unterbreitet dem Delegationsleiter einen Bewertungsvorschlag.
Sollte über diesen Vorschlag keine Einigung erzielt werden, ist der Delegationsleiter des Landes hinzuzuziehen, das die Aufgabe vorgeschlagen hat. Alle auch dadurch nicht zu klärenden Streitfragen in der Bewertung werden der Jury zur Entscheidung vorgelegt.

§ 19 Bei der Korrektur der Lösungen von Schülern aus der DDR fungieren von der Jury beauftragte Delegationsleiter eines anderen Landes als Koordinatoren. Dabei soll jeweils zur Koordinierung der Lösungen einer Aufgabe möglichst der Delegationsleiter des Landes beauftragt werden, das die jeweilige Aufgabe vorgeschlagen hat.

§ 20 Alle Personen, die Kenntnis von den Wettbewerbsaufgaben haben, sind verpflichtet, diese bis zum Beginn der jeweiligen Klausur geheimzuhalten.

IV. Preisverteilung

§ 21 Jeder Teilnehmer am Wettbewerb erhält eine Teilnehmerurkunde und ein Erinnerungsgeschenk.

§ 22 Für die besten Teilnehmer gibt es 1., 2. und 3. Preise sowie Diplome für ausgezeichnete Lösungen von Aufgaben.
Dabei soll die Gesamtzahl der 1., 2. und 3. Preise nicht größer als die Hälfte der Anzahl aller Teilnehmer sein.
Die Anzahlen der Preise sollen möglichst ein Verhältnis von 1 : 2 : 3 aufweisen.
Die Preise und Diplome sind nicht mit Geld- oder Sachwerten verbunden.

§ 23 Die Übergabe der Urkunden an die Preisträger erfolgt auf einer öffentlichen festlichen Veranstaltung durch den Präsidenten der Jury.

Aufgaben der I. bis XV. IMO (1959 bis 1973)

I. IMO

1. Zeige, daß der Bruch $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ für keine natürliche Zahl n zu kürzen ist!

2. Für welche reellen Werte von x gelten die Gleichungen

   a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$,

   b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1$,

   c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$,

   wobei die Wurzeln nichtnegative Zahlen sind? ?

3. Es sei x ein Winkel (d. h. eine reelle Zahl). Weiter seien a, b und c beliebige reelle Zahlen. Die reelle Zahl cos x möge die quadratische Gleichung

   $$a \cdot \cos x^2 + b \cdot \cos x + c = 0$$

   erfüllen. Man gebe eine quadratische Gleichung an, die der Zahl cos 2x genügt. Im Falle a = 4, b = 2, c = 1 vergleiche man diese Gleichungen.

4. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem die Hypotenuse c gegeben ist und von dem man weiß, daß die zu c gehörende Seitenhalbierende das geometrische Mittel der beiden Katheten ist.

5. Auf einer Strecke AB wird ein zwischen A und B liegender Punkt M angenommen, und über den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ als Seiten werden die Quadrate AMCD und MBEF errichtet, die auf derselben Seite von $\overline{AB}$ liegen sollen. Die den Quadraten umschriebenen Kreise mit den Mittelpunkten P und Q schneiden einander außer in M noch in dem Punkte N. Die durch AF und durch BC gegebenen Geraden mögen sich im Punkt N' schneiden.

   a) Man zeige, daß N und N' zusammenfallen.

   b) Wie auch der Punkt M immer angenommen sein mag, stets gehen die Geraden MN durch einen festen Punkt S. Man beweise dies.

   c) Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken $\overline{PQ}$, wenn M zwischen A und B variiert.

6. Es sind zwei sich in einer Geraden g schneidende Ebenen P und Q gegeben. Weiterhin ist in der Ebene P ein Punkt A und in der Ebene Q ein Punkt C gegeben; keiner dieser Punkte liegt auf der Geraden g.

   Ein gleichschenkliges Trapez ABCD (mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), dem man einen Inkreis einschreiben kann, ist so zu konstruieren, daß der Punkt B in der Ebene P und der Punkt D in der Ebene Q liegen.

II. IMO

1. Bestimme alle dreiziffrigen Zahlen, die durch 11 geteilt eine Zahl ergeben, die gleich ist der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl!

2. Für welche Werte der Veränderlichen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9 \quad ?$$

3. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n eine ungerade Zahl). Ist α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so zeige, daß gilt

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a} \quad !$$

4. Konstruiere ein Dreieck ABC, wenn h_a, h_b und s_a bekannt sind! (h_a ist die auf der Seite a errichtete Höhe, h_b die auf der Seite b, und s_a ist die Seitenhalbierende der Seite a)!

5. Gegeben ist ein Würfel ABCDA'B'C'D'.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken XY, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke AC und Y ein beliebiger Punkt auf der Strecke B'D' ist!

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte Z der Strecke XY, die die Beziehung $\overline{ZY} = 2\overline{XZ}$ erfüllen!

6. Gegeben ist ein Kegel, die dem Kegel eingeschriebene Kugel und der der Kugel umschriebene Zylinder, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels in einer Ebene liegt. V_1 ist der Rauminhalt des Kegels und V_2 der Rauminhalt des Zylinders.

a) Beweise, daß die Gleichung $V_1 = V_2$ nicht bestehen kann!

b) Bestimme die kleinste Zahl k, für welche $V_1 = kV_2$ gilt, und konstruiere für diesen Fall den Winkel an der Spitze des Kegels!

7. Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien a und b und der Höhe h.

a) Konstruiere einen Punkt P auf der Symmetrieachse, von dem aus die beiden Schenkel unter einem rechten Winkel erscheinen!

b) Bestimme die Entfernung des Punktes P von einer der beiden Grundlinien rechnerisch!

c) Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion des Punktes P möglich? (Diskussion der möglichen Fälle).

III. IMO

1. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 , \end{aligned}$$

in dem a und b gegebene Zahlen sind!

Bei welcher Bedingung für a und b sind x, y, z sämtlich positiv und verschieden?

2. Gegeben sind a, b, c als die Längen der Seiten eines Dreiecks. S sei die Größe der Fläche desselben Dreiecks. Man beweise, daß stets

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} \quad \text{ist!}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

3. Man löse die Gleichung $\cos^n x - \sin^n x = 1$, wo n eine beliebig gegebene natürliche Zahl ist.

4. Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im

Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3. Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}, \quad \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}}, \quad \frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

5. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\sphericalangle AMB = \omega$, wobei M die Mitte der Strecke BC ist. Es sei $\omega < 90^\circ$. Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b \quad \text{ist.}$$

In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

6. Es sind eine Ebene (ε) und drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gegeben, so daß die Punkte auf derselben Seite von (ε) liegen und die von ihnen gebildete Ebene nicht parallel mit (ε) ist. A', B', C' seien drei beliebige Punkte von (ε). Die Mittelpunkte der Strecken AA', BB', CC' seien L, M bzw. N und der Schwerpunkt des Dreiecks LMN sei G. (Die Punkte A', B', C', für die LMN kein echtes Dreieck bilden, lassen wir außer acht.)

   Man bestimme den geometrischen Ort des Punktes G, wenn A', B', C' unabhängig voneinander die Ebene (ε) durchlaufen.

IV. IMO

1. Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) Ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6.

b) Wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

2. Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen.

3. Es ist ein Würfel ABCDA'B'C'D' (mit den Gegenseitenflächen ABCD, A'B'C'D', wobei $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) gegeben. Der Punkt X durchläuft mit einer konstanten Geschwindigkeit den Umfang des Quadrates ABCD in dieser Reihenfolge, und der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats B'C'CB in dieser Reihenfolge; die Punkte X und Y beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Anfangspunkten A und B' aus. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

4. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

zu bestimmen.

5. Auf einer Kreislinie k sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Auf derselben Kreislinie ist ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, daß ABCD ein Tangentenviereck ist. (Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden!)

6. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r, sein Inkreis den Radius ϱ.

   Man beweise, daß der Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise $d = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$ ist.

7. Es ist ein Tetraeder SABC mit folgender Eigenschaft gegeben: Es gibt 5 Kugelflächen, von denen jede die Kanten SA, SB, SC, AB, BC, CA bzw. deren Verlängerungen berührt.

   Beweisen Sie, daß

   a) das Tetraeder regelmäßig ist;

   b) umgekehrt für jedes regelmäßige Tetraeder fünf solche Kugelflächen existieren!

V. IMO

1. Man bestimme alle reellen Werte von x, die der Gleichung $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ genügen, wo p ein reeller Parameter ist.

2. Es ist im Raum der geometrische Ort des Scheitels eines rechten Winkels zu finden, von dem der eine Schenkel durch einen gegebenen Punkt A geht und der andere ~~Scheitel~~ wenigstens einen Punkt mit einer gegebenen Strecke $\overline{BC}$ gemeinsam hat.

3. In einem n-Eck, dessen innere Winkel alle gleich sind, **seien a_1, a_2, ..., a_n die Längen aufeinanderfolg. Seiten für** die die Ungleichungen $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ gelten. Es ist zu beweisen, daß dann notwendig $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ist.

4. Man finde alle Werte von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, die den Gleichungen

$$x_5 + x_2 = yx_1 \qquad x_3 + x_5 = yx_4$$
$$x_1 + x_3 = yx_2 \qquad x_4 + x_1 = yx_5$$
$$x_2 + x_4 = yx_3$$

genügen, wobei y ein Parameter ist.

5. Man beweise, daß $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ ist.

6. An einem Wettbewerb nahmen fünf Schüler A, B, C, D, E teil. Jemand hatte die Vermutung ausgesprochen, daß im Endergebnis die Reihenfolge ABCDE sein würde. Er hat aber damit weder die Stelle irgendeines Bewerbers noch irgendein Paar direkt aufeinanderfolgender Bewerber richtig erraten. Ein anderer hatte die Reihenfolge DAECB vermutet. Das war schon besser, denn hier stimmten die Stellen von genau zwei Bewerbern, und zwei Paare von direkt aufeinanderfolgenden Bewerbern waren richtig.

   Welches Ergebnis hatte der Wettbewerb?

VI. IMO

1.a) Bestimmen Sie alle positiven Zahlen n, für die die Zahl $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist!

  b) Beweisen Sie, daß für keine positive ganze Zahl die Zahl $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist!

2. Wir bezeichnen die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks mit a, b, c. Es ist zu beweisen, daß

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

gilt.

3. Wir betrachten den in das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c einbeschriebenen Kreis und seine den Seiten des

Dreiecks parallelen Tangenten. Diese Tangenten schneiden vom Dreieck ABC drei neue Dreiecke ab. In jedes dieser neuen Dreiecke sei wieder ein Kreis einbeschrieben. Berechnen Sie die Summe der Inhalte aller vier Kreise!

4. Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur drei Themen, und je zwei Wissenschaftler behandeln ein und nur ein Thema. Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

5. In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben. Unter den Geraden, die diese fünf Punkte verbinden, gibt es keine parallelen, senkrechten oder zusammenfallenden. Wir fällen von jedem Punkt die Lote auf alle Geraden, die man durch paarweise Verbindung der übrigen vier Punkte erhält. Zu bestimmen ist das Maximum der Anzahl der Schnittpunkte dieser Lote ohne die gegebenen fünf Punkte.

6.a) Es ist ein Tetraeder ABCD gegeben. Die Ecke D wird mit dem Schwerpunkt D_1 der Grundfläche ABC verbunden. Die Parallelen zu DD_1, die durch A, B, C gezogen sind, schneiden die diesen Ecken gegenüberliegenden Seitenflächen in den Punkten A_1, B_1, C_1.

Beweisen Sie, daß das Volumen des Tetraeders ABCD gleich einem Drittel des Volumens des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ ist!

b) Gilt das Resultat auch noch, wenn der Punkt D_1 im Innern der Grundfläche ABC beliebig gewählt wird?

VII. IMO

1. Es sind alle reellen Zahlen x aus dem Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ zu finden, die den Ungleichungen

$$2\cdot\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

genügen.

2. Gegeben ist ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

dessen Koeffizienten folgende Bedingungen erfüllen:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sind positiv.

b) Alle übrigen Koeffizienten sind negativ.

c) In jeder Gleichung ist die Summe der Koeffizienten positiv.

Es ist zu beweisen, daß $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die einzige Lösung des gegebenen Systems ist.

3. Es sei ein Tetraeder ABCD gegeben. Die Kante AB habe die Länge a, die Kante CD habe die Länge b. Der Abstand der durch AB und CD bestimmten windschiefen Geraden sei d, das Maß eines Winkels zwischen diesen Geraden sei ω . Das Tetraeder werde durch eine zu den Gegenkanten AB und CD parallele Ebene ε in zwei Teile zerlegt. Berechnen Sie das Verhältnis der Rauminhalte beider Teile, wenn das Verhältnis k des Abstandes der Geraden AB von der Ebene ε und des Abstandes der Geraden CD von der Ebene ε bekannt ist!

4. Man ermittle sämtliche Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die jede der Summen aus einer der Zahlen und dem Produkt der drei übrigen gleich 2 ist.

5. Es ist ein Dreieck $\triangle OAB$ gegeben, dessen Winkel $\sphericalangle AOB$ das Maß $\alpha < 90^\circ$ hat. Von einem beliebigen Punkt $M \neq 0$ des Dreiecks $\triangle OAB$ werden die Lote MP auf OA und MQ auf OB gefällt. H sei der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle OPQ$. Welches ist der geometrische Ort der Punkte H, wenn der Punkt M

a) die Strecke AB

b) das Innere des Dreiecks $\triangle OAB$

durchläuft?

6. In einer Ebene sind $n \geq 3$ Punkte gegeben, das Maximum aller Abstände von je zwei dieser Punkte sei d. Diejenigen Verbindungsstrecken dieser Punkte, deren Länge gleich d ist, sollen Durchmesser des gegebenen Punktsystems heißen. Man beweise, daß die Anzahl dieser Durchmesser höchstens n beträgt.

VIII. IMO

1. Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden insgesamt drei Aufgaben A, B, C gestellt. Unter allen Teilneh-

mern gab es (genau) 25 Schüler, von denen jeder wenigstens eine Aufgabe gelöst hatte. Unter den Schülern, welche die Aufgabe A nicht gelöst hatten, war die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe B gelöst hatten, zweimal so groß wie die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe C gelöst hatten. Die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A gelöst hatten, war um 1 größer als die Anzahl der übrigen Schüler , welche die Aufgabe A gelöst hatten. Von den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst hatten, hatte die Hälfte die Aufgabe A nicht gelöst. Wieviel Schüler hatten nur die Aufgabe B gelöst?

2. Beweisen Sie den folgenden Satz!

Falls die Längen a, b, c der Seiten und die Maße α, β, γ der ihnen jeweils gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks die Gleichung

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}\,(a\cdot\tan\alpha + b\cdot\tan\beta)$$

erfüllen, so ist das Dreieck gleichschenklig.

3. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt der einem regelmäßigen Tetraeder umbeschriebenen Kugel und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt des Raumes und den Eckpunkten des Tetraeders.

4. Es ist zu beweisen, daß für jede natürliche Zahl n ($n \neq 0$) und für jede reelle Zahl $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; λ beliebige ganze Zahl) gilt

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x\ .$$

5. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrl} & |a_1 - a_2|x_2 + & |a_1 - a_3|x_3 + & |a_1 - a_4|x_4 & = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + & & |a_2 - a_3|x_3 + & |a_2 - a_4|x_4 & = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + & |a_3 - a_2|x_2 + & & |a_3 - a_4|x_4 & = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + & |a_4 - a_2|x_2 + & |a_4 - a_3|x_3 & & = 1\ , \end{array}$$

wobei a_1, a_2, a_3, a_4 gegebene, paarweise verschiedene reelle Zahlen sind.

6. Auf den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks $\triangle$ ABC sei jeweils

ein Punkt M, K bzw. L beliebig, aber verschieden von den Eckpunkten angenommen. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt wenigstens eines der Dreiecke $\triangle LAM$, $\triangle MBK$, $\triangle KCL$ nicht größer als $\frac{1}{4}$ des Flächeninhaltes des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

IX. IMO

1. In einem Parallelogramm ABCD sei $\overline{AB} = a$ die Länge der Seite AB, $\overline{AD} = 1$ die Länge der Seite AD und α das Maß des Winkels $\sphericalangle DAB$. Das Dreieck ABD sei spitzwinklig.

   Man beweise: Die vier Kreise K_A, K_B, K_C, K_D vom Radius 1, deren Mittelpunkte die Eckpunkte A, B, C, D sind, überdekken das Parallelogramm dann und nur dann, wenn

   $a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ gilt.

2. In einem Tetraeder habe genau eine Kante eine Länge, die größer als 1 ist. Man zeige, daß dann für das Volumen des Tetraeders $V \leqq \frac{1}{8}$ gilt.

3. Es seien k, m und n positive ganze Zahlen, wobei $m+k+1$ eine Primzahl größer als $n+1$ ist. Wir führen die Bezeichnung $c_s = s(s + 1)$ ein. Man beweise, daß das Produkt $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$ durch das Produkt $c_1c_2 \dots c_n$ teilbar ist.

4. Es seien zwei spitzwinklige Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A'B'C'$ gegeben. Man konstruiere ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich (wobei die Punkte A, B, C den Punkten A', B', C' in der angegebenen Reihenfolge entsprechen) und dem Dreieck $A_0B_0C_0$ umschrieben (wobei AB durch C_0, BC durch A_0 und CA durch B_0 verläuft) ist. Anschließend konstruiere man von allen Dreiecken dieser Art dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.

5. Man betrachte die Folge $\{c_n\}$

$$c_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2$$
$$\vdots$$

$$\vdots$$

$c_n = a_1^{\,n} + a_2^{\,n} + \ldots + a_8^{\,n}$,

wobei $a_1, \ldots, a_8$ reelle Zahlen sind, von denen wenigstens eine verschieden von 0 ist. Es sei bekannt, daß unendlich viele Glieder c_n dieser Folge gleich 0 sind. Unter dieser Voraussetzung bestimme man alle n, für die $c_n = 0$ gilt.

6. Bei einem Sportwettkampf wurden m Medaillen im Laufe von n Tagen ($n > 1$) verliehen. Am 1.Tage wurden 1 Medaille und $\frac{1}{7}$ der übrigen $m - 1$, am 2.Tage 2 Medaillen und $\frac{1}{7}$ des nun verbliebenen Restes verliehen usw. Schließlich wurden am n-ten Tage gerade n Medaillen vergeben, ohne daß noch welche übrig blieben. Wieviel Tage dauerte der Wettkampf, und wieviel Medaillen wurden insgesamt verliehen?

X. IMO

1. Man beweise, daß genau ein Dreieck existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und einer der Winkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen ist.

2. Es sei $p(x)$ das Produkt aller Ziffern der im Dezimalsystem gegebenen Zahl x. Man ermittle alle positiven Zahlen x, für die $p(x) = x^2 - 10x - 22$ gilt.

3. Für die reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ sei folgendes Gleichungssystem mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \end{aligned} \qquad (1)$$

$$ax_{n-1}^2 + b_{x-1} + c = x_n$$
$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

Ferner sei $\Delta = (b - 1)^2 - 4ac$.

Man beweise, daß das System (1) im Bereich der reellen Zahlen für

a) $\Delta < 0$ keine Lösung,

b) $\Delta = 0$ genau eine Lösung,

c) $\Delta > 0$ mehr als eine Lösung hat.

4. Man beweise: Für jedes Tetraeder gibt es einen solchen Eckpunkt, daß sich aus den drei Strecken deren Längen gleich denen der von ihm ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren läßt.

5. Es seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine reelle, für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für jedes reelle x der Bedingung

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} \qquad (4)$$

genügt.

a) Man beweise: Die Funktion f ist periodisch, d.h. es gibt eine solche reelle Zahl $b > 0$, daß für jedes x
$$f(x + b) = f(x)$$
gilt.

b) Für $a = 1$ gebe man ein Beispiel einer solchen Funktion $f(x)$ ($f \neq$ const.) an.

6. Es sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Man berechne für jede beliebige positive ganze Zahl n die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right]$$

XI. IMO

1. Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen a mit der folgenden Eigenschaft gibt: Die Zahl $z = n^4 + a$ ist für keine natürliche Zahl n eine Primzahl.

2. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Konstanten, x eine reelle Variable und
$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \tfrac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \tfrac{1}{2}2\cos(a_3 + x) \quad \ldots$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x).$$
Man beweise: Aus $f(x_1) = f(x_2) = 0$ folgt stets $x_2 - x_1 = m\pi$, wobei m eine ganze Zahl ist.

3. Für jedes k = 1, 2, 3, 4, 5 bestimme man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die eine positive reelle Zahl a erfüllen muß, damit ein Tetraeder existiert, bei dem k Kanten die Länge a und die übrigen 6 - k Kanten die Länge 1 haben.

4. Eine Halbkreislinie y ist über der Strecke AB als Durchmesser errichtet. C ist ein Punkt auf y, der von A und B verschieden ist. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf AB. y_1, y_2, y_3 sind drei Kreise, die AB als gemeinsame Tangente haben. Von diesen Kreisen ist y_1 der Inkreis des Dreiecks ABC, während y_2 und y_3 beide die Strecke CD und y berühren. Man beweise, daß die Kreise y_1, y_2 und y_3 eine zweite gemeinsame Tangente haben.

5. In einer Ebene sind n Punkte gegeben, wobei $n > 4$ gilt und keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Es ist zu beweisen, daß man wenigstens $\binom{n-3}{2}$ konvexe Vierecke finden kann, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.

6. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} \quad \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \qquad (1)$$

erfüllt ist.
Man gebe ferner die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens an.

XII. IMO

1. M sei ein beliebiger innerer Punkt auf der Seite AB eines Dreiecks ABC. r_1, r_2, r seien entsprechend die Inkreisradien der Dreiecke AMC, BMC, ABC, q_1, q_2, q seien die Radien der Ankreise dieser Dreiecke, die im Inneren des Winkels ACB liegen. Man beweise:

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q}$$

2. Gegeben seien natürliche Zahlen a, b, n, $a > 1$, $b > 1$, $n > 1$. A_{n-1} und A_n seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis a, B_{n-1} und B_n seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis b. A_{n-1}, A_n, B_{n-1} und B seien in der folgenden Art

$A_{n-1} = x_{n-1}\, x_{n-2} \ldots x_0$, $\quad A_n = x_n\, x_{n-1} \ldots x_0$
(Positionsschreibweise mit der Zahl a als Basis)

$B_{n-1} = x_{n-1}\, x_{n-2} \ldots x_0$, $\quad B_n = x_n\, x_{n-1} \ldots x_0$
(Positionsschreibweise mit der Zahl b als Basis)
durch Ziffern dargestellt ($x_n \neq 0$, $x_{n-1} \neq 0$). Man beweise:
Genau dann gilt

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} ,$$

wenn $a > b$ ist.

3. Es sei $\{a_n\}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots . \tag{7}$$

und $\{b_n\}$ die durch

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

definierte Folge. Man beweise:

a) $0 \leq b_n < 2$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Für ein beliebiges c aus $0 \leq c < 2$ gibt es eine derartige Folge $\{a_n\}$ mit der Eigenschaft (7), daß für die aus ihr gebildete Folge (8)

$$b_n > c \tag{9}$$

für unendlich viele Indizes n erfüllt ist.

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Die Menge

$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$

läßt sich so in zwei elementefremde nichtleere Teilmengen zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.

5. In einem Tetraeder ABCD sei der Winkel BDC ein rechter. Der Fußpunkt S des von D auf die Ebene ABC gefällten Lotes sei identisch mit dem Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Es ist zu beweisen, daß

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})^2 \leq 6(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2) \tag{21}$$

ist. Für welche Tetraeder gilt das Gleichheitszeichen?

6. In einer Ebene seien 100 Punkte gegeben, wobei keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Wir betrachten alle möglichen Dreiecke, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen. Man beweise, daß höchstens 70% dieser Dreiecke spitzwinklig sind.

XIII. IMO

1. Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 2$. Man beweise, daß die folgende Behauptung genau für $n = 3$ und $n = 5$ gilt:
Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Ungleichung

$$\left.\begin{aligned} &(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_1 - a_n) \\ &+ (a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_2 - a_n) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_n - a_1) \cdot (a_n - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_{n-1}) \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

erfüllt.

2. Es sei ein konvexes Polyeder P_1 mit genau neun Eckpunkten $A_1; A_2 \ldots ; A_9$ gegeben. P_i sei das Polyeder, das man aus P_1 durch die Parallelverschiebung $A_1 \to A_i$, $i = 2, 3, \ldots, 9$, erhält. Man beweise, daß wenigstens zwei der Polyeder P_1, $P_2, \ldots, P_9$ mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben.

3. Man beweise, daß die Folge $\{2^n - 3\}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ mindestens eine unendliche Teilfolge mit paarweise teilerfremden Elementen enthält.

4. Alle Seitenflächen eines Tetraeders ABCD seien spitzwinklige Dreiecke. Wir betrachten alle geschlossenen Polygonzüge XYZTX, wobei X. Y, Z und T innere Punkte der Kanten AB, BC, CD bzw. DA seien.
Man beweise:
1. Ist $\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle BCD} \neq \overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle CDA}$, so existiert unter den Polygonzügen kein kürzester.
2. Ist $\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle CDA}$, so existieren unendlich viele kürzeste Polygonzüge XYZTX. Ihre Länge beträgt $2\,\overline{AC} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, wobei $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC} + \overline{\sphericalangle CAD} + \overline{\sphericalangle DAB}$ ist.

5. Man beweise, daß in der Ebene für jede natürliche Zahl m eine endliche nichtleere Punktmenge S mit der folgenden Eigenschaft existiert:
Zu jedem beliebigen Punkt A aus S gibt es in S genau m Punkte, die von A den Abstand 1 haben.

6. $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ sei eine Matrix, deren Elemente ganze, nichtnegative Zahlen sind. Die Matrix habe folgende Eigenschaft:
Ist ein Element $a_{ij} = 0$, dann gilt für diese i und j
$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geq n$.
Man beweise, daß die Summe aller Elemente der Matrix nicht kleiner als $\frac{1}{2}n^2$ ist.

XIV. IMO

1. Gegeben sei eine Menge von zehn beliebigen paarweise verschiedenen zweistelligen positiven ganzen Zahlen (Dezimalsystem).
Zeige, daß es zwei elementfremde Teilmengen der gegebenen Mengen gibt, deren Elemente die gleiche Summe haben.

2. Zeige, daß für alle $n \geq 4$ folgender Satz gilt: Jedes Viereck, für welches ein Umkreis existiert, läßt sich in n Vierecke zerlegen, von denen jedes wieder einen Umkreis hat.

3. Es seien m und n beliebige nichtnegative ganze Zahlen.
Zeige, daß
$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$ eine ganze Zahl ist.
(Beachte: $0! = 1$).

4. Bestimme alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des folgenden Ungleichungssystems
$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \qquad (1)$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \qquad (2)$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \qquad (3)$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \qquad (4)$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0, \qquad (5)$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 positive reelle Zahlen sein sollen.

5. Es seien f und g reelle, im Intervall $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktionen, die für alle x und y der Gleichung
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y)$$
genügen.
Zeige: Ist f(x) nicht identisch gleich Null und gilt $|f(x)| \leqq 1$ (für alle x), so gilt auch $|g(y)| \leqq 1$ (für alle y).

6. Es seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen gegeben.
Zeige, daß ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches in jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

XV. IMO

1. Es sei O ein Punkt auf einer Geraden g.
$\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, ..., $\overrightarrow{OP_n}$ seien Einheitsvektoren, wobei alle Punkte P_i in einer Ebene, die g enthält, auf derselben Seite von g liegen.
Man zeige: Ist n ungerade, so gilt
$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geqq 1$$
(Dabei bedeutet $|\overrightarrow{OM}|$ die Länge eines Vektors $\overrightarrow{OM}$.)

2. Man prüfe, ob es im dreidimensionalen Raum eine endliche Menge M von nicht in einer Ebene gelegenen Punkten gibt mit der Eigenschaft, daß für beliebige zwei Punkte $A, B \in M$ zwei andere Punkte $C, D \in M$ existieren, so daß die Geraden AB und CD parallel und verschieden sind.

3. Es seien a und b reelle Zahlen, für welche die Gleichung
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$
wenigstens eine reelle Lösung hat. Man bestimme den kleinsten möglichen Wert der Summe $a^2 + b^2$.

4. Ein Soldat hat sich zu überzeugen, daß im Innern oder auf dem Rand eines Gebietes, das die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich des Randes) hat, keine Mine vorhanden ist. Der Wirkungsgrad seines Detektors ist gleich der halben Höhe des Dreiecks. Der Soldat beginnt seinen Weg in einem der Eckpunkte des Dreiecks.
Welchen Weg muß er wählen, damit die Länge seines Marsches zur Überprüfung des gesamten Gebietes am kürzesten wird?

5. Gegeben sei eine nicht leere Menge G von nicht konstanten Funktionen f der Gestalt
$$f(x) = ax + b$$
a, b sind reelle Zahlen mit $a \neq 0$, x ist eine reelle Variable
G habe die folgenden Eigenschaften:
(1) Ist $f, g \in G$, dann gilt auch $g \circ f \in G$ (wobei $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ist).
(2) Ist $f \in G$ mit $f(x) = ax + b$, dann gehört auch die inverse Funktion f^{-1} der Menge G an
(wobei $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$ ist).
(3) Für jedes $f \in G$ gibt es ein x_f, so daß $f(x_f) = x_f$.
Man zeige: Es gibt ein k, so daß $f(k) = k$ für alle $f \in G$.

6. Es seien n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben sowie eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$.
Man gebe solche n reellen Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ an, daß
a) $a_k < b_k$ für alle k von 1 bis n.

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ für alle k von 1 bis n - 1.

c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \frac{1 + q}{1 - q} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$
gilt.

Lösungen der Aufgaben I. bis XV. IMO (1959 bis 1973)

I. IMO

1., Lösung 1

Bei Kenntnis des Euklidischen Algorithmus läßt sich die Aufgabe sehr schnell übersehen.

$$\begin{array}{l} (21n + 4) : (14n + 3) = 1 \\ \underline{-(14n + 3)} \\ (14n + 3) : (7n + 1) = 2 \\ \underline{-(14n + 2)} \\ 1 \end{array}$$

Dabei wäre nur 1 der gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner. Beide Ausdrücke sind teilerfremd.

1., Lösung 2

In dem Bruch ist der Zähler größer als der Nenner. Man formt ihn so um, daß ein echter Bruch entsteht:

$$\frac{21n + 4}{14n + 3} = 1 + \frac{7n + 1}{14n + 3} .$$

Wenn der Ausgangsbruch zu kürzen sein soll, dann muß der echte Bruch auch zu kürzen sein; d. h. $\frac{14n + 3}{7n + 1}$ muß sich ebenfalls kürzen lassen. Es ist aber

$$\frac{14n + 3}{7n + 1} = 2 + \frac{1}{7n + 1} ,$$

und da $\frac{1}{7n + 1}$ nicht kürzbar ist, sind auch die übrigen Brüche nicht kürzbar.

2.

Es ist $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2x - 1} + 1 \right|$

und $\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2x - 1} - 1 \right|$

wenn $x > \frac{1}{2}$. Das folgt jeweils aus der Übereinstimmung der Quadrate auf beiden Seiten und der Tatsache, daß alle Wurzelausdrücke positiv sind.

Wir betrachten nun die Funktion

$$y = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{2x - 1} + 1\right| + \left|\sqrt{2x - 1} - 1\right|\right)$$

Sie ist definiert für $x > \frac{1}{2}$.

Jetzt machen wir die Fallunterscheidung $\frac{1}{2} < x \leq 1$ und $1 \leq x < \infty$;

Im ersten Fall ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2x - 1} + 1\right) + \left(1 - \sqrt{2x - 1}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$

Im zweiten Fall ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2x - 1} + 1\right) + \left(\sqrt{2x - 1} - 1\right)\right] = \sqrt{2}\sqrt{2x - 1}.$$

Zusammengefaßt ist also $y = \sqrt{2}$ für $\frac{1}{2} < x \leq 1$

$y = \sqrt{2}\sqrt{2x - 1}$ für $1 \leq x < \infty$.

Nun ergeben sich die Lösungen der Aufgaben unter 1. a), b), c) von selbst:

a) $y = \sqrt{2}$ ist erfüllt für $\frac{1}{2} < x \leq 1$.

b) $y = 1$ ist für keinen Wert von x erfüllt, weil die Funktion y das absolute Minimum $\sqrt{2}$ hat.

c) $y = 2$ ist erfüllt für $\sqrt{2}\sqrt{2x - 1} = 2$, das heißt $x = \frac{3}{2}$.

3.

Wir schreiben die in der Aufgabe gegebene Gleichung in der Form von

$$a \cdot \cos^2 x + c = -b \cdot \cos x . \qquad (1)$$

Dann erfüllen die vier Zahlen a, b, c und cos x offenbar auch die Gleichung

$$a^2\, 4 \cos^4 x + (4ac - 2b^2)\, 2 \cos^2 x + 4c^2 = 0, \qquad (2)$$

was man erkennt, wenn man die Gleichung (1) quadriert und anschließend mit 4 multipliziert. Zwischen den Werten cos x und cos (2x) bestehen die Beziehungen

$$\cos (2x) = 2 \cos^2 x - 1 \qquad (3)$$

bzw.

$$2 \cos^2 x = \cos (2x) + 1 . \qquad (4)$$

Nach Einsetzung der Gleichung (4) in die Gleichung (2) erhalten wir dann

$$a^2[\cos (2x) + 1]^2 + (4ac - 2b^2)[\cos (2x) + 1] + 4c^2 = 0.$$

Die Umordnung nach Potenzen von cos (2x) ergibt

$a^2\cos^2(2x) + (2a^2+4ac-2b^2)\cos(2x) + (a^2+4ac-2b^2+4c^2) = 0.$
Das ist offenbar eine quadratische Gleichung in cos 2x.

Im Falle $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ werden
$a^2 = 16$, $2a^2 + 4ac - 2b^2 = 8$, $a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = -4$
und wir erhalten für cos (2x) mithin die Gleichung
$4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1 = 0$. Die Gleichung für cos (2x) hat also die gleichen Koeffizienten wie die Gleichung für cos x.

4., Lösung 1 (Abb. 1)

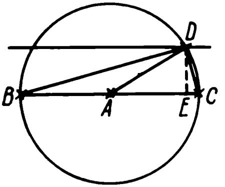


Abb. 1

Konstruktionsbeschreibung:
Um den Punkt A wird ein Kreis mit dem Radius $r = \frac{c}{2}$ geschlagen (Abb. 1). Dann wird ein beliebiger Durchmesser eingezeichnet, der den Kreis in den Punkten B und C schneidet. Man zeichnet nun die Parallele zu $\overline{BC}$ im Abstand von $\frac{c}{4}$ Sie schneidet den Kreis in D. Werden die Punkte B und C mit D verbunden, so ist das Dreieck BCD das gesuchte Dreieck.

Beweis: $\overline{BD} \cdot \overline{DC} = 2A_{\Delta}BCD = 4A_{\Delta}ACD = \frac{4\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DE}}{2} = \frac{c^2}{4}$, da $\overline{AC} = \frac{c}{2}$ und $\overline{DE} = \frac{c}{4}$. Man beachte dabei, daß der Winkel BDC ein rechter Winkel ist. Es ist nun auch $\overline{AD} = \frac{c}{2}$, also
$\overline{AD}^2 = \frac{c^2}{4} = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$.

4., Lösung 2 (Abb. 2)

Ein Schüler der Delegation der Deutschen Demokratischen Republik führte folgende Konstruktion aus:

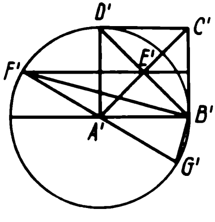


Abb. 2

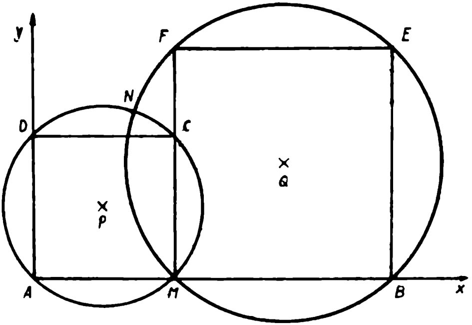
Konstruktionsbeschreibung:
Um den Punkt A' wird ein Kreis mit dem Radius $\frac{c}{2}$ geschlagen. Dann wird ein Radius $\overline{A'B'}$ eingezeichnet. Auf der Strecke A'B' wird das Quadrat A'B'C'D' errichtet. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrates wird mit E' bezeichnet. Durch E' wird die Parallele zu $\overline{A'B'}$ gezeichnet, die den Kreis in F' schneidet. Nun wird F' mit A' verbunden. Die Verlängerung der Strecke $\overline{F'A'}$ über A' hinaus schneidet den Kreis in G'. Der Punkt B' wird mit den Punkten F' und G' ver-

bunden. Das Dreieck F'G'B' ist dann das gesuchte Dreieck.

Beweis: Ein Vergleich mit Abb. 1 ergibt, daß
$\overline{F'B'} = \overline{BD}$ und $\overline{A'B'} = \overline{AD}$ sind. Also ist

$$\triangle BCD \cong \triangle F'G'B' .$$

5.



Ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Punkte A,M,B die Koordinaten (0;0) , (m;0) , (a;0) haben. Die Koordinaten der Punkte P und Q sind dann durch $(\frac{m}{2}; \frac{m}{2})$ und $(\frac{a+m}{2}; \frac{a-m}{2})$ gegeben. Damit kann man die Gleichungen für die Kreise um P und Q aufstellen:

$$(x-\frac{m}{2})^2 + (y-\frac{m}{2})^2 = \frac{1}{2}m^2 \quad ; \quad x^2 - mx + y^2 - my = 0 \qquad (1)$$

für den Kreis um P, und

$$(x - \frac{a+m}{2})^2 + (y - \frac{a-m}{2})^2 = \frac{1}{2}(a-m)^2;$$

$$x^2 - (a+m)x + y^2 - (a-m)y + am = 0 \qquad (2)$$

für den Kreis um Q. Subtraktion dieser Gleichung von (1) ergibt

$$ax + (a-2m)y - am = 0 \qquad (3)$$

Die Koordinaten der Punkte M und N erfüllen beide Gleichungen (1) und (2) und daher auch die Gleichung (3). Löst man (3)

$$\overline{\sphericalangle ANM} = \overline{\sphericalangle ACM} = 45^\circ = \overline{\sphericalangle MEF} = 180^\circ - \overline{MNF} \quad , \quad \text{also } N \in AF$$

$$\text{und} \quad \overline{\sphericalangle MNC} = \overline{\sphericalangle MDC} = 45^\circ = \overline{\sphericalangle BFM} = \overline{\sphericalangle BNM} \quad , \quad \text{also } C \in BN \, .$$

6.

Zu dieser Aufgabe muß festgestellt werden, daß sie nicht immer durchführbar ist. A und C müssen einer gewissen Bedingung unterworfen sein, die sich bei der Ausführung der Konstruktion (Abb. 4) ergibt.

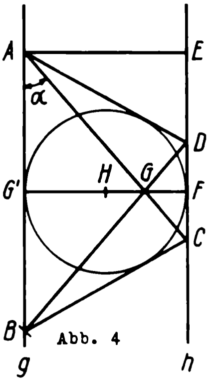


Abb. 4

Das Trapez und sein Inkreis liegen in der Ebene R = ABCD. Da $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sein sollen, sind beide Strecken auch parallel zur Geraden p, damit ist auch R parallel zu p. Eine zu p parallele Gerade p', die in der Ebene R liegt, bestimmt dann die Richtung von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Es wird angenommen, daß die Gerade p' durch A geht, dann muß auf ihr der Punkt B liegen. Auf der Parallelen zu p' durch C muß der Punkt D liegen.

Die Lösung der Aufgabe kommt nun auf folgende Konstruktion hinaus:

Gegeben ist eine Gerade g und ein auf ihr liegender Punkt A. Weiter ist eine im Abstand AE zu g parallele Gerade h und ein auf ihr liegender Punkt C gegeben. Man konstruiere ein Trapez ABCD, in dem B auf g und D auf h liegt, dem man einen Kreis einbeschreiben kann.

Konstruktionsbeschreibung:

Man fällt zunächst das Lot von A auf h und erhält E. Die Strecken $\overline{EC}$ werden in den Zirkel genommen, und um A wird ein Kreisbogen geschlagen. Der Schnitt des Kreises um A mit der Geraden h sei der Punkt D. Jetzt halbiert man $\overline{DC}$ und erhält F. Man fällt das Lot $\overline{G'F}$ von F auf g, dessen Schnittpunkt mit $\overline{AC}$ den Punkt G ergibt. Dann verbindet man D mit G und erhält B. Schließlich konstruiert man noch den Mittelpunkt H der Strecke $\overline{G'F}$.
Der Kreis um H mit dem Radius $\frac{\overline{AE}}{2}$ ist dann Inkreis des Trapezes ABCD.

Beweis: Nach dem Satz vom Tangentenviereck braucht man nur zu zeigen, daß die Summe der gegenüberliegenden Seiten gleich ist. Es ist $2\,\overline{AD} = 2\,\overline{EC} = 2\,\overline{EF} + 2\,\overline{FC} = 2\,\overline{AG'} + 2\,\overline{DF} = \overline{AB} + \overline{DC}$. Folglich ist also das Trapez ABCD Tangentenviereck eines Kreises. Da nun der angegebene Kreis um H das Trapez an zwei gegenüberliegenden Seiten berührt, ist ABCD Tangentenviereck nach x auf und setzt das Ergebnis in (1) ein, so erhält man nach Multiplikation mit a^2 die Gleichung

$$(a-2m)\,y - am\ \ (a-2m)\,y + a^2(y^2 - my) = 0\ ;$$

$$(2a^2-4am+4m^2)y^2 - 2am(a-m)\,y = 0 \quad \text{und} \quad y_1=0\ ,\ y_2= \frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}$$

als Lösungen. Aus (3) folgt

$$x_1 = m\ ,\ x_2 = m - (a-2m)\frac{y_2}{a} = m\,\frac{a^2-2am+2m^2-(a-2m)(a-m)}{a^2-2am+2m^2} = \frac{am^2}{a^2-2am+2m^2}\ .$$

(x_1,y_1) stellt den Punkt M, (x_2,y_2) den Punkt N dar. Offensichtlich erfüllen die Koordinaten von N die Gleichung

$$(a-m)\,x - my = 0\ .$$

Dies ist aber die Gleichung der Geraden durch A und F. Die Gleichung der Geraden durch $B=(a;0)$ und $C=(m;m)$ lautet

$$mx + (a-m)\,y - am = 0\ .$$

Sie wird ebenfalls von den Koordinaten des Punktes N erfüllt, d.h. die Geraden durch A und F sowie durch B und C schneiden sich in $N' = N$.

b)

Da die Gleichung (3) von den Koordinaten der Punkte M und N erfüllt wird, stellt sie die Gerade durch M und N dar. Indem man (3) in der Form

$$a(x+y) = m(2y + a)$$

schreibt, sieht man, daß der Punkt $(x;y) = (\frac{a}{2}\,;\,-\frac{a}{2})$ die Geradengleichung unabhängig von m erfüllt. Dieser Punkt ist also allen Geraden MN gemeinsam.

c)

Es gilt $P = (\frac{m}{2}\,;\,\frac{m}{2})$ und $Q = (\frac{a+m}{2}\,;\,\frac{a-m}{2})$. Der Mittelpunkt der Strecke PQ besitzt dann die Koordinaten

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} + \frac{a+m}{2}\right)\ ,\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} + \frac{a-m}{2}\right)\ ;\ \text{also}\quad (x;y) = \left(\frac{a+2m}{4}\,;\,\frac{a}{4}\right)\ .$$

Wenn m das Intervall $0<m<a$ durchläuft, so durchläuft der Mittelpunkt von PQ die Strecke zwischen den Punkten $(\frac{a}{4}\,;\,\frac{a}{4})$ und $(\frac{3a}{4}\,;\,\frac{a}{4})$. Diese Strecke verläuft parallel zu AB im Abstand $\frac{a}{4}$ und hat die Länge $\frac{a}{2}$.

Im folgenden sei noch eine zweite Lösungsmöglichkeit für die Aufgabe a) angegeben. O.B.d.A. sei MBEF das größere der beiden Quadrate. Nach dem Peripheriewinkelsatz und nach dem Satz über die Winkel im Sehnenviereck ist dann gerade dieses Kreises.

Aus der Figur ersieht man, daß die Konstruktion nur dann ausführbar ist, wenn gilt: $\alpha \leq 45^\circ$ (wenn man von Spiegelungen absieht).

II. IMO

1.

Eine Zahl

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a_0 - a_1 + a_2 - \dots (-1)^n a^n = 0$ oder durch 11 teilbar ist.

Für dreiziffrige durch 11 teilbare Zahlen, die in der Form $z = 100a + 10b + c$ dargestellt seien, wobei a, b und c einziffrige Zahlen sind, gilt also, daß $c - b + a = 0$ oder eine durch 11 teilbare Zahl sein muß, d. h.

$$a - b + c = 0, \qquad (1)$$

oder

$$a - b + c = 11 \qquad (2)$$

(Weitere Fälle - etwa $a - b + c = 22$ - sind nicht möglich, da $-9 < a - b + c \leq 18$ sein muß.

Die Ziffern der gesuchten Zahl müssen der Gleichung

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \text{ genügen.} \qquad (3)$$

Fall (1): $b = a + c$ in (3) eingesetzt, ergibt:

$$100a + 10a + 10c + c = 11(2a^2 + 2ac + 2c^2) .$$

$$10a + c = 2(a^2 + ac + c^2) \qquad (4)$$

$10a + c$ muß also eine gerade Zahl sein, also auch c.

$$a^2 + (c - 5)a + c^2 - \frac{c}{2} = 0 \qquad (5)$$

$$a_{1,2} = -\frac{c-5}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 10c + 25}{4} + \frac{c}{2} - c^2}$$

$$= \frac{5-c}{2} \pm \sqrt{\frac{-3c^2 - 8c + 25}{4}}$$

$$= \frac{5-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25 - 8c - 3c^2}$$

Folgende Fälle müssen untersucht werden:

$$c = 0, \quad c = 2, \quad c = 4, \quad c = 6, \quad c = 8$$

$c = 0$: $a_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}$; $a_1 = 5$
$a_2 = 0$ (unmöglich)

$c \geqq 2$: Wurzel imaginär

Die in Frage kommende Zahl 550 erfüllt in der Tat die Probe.

Fall (2): $b = a + c - 11$ in (3) eingesetzt, ergibt:

$$100a + 10a + 10c - 110 + c = 11[a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2],$$

$$10a + c = 131 + 2(a^2 + c^2 + ac - 11a - 11c) \qquad (6)$$

c muß also eine ungerade Zahl sein.

Die Gleichung (6) wird auf die Normalform gebracht:

$$a^2 + (c - 16)a + c^2 + \frac{131}{2} - \frac{23c}{2} = 0 . \qquad (7)$$

$$a_{1,2} = -\frac{c - 16}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 32c + 256 - 4c^2 + 46c - 262}{4}}$$

$$= \frac{16 - c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{14c - 3c^2 - 6}$$

Folgende Fälle müssen untersucht werden:

$c = 1$, $c = 3$, $c = 5$, $c = 7$, $c = 9$

$c = 1$: a keine natürliche Zahl

$c = 3$: $a_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \frac{3}{2}$; $a_1 = 8$
$a_2 = 5$ (unbrauchbar, da sonst $b < 0$)

$c \geqq 5$: Wurzel imaginär

Die zweite gesuchte Zahl ist 803 und erfüllt ebenfalls die Probe.

2.

Falls

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9 \qquad (1)$$

gilt, so muß

1. x der Bedingung $x \geqq -\frac{1}{2}$ genügen, da sonst $\sqrt{1+2x}$ nicht erklärt ist.
2. $x \neq 0$ sein, da die Funktion $f(x) = \frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}$, die auf der linken Seite der Ungleichung auftritt, an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist.
3. für alle x, die den Forderungen 1. und 2. genügen, die folgende Kette von Ungleichungen erfüllt sein (wobei die Umformungen in dem betrachteten Bereich für x äquivalente Umformungen sind):

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2(1+\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{[1-(1+2x)]^2} < 2x+9$$

$$(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x+9$$

$$2\sqrt{1+2x} < 7$$

$$x < \frac{45}{8}$$

Die Ungleichung (1) besteht für alle x, die der Beziehung $-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{45}{8}$ genügen, mit Ausnahme von $x = 0$, d.h. (2)

für $\qquad -\frac{1}{2} \leqq x < 0 \qquad$ (2a)

und $\qquad 0 < x < \frac{45}{8} \qquad$ (2b)

4. Zusatzbetrachtung:
Um die Unstetigkeit der Funktion $f(x) = \frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}$ zu zu beheben, kann man ihr an der Stelle $x = 0$ zweckmäßigerweise den Wert 4 zuschreiben.
Definition: $f(0) = 4$; denn $f(x)$ ist bis auf die Stelle $x = 0$ gleich der Funktion

$$\varphi(x) = (1+\sqrt{1+2x})^2; \qquad \varphi(0) = 4 .$$

Unter dieser Voraussetzung gilt die Ungleichung (1) für alle x, die der Ungleichung (2) bzw. (2a) und (2b) genügen.

3.

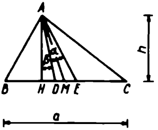


Abb. 1

Analysis: $\quad DE = \frac{a}{n}$

$HD = x$

$\sphericalangle DAE = \alpha$

$\sphericalangle HAD = \beta$

Behauptung: $\quad \tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$

Beweis:
Es gilt $\qquad \tan\beta = \frac{x}{h}$ und $x = h\cdot\tan\beta$, $\qquad$ (1)

also $\qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{x+\frac{a}{n}}{h}$ und $x = h\cdot\tan(\alpha+\beta) - \frac{a}{n}$. $\qquad$ (2)

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$h \cdot \tan(\alpha + \beta) - \frac{a}{n} = h \tan\beta \; .$$

Diese Gleichung kann man folgendermaßen umformen:

$$h \cdot \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} - \frac{a}{n} = h \tan\beta \; ,$$

$$h \cdot \tan\alpha + h \cdot \tan\beta - \frac{a}{n} + \frac{a}{n}\tan\alpha \cdot \tan\beta$$

$$= h \cdot \tan\alpha - h \cdot \tan\alpha \cdot \tan^2\beta \; .$$

Man erhält schließlich

$$\tan\alpha = \frac{a}{nh + a\tan\beta + nh\tan^2\beta} \; .$$

Da $\tan\beta = \frac{x}{h}$, gilt

$$\tan\alpha = \frac{ah}{nh^2 + ax + nx^2} \; . \qquad (3)$$

Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{a}{n} - x\right)\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + x\right) \; , \text{ d.h.}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} - \frac{ax}{n} - x^2 \qquad (4)$$

Aus der Gleichung (3) erhält man durch Einsetzen der Gleichung (4):

$$\tan\alpha = \frac{ah}{\frac{a^2 n}{4} - \frac{a^2}{4n} - ax - nx^2 + ax + nx^2} \; ,$$

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a} \qquad \text{(q. e. d.)} \; .$$

4.

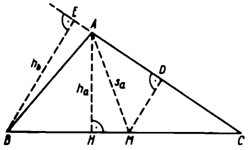


Abb. 2

Analysis: (Abb. 2)
Nach dem Strahlensatz ist
$h_b : \overline{MD} = \overline{BC} : \overline{MC} = 2 : 1$
also $\overline{MD} = \frac{1}{2} h_b$.

Konstruktion: (Abb. 3)
Aus h_a, s_a und einem rechten Winkel konstruiert man das $\triangle AHM$ bzw. $\triangle AHM'$.

Über $AM = s_a$ wird der Thaleskreis konstruiert und um M ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2} h_b$. Die Schnittpunkte dieser beiden Kreise seien D und D'. Die Punkte A und D bzw. A und D' wer-

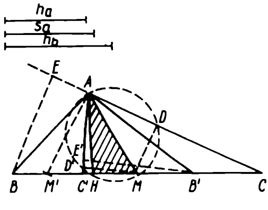


Abb. 3

den verbunden und die Strecken AD bzw. AD' über ihre Endpunkte hinaus zu Geraden verlängert. Die Strecke HM wird ebenfalls über ihre Endpunkte hinaus verlängert. Die Verlängerungen von AD und AD' schneiden die Verlängerung von HM in C bzw. C'. Der um M mit dem Radius $\overline{MC}$ bzw. $\overline{MC'}$ gezeichnete Kreis schneidet die Verlängerung um HM in B bzw. B'. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ genügen den geforderten Bedingungen.

Wenn man von $\triangle AHM'$ ausgeht, über AM' den Thaleskreis zeichnet, kann man analoge Konstruktionen durchführen und erhält zwei Dreiecke, die auch den geforderten Bedingungen genügen.

<u>Beweis:</u> $\overline{AH} = h_a$; $\overline{AM} = s_a$ bzw. $\overline{AM'} = s_a$ (nach Konstruktion)
$\overline{MD} = \overline{MD'} = \frac{1}{2} h_b$ (nach Konstruktion)
$\overline{\sphericalangle MDA} = \overline{\sphericalangle MD'A} = 90^\circ$ (nach Konstruktion)
$\overline{MC} = \overline{MB}$, $\overline{MC'} = \overline{MB'}$ (nach Konstruktion)

Man fällt noch von B auf die Verlängerung von AD und von B' auf AD' die Lote und erhält die Punkte E und E'. Es gilt:

$\overline{BE} \perp AC$, $B'E' \perp AC'$ (Höhen auf b)
$\overline{BC} : \overline{MC} = 2 : 1$
und $\overline{BC} : \overline{MC} = \overline{BE} : \overline{MD}$
bzw. $\overline{B'C'} : \overline{MC'} = 2 : 1$
und $\overline{B'C'} : \overline{MC'} = \overline{B'E'} : \overline{MD'}$.

Damit folgt: $\overline{BE} = h_b$ bzw. $\overline{B'E'} = h_b$
und $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ sind die geforderten Dreiecke.

<u>Determination:</u>
Die Konstruktion ist möglich, wenn $s_a > h_a$ und $h_b < 2s_a$.

<u>5.</u>

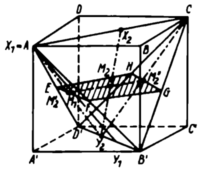


Abb. 4

a) <u>Analysis:</u> (Abb. 4)
a ist die Länge der Würfelkante

<u>Behauptung:</u>

1. Der geometrische Ort der Mittelpunkte M der Strecke XY ist die Fläche EFGH.

2. Die Fläche EFGH liegt parallel zur Grund- bzw. Deckfläche des

Würfels.

3. Die Fläche EFGH ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Beweis:

1. Es sei zunächst $X_1 \equiv A$ und Y_1 wandere auf B'D'. Dann gilt

$$\overline{AE} : \overline{ED'} = \overline{AM_1} : \overline{M_1Y_1} = \overline{AF} : \overline{FB'} = 1 : 1.$$

Man erhält die Strecke EF. Durch analoge Überlegungen erhält man $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$.

Da $\overline{AE} : \overline{ED'} = \overline{CH} : \overline{HD'} = \overline{CG} : \overline{GB'} = \overline{AF} : \overline{FB'}$ gilt, liegen die Strecken EF, FG, GH und HE alle in der Ebene EFGH und begrenzen den gesuchten geometrischen Ort.

X_2 sei nun ein beliebiger Punkt der Strecke AC und Y_2 ein beliebiger Punkt von B'D'. M_2 sei der Mittelpunkt von X_2Y_2. Es ist nachzuweisen, daß M_2 ein Punkt der Ebene EFGH ist.

Man verbindet dazu Y_2 mit A und C; auf den Strecken EF bzw. GH erhält man die Mittelpunkte M_2' und M_2'' von Y_2A und von Y_2C. Die Strecken AY_2, CY_2, AC und X_2Y_2 liegen in der Ebene AY_2C.

Es gilt

$$\overline{AM_2'} : \overline{M_2Y_2} = \overline{X_2M_2} : \overline{M_2Y_2} = \overline{CM_2''} : \overline{M_2''Y_2} = 1 : 1 .$$

M_2 muß also auf der Strecke $M_2'M_2''$ liegen; $M_2'M_2''$ liegt aber in der Ebene EFGH, damit auch der Punkt M_2.

2. Da die Proportion $\overline{AE} : \overline{ED'} = \overline{AF} : \overline{FB'} = 1 : 1$ gilt, folgt $EF \parallel D'B'$, damit ist EF parallel der Ebene A'B'C'D'. Die Strecke FG ist auch parallel der Ebene ABCD, GH ist parallel der Ebene A'B'C'D' usw. Alle Geraden der Ebene EFGH verlaufen parallel zur Grund- bzw. Deckfläche. Damit ist die gesamte Ebene EFGH parallel zur Grund- bzw. Deckfläche.

3. $\overline{D'B'} = a\sqrt{2}$

Da $\overline{AE} : \overline{AD'} = \overline{AF} : \overline{AB'} = 1 : 2$, ist $\overline{EF} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Analoge Überlegungen ergeben $\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

b) Diesen Teil der Aufgabe löst und beweist man mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie im Teil a).

Man erhält:

1. Der geometrische Ort der Punkte Z, welche die Bedingung $\overline{ZY} = 2\overline{ZX}$ erfüllen, ist eine Fläche E'F'G'H'.

2. Die Fläche verläuft in der Höhe $\frac{a}{3}$ parallel zur Grundfläche.

3. Die Fläche E'F'G'H' ist ein Rechteck mit den Seiten

$\frac{a}{3}\sqrt{2}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{8}$.

6.

$$V_{Kegel} = V_1$$
$$= \frac{\pi r_1^2 \cdot h}{3} \quad \text{(s. Abb. 5)(1)}$$
$$V_{Zylinder} = V_2$$
$$= \pi r_2^2 \cdot 2r_2$$
$$= 2\pi r_2^3 \qquad (2)$$

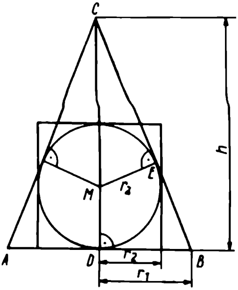


Abb. 5

$\triangle DBC \sim \triangle MEC$ (Winkel bei C gemeinsam; rechter Winkel bei E und D; Hauptähnlichkeitssatz)

Also $\frac{\overline{ME}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$, d. h.

$$\frac{r_2}{h - r_2} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + h_1^2}} \qquad (3)$$

$$r_1^2(h - r_2)^2 = r_2^2(r_1^2 + h^2)$$

$$r_1^2\left[h^2 - 2hr_2 + r_2^2\right] = r_2^2 r_1^2 + r_2^2 h^2$$

$$r_1^2 h^2 - 2hr_2 r_1^2 = r_2^2 h^2 \qquad (h \neq 0)$$

$$r_1^2(h - 2r_2) = r_2^2 h$$

$$r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h - 2r_2} ; \qquad h - 2r_2 \neq 0, \text{ da } h > 2r_2 \qquad (4)$$

Setzt man die Gleichung (4) in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$V_1 = \frac{\pi \cdot r_2^2 h^2}{3(h - 2r_2)} \qquad (5)$$

Von hier ab werden 2 Lösungswege dargestellt:

1. Lösungsweg (elementargeometrisch)

Es wird der Quotient $V_1 : V_2$ gebildet [V_1 in der Form (5) und V_2 in der Form (2)]

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h^2}{6r_2(h - 2r_2)} \qquad (6)$$

a) Annahme: $\frac{V_1}{V_2} = 1$

$$h^2 = 6r_2(h - 2r_2)$$

$$h^2 - 6r_2 + 12r_2^2 = 0$$

$h_{1,2} = 3r_2 \pm \sqrt{9r_2^2 - 12r_2^2}$; unmöglich, da Radikand kleiner als 0; also ist die Annahme falsch, d.h. $V_1 \neq V_2$.

b) Annahme: $\frac{V_1}{V_2} = k$

$$h^2 = k \cdot 6r_2(h - 2r_2)$$

$$h^2 - 6kr_2b + 12kr_2^2 = 0$$

$$h_{1,2} = 3kr_2 \pm \sqrt{9k^2r_2^2 - 12kr_2^2} \quad (7)$$

Damit Lösungen möglich sind, darf der Radikand nicht negativ sein.

$$9k^2r_2^2 - 12kr_2^2 = 0,$$

d. h., $k = \frac{4}{3}$ ist die kleinste Zahl, für die $V_1 = kV_2$ gilt.

Aus der Gleichung (7) ergibt sich für $k = \frac{4}{3}$

$$h = 4r_2 \quad (8)$$

Daraus folgt eine Möglichkeit, den Winkel an der Spitze zu konstruieren.

1. Konstruktion

Man zeichnet $h = 4r_2 = \overline{DC}$ ($\overline{DM} = r_2$ wird von D aus 4mal abgetragen, siehe Abb. 6)

Um M zeichnet man den Kreis mit dem Radius $r_2 = \overline{DM}$ und über der Strecke MC den Thaleskreis. Die Schnittpunkte beider Kreise - E und F - werden mit C verbunden. Bei C entsteht der gesuchte Winkel γ.

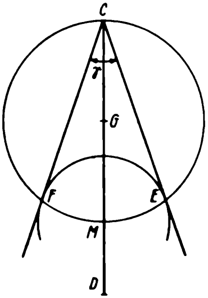


Abb. 6

2. Konstruktion

Vorbetrachtung:

Aus der Gleichung (4) folgt für $h = 4r_2$

$$r_1^2 = \frac{r_2^2 \cdot 4r_2}{4r_2 - 2r_2} = \frac{4r_2^3}{2r_2} = 2r_2^2 \,. \quad (4')$$

$$r_1 = r_2\sqrt{2} \quad (9)$$

Die Konstruktion ergibt sich aus der Abb. 7.

h wird gleich $\overline{DC} = 4r_2$ und $\overline{DB} = \overline{DA} = \overline{MH} = r_2\sqrt{2}$ gewählt (vereinfachte Beschreibung).

2. <u>Lösungsweg</u> (mit Hilfe der <u>Differentialrechnung</u>)

Zunächst wird das Minimum des Kegelvolumens bestimmt. Wenn dieses Volumen schon größer als V_2 ist, dann ist erst recht jedes andere Kegelvolumen größer als das des Zylinders, d. h. immer gilt $V_1 \neq V_2$. Dabei sehen wir den Radius der Kegel als gegeben an, er geht lediglich als Ähnlichkeitsparameter in die Rechnung ein.

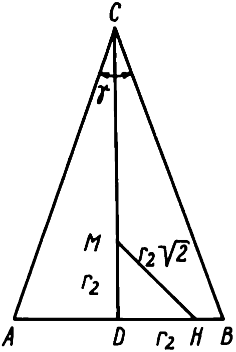


Abb. 7

Aus der Gleichung (5) ergibt sich

a) $$V_1'(h) = \frac{dV_1(h)}{dh} = \frac{\pi}{3} r_2^2 \, \frac{2h(h - 2r_2) - h^2}{(h - 2r)^2} .$$

$$\frac{dV_1(h)}{dh} = \frac{\pi}{3} r_2^2 \, \frac{h^2 - 4r_2 h}{(h - 2r_2)^2} \qquad (9')$$

$$V_1'(h) = \frac{dV_1(h)}{dh} = 0 \; ; \qquad h^2 - 4r_2 h = 0$$

$$h = 4r_2 \qquad (8')$$

Für $h = 4r_2$ wird das Volumen des Kegels ein Minimum, da $V_1''(h) = \frac{8}{3}\pi \frac{r^4}{(h - 2r_2)^3}$ für $h = 4r_2$ größer als Null ist.

$V_{1\,min}$ ergibt sich aus den Gleichungen (1), (4') und (8'):

$$V_{1\,min} = \frac{\pi \, 2r_2^{\,2} \, 4r_2}{3} = \frac{8\pi}{3} r_2^{\,3} ,$$

also $V_{1\,min} > V_2$, d. h. $V_1 \neq V_2$.

b) $V_{1\,min} = \frac{4}{3} \cdot V_2$; denn $\frac{4}{3}\, 2\pi r_2^{\,3} = \frac{8\pi}{3} r_2^{\,3} = V_{1\,min}$; also $k = \frac{4}{3}$.

<u>7.</u>

a) <u>Analysis:</u> $\overline{EP_1} = x_2$; $\overline{AB} = a$ $\overline{EF} = h$
$\overline{FP_1} = x_1$; $\overline{DC} = b$

$$\overline{\sphericalangle BP_1C} = \overline{\sphericalangle BP_2C} = 90^\circ$$

Daraus folgt, P_1 und P_2 müssen auf dem Thaleskreis BC bzw. AD liegen.

Konstruktion und Determination:

Es wird der Thaleskreis über einem der beiden Schenkel gezeichnet. Dieser Kreis schneidet die Symmetrieachse entweder in zwei (P_1, P_2), einem (P) oder keinem Punkt. Diese Punkte sind jeweils die gesuchten.

b) Es gilt (vgl. Abb. 8)

$\triangle BFP_1 \sim \triangle CEP_1$.

Daraus folgt

$x_1 : \frac{a}{2} = \frac{b}{2} : x_2$,

d.h. $x_1 x_2 = \frac{ab}{4}$. (1)

Außerdem gilt

$x_1 + x_2 = h$. (2)

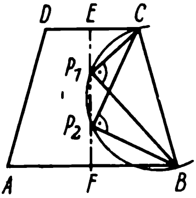


Abb. 8

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, daß x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0$ sind.

$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}$$

c) Nach den Überlegungen von b) gilt folgendes:

Falls $h^2 > ab$, gibt es 2 Lösungen, d. h. 2 Punkte;
falls $h^2 = ab$, gibt es 1 Lösung, d. h. 1 Punkt und
falls $h^2 < ab$, gibt es keine Lösung, d. h. keinen Punkt.

Die Konstruktion ist also nur möglich, wenn gilt $h^2 \geqq ab$.

III. IMO

1.

$$x + y + z = a \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (2)$$
$$xy = z^2 \quad (3)$$

Wegen (3) ist für jedes Lösungstripel (x,y,z) des Systems

$$(x+y)^2 = x^2 + 2z^2 + y^2 = (x^2+y^2+z^2) + z^2 \; .$$

Daher gilt mit (1) und (2)

$$(a - z)^2 = b^2 + z^2 \; .$$

Wir lösen diese Gleichung und erhalten im Falle $a \neq 0$

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (4)$$

(wenn $a=0$ ist, so existiert für $b \neq 0$ keine Lösung, und für $b = 0$ ist $x=y=z=0$ die einzige Lösung des Systems).

Damit ist

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = z^2 = xy = x(a - x - z) = x\left(\frac{a^2 + b^2}{2a} - x\right) \; .$$

Auflösung nach x ergibt im Falle

$$10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 \geq 0$$

die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a} \quad (5)$$

Die zugehörigen Werte für $y = a-x-z$ lauten

$$y_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \mp \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a} \quad (6)$$

Die Probe zeigt, daß die beiden Tripel (x_1,y_1,z) und (x_2,y_2,z) gemäß (4),(5),(6) Lösungen des Systems sind.

Diskussion:

Damit die Lösungen des Systems positiv sind, muß zunächst $a > 0$ gelten. Die beiden durch (4),(5),(6) gegebenen Tripel sind reell und verschieden, wenn der unter der Wurzel stehende Ausdruck $D = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2 = 10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0$ ist. Diese quadratische Ungleichung ergibt die notwendige Bedingung $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{a}{|b|} < \sqrt{3}$. Die Werte von x und y erweisen sich dabei automatisch als positiv, da $D < (a^2 + b^2)^2$. Aus dem Ausdruck (4) für z folgt, daß für $a > 0$ z positiv ist, wenn $a^2 > b^2$. Folglich muß die Größe a dem Intervall $|b| < a < |b|\sqrt{3}$ angehören. **Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend.**

2.

Nach der Heronischen Formel ist der Flächeninhalt S des Dreiecks gleich

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}} ,$$

wobei alle Faktoren positiv sind. Deshalb können wir, um das Produkt $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ abzuschätzen, die Ungleichung

$$\frac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz} \quad \text{oder} \quad xyz \leqq \frac{(x+y+z)^3}{27}$$

anwenden.

Wir setzen $x = a+b-c$; $y = a+c-b$; $z = b+c-a$ und erhalten

$$\begin{aligned} 4S &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \\ &\leqq \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \\ &\leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Gleichheit tritt ein für $a = b = c$.

3.

I) n sei zunächst eine gerade Zahl, d. h. $n = 2m$. Dann lautet die Gleichung $\cos^{2m}x = 1 + \sin^{2m}x$. Wegen

$\cos^{2m}x = 1 = 1 + \sin^{2m}x$ ist $\sin x = 0$ und $\cos x = \pm 1$, d.h. $x = k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sind alle Lösungen für $n = 2,4,6,\ldots$

2) n sei nun eine ungerade Zahl. Für jede Lösung x gilt wegen

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x \geqq 0 \quad \text{und} \quad \sin^n x = \cos^n x - 1 \leqq 0$$

die Beziehung

$$1 = \cos^n x - \sin^n x = |\cos x|^n + |\sin x|^n .$$

Das Prinzip der Lösung besteht nun darin, diese Gleichung mit der allgemeingültigen Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ zu vergleichen. Falls x nicht gerade ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, so gilt $0 < |\cos x| < 1$, $0 < |\sin x| < 1$ und damit nach elementaren Potenzgesetzen

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n < \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{für } n > 2,$$

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n > 1 \quad \text{für } n = 1;$$

in diesem Falle kann also die Ausgangsgleichung nicht gelten. Folglich muß x die Form $k\frac{\pi}{2}$ haben. Die Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt, daß genau die Werte

$$x = 2k\pi, \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ Lösungen sind.}$$

4. (Lösung 1)

P_1M_1, P_2M_2 und P_3M_3 seien die Seitenhalbierenden des Dreiecks $P_1P_2P_3$ (s. Abb. 1). Sie unterteilen das Dreieck $P_1P_2P_3$ in sechs Dreiecke der Art SP_iM_j, wobei S der Schwerpunkt ist. Ist der Punkt P identisch mit S, so gilt $\overline{P_1P} : \overline{PM_1} = \overline{P_2P} : \overline{PM_2} = \overline{P_3P} : \overline{PM_3} = 2 : 1$.

P sei nun verschieden von S. Dann liegt P innerhalb oder auf

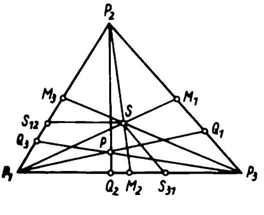


Abb. 1

einer Seite eines der Teildreiecke. O. B. d. A. sei dies das Dreieck P_1SM_2. Die Seiten P_2P_1 und P_1P_3 teilen wir im Verhältnis 2 : 1 und bezeichnen die Teilungspunkte mit S_{12} und S_{31}. Offensichtlich ist $SS_{12} \parallel P_1P_3$ und $SS_{31} \parallel P_2P_3$, ΔP_1SM_2 ist im Trapez $P_1S_{12}SM_2$ enthalten. Die Gerade P_2Q_2 schneidet SS_{12} in einem Punkt A_2 zwischen P_2 und P. Hieraus folgt

$\overline{P_2P} : \overline{PQ_2} \geq \overline{P_2A_2} : \overline{A_2Q_2} = 2 : 1$. Analog ist ΔP_1SM_2 im ΔP_1SS_{31} enthalten. Die Gerade P_1P schneidet die Gerade SS_{31} in einem Punkt A_1 zwischen P und Q_1. Daraus ergibt sich

$$\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} \leq \overline{P_1A_1} : \overline{A_1Q_1} = 2 : 1 .$$

4. (Lösung 2)

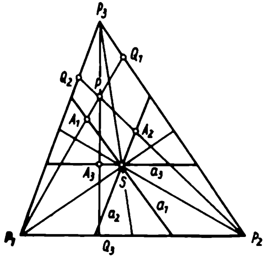


Abb. 2

S sei der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $P_1P_2P_3$ (s. Abb. 2). Durch S legen wir die Geraden $a_1 \parallel P_2P_3$, $a_2 \parallel P_3P_1$ und $a_3 \parallel P_1P_2$. Der Schwerpunkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 (vom Eckpunkt aus gerechnet). Deshalb teilt die Gerade a_i eine beliebige Strecke P_iQ_i, welche den entsprechenden Eckpunkt P_i mit einem beliebigen Punkt Q_i auf der gegenüberliegenden Seite verbindet, ebenfalls im Verhältnis 2 : 1, gerechnet vom Eckpunkt P_i. Jede der Geraden a_i teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Halbebene, welcher P_i angehört, bezeichnen wir mit π_i, die andere mit π_i'. Liegt der Punkt P in der Halbebene π_i, so gilt, wie man leicht sieht,

$\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} \leq \overline{P_1A_1} : \overline{A_1Q_1} = 2 : 1$, wobei A_1 der Schnittpunkt der Geraden P_1P und a_1 ist. Liegt P in π_1', so ist $\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} \geq \overline{P_1A_1} : \overline{A_1Q_1} = 2 : 1$. Betrachten wir die Halbebenen π_1, π_2 und π_3. Sie überdecken die ganze Ebene. Deshalb muß ein beliebiger Punkt P aus dem Dreieck $P_1P_2P_3$ mindestens einer der Halbebenen angehören. Es sei dies π_1. Dann ist nach dem oben bewiesenen $\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} \leq 2 : 1$.

Die zu π_1, π_2 und π_3 symmetrischen Halbebenen π_1', π_2', π_3' überdecken ebenfalls die gesamte Ebene. Der Punkt P muß also auch mindestens einer von ihnen angehören. Es sei dies π_j'. Dann gilt $\overline{P_jP} : \overline{PQ_j} \geq 2 : 1$.

Gehört P sowohl π_1 als auch π_1' an, so liegt P auf der Geraden a_1 und dann ist $\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} = 2 : 1$. Gehört P gleichzeitig π_1, π_2 und π_3 an, so ist P identisch mit S, und alle Verhältnisse sind gleich $2 : 1$.

5.

$\triangle$ABC sei das gesuchte Dreieck. Dann ist $\overline{\sphericalangle AMC} = \pi - \omega > \frac{\pi}{2}$. L sei die Mitte der Seite AC, so daß ML $\parallel$ AB . Die Länge der Strecke ML beträgt $\frac{c}{2}$. Die Konstruktion verläuft wie folgt. (s. Abb. 3).

Über der Strecke AC mit der Länge b konstruieren wir einen Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $\overline{\sphericalangle AMC} = \pi - \omega$, und um die Mitte L der Strecke AC schlagen wir einen Kreis mit dem Radius $\frac{c}{2}$ (s. Abb. 4). Die Punkte, in denen der Kreis den Kreisbogen schneidet, sind die gesuchten Punkte M. Auf der Geraden CM tragen wir von C aus die Strecke $2\overline{MC}$ ab und erhalten den Punkt B.

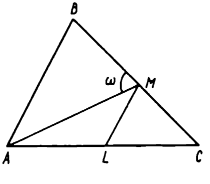


Abb. 3

<u>Diskussion:</u> Damit eine Lösung existiert, ist notwendig und hinreichend, daß der Kreis den Kreisbogen schneidet. O sei der Mittelpunkt des Kreisbogens mit dem Peripheriewinkel $\sphericalangle AMC$ (s. Abb. 5).

Wegen $\omega < \frac{\pi}{2}$ liegen O und der Kreisbogen auf verschiedenen Seiten der Sehne AC. Der Radius $OH \perp AC$ teilt den Kreisbogen und die Sehne in zwei Hälften. M sei der gesuchte Schnittpunkt, der o. B.d. A. auf dem Bogen AH liegen soll.

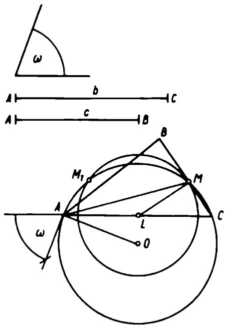


Abb. 4

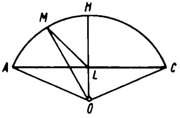


Abb. 5

Im $\triangle$ OLM ist $R = \overline{OM} \leq \overline{OL} + \overline{LM} = R - \overline{HL} + \frac{c}{2}$, d. h. $\frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} \leq \frac{c}{2}$ ($\overline{HL} = \frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2}$ ist die Bogenhöhe). Betrachten wir $\triangle$ AMC und $\triangle$ AMB. Sie haben die gemeinsame Seite AM, außerdem ist $\overline{BM} = \overline{MC}$. Laut Bedingung ist $\overline{\sphericalangle BMA} = \omega < 90^\circ < 180^\circ - \omega = \overline{\sphericalangle CMA}$.

Deshalb ist $b = \overline{AC} > \overline{AB} = c$ und $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$.

Die Bedingungen $\frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} \leq \frac{c}{2} < \frac{b}{2}$ sind notwendig. Sie sind aber auch hinreichend. Ist $\overline{LM} = \frac{c}{2} < \frac{b}{2} = \overline{LA}$, so liegt A außerhalb des Kreises um L, und ist $\overline{LH} = \frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} < \frac{c}{2}$, so liegt H innerhalb des Kreises um L. Also müssen sich der Kreisbogen und der Kreis irgendwo zwischen A und H schneiden. Der bezüglich OH symmetrische Schnittpunkt liegt auf $\overset{\frown}{CH}$. Im Grenzfall $\overline{LH} = \frac{c}{2}$ berühren sich der Kreis und der Kreisbogen nur. Dann ist M = H, $\triangle$ AMC ist gleichschenklig, $BA \parallel ML \perp AC$, so daß $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$. Der andere Grenzfall $\frac{b}{2} = \frac{c}{2}$ ergibt ein entartetes Dreieck (eine Strecke auf der Geraden AC).

6.

Zunächst bestimmen wir auf folgende Weise ein kartesisches Koordinatensystem:

Der Ursprung O sei ein beliebiger Punkt der Ebene ε (s. Abb. 6). Zwei zueinander senkrecht gerichtete Achsen OX und OY sollen in der Ebene ε liegen, OZ ist senkrecht zur Ebene XOY gerichtet.

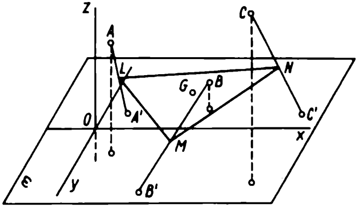


Abb. 6

Die Punkte A, B, C haben dann die Koordinaten $A(x_1;\ y_1;\ 2a)$, $B(x_2;\ y_2;\ 2b)$, $C(x_3;\ y_3;\ 2c)$, wobei unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei verschieden sind. Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC hat die Koordinaten

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{2(a+b+c)}{3}\right)$$

Die Punkte A', B', C' haben die Koordinaten $A'(x_1';\ y_1';\ 0)$, $B'(x_2';\ y_2';\ 0)$, $C'(x_3';\ y_3';\ 0)$. Für die Mitten L, M, N der Strecken AA', BB', CC' gilt

$$L\left(\frac{x_1+x_1'}{2};\ \frac{y_1+y_1'}{2};\ a\right),\quad M\left(\frac{x_2+x_2'}{2};\ \frac{y_2+y_2'}{2};\ b,\right)$$

$$N\left(\frac{x_3+x_3'}{2};\ \frac{y_3+y_3'}{2};\ c\right).$$

Folglich hat der Schwerpunkt G des Dreiecks LMN die Koordinaten

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6};\ \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Punkte des geometrischen Ortes auf der Ebene $z = \frac{a + b + c}{3}$ (*) liegen, die parallel zur Ebene ε gerichtet ist und von S und ε den gleichen Abstand hat.

Es soll nun gezeigt werden, daß jeder Punkt der Ebene (*) dem geometrischen Ort angehört. Dazu wählen wir in der Ebene (*) einen beliebigen Punkt $G(\bar{x}; \bar{y}; \frac{a+b+c}{3})$ und zeigen, daß in der Ebene ε entsprechende Punkte $A'(x_1'; y_1')$, $B'(x_2'; y_2')$, $C'(x_3'; y_3')$ existieren. Die Koordinaten der Punkte A', B', C' bestimmen wir aus den Beziehungen

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6} \ ; \quad \bar{y} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6} .$$

x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 sind gegeben. Bei beliebiger Vorgabe von x_2', x_3' und y_2', y_3' bestimmen wir aus der ersten und zweiten Beziehung entsprechend x_1' und y_1'.

IV. IMO

1. (Lösung 1)

Die zu bestimmende natürliche Zahl n sei durch $n = 10x + 6$ dargestellt; dabei sei x wiederum eine natürliche Zahl. Ferner sei y die Anzahl der Ziffern der Zahl n .

Auf Grund der Bedingungen der Aufgabe gilt dann

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$$

oder nach entsprechender Umformung

$$13x = 2(10^{y-1} - 4) \quad . \qquad (1)$$

Es sind also alle Zahlen der Form $10^{y-1} - 4$ (nämlich die Zahlen 6, 96, 996, 9 996, ...) auf ihre Teilbarkeit durch 13 hin zu untersuchen.

Durch Probieren finden wir, daß die Zahl 99 996 die erste und damit zugleich die kleinste der in Frage kommenden Zahlen ist. Es gilt $99\,996 = 13 \cdot 7\,692$.

Folglich gilt $y - 1 = 5$, also $y = 6$. Aus der Gleichung (1) gewinnen wir durch Substitution $x = 15\,384$.

Die zu bestimmende Zahl n ist demnach die Zahl 153 846. Eine Probe bestätigt unser Ergebnis; es gilt
$4 \cdot 153\,846 = 615\,384$.

1. (Lösung 2)

Da die gesuchte Zahl n auf die Ziffer 6 endet, muß die Zahl $k = 4n$ auf die Ziffer 4 enden, denn $6 \cdot 4 = 24$. Ferner endet n dann mit der zweistelligen Zahl 46. Nun ist
$46 \cdot 4 = 184$, also endet k mit der zweistelligen Zahl 84 und die Zahl n mit der dreistelligen Zahl 846. Dieses Verfahren setzen wir fort.

Eine Übersicht der letzten Ziffern der dekadischen Darstellung der Zahlen k und n ist aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich:

Zahl $k = 4n$	Zahl n
.... 4	 6
.... 84	 46
.... 384	 846
...... 5 384	...... 3 846
..... 15 384	..... 53 846
.... 615 384	.... 153 846

Nun ist zu beweisen, daß die Zahl 153 846 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Zunächst gilt $153\,846 \cdot 4 = 615\,384$. Aus der Tabelle und aus dem angedeuteten Lösungsweg ist ersichtlich, daß die Zahl 153 846 die kleinste Zahl dieser Art ist, die allen Bedingungen genügt. Damit ist die Lösung ausgeführt.

2.

Es sei x eine reelle Lösung der gegebenen Ungleichung; durch Umformung erhalten wir zunächst

$$\sqrt{3 - x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x + 1} \ .$$

Da auf beiden Seiten der Ungleichung positive Zahlen stehen, erhalten wir durch Quadrieren ihrer Seiten und weitere Umformungen

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x + 1} \ .$$

Durch nochmaliges Quadrieren und Umformen kommen wir schließlich zur Ungleichung

$$64x^2 - 128x + 33 > 0 \ . \tag{1}$$

Die Gleichung $64x^2 - 128x + 33 = 0$ besitzt die reellen Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{31}}{8} \ .$$

Wir können nun den dreigliedrigen Term auf der linken Seite von (1) in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen und erhalten

$$(8x - 8 + \sqrt{31})(8x - 8 - \sqrt{31}) > 0. \tag{2}$$

Das Produkt dieser beiden Faktoren ist genau dann positiv, wenn entweder der zweite der beiden Faktoren (also $8x - 8 - \sqrt{31}$) positiv ist oder der erste der beiden Faktoren (also $8x - 8 + \sqrt{31}$) negativ ist. Wir erhalten daher zwei mögliche Lösungsmengen:

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad , \tag{3}$$

$$x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad . \tag{4}$$

Wir führen nun die <u>Probe</u> aus.

a) Aus (3) erhalten wir $3 - x > 2 + \frac{1}{8}\sqrt{31} > 0$ und

$$x + 1 < 2 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \; . \tag{5}$$

Damit der Term $\sqrt{x+1}$ sinnvoll ist, d.h. eine reelle Zahl ergibt, muß die Bedingung $x + 1 \geq 0$ erfüllt sein; es gilt daher $x \geq -1$. Für die Variable x müssen deshalb die Ungleichungen

$$-1 \leq x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \tag{6}$$

erfüllt sein. Die Richtigkeit der Gleichung

$$\sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}} - \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

läßt sich leicht durch Quadrieren nachweisen; unter Beachtung von (5) und (7) gilt daher

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2} \; ,$$

also die gegebene Ungleichung.

b) Aus (4) erhalten wir $\sqrt{3 - x} < \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}}$ und

$$\sqrt{x + 1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}} \; .$$

Nun ist offensichtlich $\sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}}$,

daher liefert die Beziehung (4) keine Lösung der Aufgabe. Alle Lösungen der gegebenen Ungleichung werden also durch die Ungleichung (6) dargestellt.

<u>Bemerkung.</u> Bei der angeführten Lösung wird keine Umformung zu untereinander äquivalenten Ungleichungen durchgeführt; die Probe wurde ohne Umkehrung des Lösungswegs ausgeführt. Die Mehrzahl der Teilnehmer löste aber die gegebene Ungleichung mit Hilfe von Umformungen zu äquivalenten Ungleichungen.

<u>3.</u> (s. Abb. 1)

Es sei σ die Symmetrieebene der Kante $\overline{AA'}$; die Ebene σ liegt parallel zur Ebene ABC, sie schneidet den gegebenen Würfel im Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ (A_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$ usw.) Es seien ferner Z_1, Z_2 (in dieser Reihenfolge) die Mittelpunkte der Strecken $\overline{A_0B_0}$ und $\overline{B_0C_0}$.

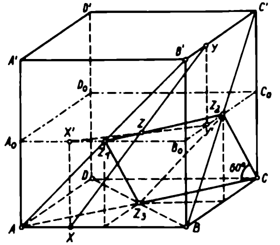


Abb. 1

a) Wenn der Punkt X die Strecke $\overline{AB}$ durchläuft, so durchläuft der Punkt Y mit der gleichen Geschwindigkeit die Strecke $\overline{B'C'}$. Der Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{XY}$ liegt (nach dem Strahlensatz) in der Ebene σ. Der Punkt Z ist also auch Mittelpunkt der Strecke $\overline{X'Y'}$, die eine Orthogonalprojektion der Strecke $\overline{XY}$ auf die Ebene σ darstellt. Der geometrische Ort der Mittelpunkte Z ist in diesem Fall offensichtlich die Strecke $\overline{Z_1Z_2}$.

b) Wenn der Punkt X die Strecke $\overline{BC}$ und der Punkt Y die Strecke $\overline{C'C}$ durchläuft, so sind alle Geraden XY parallel zur Winkelhalbierenden BC'. Der geometrische Ort der Punkte Z ist in diesem Fall offensichtlich die Strecke $\overline{Z_2C}$.

c) Wenn der Punkt X die Strecke $\overline{CD}$ und gleichzeitig der Punkt Y die Strecke $\overline{CB}$ durchläuft, so sind alle Geraden XY parallel zur Winkelhalbierenden BD, und die Punkte Z bestimmen die Strecke $\overline{CZ_3}$, wobei Z_3 der Mittelpunkt des Quadrats ABCD sowie der Winkelhalbierenden BD ist.

d) Wenn endlich der Punkt X zum Punkt A längs der Strecke $\overline{DA}$ und gleichzeitig der Punkt Y zum Punkt B' längs der Strecke $\overline{BB'}$ zurückkehrt, so ist die Lage ähnlich wie im Fall a); der Punkt Z durchläuft dann die Strecke $\overline{Z_3Z_1}$, wie wir leicht durch einen geeigneten Austausch der Würfelkantan beweisen können. Es gilt offenbar $\overline{Z_1Z_2} = \overline{Z_2C} = \overline{CZ_3} = \overline{Z_3Z_1}$ (jede dieser Strecken ist kongruent einer halben Winkelhalbierenden einer Würfelfläche des gegebenen Würfels). Außerdem ist $\overline{Z_1Z_2} \parallel \overline{CZ_3}$. Das Viereck $Z_1Z_2CZ_3$ ist daher ein Parallelogramm und zwar ein Rhombus.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

4.

Unter Verwendung der bekannten Formeln

$$2\cdot\cos^2 x = 1 + \cos 2x, \qquad 2\cdot\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

erhalten wir durch Substitution und anschließendes Umformen aus der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

die Gleichung

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cdot\cos^2 3x = 0 . \qquad (1)$$

Auf die ersten beiden Glieder der Gleichung (1) wenden wir die Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ an und erhalten

$$2\cdot\cos 3x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 3x = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\cos 3x\cdot(\cos x + \cos 3x) = 0 .$$

Auf gleiche Weise formen wir den Term $\cos x + \cos 3x$ um und erhalten schließlich

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x = 0 . \qquad (2)$$

Die Lösungen der Gleichung (2) lauten zunächst

$x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ$; $2x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ$; $3x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ$ bzw.

nach Umformung

$$\begin{aligned} x &= 90^\circ + k\cdot 360^\circ , \\ x &= 45^\circ + k\cdot 180^\circ , \\ x &= 30^\circ + k\cdot 120^\circ \quad \text{mit } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots \end{aligned}$$

Durch eine Probe können wir leicht nachprüfen, daß alle diese Lösungen tatsächlich die gegebene Gleichung erfüllen.

5.

Für das gesuchte Tangentenviereck ABCD gilt bekanntlich

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} . \qquad (1)$$

Wir wählen die Bezeichnung der Punkte A, B, C so, daß $\overline{BC} \geq \overline{AB}$ ist. (Falls $\overline{BC} < \overline{AB}$, wird die Bezeichnung der Punkte A und C vertauscht). Die Beziehung (1) bringen wir auf die Form

$$\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{CD} - \overline{AD} \, . \tag{2}$$

Der gesuchte Eckpunkt D liegt also einerseits auf einem Kreis k, andererseits auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten A und C, deren Hauptachse die Länge $\overline{BC} - \overline{AB}$ besitzt. Es ist daher durch eine euklidische Konstruktion die Bestimmung der Lage der gemeinsamen Punkte beider Kurven möglich.

a) Ist $\overline{AB} = \overline{BC}$, muß wegen (2) auch $\overline{AD} = \overline{CD}$ sein; der Punkt D liegt auf der Symmetrieachse der Strecke $\overline{AC}$, die den Kreis k außer im Punkt B noch in einem weiteren Punkt D schneidet. Es entsteht ein konvexes Tangentenviereck ABCD, das ein Drachenviereck ist und das man außerdem einem Kreis einbeschreiben kann (s. Abb. 2).

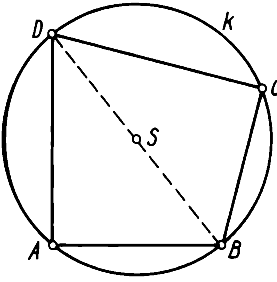


Abb. 2

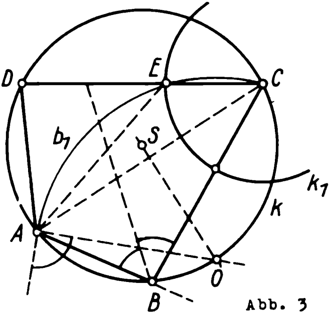


Abb. 3

b) Ist $\overline{AB} < \overline{BC}$, dann ist gemäß (2) $\overline{AD} < \overline{CD}$ (s. Abb. 3). Auf der Strecke $\overline{CD}$ konstruieren wir in diesem Fall den Hilfspunkt E derart, daß $\overline{DE} = \overline{AD}$ wird. Für den Abstand $\overline{CE}$ gilt wegen (2) auch

$$\overline{CE} = \overline{CD} - \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{AB} \, . \tag{3}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \overline{\sphericalangle AEC} &= 180^\circ - \overline{\sphericalangle AED} = 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\overline{\sphericalangle ADC}) \\ &= 90^\circ + \tfrac{1}{2}\overline{\sphericalangle ADC} = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \overline{\sphericalangle ABC}) \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}\overline{\sphericalangle ABC}. \end{aligned} \tag{4}$$

Außerdem gilt $\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle ADC} = 180^\circ$, denn das Viereck ABCD ist zugleich ein Sehnenviereck.

Für die Lage des Hilfspunkts E haben wir also zwei geometrische Orte: erstens ist das nach (3) der Kreis k_1 um C als Mittelpunkt mit dem Radius $r = \overline{BC} - \overline{AB}$; zweitens ist das nach (4) der Bogen b_1, der in der von der Geraden AC erzeugten Halbebene, die B nicht enthält, liegt, und von dessen Punkten aus die Strecke $\overline{AC}$ unter einem Winkel von $180^\circ - \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle ABC}$ zu sehen ist.

Wenn der Bogen b_1 den Kreis k_1 in einem Punkt E schneidet, der innerhalb des Kreises k liegt, dann schneidet der Strahl CE den Bogen $\widehat{AC}$ des Kreises k, der nicht den Punkt B enthält, in einem Punkt D, der nicht mit A bzw. B zusammenfällt. Für das Viereck ABCD gilt entsprechend seiner Konstruktion $\overline{\sphericalangle DEA} = \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle ABC}$ und $\overline{\sphericalangle EDA} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle ABC}$, es ist daher $\overline{\sphericalangle DAE} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DEA} - \overline{\sphericalangle EDA} = \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle ABC}$. Das Dreieck AED ist somit gleichschenklig und besitzt die Basis $\overline{AE}$, d.h. es gilt $\overline{AD} = \overline{DE}$. Dann gilt auch

$$\overline{CD} - \overline{AD} = \overline{DE} + \overline{CE} - \overline{AD} = \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{AB}\ ;$$

mit Worten ausgedrückt: für das Viereck ABCD gelten die Beziehungen (1) und (2), und weil dieses Viereck konvex ist, stellt es ein Tangentenviereck dar. Damit ist der Beweis zur angegebenen Konstruktion ausgeführt.

<u>Diskussion:</u> Wegen der Beziehung $180^\circ - \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle ABC} > 180^\circ - \overline{\sphericalangle ABC}$, liegt der Bogen b_1 innerhalb des Kreises k (ausgenommen die Punkte A und C). Ein Schnittpunkt E der Kurven k_1 und b_1 entsteht nur dann, wenn $\overline{CE} < \overline{AC}$ ist, d. h. wenn $\overline{BC} - \overline{AB} < \overline{AC}$ erfüllt ist. Diese Dreiecksungleichung ist aber für jedes Punkte-Tripel (A, B, C) des Kreises k erfüllt. Die Aufgabe hat daher stets eine Lösung.

<u>6.</u>

Es sei ABC das gegebene gleichschenklige Dreieck mit der Basis $\overline{BC}$. Der Mittelpunkt O des Inkreises sei innerer Punkt des Dreiecks ABC, sein Abstand von der Basis $\overline{BC}$ betrage ϱ Längeneinheiten (s. dazu Abb. 4 bis 6).

Ist der Winkel $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$ spitz, so liegt der Mittelpunkt S des Umkreises ebenfalls im Innern des Dreiecks ABC, sein Abstand von der Basis BC betrage $r \cdot \cos\alpha$ Längeneinheiten; in diesem Fall beträgt der gesuchte Abstand $d = \overline{SO} = |\varrho - r \cdot \cos\alpha|$.

Ist $\alpha = 90^\circ$, so fällt der Punkt S mit dem Mittelpunkt M der Strecke $\overline{BC}$ zusammen, und es gilt $d = \overline{SO} = \varrho = |\varrho - r \cdot \cos\alpha|$.

Ist der Winkel α stumpf, so liegt der Mittelpunkt S außer-

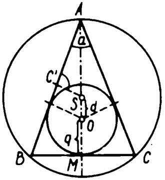


Abb. 4

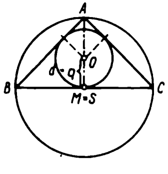


Abb. 5

halb des Dreiecks ABC; sein Abstand von Basis $\overline{BC}$ beträgt $-r \cdot \cos\alpha$, es gilt auch für diesen Fall

$$d = \overline{SO} = \varrho - r \cdot \cos\alpha$$
$$= |\varrho - r \cdot \cos\alpha| .$$

Daher gilt in allen Fällen

$$d = |\varrho - r \cdot \cos\alpha| . \qquad (1)$$

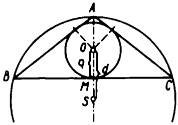


Abb. 6

Nun muß noch $\cos\alpha$ mit Hilfe von r und ϱ bestimmt werden. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und stellen die Länge der Strecke $\overline{BM}$ auf zweierlei Weise dar. Es gilt in allen Fällen, d. h. für $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\overline{BM} = r \cdot \sin\alpha . \qquad (2)$$

Aus dem Dreieck BMO erhalten wir außerdem folgende Beziehung:

$$\overline{BM} = \varrho \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) , \qquad (3)$$

denn es ist $\overline{\sphericalangle BOM} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle BOC} = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}$.

Durch Gleichsetzen von (2) und (3) erhalten wir $r \cdot \sin\alpha = \varrho \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$ und durch Umformen schließlich

$$r \cdot \sin\alpha = \varrho \cdot \frac{1 + \tan\frac{\alpha}{4}}{1 - \tan\frac{\alpha}{4}} = \varrho \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}} .$$

Wir erweitern den letzten Quotienten mit der Zahl $\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}$ und erhalten

$$r\cdot\sin\alpha = \varrho\,\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

bzw. $$2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \varrho\cdot(1+\sin\frac{\alpha}{2}) .$$

Unter Beachtung von $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ und nach Division durch die positive Zahl $1 + \sin\frac{\alpha}{2}$ erhalten wir daraus

$$2r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho = 0 . \qquad (4)$$

Wegen $\cos\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$ gilt auch

$$-r\cdot\cos\alpha = -r + 2r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} .$$

Daraus folgt einerseits $2r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = r - r\cdot\cos\alpha$; andererseits gilt wegen (4) $2r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2r\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho$, und wir erhalten daraus durch Gleichsetzen

$$r - r\cdot\cos\alpha = 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho$$

bzw. $$r.\cos\alpha = r + \varrho - 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

sowie $$\varrho - r\cdot\cos\alpha = \varrho - r - \varrho + 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = r(2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - 1).$$

Mit Hilfe der Beziehungen (1) und (4) erhalten wir daraus

$$d^2 = r^2(4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + 1),$$

$$d^2 = r^2(4.\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2\varrho}{r} - 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + 1) ,$$

oder $d^2 = r^2 - 2r\varrho$, was zu beweisen war.

7.

I. Zuerst muß festgestellt werden, in welchen Punkten die Kugelflächen die verlängerten Kanten des Tetraeders SABC berühren. Jede der fünf Kugelflächen schneidet die Ebene ABC in einem Kreis, der für das Dreieck ABC entweder Inkreis oder Ankreis ist.

a) Wir setzen zunächst voraus, daß die Kugelfläche K die Ebene ABC im Kreis k schneidet, der für das Dreieck ABC Inkreis

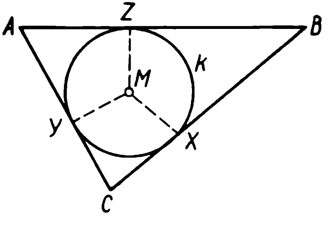


Abb. 7

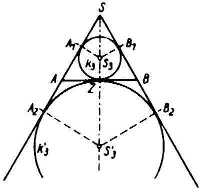


Abb. 8

ist (s. Abb. 7). Dieselbe Fläche K schneidet die Ebene SAB entweder im Kreis k_3, der Inkreis des Dreiecks SAB ist, oder im Kreis k_3', der Ankreis des Dreiecks SAB zur Seite $\overline{AB}$ ist (s. Abb. 8).

Im ersten Fall schneidet die Fläche K die Ebene SBC in einem Kreis, der die Seiten $\overline{SB}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks SBC in inneren Punkten berührt; deshalb ist dieser Kreis Inkreis des Dreiecks SBC, und er berührt auch die Seite $\overline{SC}$ in einem inneren Punkte. Die Kugelfläche K berührt also alle Kanten des Tetraeders in inneren Punkten; wir bezeichnen sie mit K_0 und nennen sie einbeschriebene Kugelfläche.

Im zweiten Fall schneidet die Fläche K die Ebene SBC in einem Kreis, der die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt und die (verlängerte) Seite $\overline{SB}$ in einem äußeren Punkt berührt. Dieser Kreis ist daher Ankreis des Dreiecks SBC zur Seite $\overline{BC}$, er berührt die verlängerte Seite $\overline{SC}$ in einem äußeren Punkt. Diese Kugelfläche bezeichnen wir mit K_S und nennen sie anbeschriebene Kugelfläche.

b) Schneidet die Kugelfläche K die Ebene ABC im Kreis k_1, der Ankreis z. B. zur Seite $\overline{BC}$ ist, dann schneidet er die Ebene SAB in einem Kreis, der offenbar Ankreis des Dreiecks SAB zur Seite $\overline{SB}$ ist. Die Fläche K schneidet die Ebene SBC in einem Kreis, der die Seiten $\overline{SB}$ und $\overline{BC}$ in inneren Punkten berührt; der Kreis ist daher Inkreis des Dreiecks SBC. Damit ist dieser Fall auf den Fall a) zurückgeführt, bei dem die Eckpunkte S, A, B, C der Reihenfolge nach durch die Eckpunkte A, B, C, S ersetzt wurden.

II. Die Kugelfläche K_0 berührt die Geraden SA, SB, SC der Reihe nach in den Punkten A_1, B_1, C_1, die Kugelfläche K_S berührt dieselben Geraden der Reihe nach in den Punkten A_2,

B_2, C_2. Beide Flächen schneiden die Ebene ABC im Inkreis k des Dreiecks ABC; deshalb berühren beide Flächen die Geraden (Kanten) AB, BC, CA der Reihe nach in denselben Punkten Z, X, Y. Entsprechend den Eigenschaften der Tangenten einer Kugelfläche gilt

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = \overline{AZ} = \overline{AY}\ ;$$
$$\overline{BB_1} = \overline{BB_2} = \overline{BZ} = \overline{BX}\ ;$$
$$\overline{CC_1} = \overline{CC_2} = \overline{CX} = \overline{CY}\ . \qquad (1)$$

Außerdem gilt (wieder wegen der Eigenschaften der Tangenten einer Kugelfläche)

$$\overline{SA_1} = \overline{SB_1} = \overline{SC_1}\ ; \quad \overline{SA_2} = \overline{SB_2} = \overline{SC_2}\ . \qquad (2)$$

Nun ist $\overline{SA_2} = \overline{SA_1} + \overline{AA_1} + \overline{AA_2}$, $\overline{SB_2} = \overline{SB_1} + \overline{BB_1} + \overline{BB_2}$,

$$\overline{SC_2} = \overline{SC_1} + \overline{CC_1} + \overline{CC_2};$$

daher gilt wegen (1) und (2)

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}\ . \qquad (3)$$

Ferner ist

$$\overline{SA} = \overline{SA_1} + \overline{AA_1}, \qquad \overline{SB} = \overline{SB_1} + \overline{BB_1},$$
$$\overline{SC} = \overline{SC_1} + \overline{CC_1}.$$

Gemäß (2) und (3) gilt also

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}\ . \qquad (4)$$

Durch Vertauschen der Eckpunkte stellen wir aus (4) fest, daß alle drei Kanten, die von irgendeinem Eckpunkt des gegebenen Tetraeders ausgehen, die gleiche Länge besitzen; deshalb haben alle Kanten des Tetraeders SABC die gleiche Länge, das Tetraeder ist daher regelmäßig. Damit ist Teil a) der Aufgabe bewiesen.

III. Es sei SABC ein regelmäßiges Tetraeder, M der Mittelpunkt des Umkreises und zugleich des Inkreises des gleichseitigen Dreiecks ABC (s. Abb. 9).

Durch zweimaliges Drehen der Ebene SAB um die Gerade $a \equiv SM$ um je 120° wird diese Ebene in die Ebenen SBC und SAC überführt. Wir bezeichnen den Inkreis des Dreiecks SAB wieder mit k_3, seinen Mittelpunkt mit S_3; ferner bezeichnen wir den

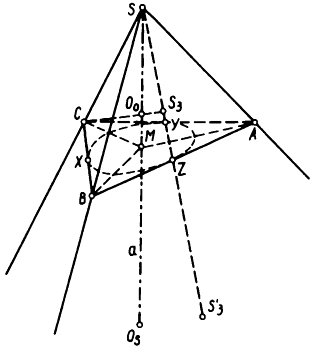


Abb. 9

Ankreis des Dreiecks SAB zur Seite $\overline{AB}$ mit k_3' und seinen Mittelpunkt mit S_3'. Da die Ebene SAB die Gerade AB enthält, die senkrecht zur Geraden CM und diese wiederum senkrecht zur Geraden SM steht, ist die Ebene SAB auch senkrecht zur Ebene SCM; daher schneidet die durch den Punkt S_3 gehende und zur Ebene SAB senkrecht stehende Gerade die Gerade a in einem Punkt O_o. Entsprechend schneidet die durch den Punkt S_3' gehende und zur Ebene SAB senkrechte Gerade die Gerade a in einem Punkt O_S. Die Kugelfläche K_o, deren Mittelpunkt der Punkt O_o ist, enthält den Kreis k_3; sie enthält auch die Inkreise der Dreiecke SBC und SAC, wie man durch Drehen der Ebene SAB um 120^o um die Achse a feststellen kann. Die Kugelfläche K_o ist daher eine der fünf angeführten Kugelflächen. In ähnlicher Weise schneidet die Kugelfläche K_s mit dem Mittelpunkt O_S, die den Kreis k_3' enthält, die Ebenen SBC, SCA in den Ankreisen der Dreiecke SBC, SCA, wie man wieder durch Drehen der Ebene SAB um 120^o um die Achse a feststellen kann. Die Fläche K_S ist daher die zweite der angeführten fünf Kugelflächen. Ersetzen wir den Punkt S der Reihe nach durch die Punkte A, B, C, so erhalten wir weitere drei Kugelflächen. Damit ist auch Teil b) der Aufgabe bewiesen.

V. IMO

1.

Wir bringen die gegebene Gleichung

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x \tag{1}$$

auf die Form

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p} \quad .$$

Durch Quadrieren beider Seiten dieser Gleichung und entsprechende Umformungen erhalten wir dann

$$2x^2 + (p - 4) = -2x\sqrt{x^2 - p} \quad .$$

Durch nochmaliges Quadrieren und geeignete Umformungen gewinnen wir schließlich die Gleichung

$$4(4 - 2p)x^2 = (p - 4)^2 \; . \tag{2}$$

Aus der Lösbarkeit der Gleichung (1) folgt die Lösbarkeit der Gleichung (2).

Aus Gleichung (2) ergeben sich die Bedingungen: $p \neq 2$; $p \neq 4$. Für $p = 4$ hat (2) die Lösung $x = 0$; diese Lösung erfüllt aber nicht Gleichung (1).

Wenn die Bedingungen $p \neq 2$ und $p \neq 4$ erfüllt sind, folgt aus (2) die Beziehung $4 - 2p > 0$ bzw. $p < 2$.

Gleichung (2) hat dann in x die Lösung

$$x = \frac{|p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}} \quad , \tag{3}$$

denn aus Gleichung (1) folgt, daß x eine nichtnegative Zahl sein muß. Nun führen wir die Probe durch; nach Belegung der Terme $x^2 - p$ und $x^2 - 1$ aus (1) erhalten wir

$$x^2 - p = \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)} - p = \frac{(3p-4)^2}{4(4-2p)} \; ; \quad \sqrt{x^2 - p} = \frac{|3p - 4|}{2\sqrt{4-2p}}$$

bzw.

$$x^2 - 1 = \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)} - 1 = \frac{p^2}{4(4-2p)}\ ; \qquad \sqrt{x^2 - 1} = \frac{|p|}{2\sqrt{4-2p}}\ .$$

Die Lösung (3) wird daher die gegebene Gleichung (1) nur für solche Werte des Parameters p erfüllen, die der Beziehung

$$|3p - 4| + 2|p| = |p - 4| \tag{4}$$

genügen. Beim Lösen der Gleichung (4) haben wir vier Intervalle zu unterscheiden:

a) $p \leq 0$; b) $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$; c) $\frac{4}{3} \leq p \leq 4$; d) $p \geq 4$.

Im Fall a) nimmt die Gleichung (4) die Form

$$-3p + 4 - 2p = 4 - p$$

an, sie hat genau eine Lösung, nämlich $p = 0$.

Im Fall b) erhalten wir aus (4) die Gleichung

$$-3p + 4 + 2p = 4 - p\ ;$$

sie wird durch jeden Wert von p aus dem Intervall $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ erfüllt. Im Fall c) erhalten wir die Gleichung

$$3p - 4 + 2p = 4 - p$$

mit der einzigen Lösung $p = \frac{4}{3}$. Im Fall d) hat schließlich die Gleichung (4) die Form

$$3p - 4 + 2p = p - 4\ ,$$

sie besitzt wie im Falle a) nur die Lösung $p = 0$.

Im Ergebnis der Probe stellen wir fest: die Lösung (3) erfüllt die gegebene Gleichung (1) nur für den Fall, daß gleichzeitig die Ungleichungen $p < 2$ und $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ erfüllt sind; daraus ergibt sich für den Parameter p als Bedingung für die Lösbarkeit der gegebenen Gleichung (1):

$$0 \leq p \leq \frac{4}{3}\ .$$

2. (Lösung eines sowjetischen Teilnehmers)

Offensichtlich gehört der Punkt A zu dem gesuchten geometrischen Ort M. Es sei X ein Punkt des geometrischen Ortes M, und es gelte $X \neq A$, dann hat eine Ebene ϱ, die mit X inzitiert und zur Geraden p senkrecht steht (p ist die durch die Punkte A und X bestimmte Gerade), mit der Strecke $\overline{BC}$ wenigstens einen Punkt Y gemeinsam. Legen wir andererseits durch einen beliebigen Punkt Y der Strecke $\overline{BC}$ eine Ebene ϱ , die senkrecht steht zu einer beliebigen Geraden p, die mit A inzidiert, dann gehört der Schnittpunkt X der Geraden p mit der Ebene ϱ dem geometrischen Ort M an.

Wir erhalten alle Punkte X des geometrischen Ortes M, die auf einer festen Geraden p, die mit A inzidiert, liegen, wenn wir in gleicher Weise die entsprechenden Ebenen ϱ durch alle Punkte Y der Strecke $\overline{BC}$ legen. Die Schnittpunkte X der Geraden p mit den Ebenen ϱ fallen entweder in einem Punkt zusammen, oder sie bestimmen eine Strecke, die durch die Schnittpunkte der Geraden p mit den Ebenen β und γ begrenzt wird, wobei die Ebenen β und γ durch die Punkte B, C senkrecht zu p zu legen sind.

Legen wir zu allen Geraden p die entsprechenden Ebenen β , so bestimmen die zugehörigen Punkte X eine Kugelfläche K_1, die über dem Durchmesser $\overline{AB}$ konstruiert wurde; fallen dabei die Punkte A und B zusammen, so reduziert sich diese Fläche auf den Punkt A. Legen wir aber zu allen Geraden p die entsprechenden Ebenen γ , so erfüllen die zugehörigen Punkte X eine Kugelfläche K_2, die über dem Durchmesser $\overline{AC}$ konstruiert wurde; fallen dabei die Punkte A und C zusammen, so reduziert sich diese Fläche wieder auf den Punkt A. Der geometrische Ort M kann daher wie folgt beschrieben werden: er setzt sich aus den beiden Kugelflächen K_1 und K_2 und aus allen Punkten des Raumes zusammen, die außerhalb der einen und zugleich innerhalb der anderen Kugelfläche liegen.

Beispiele:

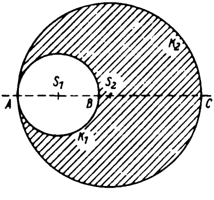


Abb. 1

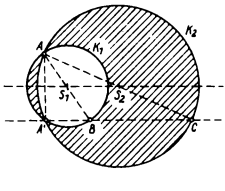


Abb. 2

Ist der Punkt A innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$, so besteht der geometrische Ort M aus den beiden Kugeln, die durch die Kugelflächen K_1 und K_2 bestimmt sind.

Ist der Punkt A äußerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$, so wird der geometrische Ort M durch Rotation der schraffierten Figur (einschließlich der Randpunkte) um die Gerade BC erzeugt (s. Abb. 1).

Ähnlich entsteht der geometrische Ort M, wenn der Punkt A nicht auf der Geraden BC liegt (s. Abb. 2). In diesem Fall ist die Rotationsachse die Symmetrieachse der Strecke $\overline{AA'}$, wobei A' der Fußpunkt des Lotes ist, das vom Punkt A auf die Gerade BC gefällt wird.

3. (Lösung des Autors)

Es sei $P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ das gegebene konvexe n-Eck; dabei gelte $\overline{P_iP_{i+1}} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $P_{n+1} = P_1$. Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, zu versuchen, den Umkreis des n-Ecks zu konstruieren (es zeigt sich, daß das n-Eck regelmäßig ist), und zwar so, daß man schrittweise von allen seinen Seiten ausgeht.

Über der Seite $\overline{P_iP_{i+1}}$, die wir als Basis benutzen, konstruieren wir das gleichschenklige Dreieck $P_iP_{i+1}S_i$ derart, daß der Winkel an der Spitze $\sphericalangle P_iS_iP_{i+1}$ die Größe $\frac{360^\circ}{n}$ besitzt.

Das Dreieck konstruieren wir in derjenigen der beiden durch die Gerade P_iP_{i+1} erzeugten Halbebene, in der das konvexe n-Eck liegt. Der Kreis k_i, dessen Mittelpunkt M_i mit S_i zusammenfällt und dessen Radius $r_i = \overline{S_iP_i}$ ist, soll der Umkreis für das n-Eck sein.

Wir untersuchen nun die gegenseitige Lage der Kreise k_i und k_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots n;\ k_{n+1} \equiv k_1)$. Ist $a_i = a_{i+1}$, d. h. $\overline{P_iP_{i+1}} = \overline{P_{i+1}P_{i+2}}$, so fallen die Mittelpunkte S_i und S_{i+1} zusammen und daher auch die Kreise k_i und k_{i+1}.

Ist $a_i > a_{i+1}$, so liegt der Punkt S_{i+1} zwischen S_i und P_{i+1} (s. Abb. 3)

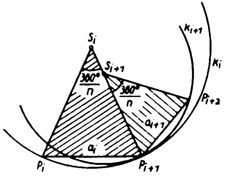


Abb. 3

und die Kreise k_i und k_{i+1} berühren sich im Punkt P_{i+1} von innen; dabei liegt der Kreis k_{i+1} (mit Ausnahme des Punktes P_{i+1}) innerhalb des Kreises k_i. Aus der obigen Erläuterung geht hervor, daß der Kreis k_{i+1} bis auf den gemeinsamen Berührungspunkt im Inneren des Kreises k_i liegt, d.h. daß auch der Kreis k_n bis auf den gemeinsamen Berührungspunkt im Inneren des Kreises k_1 liegt. ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

Wir führen jetzt einen indirekten Beweis. Es möge in einem Fall die Beziehung $a_i > a_{i+1}$ gelten. Dann liegt der Kreis k_n bis auf den gemeinsamen Berührungspunkt im Innern des Kreises k_1 (*) ; möglicherweise gilt das aber nur mit einer Ausnahme und zwar des Punktes P_n. Das bedeutet, daß die Punkte P_1 und P_n nicht zusammenfallen, aber gleichzeitig P_1 auf k_1 und im Inneren von k_1, nämlich auf k_n, liegen müßte. Das wäre jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daraus folgt, daß $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ gilt, was zu beweisen war.

4.

Durch geeignete Substitutionen eliminieren wir zunächst x_5 aus der ersten, vierten und fünften Gleichung und erhalten so das neue Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} x_2 - x_3 &= y(x_1 - x_4) \\ x_1 + x_4 &= y(yx_1 - x_2) \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \end{aligned} \right| \qquad (1)$$

und nach entsprechenden Umformungen

$$\left| \begin{aligned} yx_1 - x_2 + x_3 - yx_4 &= 0 \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \end{aligned} \right| \qquad (2)$$

(*) Das würde z.B. für den Fall eintreten, wenn für die Vieleckseiten die Beziehung $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} > a_n$ gilt.

Nun eliminieren wir aus der ersten, zweiten und vierten Gleichung x_4 und erhalten

$$\left|\begin{array}{rcl} yx_1 - x_2 + x_3 - y^2x_3 + yx_2 & = & 0 \\ (1-y^2)x_1 + yx_2 + yx_3 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & yx_2 \end{array}\right|$$

und nach weiteren Umformungen

$$\left|\begin{array}{rcl} yx_1 + (y-1)x_2 + (1-y^2)x_3 & = & 0 \\ (1-y^2)x_1 + (y-1)x_2 + yx_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & yx_2 \end{array}\right| . \qquad (3)$$

Schließlich eliminieren wir x_3 und erhalten nach entsprechenden Umformungen

$$\left|\begin{array}{rcl} (y^2+y-1)x_1 + (-y^3+2y-1)x_2 & = & 0 \\ (1-y-y^2)x_1 + (y^2+y-1)x_2 & = & 0 \end{array}\right| . \qquad (4)$$

Den Term $-y^3 + 2y - 1$ stellen wir als Produkt dar:

$$-y^3 + 2y - 1 = (y^2 + y - 1)(1 - y) \qquad (5)$$

Mit Verwendung von (5) erhalten wir aus (4)

$$\left|\begin{array}{rcl} (y^2+y-1)\cdot[x_1 - (y-1)x_2] & = & 0 \\ (y^2+y-1)(x_2 - x_1) & = & 0 \end{array}\right| . \qquad (6)$$

Jetzt wird eine Fallunterscheidung erforderlich.

a) Ist $y^2 + y - 1 \neq 0$, so folgt aus (6) $x_1 = x_2$ und $x_1(2 - y) = 0$. Gilt hier $y \neq 2$, dann ist $x_1 = x_2 = 0$ und damit auch $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Diese Lösung erfüllt das gegebene Gleichungssystem (1), wie eine Probe zeigt.

b) Ist $y^2 + y - 1 \neq 0$, aber $y = 2$, so ist wieder $x_1 = x_2$, außerdem gilt dann $x_3 = x_1$, $x_4 = x_1$ und $x_5 = x_1$; die Zahl x_1 ist dabei als reelle Zahl beliebig wählbar, wie eine Probe zeigt.

c) Ist $y^2 + y - 1 = 0$, d.h. $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, so sind x_1, x_2 beliebige reelle Zahlen; die Variablen x_3, x_4, x_5 können aus dem System (1) auf Grund der Beziehungen

$$x_3 = yx_2 - x_1$$
$$x_4 = yx_3 - x_2 = (y^2 - 1)x_2 - yx_1$$
$$x_5 = yx_1 - x_2$$

bestimmt werden.

Die Probe wird entweder durch Umkehrung des vorstehenden Lösungsweges oder durch Einsetzen ausgeführt. Die Durchführung der Lösung läßt sich abkürzen, wenn man aus dem gegebenen Gleichungssystem eine weitere Gleichung durch Addition aller fünf Gleichungen gewinnt.

5.

Zur Vereinfachung des Beweises multiplizieren wir zunächst die linke Seite der gegebenen Gleichung mit der Zahl
$2 \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{7} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{14}$.

Unter Verwendung der Formel $2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ erhalten wir dann

$$2\cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}\right)$$
$$= \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14}$$
$$= \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{14} .$$

Es ist daher $\cos \frac{\pi}{14} \left[2\left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}\right) - 1\right] = 0$.
Wegen $\cos \frac{\pi}{14} \neq 0$ folgt aus der vorstehenden Gleichung sofort die zu beweisende Gleichung.

6. (Lösung 1)

Die Aufgabe kann rein experimentell gelöst werden, d. h. man schreibt alle 5! = 120 Permutationen der Elemente A, B, C, D, E auf und streicht alle diejenigen Permutationen, die nicht den gestellten Bedingungen entsprechen. Als einzige Permutation bleibt dann

E D A C B (1)

übrig; sie ist tatsächlich die Lösung der Aufgabe (die Elemente C, B stehen an den vorhergesagten Plätzen, die Elementpaare DA, CB wurden richtig vorhergesagt). Für diese experimentelle Lösung benötigt man etwa eine halbe Stunde.

Lösung 2

Eine "mathematische" Lösung (angegeben vom Autor) stützt sich auf folgenden, leicht herleitbaren Hilfssatz:

Die Permutation XYZTU (5 Elemente) habe zur Permutation KLMNP folgende Beziehung: genau zwei Elemente aus der Menge {K;L;M;N;P} stehen auf dem gleichen Platz und genau zwei Elementpaare, die aus unmittelbar aufeinander folgenden Elementen bestehen (das könnten zwei der Paare KL, LM, MN, NP sein) bleiben erhalten. Dann ist entweder X = K und Y = L oder T = N und U = P.

Beweis des Hilfssatzes

Durch systematisches Probieren stellen wir fest, daß die Permutation X Y Z T U keine der nachstehend angedeuteten Formen haben kann:

K . M . . ; K . . N . ; K . . . P ; . L M . . ;

. L . N . ; . L . . P ; . . M N . ; . . M . P .

Es bleiben also nur die Permutationen übrig, bei denen die ersten beiden oder die letzten beiden Elemente auf ihren Plätzen bleiben.

Nach dem Hilfssatz hat in unserem Fall die gesuchte Permutation entweder die Form D A . . . oder die Form . . . C B . Im ersten Fall ergibt das die Möglichkeiten

D A C B E , D A C E B , D A B C E , D A E B C ,
D A B E C , D A E B C ,

von denen keine zutrifft, was sich durch Vergleich mit der ersten Voraussetzung ergibt. Im zweiten Fall gibt es folgende Möglichkeiten:

A D E C B , A E D C B , D A E C B , E A D C B ,
D E A C B , E D A C B .

Von diesen Permutationen entfallen offensichtlich die erste, zweite und fünfte; die dritte ist die vorhergesagte Permutation, die deshalb ebenfalls entfällt. Bei der vierten Permutation ist die Reihenfolge der Elemente nur beim Elementpaar CB erhalten geblieben, daher scheidet sie ebenfalls aus.

Es bleibt nur die sechste Permutation übrig, sie ist die richtige Lösung der Aufgabe. Dieser Lösungsweg stellt eine Kombination von Versuchen und deduktiven Erwägungen dar, er führt zu einem schnelleren Aussondern derjenigen Permutationen, die nicht den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

VI. IMO

1.

a) Voraussetzung: m sei eine natürliche Zahl
Behauptung: $2^{3m} - 1$ ist durch 7 teilbar
Beweis (Vollständige Induktion):
Für m = 0 ist $2^{3m} - 1 = 0 \equiv 0 \pmod 7$.
Für m = k (k sei eine natürliche Zahl; Induktionsvoraussetzung) sei $2^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.
Nun ist $2^{3(k+1)} = 2^{3k+3} = 2^{3k} \cdot 8 \equiv 1 \cdot 8 \equiv 1 \pmod 7$ und somit $2^{3(k+1)} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Ferner ist:

$$2^{3m+1} = 2^{3m} \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7,$$
$$2^{3m+2} = 2^{3m+1} \cdot 2 \equiv 4 \pmod 7.$$

Da sich jede natürliche Zahl n als 3m, 3m+1 oder 3m+2 schreiben läßt, sind alle Zahlen 2^n erfaßt.
Folglich ist für alle n = 3m und nur für diese die Zahl 2^n-1 durch 7 teilbar.

b) Für alle natürlichen Zahlen läßt 2^n bei Division durch 7 den Rest 1, 2 oder 4, niemals aber den Rest $-1 \equiv 6 \pmod 7$. Also ist $2^n + 1$ niemals durch 7 teilbar.

2.

Es seien a, b, c die Maßzahlen von den Seiten eines Dreiecks, also a > 0, b > 0, c > 0. Es soll gelten:

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Annahme: $a \geq b \geq c$ mit $a = b + m$ und
$c = b - n$, wobei $m, n \geq 0$.

Es müßte dann gelten:

$$(b + m)^2(b - m - n) + b^2(b + m - n) + (b - n)^2(b + m + n)$$
$$\leq 3(b + m)\cdot b(b - n)$$

oder
$$b(m^2 + mn + n^2) + (m + n)(m^2 - n^2) \geqq 0.$$
Für $m = n = 0$ besteht Gleichheit und für $m \geqq n$ ist die Ungleichung sicher erfüllt.

Der Fall $m < n$ ist zu untersuchen.

Für jedes Dreieck gilt $a - c < b$ oder $m + n < b$.

Der oben erhaltene Ausdruck wird umgeformt in
$$b(2m^2 + mn) + b(n^2 - m^2) - (m + n)(n^2 - m^2) \geqq 0$$
oder
$$(n^2 - m^2)[b - (m + n)] + b(2\,m^2 + mn) \geqq 0.$$
Das ist für $m \leqq n$ sicher richtig.

Da ich aus der zuletzt erhaltenen Ungleichung auch die behauptete Ungleichung erhalte, ist der Beweis erbracht.

Bemerkung: Die Ungleichung gilt für beliebige positive Zahlen a, b, c.

3.

Die Dreiecke ABC, AB_1C_1, A_2BC_2 und A_3B_3C sind untereinander ähnlich, da sie nach Voraussetzung (Parallelverschiebung) in den Winkeln übereinstimmen.

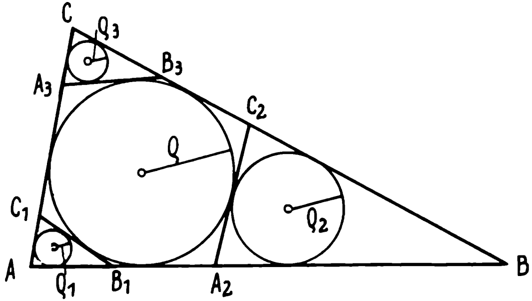


Abb. 1

Es ist $F = \varrho \cdot s$ mit $s = \frac{U}{2} = \frac{a+b+c}{2}$, also $\varrho = \frac{2F}{U}$.

Nach dem Strahlensatz ist
$$(h_c - 2\varrho) : h_c = c' : c\,,$$
wobei $\overline{A_3B_3} = c'$ gilt, und

$$c' : c = \varrho_3 : \varrho ,$$

wobei ϱ_3 Inkreisradius im Dreieck A_3B_3C ist.

Also gilt $\varrho_3 = \varrho \cdot \dfrac{h_c - 2\varrho}{h_c}$.

Analog bestimmt man die Inkreisradien ϱ_1 (für $\triangle AB_1C_1$) und ϱ_2 (für $\triangle A_2BC_2$).

Nun gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
A &= \pi\varrho_1^2 + \pi\varrho_2^2 + \pi\varrho_3^2 + \pi\varrho^2 \\
&= \pi\varrho^2\left[\left(\frac{h_a - 2\varrho}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_b - 2\varrho}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{h_c - 2\varrho}{h_c}\right)^2 + 1\right] \\
&= \pi\varrho^2\left[4 - 4\varrho\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + 4\varrho^2\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right)\right] \\
&= 4\pi\varrho^2\left[1 - \frac{2F}{U}\left(\frac{a}{2F} + \frac{b}{2F} + \frac{c}{2F}\right) + \frac{4F^2}{U^2}\left(\frac{a^2}{4F^2} + \frac{b^2}{4F^2} + \frac{c^2}{4F^2}\right)\right] \\
&= 4\pi\,\frac{4F^2}{U^2}\left(1 - \frac{a+b+c}{U} + \frac{a^2+b^2+c^2}{U^2}\right) \\
&= \frac{16\pi F^2}{U^4}\,(a^2 + b^2 + c^2) \\
&= \frac{\pi F^2}{s^4}\,(a^2 + b^2 + c^2) \\
&= \pi\,\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}\,(a^2 + b^2 + c^2) .
\end{aligned}$$

<u>4.</u>

Man beginne mit einem Wissenschaftler und nenne ihn X. Er schreibt an 16 andere, folglich an mindestens 6 über dasselbe Thema, das sei o.B. d. A. Thema 1.

Würden von diesen sechs Wissenschaftlern auch nur zwei untereinander über Thema 1 schreiben, so wäre die Behauptung schon bewiesen.

Nehmen wir also an, alle behandeln Thema 2 oder 3. Nun greife ich aus diesen 6 Wissenschaftlern wieder einen heraus und nenne ihn Y. Er schreibt an 5 von diesen 6, und zwar an mindestens 3 davon zum selben Thema (es sei o.B.d.A. Thema 2). Es bleiben also diese 3 Wissenschaftler A, B, C übrig. Sie schreiben sich untereinander, aber für sie ist Thema 2 nicht mehr möglich (wenn man annimmt, daß es keine derartige Dreiergruppe gibt), weil sonst eine Gruppe Y, A, B oder Y, A, C oder Y, B, C nur über Thema 2 schreiben würde. Also müßten alle zum Thema 3 schreiben. Damit ist aber die Behauptung bewiesen. Es gibt mithin stets mindestens ein solches Tripel.

5.

P_1, P_2, ... P_5 seien die Punkte. Dann gibt es insgesamt

a) $\binom{5}{2}$ = 10 paarweise Verbindungsstrecken.

Gleichzeitig entstehen

b) $\binom{5}{2}$ = 10 Dreiecke.

Durch paarweises Verbinden von 4 Punkten erhalten wir

c) $\binom{4}{2}$ = 6 Verbindungsstrecken.

Daraus folgt: Von jedem Punkte P_i $(i = 1, \dots 5)$ gibt es 6 Lote, also insgesamt 30 Lote. Diese Lote könnten maximal

d) $\binom{30}{2}$ = 435 Schnittpunkte miteinander haben.

Nun gehören aber zu jeder der 10 Verbindungsstrecken 3 Lote, die, da sie alle auf der gleichen Geraden senkrecht stehen, zueinander parallel sind. Sie haben also keinen Schnittpunkt miteinander. Dadurch entfallen 30 Schnittpunkte. Außerdem schneiden sich je 3 Lote innerhalb der 10 Dreiecke als Höhen im Höhenschnittpunkt. Es entfallen also weitere 20 Punkte. Von den 30 Loten entfallen aber laut Voraussetzung noch die Schnittpunkte, die mit den P_i identisch sind. Da sich in jedem P_i 6 Lote schneiden, handelt es sich um insgesamt 75 Schnittpunkte.

Die Höchstzahl aller Schnittpunkte beträgt also

$$435 - 30 - 20 - 75 = 310 .$$

6a

Behauptung:

Der Schnittpunkt B_1 der Ebene ADC mit der Parallelen zu $\overline{DD_1}$ durch B ist identisch mit dem Punkt B', in dem sich diese Parallele mit der durch D und M_c bestimmten Geraden schneidet, wobei M_c der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ ist.

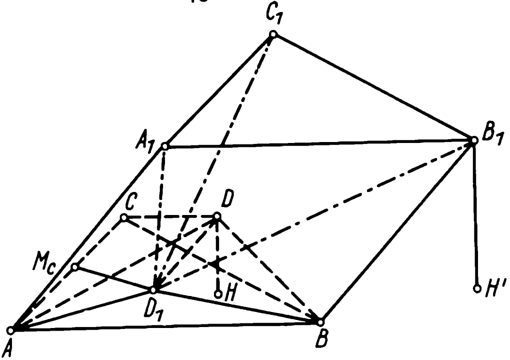


Abb.2

Beweis:
Die Punkte M_c, D_1 und D bestimmen eine Ebene. Weil $\overline{D_1D} \parallel \overline{BB_1}$ und B auf der Verlängerung von $\overline{M_cD_1}$ liegt, liegt auch $\overline{BB_1}$ (als parallelverschobene Gerade) in der Ebene M_cD_1D.

Es liegen also M_cD und BB_1 in der Ebene M_cDD_1, ferner M_cD in der Ebene ADC.

Der Schnittpunkt von M_cD und BB_1 sei B'. Da eine Ebene (hier ADC) mit einer Geraden (hier BB_1) im allgemeinen einen und nur einen Punkt gemeinsam hat, ist der Schnittpunkt B' identisch mit B_1.

Weil $\overline{D_1D} \parallel \overline{B_1B}$ ist, folgt nach dem Strahlensatz:

$\overline{B_1B} : \overline{D_1D} = \overline{BM_c} : \overline{D_1M_c} = 3 : 1$ (D_1 ist Schwerpunkt von ABC).

Also ist $\overline{B_1B} = 3\ \overline{D_1D}$.

Analog folgt für C_1 und A_1:
$\overline{B_1B} = \overline{A_1A} = \overline{C_1C} = 3\ \overline{D_1D}$.

Da außerdem $\overline{C_1C} \parallel \overline{A_1A} \parallel \overline{B_1B} \parallel \overline{D_1D}$ ist, sind auch die Lote von C_1, B_1 und A_1 auf die Ebene ABC gleich lang.

Also ist Ebene ABC $\parallel$ Ebene $A_1B_1C_1$. Ein Bündel von 3 parallelen Geraden schneidet aber aus 2 parallelen Ebenen kongruente Dreiecke heraus.
Folglich ist $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Das Lot von B_1 auf ABC habe den Fußpunkt H'. Das Lot von D auf ABC habe den Fußpunkt H.

Es ist $\overline{\sphericalangle D_1HD} = \overline{\sphericalangle BH'B_1} = 90^0$ (Lot)

$\overline{\sphericalangle D_1DH} = \overline{\sphericalangle BB_1H'}$, weil $D_1D \parallel B_1B$ und $DH \parallel B_1H'$.

Also ist $\Delta D_1HD \sim \Delta BH'B_1$

und daher $\overline{DH} : \overline{B_1H'} = \overline{D_1D} : \overline{B_1B} = 1 : 3.$

Es ist aber $\overline{B_1H'}$ die Höhe des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ zur Fläche $A_1B_1C_1$ und $\overline{DH}$ die Höhe des Tetraeders ABCD zur Fläche ABC. Folglich ist, da $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ ist,

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3 \cdot V_{ABCD}, \quad \text{q.e.d.}$$

<u>6b</u>

Die Gerade AD_1 schneide BC im Punkt A', die Gerade CD_1 schneide AB im Punkt C'. π bezeichne die Ebene durch die Punkte A, B, die parallel zu DD_1 ist, α bezeichne die Ebene durch die Punkte B, C, D.

Auf Grund ihrer Einführung liegen die Punkte A, A_1, D, D_1, A' in einer Ebene, die Punkte A_1, D, A' in der Ebene α .

A_1 ist der Schnittpunkt von A'D und AA_1. Also ist BA_1 die Schnittgerade von π und α.

Die Gerade DC ist nicht parallel zu π und schneide π im Punkt P. Da C, D, D_1, C', P in einer Ebene liegen und $DD_1 \parallel \pi$ ist, gilt $DD_1 \parallel PC'$.

Die Gerade AP liegt mit A, C, D in einer Ebene. Somit sind A, P, B_1 Punkte einer Geraden. C'D liegt mit A, B, D in einer Ebene, also sind C', D, C_1 Punkte einer Geraden. C'P schneidet A_1B_1 in einem Punkt, der C'' heiße. D_1D schneidet $C''C_1$ in einem Punkt, der D_2 heiße. Der Schnittpunkt von D_1D_2 und C_1P existiert und wird mit D_3 bezeichnet. Das Viereck ABB_1A_1 ist ein Trapez, P der Schnittpunkt seiner Diagonalen.

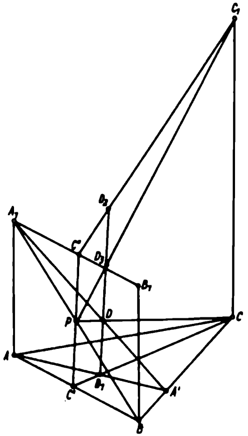


Abb. 3

Wegen $C'C'' \parallel AA_1$ ist $\overline{C'P} = \overline{PC''}$. Im Trapez $C'CC_1C''$ ist daher $\overline{D_1D} = \overline{DD_3} = \overline{D_3D_2}$.

Also gilt $\overline{D_1D_2} = 3\ \overline{DD_1}$.

Das Volumen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ ist gleich der Summe der Volumen der Tetraeder $A_1B_1D_2D_1$, $B_1C_1D_2D_1$, $C_1A_1D_2D_1$. Diese drei Tetraeder sind volumengleich den Tetraedern ABD_1D_2, BCD_1D_2, CAD_1D_2. Folglich sind $A_1B_1C_1D_1$ und $ABCD_2$ volumengleich. Wegen $\overline{D_1D_2} = 3\ \overline{DD_1}$ ist das Volumen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ das Dreifache des Volumens des Tetraeders ABCD.

VII. IMO

1., Lösung 1

Setzen wir $\left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| = 2y,$

so erhalten wir $\cos x \leqq y \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Es ist

$$2\cdot y = \left|\,|\sin x + \cos x| - |\sin x - \cos x|\,\right| ,$$

$$2\cdot y = \begin{cases} |2 \sin x| & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} < x \leqq \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4} < x \leqq 2\pi, \\ |2 \cos x| & \text{für } \frac{\pi}{4} < x \leqq \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4} < x \leqq \frac{7\pi}{4} . \end{cases}$$

Daher ergeben sich durch Vergleich alle reellen Zahlen x mit

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}$$

als Lösungen.

1., Lösung 2

Eine notwendige Bedingung dafür, daß in dem Intervall $[0;2\pi]$ die Ungleichungen

$$2 \cos x \leqq \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2} \qquad (1)$$

erfüllt sind, ist die Bedingung

$$2 \cos x \leqq \sqrt{2},$$

d. h.

$$\cos x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

wobei letzteres genau dann gilt, wenn

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4} . \qquad (2)$$

1. Wir untersuchen zunächst die Ungleichung

$$2 \cos x \leqq \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right|. \qquad (3)$$

Für alle x, für die $\cos 2x \leqq 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \cos 2x &= -|\cos 2x| , \\ 2\cos^2 x - 1 &= -|\cos 2x| , \\ 4\cos^2 x &= 2 - 2|\cos 2x| \\ &= 2 - 2\sqrt{1-\sin^2 2x} = 2 - 2\sqrt{(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)} \\ &= \left(\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right)^2 , \end{aligned}$$

also

$$2\cos x \leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| ,$$

wobei für $\cos x \geqq 0$ das Gleichheitszeichen und für $\cos x < 0$ das Kleinerzeichen gilt. Die Ungleichung (3) ist also erfüllt, wenn $\cos 2x \leqq 0$, d. h. wenn

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi$$

gilt. Sie ist aber auch erfüllt, wenn $\cos x \leqq 0$, d. h. wenn

$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$$

ist. Daraus folgt, daß die Bedingung

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi$$

hinreichend dafür ist, daß die Ungleichung (3) erfüllt ist.

2. Wir untersuchen nun die Ungleichung

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2} . \tag{4}$$

Für alle reellen x gilt $\quad -|\cos 2x| \leqq 0,$
also $\quad 2 - 2|\cos 2x| \leqq 2.$

Nun ist wie oben

$$2 - 2|\cos 2x| = \left(\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right)^2$$

Also gilt für alle reellen x die Ungleichung (4):

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2} .$$

3. Aus 1 und 2 ergibt sich in Verbindung mit der Bedingung (2), daß die Ungleichungen (1) im Intervall $[0;2\pi]$ genau dann gelten, wenn die Bedingung

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7}{4}\pi$$

erfüllt ist.

2., Lösung 1 (László Lovász, Budapest)

Angenommen, es existiere eine Lösung (x_1, x_2, x_3), bei der nicht alle x_i gleich Null sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dann annehmen, daß

$$|x_1| > 0 \quad \text{und} \quad |x_1| \geqq |x_2| \geqq |x_3|$$

ist. Da $|a + b| \geqq |a| - |b|$ für alle reellen Zahlen a, b gilt, folgt aus

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

zunächst

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| \geqq |a_{11}x_1 + a_{12}x_2| - |a_{13}x_3|$$

$$\geqq |a_{11}x_1| - |a_{12}x_2| - |a_{13}x_3| = a_{11}|x_1| + a_{12}|x_2| + a_{13}|x_3| .$$

Nun ist wegen $a_{12} < 0$ und $|x_2| \leqq |x_1|$

$$a_{12}|x_2| \geqq a_{12}|x_1| ;$$

ferner ist wegen $a_{13} < 0$ und $|x_3| \leqq |x_1|$

$$a_{13}|x_3| \geqq a_{13}|x_1| .$$

Daraus folgt

$$0 \geqq a_{11}|x_1| + a_{12}|x_2| + a_{13}|x_3| \geqq (a_{11} + a_{12} + a_{13})\,|x_1|$$

und hieraus, da $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ und $|x_1| > 0$ ist,

$$0 \geqq (a_{11} + a_{12} + a_{13})\,|x_1| > 0 .$$

Das ist aber ein Widerspruch. Daher hat das Gleichungssystem nur die Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 .$$

Bemerkung:

Dieser Beweis läßt sich leicht auf die folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung übertragen: Gegeben ist ein Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dessen Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $a_{ii} > 0$ für alle i,
(b) $a_{ik} < 0$ für $i \neq k$,

(c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0$ für alle i.

Es ist zu beweisen, daß $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Angenommen, es existiere eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bei der nicht alle x_i gleich Null sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dann wieder annehmen:

$$|x_1| > 0 \quad \text{und} \quad |x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n|.$$

Dann ist
$$\begin{aligned} 0 &= |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n| \\ &\geqq |a_{11}x_1| - |a_{12}x_2| - \ldots - |a_{1n}x_n| \\ &= a_{11}|x_1| + a_{12}|x_2| + \ldots + a_{1n}|x_n| \\ &\geqq (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})|x_1|, \end{aligned}$$

da $a_{1i}|x_i| \geqq a_{1i}|x_1|$ für $i = 2, 3, \ldots, n$ gilt. Nun ist auf Grund der Voraussetzung

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} > 0 \quad \text{und} \quad |x_1| > 0,$$

also
$$0 \geqq (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})|x_1| > 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch. Daher hat das Gleichungssystem nur die Lösung

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

<u>2., Lösung 2</u> (Jósefz Pelikán, Budapest)

Eine ebenso elegante Lösung fand Jósefz Pelikán, indem er für eine angenommene Lösung (x_1, x_2, x_3) die folgenden beiden Fälle untersuchte:

1. Eine der Zahlen x_i ist positiv.
2. Eine der Zahlen x_i ist negativ.

1. In diesem Falle kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x_1 > 0, \quad x_1 \geqq x_2 \quad \text{und} \quad x_1 \geqq x_3$$

annehmen. Dann ist wegen $a_{12}x_2 \geqq a_{12}x_1$ und $a_{13}x_3 \geqq a_{12}x_1$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geqq (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 > 0,$$

da auf Grund der Voraussetzung

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0 \quad \text{und} \quad x_1 > 0$$

gilt. Das ist aber ein Widerspruch, also kann der Fall 1 nicht eintreten.

2. In diesem Falle kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x_1 < 0, \quad x_1 \leqq x_2 \quad \text{und} \quad x_1 \leqq x_3$$

annehmen. Analog wie oben erhält man

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$= -\left[a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + a_{13}(-x_3)\right] < 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, also kann der Fall 2 nicht eintreten. Aus 1 und 2 folgt, daß $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Auch dieses Beweisverfahren läßt sich leicht auf den Fall von n Gleichungen verallgemeinern.

3.

Es sei x der Abstand der Ebene ε von der Geraden CD. Die Schnittfigur der Ebene ε mit dem Tetraeder ABCD ist das Parallelogramm MLNR (vgl. Abb. 1); denn es ist auf Grund der Voraussetzung

$$ML \parallel AB, \quad RN \parallel AB, \quad \text{also} \quad ML \parallel RN$$

und

$$NL \parallel CD, \quad MR \parallel CD, \quad \text{also} \quad NL \parallel MR.$$

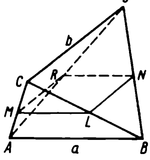


Abb. 1

Nun erhält man durch Anwendung des Strahlensatzes

$$\overline{ML} : a = x : d, \quad \text{also} \quad \overline{ML} = \frac{ax}{d}$$

und

$$\overline{MR} : b = (d - x) : d, \quad \text{also} \quad \overline{MR} = \frac{b(d - x)}{d} .$$

Da der Winkel zwischen den Seiten ML und MR des Parallelogramms MLNR die Größe ω hat, ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms

$$S(x) = \overline{ML} \cdot \overline{MR} \sin\omega = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d - x)}{d} \sin\omega . \qquad (1)$$

Entsprechend gilt für den Flächeninhalt S(z) eines Parallelogramms, das durch eine im Abstand z von der Geraden CD befindlichen, zu der Ebene ε parallelen Ebene abgeschnitten wird,

$$S(z) = \frac{az}{d} \cdot \frac{b(d - z)}{d} \sin\omega . \qquad (2)$$

Man erhält daher den Rauminhalt des durch die Ebene ε abgeschnittenen Teilkörpers MLNRCD durch Integration:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^x S(z)\, dz = \int_0^x \frac{az}{d} \cdot \frac{b(d - z)}{d} \sin\omega\, dz \\ &= \int_0^x \left(\frac{ab}{d} z - \frac{ab}{d^2} z^2\right) \sin\omega\, dz = \left(\frac{ab}{2d} x^2 - \frac{ab}{3d^2} x^3\right) \sin\omega \\ &= \frac{abx^2}{6d^2} (3d - 2x) \sin\omega \end{aligned} \qquad (3)$$

Bezeichnet man mit y den Abstand der Ebene ε von der Geraden AB, so erhält man analog den Rauminhalt des zweiten durch die Ebene ε abgeschnittenen Teilkörpers MLNRAB;

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^y \frac{a(d - z)}{d} \cdot \frac{bz}{d} \sin\omega\, dz = \left(\frac{ab}{2d} y^2 - \frac{ab}{3d^2} y^3\right) \sin\omega \\ &= \frac{aby^2}{6d^2} (3d - 2y) \sin\omega \end{aligned} \qquad (4)$$

Daher ist

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{y^2(3d - 2y)}{x^2(3d - 2x)} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{3 - \frac{2y}{d}}{3 - \frac{2x}{d}} . \qquad (5)$$

Nun ist auf Grund der Voraussetzung

$$\frac{y}{x} = k, \quad \text{d. h.} \quad y = kx ,$$

und wegen $x + y = d$

$$x + kx = d, \quad \text{also} \quad \frac{x}{d} = \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{d} = \frac{k}{k+1} .$$

Hieraus folgt

$$\frac{V_2}{V_1} = k^2 \frac{3 - \frac{2k}{k+1}}{3 - \frac{2}{k+1}} = k^2 \frac{k+3}{3k+1} .$$

Das gesuchte Verhältnis der Rauminhalte beider Teile des Tetraeders ist daher

$$\frac{V_2}{V_1} = k^2 \frac{k+3}{3k+1} . \tag{6}$$

Zum Abschluß wird noch darauf hingewiesen, daß dieses Verhältnis nur von k abhängt und nicht von a, b, d, ω.

<u>4.</u> (Peter Enskonatus, Berlin)

Die Lösung von Peter Enskonatus zeichnet sich dadurch aus, daß aus dem gegebenen System die Gleichungen

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1| = |x_3 - 1| = |x_4 - 1|$$

hergeleitet werden und daß man dann durch Fallunterscheidung zum Ziel kommt. Wir geben im folgenden diese Lösung mit einigen geringfügigen Veränderungen und Vereinfachungen wieder.

Es sei angenommen, daß die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \tag{1}$$
$$x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \tag{2}$$
$$x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \tag{3}$$
$$x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \tag{4}$$

Dann gilt $x_i \neq 0$ für alle i = 1, 2, 3, 4; denn wäre z. B. $x_1 = 0$, so würde aus (2), (3) und (4)

$$x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

folgen, was im Widerspruch zu (1) steht.

Nun erhält man aus (1)

$$x_3x_4 = \frac{2 - x_1}{x_2}$$

und aus (2)

$$x_3x_4 = \frac{2 - x_2}{x_1}$$

Daher ist

$$\frac{2 - x_1}{x_2} = \frac{2 - x_2}{x_1} ,$$

$$2x_1 - x_1^2 = 2x_2 - x_2^2 ,$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 ,$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1| .$$

Durch zyklische Vertauschung der Variablen erhält man

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1| = |x_3 - 1| = |x_4 - 1| . \qquad (5)$$

Es ergeben sich jetzt die folgenden, wesentlich verschiedenen Fälle:

1. Für alle x_i ist $x_i \geq 1$;
2. für genau drei der x_i ist $x_i \geq 1$;
3. für genau zwei der x_i ist $x_i \geq 1$;
4. für genau eins der x_i ist $x_i \geq 1$;
5. für alle x_i ist $x_i < 1$.

1. In diesem Falle ist wegen (5) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Aus (1) folgt

$$x_1 + x_1^3 = 2 .$$

$$x_1^3 + x_1 - 2 = 0 ,$$

$$x_1^3 - x_1^2 + x_1^2 - x_1 + 2x_1 - 2 = 0 ,$$

$$(x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0 .$$

Nun ist stets

$$x_1^2 + x_1 + 2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 ,$$

daher folgt

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 .$$

Da hierfür die Gleichungen (1) bis (4) erfüllt sind, erhalten wir das erste Lösungsquadrupel (1, 1, 1, 1).

2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man in diesem Falle

$$x_1 < 1, \quad x_2 \geqq 1, \quad x_3 \geqq 1, \quad x_4 \geqq 1$$

annehmen. Man erhält aus (5) die Gleichungen

$$-x_1 + 1 = x_2 - 1 = x_3 - 1 = x_4 - 1 .$$

Daraus folgt

$$x_2 = x_3 = x_4 \quad \text{und} \quad x_1 = 2 - x_2 .$$

Wegen (2) ist mithin

$$2 - x_2 + x_2^3 = 2 ,$$
$$x_2(x_2^2 - 1) = 0 .$$

Daraus folgt $x_2 = 1$ wegen $x_2 \geqq 1 > 0$, also

$$x_1 = 2 - x_2 = 1 ;$$

das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung $x_1 < 1$.

3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man in diesem Falle

$$x_1 < 1, \quad x_2 < 1, \quad x_3 \geqq 1, \quad x_4 \geqq 1$$

annehmen, so daß

$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1 = x_3 - 1 = x_4 - 1$$

ist. Daraus folgt

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad x_3 = x_4 = 2 - x_1,$$

also wegen (3)

$$2 - x_1 + x_1^2(2 - x_1) = 2 ,$$
$$x_1(x_1^2 - 2x_1 + 1) = 0 ,$$
$$x_1(x_1 - 1)^2 = 0 .$$

Daraus folgt wegen $x_1 \neq 0$ $x_1 = 1$, was der obigen Voraussetzung $x_1 < 1$ widerspricht. Wir erhalten also auch in diesem Falle keine Lösungen.

4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man in diesem

Falle
$$x_1 < 1, \quad x_2 < 1, \quad x_3 < 1, \quad x_4 \geq 1$$
annehmen, so daß
$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1 = -x_3 + 1 = x_4 - 1$$
ist. Daraus folgt
$$x_1 = x_2 = x_3 \quad \text{und} \quad x_4 = 2 - x_1 ,$$
also wegen (4)
$$2 - x_1 + x_1^3 = 2 ,$$
$$x_1(x_1^2 - 1) = 0 ,$$
und hieraus $x_1 = -1$ wegen $x_1 \neq 0$ und $x_1 < 1$.

Daraus folgt
$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \quad x_4 = 2 - x_1 = 3 .$$
Da hierfür die Gleichungen (1) bis (4) erfüllt sind, erhalten wir das Lösungsquadrupel
$$(-1, -1, -1, 3)$$
und durch zyklische Vertauschung die weiteren Lösungsquadrupel
$$(-1, -1, 3, -1),$$
$$(-1, 3, -1, -1),$$
$$(3, -1, -1, -1).$$

5. In diesem Falle erhält man aus (5)
$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$
und weiter wie im Falle (1)
$$x_1 = 1 ,$$
was der Voraussetzung $x_1 < 1$ widerspricht.

Man erhält also Fall (1) und (4) nur die folgenden Lösungsquadrupel:
$$(1, 1, 1, 1),$$
$$(-1, -1, -1, 3),$$
$$(-1, -1, 3, -1),$$
$$(-1, 3, -1, -1),$$
$$(3, -1, -1, -1).$$

5. (Wolfgang Klamt, Berlin)

Wolfgang Klamt löste die Aufgabe elementargeometrisch und benutzte dabei den Satz von MENELAOS. Wir geben seine Lösung mit einigen geringfügigen Änderungen wieder.

a) Es seien (vgl. Abb. 2)

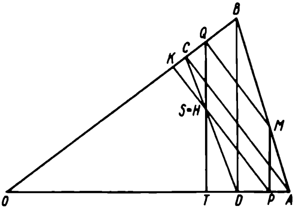


Abb. 2

$\triangle$ OAB das gegebene Dreieck,

M ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$,

P und Q die Fußpunkte der von M auf $\overline{OA}$ bzw. $\overline{OB}$ gefällten Lote,

C und D die Fußpunkte der von A auf $\overline{OB}$ bzw. von B auf $\overline{OA}$ gefällten Lote,

K der Fußpunkt des von P auf $\overline{OB}$ gefällten Lotes,

S der Schnittpunkt von KP und CD

und schließlich T der Schnittpunkt der Geraden QS und OA.

Es soll zunächst nachgewiesen werden, daß QT senkrecht auf der Geraden OA steht und damit S = H der zu konstruierende Höhenschnittpunkt des Dreiecks OPQ ist. Da die Gerade KP die Seiten des Dreiecks OCD bzw. deren Verlängerungen in den Punkten K, S und P schneidet, ist nach dem Satz von MENELAOS

$$\overline{DS} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{OP} = \overline{SC} \cdot \overline{KO} \cdot \overline{PD} .$$

Daraus folgt

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{KO}}{\overline{CK}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{OP}}$$

und, da nach dem Strahlensatz $\dfrac{\overline{KO}}{\overline{OK}} = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{PA}}$ ist,

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} .$$

Nun ist ferner nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}\,, \quad \text{also} \quad \frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}\,.$$

Hieraus folgt wegen der Umkehrung des Strahlensatzes

$QT \parallel BD$, also $QT \perp OA$, w.z.b.w.

Der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks OPQ liegt also auf der Geraden CD. Vermöge der Konstruktion wird jedem Punkt M der Strecke $\overline{AB}$ genau ein Punkt H der Strecke $\overline{CD}$ zugeordnet. Andererseits entspricht jedem Punkt der Strecke $\overline{CD}$ genau ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$; d.h. es besteht eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte der Strecke $\overline{AB}$ auf die Menge der Punkte der Strecke $\overline{CD}$.

Der gesuchte geometrische Ort der Punkte H ist also im Falle a) die Strecke CD.

b) Es seien (vgl. Abb. 3)

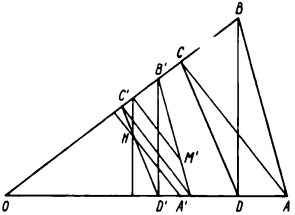


Abb. 3

A' ein innerer Punkt der Strecke $\overline{OA}$ und B' ein innerer Punkt der Strecke $\overline{OB}$,

ferner sei $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.

C' und D' seien die Fußpunkte der von A' auf $\overline{OB}$ bzw. von B' auf $\overline{OA}$ gefällten Lote.

Dann wird analog wie im Fall a) vermöge der durch die Aufgabe vorgeschriebenen Konstruktion jedem inneren Punkt der Strecke $\overline{A'B'}$ genau ein innerer Punkt der Strecke $\overline{C'D'}$ zugeordnet. Andererseits entspricht jedem inneren Punkt der Strecke $\overline{C'D'}$ genau ein innerer Punkt der Strecke $\overline{A'B'}$, d. h. es besteht eine eineindeutige Abbildung der Menge der inneren Punkte der Strecke $\overline{A'B'}$ auf die Menge der inneren Punkte der Strecke $\overline{C'D'}$.

Betrachtet man nun die Schar der zu $\overline{AB}$ parallelen Strecken $A'B'$, wo A' und B' innere Punkte der Strecken $\overline{OA}$ bzw. $\overline{OB}$ sind, so besteht wieder eine eineindeutige Abbildung dieser Schar auf die Schar der zu $\overline{CD}$ parallelen Strecken $\overline{C'D'}$, wo C' und D' innere Punkte der Strecken $\overline{OC}$ bzw. $\overline{OD}$ sind; d. h. die Menge der inneren Punkte des Dreiecks OAB wird eineindeutig auf die Menge der inneren Punkte des Dreiecks OCD abgebildet. (Zwei verschiedenen Strecken $\overline{C'D'}$ und $\overline{C''D''}$ entsprechen nämlich, wie sich aus der Konstruktion ergibt, auch zwei verschiedene Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{A''B''}$.)

Der gesuchte geometrische Ort der Punkte H ist also im Fall b) das Innere des Dreiecks ODC.

6. (Lösungsvorschlag Polen)

Nehmen wir an, daß von einem Punkte A des gegebenen Systems drei Durchmesser $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ ausgehen. Die Punkte B, C, D liegen dann auf dem Kreise K_1 mit dem Zentrum A und dem Radius d. Alle übrigen Punkte des Systems liegen auf K_1 oder im Inneren von K_1. Da jede der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ höchstens gleich d ist, so befinden sich die Punkte B, C, D auf einem Bogen von K_1, der höchstens 60° mißt.

Es liege etwa der Punkt C innerhalb des Bogens $\overset{\frown}{BD}$, wobei $\overset{\frown}{BD} \leqq \frac{\pi}{3}$ d gilt. Es sei K_2 der Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius $\overline{CA}$ = d. Alle Durchmesser des gegebenen Punktsystems, die von C ausgehen, müssen ihre Endpunkte auf demjenigen Bogen $\overset{\frown}{MN}$ von K_2 haben, der in der Kreisfläche von K_1 liegt. Da aber jeder Punkt des Bogens $\overset{\frown}{MN}$ mit Ausnahme von A von einem der Punkte B, D weiter als um d entfernt ist, so ist $\overline{CA}$ der einzige Durchmesser aus C.

Somit haben wir festgestellt, daß für ein gegebenes System von n Punkten nur zwei Möglichkeiten bestehen: Entweder existiert in dem System ein Punkt, von dem höchstens ein Durchmesser ausgeht, oder es gehen von jedem Punkte genau zwei Durchmesser aus.

Jetzt ist der gewünschte Satz leicht durch vollständige Induktion zu beweisen. Für n = 3 ist der Satz offenbar richtig. Wir zeigen, daß aus der Gültigkeit des Satzes für k Punkte (mit einer natürlichen Zahl $k \geqq 3$) seine Gültigkeit für k + 1 Punkte folgt.

Wir betrachten ein System von k + 1 Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$. Gibt es darin einen Punkt, etwa A_1, von dem kein oder nur ein Durchmesser ausgeht, so ist die Anzahl der Durchmesser von $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ höchstens um 1 größer als diejenige von $A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}$, d.h. höchstens gleich k+1.

Anmerkung: Man beachte dabei, daß alle Durchmesser des Systems $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$, die nicht von A_1 ausgehen, Durchmesser von $A_2, \ldots A_{k+1}$ sind.

Gibt es keinen solchen Punkt, so gehen von jedem der Punkte A_i genau zwei Durchmesser aus, ihre Anzahl ist somit

$$\frac{2(k+1)}{2} = k + 1.$$

VIII. IMO

1.

Es seien x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BC} und x_{ABC} die Anzahlen der Schüler, welche die jeweils im Index angegebenen Aufgaben und nur diese gelöst haben. Aus den im Text enthaltenen Aussagen folgen dann die vier Gleichungen

$$x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \qquad (1)$$

$$x_B - 2x_C - x_{BC} = 0 \qquad (2)$$

$$-x_A + x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = -1 \qquad (3)$$

$$x_A - x_B - x_C = 0 \,. \qquad (4)$$

Uns interessieren nur nichtnegative ganzzahlige Lösungen dieses Systems.

Von (1) subtrahieren wir Gleichung (3) und erhalten

$$2x_A + x_B + x_C + x_{BC} = 26 \,. \qquad (5)$$

Zu (5) addieren wir (2) und subtrahieren die mit 2 multiplizierte Gleichung (4). Das ergibt

$$4x_B + x_C = 26 \qquad \text{oder} \qquad x_B = \frac{26 - x_C}{4} \qquad (6)$$

Aus (2), (4) und (5) folgen die Ungleichungen

$$2x_C \leqq x_B \,; \qquad x_B \leqq x_A \,; \qquad x_A \leqq 13 \qquad (7)$$

und damit $\quad x_C \leqq 6 \,.$ $\qquad (8)$

Aus (6) und (8) ist ersichtlich, daß für x_C; x_B nur die Lösungspaare 6; 5 und 2;6 in Frage kommen. Das erste Paar widerspricht jedoch der ersten der Ungleichungen (7), es bleibt $x_B = 6$; $x_C = 2$. Für diese Werte ergibt das Gleichungssystem (1) bis (4)

$$x_A = 8; \quad x_{BC} = 2; \quad x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = 7,$$

woraus ersichtlich ist, daß die einzige mögliche Lösung $x_B = 6$ tatsächlich eine Lösung ist. Sechs Schüler haben nur die Aufgabe B gelöst.

2.

Zunächst leiten wir aus

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a \cdot \tan\alpha + b \cdot \tan\beta) \qquad (9)$$

eine Gleichung her, die nur α und β enthält, und beweisen dann, daß aus dieser Gleichung $\alpha = \beta$ folgt. Für die Winkel des Dreiecks gilt $0 < \alpha; \beta; \gamma < \pi$. Im weiteren ist also nur dieser Bereich zu berücksichtigen, wobei außerdem, bedingt durch (9), α und β verschieden von $\frac{\pi}{2}$ sein müssen. Wegen

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

erhalten wir aus (9)

$$\sin\alpha + \sin\beta = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right).$$

Weiter gilt (aus $0 < \alpha; \beta < \pi$ folgt $\alpha - \beta \neq \pi$)

$$\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta},$$

also

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = (\cos\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin^2\beta + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin^2\alpha,$$

woraus sich schließlich die Behauptung ergibt gemäß:

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta$$

$$(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)^2 = 0$$

$$\sin(\alpha-\beta) = 0$$

$$\alpha = \beta. \qquad \text{q. e. d.}$$

3.

<u>Hilfssatz 1:</u> Die Summe der Lote, die von einem beliebigen Punkt P im Inneren eines regelmäßigen Tetraeders A'B'C'D' auf dessen Begrenzungsflächen gefällt werden, ist gleich der Höhe h des Tetraeders.

<u>Beweis:</u> Die Summe der Volumina der vier Tetraeder A'B'C'P, A'B'D'P, A'C'D'P und B'C'D'P ist gleich dem Volumen $V = \frac{1}{3}Gh$ des Tetraeders A'B'C'D' (G Grundfläche dieses Tetra-

eders). Infolge der Regelmäßigkeit des Tetraeders A'B'C'D' sind die Grundflächen der vier Teiltetraeder einander gleich. Ihre Höhen sind gleich den Loten h_1, h_2, h_3, h_4, die von P auf die Flächen des Tetraeders A'B'C'D' gefällt werden. Aus

$$\frac{1}{3} Gh_1 + \frac{1}{3} Gh_2 + \frac{1}{3} Gh_3 + \frac{1}{3} Gh_4 = \frac{1}{3} Gh$$

folgt

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h . \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Hilfssatz 1 gilt offensichtlich auch dann, wenn P auf der Begrenzung des Tetraeders A'B'C'D' liegt.

Hilfssatz 2: Liegt der Punkt P außerhalb des Tetraeders A'B'C'D', so gilt für die Summe der Lote

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h .$$

Beweis: Die Grundflächen des Tetraeders A'B'C'D' und der Tetraeder A'B'C'P, A'B'D'P, A'C'D'P, B'C'D'P sind wiederum einander gleich, die Summe der Volumina der letztgenannten vier Tetraeder ist jedoch größer als das Volumen des Tetraeders A'B'C'D'.

Nun beweisen wir die Behauptung der Aufgabe. Die Ecken des gegebenen regelmäßigen Tetraeders seien A, B, C, D. Diesem Tetraeder umschreiben wir ein solches Tetraeder A'B'C'D', daß einander entsprechende Flächen von ABCD und A'B'C'D' jeweils parallel verlaufen und die Punkte A, B, C, D der Begrenzung des Tetraeders A'B'C'D' angehören (Abb. 1). Die beiden Tetraeder sind einander ähnlich, also ist A'B'C'D' ebenfalls ein regelmäßiges Tetraeder.

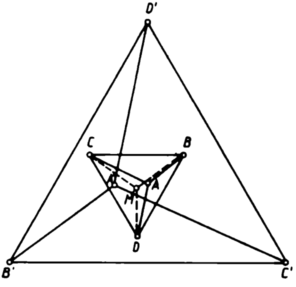


Abb. 1

Die Höhen des Tetraeders ABCD schneiden sich in einem Punkt M, der mit dem Mittelpunkt der Umkugel identisch ist. Die Strecken MA, MB, MC und MD sind die Lote von M auf die Flächen von A'B'C'D'. Die Summe ihrer Längen ist also nach Hilfssatz 1 gleich der Höhe h des Tetraeders A'B'C'D', d. h.

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = h .$$

Jetzt betrachten wir einen beliebigen Punkt $P \neq M$ im Inneren oder auf der Begrenzung des Tetraeders A'B'C'D'. Für diesen sind mindestens drei der Strecken PA, PB, PC, PD länger als die Lote, die von P auf die entsprechenden Flächen des Tetraeders A'B'C'D' gefällt werden, d. h.

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} > \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}. \qquad (10)$$

Nach Hilfssatz 2 ist (10) erst recht für alle Punkte P außerhalb des Tetraeders A'B'C'D' erfüllt.

4.

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x . \qquad (11)$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion. Offenbar gilt für alle reellen

$$a \neq \frac{\lambda}{2}\pi \quad (\lambda \text{ beliebige ganze Zahl})$$

$$\cot 2a + \frac{1}{\sin 2a} = \frac{\cos 2a + 1}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a}{2 \sin a \cos a} = \cot a$$

d. h.

$$\frac{1}{\sin 2a} = \cot a - \cot 2a \qquad (12)$$

Laut Voraussetzung ist $2^k x \neq \lambda\pi$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, also ist in (12) die Substitution
$a = 2^{k-1}x$ zulässig:

$$\frac{1}{\sin 2^k x} = \cot 2^{k-1}x - \cot 2^k x . \qquad (13)$$

Für k = 1 liefert das den Induktionsanfang

$$\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x .$$

Wir zeigen nun, daß für alle $n \geq 2$ aus

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}x} = \cot x - \cot 2^{n-1}x \qquad (14)$$

(11) folgt: In (13) setzen wir $k = n$, addieren diese Gleichung zu (14) und erhalten sofort (11).

5.

Bei jeder Vertauschung der Indizes von a_1, a_2, a_3, a_4 bleibt das Gleichungssystem der Aufgabe (15) unverändert. O. B. d. A. können wir deshalb voraussetzen, daß $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ gilt (laut Bedingung ist $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$). Aus (15) folgen dann die Gleichungen

$$(a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \quad (16)$$

$$(a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 \quad (17)$$

$$(a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 \quad (18)$$

$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 . \quad (19)$$

Durch Subtraktion erhalten wir

aus (16) und (17) $(a_1 - a_2)(x_2 + x_3 + x_4 - x_1) = 0$ (20)

aus (17) und (18) $(a_2 - a_3)(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) = 0$ (21)

aus (18) und (19) $(a_3 - a_4)(x_4 - x_1 - x_2 - x_3) = 0$ (22)

d.h. ($a_i \neq a_j$ für $i \neq j$)

$$x_2 + x_3 + x_4 = x_1$$

$$-x_2 + x_3 + x_4 = x_1$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 = x_1$$

woraus

$$x_2 = x_3 = 0 , \qquad x_1 = x_4 \quad (23)$$

folgt. (16) und (23) ergeben wegen $a_1 \neq a_4$

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4} .$$

Das Gleichungssystem (16), (23) ist dem System (16) bis (19) äquivalent. Das Ausgangssystem (15) hat also für $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ die einzige Lösung

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4} ; \qquad x_2 = x_3 = 0 . \quad (24)$$

Für andere Größenbeziehungen zwischen den a_i ergeben sich die Lösungen durch entsprechende Vertauschung der Indizes in (24).

Auf die gleiche Weise läßt sich die analoge Aufgabe für ein System von n Gleichungen lösen. Für die Größenbeziehungen $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ lautet die Lösung dann

$$x_1 = x_n = \frac{1}{a_1 - a_n} \; ; \quad x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0 \, .$$

6.

Wir bezeichnen $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{KC} = k$, $\overline{LA} = l$, $\overline{MB} = m$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ (siehe Abb. 2), wobei

$$0 < k < a, \quad 0 < l < b, \quad 0 < m < c, \quad 0 < \alpha ; \beta ; \gamma < \pi \tag{25}$$

erfüllt ist. Dann gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke

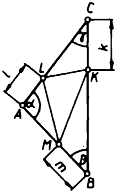


Abb. 2

$$\left.\begin{aligned} F_{LAM} &= \frac{1}{2}\, l(c - m) \sin\alpha \\ F_{MBK} &= \frac{1}{2}\, m(a - k) \sin\beta \\ F_{KCL} &= \frac{1}{2}\, k(b - l) \sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma \; ,$$

woraus sich zunächst

$$F^3_{ABC} = \frac{1}{8}\, a^2b^2c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \quad (\neq 0) \tag{27}$$

ergibt. Aus (26) und (27) folgt

$$\frac{F_{LAM} \cdot F_{MBK} \cdot F_{KCL}}{F^3_{ABC}} = \frac{mkl\,(c - m)(a - k)(b - l)}{a^2b^2c^2} \, . \tag{28}$$

Offenbar gilt

$$m^2 - cm + \frac{c^2}{4} = \left(m - \frac{c}{2}\right)^2 \geqq 0, \quad \text{d.h.} \quad m(c - m) \leqq \frac{c^2}{4} \quad ,$$

was zusammen mit (25) zu

$$0 < m(c - m) \leqq \frac{c^2}{4} \tag{29}$$

führt. Analog erhält man

$$\left.\begin{aligned} 0 &< l(b - l) \leqq \frac{b^2}{4} \\ 0 &< k(a - k) \leqq \frac{a^2}{4} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Aus (29) und (30) folgt

$$mkl\ (c - m)(a - k)(b - l) \leqq \frac{a^2b^2c^2}{4^3} \quad .$$

Damit erhalten wir aus (28) die Ungleichung

$$F_{LAM} \cdot F_{MBK} \cdot F_{KCL} \leqq \left(\frac{1}{4} F_{ABC}\right)^3 \quad , \tag{31}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Wegen (31) können wir die Behauptung sogar verschärfen: Entweder alle drei Dreiecke $\triangle LAM$, $\triangle MBK$ und $\triangle KCL$ haben den Flächeninhalt $\frac{1}{4} F_{ABC}$, oder es gibt unter ihnen wenigstens eins, dessen Flächeninhalt kleiner als $\frac{1}{4} F_{ABC}$ ist. Weitere Beweismöglichkeiten für die sechste Aufgabe wurden im Heft 1 (1967) der mathematischen Schülerzeitschrift alpha behandelt.

IX. IMO

1.

Es genügt, das Dreieck ABD zu betrachten. Wenn dieses Dreieck von den Kreisen K_A, K_B und K_D überdeckt wird, dann wird auch das kongruente Dreieck BCD von den Kreisen K_B, K_C und K_D überdeckt.

Hilfssatz: Das Dreieck ABD wird genau dann überdeckt, wenn der Umkreisradius r des Dreiecks nicht größer als 1 ist.

Beweis: M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Er hat von A, B und D den gleichen Abstand r. Da das Dreieck nach Voraussetzung spitzwinklig ist, liegt M im Inneren des Dreiecks. Das Dreieck wird deshalb nur dann überdeckt, wenn auch M überdeckt wird, wenn also gilt $r \leqq 1$.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn für jeden Punkt P im Inneren des Dreiecks ist wenigstens eine der Ungleichungen

$$\overline{AP} \leqq r, \quad \overline{BP} \leqq r, \quad \overline{CP} \leqq r$$

erfüllt. Ist nun $r \leqq 1$, so muß P wenigstens von einem der Kreise K_A, K_B oder K_D überdeckt werden.

Die Bedingung $r \leqq 1$ ist wegen $\overline{AD} = 1$ mit der Bedingung $\sphericalangle AMD \geqq 60^\circ$ äquivalent, weil im Dreieck der längsten Seite der größte Winkel gegenüberliegt. $\sphericalangle AMD \geqq 60^\circ$ ist aber auch nach dem Peripheriewinkelsatz äquivalent mit $\sphericalangle ABD \geqq 30^\circ$ und (im betrachteten Winkelbereich) $\cot \sphericalangle ABD \leqq \sqrt{3}$. Diese Ungleichung ist wegen $\cot \sphericalangle ABD = \frac{a - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $\sin\alpha > 0$ gleichbedeutend mit $a \leqq \sqrt{3}\,\sin\alpha + \cos\alpha$.

2.

Hilfssatz: In einem Dreieck LMN mit den Seitenlängen $\overline{LN} \leqq 1$, $\overline{MN} \leqq 1$ und $\overline{LM} = x(0 < x < 2)$ gilt $\overline{NK} \leqq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. K ist der Fußpunkt des Lotes von N auf die Gerade LM.

Beweis: O. B. d. A. sei $\overline{MK} \geqq \frac{x}{2}$. Wegen $x > 0$ und $\overline{MN} \leqq 1$ ist dann

$$\overline{MN}^2 - \overline{MK}^2 \leq 1 - \frac{x^2}{4}, \qquad \text{d.h.} \qquad \overline{NK} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Nun beweisen wir die Behauptung der Aufgabe. ABCD sei ein beliebiges Tetraeder mit genau einer Kante, deren Länge größer als 1 ist (o. B. d. A. sei $\overline{CD} > 1$). D_1 sei der Fußpunkt des Lotes von D auf die Ebene ABC. D_2 und C_1 seien die Fußpunkte der Lote von D bzw. C auf die Gerade AB. x sei die Länge der Kante AB (Abb. 1).

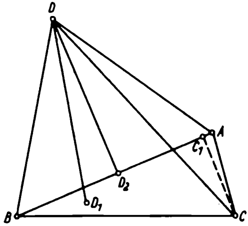


Abb. 1

Dann gilt

$$V = \frac{1}{3}\,\overline{DD_1} \cdot \frac{x}{2}\,\overline{CC_1} \leq \frac{x}{6}\,\overline{DD_2} \cdot \overline{CC_1}.$$

Nach dem Hilfssatz ist

$$\overline{DD_2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{und} \quad \overline{CC_1} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

also

$$V \leq \frac{x}{6}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Aus $x \leq 1$ folgt $1 + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$. Nach dem Satz über das arithmetische und geometrische Mittel ist $\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{2}$. Damit ergibt sich für das Volumen des Tetraeders

$$V \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

3.

Entweder das Produkt $\prod_{i=1}^{n} (c_{m+i} - c_k)$ ist gleich Null (dann wäre nichts zu beweisen) oder alle Faktoren haben das gleiche Vorzeichen. Wir nehmen an, daß alle Faktoren positiv sind. Für sämtlich negative Faktoren verläuft der Beweis analog, da die Teilbarkeit eines Produktes ja nur von den Beträgen der Faktoren abhängt.

Es gilt

$$c_a - c_b = a(a+1) - b(b+1) = a^2 - b^2 + a - b$$
$$= (a-b)(a+b+1)$$

Dann ist:

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$$
$$= (m + 1 - k)(m + 1 + k + 1)(m + 2 - k)(m + 2 + k + 1)\dots$$
$$\dots (m + n - k)(m + n + k + 1)$$
$$= \frac{(m + n - k)!}{(m - k)!} \cdot \frac{(m + n + k + 1)!}{(m + k + 1)!}$$

Dieser Ausdruck soll teilbar sein durch das Produkt

$$c_1 c_2 \dots c_n = n!(n + 1)! \, .$$

a) $\frac{(m + n - k)!}{(m - k)!}$ ist durch n! teilbar; denn

$\frac{(m + n - k)!}{(m - k)!n!} = \binom{m + n - k}{n}$ ist als Binomialkoeffizient ganzzahlig.

b) $\frac{(m + n + k + 1)!}{(m + k)!(n + 1)!} = \binom{m + n + k + 1}{n + 1}$ ist ebenfalls ein ganzzahliger Binomialkoeffizient. $m + k + 1$ ist eine Primzahl, die im Zähler des Bruches $\frac{(m + n + k + 1)!}{(m + k)!(n + 1)!}$ enthalten ist, aber nicht im Nenner, weil sie größer als $n + 1$ und als $m + k$ ist. Folglich ist $\binom{m + n + k + 1}{n + 1}$ durch $m + k + 1$ teilbar. Damit ist auch $\frac{(m + n + k + 1)!}{(m + k + 1)!(n + 1)!}$ eine ganze Zahl.

4.

Die Winkel des Dreiecks A'B'C' bezeichnen wir mit α, β und γ. Über den Seiten A_oC_o und A_oB_o konstruieren wir außerhalb des Dreiecks $A_oB_oC_o$ Kreisbögen mit den Peripheriewinkeln β bzw. γ. Das geschieht, indem wir über A_oC_o und A_oB_o gleichschenklige Dreiecke $A_oC_oM_1$ und $A_oM_2B_o$ mit den Basiswinkeln $90^o - \beta$ bzw. $90^o - \gamma$ konstruieren. Um M_1 und M_2 werden Kreisbögen mit den Radien $\overline{M_1A_o}$ und $\overline{M_2A_o}$ geschlagen. Die Zentriwinkel über A_oC_o und A_oB_o betragen 2β bzw. 2γ. Durch A_o legen wir eine Gerade derart, daß sie die Kreisbögen außer in A_o in B und C schneidet (s. Abb. 2). Die Geraden BC_o und CB_o schneiden sich in einem Punkt A.

Wegen $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$ und $\overline{\sphericalangle BCA} = \gamma$ ist $\overline{\sphericalangle CAB} = \alpha$.
Folglich ist $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

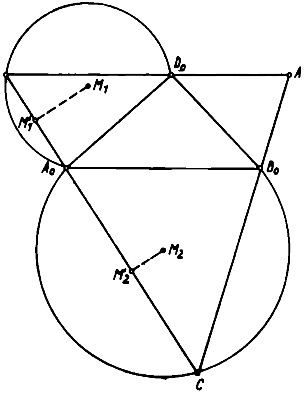


Abb. 2

Von allen solchen Dreiecken ABC ist nun dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt zu konstruieren. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Längen einander entsprechender Seiten. Es genügt deshalb, wenn die Länge der Seite BC maximal wird. M_1' und M_2' seien die Fußpunkte der Lote von M_1 und M_2 auf BC. Offensichtlich gilt $\overline{BC} = 2\overline{M_1'M_2'}$. $\overline{M_1'M_2'}$ (und damit $\overline{BC}$) wird dann maximal, wenn BC parallel zu der Geraden M_1M_2 verläuft. Bei der Konstruktion des Dreiecks ABC mit maximalem Flächeninhalt muß also durch A_0 eine Gerade parallel zu M_1M_2 gelegt werden. Den Punkt A erhält man dann wiederum als Schnittpunkt der Geraden BC_0 und CB_0.

5.

a) O. B. d. A. können wir uns auf solche Zahlen a_i beschränken, daß $|a_i| \in [0;1]$ $(i = 1,2,\ldots,8)$. Gilt nämlich für einige oder auch alle i $|a_i| \leq 1$, so multiplizieren wir sämtliche a_i mit einem solchen Faktor $r \neq 0$, daß $|r\, a_i| > 1$ (sofern nicht $a_i = 0$) und betrachten

$$c'_k = \sum_{i=1}^{8} (r\, a_i)^k = r^k \cdot c_k\,.$$

Wegen $r \neq 0$ verschwindet c'_k genau dann, wenn $c_k = 0$.

b) Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen k $c_{2k} > 0$, da mindestens eins der a_i verschieden von Null ist. Deshalb werden wir uns in der weiteren Betrachtung auf ungerade n beschränken.

c) O. B. d. A. sei

$$|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_8| \quad \text{mit} \quad |a_1| > 1\,. \tag{1}$$

Wir betrachten

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_1{}^n \left[1 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \ldots + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n \right]. \tag{2}$$

Im Falle $|a_2| < |a_1|$ gilt wegen (1) auch $|a_i| < |a_1|$ ($i = 2,3, \ldots, 8$) und damit

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n = 0 \qquad (i = 2, \ldots, 8), \text{ d. h.}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_1{}^n = \infty \cdot \operatorname{sgn} a_1\,.$$

Dann gibt es ein solches N, daß für alle $n > N$ $c_n \neq 0$ ist. Das bedeutet jedoch, daß nicht unendlich viele Glieder c_n gleich Null sein können. Folglich ist $|a_2| = |a_1|$, und wegen (1) können die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n$ ($i = 2,3,\ldots,8$) gleich +1, -1 oder 0 sein. Da in (2) der Ausdruck in der ekkigen Klammer verschwinden muß, ist wenigstens einer der Grenzwerte gleich -1, d.h. unter den a_2, a_3, ..., a_8 gibt es ein $a_j = -a_1$, und in c_n heben sich die Potenzen von a_1 und a_j auf. Hierbei ist nicht ausgeschlossen, daß es unter den a_i mehr als ein Zahlenpaar a_1, $-a_1$ gibt. Mit den verbliebenen (maximal sechs) Summanden verfahren wir völlig analog, indem wir das dem Betrag nach größte der restlichen a_i wie oben a_1 behandeln. Dabei zeigt sich, daß unter den restlichen a_i wiederum zwei ein Zahlenpaar a_k, $-a_k$ bilden müssen. Spätestens nach zwei weiteren Schritten gelangen wir zu dem Ergebnis, daß die a_i vier Zahlenpaare mit jeweils gleichem Betrag und entgegengesetztem Vorzeichen darstellen, wobei höchstens sechs der a_i gleich Null sein können. Wie man sofort sieht, ist dann $c_{2k+1} \equiv 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

$c_n = 0$ gilt also für alle ungeraden n und nur für diese.

6.

v(k) sei die Anzahl der am k-ten Tage verliehenen Medaillen. Dann ist

$$v(k) = k + \frac{1}{7}\left[m - \sum_{i=1}^{k-1} v(i) - k\right] \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (3)$$

und

$$v(k+1) = k + 1 + \frac{1}{7}\left[m - \sum_{i=1}^{k} v(i) - k - 1\right] \qquad (4)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Aus (3) und (4) ergibt sich die Rekursionsformel

$$v(k) = \frac{7}{6} v(k+1) - 1 \qquad (k = 1,2,\ldots, n-1). \qquad (5)$$

Durch vollständige Induktion beweisen wir nun die Gültigkeit der Beziehung

$$v(n-p) = \left(\frac{7}{6}\right)^p (n-6) + 6 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (6)$$

Für $p = 0$ ist die Behauptung (6) richtig. Es bleibt zu zeigen, daß für $p = 1, 2, \ldots, n-1$ aus

$$v(n-p+1) = \left(\frac{7}{6}\right)^{p-1}(n-6) + 6 \qquad (7)$$

(6) folgt: Nach (5) und (7) ist

$$v(n-p) = \frac{7}{6} v(n-p+1) - 1 = \frac{7}{6}\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{p-1}(n-6) + 6\right] - 1$$

$$= \left(\frac{7}{6}\right)^p(n-6) + 6 \; .$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe erhält man

$$m = \sum_{p=0}^{n-1} v(n-p) = \sum_{p=0}^{n-1}\left[\left(\frac{7}{6}\right)^p(n-6) + 6\right]$$

$$= \frac{(n-6)\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n - 1\right]}{\frac{7}{6} - 1} + 6n \; ,$$

$$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36. \qquad (8)$$

Für $n > 1$ gilt offensichtlich

$$|n - 6| < 6^{n-1} \text{ und } (7^n, 6^{n-1}) = 1. \qquad (9)$$

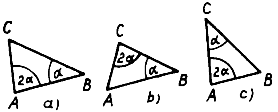
Aus (8), (9) und aus der Ganzzahligkeit von m folgt $n = 6$ und damit $m = 36$. Der Wettkampf dauerte also sechs Tage, und es wurden insgesamt 36 Medaillen verliehen, an jedem der sechs Tage genau sechs.

X. IMO

1.

Das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = n$, $\overline{AC} = n - 1$ und $\overline{BC} = n + 1$ ($n > 1$ natürliche Zahl) erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann betragen die Innenwinkel dieses Dreiecks

$\alpha, 2\alpha$ und $\pi - 3\alpha$ wobei $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ist. Für die Lage der Winkel gibt es drei Möglichkeiten (Abb. 1):



Wegen $\frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin\alpha} = \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 1$ ergeben sich nach dem Sinussatz in den Fällen a), b), c) folgende Gleichungen:

a) $\frac{n}{n-1} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 - 1$. Hieraus folgt $n^2 - 5n = 0$, d.h. $n = 5$.

b) $\frac{n+1}{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 - 1$. Man erhält $n^2 = 2n$, d.h. $n = 2$.

Das ist aber keine Lösung im Sinne der Aufgabe, da sich für $n = 2$ ein entartetes Dreieck ergibt.

c) $\frac{n-1}{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1$. Hieraus folgt die Gleichung $n^2 - 3n - 1 = 0$, die keine ganzzahligen Lösungen besitzt. Sollte es also ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften geben, so sind die Maßzahlen der Seitenlängen 4, 5 und 6. Nach dem Kosinussatz ist dann

$$\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{3}{4} \text{ und } \cos(\sphericalangle CAB) = \frac{1}{8} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \cos(2 \cdot \sphericalangle ABC),$$

so daß

$$0 < \sphericalangle ABC < \frac{\pi}{2},\ 0 < \sphericalangle CAB < \frac{\pi}{2} \text{ und } \sphericalangle CAB = 2 \cdot \sphericalangle ABC.$$

Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

2.

n sei die Anzahl der Ziffern einer im Dezimalsystem gegebenen natürlichen Zahl x, welche der Bedingung der Aufgabe genügt.

Dann ist $$p(x) \leqq 9^n,\ x \geqq 10^{n-1}.$$

I. Es sei $n = 1$, so daß

$$p(x) = x,\ x^2 - 11x - 22 = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind nicht ganzzahlig.

II. Es sei $n = 2$. Dann ist

$$x^2 - 10x - 22 = p(x) \leqq 81$$

und folglich

$$x^2 - 10x + 25 \leqq 128, |x - 5| \leqq \sqrt{128} < 12,$$

das heißt $$10 \leqq x \leqq 16.$$

Nun muß aber $p(x) + 47 = (x - 5)^2$ eine Quadratzahl sein. Dieser Bedingung genügt nur die Zahl $x = 12$. Sie erfüllt auch die gegebene Gleichung.

III. Es sei nun $n > 2$. Dann gilt

$$0 < 10^{n-1} - 5 \leqq x - 5,\ (10^{n-1} - 5)^2 \leqq (x - 5)^2,$$

$$p(x) = (x - 5)^2 - 47 \geqq 10^{2n-2} - 10^n - 22.$$

Aus $10^n \geqq 1000$ und $10^{n-2} - 2 \geqq 8$ folgt $10^{2n-2} - 2 \cdot 10^n \geqq 8000$. Damit ist

$$p(x) \geqq 10^{2n-2} - 10^n - 22 \geqq 10^n + 8000 - 22 > 10^n.$$

Das widerspricht aber der Ungleichung $p(x) \leqq 9^n$.

Die Aufgabe hat also genau eine Lösung. Diese lautet $x = 12$.

3.
Zunächst betrachten wir rélle Lösungen der Form $x_i = y$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Dann bleibt nur die folgende Gleichung zu lösen:

$$a y^2 + (b - 1)y + c = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{1 - b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Für $\Delta < 0$ existieren keine Lösungen, für $\Delta = 0$ gibt es genau eine und für $\Delta > 0$ genau zwei Lösungen. Es bleibt noch zu zeigen, daß für $\Delta \leqq 0$ keine weiteren Lösungen des Systems (1) existieren. Zu diesem Zweck addieren wir alle Gleichungen des Systems und bezeichnen

$\sum_{i=1}^{n} x_i = X$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (b - 1)X + nc = 0. \qquad (2)$$

Nach dem Satz über das quadratische und das arithmetische Mittel ist

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geqq \frac{X}{n}, \text{ d.h. } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq \frac{1}{n} X^2.$$

Die Gleichheit tritt nur im oben behandelten Fall $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ein, den wir jetzt aus der Betrachtung ausklammern können. Wir setzen deshalb

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n} X^2 + K, \text{ wobei } K > 0 \text{ ist.}$$

Gleichung (2) geht dann über in

$$X^2 + \frac{n}{a}(b - 1) X + \frac{n^2 c}{a} + n K = 0.$$

Die Auflösung ergibt

$$X_{1/2} = \frac{1 - b \pm \sqrt{\Delta - \frac{4a^2}{n} K}}{2a}.$$

Wegen $\frac{4a^2}{n} K > 0$ gibt es für $\Delta \leqq 0$ keine reelle Lösungen für X und damit auch keine reellen Lösungen für $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4.

Wir betrachten das Tetraeder ABCD. Mit a, b, c, d, e, f bezeichnen wir die Längen der Kanten BC, AC, AB, AD, BD, CD. O.B.d.A. sei keine dieser Kanten länger als $\overline{AD} = d$. Dann gilt

$$d + e > f,\ d + b > c,$$
$$d + f > e,\ d + c > b. \qquad (3)$$

Für die Dreiecke ABD und ADC gelten die Dreiecksungleichungen

$$c + e > d \text{ und } b + f > d,$$

so daß $b + c + e + f > 2d$.

Es muß also mindestens eine der Ungleichungen

$$b + c > d,\ e + f > d$$

erfüllt sein. Wegen (3) läßt sich folglich aus den Strecken, deren Längen gleich denen der von A bzw. D ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren.

5.

a) Es ist

$$f(x + 2a) = f[(x + a) + a] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - (f(x + a))^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - (\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} + f(x) - (f(x))^2)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2} = \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| .$$

Wegen

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x - a) - (f(x - a))^2} \geq \frac{1}{2}$$

folgt hieraus

$$f(x + 2a) = f(x), \text{ d.h. } b = 2a.$$

b) Für $a = 1$ genügt der Funktionalgleichung (4) z.B. die periodische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \left| \cos\frac{\pi x}{2} \right|) \text{ (Periode } b = 2\text{); denn}$$
$$(x + 1) = \frac{1}{2}(1 + \left| \cos(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}) \right|) = \frac{1}{2}(1 + \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|)$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \left| \cos \frac{\pi x}{2} \right|}{2} \cdot \frac{1 - \left| \cos \frac{\pi x}{2} \right|}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)\ (1 - (f(x))}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

6.

Erster Lösungsweg Es sei $n = x_a x_{a-1} \dots x_1 x_0 = \sum_{i=0}^{a} 2^i x_i$ mit $x_i \in \{0;\ 1\}$ die Darstellung der Zahl n im Dualsystem. Dann ist

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} + x_k \quad (k < a). \qquad (5)$$

Beweis

a) Im Falle $x_k = 0$ ist

$$n = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} 0 x_{k-1} \dots x_1 x_0 \quad \text{und damit}$$

$$n + 2^k = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} 1 x_{k-1} \dots x_1 x_0,$$

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} + x_k.$$

b) Im Falle $x_k = 1$ ist

$$n = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} 1 x_{k-1} \dots x_1 x_0 \quad \text{und damit}$$

$$n - 2^k = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} 0 x_{k-1} \dots x_1 x_0,$$

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n - 2^k}{2^{k+1}}\right] + 1 = x_a x_{a-1} \dots x_{k+1} + x_k.$$

Mit Hilfe von (5) erhält man für die zu berechnende Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] &= x_a x_{a-1} \dots x_1 + x_0 \\
&\quad + x_a \dots x_2 + x_1 \\
&\quad + x_a \dots x_3 + x_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + x_a + x_{a-1} \\
&\quad + x_a \\
&= x_a(2^{a-1} + 2^{a-2} + \dots + 2^0 + 1) \\
&\quad + x_{a-1}(2^{a-2} + 2^{a-3} + \dots + 2^0 + 1) \\
&\quad \dots \\
&\quad \vdots \\
&\quad + x_1(2^0 + 1) + x_0 \\
&= 2^a x_a + 2^{a-1} x_{a-1} + \dots + 2^1 x_1 + x_0 = n.
\end{aligned}$$

Die Summe ist also gleich n.

Zweiter Lösungsweg

Nach Voraussetzung ist

$$c_k = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft, daß $m \leqq \frac{n+2^k}{2^{k+1}}$, d.h.

$$2^{k+1}m - 2^k \leqq n$$

gilt. Die Zahlenfolge

$$\left\{2^{k+1}m - 2^k\right\} \qquad (1 \leqq m \leqq c_k) \tag{1}$$

(beginnend mit $2^k, 3\cdot 2^k, \ldots$) enthält infolgedessen genau diejenigen positiven ganzen Zahlen, die durch 2^k, aber nicht durch 2^{k+1} teilbar und nicht größer als n sind. Da nun jede positive ganze Zahl genau eine Höchstpotenz von 2 als Teiler besitzt, ist jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ für ein und nur ein k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) in der Zahlenfolge (1) enthalten. Daher ist n die Gesamtzahl aller Elemente der Folgen (1), es gilt also

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] \quad ,$$

so daß die gesuchte Summe den Wert n hat.

XI. IMO

1.

Es sei $a = 4k^4$, wobei k eine natürliche Zahl ist, die größer als 1 ist. Dann gilt

$$z = n^4 + a = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2$$
$$= (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk),$$
$$z = \left[(n + k)^2 + k^2\right]\left[(n - k)^2 + k^2\right] . \qquad (1)$$

Nun gilt wegen $k > 1$ für alle natürlichen Zahlen n

$$(n + k)^2 > 0, \qquad (n - k)^2 \geq 0$$

und

$$(n + k)^2 + k^2 > 1, \quad (n - k)^2 + k^2 > 1. \qquad (2)$$

Beide Faktoren auf der rechten Seite der Gleichung (1) sind also größer als 1.

Die Zahl $z = n^4 + a$ mit $a = 4k^4$ und $k > 1$ ist also für alle natürlichen Zahlen n eine zusammengesetzte Zahl. Nun gibt es unendlich viele natürliche Zahlen k, die größer als 1 sind, also auch unendlich viele natürliche Zahlen $a = 4k^4$, so daß für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $z = n^4 + a$ keine Primzahl ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Diese elementare zahlentheoretische Aufgabe, eine Verallgemeinerung des Satzes von Sophie Germain (1776 bis 1831), wonach $n^4 + 4$ für keine natürliche Zahl n, die größer als 1 ist, eine Primzahl ist, wurde von sieben Teilnehmern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Diese Schüler lösten die Aufgabe im Prinzp in derselben Weise, wie oben dargestellt. Nur ein Schüler konnte die Aufgabe nicht vollständig lösen.

2.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Funktion $f(x)$ nicht identisch gleich Null ist. Es existiert eine reelle Zahl x_0, so daß $\cos(a_1 + x_0) = 1$. Ferner gilt wegen $\cos(a_1 + x) \geq -1$ für alle reellen x

$$\frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$
$$\geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \ldots - \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\geq -1 + \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Daraus folgt

$f(x_0) \geqq \cos(a_1 + x_0) - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$,

also

$$f(x_0) \neq 0,$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Durch die Anwendung der Additionstheoreme erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \cos x \cos a_1 + \tfrac{1}{2}\cos x \cos a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos x \cos a_n \\ & - \sin x \sin a_1 - \tfrac{1}{2}\sin x \sin a_2 - \dots - \frac{1}{2^{n-1}} \sin x \sin a_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \cos x(\cos a_1 + \tfrac{1}{2}\cos a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos a_n) \\ & - \sin x(\sin a_1 + \tfrac{1}{2}\sin a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \sin a_n). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\cos a_1 + \tfrac{1}{2}\cos a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos a_n = b, \tag{1}$$

$$\sin a_1 + \tfrac{1}{2}\sin a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \sin a_n = c, \tag{2}$$

wobei b und c Konstanten sind, so erhält man

$$f(x) = b \cos x - c \sin x. \tag{3}$$

Gilt nun $f(x_1) = f(x_2) = 0$, so gilt auch

$$b \cos x_i - c \sin x_i = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

Nun ist aber $b^2 + c^2 \neq 0$; denn aus $b^2 + c^2 = 0$ würde $b = c = 0$, also wegen (3) $f(x) = 0$ für alle x folgen, was, wie oben bewiesen wurde, nicht möglich ist.

Daher können wir in der Gleichung (4) durch $\sqrt{b^2 + c^2}$ dividieren und erhalten

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cos x_i - \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \sin x_i = 0. \tag{5}$$

Wegen $\left| \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right| \leqq 1$, $\left| \frac{c}{b^2 \quad c^2} \right| \leqq 1$ und

$\frac{b^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} = 1$ können wir eine reelle Zahl z so

wählen, daß

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \cos z \quad \text{und} \quad \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \sin z \text{ gilt.}$$

Wir erhalten dann aus (5)

$$\cos z \cos x_1 - \sin z \sin x_1 = 0,$$
$$\cos(x_1 + z) = 0,$$

also

$$x_1 + z = \frac{\pi}{2} + t_1\pi \qquad (6)$$

und

$$x_2 + z = \frac{\pi}{2} + t_2\pi\,, \qquad (7)$$

wobei t_1 und t_2 ganze Zahlen sind.
Aus (6) und (7) erhalten wir durch Subtraktion

$$x_2 - x_1 = (t_2 - t_1)\pi = m\pi\,,$$

wobei $m = t_2 - t_1$ eine ganze Zahl ist, w.z.b.w.

Bemerkung Diese goniometrische Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Ein weiterer Schüler erhielt 6 Punkte, da der Nachweis dafür, daß die Funktion f(x) nicht identisch gleich Null ist, lückenhaft war. Die übrigen Schüler konnten nur Teillösungen bringen (5 Punkte bzw. in zwei Fällen 4 Punkte), da die notwendigen Begründungen - insbesondere für das nicht identische Verschwinden von f(x) - unvollständig waren.

3.

Es werden der Reihe nach die Fälle $k = 1$, $k = 5$, $k = 2$, $k = 4$ und $k = 3$ behandelt.

1. Fall: $k = 1$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß, falls ein Tetraeder ABCD mit den geforderten Eigenschaften existiert,

$$\overline{AB} = a \text{ und } \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$$

gilt. Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir zunächst die notwendige Bedingung $a < 2$.

Es sei nun M die Mitte der Kante AB. Dann gilt

$$\overline{CM} = \overline{DM} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\,.$$

Wegen der Dreiecksungleichung (in dem Dreieck CMD) gilt ferner

$$\overline{CM} + \overline{DM} > \overline{CD},$$

also

$$2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > 1,\ 4 - a^2 > 1,\ a^2 < 3;$$

wir erhalten also die weitere notwendige Bedingung

$$a < \sqrt{3}. \tag{1}$$

Ist nun diese Bedingung erfüllt, so gilt auch

$$\overline{CM} + \overline{CD} > \overline{DM} \quad \text{und} \quad \overline{DM} + \overline{CD} > \overline{CM},$$

d.h., es existiert ein Dreieck CMD mit den oben angegebenen Seitenlängen. Daraus folgt, daß ein Punkt D außerhalb der durch A, B, C bestimmten Ebene existiert, so daß $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$ ist. Die angegebene Bedingung $a < \sqrt{3}$ ist also auch hinreichend für die Existenz des Tetraeders ABCD.

2. Fall: $k = 5$

Dieser Fall läßt sich auf den Fall $k = 1$ zurückführen, wobei nur die Kantenlängen a und 1 zu vertauschen sind. Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\frac{1}{a} < \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad a > \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{2}$$

3. Fall: $k = 2$

3.1. Die beiden Kanten der Länge a mögen in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, $\overline{AB} = 1$ annehmen. Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir die notwendige Bedingung $2a > 1$, d.h. $a > \frac{1}{2}$.

Es sei wieder M die Mitte der Kante AB. Dann gilt

$$\overline{CD} + \overline{DM} > \overline{CM},$$

also

$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

$$1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4} > a^2 - \frac{1}{4},$$

$$a^2 < 2 + \sqrt{3}, \text{ d.h.}$$

$$a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}. \tag{3}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\overline{DM} + \overline{CM} > \overline{CD},$$

also

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1,$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0,$$

also

$$a^2 - \frac{1}{4} > 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4},$$

$$a^2 > 2 - \sqrt{3}, \text{ d.h.}$$

$$a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \tag{4}$$

Man erhält also die notwendige Bedingung

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}\ . \tag{5}$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so existiert das Dreieck DMC, also auch das Tetraeder ABCD. Die Bedingung (5) ist folglich im Falle 3.1. notwendig und hinreichend.

3.2. Die beiden Kanten der Länge a mögen nicht in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ annehmen. Wir erhalten wieder die notwendige Bedingung $a > 2$ und wegen

$$\overline{CM} = \overline{DM} = \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\ ,\quad \overline{CD} = a$$

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} > a,\ 4-a^2 > a^2,\ 2a^2 < 4,$$

also

$$a < \sqrt{2}. \tag{6}$$

Diese Bedingung ist aber im Falle 3.2. auch hinreichend; denn in diesem Falle läßt sich stets ein Tetraeder mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

Aus (5) und (6) folgt, daß im Falle $k = 2$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften die Bedingung

$$a < \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{ist.} \tag{7}$$

4. Fall: $k = 4$

Auch dieser Fall läßt sich auf den Fall $k = 2$ zurückführen, indem die Kantenlängen a und 1 vertauscht werden.

Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\frac{1}{a} < \sqrt{2+\sqrt{3}}\ ,$$

also

$$a > \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}. \tag{8}$$

5. Fall: $k = 3$

5.1. Es sei

$$a > \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{9}$$

Dann existiert ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1$ und $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = a$; denn, wenn S der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC ist, so hat man nur eine Senkrechte SD der Ebene dieses Dreiecks zu errichten mit

$\overline{SD} = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2}$, was wegen $a < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ immer möglich ist.

5.2. Es sei

$$a < \sqrt{3}. \tag{10}$$

Dann existiert ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ und $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 1$; denn analog wie in 5.1. wählt man den Punkt D, so, daß

$$\overline{SD} = \sqrt{1 - (\tfrac{a}{3}\sqrt{3})^2}$$, was wegen $a < \sqrt{3}$ immer möglich ist.

Da die durch die Bedingungen (9) und (10) festgelegten Intervalle einander überschneiden, ist im Falle $k = 3$ für alle reellen positiven a die Existenz des Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften nachgewiesen.

<u>Zusammenfassung</u>

Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften sind die folgenden Bedingungen:

im Falle $k = 1$: $0 < a < \sqrt{3}$

$k = 2$: $0 < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$k = 3$: $0 < a$

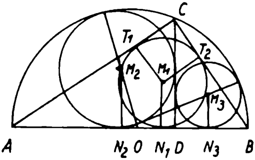
$k = 4$: $a > \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$k = 5$: $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$

<u>Bemerkung</u>: Fünf Teilnehmer unserer Mannschaft haben diese Aufgabe vollständig gelöst. Zwei Teilnehmer konnten nicht alle Fälle richtig begründen und erhielten daher nur 5 bzw. 4 Punkte. Ein Teilnehmer hat diese Aufgabe wegen Zeitmangel nicht mehr behandelt.

<u>4.</u>

Es seien M_i die Mittelpunkte und r_i die Radien der Kreise y_i ($i = 1, 2, 3$). N_i seien die Projektionen von M_i auf AB, O sei der Mittelpunkt von y (vgl. Abb. 1).



Ferner setzen wir $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = p$, $\overline{DB} = q = c - p$, $\frac{a+b+c}{2} = s$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß N_2 auf der Strecke AD liegt. Wir berechnen zunächst die Radien r_2 und r_3. Da N_2 der Berührungspunkt des Kreises y_2 mit AB ist, gilt in dem rechtwinkligen Dreieck OM_2N_2

$$\overline{N_2O} = \overline{N_2D} + \overline{DB} - \overline{OB} = r_2 + q - \frac{c}{2},$$

$$\overline{M_2N_2} = r_2$$

und, da der Kreis y_2 den Kreis y mit dem Radius $\frac{c}{2}$ von innen berührt,

$\overline{OM_2} = \frac{c}{2} - r_2$, also nach dem Satz des Pythagoras

$$(r_2 + q - \frac{c}{2})^2 + r_2^2 = (\frac{c}{2} - r_2)^2.$$

Daraus folgt

$$(r_2 + q)^2 - cq - cr_2 + \frac{c^2}{4} + r_2^2 = \frac{c^2}{4} - cr_2 + r_2^2,$$

$$(r_2 + q)^2 = cq = a^2$$

und hieraus wegen $r_2 + q > 0$, $a > 0$

$$r_2 + q = a, \text{ also } r_2 = a - q. \qquad (1)$$

Analog erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ON_3M_3

$$r_3 = b - p. \qquad (2)$$

Nun berechnen wir den Radius r_1 des Kreises y_1.
Bezeichnet man die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit T_1 und T_2, so ist das Viereck $CT_1M_1T_2$ ein Quadrat. Nach einem Satz über den Abstand eines Eckpunktes eines Dreiecks von den Berührungspunkten des Inkreises gilt $\overline{CT_1} = s - c$, also in dem vorliegenden Fall

$$r_1 = s - c.$$

Ferner erhält man wegen (1) und (2)

$$\frac{1}{2}(\overline{M_2N_2} + \overline{M_3N_3}) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3) = \frac{1}{2}(a - q + b - p)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c = r_1 = \overline{M_1N_1}, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{BN_2} + \overline{BN_3}) = \frac{1}{2}(q + r_2 + q - r_3) = \frac{1}{2}(2q + a - q - b + p)$$

$$= \frac{1}{2}(a + c - b) = s - b = \overline{BN_1}, \qquad (4)$$

was wieder nach dem obigen Satz gilt, weil N_1 der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ABC mit der Seite AB ist.

Aus (3) und (4) folgt nun, daß M_1 der Mittelpunkt der Strecke M_2M_3 ist. Die drei Punkte M_1, M_2, M_3 liegen also auf einer Geraden. Daher berührt die zu AB bezüglich der Geraden M_2M_3 symmetrisch gelegene Gerade ebenfalls die drei Kreise y_1, y_2 und y_3, womit bewiesen ist, daß diese Kreise außer der Tangente AB noch eine zweite gemeinsame Tangente haben.

Bemerkung Diese Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Allerdings gelang es den Schülern nicht, eine einfache elementargeometrische Lösung, wie sie oben gegeben wurde, zu finden; sie stützten sich auf die Koordinatengeometrie, berechneten die Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3 und wiesen dann nach, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, ein Verfahren, das mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist.

Drei Schüler konnten die Lösung nicht vollständig angeben; sie erhielten 5 bzw. 4 Punkte. Die übrigen beiden Schüler kamen kaum über einen allgemeinen Ansatz hinaus (2 Punkte bzw. 1 Punkt).

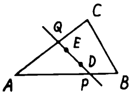
Es zeigte sich, daß unsere Schüler auf dem Gebiete der elementaren Geometrie noch nicht über genügend sichere Fertigkeiten verfügen. Es ist daher notwendig, auch den Problemen der Elementargeometrie in den mathematischen Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften mehr Aufmerksamkeit zu widmen.

5.

Es wird zunächst der Fall $n = 5$ untersucht.

Hierbei sind genau drei Unterfälle möglich:

1. Die fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Fünfecks. Dann ist die Behauptung bereits bewiesen, da beliebige vier von diesen fünf Punkten ein konvexes Viereck bilden.
2. Vier der fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks, in dessen Innern der fünfte Punkt liegt. Auch in diesem Falle trifft die Behauptung zu.
3. Drei Punkte A, B, C bilden ein Dreieck, in dessen Inneren die übrigen beiden Punkte D und E liegen (vgl. Abb.).



Die Gerade DE hat dann mit zwei Seiten des Dreiecks ABC je einen inneren Punkt P bzw. Q gemeinsam; denn nach Voraussetzung kann DE nicht durch einen der Eckpunkte des Dreiecks ABC gehen.

O.B.d.A. können wir annehmen, daß P auf AB und Q auf AC liegt. Dann ist aber das Viereck BCED ein konvexes Viereck, da die beiden Diagonalen BE und CD im Innern dieses Vierecks liegen. Zu fünf beliebigen Punkten einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gibt es also wenigstens ein konvexes Viereck, dessen Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.

Sind nun n Punkte mit $n > 4$ gegeben, so kann man aus ihnen $\binom{n}{5}$ verschiedene Teilmengen von je fünf Punkten bilden. In jeder dieser Teilmengen gibt es aber, wie oben bewiesen wurde, vier Punkte, die ein konvexes Viereck bilden. Andererseits kann ein solches Viereck höchstens zu $n - 4$ dieser Teilmengen von je fünf Punkten gehören. Die Gesamtzahl aller dieser konvexen Vierecke ist daher größer oder gleich

$$f(n) = \frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\ . \tag{1}$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß für alle n, die größer als 4 sind,

$$f(n) = \frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geqq g(n) = \binom{n-3}{2}. \tag{2}$$

Zunächst erhalten wir

$$f(5) = g(5) \text{ und } f(6) = g(6).$$

Für $n \geqq 7$ gilt

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 2}{120\cdot(n-3)(n-4)} = \frac{n(n+1)+6}{60} + \frac{2}{5(n-4)}$$

$$> \frac{n(n+1)+6}{60} \geqq \frac{62}{60} > 1,$$

also $\quad f(n) > g(n)$. $\hfill (3)$

Damit ist bewiesen, daß man wenigstens $\binom{n-3}{2}$ konvexe Vierecke finden kann, deren Eckpunkte unter den gegebenen n Punkten vorkommen. Wegen $f(n) > g(n)$ für $n > 6$ stellt die Gleichung (1) sogar eine Verschäffung der zu beweisenden Behauptung dar, d.h. es gibt sogar mindestens $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ konvexe Vierecke.

<u>Bemerkung</u> Diese geometrisch-kombinatorische Aufgabe wurde von fünf Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Zwei von diesen Schülern gelang der Nachweis einer Verschärfung der zu beweisenden Relation; man kann nämlich, wie oben gezeigt wurde, mindestens $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ konvexe Vierecke der geforderten Eigenschaft finden. Für diese Erkenntnis erhielten sie, wie auch einige andere Teilnehmer der Olympiade, eine besondere Anerkennung für die gute Lösung einer Aufgabe. Die drei anderen Schüler erhielten nur 5 bzw. 4 Punkte, da die Beweisführung im Falle $n > 5$ nicht vollständig war bzw. fehlte.

<u>6.</u>

Setzt man $D_1 = x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $D_2 = x_2y_2 - z_2^2 > 0$,

so erhält man $x_1y_1 = D_1 + z_1^2$, $x_2y_2 = D_2 + z_2^2$.

Für den Nenner der linken Seite der behaupteten Ungleichung ergibt sich dann die Abschätzung

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = D_1 + D_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} x_2y_2 + \frac{x_2}{x_1} x_1y_1 - 2 z_1z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2}(D_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(D_1 + z_1^2) - 2z_1z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \left(\frac{x_1}{x_2}D_2 + \frac{x_2}{x_1}D_1 - 2\sqrt{D_1D_2}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2 + \frac{x_2}{x_1}z_1^2 - 2z_1z_2\right) + 2\sqrt{D_1D_2}$$

$$= (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2 + \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}D_2} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}D_1}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2 - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2$$

$$\geq (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2. \qquad (2)$$

Folglich gilt

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2}. \qquad (3)$$

Ferner gilt wegen $\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \geq 2\sqrt[4]{D_1D_2}$ und

$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \geq \frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}$

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{D_1D_2}} \leq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich unmittelbar die zu beweisende Ungleichung (1).
Nun gilt das Gleichheitszeichen in (2) genau dann, wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}D_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}D_1, \text{ d.h. } x_1\sqrt{D_2} = x_2\sqrt{D_1}, \tag{5}$$

und wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1, \text{ d.h. } x_1 z_2 = x_2 z_1. \tag{6}$$

Ferner gilt das Gleichheitszeichen in (4) genau dann, wenn

$$D_1 = D_2. \tag{7}$$

Wegen (5), (6) und (7) gilt daher das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn $D_1 = D_2$ und $x_1 = x_2$ und $z_1 = z_2$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$. Diese Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der bewiesenen Ungleichung (1).

<u>Bemerkung</u> Die vorliegende Aufgabe war die schwierigsten unter den sechs gestellten Aufgaben. Keinem unserer Schüler gelang der vollständige Nachweis für die Richtigkeit der gegebenen Ungleichung. Es konnten nur Teilergebnisse erreicht werden, z.B. der Nachweis der Ungleichung für den Fall
$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \leq 0$.
Zwei Schüler erhielten je 5 Punkte, zwei weitere je 4 Punkte, drei Schüler je 3 Punkte und ein Schüler nur 2 Punkte.
Da die Ungleichung dieser Art in der Analysis gelegentlich auftreten, ist es notwendig, das Lösen auch solcher Ungleichungen, bei denen die Anwendung der bekannten Methoden nicht unmittelbar zum Ziel führt, häufiger zu üben.

XII. IMO

1.

Mit den Bezeichnungen $\overline{\sphericalangle ABC} =: \beta$, $\overline{\sphericalangle BCA} =: \gamma$, $\overline{\sphericalangle CAB} =: \alpha$ und $\sphericalangle AMC =: \delta$ gilt

$$\overline{AB} = r \cot\frac{\alpha}{2} + r \cot\frac{\beta}{2} = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right), \qquad (1)$$

da der Mittelpunkt R des Inkreises Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist und, wenn der Inkreis des Dreiecks ABC die Strecke AB in P berührt, $\overline{\sphericalangle APR} = \overline{\sphericalangle BPR} = \frac{\pi}{2}$ gilt. Andererseits stehen die außeren Winkelhalbierenden senkrecht auf den inneren, und dabei gilt analog zu (1)

$$\overline{AB} = \varrho \tan\frac{\alpha}{2} + \varrho \tan\frac{\beta}{2} = \varrho\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2}. \qquad (3)$$

Entsprechend erhält man für die beiden anderen Dreiecke

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\delta}{2} \qquad (4)$$

und
$$\frac{r_2}{\varrho_2} = \tan\frac{\pi - \delta}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} = \cot\frac{\delta}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2}. \qquad (5)$$

Durch Multiplikation erhält man aus (3), (4) und (5) sofort die Behauptung.

2.

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot x^k$, $q(x) = p(x) + x_n \cdot x^n$.

Dann ist die Aussage (6) gleichwertig zu

$$f(a) < f(b),$$

was für eine streng monoton fallende Funktion $y = f(x)$ genau dann eintritt, wenn $b < a$ ist. Kann man $f'(x) < 0$ für $x > 0$ beweisen, so ist $y = f(x)$ streng monoton fallend und damit alles bewiesen.

$$f'(x) = \frac{p'q - pq'}{q^2} = \frac{p'(p + x_n x^n) - p(p' + n \cdot x_n \cdot x^{n-1})}{q^2}$$
$$= \frac{x_n \cdot x^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-1} x^k \, x_k (k - n) - n \, x_0 \right]}{q^2}$$

Wegen $x > 0$, $x_n > 0$, $n > 1$, $x_k \geqq 0$, $k - n < 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$, $q^2 > 0$ ist $f'(x) < 0$ genau dann, wenn mindestens ein $x_k \neq 0$ ist, $0 \leqq k \leqq n - 1$.

<u>3.</u>

Lösung 1

Offenbar ist $b_n \geqq 0$, da jeder Summand in der Summe (8) nichtnegativ ist. Weiter gilt:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{n} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) < 2$$

Damit ist die Teilaufgabe a) gelöst.

Sei c mit $0 \leqq c < 2$ vorgegeben. Um eine Folge $\{a_n\}$ zu finden, für die die zugehörige Folge $\{b_n\}$ die Eigenschaft (9) hat, liegt ein Versuch mit dem einfachen Fall einer geometrischen Folge nahe. Unter Berücksichtigung des Wurzelzeichens in (8) wird man etwa

$$a_k = a^{-2k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

setzen. Damit die Bedingung (7) erfüllt ist, wählt man $0 < a < 1$. Man hat die Behauptung bewiesen, wenn man eine Schranke N findet, so daß für alle $n > N$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - a^2) \cdot a^k = a(1 + a)(1 - a^n) \geq a(1+a)(1 - a^N) > c,$$

d.h. (10)

$$a^N < 1 - \frac{c}{a(1 + a)} \qquad (11)$$

ist. Damit das erreichbar ist, muß auf der rechten Seite der Ungleichung eine positive Zahl stehen. Man beschränkt also a abermals und fordert

$$0 < a < 1 \quad \text{und} \quad a(1 + a) > c. \qquad (12)$$

(Die zusätzliche zweite Voraussetzung ändert nichts an den bisherigen Überlegungen.) Da $\{a^n\}$ für $0 < a < 1$ eine Nullfolge ist, gibt es gewiß eine natürliche Zahl N, für die (11) erfüllt ist. Man kann die Überlegung rückwärts verfolgen und erhält mit dem beschriebenen N

$$b_n > c \text{ für } n > N.$$

Es bleibt zu zeigen, daß es eine Zahl a mit den beiden Eigenschaften (12) gibt. Wählt man

$$\sqrt{\frac{c}{2}} < a < 1,$$

so ist gewiß die erste und wegen $c < 2a^2 = a(a+a) < a(1+a)$ auch die zweite Bedingung aus (12) erfüllt. Damit ist die Teilaufgabe b) gelöst.

Lösung 2

Es sei im folgenden auf die Lösung des Schülers Wolfgang Burmeister eingegangen, die, wie oben erwähnt, als einzige Bearbeitung dieser Aufgabe mit einem Diplom ausgezeichnet wurde. Der Schüler bewies nach der Bemerkung $b_n \geq 0$ die Behauptung $b_n < 2$ durch vollständige Induktion. Es sei angemerkt, daß viele Schüler diesen Lösungsgedanken ohne Ergebnis verfolgten. Der eigentliche interessante Teil der Lösung von Burmeister bezieht sich aber auf die zweite Teilaufgabe und sei hier wiedergegeben. Die kleinste obere Schranke für b_n über alle Folgen $\{a_n\}$ mit der Eigenschaft (7) sei t_n,

$$t_n = \sup_{\{a_j\}'} b_n.^{3} \qquad (13)$$

[3] $\{a_j\}'$ bezeichnet im weiteren eine beliebige Folge mit der Eigenschaft (7).

Diese obere Grenze existiert, da b_n nach oben beschränkt ist. Da b_{n+1} jeweils einen Summanden mehr enthält als b_n, gilt $t_{n+1} \geq t_n$ und nach dem Ergebnis der ersten Teilaufgabe $t_n \leq 2$. Es ist zu zeigen, daß

$$\lim_{n \to \infty} t_n = 2 \tag{14}$$

ist. Unter Voraussetzung dieses Ergebnisses existiert nämlich für beliebiges c aus dem Intervall (0, 2) ein n mit

$$c < t_n \leq t_{n+1} \leq \ldots \leq 2,$$

und nach Definition des t_n gibt es stets eine Folge $\{a_n\}$ mit der Eigenschaft (7), für die das zugehörige b_n der Zahl t_n beliebig nahekommt, für die also insbesondere $b_n > c$ und damit auch $b_{n+k} > c$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Damit ist unter der Voraussetzung (14) die Behauptung bewiesen.

Als Vorbereitung zum Beweis von (14) wird nun eine Rekursionsformel für t_{n+1} hergeleitet:

$$t_{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{t_n + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{15}$$

<u>Beweis:</u> $$t_{n+1} = \sup_{\{a_i\}^*} b_{n+1} = \sup_{\{a_i\}^*} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k \cdot \sqrt{a_k}} \tag{16}$$

$$t_{n+1} = \sup_{\{a_i\}^*} \left[\frac{a_1 - 1}{a_1 \cdot \sqrt{a_1}} + \frac{\frac{a_2}{a_1} - 1}{\frac{a_2}{a_1} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}}{\frac{a_3}{a_1} \cdot \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}}{\frac{a_{n+1}}{a_1} \cdot \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right]$$

Mit $\alpha_{k-1} = \frac{a_k}{a_1}$, $k = 2, \ldots, n+1$, $\alpha_0 = 1$, erhält man

$$1 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots \tag{7'}$$

$$t_{n+1} = \sup_{a_1, \{\alpha_i\}^*} \left[\frac{a_1 - 1}{a_1 \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} \right] .$$ [+]

Da die Folge $\{\alpha_i\}^*$ ebenfalls bei der Bildung des Supremums in (16) zugelassen war, gilt

$$t_{n+1} = \sup_{a_1} \left[\frac{a_1 - 1}{a_1 \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cdot t_n \right] .$$

Zum Beweis der Teilbehauptung (15) genügt es zu zeigen, daß

$$\frac{a_1 - 1}{a_1 \sqrt{a_1}} + \frac{t_n}{\sqrt{a_1}} \leqq 2 \left(\frac{t_n + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{17}$$

gilt und daß für ein gewisses a_1 in (17) das Gleichheitszeichen steht. Aus (17) erhält man durch äquivalente Umformungen

$$a - 1 + t_n \cdot a_1 \leqq 2 \cdot \left(\frac{t_n + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a_1 \cdot \sqrt{a_1},$$

$$2\left(\frac{t_n + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a_1 \cdot \sqrt{a_1} - (t_n + 1)a_1 + 1 \geqq 0,$$

$$\left[2\left(\frac{t_n+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a_1} + \frac{t_n + 1}{3} \right] \cdot \left[a_1 - 2\left(\frac{3}{t_n + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a_1} + \frac{3}{t_n + 1} \right] \geqq 0.$$

(Die letzte Ungleichung entsteht aus der davorstehenden durch Faktorenzerlegung.) Indem der zweite Faktor als vollständiges Quadrat geschrieben wird, bleibt

$$\left[2\left(\frac{t_n + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a_1} + \frac{t_n + 1}{3} \right] \cdot \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{\frac{3}{t_n + 1}} \right)^2 \geqq 0. \tag{18}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß für den Wert

$$a_1 = \frac{3}{t_n + 1} > 1$$

in der Ungleichung (18) bzw. (17) das Gleichheitszeichen gilt.

---

sup $f(a_1, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ bezeichne die obere Grenze von $f(a_1, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, wenn a_1 alle Werte, die größer oder gleich 1 sind, durchläuft und $\{\alpha_i\}$ irgendeine Folge mit der Eigenschaft (7') bezeichnet.

Für $a_1 \neq \frac{3}{t_n + 1}$ ist (18) gleichwertig mit

$$2\left(\frac{t_n+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a_1} + \frac{t_n + 1}{3} \geqq 0.$$

Diese letzte Ungleichung ist aber unter den obigen Voraussetzungen

$$a_1 \geqq 0, \; 0 \leqq t_n \leqq 2$$

stets erfüllt. Damit ist die Beziehung (15) bewiesen.
Die Folge $\{t_n\}$ ist nicht fallend und nach oben beschränkt.
Daher existiert

$$\lim_{n\to\infty} t_n =: t.$$

Man kann auf beiden Seiten der Beziehung (15) zur Grenze übergehen und erhält wegen der Stetigkeit der Funktion

$$y = f(x) = \left(\frac{x + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

an der Stelle t, daß

$$t = 2\left(\frac{t + 1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ist. Daraus folgt

$$t^2 = \frac{4}{27}(t + 1)^3, \; 4(t + 1)^3 - 27t^2 = 0, \; (t^2-4t +4)(4t+1) = 0$$

$$(t - 2)^2(4t + 1) = 0$$

Wegen $t \geqq 0$ muß $t = 2$ sein. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 2.$$

Bemerkung Offenbar ist diese Schülerlösung länger als die Überlegung in Lösung 1. Außerdem folgt die Aussage (14) auch aus den in der Lösung 1 angestellten Überlegungen. Aber bei der Lösung 1 erhält man über die Folge $\{t_n\}$ nur folgende Aussagen:

$$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq \ldots \leqq 2, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 2 \tag{20}$$

(Beides ergibt sich unmittelbar aus dem Verhalten der b_n.)

Die Beziehung (20) reicht zwar zur Lösung der gestellten zweiten Teilaufgabe aus. Man muß jedoch beachten, daß man über die Glieder der Folge $\{t_n\}$ erst sehr wenig weiß. Bei festem t_1 gibt es noch unendlich viele verschiedene Folgen mit den Eigenschaften (19) und (20). Unter diesen unendlich vielen Folgen ist natürlich auch die eine Folge $\{t_n\}$, die das Supremum-Verhalten der b_n charakterisiert. Die Originalität der Lösung von Burmeister besteht nun darin, die gegebenen Informationen maximal verwertet zu haben, indem er (bei festem, leicht errechenbarem $t_1 = \sup_{a_1} b_1$) durch die Rekursionsformel (15) diese eine Folge $\{t_n\}$ eindeutig bestimmt hat.

4.

Angenommen, die Zahl n hat die beschriebene Eigenschaft. Dann teilt jeder Primteiler p einer der Zahlen

$$n\,,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$$

auch noch eine weitere von diesen Zahlen. Dabei kann p nur

$$2,\ 3 \text{ oder } 5$$

sein und ferner können die Zahlen

$$n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$$

nur 2 und 3 als Primteiler haben. Unter diesen vier Zahlen sind genau zwei ungerade Zahlen, die also Potenzen von 3 sein müßten. Das ist aber unmöglich, da die Differenz

$$3^k - 3^m,\ k > 1,\ m > 1$$

nie gleich 2 sein kann.

5.

Seien a, b, c bzw. d die Ortsvektoren der Punkte A, B, C bzw. D mit dem Koordinatenursprung in S.
Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt unmittelbar

$$(b - d) \cdot (c - d) = 0, \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b - c) = 0, \\ b \cdot (a - c) = 0, \\ c \cdot (b - a) = 0 \end{array}\right\} \tag{23}$$

und $a \cdot d = b \cdot d = c \cdot d = 0.$ (24)

Aus (22) ergibt sich unter Beachtung von (24)

$$b \cdot c + d^2 = 0. \tag{25}$$

Aus (23) erhält man

$$a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b + d^2 = 0, \\ a \cdot c + d^2 = 0. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Wegen (24) gilt deshalb auch

$$\left.\begin{array}{l} (a - d) \cdot (b - d) = 0, \\ (a - d) \cdot (c - d) = 0. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Daher sind auch die Winkel ADB und ADC rechte Winkel. Nach dem Satz des Pythagoras gilt jetzt

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2,\ \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2,\ \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2,$$

und die zu beweisende Ungleichung (21) ist äquivalent mit

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})^2 \leqq 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2),$$

was gleichwertig ist zu

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{3} \leqq \sqrt{\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{3}} \tag{29}$$

(29) ist die als bekannt anzusehende Ungleichung für das arithmetische und quadratische Mittel. Weiterhin ist bekannt, daß in (29) genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

ist. Es gilt also unter der Voraussetzung $\overline{\sphericalangle BDC} = \frac{\pi}{2}$ in (21) nur für solche Tetraeder das Gleichheitszeichen, für die das $\triangle$ ABC gleichseitig ist. Dieser Fall läßt sich auch geometrisch realisieren. Über einem gleichseitigen Dreieck ABC errichte man im Schnittpunkt S der Dreieckshöhen eine zum Dreieck ABC senkrechte Strecke der Länge

$$h = \frac{a}{\sqrt{6}},\ a = \overline{AB},$$

mit dem Endpunkt D. Dann ist

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2(h^2 + \frac{a^2}{3}) = 2(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}) = a^2,$$

also

$$\overline{\sphericalangle ADB} = \overline{\sphericalangle BDC} = \overline{\sphericalangle ADC} = \frac{\pi}{2}.$$

Dieser Lösung liegen Gedanken des Schülers Andreas Felgenhauer zugrunde.

<u>6.</u>

Sei s(M) bzw. g(M) die Anzahl der spitzwinkligen Dreiecke bzw. die gesamte Anzahl der Dreiecke, die man aus den Punkten einer endlichen ebenen Punktmenge M bilden kann.

Dann gilt

$$\frac{s(M)}{g(M)} \leq a \rightarrow \frac{s(M^*)}{g(M^*)} \leq a, \tag{30}$$

wobei M aus M durch Zufügen eines Punktes entsteht.

<u>Beweis:</u> Möge M^* aus den n + 1 Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ bestehen. Bedeutet M_i die aus M^* durch Weglassen des Punktes A_i entstehende Punktmenge, so ist

$$s(M^*) = \frac{s(M_1) + s(M_2) + \ldots + s(M_{n+1})}{n - 2},$$

$$g(M^*) = \frac{g(M_1) + g(M_2) + \ldots + g(M_{n+1})}{n - 2}$$

da z.B. in der Summe $g(M_1) + \ldots + g(M_{n+1})$ jedes Dreieck (n - 2) mal gezählt ist. Nach Annahme ist

$$s(M_i) \leq a \cdot g(M_i),$$

so daß aus den vorstehenden Bezeichnungen die Behauptung $s(M^*) \leq a\, g(M^*)$ folgt.

Für eine Menge N aus vier Punkten ist

$$g(N) = \binom{4}{3} = 4 \text{ und } s(N) \leq 3.$$

Daher ist $\frac{s(N)}{g(N)} \leq 0{,}75$. Mithin ist für eine Menge N^* aus fünf Punkten

$$\frac{s(N^*)}{g(N^*)} = \frac{s(N^*)}{10} \leq 0{,}75, \text{ d.h. } s(N^*) \leq 7{,}5, \text{ d.h. } s(N^*) \leq 7.$$

Die Behauptung der Aufgabe folgt nun durch vollständige Induktion.

XIII. IMO

1.

$n = 3$. Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$
$$= (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_1 - a_3)^2 \geq 0.$$

$n = 5$. Da die Ungleichung (1) bezüglich der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_5$ symmetrisch ist, kann man o.B.d.A. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$ annehmen. Dann ist $a_1 - a_2 = -(a_2 - a_1) \geq 0$,

$a_1 - a_3 \geq a_2 - a_3 \geq 0$, $a_1 - a_4 \geq a_2 - a_4 \geq 0$,

$a_1 - a_5 \geq a_2 - a_5 \geq 0$,

und daher gilt

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geq 0.$$

Analog schließt man auf

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geq 0.$$

Schließlich ist

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

als Produkt zweier nichtpositiver und zweier nichtnegativer Zahlen nicht negativ. Die Zusammenfassung dieser Aussagen liefert die Behauptung.

$n = 4$. Es genügt, ein Quadrupel reeller Zahlen (a_1, a_2, a_3, a_4) anzugeben; für das die Ungleichung (1) im Falle $n = 4$ falsch ist. Das leistet $(-1, 0, 0, 0)$.

$n > 5$. Für das n-Tupel $a_1 = a_2 = \ldots = a_{i-1} = 0$, $a_i = 1$, $a_{i+1} = \ldots = a_n = 2$ geht die Ungleichung (1) unter der Voraussetzung $3 \leq i \leq n - 2$ in $(-1)^{n-i} \geq 0$ über. Dabei erhält man ungerades $n - i$ gewiß einen Widerspruch. Zu jeder Zahl $n > 5$ gibt es aber eine Zahl i mit $3 \leq i \leq n - 2$ und $n - i$ ungerade. Daher ist die Ungleichung (1) für $n \neq 3$ und $n \neq 5$ nicht allgemein gültig.

2.

Bezeichne P' das Polyeder, das aus P_1 durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A_1 und dem Faktor 2 hervorgeht. Zunächst ist $P_i \subset P'$ für $i = 1, 2, \ldots, 9$. Dann sei X ein beliebiger Punkt aus P_i, $2 \leqq i \leqq 9$, Y sein Bild bei der Verschiebung $A_i \rightarrow A_1$. Die Paare A_1X und A_iY haben dann den gleichen Mittelpunkt Z. Offenbar liegt Y in P_1, und wegen der vorausgesetzten Konvexität von P_1 liegt auch die Strecke $\overline{A_1Y}$ im Polyeder P_1. Damit ist $Z \in P_1$, und X als Bild von Z bei der zentrischen Streckung liegt in P'.

Daraus folgt $P_i \subset P'$, $i = 2, \ldots, 9$.

Ferner erkennt man sofort, daß $P_1 \subset P'$ ist.

Für die Rauminhalte der Polyeder gelten die Beziehungen

$$\overline{P_1} = \overline{P_2} = \ldots = \overline{P_9},\ \overline{P'} = 2^3\overline{P_1} = 8\ \overline{P_1}.$$

Hätten keine zwei der Polyeder $P_1, \ldots, P_9$ einen gemeinsamen inneren Punkt, so wäre ihr in P' eingeschlossenes Gesamtvolumen gleich der Summe der Einzelvolumen, was auf den Widerspruch

$$\overline{P_1} + \overline{P_2} + \ldots + \overline{P_9} = 9\ \overline{P_1} \leqq \overline{P'} = 8\ \overline{P_1}$$

führen würde. Daher gibt es zwei Polyeder mit einem gemeinsamen inneren Punkt.

<u>Bemerkung</u> Von dem Schüler W.Burmeister wurde die Beziehung $P_i \subset P'$, $i = 1, \ldots, 9$, auf folgendem Weg bewiesen. Mit $a_i = \overrightarrow{A_1A_i}$, $i = 1, \ldots, 9$ besteht das Polyeder P_i bzw. P' aus allen Punkten Q mit

$$\overrightarrow{A_1Q} = \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_9 a_9 + a_i,\ \lambda_j \geqq 0,$$

$$\sum_{j=2}^{9} \lambda_j = 1,$$

bzw.

$$\overrightarrow{A_1Q} = 2\mu_2 a_2 + \ldots + 2\mu_9 a_9,\ \mu_j \geqq 0,\ \sum_{j=2}^{9} \mu_j = 1.$$

Man wähle $\mu'_k = \frac{1}{2}\lambda_k$, $\mu'_i = \frac{1}{2}(\lambda_i + 1)$, $i \neq k$, $2 \leqq k \leqq 9$,

$1 \leqq i \leqq 9$ und erhält wegen $\mu_j \geqq 0$,

$$\sum_{j=2}^{9} \mu_j' = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{9} \lambda_j + 1 \right) = 1$$

einerseits einen Punkt aus P', während andererseits gleichzeitig

$$2\mu_2' a_2 + \ldots + 2\mu_9' a_9 = \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_9 a_9 + a_1$$

gilt. Daher läßt sich jeder Punkt von P_1 auch als Punkt von P' darstellen.

3. (Wolfgang Burmeister)
Es wird der Satz von Fermat vorausgesetzt:

Für jede ganze Zahl $n > 1$ existiert eine ganze Zahl $\varphi(n) > 1$ mit $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ für alle a, die zu n teilerfremd sind.

Die gesuchte Teilfolge wird induktiv definiert:

1. $n_0 = 3$
2. $n_{k+1} = \varphi(2^{n_0} - 3)\, \varphi(2^{n_1} - 3) \cdot \ldots \cdot \varphi(2^{n_k} - 3) \cdot n_k$.

Es bleibt zu zeigen, daß $(2^{n_{k+1}} - 3,\ 2^{n_i} - 3) = 1$, $i = 0, 1, \ldots, k$, ist. Nach dem Satz von Fermat gilt

$$2^{\varphi(2^{n_i} - 3)} \equiv 1 \bmod (2^{n_i} - 3)$$

und daher

$$2^{n_{k+1}} - 3 \equiv -2 \bmod (2^{n_i} - 3).$$

Sei t ein gemeinsamer Teiler von $2^{n_{k+1}} - 3$ und $2^{n_i} - 3$. Dann gilt $t \mid 2$ und wegen

$$2 \nmid 2^{n_i} - 3 \text{ ist } t = 1.$$

Mithin sind alle Glieder der Folge $\{2^{n_i} - 3\}$ paarweise teilerfremd. Wegen $n_0 = 3$, $n_1 = 4$, $n_{k+1} = n_k \cdot \varphi(2^{n_k} - 3) > n_k$ für $k \geqq 1$ ist $\{2^{n_i} - 3\}$ eine Teilfolge mit der verlangten Eigenschaft.

Die Behauptung läßt sich leicht verallgemeinern, z.B. auf die Folge $\{2^n - 2^k - 1\}$, und in gleicher Weise beweisen. Wir weisen noch auf eine andere Lösung hin, die den Satz von Fermat nicht verwendet.

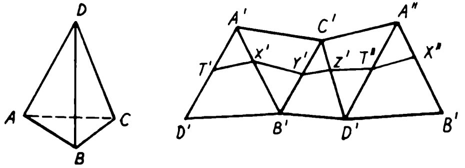
Seien die k Zahlen $a_i = 2^{n_i} - 3$, $i = 1, \ldots, k$, $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ paarweise teilerfremd und $s = a_1 a_2 \ldots a_k$ gesetzt. Von den $(s + 1)$ Zahlen 2^j, $j = 0, 1, \ldots, s$, sind mindestens zwei, etwa 2^α und 2^β, $\alpha > \beta$, kongruent modulo s. Mit

$$2^\alpha - 2^\beta = 2^\beta (2^{\alpha-\beta} - 1) = p \cdot s$$

ist s als ungerade Zahl ein Teiler von $2^{\alpha-\beta} - 1$, d.h. $2^{\alpha-\beta} - 1 = q \cdot s$. Es ist $2^{\alpha-\beta+2} - 3 = 4 \cdot 2^{\alpha-\beta} - 3 = 4qs + 1$. Bezeichnet man diese Zahl mit a_{k+1}, so ist offenbar $(a_{k+1}, a_j) = 1$, $j = 1, \ldots, k$. Damit hat man eine neue Möglichkeit, die gesuchte Folge schrittweise zu definieren.

4. (Wolfgang Burmeister)

Sei A', D', B', D'' A'' C' ein Netz des vorgegebenen Tetraeders und die Seitenfläche $\triangle ADB \cong \triangle A'' D'' B''$ nochmals an das Netz angefügt (vgl. Abb)



Der geschlossene Polygonzug XYZTX erscheint im Netz als Polygonzug T' X' Y' Z' T" bzw. X' Y' Z' T" X". Notwendig dafür, daß der geschlossene Polygonzug XYZTX minimale Länge hat, sind die Beziehungen

a) $X' \in T'Y'$, $Y' \in X'Z'$, $Z' \in Y'T''$, $T'' \in Z'X''$ und

b) $A'D' \parallel A''D''$.

Im entgegengesetzten Fall verkürzt sich der Polygonzug T'X'Y'Z'T", wenn man z.B. für $X' \notin T'Y'$ den Punkt X' durch den Schnittpunkt der Strecken T'Y' und A'B' ersetzt. Der genannte Schnittpunkt existiert, da die Flächen des Netzes spitzwinklige Dreiecke sind und daher A'D'B'C' ein konvexes Viereck ist. Ist a) erfüllt, so liegen T', X', Y', Z', T", X" auf einer Geraden. Wegen

$$\triangle A'T'X' \cong \triangle A''T''X''$$

gilt dann

$$\overline{\sphericalangle A'T'X'} = \overline{\sphericalangle A''T''X''}$$

und damit b) nach der Umkehrung des Satzes über die Stufenwinkel.

Im Falle b) gilt für jeden Polygonzug T'X'Y'Z'T" mit $\overline{A'T'} = \overline{A''T''}$ die Ungleichung

$$\overline{T'X'} + \overline{X'Y'} + \overline{Y'Z'} + \overline{Z'T''} \geq \overline{T'T''} = \overline{A'A''} = 2\ \overline{A'C'}\ \sin \tfrac{1}{2}\overline{\sphericalangle A'C'A''}$$

$$= 2\ \overline{AC}\ \sin \tfrac{1}{2}\ (\overline{\sphericalangle ACB} + \overline{\sphericalangle BCD} + \overline{\sphericalangle DCA}) = 2\ \overline{AC}\ \sin \tfrac{\alpha}{2}\ .$$

Es wird nun gezeigt, daß die Bedingung b) auch hinreichend dafür ist, daß ein Polygonzug T'X'Y'Z'T" von minimaler Länge existiert. Es genügt zu zeigen, daß Punkt $T' \in A'D'$ und $T'' \in A''D''$ mit $\overline{A'T'} = \overline{A''T''}$ so existieren, daß T'T" die Strecken A'B', B'C', C'D" im inneren Punkten X', Y', Z' schneidet. In diesem Fall nimmt die Länge des Polygonzuges das Minimum $2\ \overline{AC}\ \sin \frac{\alpha}{2}$ an, und durch Parallelverschiebung des Polygonzuges T'T" längs A'D' (so daß T', X', Y', Z', T" innere Punkte der Netzkanten bleiben) erhält man unendlich viele Polygonzüge minimaler Länge.

Die Vierecke A'D'B'C' und A"C'B'D" sind konvex, da ihre Innenwinkel kleiner als 180° sind, und daher gilt:

Wenn T'T" die Strecke B'C' im Innern schneidet, so liegen auch die Schnittpunkte X' bzw. Z' im Inneren von A'B' bzw. C'D". Da T' auf A'D' variiert werden kann, genügt die Existenz eines Punktes $Y' \in B'C'$, der im Innern des Parallelogramms A'D'D"A" liegt. Ein solcher Punkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen des konvexen Vierecks A'B'D"C'.

Damit ist bewiesen, daß die Bedingung b) einerseits notwendig für die Existenz eines kürzesten Polygonzuges und andererseits hinreichend für die Existenz unendlich vieler kürzester Polygonzüge von der Länge $2\ \overline{AC}\ \sin \frac{\alpha}{2}$ ist.

Schließlich bleibt zu zeigen, daß die Bedingung b) und die Gleichung

$$\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle CDA} \qquad (2)$$

äquivalent sind.

Die Geraden D'A', B'A', B'C', D"C', D"A" mögen von einer Geraden T'T" geschnitten werden. Die Gerade T'T" möge nach

Drehungen um die Winkel β_1, β_2, β_3, β_4 bzw. β_5 im positiven Sinne in die Geraden D'A', B'A', B'C', D"C' bzw. D"A" übergehen. Damit gilt nach dem Satz über die Außenwinkel am Dreieck

$$\overline{\sphericalangle DAB} = \beta_2 - \beta_1, \qquad \overline{\sphericalangle BCD} = \beta_4 - \beta_3,$$
$$\overline{\sphericalangle ABC} = \beta_2 - \beta_3, \qquad \overline{\sphericalangle CDA} = \beta_4 - \beta_5,$$

und (2) geht über in die Gleichung $\beta_1 = \beta_5$. Diese ist nach dem Satz über die Stufenwinkel und dessen Umkehrung äquivalent mit der Bedingung b).

5.

Es wird für vorgegebenes m eine solche Menge S aus 2^m Punkten angegeben. Dazu seien u_1, u_2 ... u_m Vektoren in der betrachteten Ebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen mögen:

$$|u_i| = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

$$0 \neq |c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m| \neq \frac{1}{2}\ ; \tag{4}$$

wobei $c_i \in \{0, 1, -1\}$ und wenigstens zwei c_i von Null verschieden sind. $|u|$ bedeutet den Betrag des Vektors u. Eine solche Menge von Vektoren läßt sich leicht induktiv definieren. Dazu beachte man, daß der durch

$u_i = (\lambda_i, \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i^2})$, $0 \leq \lambda_i \leq \frac{1}{2}$, definierte Vektor die Bedingung (3) erfüllt. Genügen die Vektoren $u_1, \ldots, u_m$ schon den Bedingungen (3) und (4) und werden sie fixiert, so hat man

$u_{m+1} = (\lambda_{m+1}, \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_{m+1}^2})$ nur so zu wählen, daß für alle Belegungen der Koeffizient c_i, $1 \leq i \leq m+1$, mit den Werten 0, 1, -1, wobei mindestens zwei von Null verschieden sind, der Ausdruck

$$|c_1u_1 + \ldots + c_m u_m + c_{m+1} u_{m+1}|$$

ungleich 0 und ungleich $\frac{1}{2}$ ist. Da das nur endlich viele Bedingungen für den ansonsten im Intervall $0 \leq \lambda_{m+1} \leq \frac{1}{2}$ frei wählbaren Parameter sind, ist die gesuchte Menge von Vek-

toren induktiv definiert.
Mit irgendeinem festen Punkt M_0 (mit dem Ortsvektor r_0) in der Ebene sei S als Menge aller 2^m Punkte mit den Ortsvektoren

$$r_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m, \ \alpha_i \in \{1, -1\}, \ i = 1, \ldots m,$$

definiert.
Ist dem Punkt $M \in S$ das m-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ zugeordnet, so folgt aus (3) und (4), daß genau diejenigen Punkte aus S von M den Abstand 1 haben, deren zugeordnete Tupel sich von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ in genau einer Koordinate unterscheiden.

6.
Bezeichne p die kleinste aller Zeilen- und Spaltensummen. Da für $p \geq \frac{n}{2}$ für die Summe S aller Elemente der Matrix A sofort $S \geq np \geq \frac{1}{2} n^2$ folgt, sei $p < \frac{n}{2}$ vorausgesetzt und o.B.d.A. angenommen, daß die erste Zeile die Summe p hat und genau die ersten q Elemente der ersten Zeile von Null verschieden sind. Daraus folgt, daß die Summe sämtlicher Elemente der (q + 1)ten bis nten Spalte mindestens $(n - q) \cdot n - (n - q)p$ ist. Die Summe aller Elemente der ersten q Spalte ist aber mindestens pq. Das führt zu

$$S \geq (n-q)n - (n-q)\,p + pq = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) > \frac{1}{2}\,n^2.$$

Zur letzten Abschätzung beachte man, daß mit $p < \frac{n}{2}$ auch $q < \frac{n}{2}$ ist.

XIV. IMO

1.

Bekanntlich hat eine Menge M aus n Elementen 2^n Teilmengen, einschließlich der leeren Menge und M selbst. Schließen wir die letzten beiden Mengen aus, da sie nicht der Aufgabenstellung genügen, so bleiben 2^n-2, in unserem Fall also $2^{10}-2$, Teilmengen von M. Die Summe der Elemente in jeder dieser Teilmengen ist gewiß kleiner als $9 \cdot 99 = 891$. Also gibt es für 1022 Teilmengen nur weniger als 891 Elementesummen, d.h. mindestens zwei Elementesummen, etwa von $M_1 \subset M$ und $M_2 \subset M$, müssen gleich sein. Indem man aus M_1 und M_2 gegebenenfalls diejenigen Elemente entfernt, die in beiden Teilmengen enthalten sind, erhält man eine Lösung der Aufgabe.

2.

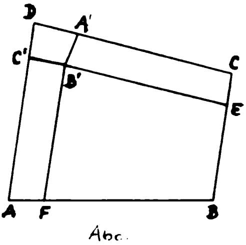
Bekanntlich sind die Seiten eines Vierecks genau dann Sehnen eines Kreises, wenn die Summe gegenüberliegender Winkel dieses Vierecks 180° beträgt.

Fall 1: $n = 4$

Es sei ABCD das gegebene Viereck. Wir konstruieren die Punkte $A' \in CD$, $C' \in AD$ und B' im Innern des Dreiecks ACD so, daß die Winkelbeziehungen

$$\overline{\sphericalangle CDB'} = \overline{\sphericalangle ADB}, \quad \overline{\sphericalangle DB'A'} = \overline{\sphericalangle DBA}, \quad \overline{\sphericalangle DB'C'} = \overline{\sphericalangle DBC}$$

gelten. Offenbar sind dann die Vierecke ABCD und A'B'C'D ähnlich. Weiter beachte man, daß man den Punkt B' in beliebiger Nähe von D festlegen kann. Infolgedessen kann man o.B.d.A. voraussetzen, daß die Parallelen durch B' zu den Seiten DC und DA die Seiten BC bzw. AB in inneren Punkten E und F treffen (s.Abb.). Die Vierecke A'B'C'D, B'ECA', FBEB' und AFB'C' bilden die gesuchte Zerlegung.



Beweis: Die Vierecke A'B'C'D und FBEB' haben die gleichen Innenwinkel wie das Viereck ABCD und sind

daher Sehnenvierecke. Die Trapeze B'ECA' und AFB'C' sind gleichschenklig und daher ebenfalls Sehnenvierecke, denn es gilt

$$\overline{\sphericalangle CA'B'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DA'B'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DAB} = \overline{\sphericalangle BCD}$$

und $$\overline{\sphericalangle AC'B'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DC'B'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle DAB}\ .$$

Fall 2: $n \geq 5$.

Unter Verwendung des Falles 1 kann man nun folgende einfache Lösung angeben:

Man zerlege einen der beiden gleichschenkligen Trapeze durch Parallelen zur Basis in n-3 kleinere gleichschenklige Trapeze. Damit ist das Viereck in n Sehnenvierecke zerlegt.

Aufgaben und Lösungen wurden entnommen aus:

1. "Mathematik in der Schule", Volkseigener Verlag Volk und Wissen

2. "alpha", mathematische Schülerzeitschrift, Volkseigener Verlag Volk und Wissen

3. Sowj. Jugendliteratur: Heft 1967: Internationale Mathematikolympiaden, (Moskau) - III. IMO

4. Tschechoslowakische Jugendliteratur: Hilfsbücher für Schüler Heft 1964 (Prag) - V. IMO

3.
Die zu untersuchende Zahl sei mit $f(m, n)$ bezeichnet.
Man rechnet leicht nach, daß
$f(m, n) = 4f(m, n-1) - f(m+1, n-1)$
gilt. Daraus ergibt sich durch vollständige Induktion
(nach n)

$$f(m, n) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot f(m+k, 0),$$

wobei die C_k gewisse ganze Zahlen sind. Da die $f(m + k, 0)$ Binomialkoeffizienten sind, ist die Behauptung bewiesen.
Eine andere Lösungsmethode besteht darin, für die Exponenten a und b, mit denen eine Primzahl p in den Produkten $(2m)!\,(2n)!$ und $m!n!(m+n)!$ auftritt, die Beziehung $a \geqq b$ nachzuweisen. Dabei verwendet man mit Vorteil, daß der Exponent der Primzahl p in der Primzahlzerlegung von k! durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{k^i}{p}\right] \quad \text{gegeben ist.}$$

4.
Offenbar sind durch
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, x_i positive rëlle Zahl, (6)
Lösungen gegeben.
Sind andererseits nicht alle x_i, $i = 1, \ldots, 5$, einander gleich, so muß mindestens eine der Beziehungen

$$x_1 \neq x_3,\ x_3 \neq x_5,\ x_5 \neq x_2,\ x_2 \neq x_4,\ x_4 \neq x_1$$

erfüllt sein. Da das Ungleichungssystem (1) bis (5) invariant gegenüber den Vertauschungen

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_1$$

ist und mit $(x_1, \ldots, x_5)$ stets auch $(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_5})$ eine Lösung ist, darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit zunächst $x_3 \neq x_5$ und dann $x_3 < x_5$ annehmen.
Nun ergibt sich für $x_1 \leqq x_2$ aus (1) $x_1 \leqq \sqrt{x_3x_5} < x_5$ und $x_2 \geqq \sqrt{x_3x_5} > x_3$. Das führt einerseits zu

$x_5^2 > x_5x_3 > x_1x_3$ und wegen (4) zu $x_4^2 \leqq x_1x_3 < x_3x_5$,

andererseits zu

$x_3^2 < x_3x_5 < x_2x_5$ und wegen (3) zu $x_4^2 \geqq x_5x_2 > x_5x_3$.
Das bedeutet einen Widerspruch.
Ist aber $x_1 > x_2$, so folgt aus (1)

$$x_1 \geqq \sqrt{x_3x_5} > x_3 \quad \text{und} \quad x_2 \leqq \sqrt{x_3x_5} < x_5,$$

woraus nach (2)

$$x_4 \cdot x_1 \leqq \max(x_2^2, x_3^2) \leqq x_3x_5 \qquad (7)$$

folgt, während sich unter Verwendung von (5)

$$x_2x_4 \geqq \min(x_5^2, x_1^2) \geqq x_3 \cdot x_5 \qquad (8)$$

ergibt. Aus (7) und (8) folgt $x_1 \leqq x_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher sind sämtliche Lösungen des Ungleichungssystems (1) bis (5) durch (6) beschrieben.

5.

Sei $M = \sup f(x)$. Angenommen, es existiert ein y_0 mit $g(y_0) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Dann ist für alle x

$$2|f(x)| \cdot |g(y_0)| = |f(x + y_0) + f(x - y_0)| \leqq |f(x + y_0)| + |f(x - y_0)| \leqq 2M,$$

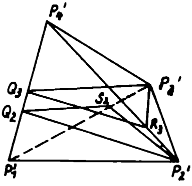
also

$$|f(x)| \leqq \frac{M}{|g(y_0)|} = \frac{M}{1 + \varepsilon} = M - \eta, \quad \eta > 0 \text{ fest.}$$

Das bedeutet einen Widerspruch zur Definition von M und beweist die Behauptung. Für diese elegante Lösung erhielt ein polnischer Schüler einen Sonderpreis.

6.

Seien E_1, E_2, E_3, E_4 die betrachteten Ebenen und die Numerierung so gewählt, daß E_2, E_3, E_4 in dieser Reihenfolge in Richtung eines Normalvektors von E_1 aus liegen, wobei d_i der Abstand der Ebene E_{i+1} von E_i sei, $i = 1, 2, 3$.
Gesucht sind Punkte P_i in E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, die ein regelmäßiges Tetraeder bilden.
Sei ein beliebiges regelmäßiges Tetraeder $P'_1P'_2P'_3P'_4$ vorgegeben.



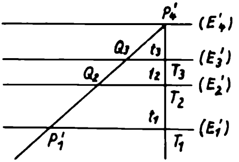
Man teile die Strecke $P'_1P'_4$ im Verhältnis $d_1 : d_2 : d_3$ und erhält die Teilpunkte Q_2, Q_3 auf $P'_1P'_4$. Teilung der Strecken $P'_2P'_4$ im Verhältnis $d_2 : d_3$ und $P'_1P'_3$ im Verhältnis $d_1 : d_2$ führt zu den Teilpunkten R_3 und S_2.
Dann gilt für die Streckenlängen

$$\overline{P'_4Q_3} : \overline{P'_4Q_2} = \overline{P'_4R_3} : \overline{P'_4P'_2}$$

und daher nach der Umkehrung des Strahlensatzes $Q_3R_3 \parallel Q_2P'_2$.
Ebenso folgt aus

$$\overline{P'_1Q_2} : \overline{P'_1Q_3} = \overline{P'_1S_2} : \overline{P'_1P'_3}$$

die Beziehung $Q_2S_2 \parallel Q_3P'_3$. Daher sind die durch Q_2, P'_2, S_2 bzw. Q_3, R_3, P'_3 bestimmten Ebenen E'_2, E'_3 parallel. Sei E'_1 bzw. E'_4 eine zu E'_2 parallele Ebene durch P'_1 bzw. P'_4.



Das Lot von P'_4 auf E'_i schneide die Ebene E'_i im Punkt T_i, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt nach dem Strahlensatz für die Abstände t_1, t_2, t_3:

$$t_1 : t_2 : t_3 = \overline{P'_1Q_2} : \overline{Q_2Q_3} : \overline{Q_3P'_4} = d_1 : d_2 : d_3 \qquad (9)$$

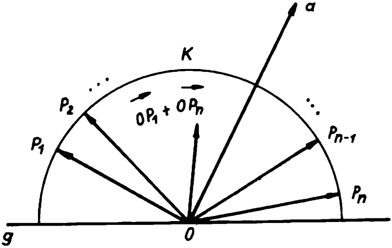
Eine Streckung im Raum um den durch (9) bestimmten Faktor überführt die Ebenen E'_1, E'_2, E'_3, E'_4 in Ebenen E''_1, E''_2, E''_3, E''_4 mit den Ausgangsabständen und überführt

$P'_1P'_2P'_3P'_4$ in ein wiederum regelmäßiges Tetraeder
$P''_1P''_2P''_3P''_4$, P''_i in E''_i, $i = 1, 2, 3, 4$.
Da es offenbar darauf ankommt, für irgendwelche vier parallelen Ebenen im Raum, die die ursprünglich betrachteten Abstände voneinander haben, ein regelmäßiges Tetraeder mit einem Eckpunkt in jeder der Ebenen zu bestimmten, ist die Aufgabe gelöst. Diese Lösung stammt von Rainer Siegmund-Schultze.
Neben diesem mehr synthetischen Lösungsweg bietet sich die Verwendung von Mitteln der analytitschen Geometrie an. Zwar hat man dabei größere Rechnungen zu bewältigen, verfügt aber über einen sicheren Weg zur Lösung. Eine entsprechende Variante sei kurz skizziert.
Man geht aus von der Annahme, daß für vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4, die durch die Gleichungen $z = 0$, $z = a$, $z = b$ bzw. $z = c$ gegeben sind, ein oben beschriebenes regelmäßiges Tetraeder existiert und macht den Ansatz $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (u, 0, a)$, $P_3 = (v_1, v_2, b)$, $P_4 = (w_1, w_2, c)$, P_3 muß auf der durch den Mittelpunkt $M = (\frac{u}{2}, 0, \frac{a}{2})$ der Strecke P_1P_2 verlaufenden Ebene E mit dem Normalvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ liegen.
E schneidet E_3 längs einer Geraden g, auf der zwei Lagen für P_3 durch die Bedingung $\overline{P_3M} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{P_1P_2}$ charakterisiert sind. Fixiert man eine Lage für P_3, so liefert $\overrightarrow{OP_3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_3M}$ (O Koordinatensprung) den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$. P_4 liegt auf der Geraden mit der Gleichung
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS} + t\underline{a}$, wobei $\underline{a}$ ein zu $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ senkrechter Vektor ist. Man hat zu zeigen, daß sich ein Wert des Parameters t finden läßt, für den der entsprechende Punkt die z-Koordinate c und von P_1 den Abstand $\overline{P_1P_2}$ hat. Abschließend ist zu begründen, daß durch die Rechnung auch tatsächlich ein regelmäßiges Tetraeder bestimmt ist, was die Untersuchung einschließt, daß alle in der Rechnung auftretenden Wurzelausdrücke für Abstände, Koordinaten und Parameter reelle Zahlen darstellen.

XV. IMO

1.

Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Sei $n \geq 3$ und mögen die n Endpunkte der (Orts-)Vektoren in der Reihenfolge P_1, P_2, ..., P_n auf dem halben Einheitskreis K um O eingeordnet sein .



Falls die Behauptung für alle (ungeraden) $k < n$ richtig ist, ist auch $\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \ldots + \overrightarrow{OP}_{n-1}$, ein von O ausgehender Vektor $\underline{a}$ der Länge $|\underline{a}| \geq 1$, der offenbar den Halbkreis K zwischen den Punkten P_2 und P_{n-1} schneidet bzw. berührt. Der Vektor $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_n}$ ist vom Nullvektor verschieden, liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_n})$ und schließt dabei mit $\underline{a}$ einen spitzen Winkel ein. Daher ist für

$|\underline{a}| \geq 1$ auch $|\underline{a} + (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_n})| \geq |\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1$ und die Behauptung auch für n richtig.

2.

Zum Beweis der Existenz einer solchen Menge genügt es, ein Beispiel anzugeben. Um die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten anzudeuten, wollen wir hier 4 Beispiele anführen.
Wir möchten jedoch zunächst darauf hinweisen, daß die Aufgabe eine sehr einfache Lösung hat. Legt man nämlich drei gleichgroße Würfel in einer Reihe aneinander, so hat die aus den acht Eckpunkten des mittleren Würfels und den beiden Mittel-

punkten der benachbarten Würfel gebildete Menge die geforderten Eigenschaften. Diese aus 10 Punkten bestehende Menge ist als Spezialfall in dem folgenden Beispiel enthalten:

Für eine beliebige gerade Zahl $n \geq 4$ seien $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ kongruente n-ecke, die in zwei verschiedenen parallelen Ebenen liegen und je ein Symmetriezentrum P bzw. Q besitzen. Ferner sei $\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{PQ}$ $(i = 1, \ldots, n)$, und R und S seien Punkte mit $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ}$, wobei O die Mitte der Strecke PQ ist. Schließlich führen wir die bezüglich des Punktes O symmetrisch gelegene Punktmenge

$$M_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n, R, S\}$$

ein. Sind A und B Punkte aus M_1, deren Verbindungsstrecke nicht durch O geht, so genügt es, die zu A und B bezüglich O symmetrisch liegenden Punkte C und D aufzusuchen. Geht aber die Strecke AB durch O, so ist entweder $AB = RS$ (in diesem Fall wähle man $C = A_1$ und $D = B_1$) oder es gilt o.B.d.A. $A \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $B \in \{B_1, \ldots, B_n\}$.

Ist nun A' der A gegenüberliegende Eckpunkt des Vielecks $A_1 A_2 \ldots A_n$, so gilt:

$$\overrightarrow{RA'} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AO} \text{ und daher } RA' \parallel AO \parallel AB,$$

und man kann $C = R$ und $D = A'$ nehmen.

Der Spezialfall, daß die beiden Vielecke regelmäßige Sechsecke sind, auf deren Ebenen PQ senkrecht steht, wurde von dem Schüler Gerd Weißenborn vorgeschlagen.

Ist $E_1 E_2 \ldots E_6$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkt S und sind $P_1, \ldots, P_6$ neben $E_1, \ldots, E_6$ die Schnittpunkte der nicht durch S laufenden Diagonalen (Abb.), ist weiter $\underline{a}$ ein nicht zur Sechseckebene paralleler Vektor und sind die Punkte P_i' und P_i'' durch die Gleichung

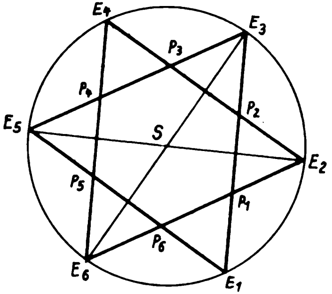
$$\overrightarrow{P_i P_i'} = \overrightarrow{P_i'' P_i} = \underline{a} \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

gegeben, so ist die Menge

$$M_2 = E_1, \ldots, E_6, P_1'', \ldots, P_6'', P_1', \ldots, P_6'$$

eine Lösung der Aufgabe.

Zum Beweis bemerken wir, daß die Figur das Symmetriezentrum S besitzt, und daher genügt es nach dem Obigen, den Fall zu betrachten, daß die Strecke AB durch S geht.



Die Behauptung ist trivial, wenn AB dem Sechseck $E_1 \dots E_6$ angehört. Anderenfalls gilt o.B.d.A.

$$A = P_1' \quad \text{und} \quad B = P_4'' \; ; \quad \text{in diesem Fall ist}$$

$$\overrightarrow{P_1'P_4''} = 2\,\overrightarrow{P_1S} - 2\,\underline{a} = 2\,(\overrightarrow{E_1P_6} - \underline{a}) = 2\,\overrightarrow{E_1P_6''} \quad ,$$

so daß man $C = E_1$ und $D = P_6''$ wählen kann.
Damit ist die Behauptung auch für die Menge M_2 bewiesen. Diese Menge wurde im wes. von dem Schüler Reinhard Schuster vorgeschlagen.

Ferner seien V und W zwei Vielecke, die ein gemeinsames Symmetriezentrum S haben, in verschiedenen Ebenen liegen und die folgende Eigenschaft besitzen:
Zu jeder Diagonalen des Vielecks gibt es eine andere, zu dieser parallele Diagonale desselben Vielecks.
Die Menge M_3 aller Eckpunkte dieser beiden (oder auch mehrerer derartiger) Vielecke genügt der Aufgabenstellung.

Von dem Schüler Albrecht Böttcher wurde derjenige Spezialfall der Menge M_3 angeführt, in dem die beiden Vielecke kongruente regelmäßige Sechsecke sind, die eine Diagonale gemeinsam haben und deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

Schließlich können wir noch die Menge M_4 aller Kanten-mittelpunkte eines Würfels bilden.

Es fällt auf, daß alle bisher angegebenen Lösungen der Aufgabe Punktmengen mit einem Symmetriezentrum sind. Für derartige Lösungen kann man beweisen, daß sie mindestens 10 Punkte enthalten müssen. Jedoch kann man auch Lösungen ohne Symmetriezentrum angeben, die aus 13 oder mehr Punkten bestehen (z.B. die Menge der Eckpunkte von fünf aneinandergelegten gleichgroßen Würfeln zusammen mit den Mittelpunkten des ersten, zweiten und fünften Würfels - sie enthält 27 Elemente). Ob es Lösungen mit weniger als 10 Punkten gibt, ist uns nicht bekannt.

3.

Sei M (bzw. N) die Menge aller Paare (a,b), für die die Gleichung (1) mindestens eine reelle (bzw. mindestens eine positive reelle) Lösung hat. Dann besteht die Aufgabe darin, die Zahl

$$d = \min_{(a,b)\in M} (a^2 + b^2)$$

zu bestimmen. Mit

$$g = \min_{(a,b)\in N} (a^2 + b^2)$$

gilt wegen $N \subset M$ offenbar $g \leq d$. Andererseits ist jede reelle Lösung von (1) entweder positiv oder negativ, und da für jede negative Lösung x_0 von (1) die Zahl $-x_0$ eine (positive) Lösung von

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0 \qquad (1')$$

ist und die Gleichung (1') aus (1) hervorgeht, indem man a durch -a ersetzt, gilt $d = g$.

Aus (1) erhält man durch die Substitution

$$u = x + \frac{1}{x} \qquad (2)$$

die Gleichung

$$u^2 + au + b - 2 = 0 . \qquad (3)$$

Ist x_0 eine positive Lösung von (1), so ist bekanntlich

$$u_0 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2 . \qquad (4)$$

Ist umgekehrt für eine Lösung u_0 von (3) die Beziehung (4) erfüllt, so hat die Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = u_0 , \quad \text{d.h.} \quad x^2 - u_0 x + 1 = 0$$

mindestens eine reelle Lösung, da dann die Diskriminante

$$D = \frac{u_0^2}{4} - 1 \geq 0 \quad \text{ist.}$$

Ist daher R die Menge aller Paare (a, b), für die die Gleichung (3) mindestens eine reelle Lösung ≥ 2 hat, so gilt

$$d = \min_{(a,\, b) \in R} (a^2 + b^2).$$

Wir betrachten für $f(u) = u^2 + au + b - 2$ zwei Fälle.

Fall 1: $f(2) \leq 0$.

Wegen $\lim\limits_{u \to \infty} f(u) = +\infty$ existiert nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen eine reelle Zahl $u \geq 2$ mit $f(u) = 0$. Die Bedingung $f(2) = 2a + b + 2 \leq 0$ bestimmt die Halbebene H unterhalb der Geraden $b = -2a - 2$ (in einem kartesischen a, b - Koordinatensystem). Für jeden Punkt dieser Halbebene liegt das Paar (a, b) seiner Koordinaten in R, insgesamt möge derart die Teilmenge $R_1 \subseteq R$ bestimmt werden. Dann wird

$$d_1 = \min_{(a,\, b) \in R_1} (a^2 + b^2)$$

für einen Punkt $P \in H$ mit den Koordinaten (a, b) erreicht, der unter allen Punkten von H einen kleinsten Abstand vom Koordinatenursprung O hat, d. h. P ist der Fußpunkt des Lotes vom Punkt O auf die Gerade $b = -2a - 2$ und da dieses Lot die Länge $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ hat, gilt

$$d_1 = \min_{(a,\, b) \in R_1} (a^2 + b^2) = \frac{4}{5} \; .$$

Fall 2: $f(2) > 0$.

Damit es eine reelle Zahl $u_0 \geq 2$ gibt, für die $f(u_0) = 0$ ist, muß in diesem Fall

$- \frac{a}{2} > 2$, d. h. $a < -4$ und $a^2 + b^2 \geq a^2 > 16$ sein.

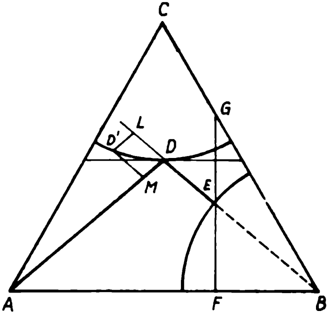
Daher ist

$$\frac{4}{5} = \min_{(a,\, b) \in R_1} (a^2 + b^2) = \min_{(a,\, b) \in R} (a^2 + b^2) = \min_{(a,\, b) \in M} (a^2 + b^2) = d$$

und die Aufgabe ist gelöst. Dieser Lösungsgedanke stammt von dem Schüler Albrecht Heß.

4.
Möge der Soldat vom Punkt A des gegebenen gleichseitigen Dreiecks ABC ausgehen. Zur Überprüfung der Punkte C und B muß der Weg des Soldaten gewisse Punkte D und E auf den Bögen um C und B mit dem Radius $\frac{h}{2}$ treffen. Wegen $\overline{BE} = \frac{h}{2}$ wird der Weg ADE dann am kürzesten, wenn der Weg ADEB am kürzesten ist. In diesem Fall müssen die Teilwege von A nach D und von D nach E geradlinig sein, E muß auf DB liegen, und D ergibt sich als Lösung des Problems

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \min ! \;, \quad \overline{CD} = \frac{h}{2} \;.$$



Offenbar ist D dann die Mitte der Höhe von C auf AB, die von A und B gleichweit entfernt ist.
Falls nämlich D' ein anderer Punkt des Bogens ist, der z.B. näher an A liegt (Abb.), sind außerdem D'L und D'M die Lote auf die Geraden DB und AD, so liegt D' auf der L zugewandten Seite der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ LDM, und daher ist

$$\overline{D'L} < \overline{D'M} \,, \quad \overline{LD} > \overline{MD} \quad \text{und}$$

$$\overline{AD'} + \overline{D'B} > \overline{AM} + \overline{LB} = (\overline{AD} + \overline{DB}) + (\overline{LD} - \overline{MD}) > \overline{AD} + \overline{DB} \;.$$

Schließlich ist noch nachzuweisen, daß der Soldat beim Durchlaufen des Weges ADE das gesamte Dreieck ABC überprüft.
Die Senkrechte zu AB in einem beliebigen Punkt des Weges schneidet die Seiten in einer Entfernung von dem Punkt von höchstens $\frac{h}{2}$. Diese Senkrechten überstreichen das Viereck AFGC. Das noch übrigbleibende Dreieck FBG wird von der Kreisscheibe um E mit dem Radius $\frac{h}{2}$ überprüft, da diese die Punkte F,B und G bedeckt.

5.

Da $f(x) = x + b$ nur für $b=0$ Fixpunkte besitzt, ist für jedes $g(x) = ax + b$ aus G das Glied b durch a eindeutig bestimmt. Denn mit $g_1(x) = ax + b_1$ und $g_2(x) = ax + b_2$ aus G liegt auch

$$g_1^{-1}(g_2(x)) = \frac{(ax + b_2) - b_1}{a} = x + \frac{b_2 - b_1}{a}$$

in G. Daher ist $b_1 = b_2$. Um die Existenz der behaupteten Zahl k zu zeigen, können wir von zwei Funktionen

$$m(x) = ax + b$$

$$n(x) = cx + d \quad \text{mit} \quad a \neq 1 \text{ und } c \neq 1$$

ausgehen, da die Funktionen $h(x) = x + q$ aus G ohnehin für alle Zahlen k die Beziehung $h(k) = k$ erfüllen.

Falls $m, n \in G$, so folgt aus

$$m(n(x)) = acx + ad + b$$

$$n(m(x)) = acx + bc + d ,$$

daß

$$ad + b = bc + d \quad \text{oder} \quad \frac{-d}{c-1} = \frac{-b}{a-1} \quad , \quad x_m = x_n$$

gilt.

6.

Man setze für $k = 1,2,\ldots,n$

$$b_k = a_1 q^{k-1} + \ldots + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + \ldots + a_n q^{n-k} .$$

Dann ist offenbar $b_k > a_k$. Ferner gilt für $k = 1,\ldots,n-1$

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2-1) + a_{k+2}q(q^2-1) + \ldots + a_n q^{n-k-1}(q^2-1) < 0$$

und

$$qb_{k+1} - b_k = a_1 q^{k-1}(q^2-1) + a_2 q^{k-2}(q^2-1) + \ldots + a_k(q^2-1) < 0 .$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_n = {} & a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \ \ldots\ + a_n q^{n-1} + \\ & a_1 q + a_2 + a_3 q + \ \ldots\ + a_n q^{n-2} + \\ & a_1 q^2 + a_2 q + a_3 + \ \ldots\ + a_n q^{n-3} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \ldots + a_n \\ < {} & (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + 2q + 2q^2 + \ldots + 2q^{n-1}) \\ < {} & (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,\frac{1+q}{1-q} \ . \end{aligned}$$

Damit sind alle geforderten Bedingungen nachgewiesen.

Herkunft der Aufgaben – erteilte Punktzahlen

Aufgabe	I. IMO		II. IMO	
1.	VR Polen	5	VR Bulgarien	
2.	SR Rumänien	8	Ungarische VR	
3.	Ungarische VR	7	SR Rumänien	
4.	Ungarische VR	5	Ungarische VR	
5.	SR Rumänien	8	CSSR	
6.	CSSR	7	VR Bulgarien	
7.	-	-	DDR	
zusammen		40		45

Aufgabe	III. IMO		IV. IMO	
1.	Ungarische VR	6	VR Polen	6
2.	VR Polen	7	Ungarische VR	6
3.	VR Bulgarien	7	CSSR	8
4.	DDR	6	SR Rumänien	5
5.	CSSR	7	VR Bulgarien	7
6.	SR Rumänien	7	DDR	6
7.	-	-	UdSSR	8
zusammen		40		46

Aufgabe	V. IMO		VI. IMO	
1.	CSSR	6	CSSR	7
2.	UdSSR	7	Ungarische VR	7
3.	Ungarische VR	7	SFR Jugoslawien	6
4.	UdSSR	6	Ungarische VR	6
5.	DDR	6	SR Rumänien	7
6.	Ungarische VR	8	VR Polen	9
7.	-	-	-	-
zusammen		40		40

Aufgabe	VII. IMO		VIII. IMO	
1.	SFR Jugoslawien	4	UdSSR	6
2.	VR Polen	6	Ungarische VR	7
3.	CSSR	8	VR Bulgarien	7
4.	UdSSR	6	SFR Jugoslawien	5
5.	SR Rumänien	7	CSSR	7
6.	VR Polen	9	VR Polen	8
zusammen		40		40

Aufgabe	IX. IMO		X. IMO	
1.	CSSR	6	SR Rumänien	6
2.	VR Polen	7	CSSR	7
3.	Großbritannien	8	VR Bulgarien	7
4.	Italien	6	VR Polen	5
5.	UdSSR	7	DDR	7
6.	Ungarische VR	8	Großbritannien	8
zusammen		42		40

Aufgabe	XI. IMO		XII. IMO	
1.	DDR	5	VR Polen	5
2.	Ungarische VR	7	SR Rumänien	7
3.	VR Polen	7	Schweden	8
4.	Niederlande	6	CSSR	6
5.	Mongolische VR	7	VR Bulgarien	6
6.	UdSSR	8	UdSSR	8
zusammen		40		40

Aufgabe	XIII. IMO		XIV. IMO	
1.	Ungarische VR	5	UdSSR	5
2.	UdSSR	7	Niederlande	6
3.	VR Polen	9	Großbritannien	7
4.	Niederlande	6	Niederlande	7
5.	VR Bulgarien	7	VR Bulgarien	7
6.	Schweden	8	Großbritannien	8
zusammen		42		40

Aufgabe	XV. IMO		XVI. IMO	
1.	CSSR	6		
2.	VR Polen	6		
3.	Schweden	8		
4.	SFR Jugoslawien	6		
5.	VR Polen	6		
6.	Schweden	8		
zusammen		40		

Tafel Ia	I. JMO 1959				II. JMO 1960				III. JMO 1961				IV. JMO 1962			V. JMO 1963		
Preise	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
VR Bulgarien	–	–	–	1	–	–	1	2	–	–	–	1	–	1	2	–	–	3
ČSSR	1	–	–	4	1	1	2	2	–	–	1	3	–	1	3	1	–	1
DDR	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	1	3	–	1	–	–	–	3
SFR Jugoslawien	nicht teilgenommen															1	2	1
Mongolische VR	nicht teilgenommen																	
VR Polen	–	–	–	1	nicht teilgen.				1	–	–	6	–	1	3	–	–	2
SR Rumänien	1	2	2	1	1	1	1	1	–	1	1	4	–	3	3	1	1	3
UdSSR	–	–	1	2	nicht teilgen.								2	2	2	4	3	1
Ungarische VR	1	1	2	1	2	2	–	1	2	3	1	2	2	3	2	–	5	3
Rep. Finnland	nicht teilgenommen																	
Frankreich	nicht teilgenommen																	
Großbritannien	nicht teilgenommen																	
Italien	nicht teilgenommen																	
Schweden	nicht teilgenommen																	
Belgien	nicht teilgenommen																	
Niederlande	nicht teilgenommen																	
Österreich	nicht teilgenommen																	
Rep. Kuba	nicht teilgenommen																	

VI. JMO 1964			VII. JMO 1965				VIII. JMO 1966				IX. JMO 1967				X. JMO 1968				XI. JMO 1969			
1.	2.	3.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Sond. Preis	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.
—	—	3	-	-	1	-	-	1	3	-	1	-	1	1	-	3	1	-	-	-	3	-
-	2	2	-	1	3	-	-	1	2	-	-	1	3	-	2	4	-	-	-	-	3	1
—	1	2	-	2	3	-	3	3	-	-	3	3	1	-	5	3	-	-	-	4	4	2
—	1	1	-	-	2	-	-	2	1	-	-	-	3	-	-	-	3	1	-	2	2	-
—	—	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-
1	1	3	-	1	3	1	1	4	1	-	-	-	1	-	2	3	2	-	-	1	-	1
-	2	3	-	4	3	1	1	1	2	-	1	1	4	-	1	1	2	-	-	4	2	1
3	1	3	5	2	-	-	5	1	1	-	3	3	2	1	5	1	2	-	1	3	3	3
3	1	1	3	2	2	2	3	2	1	-	2	3	3	-	3	3	2	2	1	4	2	1
			-	-	-	1																
											-	-	-	-					-	1	-	-
											1	2	4	1	3	2	2	1	1	1	1	3
											-	1	1	-	-	-	1	-				
											-	-	2	-	1	2	5	-	-	-	-	1

XII. JMO 1970				XIII. JMO 1971				XIV. JMO 1972				XV. JMO 1973				XVI. JMO 1974				XVII. JMO 1975			
1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.
–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	1									
–	–	4	1	–	–	1	–	–	–	4	–	–	1	4									
1	2	4	2	1	1	4	1	1	3	4	1	–	3	4									
–	3	3	–	–	–	2	–	–	–	3	–	–	–	5									
–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1									
–	–	1	–	1	–	4	–	1	1	1	1	–	2	4									
–	3	4	–	–	1	4	–	1	3	1	1	–	1	3									
2	1	3	–	1	5	2	–	2	4	2	–	3	2	3									
3	1	3	4	4	4	–	2	3	3	2	–	1	2	5									
												–	–	2									
–	1	4	–	–	–	–	–					–	3	1									
1	–	6	–	–	1	4	–	–	2	4	–	1	–	5									
–	–	1	–	–	–	2	–	–	–	2	–	–	1	1									
–	–	1	–	–	–	2	1	–	–	–	–	–	–	2									
–	–	1	–	–	–	4	–	–	–	5	–	–	–	6									
				–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1									

Tafel II a Land	I. JMO 1959 VR Rumänien	zus.	II. JMO 1960 VR Rumänien	zus.	III. JMO 1961 Ungarische VR	zus.	IV. JMO 1962 ČSSR	zus.	V. JMO 1963 VR Polen	zus.
VR Bulgarien	30 22 10 17 15 10 9 8	131	35 31 29 28 22 14 10 6	175	28 18 15 14 14 13 4 2	108	37 33 32 26 26 15 15 13	196	26 22 21 19 18 17 12 10	145
ČSSR	40 29 28 25 28 21 12 9	192	43 37 34 33 32 32 24 22	257	33 25 24 21 16 15 13 12	159	35 33 30 29 23 23 20 19	212	35 23 20 15 15 15 14 14	151
DDR	9 6 6 6 4 4 3 2	40	16 10 6 4 2 0 0 0	38	31 23 22 20 14 13 12 11	146	34 21 21 21 18 18 14 6	153	23 22 21 18 17 14 13 12	140
SFR Jugoslawien									36 31 28 27 16 15 7 2	162
Mongolische VR										
VR Polen	25 20 19 18 16 11 8 5	122			39 29 29 24 23 23 20 16	203	39 33 32 30 28 20 18 11	212	23 21 20 19 16 14 14 7	134
SR Rumänien	37 36 36 35 33 28 23 21	249	41 39 34 30 28 27 26 23	248	34 30 28 27 26 26 14 12	197	39 38 35 32 32 30 28 23	257	37 31 27 25 21 18 16 16	191
UdSSR	34 32 30 15	111					46 42 37 36 31 30 22 19	263	39 39 38 35 34 30 29 27	271
Ungarische VR	37 36 35 34 31 24 21 15	233	43 41 38 37 29 21 21 18	248	40 37 36 34 34 33 29 27	270	45 41 39 39 38 32 32 23	289	34 33 32 32 29 26 25 23	234
Rep. Finnland										
Frankreich										
Großbritannien										
Italien										
Schweden										
Belgien										
Niederlande										
Österreich										
Rep. Kuba										

VI. JMO 1964 UdSSR	Zus.	VII. JMO 1965 DDR	Zus.	VIII. JMO 1966 VR Bulgarien	Zus.	IX. JMO 1967 SFR Jugoslawien	Zus.	X. JMO 1968 UdSSR	Zus.	XI. JMO 1969 SR Rumänien	Zus.
30 30 27 24 23 23 23 18	198	21 16 15 11 10 9 7 4	93	34 33 32 32 29 28 28 22	238	42 24 21 20 20 14 11 7	159	37 35 33 29 22 20 15 13	204	28 28 25 23 22 22 21 20	189
36 36 30 28 19 18 14 13	194	32 29 22 20 17 16 12 11	159	38 32 31 29 27 22 20 16	216	30 29 27 24 16 13 11 9	159	40 40 35 34 34 33 16 16	248	28 28 25 22 20 20 14 13	170
31 29 27 25 25 24 20 15	196	30 30 29 28 22 14 13 9	175	40 40 40 38 35 35 26 26	280	42 42 39 35 33 30 23 13	257	40 40 40 40 39 37 34 34	304	36 35 35 32 29 25 24 24	240
31 29 24 18 17 16 13 7	155	21 16 15 11 10 9 7 4	93	38 37 33 30 27 27 16 16	224	26 22 22 18 18 13 11 6	136	28 27 27 24 24 18 17 14	179	32 30 27 25 22 18 17 10	189
27 26 26 26 22 15 14 13	169	11 11 10 9 6 6 5 5	63	18 15 14 12 9 8 7 5	88	26 13 11 10 9 7 6 5	87	19 15 12 9 8 8 2 1	74	25 21 17 17 13 13 10 4	120
39 31 30 30 28 26 24 1	209	32 29 29 26 19 18 16 9	178	40 38 36 36 35 33 26 25	269	22 20 18 12 9 8 7 5	101	40 39 37 35 34 29 28 20	262	34 20 18 13 10 9 8 7	119
33 32 30 30 27 24 21 16	213	34 32 32 31 29 24 22 18	222	40 37 33 33 30 29 29 26	257	42 34 29 28 23 22 19 17	214	40 35 30 29 24 22 18 10	208	37 31 30 30 28 27 21 15	219
42 39 38 36 30 30 29 25	269	40 39 39 38 38 36 32 19	281	40 40 40 39 39 38 33 24	293	42 39 38 37 35 32 27 25	275	40 40 40 40 39 38 32 29	298	40 32 30 30 27 23 24 21	231
41 39 39 35 28 26 24 21	253	40 38 38 34 31 28 27 4	240	40 40 40 36 34 32 30 29	281	38 38 34 33 31 28 26 23	251	40 40 40 38 38 36 31 28	291	40 37 35 34 31 25 24 21	247
		16 12 8 8 6 5 4 3	62								
						12 10 9 - 6 4 - -	41			30 22 18 14 13 10 8 4	119
						41 36 34 28 28 24 22 18	231	39 39 39 38 38 30 26 14	263	40 30 24 22 21 20 18 18	193
						35 26 20 19 7 3 - -	110	29 24 23 17 14 11 9 5	132		
						28 23 20 16 15 14 10 9	135	40 37 35 30 30 29 28 27	256	18 16 16 14 12 11 9 8	104
										16 10 10 5 5 5 3 3	57
										15 12 9 6 4 4 1 0	51

XII. JMO 1970 Ungarische VR	Zus.	XIII. JMO 1971 ČSSR	Zus.	XIV. JMO 1972 VR Polen	Zus.	XV. JMO 1973 UdSSR	Zus.	XVI. JMO 1974 DDR	Zus.	XVII. JMO 1975	Zus.
24 24 21 18 18 18 11 11	145	10 8 6 4 4 3 3 1	39	29 22 17 15 13 11 10 3	120	21 14 14 14 12 10 7 4	96				
23 22 21 20 18 18 13 10	150	11 9 8 8 7 6 4 2	55	26 21 20 19 18 11 10 5	130	29 23 21 21 18 14 12 11	149				
40 31 30 28 27 27 22 16	221	38 23 21 18 16 11 8 7	142	40 35 31 31 29 27 27 19	239	30 28 27 24 23 22 21 13	188				
34 31 31 28 28 27 16 14	209	21 12 10 10 9 4 3 2	71	26 25 23 17 17 15 11 2	136	24 21 20 19 19 16 14 4	137				
23 11 10 8 7 7 6 6	78	9 5 3 3 3 2 1 0	26	12 8 8 5 5 4 4 2	48	20 12 7 7 6 6 4 2	64				
19 15 14 13 12 12 12 8	105	38 18 17 15 11 10 6 4	119	40 37 25 15 15 11 9 8	160	31 30 25 23 23 17 16 9	174				
34 31 30 25 25 23 22 18	208	27 21 16 15 13 9 7 2	110	40 35 35 31 19 16 15 15	206	33 26 22 19 16 11 8 6	141				
40 39 35 27 24 24 17 15	221	35 32 31 27 26 24 18 12	206	40 40 39 38 33 30 28 22	270	40 39 39 32 28 26 26 24	254				
40 39 37 32 25 24 20 16	233	42 39 38 37 27 25 24 23	255	40 40 40 36 33 30 25 19	263	38 30 29 26 26 26 23 17	215				
						21 18 12 9 9 7 5 5	86				
31 24 24 19 19 12 9 3	141	9 7 6 6 5 3 1 1	38			32 30 27 24 15 10 9 6	153				
39 23 21 21 21 20 19 16	180	25 20 17 17 12 7 6 6	110	36 33 26 21 21 19 13 10	179	35 25 22 21 19 18 15 9	164				
26 21 18 15 12 10 4 4	110	12 12 8 5 3 3 0 -	43	27 19 9 4 1 0 0 0	60	31 19 15 11 11 9 2 1	99				
21 16 15 12 10 5 4 4	87	20 13 5 4 2 2 1 1	48	12 7 7 7 7 5 4 2	51	26 20 15 14 12 5 3 1	96				
20 17 16 13 13 12 10 3	104	19 14 13 11 10 6 5 4	82	26 22 20 20 19 16 11 2	136	22 21 20 20 19 18 14 10	144				
		4 3 1 1 - - - -	9	10 2 2 - - - - -	14	17 9 8 4 4 - - -	42				

Schuster Reinhard

Г.Д.Р.

награждается дипломом

III степени

НА XV МЕЖДУНАРОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ШКОЛЬНИКОВ

Министр просвещения
СССР
М. А. Прокофьев

Председатель
Оргкомитета
А. И. Маркушевич

Председатель
Жюри
И. Я. Верченко

«15» июля 1973 г. Москва

MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTERIUM
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT, BUDAPEST

OKLEVÉL

GÖRNITZ Thomas

AKI AZ 1960–61 TANÉVBEN

a Leipzig-i Thomas-Schule XII. osztályának tanulója volt

A III. NEMZETKÖZI MATEMATIKAI DIÁKOLIMPIÁSZON

III. díjat NYERT

BUDAPEST–VESZPRÉM, 1961. JÚLIUS 14

A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM RÉSZÉRŐL

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT RÉSZÉRŐL

Hódi Endre

A SZERVEZŐ BIZOTTSÁG RÉSZÉRŐL