W. Lietzmann

Der Pythagoreische Lehrsatz

Überarbeitung und Ergänzung: E. Hameister
1968 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 6
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Bändchen der "Mathematischen Bibliothek" beabsichtigt nicht, eine möglichst vollständige Sammlung von Beweisen des pythagoreischen Lehrsatzes zu geben, auch nicht, die Zahl der bekannten Beweise um einige neue zu vermehren.
Es will vielmehr an einem historisch und unterrichtlich bedeutsamen Beispiel in ganz elementarer Weise zeigen, wie mannigfache Beziehungen zwischen den verschiedenen Gebieten der Mathematik bestehen, wie die mathematischen Tatsachen, um ein mehrfach gebrauchtes Bild aufzunehmen, ein Netz bilden, nicht eine Kette.

Sodann lag mir vor allen Dingen daran, den Leser, soweit das in dem engen Rahmen möglich war, zu eigenem mathematischem Denken anzuregen. Dieses Ziel der ganzen Arbeit wurde noch betont durch eine größere Anzahl von der Darstellung eingegliederter Fragen.

Barmen, im September 1911 W. Lietzmann

Vorwort zur neunten Auflage

Das 1911 zum ersten Mal erschienene Bändchen liegt nun in einem neuen Gewand in der Mathematischen Schülerbücherei vor.
Wenn auch im wesentlichen der Text der letzten, von W. Lietzmann 1952 noch einmal selbst bearbeiteten Auflage übernommen werden konnte, so waren doch einige Überarbeitungen, besonders im ersten Kapitel, einige Ergänzungen und eine Neugestaltung des Schrifttumverzeichnisses erforderlich.

Dadurch hoffen Verlag und Herausgeber, dass dieses kleine beliebte Bändchen über den vielleicht berühmtesten und bekanntesten Satz der Mathematik sich weiterhin nützlich erweisen und zu den alten Freunden neue hinzugewinnen wird.

Möser bei Burg, Februar 1967 Dr. E. Hameister

Inhaltsverzeichnis

1 Einiges aus der Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes

1. "Da es nun notwendig ist, auch die Anfänge der Künste und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu betrachten, so berichten wir, dass zuerst von den Ägyptern der Angabe der meisten zufolge die Geometrie erfunden ward, welche ihren Ursprung aus der Vermessung der Ländereien nahm.
Es hat aber nichts Wunderbares, dass die Erfindung dieser sowie der anderen Wissenschaften vom Bedürfnis ausgegangen ist, da doch alles im Entstehen Begriffene vom Unvollkommenen zum Vollkommenen vorwärtsschreitet.
Es findet von der sinnlichen Wahrnehmung zur denkenden Betrachtung, von dieser zur vernünftigen Erkenntnis ein geziemender Übergang statt."

So beginnt ein dem Eudemos zugeschriebenes, altgriechisches "Mathematikerverzeichnis" und zählt dann, von Thales von Milet beginnend, die einzelnen griechischen Mathematiker auf, wobei die Verdienste eines jeden mit knappen, meist recht treffenden Worten charakterisiert werden. In dieser Liste wird über Pythagoras gesagt (freie Übersetzung):

"Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft. Er erforschte die Grundlagen derselben von höherem Gesichtspunkte aus, wobei er deren Theorien unabhängig vom materiellen Ausgangspunkt durch rein logisches Denken aufbaute."

Wann Pythagoras von Samos lebte, ist nicht sicher bekannt:
Nach den einen ist er 569 v.u.Z. geboren und 470 gestorben, nach anderen ist seine Geburt bereits in das Jahr 580, sein Tod etwa in das Jahr 500 zu setzen.
Aus dem Leben von Pythagoras ist für uns von Wichtigkeit, dass er sich sehr wahrscheinlich längere Zeit in Ägypten, vielleicht auch in Babylonien, aufgehalten hat und dass er von dort offenbar entscheidende Anregungen heimbrachte.

Schon diese geringen Andeutungen werden es begreiflich erscheinen lassen, dass sehr schwer zu unterscheiden ist, wieviel von den Pythagoras zugeschriebenen Funden seinen Vorgängern, wieviel seinen Schülern zu danken ist. So steht es auch mit dem Satz, der fast überall nach Pythagoras benannt wird:

Für ein rechtwinkliges Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Dass dieser Satz nicht von Pythagoras gefunden wurde, darüber ist man sich heute vollkommen einig; nur soll Pythagoras nach der Meinung einzelner der erste gewesen sein, der einen vollgültigen Beweis für den Satz erbrachte; andere sprechen ihm auch dieses Verdienst ab.
Fragen wir, welches dieser Beweis ist, so stocken wir schon wieder.

Der Beweis, den Euklid (um 300 v.u.Z. in Alexandria) im ersten Buche seiner Elemente führt, wird von einigen Pythagoras zugeschrieben; dagegen versichert Proklos (410 oder 412 bis 485 in Byzanz, Athen), dass dieser Beweis in den Elementen von Euklid selbst herrührt.

Man sieht, die Geschichte der Mathematik gibt über Pythagoras und seine mathematische Tätigkeit nur recht wenige sichere Daten. Um so mehr weiß die Fama Bescheid, sie nennt sogar die näheren Umstände bei der Entdeckung des Satzes. Wer kennt nicht das Sonett Chamissos:

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt:
Der Lehrsatz, nach Pythagoras benannt,
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.

Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es taten kund, geschlachtet und verbrannt,
Ein Hundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Dass eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;

Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos, sich dem Licht zu widersetzen,
Verschließen sie die Augen und erzittern.

Auch diese, von Diogenes Laertios und Plutarch erzählte Opfergeschichte ist sicherlich erfunden. Und damit fehlen auch leider die Voraussetzungen zu jener neckischen Anwendung der Lehre von der Seelenwanderung, die wir bei Heinrich Heine finden:

"Wer weiß! Wer weiß! Die Seele des Pythagoras ist vielleicht in einen armen Kandidaten gefahren, der durch das Examen fällt, weil er den pythagoreischen Lehrsatz nicht beweisen konnte, während in seinen Herren Examinatoren die Seelen jener Ochsen wohnen, die einst Pythagoras, aus Freude über die Entdeckung seines Satzes, den ewigen Göttern geopfert hatte."

2. Als es am Ende des vorigen Jahrhunderts angesichts der Entdeckungen eines Schiaparelli[1] und anderer Astronomen Mode wurde, über die Existenz von menschenähnlichen Marsbewohnern mehr oder weniger gewagte Spekulationen anzustellen, wurde natürlich vielfach die Frage diskutiert, wie man sich mit diesen hypothetischen Lebewesen etwa mit Hilfe von Lichtsignalen verständigen könnte.

Ein bei der Pariser Akademie ausgeschriebener Preis, der Prix Pierre Guzmann, von 100000 Frs. für den, der zuerst mit irgendeinem Bewohner eines anderen Himmelskörpers (übrigens ist der Mars, als zu leichte Aufgabe, ausgenommen!) in Verbindung tritt, wartet noch darauf, einem Glücklichen zuerkannt zu werden.
Scherzweise, aber nicht ohne eine innere Berechtigung, hat man nun den Vorschlag gemacht, dem Mars- oder sonstigen Planetenbewohner als Lichtzeichen die Figur des pythagoreischen Lehrsatzes zu übermitteln.

Sei dem nun, wie ihm sei; auf unserem Planetenball haben wir es jedenfalls erlebt, dass die im pythagoreischen Lehrsatz ausgesprochene mathematische Tatsache an den verschiedensten Stellen, und zwar, wie wir wohl annehmen dürfen, unabhängig auftritt.

Beginnen wir mit den Chinesen. Hier kommt besonders ein mathematisches Werk, der Tscheou pei, in Betracht.

[1] Der italienische Astronom Schiaparelli entdeckte auf dem Mars Kanäle, von denen man lange Zeit annahm, sie wären künstlich angelegt werden.

Im ersten Teile dieses Buches handelt es sich um das Wechselgespräch zweier um 1100 v.u.Z. lebender Persönlichkeiten. Ob nun aber daraus zu schließen ist, dass die vorgetragenen Lehren bereits jener Zeit bekannt waren, ist zweifelhaft, wenn auch eine 1213 u.Z. geschriebene Vorrede dies behauptet.
Möglicherweise ist hier der in Frage kommende Teil erst um den Beginn unserer Zeitrechnung verfasst worden.

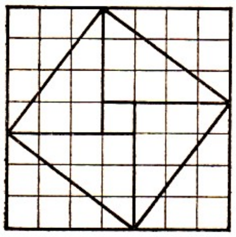


Bild 1

In dieser Schrift wird ein pythagoreisches Dreieck, das die Seiten 3, 4 und 5 hat, erwähnt mit den Worten:
"Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandteile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie 5, wenn die Grundlinie 3 und die Höhe 4 ist."

Auch eine Figur ist beigegeben (Bild 1), die sich mit einer in der indischen Geometrie des Bhaskara vorkommenden deckt; wir werden darauf später noch zurückkommen (vgl. Abschn. II, 14).

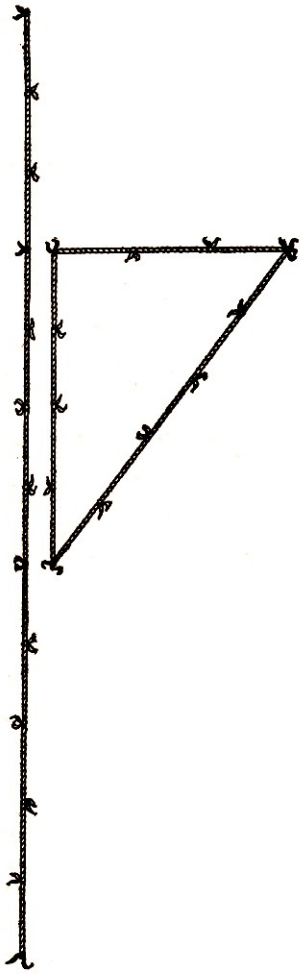


Bild 2

3. Cantor[a] und Tropfke[b] nehmen an, dass auch die Ägypter die Gleichung

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

oder mit anderen Worten das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 gekannt haben, und zwar bereits zur Zeit des Königs Amenemhat I. um das Jahr 2300 v.u.Z. (nach Papyrus 6619 des Berliner Museums).
Nach ihrer Meinung hatten die "Seilspanner", die Harpedonapten, die Aufgabe, mittels des Dreiecks mit den Seiten 3, 4 und 5 rechte Winkel zu konstruieren.
Wir können das Verfahren sehr leicht nachmachen. Wir nehmen ein 12 m langes Seil, knüpfen (Bild 2) 3 m von dem einen, 5 m von dem anderen Ende entfernt rote oder blaue Bändchen an die Schnur, während die anderen Meter etwa durch weiße Bändchen bezeichnet sind. Dann spannen wir die Schnur so, wie es die Figur angibt ; zwischen dem 3 m und dem 4 m langen Ende liegt dann ein rechter Winkel.

Man kann bei diesem Verfahren der Harpedonapten einwenden, ein rechter Winkel aus Holz, wie wir ihn heute überall bei den Zimmerleuten sehen, mache die ganze Seilspannerei überflüssig.

[a] M. Cantor (1829-1920), bedeutender Mathematikhistoriker, bekannt durch sein großes vierbändiges Werk "Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik".
[b] J. Tropfke (1866-1939), bedeutender Mathematikhistoriker und Schulmathematiker.

In der Tat gibt es ägyptische Bilder, auf denen derartiges Handwerkszeug wiedergegeben ist, z.B. bei der Darstellung einer Schreinerwerkstatt. Aber es muss doch eine Methode geben, diese rechten Winkel zu prüfen und herzustellen.

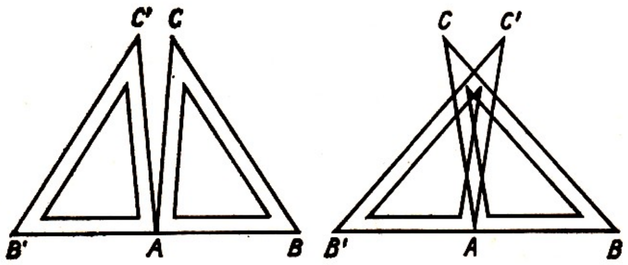


Bild 3 und 4

Die Methode des Umklappens (Bild 3 und 4) kommt auf ein Probieren heraus. Ein Beweis für die Annahme Cantors liegt leider bisher noch nicht vor.

Etwas besser steht es mit unseren Kenntnissen hinsichtlich der Babylonier. Ein der Zeit Hammurabis, also etwa 2000 v.u.Z. angehörender Text gibt eine Näherungsberechnung der Rechtecksdiagonale; man kann daraus schließen, dass im Zweistromland die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks bekannt war, zumindest in speziellen Fällen.

Auch Neugebauer[2] hält es aus verschiedenen Gründen für sicher, dass man in Babylon unseren Satz gekannt und angewandt hat.

Durch diese neuen Erkenntnisse über Vorgänger der griechischen Mathematik hat sich die früher allgemein angenommene Priorität der Griechen als unzutreffend erwiesen. Nach dem heutigen Stand unseres Wissens über die ägyptische und babylonische Mathematik einerseits, die textkritische Untersuchung der griechischen Quellen andererseits, lässt sich das Verhältnis etwa so formulieren, wie das von van der Waerden[3] geschehen ist:

"Die Leistungen der ersten griechischen Mathematiker wie Thales, Pythagoras und der Pythagoreer ist nicht die Entdeckung der Mathematik, sondern ihre Systematisierung und exakte Begründung. Sie haben aus einer verwirrenden Fülle von Rechenvorschriften eine exakte Wissenschaft gemacht."

4. Wie bei Ägyptern und Babyloniern stand bei den Indern die Geometrie in enger Beziehung zur Religion. Es ist wahrscheinlich, dass der Satz vom Quadrat der Hypotenuse etwa im 8. Jahrhundert v.u.Z. auch in Indien bekannt gewesen ist. Cantor berichtet:

"Der indische Gottesdienst, peinlich genauen Vorschriften folgend, kann der geometrischen Regeln nicht entbehren. Wenn der Altar nicht genau in der anbefohlenen Gestalt erbaut ist, wenn eine Kante nicht rechtwinklig zur anderen steht, wenn in der Orientierung nach den Himmelsgegenden ein Fehler stattfand, so nimmt die Gottheit das ihr dargebrachte Opfer nicht an."

So treten rituellen Vorschriften, die in den sog. Kalpasutras enthalten sind, die sog. Sulvasutras, Schriften geometrisch- theologischen Charakters, zur Seite.

[2] O. Neugebauer, bekannter deutscher Mathematikhistoriker, hervorragender Kenner der babylonischen Mathematik, lebt jetzt in den USA. Bekannt ist sein Werk "Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften".

[3] B.L. van der Waerden, hervorragender holländischer Mathematiker; er beschäftigte sich in der letzten Zeit vielfach mit der Geschichte der Mathematik. Bekannt ist sein Werk "Erwachende Wissenschaft" , in dem die Mathematik des alten Ägyptens, Babylons und Griechenlands behandelt wird. Das Zitat stammt aus "Die Arithmetik der Pythagoreer, I, Mathematische Annalen 120 (1948) S. 127ff.

In solchen, dem 4. oder 5. Jahrhundert v.u.Z. angehörenden Schriften kommt z.B. zur Bestimmung des rechten Winkels ein Dreieck mit den Seiten 15, 36 und 39 vor (vgl. Abschn. VII).

Das Verfahren wird bei Cantor so beschrieben: Es wird eine genau von Ost nach West gerichtete Strecke, praci genannt, von 36 Padas (das ist das benutzte Maß) durch Pflöcke abgesteckt. An die Pflöcke befestigt man die Enden eines 54 Padas langen Seiles, in das vorher, 15 Padas von dem einen Ende entfernt, ein Knoten geschlungen ist. Jetzt spannt man das Seil durch einen Pflock an der Stelle des Knotens und erhält so an dem einen Ende der praci einen rechten Winkel.

Für die geometrische Ausziehung der Quadratwurzel werden die folgenden, auf dem pythagoreischen Lehrsatz fußenden Regeln gegeben:

1. Das Seil, quer über das gleichseitige Rechteck gespannt, bringt ein Quadrat von doppelter Fläche hervor.

2. Das Seil, quer über ein längliches Rechteck gespannt, bringt beide Flächen hervor, welche die Seile längs der größeren und kleineren Seite gespannt hervorbringen.

Diesen zweiten Fall erkennt man an den Rechtecken, deren Seiten aus 3 und 4, aus 12 und 5, aus 15 und 8, aus 7 und 24, aus 12 und 35, aus 15 und 36 Längeneinheiten bestehen.
Die erste Regel spricht den pythagoreischen Lehrsatz für gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke aus. Die Richtigkeit des Satzes ist in diesem Falle sofort aus der Zeichnung (Bild 5) zu erkennen.

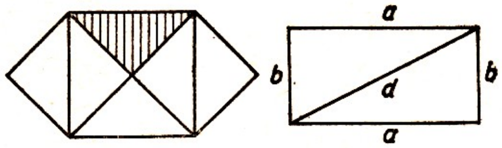


Bild 5 und 6

Die zweite Regel wird aus einer Figur erschlossen, die etwa unserer später noch zu besprechenden Figur in Bild 28 entspricht. Dass es sich hier tatsächlich um ein geometrisches Ausziehen der Quadratwurzel handelt, ist leicht einzusehen.
Die Diagonale d des Rechtecks (Bild 6) ist nämlich

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

wenn a und b die Seiten des Rechtecks sind.

5. Für die weitere Entwicklung der Mathematik sind die Inder wenig, die Chinesen gar nicht von Bedeutung gewesen; erst die Neuzeit hat von den umfangreichen mathematischen Kenntnissen dieser Völker erfahren. Der Weg aus dem Altertum ins Mittelalter führt von den Griechen über die Araber.

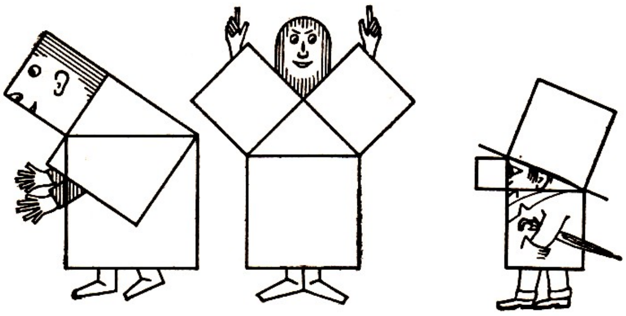


Bild 7 bis 9

Dem Mittelalter bedeutete der pythagoreische Lehrsatz, der magister matheseos, die Grenze, wenn auch nicht des maximalen, so doch des durchschnittlichen Maßes mathematischer Kenntnisse.

Die typische Pythagorasfigur, die heute zu einem talartragenden Professor (Bild 8) oder einem kiepentragenden Männchen oder dgl. (vgl. auch Bild 7 und 9) vervollständigt das Schülerheft schmückt, wurde in jener symbolfreudigen Zeit zum oft benutzten Zeichen der Mathematik. Häufig begegnen wir dem "Pythagoras" im Gemälde, im Mosaik, in Wappenzeichnungen des Mittelalters.

6. Es sei an den Schluss dieses einleitenden Kapitels eine Anzahl verschiedener Fassungen des pythagoreischen Lehrsatzes in griechischer, lateinischer und deutscher Sprache gesetzt (z. T. nach Heiberg (Euklid I, 47) und Tropfke).
Bei Euklid lautet der Satz:

"*Εν τοις ορθ0γωνιοις τριγωνοις το απο της την ορθην γωνιαν υποτεινουσης πλευρας τετραγωνον ισον εστι τοις απο των την ορθην γωνιαν περιεχουσων πλευρων τετραγωνοις.*"

Das heißt in wörtlicher Verdeutschung: In den rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat über der den rechten Winkel unterspannenden Seite gleich den Quadraten über den den rechten Winkel einschließenden Seiten.

Eine von Gerhard von Cremona (Anfang des 12.Jh.) gegebene lateinische Übersetzung der arabischen Fassung bei an-Nairizi (um 900 u.Z.) lautet:

"Omnis trianguli orthogonii quadratum factum ex latere subtenso angulo recto equale est coniunctioni duorum quadratorum, qui fiunt ex duobus lateribus, qui continent angulum rectum."

Das heißt auf Deutsch:
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das über der dem rechten Winkel unterspannten Seite gebildete Quadrat gleich der Summe der beiden Quadrate, die aus den beiden Seiten, die den rechten Winkel enthalten, gebildet werden.

In der Geometria Culmonensis (um 1400) heißt es:

"Alzo wirt das vierkante veld, gemessen vz der langen want, alzo gros alz dy beyde virkante, dy do werden gemessen von den czwen wenden des geren, dy do czusamene treten in dem rechten wynkel."

Das "Rechenbuch" des Simon Jacob, Frankfurt 1565, sagt:

"Es ist zu mercken, dasz in einem jeden triangulo Orthogonio die beyde quadrat basis und catheti sammentlich so viel thun als das quadrat Hypothenuse."

Es mag auffallen, dass das Wort Hypotenuse hier fälschlich mit th geschrieben ist; das ist nicht ein einzelnes Versehen, vielmehr schrieb man in jener Zeit, obwohl man doch die Herleitung aus dem Griechischen selbst vorgenommen hatte, häufig ein th an Stelle des t. -

Dieser Fehler ist ja heute in jeder Schule immer wieder zu bekämpfen. Man hat wohl die Regel aufgestellt: Nur die Kathete *hat* ein *ha!* oder: In beiden Worten, in Kathete und Hypotenuse, kommt jedesmal nur ein h vor.

In der Euklidübersetzung von Samuel Reyher 1697 heißt es:

"In jedwedem rechtwicklichten Dreyeck ist das gleichseitige und gleichwinklichte Viereck, welches von dem Strich, so dem rechten Winkel entgegenstehet, gemacht wird, ebenso groß, als die beeden Vierecke zusammen, welche von den beeden Seiten, so den rechten Winkel begreiffen, gemacht werden."

2 Zerlegungsbeweise

1. Man zeichne ein Quadrat $ABCD$ von 7 cm Seitenlänge (Bild 10 ist verkleinert). Von A aus trage man dann auf AB wie auf AD je 3 cm ab bis E und F und ziehe durch diese beiden Punkte Parallelen zu den Quadratseiten.

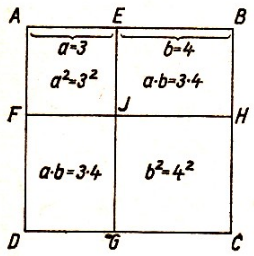


Bild 10

In unserer Figur ist der Schnittpunkt mit DC durch G, derjenige mit BC durch H und schließlich noch der Durchschnitt von EG und FH mit J bezeichnet. Das ursprüngliche Quadrat mit der Seitenlänge 7 ist jetzt in vier Teilfiguren zerfallen:
1. ein Quadrat mit der Seite 3 cm,
2. ein Quadrat mit der Seite 4 cm,
3. und 4. zwei gleiche Rechtecke, die durch die anstoßenden Seiten von 3 cm und 4 cm gekennzeichnet sind.

Wir erinnern uns, dass man den Flächeninhalt eines Quadrates in cm^2 erhält, wenn man die Seitenlänge, in cm gemessen, mit sich selbst multipliziert. Den Flächeninhalt eines Rechtecks erhält man, wenn man die Maßzahlen zweier anstoßenden Seiten miteinander multipliziert.
So betrachtet gibt die Figur ein geometrisches Bild für die Beziehung

$$7^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

oder, wenn man darin noch für die 7 Summe 3 + 4 setzt,

$$(3+4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

In der Tat kommt beiderseits 49 heraus.

Wir sind bei unserer Überlegung von den Zahlen 3, 4, 7 ausgegangen; diese Wahl der Zahlen war aber ganz willkürlich. Ein Ergebnis bekommen wir in gleicher Weise, wenn wir von irgendwelchen Zahlen a, b und deren Summe $a+b$ ausgehen; wir erhalten nichts anderes als die ganz bekannte Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Die geometrische Figur, die wir hier als Bild der Formel benutzt haben, ist schon bei Euklid, ebenso bei den Indem vor Beginn unserer Zeitrechnung bekannt gewesen.
Die "allgemeine Regel für die Vergrößerung eines gegebenen Quadrates" ist dort in etwas unklarer Form so ausgesprochen: "Man füge das, was man mit der jedesmaligen Verlängerung umzieht, an zwei Seiten hinzu und an der Ecke das Quadrat, welches durch die betreffende

Verlängerung hervorgebracht wird."

2. Wir wollen nun das Quadrat mit der Seitenlänge 7 noch einmal zeichnen, aber es in anderer Weise als oben zerteilen. Wieder tragen wir auf den Quadratseiten von den Eckpunkten aus 3 cm ab, diesmal aber so, wie es Bild 11 zeigt.

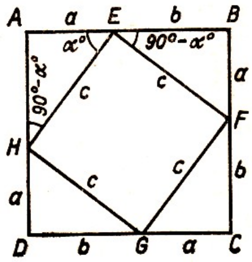


Bild 11

Die erhaltenen Punkte E, F, G, H verbinden wir miteinander und erhalten ein Viereck $EFGH$ und vier rechtwinklige Dreiecke in den Ecken des ursprünglichen Quadrates.
Die Dreiecke sind kongruent nach dem ersten Kongruenzsatz, denn sie stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein. Also sind die Hypotenusen, wir wollen sie c nennen, aller dieser Dreiecke gleich, und das Viereck $EFGH$ ist gleichseitig, ein Rhombus, wie man sagt.

Der Leser wird aber schon gemerkt haben, dass dieses Viereck sogar ein Quadrat ist. Der Nachweis dafür ist leicht erbracht; hat nämlich etwa der Winkel AEH die Größe α, so bleibt in dem rechtwinkligen Dreieck AEH für den Winkel AHE nur $(90° - \alpha)$ übrig, weil die Winkelsumme im ebenen Dreieck $180°$ beträgt.

Der Winkel BEF ist wegen der Kongruenz der Dreiecke ebenso groß wie der Winkel AHE, mithin muss der Winkel HEF gleich $90°$ sein, damit die Summe der drei Winkel mit dem Scheitelpunkt E gerade einen gestreckten Winkel bilde. -
Man kann die gleiche Überlegung auch an den Ecken F, G und H des Rhombus anstellen; es genügt aber vollständig, sie einmal durchzuführen, denn ein gleichseitiges Viereck, das einen rechten Winkel hat, besitzt nur rechte Winkel.

Die Zerlegung des Quadrates in dieser Zeichnung ist, wenn wir gleich die allgemeinen Zahlen a und b an die Stelle der in unserer Figur gewählten besonderen Werte 3 und 4 setzen und die auftretende Hypotenuse mit c bezeichnen,

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{a \cdot b}{2}$$

denn der Inhalt des Quadrates im Innern mit der Hypotenuse c als Seite ist c^2, und jedes der vier rechtwinkligen Dreiecke hat den Inhalt $\frac{a \cdot b}{2}$. Kürzer schreiben wir das noch

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

Man kann auf Grund dieser Beziehung die Hypotenuse c ausrechnen, wenn für a und b Zahlenwerte gegeben sind; es ist z.B. für die oben benutzten Werte $a = 3$ und $b = 4$ nach der letzten Gleichung:

$$49 = c^2 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

und daraus ergibt sich für c^2 der Wert 25, für c der Wert 5.

3. Wir wollen nun das, was uns die beiden letzten Abschnitte gelehrt haben, in Zusammenhang

bringen. Passen wir die Sache zunächst von der arithmetischen Seite an. Wir sahen im Abschnitt II, 1, dass

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{1}$$

ist, und wir fanden im Abschnitt II, 2, dass

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab \tag{2}$$

ist. Daraus folgt die Gleichung

$$a2^+b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

und nach Subtraktion von $2ab$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

Darin sind a und b die Längen der Katheten, c ist die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Das ist nichts anderes als der pythagoreische Lehrsatz.

Wir wollen an diese arithmetische Ableitung der Gleichung noch eine Bemerkung knüpfen. Schon der Anfänger kennt die obige Formel (1); es ist eine der ersten Gleichungen, die ihm im Unterricht entgegentreten. Es handelt sich um eine identische Gleichung, d.h., sie gilt für ganz beliebig gewählte Werte a und b.

In Gegensatz dazu steht die Gleichung (2); sie gilt nicht für irgendwelche beliebige Werte a, b und c, vielmehr stellt sie eine Beziehung her, welche gestattet, etwa c zu berechnen, wenn a und b gegeben sind : so wie wir es oben (Abschn. II, 2) getan haben.

4. Manchem Mathematiker würde unsere in Abschnitt II, 3 gegebene Ableitung des pythagoreischen Lehrsatzes nicht behagen.
Er möchte gern derartige Vermischungen geometrischer und arithmetischer Methoden bei einem Beweise vermieden sehen; er will bei einem in erster Linie geometrischen Problem auch einen reinlich geometrischen Beweis.

Gerade bei der Flächenlehre hat sich dieses Bestreben auch schon in der Elementarmathematik deutlich gezeigt. Man fasst einmal die Fläche rein geometrisch, ohne jeden zahlenmäßigen Einschlag auf und beweist dann z.B.:

Zwei Parallelogramme sind flächengleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

Zwei Dreiecke sind flächengleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

Dieser "geometrischen" Flächenlehre, die in der Hauptsache auf eine Flächenvergleichung herauskommt, steht die "arithmetische" Flächenlehre gegenüber, die im wesentlichen Flächenberechnung ist. Das arithmetische Analogon zu den eben genannten Sätzen wäre:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

So hat auch unser pythagoreischer Lehrsatz ein zwiefaches Gesicht:
Geometrisch können wir ihn so aussprechen:

Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Arithmetisch dagegen heißt der Satz:

Sind a und b die Maßzahlen der Katheten, c die Maßzahl der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für diese Zahlen a, b und c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Es ist nun nicht schwer, dem arithmetisch aufgebauten Beweis in 3 an Hand unserer Überlegungen in 1 und 2 einen rein geometrischen Beweis zur Seite zu stellen.

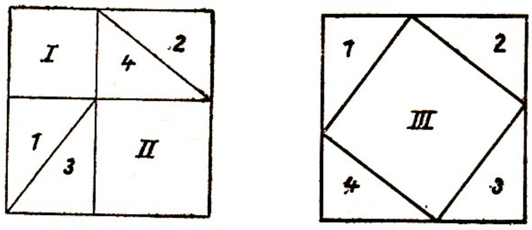


Bild 12 und 13

Zieht man in den Rechtecken in Bild 10 noch je eine Diagonale, so erhält man Bild 12. Dann sind in den Bildern 12 und 13 die Dreiecke kongruent, mithin muss die Summe der Quadrate I und II gleich dem Quadrat III sein.

5. Es gibt eine ganze Reihe von Beweisen für den pythagoreischen Lehrsatz, bei denen man in der Weise verfährt, dass man die Kathetenquadrate wie das Hypotenusenquadrat derart in Stücke schneidet, dass jedem Stück im Hypotenusenquadrat ein kongruentes in den beiden Kathetenquadraten entspricht.
Es genügt in allen diesen Fällen ein Blick auf die Figur, um den Beweis zu erfassen; er kann sich auf das eine Wort "Siehe!" beschränken, das uns in der Mathematik der Inder so häufig begegnet.

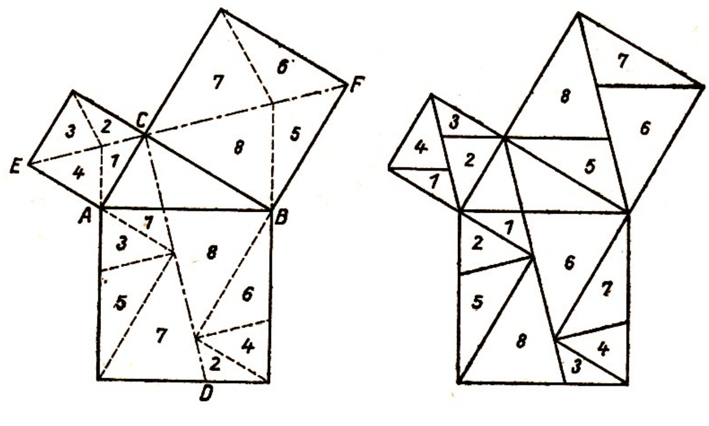


Bild 14 und 15

Dabei ist dann allerdings hinzuzufügen, dass zu einem wirklich vollständigen Beweis auch noch der Nachweis der Kongruenz der entsprechenden Stücke gehört; den zu erbringen ist zwar immer leicht, aber nicht selten, besonders bei größerer Anzahl der Stücke, langweilig.

Wir beginnen mit einem verhältnismäßig neuen Zerlegungsbeweis, demjenigen von Epstein; er hat den Vorzug, dass nur Dreiecke auftreten. Zur Orientierung (Bild 14) wird die Angabe genügen, dass EF, die durch C gehende Gerade, senkrecht zur Geraden CD steht.

Aufgabe 1. Beweise, dass EF durch C geht!

Aufgabe 2. Wie sieht die Zerlegung aus, wenn das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist?

Man kann die Lage der Teildreiecke noch etwas übersichtlicher wählen, als das hier im Anschluss an die Darstellung von Epstein selbst geschehen ist. In Bild 15 sind die Hilfslinien nach einem Vorschlage von Nielsen geändert worden, die Bilder 16 und 17 zeigen eine sehr übersichtliche Anordnung von J.E. Böttcher.

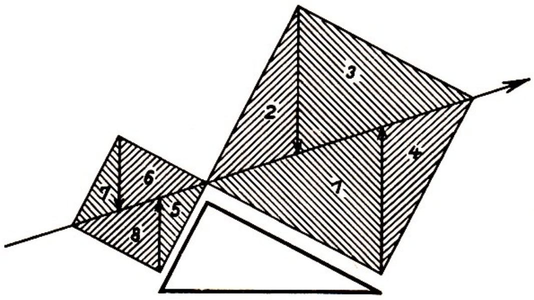


Bild 16

Der Epsteinsche Beweis in der Anordnung von J.E. Böttcher
Vertausche oberhalb des Pfeiles große und kleine Quadrathälfte und alles Weitere ergibt sich selbst.

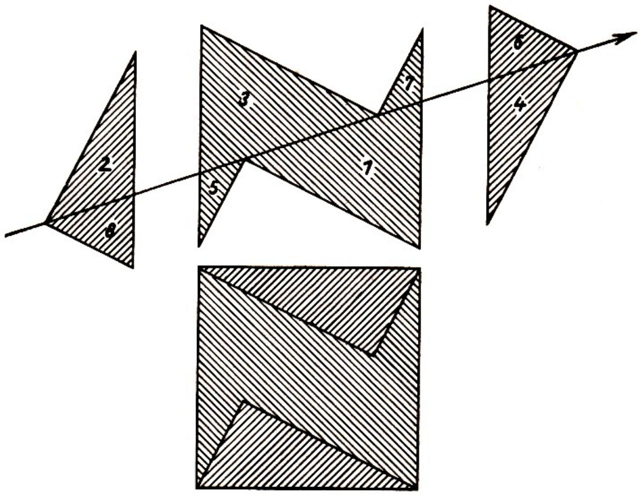


Bild 17

Aufgabe 3. Führe den Beweis mit vollständigen Kongruenzbetrachtungen durch!

6. Eine Zerlegung, der man in Lehrbüchern nicht selten begegnet[4], ist in Bild 18 angedeutet. Durch die Mitte O des größeren Kathetenquadrates sind eine Parallele und eine Senkrechte zur Hypotenuse gelegt. Die Zuordnung der einzelnen Stücke ist aus der Figur ersichtlich.

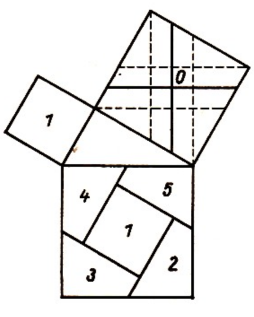


Bild 18

Bild 18 zeigt eine bemerkenswerte Eigenschaft: Hier sind die entsprechenden Figurenteile nicht nur kongruent, sondern auch "parallel gelagert", d.h., man erhält die einen aus den anderen durch Parallelverschiebung.
Die Möglichkeit einer solchen Zerlegung verdanken wir hierbei einem glücklichen Zufall. In der letzten Zeit wurde allerdings durch die Schweizer Mathematiker Hadwiger und Glur bewiesen, dass man zwei flächengleiche Vielecke so in Teile zerlegen kann, dass die einander entsprechenden Teildreiecke oder Teilvielecke in der Zerlegung beider Figuren kongruent sind und parallele entsprechende Seiten haben.

[4] Dieser "Schaufelradbeweis" rührt von Perigal her.

(d.h., diese Teilfiguren gehen durch Parallelverschiebung oder durch Spiegelung an einem Punkt ineinander über).

Aufgabe 4. Welche der unten aufgeführten Zerlegungen der über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierten Quadrate genügen ebenfalls den Bedingungen von Hadwiger und Glur?

Aufgabe 5. Beweise, dass die Teilungslinien im Hypotenusenquadrat parallel zu den Katheten sind!

Aufgabe 6. Berechne, wie lang die Seiten der Teilvierecke des größeren Kathetenquadrates sind!

Es ist nicht nötig, für den Punkt O, durch den die Viertelung des größeren Kathetenquadrates charakterisiert ist, gerade den Mittelpunkt des Quadrates zu wählen. Wenn man durch die Ecken des Kathetenquadrates in der Weise, wie die punktierten Linien in Bild 18 das angeben, Parallelen und Senkrechten zur Hypotenuse zieht, so wird im Innern ein kleineres Quadrat abgegrenzt.

Man kann nun als Punkt O ebenso wie den Mittelpunkt irgendeinen beliebigen Punkt im Inneren oder auf dem Rande dieses Quadrates wählen und im übrigen genauso verfahren wie oben. Natürlich sind dann die Teilvierecke nicht mehr untereinander kongruent, wie es der Fall ist, wenn der Mittelpunkt als Schnittpunkt gewählt wird.

Aufgabe 7. Zeichne für einen solchen Fall die Figur und überzeuge dich durch Zerschneiden von der Richtigkeit der Zerlegung!

Aufgabe 8. Untersuche, welche Gestalt diese Zerlegung im Falle eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks annimmt!

7. Es sei noch eine andere Zerlegung angeführt, bei der man auch mit 5 Teilstücken auskommt. Sie findet sich schon in einem arabischen Euklidkommentar des an-Nairizi um 900 u.Z. In einer nur unwesentlich veränderten Form erscheint der Beweis 1824 neu bei Göpel.

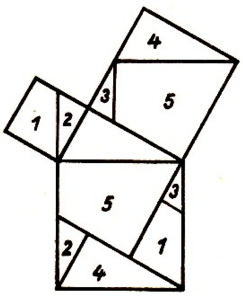


Bild 19

Die Einteilung der Kathetenquadrate zeigt Bild 19, welches die von Nielsen vorgeschlagene Abänderung des Beweises berücksichtigt.
Zu der Einteilung des Hypotenusenquadrates braucht nur bemerkt zu werden, dass man das Stück in der Weise erhält, dass man entweder die Hypotenuse oder die geeignete Kathete des kleinen rechtwinkligen Dreiecks 3 aus dem größeren Kathetenquadrat auf der Seite des Hypotenusenquadrates bzw. der Verlängerung der Seite des Kathetenquadrates abträgt.

Dass diese Zerlegung naheliegt, zeigt ein Blick auf Bild 7, in der das größere Kathetenquadrat um die Kathete herumgeklappt ist.

Aufgabe 9. Beweise die Kongruenz der Teilstücke 1 bis 5 in den Kathetenquadraten mit den entsprechenden im Hypotenusenquadrat!

Aufgabe 10. Drücke die Seiten der auftretenden Teilstücke durch die Katheten a, b und die Hypotenuse c aus!

Aufgabe 11. Zeichne auch hier die Figur für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck!

8. Bild 20 zeigt eine Zerlegung nach Gutheil, die sich besonders durch die übersichtliche Anordnung der Teilstücke auszeichnet. Man sieht dem Bild auch sofort an, welche Vereinfachungen eintreten, wenn das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig wird.

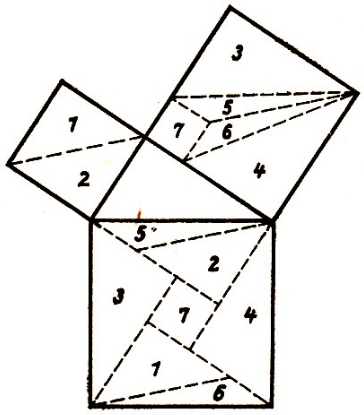


Bild 20

9. Neben den von uns angegebenen vier Zerlegungsbeweisen gibt es noch eine Reihe weiterer (vgl. die Bilder 21 und 22 und die Beweissammlungen von Hoffmann, Wippen Cramer, Versluys und Loomis). Wir können uns mit dem Gebotenen begnügen, wollen aber noch einer Aufgabe nähertreten.

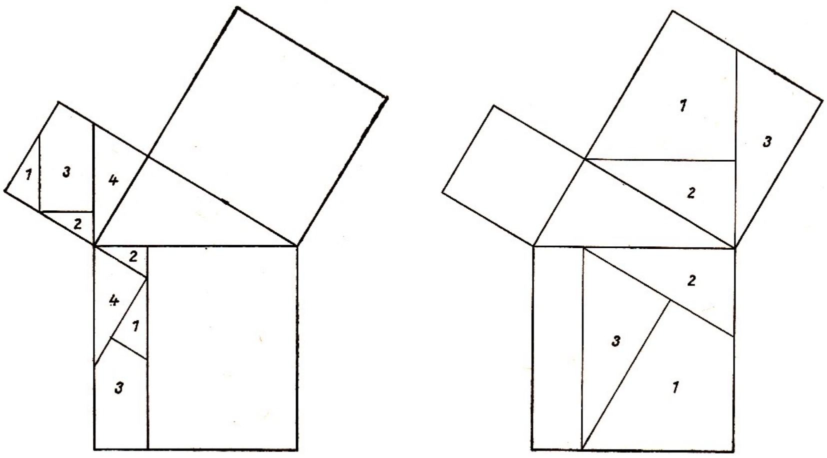


Bild 21 und 22

Zerlegungsbeweise nach Dobriner und Thieme

Man kann fragen, welches denn nun der einfachste überhaupt mögliche Zerlegungsbeweis sei. Will man nicht lediglich nach dem Gefühl urteilen, so kommt man nicht darum herum, den Begriff der Einfachheit mathematisch festzulegen.
Wir brauchen nämlich, wenn wir über größere oder geringere Einfachheit der Beweise urteilen wollen, notwendig ein Maß für die Einfachheit.

Welches Maß man wählt, hängt von dem Gutdünken des einzelnen ab. Man kann etwa die Zahl der Hilfslinien oder die Zahl der Teilstücke wählen oder auch diese beiden Dinge gleichzeitig berücksichtigen.
Ein anderes Maß ist die Anzahl der Anwendungen von Dreieckskongruenzsätzen bei einem vollständig durchgeführten, nicht bloß anschaulich erfassten Zerlegungsbeweis. In dieser letzten Fassung ist die Frage auf Anregung Bernsteins von Brandes untersucht worden.

Den einfachsten Beweis zu finden, kommt dabei darauf hinaus, festzustellen, welches die kleinste Anzahl von Dreiecken ist, in die das Hypotenusenquadrat zerlegt werden muss derart, dass man zu den Einzelstücken kongruente Teilstücke in den Kathetenquadraten auffinden kann.

Die Anzahl der Teildreiecke im Falle des Epsteinschen Beweises ist z.B. 8, bei dem im Abschnitt II, 6 behandelten Beweise haben wir 5 Vierecke, denen also 10 Dreiecke entsprechen; beim Beweis von an-Nairizi ist als Maß der Einfachheit die Zahl 7 anzusetzen.

Welches ist nun die überhaupt geringste Anzahl von Zerlegungsdreiecken? Kann man vielleicht mit noch weniger als 7 auskommen?
Brandes hat nachgewiesen, dass in der Tat die Zahl 7 die niedrigste ist; danach müssen wir den Beweis von an-Nairizi als den einfachsten Zerlegungsbeweis ansehen. Dann folgen die Beweise von Epstein und Gutheil, erst später der Zerlegungsbeweis aus Abschnitt II, 6.

Aufgabe 12. Untersuche, ob die Mindestzahl 7 auch dann beizubehalten ist, wenn es sich um besondere Fälle, z.B. um das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck handelt!

Wer nach dem Gefühl die Frage nach der größten Einfachheit beantwortet hat, dürfte vielleicht bei den eben genannten Beweisen gerade die umgekehrte Reihenfolge gewählt haben. Auch das hat seine mathematische Berechtigung:
Man lässt sich bei diesem Urteil von einer Eigenschaft der Figuren bestimmen, die wir eben ganz aus dem Spiel gelassen haben, der Symmetrie. Passen wir in allen drei Fällen nur das Hypotenusenquadrat ins Auge:
Dann weist die Figur im Falle des Beweises von an-Nairizi keine Symmetrie auf, Zentralsymmetrie hat die Figur von Epstein, die gleiche die von Gutheil. Symmetrie weist ebenfalls die Figur des noch übrigbleibenden Beweises auf.

In der Tat, denken wir uns das Hypotenusenquadrat in zweifacher Ausführung auf Pauspapier gezeichnet, und nun das obere Blatt um den Quadratmittelpunkt gedreht, so wird im Falle des Beweises von an-Nairizi eine vollständige Drehung um $360°$ nötig, um wieder Deckung mit der Figur im unteren Blatt zu haben. Bei dem Epsteinschen und dem Gutheilschen Beweis genügt eine Drehung um $180°$, bei dem dritten sogar eine solche um $90°$, um vollständige Deckung zu erhalten.

10. Wir lernten bisher solche Beweise kennen, bei denen auf der einen Seite das Hypotenusenquadrat, auf der anderen Seite die Kathetenquadrate aus einzelnen Teilstücken lediglich additiv hergestellt werden.

Wir nennen solche Beweise Additionsbeweise. Wir sind bei unseren Additionsbeweisen immer von der üblichen Lage der Quadrate an ihren entsprechenden Dreiecksseiten ausgegangen.

In manchen Fällen erscheint eine andere Lage der Quadrate vorteilhafter. In Bild 23 sind die beiden Kathetenquadrate stufenförmig nebeneinandergesetzt, die Inder nannten diese mit Sicherheit schon Ende des 9. Jahrhunderts u.Z. nachgewiesene Figur "den Stuhl der Braut".

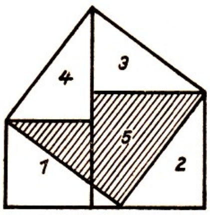


Bild 23

Wie das Hypotenusenquadrat eingezeichnet ist, ergibt sich aus der Figur. Beiden gemeinsam ist ein in der Figur schraffiertes unregelmäßiges Fünfeck 5. Treten dazu die Dreiecke 1 und 2, so erhalten wir die beiden Kathetenquadrate, treten die zu den Dreiecken 1 und 2 kongruenten Dreiecke 3 und 4 hinzu, so erhalten wir das Hypotenusenquadrat.

Aufgabe 13. Untersuche, was aus Bild 23 wird, wenn an die Stelle der Quadrate Rhomben treten!

Aufgabe 14. Die Bilder 24 und 25 stellen zwei der Figur in Bild 23 verwandte Lagen der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrates dar.

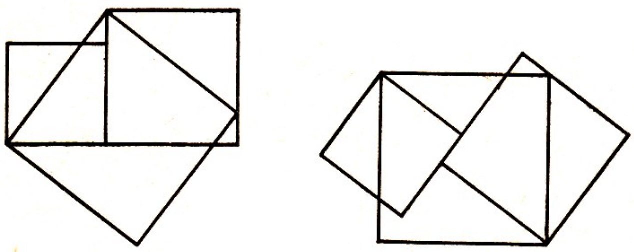


Bild 24 und 25

In Bild 24 tritt "der Stuhl der Braut" auf. Führe für diese Figuren den Zerlegungsbeweis!

Wenn wir diesen Beweis auf seine Einfachheit untersuchen, so stoßen wir auf eine geringere Zahl als vorhin, auf 5. Das rührt aber offenbar von der besonderen Lage der Kathetenquadrate her.
Wären diese getrennt, so wären noch einige weitere Hilfslinien nötig. Dann ist aber die Figur genau dieselbe, wie bei dem Zerlegungsbeweis von an-Nairizi.
Das heißt, wir haben hier überhaupt nicht einen neuen Zerlegungsbeweis vor uns, sondern nur die Abänderung eines bereits bekannten.

11. Den Additionsbeweisen stellen wir nun einige Subtraktionsbeweise gegenüber. Der Grundgedanke ist der:
Von zwei gleichen Flächen werden flächengleiche Stücke abgezogen derart, dass einmal die beiden Kathetenquadrate, das andere Mal das Hypotenusenquadrat übrigbleiben. Wenn in

$$A - B = C \qquad \text{und} \qquad A' - B' = C'$$

A flächengleich A', B flächengleich B' ist, so ist auch C flächengleich C'.

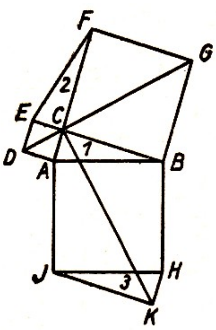


Bild 26

Wir wollen das gleich an einem Beispiel 6 erläutern: In Bild 26 sind der gewöhnlichen Pythagorasfigur noch oben und unten die dem Ausgangsdreieck ABC kongruenten Dreiecke 2 und 3 angefügt. Die Verbindungsgerade DG geht durch C, was wir schon einmal benutzt haben (Abschn. II, 5).
Nun ist zunächst hier das Sechseck $DABGFE$ flächengleich dem Sechseck $CAJKHB$, wie wir gleich beweisen wollen. Nehme ich Bild 26 dann von dem ersten Sechseck die Dreiecke 1 und 2 weg, so bleiben die Kathetenquadrate übrig, nehme ich von dem zweiten die kongruenten Dreiecke 1 und 3 fort, so bleibt das Hypotenusenquadrat übrig.

Daraus ergibt sich die Flächengleichheit der beiden Kathetenquadrate auf der einen und des Hypotenusenquadrates auf der anderen Seite. Es bleibt also nur noch übrig, die Flächengleichheit jener Sechsecke nachzuweisen. Nun halbiert DG das obere Sechseck und CK das untere. Drehe ich das halbe Sechseck $DABG$ um A um den Winkel $90°$, so fällt es auf $CAJK$. Sind die Hälften der Sechsecke flächengleich, so sind es auch die ganzen. -

Man kann sich durch Drehen und Umklappen der betreffenden Teile, die man am besten aus

Pappe ausschneidet, von dieser Flächengleichheit in anschaulichster Weise Rechenschaft geben.

Aufgabe 15. Zeige die Verwandtschaft dieses Subtraktionsbeweises mit dem Additionsbeweis von Epstein.

12. In dem eben gegebenen ersten Subtraktionsbeweis kostete einige Überlegung nur der Nachweis von der Flächengleichheit der Ausgangsfiguren, die subtrahierten Flächen waren allereinfachster Art.
Von anderer Art sind die Beweise, die wir jetzt kennzeichnen wollen. Hier wählen wir als Ausgangsfiguren, aus denen durch Subtraktion von Stücken die gewünschten Quadrate gewonnen werden, nicht zwei verschiedene, sondern ein und dieselbe Figur.

Ich schließe die bekannte Figur zum pythagoreischen Lehrsatz in ein Rechteck ein, das durch die äußersten Seiten der Kathetenquadrate bestimmt ist (Bild 27).

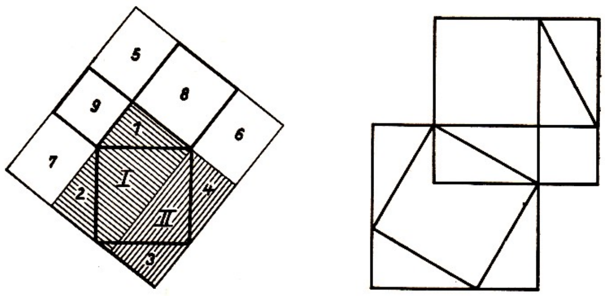


Bild 27 und 28

In der Figur sind noch einige Seitenverlängerungen eingetragen derart, dass das ganze Rechteck in eine größere Anzahl von Dreiecken, Rechtecken und Quadraten zerfällt.
Man zieht nun von der Fläche des Rechtecks zunächst so viel ab, dass nur das Hypotenusenquadrat übrigbleibt. Das ist

1. Dreieck 1, 2, 3, 4,
2. Rechteck 5,
3. Rechteck 6 und Kathetenquadrat 8,
4. Rechteck 7 und Kathetenquadrat 9.

Zum zweiten zieht man von der Fläche des Rechtecks soviel ab, dass nur die beiden Kathetenquadrate übrig bleiben. Das ist

1. Rechteck 6 und 7,
2. Rechteck 5,
3. Rechteck I (schraffiert),
4. Rechteck II (schraffiert).

Hier bedarf es nun einiger Überlegung für den Nachweis, dass die abgezogenen Stücke flächengleich sind. Dass sie hier bereits so angeordnet sind, dass der Beweis leicht zu erbringen ist, wird der Leser sogleich merken. Es sind nämlich, wie die Figur lehrt,

1. die vier Dreiecke 1, 2, 3, 4 flächengleich den Rechtecken 6 und 7,
2. Rechteck 5 flächengleich Rechteck 5,
3. Rechteck 6 und Kathetenquadrat 8 zusammen flächengleich Rechteck I,
4. Rechteck 7 und Kathetenquadrat 9 zusammen flächengleich Rechteck II.

Somit ist unser Beweis jetzt vollständig erbracht.

Aufgabe 16. Führe den Beweis noch einmal durch, doch in der Weise, dass für die auftretenden Flächen ihr zahlenmäßiger Wert, ausgedrückt durch a, b und c, gesetzt wird!

Aufgabe 17. Man kann den Beweis etwas vereinfachen, wenn man darauf verzichtet, ein die ganze Figur umschließendes Rechteck zum Ausgang zu wählen. Das ist in Bild 28 ausgeführt; außerdem aber sind die Teilflächen anders gewählt. Zeige, dass Bild 28 nichts anderes ist als die Vereinigung der beiden Bilder 10 und 11.

13. Von der Art des Beweises in Abschnitt II, 12 kann man nun eine ganze Reihe erbringen. Nur der Weg zu ihnen sei angedeutet.

Man denke sich die drei Quadrate an dem rechtwinkligen Dreieck nicht fest, sondern mit Scharnieren beweglich. Dann ist die Lage der Quadrate, von der wir im vorangehenden Abschnitt ausgingen, dadurch charakterisiert, dass alle Quadrate nach außen geklappt sind.
Man kann nun ebenso auch das eine oder andere Quadrat nach innen umklappen. So erhält man die folgenden Möglichkeiten:

1. Alle Quadrate nach außen geklappt.
2. Alle Quadrate nach innen geklappt.
3. Die Kathetenquadrate nach außen, das Hypotenusenquadrat nach innen geklappt.
4. Die Kathetenquadrate nach innen, das Hypotenusenquadrat nach außen geklappt.
5. Ein Kathetenquadrat nach innen, eines nach außen, das Hypotenusenquadrat nach außen geklappt.
6. Ein Kathetenquadrat nach innen, eines nach außen, das Hypotenusenquadrat nach innen geklappt.

In den letzten Fällen kann eine Weitere Unterteilung noch da- durch bewirkt werden, dass einmal das größere, das andere Mal das kleinere Kathetenquadrat nach außen geklappt ist.
In jedem dieser Fälle kann ein Zerlegungsbeweis nach dem Muster des in Abschnitt II, 12 gegebenen erbracht werden.

Aufgabe 18. Zeichne für einen der Fälle 2 bis 6 die Figur, das umhüllende Rechteck und erbringe durch Diskussion der Teilfiguren den Zerlegungsbeweis!

Hier soll nur an die Lage 3 ein ganz einfacher Beweis angeknüpft werden, der übrigens im wesentlichen sich wieder mit dem Beweis von an-Nairizi deckt (vgl. besonders Bild 28 dazu).

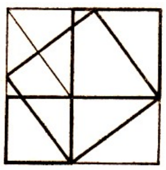


Bild 29

Wieder wird das umhüllende Rechteck, diesmal ist es ein Quadrat, gezeichnet (Bild 29). Das ursprüngliche rechtwinklige Bild 29 Dreieck tritt dann, wenn noch eine Diagonale gezogen wird, siebenmal in kongruenter Form auf.
Indem ich von dem umhüllenden Quadrat jedesmal vier Dreiecke abziehe, erhalte ich einmal die beiden Kathetenquadrate, das andere Mal das Hypotenusenquadrat.

Aufgabe 19. In Bild 29 geht die Diagonale von dem Scheitel des rechten Winkels im Grunddreieck aus; beweise, dass diese Diagonale senkrecht zur Hypotenuse des Grunddreiecks steht! Wie steht es damit, wenn das Hypotenusenquadrat nach außen geklappt ist? - Die Tatsache war nach an-Nairixi bereits Heron bekannt.

14. Man kann diesen Zerlegungsfällen immer in recht einfacher Weise auch in arithmetischer Form folgen. Es sei aber noch ein außerordentlich klares Beispiel beigebracht, das historisch von Interesse ist.

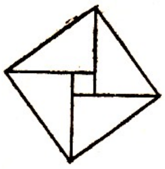


Bild 30

Es findet sich nämlich, mit dem stereotypen "Siehe" versehen, bereits bei den Indern - in der Geometrie des Bhaskara (geb. 1114 u.Z.), dann aber auch bei den Chinesen, bei denen seine Kenntnis möglicherweise bis 1000 v.u.Z. zurückreicht (vgl. Abschn. I, 2 und Bild 1).

Die Figur in Bild 30 ist der in einem früheren Beweis (Abschn. II, 8) benutzten Wenigstens ihrer Struktur nach ähnlich. Das rechtwinklige Dreieck ist hier in das Hypotenusenquadrat viermal in geeigneter Weise hineingepackt, und es bleibt dann noch ein kleines Quadrat in der Mitte frei, dessen Seite, wenn a die größere, b die kleinere Kathete ist, die Länge $a - b$ hat. Es ist also das Hypotenusenquadrat

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$$

Löst man die Klammern auf, so erhält man daraus sofort

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aufgabe 20. Der entsprechende geometrische Beweis soll in der Weise erbracht werden, dass die 5 Teilstücke des Hypotenusenquadrates auf die als "Stuhl der Braut" (vgl. Abschn. II, 10) zusammengelegten Kathetenquadrate verteilt werden.
Schneide die Teilstücke aus und probiere die Verteilung der Kathetenquadrate in der Weise der bekannten Geduldspiele oder "Kopfzerbrecher" aus!

15. Den Beschluss dieses Abschnittes mögen drei Beweise bilden, die auch durch Rechnung geführt werden, aber aus der Reihe der bisher erbrachten herausfallen. Der erste ist 1909 von dem Engländer C. Hawkins veröffentlicht worden; ob er schon älter ist, ist mir nicht bekannt.

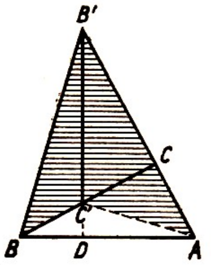


Bild 31

Das bei C rechtwinklige Dreieck ABC ist um C um 90° in die Lage $C'CB'$ gedreht (Bild 31). Dann ist die über C' bis zum Schnitt D mit AB verlängerte Strecke $B'C'$, d.h. also $B'D$, Höhe im Dreieck $B'AB$.

Ich betrachte jetzt das Viereck $C'AB'B$. Es lässt sich einmal zerlegen in die beiden gleichschenkligen Dreiecke CAC' und CBB', zum anderen in die beiden Dreiecke $C'B'A$ und $C'B'B$.

Der Inhalt von $\triangle CAC'$ ist $\frac{b^2}{2}$, der von $\triangle CBB'$ ist $\frac{a^2}{2}$, mithin ist der Inhalt des Vierecks $C'AB'B$

$$J = \frac{a^2+b^2}{2}$$

Die Dreiecke $C'B'A$ und $C'B'B$ haben die gleiche Grundlinie c und die Höhen DA und DB, mithin ist andererseits der Inhalt des Vierecks $C'AB'B$

$$J = \frac{c \cdot DA}{2} + \frac{c \cdot DB}{2} = \frac{c}{2}(DA + DB) = \frac{c^2}{2}$$

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für den Inhalt des Vierecks ergibt sich

$$a^2 + b^2 = c^2$$

16. Die Entstehung der Figur in Bild 32 ist ohne weiteres ersichtlich, sie stellt die Hälfte der Figur des Bildes 11 dar.

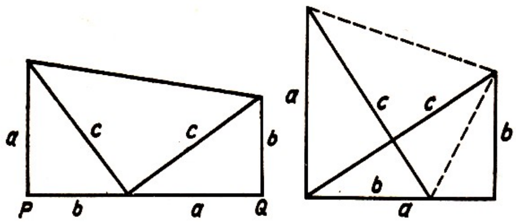


Bild 32 und 33

Als Flächeninhalt erhält man, wenn man ihn als Summe von drei Dreiecken betrachtet,

$$f = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Andererseits hat die Figur als Trapez den Flächeninhalt

$$f = \frac{a+b}{2}(a+b)$$

Setzt man beide Ausdrücke gleich, dann erhält man

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Der Beweis ist 1882 von Garfield veröffentlicht worden, der 1881 Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika wurde.

Aufgabe 21. Spiegele die Figur in Bild 32 an PQ und benutze die Zerlegung der Figur, die du dann erhältst!

Aufgabe 22. Leite aus der Figur in Bild 33 einen Beweis her, indem du die Fläche auf zwei verschiedene Weisen auswertest (Waldheim).

17. Auf den Zusammenhang gewisser Zerlegungsbeweise fällt Licht, wenn man von einem einfachen Parkettierungsproblem ausgeht, auf das Bernstein und Scherer hingewiesen haben.

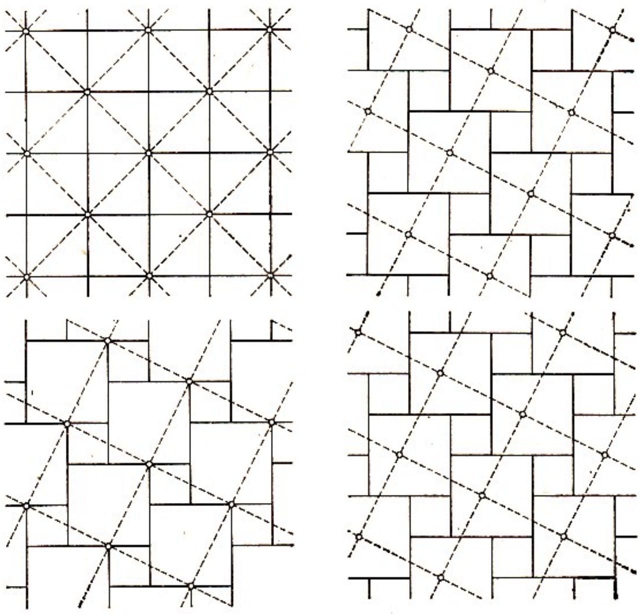


Bild 34 bis 37

Im Falle des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks und der Zerlegungsfigur 5 kommt man auf die sehr naheliegende Beziehung zur Parkettierung in der Form eines gewöhnlichen Quadratnetzes. Ein Blick auf Bild 34 macht alles klar.

Es ist nun eine Zunächst wohl überraschende Tatsache, dass auch der aus den beiden Kathetenquadraten zusammengesetzte "Stuhl der Braut" zur Parkettierung geeignet ist, d.h., dass man unter Aneinanderfügung dieser Figur die Ebene lückenlos und ohne Überdeckung ausfüllen kann.
Die Bilder 35 bis 37 zeigen als Untergrund diese Parkettierung. In allen drei Fällen ist nun über diesen Grund eine zweite, quadratische Parkettierung gelegt. Die Figuren in diesen Bildern unterscheiden sich nur durch die Lage, nicht durch die Größe der Quadrate.

Als Eckpunkte sind im ersten Falle die Mittelpunkte der großen Kathetenquadrate, im zweiten Falle gleichliegende Ecken der kleinen Kathetenquadrate gewählt. Im dritten Falle liegen die Ecken in der Nähe des Mittelpunktes des großen Kathetenquadrates. Es steht dem nichts im Wege, auch noch andere Lagen zu wählen.

In allen Fällen wird die Ebene vollständig einmal von dem Quadratnetz, zum andern vom Stuhlnetz bedeckt. Quadrat und Stuhl der Braut sind also flächengleich. Freilich muss man da vom Standpunkte einer strengen Behandlung aus einen Einwand erheben. Solange es sich um ein endliches Stück der Ebene handelt, wird der Rand dieses Stückes niemals zugleich auch Rand des Stuhlnetzes und des Quadratnetzes sein. Wenn wir aber die ganze unendliche Ebene betrachten, dann liegen die Schwierigkeiten im Hineinspielen des Unendlichen. Wir wollen hier auf derartige Grenzbetrachtungen erfordernde Überlegungen nicht eingehen, zumal der eine oder andere von den Lesern ihre Notwendigkeit nicht einmal recht einsehen wird.

Nur soviel mag gesagt werden, dass, je größer das betrachtete parkettierte Gebiet gewählt wird, um so geringfügiger der auf das einzelne Quadrat und den einzelnen Brautstuhl entfallende Fehler ist, der sich aus dem Nichtzusammenfallen der Konturen beider Parkettierungsarten ergibt.

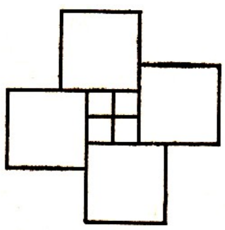


Bild 38

Betrachten wir nun einmal die Bilder 35 bis 37 näher! Bild 35 zeigt die uns vom "Schaufelradbeweis" her bekannte Zerlegung des Hypotenusenquadrates (Bild 18); Bild 37 deutet an, was aus dieser Zerlegung wird, wenn der Schnittpunkt O der Trennlinien im größeren Kathetenquadrat nicht zentral gewählt wird, Bild 36 endlich liefert das von dem Beweis an-Nairizis her bekannte Bild 23, - Schorer hat, indem er die "Tapetenmuster", wie er sie nennt, weiter untersucht, Zusammenhänge auch mit anderen Zerlegungsbeweisen aufgedeckt und die Theorie eingehend dargestellt.

Aufgabe 23. In Bild 38 sind vier Stühle der Braut aneinandergefügt. Benutze die so entstandene Figur als Element einer Parkettierung und leite daraus einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes her!

3 Der pythagoreische Lehrsatz im euklidischen System

1. Ein Beweis für den Lehrsatz von Pythagoras, der in den meisten Lehrbüchern der Elementarmathematik steht, ist von Euklid in seinen Elementen gegeben und nach dem Zeugnis von Proklos (Byzanz) auch von Euklid selbst gefunden. Dieser Beweis verläuft folgendermaßen:

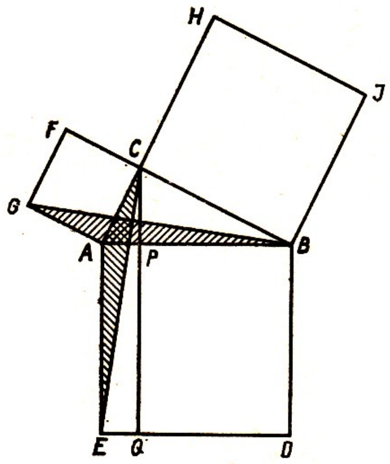


Bild 39

Es seien $ABDE$ das Quadrat über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC und $ACFG$ sowie $BCHI$ die Quadrate über den Katheten (Bild 39).
Wir fällen vom Scheitel C des rechten Winkels das Lot CP auf die Hypotenuse und verlängern dieses bis zum Schnitt mit der Seite DE des Quadrates $ABDE$ im Punkt Q.

Nun verbinden wir die Punkte C und E sowie B und G jeweils miteinander. Offenbar ist $\angle CAE = \angle GAB (= \angle BAC + 90°)$; hieraus folgt, dass die Dreiecke ACE und AGB (in Bild 39 schraffiert) kongruent sind (Weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen).
Nun vergleichen wir das Dreieck ACE und das Rechteck $PQEA$. Beide haben dieselbe Grundlinie AE und gleiche zu dieser Grundlinie gehörige Höhen (denn es ist $CQ \parallel AE$). Folglich gilt

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}$$

In der gleichen Weise haben das Quadrat $FCAG$ und das Dreieck BAG eine gemeinsame Grundlinie GA und gleiche zu dieser Grundlinie gehörige Höhen (wegen $BF \parallel AG$). Demnach ist

$$S_{FCAG} = 2S_{BAG}$$

Hieraus und aus der Kongruenz der Dreiecke ACE und BAG folgt die Flächengleichheit des Rechtecks $QPAE$ und des Quadrates $CFGA$. Entsprechend wird auch die Flächengleichheit des Rechtecks $QPBD$ und des Quadrates $CHIB$ bewiesen.

Hieraus folgt schließlich, dass das Quadrat $ABDE$ gleich ist der Summe der Quadrate $ACFG$ und $BCHI$, d.h. der Satz des Pythagoras.

Man hat lebhafte Einwendungen gegen den euklidischen "Mausefallenbeweis des pythagoreischen Lehrsatzes" (Schopenhauer, Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde) erhoben, und noch heute werden manche nicht müde, Schopenhauers Worte (Die Welt als Wille und Vorstellung) zu wiederholen:

"Des Euklides stelzbeiniger, ja hinterhältiger Beweis verlässt uns beim Warum, und beistehende, schon bekannte, einfache Figur[5] gibt auf einen Blick weit mehr, als jener Beweis, Einsicht in die Sache und innere feste Überzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel.

[5]Die Figur, die Schopenhauer meint, zeigt unser Bild 5. Sie ist ganz gewiss auch Euklid bekannt gewesen; jedenfalls spielt sie bei Platon im Dialog "Menon" eine Rolle.

Auch bei ungleichen Katheten muss es sich zu einer solchen anschaulichen Überzeugung bringen lassen, wie überhaupt bei jeder möglichen geometrischen Wahrheit, schon deshalb, weil ihre Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen wird."

Nun, wir haben im vorausgegangenen Kapitel eine ganze Fülle von Beweisen kennengelernt, die die von Schopenhauer angezeigte Lücke ausfüllen, können auch Schopenhauer nicht den Vorwurf ersparen, dass ohne jenes recht oberflächliche Hinweggleiten über die Frage auch ihm solche Beweise zu Gebote gestanden hätten.

Jetzt hört man nun aber nicht selten von Mathematikern, der einfachste Beweis für unseren Lehrsatz sei nicht irgendeiner der Zerlegungsbeweise, sondern eben der euklidische. Wie sind diese Gegensätze zu erklären?

Wenn wir uns zunächst einmal die Darstellung bei Euklid ansehen, die ähnlich in jedem mathematischen Schulbuche wiederkehrt, so sei zunächst über die Form ein Wort gesagt. Euklid gibt alle seine Beweise und Konstruktionen in synthetischer Form, d.h., er deutet nicht an, wie er auf diesen Beweis gekommen ist, warum er hier diese Hilfslinie zieht, dort jenen früheren Satz anwendet; erst ganz am Schluss merkt man, dass das alles seinen guten Zweck gehabt hat, dass man so zum erstrebten Ziel gekommen ist.

Wer nun einfach blindlings und ohne eigenes Nachdenken getreulich Schritt für Schritt Euklid folgt, dem wird nachher wirklich die ganze Sache wie eine Mausefalle vorgekommen sein.

Wer sich hingegen erinnert, wie die gleiche Sache bei einem ordentlichen Unterricht gemacht wurde, der wird eine ganz andere Methode im Sinne haben. Zunächst einmal wird er das Rüstzeug von Sätzen, das Euklid benutzt, im Kopie gehabt haben und wird nicht der Hinweise "nach Satz x" oder "nach Konstruktion y" bedürfen, die Euklid so sorgsam für manche seiner Leser meinte anfügen zu müssen. -

Was aber wichtiger ist, man wird mit dem Schatze der bisher bewiesenen Sätze selbst an das Problem herangehen, selbst an der Hand des leitenden Lehrers zu ergründen suchen, wie man wohl zum Beweise gelangen könnte. Man wird probieren, wie Euklid probiert hat, wenn er auch nichts davon verrät; man wird das Streben haben, beim pythagoreischen Lehrsatz wie bei allen elementar-mathematischen Sätzen das Beweisen, nicht den und den Beweis zu lernen.

Doch sehen wir von dieser Seite der Frage jetzt ganz ab. In welcher Richtung sind die Vorzüge des euklidischen Beweises zu suchen?
Wir stellen zunächst fest, dass bei Euklid der pythagoreische Lehrsatz nicht, wie es in der vorliegenden kleinen Darstellung der Fall ist, eine von den verschiedensten Seiten zu beleuchtende, im Zentrum des Ganzen stehende mathematische Tatsache ist, sondern ein Glied in einer langen Kette von Sätzen, eine Einzeltatsache in einem großen System mathematischer Wahrheiten.

Und dieses System ist von der Art, dass jedes neue Glied durch lediglich logische Schlüsse aus früheren Gliedern der Kette ab- geleitet wird. Jeder Beweis gründet sich auf frühere Lehrsätze. Da bei diesem Verfahren irgendwo ein Anfang sein muss, stehen an der Spitze des Ganzen einige wenige Grundsätze (Axiome). -

Wenn übrigens die moderne Wissenschaft in dieser Folge in der euklidischen Darstellung einige Unzulänglichkeiten entdeckt hat, was hier nur nebenbei angemerkt sei, so tut das dem Grundgedanken keinen Abbruch.

Das System ist in erster Linie ein logisches; das anschauliche Moment, wie es uns in den Zerlegungsbeweisen entgegentrat, ist in dem euklidischen Verfahren nicht das erste Erfordernis, ja genau betrachtet Nebensache.

In diesem System erhält der pythagoreische Lehrsatz seine Stelle als einer der Sätze der Flächenlehre. Euklid beginnt mit den einfachsten geschlossenen Figuren, mit Dreieck und Parallelogramm, dann folgt unser Satz.
Für Euklid wird unter diesen Umständen derjenige Beweis der einfachste gewesen sein, bei dem die Zahl der Anwendungen vorangehender Sätze möglichst gering war. Von diesen Sätzen stand ihm ein größeres Material zur Verfügung, als in jenen Einfachheitsbetrachtungen in Frage kam, von denen wir in Abschnitt II, 9 berichteten.
Dort kommen neben dem Begriff der Zerlegungsgleichheit nur die Kongruenzsätze in Betracht, hier kommen noch die Sätze aus der Flächenlehre hinzu.

Wir wollen nun einmal die Anzahl der Satzanwendungen beim euklidischen Beweis feststellen. Ich beschränke mich dabei auf den Nachweis der Gleichheit des einen Kathetenquadrates und des zugehörigen Teilrechtecks (man hat diesen Teil des pythagoreischen Satzes wohl auch den Satz von Euklid genannt).
Wir merken zunächst an, dass insgesamt drei Hilfslinien nötig sind, CQ, GB und CE in Bild 39. Von Sätzen ist nur anzuwenden einmal der 1. Kongruenzsatz und zweimal der Satz, dass ein Parallelogramm, das mit einem Dreieck gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks besitzt.

Man wird jetzt verstehen, dass von dem ganzen Satzsystem Euklids aus betrachtet der Beweis als außerordentlich einfach zu bezeichnen ist.

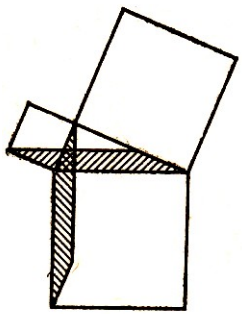


Bild 40

2. Für den euklidischen Beweis sind zwei Dinge charakteristisch. Es ist einmal der Umstand, dass im Hypotenusenquadrat in einfachster Weise ein dem einzelnen Kathetenquadrat flächengleiches Teilrechteck ausfindig gemacht wird. Das zweite ist, dass zum Nachweis dieser Flächengleichheit als tertium comparationis ein geeignetes, in zweifacher Lage (um den einen Eckpunkt um 90° gedreht) auftretendes Dreieck benutzt wird. Man kann nun leicht an die Stelle dieses Dreiecks auch ein Parallelogramm setzen, das dieselben Dienste tut. Es genügt, auf Bild 40 zu verweisen.

Aufgabe 24. Beweise, dass die größten Seiten des beim Beweis von Euklid zweifach auftretenden Hilfsdreiecks senkrecht aufeinander stehen! Die Tatsache ist bereits arabischen Mathematikern bekannt gewesen.

Aufgabe 25. In Bild 39 zeichne auch das zur Umwandlung des anderen Kathetenquadrates zu benutzende Hilfsdreieck ABJ ein! Was ist über den Schnittpunkt von GB und AJ auszusagen?

Aufgabe 26. Führe den Beweis mit dem Parallelogramm als Hilfsfigur in euklidischem Sinne streng durch; zeichne die Figur auch für die Verwandlung des größeren Kathetenquadrates.

3. Wir hatten in Abschnitt II, 13 sechs verschiedene Lagen der drei Quadrate in Bezug auf das Dreieck angegeben. Wie bei dem dort angedeuteten Zerlegungsbeweis kann man auch bei dem euklidischen Beweis statt von der gewählten von jeder anderen Lage ausgehen; man wird in jedem Falle zu einem Beweise gelangen.
In manchen Fällen treten kleine, allerdings unwesentliche Vereinfachungen auf. Wir greifen einen Fall heraus und überlassen es dem Leser, sich an weiteren Beispielen zu versuchen.

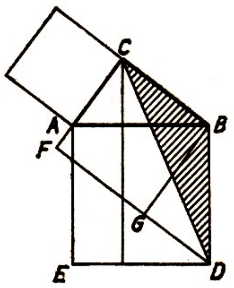


Bild 41

Es sei eines der Kathetenquadrate, in Bild 41 ist es das größere, nach innen geklappt. Dann geht die Verlängerung der äußersten Seite des umgeklappten Kathetenquadrates durch die eine Ecke des Hypotenusenquadrates.
Der Beweis gestaltet sich nun in diesem Falle für das umgeklappte Quadrat dadurch sehr einfach, dass man hier mit einem einzigen Vergleichsdreieck auskommt (es ist im Bild schraffiert). Dieses Dreieck ist die Hälfte der Quadratfläche und gleichzeitig die Hälfte der Rechtecksfläche.

Aufgabe 27. Führe den strengen Beweis dafür, dass die Verlängerung von FG durch D geht!

4. Nur ganz kurz wollen wir bei der Frage verweilen, welche Sätze im euklidischen System dem pythagoreischen Satze folgen.
Ich will diese Sätze zunächst nur nennen; der Leser versuche, die Beweise an der Hand irgendeines geometrischen Lehrbuches durchzudenken.

Zunächst ist von Wichtigkeit, dass der pythagoreische Lehrsatz umkehrbar ist. Man nimmt das oft als Selbstverständlichkeit hin, Während es das doch durchaus nicht ist. Wenn die Berliner Deutsche sind, so folgt eben daraus noch lange nicht, dass die Deutschen Berliner sind. Es bedarf also allerdings eines übrigens recht einfachen Beweises für den Satz:

Wenn das Quadrat über einer Seite eines Dreiecks flächengleich ist der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig, und zwar liegt der rechte Winkel der zuerst genannten Seite gegenüber (vgl. Abschn. IV, 8).

Ein anderer Satz ist eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Satzes:

In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck der einen dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie, je nachdem die Seite einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt (vgl. Abschn. IV, 9).

Aufgabe 28. Führe den Beweis durch Rechnung mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes und unter Verwendung der projizierenden Höhe, die nachher wieder zu eliminieren ist!

5. Ein Satz, der sich noch nicht bei Euklid, sondern erst bei Pappos von Alexandria (im 3. Jahrh. u.Z.) findet, ist der nach diesem Mathematiker benannte Lehrsatz von Pappos:

In jedem Dreieck ist das über einer Seite nach innen beschriebene Parallelogramm, dessen andere Ecken außerhalb des Dreiecks fallen, gleich der Summe der über den beiden anderen Seiten beschriebenen Parallelogramme, deren Gegenseiten durch die Ecken des ersteren gehen.

Wählt man als Dreieck ein rechtwinkliges und als Parallelogramm über einer Dreiecksseite das Hypotenusenquadrat, so ist in diesem besonderen Falle der Lehrsatz von Pappos identisch mit dem von Pythagoras. Der letztere ist also ein Sonderfall des ersteren.

Aufgabe 29. Zeichne die Figur für diesen Fall und untersuche, welche Lage der Quadrate hier in Frage kommt und welcher Beweis am schnellsten zum Ziel führt!

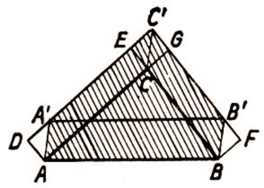


Bild 42

Wir wollen den Beweis an Hand des Bildes 42 führen; die Parallelogramme sind bereits eingezeichnet. Außerdem sind die äußersten Seiten der beiden Parallelogramme im Punkte C' zum Schnitt gebracht, und es ist $C'C$ gezogen.
Die Figur kann man sich auch so entstanden denken, dass $\triangle ABC$ in die Lage $A'B'C'$ verschoben ist. Es ist also $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
$AA'C'C$ und $BB'C'C$ sind Parallelogramme, die flächengleich sind den Parallelogrammen $ADEC$ und $BFGC$, weil sie gleiche Höhe und Grundlinie mit ihnen haben.
Wenn man jetzt die schraffierte Figur $AA'C'B'B$ betrachtet und einmal das Dreieck $A'C'B'$ abzieht, so bleibt das Parallelogramm $AA'B'B$ übrig.
Zieht man hingegen das $A'B'C'$ flächengleiche Dreieck ABC ab, so bleibt die Summe der Parallelogramme $AA'C'C + BB'C'C$ übrig oder aber die diesen flächengleiche Summe $ADEC + BFGC$, und das ist die Behauptung des Satzes.

Aufgabe 30. Verschiebt man ein rechtwinkliges Dreieck in der Richtung einer Kathete über den rechten Winkel hinaus um die andere Kathete, so liefert die Figur zum Lehrsatz des Pappos den Satz über das Kathetenquadrat.
Verschiebt man das Dreieck so, dass die Hypotenuse über den rechten Winkel hinaus ein Quadrat beschreibt, so kommt man auf einen bereits bekannten Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes.

6. Die Frage liegt nahe, ob es nicht für den pythagoreischen Lehrsatz auch ein Analogon im Raum gibt. Das ist in der Tat der Fall [Entdecker Joh. Faulhaber (1622) in Ulm].
Wir wählen eine Ecke aus, bei der die sämtlichen Winkel zwischen je zwei anstoßenden Flächen wie zwischen zwei anstoßenden Kanten rechte sind (Bild 43).

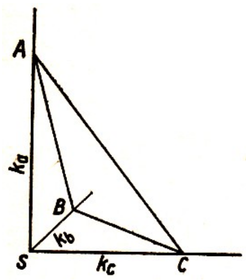


Bild 43

Jedes regelmäßig gebaute Zimmer liefert uns in seinen acht Ecken Beispiele dafür. Den Scheitel der Ecke nennen wir S; auf den Kanten nehmen wir irgendwo die Punkte A, B und C an. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Kantenlängen, also die Strecken SA, SB, SC mit k_a, k_b, k_c.
Wenn ich jetzt noch mit ABC den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichne und gleicherweise beiden Dreiecken SAB usf. verfahre, dann lautet eine räumliche Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes:

$$ABC^2 = SAB^2 + SAC^2 + SBC^2$$

Wir wollen den Beweis, der auf eine leichte Rechnung herauskommt, hier nicht bis ins einzelne durchführen.

Aufgabe 31. Beweise die Richtigkeit der Gleichung, indem du alle Flächen durch die Kantenlängen k_a, k_b, k_c ausdrückst. Bei den rechtwinkligen Dreiecken SAB B usf. ist das sehr einfach.
Für das $\triangle ABC$ kann man zunächst mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes die einzelnen

Seiten finden und dann diese Werte in die heronische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{wobei} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist, einsetzen.

7. Unsere bisherigen Darlegungen bewegten sich im Rahmen der euklidischen Geometrie, für die u.a. der Kongruenzbegriff kennzeichnend ist. Nach der anderen Auffassung von F. Klein [6] handelt es sich dabei um die sog. Bewegungsgruppe.
Statt die Kongruenz zweier Flächen nachzuweisen, kann man auch die eine mit der anderen zur Deckung bringen; man führt zu dem Zweck eine Bewegung aus. Und diese Bewegungen bilden eine Gruppe, weil zwei nacheinander auszuführende Bewegungen durch eine andere rückgängig gemacht werden können (vgl. MSB Nr. 4, 5.111ff.)

Euklid ist in der Benutzung von Bewegungen sehr zurückhaltend; wo irgend er ohne sie auskommen kann, vermeidet er sie.
Immer gelingt ihm das freilich nicht. Heute wird im Unterricht die Bewegungsgeometrie wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit gern verwendet.

In unseren Ausführungen haben wir gelegentlich auf Bewegungen hingewiesen. Im Vordergrund stehen gewisse Sonderfälle.
Das sind einmal Parallelverschiebungen, wie sie z.B. sehr schön in den Bildern 16 und 17 oben oder 42 auftreten. Zum andern sind es Drehungen, insbesondere um $90°$, wie z.B. in den Bildern 39 und 40, und um $180°$, wie in Bild 26 (Sechseck mit Hypotenusenquadrat). Hier spricht man von Zentralsymmetrie. Wir erkennen sie auch in den Bildern 18 oder 30.

Während sich die gruppenbildenden Verschiebungen und Drehungen in der Ebene selbst abspielen, muss man, wenn es sich um Umklappungen, um axiale Symmetrie handelt, den Raum zur Hilfe nehmen, um Deckung herbeizuführen. Auch diese, übrigens nicht unter den Gruppenbegriff fallende Bewegung begegnet uns in unseren Bildern.

Es sei dem Leser angeraten, der Zurückführung der Kongruenz auf Bewegungen bei den bisherigen Beweisen des pythagoreischen Lehrsatzes im einzelnen selbst nachzugehen.

8. Es mag als Abschluss dieses Kapitels noch die Frage gestreift werden, wie es denn mit der Begründung des pythagoreischen Lehrsatzes steht, wenn man ihn ganz und gar aus einem logischen System mathematischer Sätze herauslöst, wenn man ihn lediglich als physikalische Erfahrungstatsache hinnimmt, wenn man seine Richtigkeit an den verschiedensten Beispielen rechtwinkliger Dreiecke ausprobiert.

Das einfachste ist, man zeichnet mit möglichster Genauigkeit rechtwinklige Dreiecke, misst ihre Seiten mit einem genauen Maßstab aus und überzeugt sich davon, ob $a^2 + b^2 = c^2$ ist.
Will man die Quadrate selbst miteinander vergleichen, so kann man sie auf einen in Quadratmillimeter geteilten Bogen (sog. Millimeterpapier) zeichnen und die Zahl der Quadratmillimeter abzählen. Oder aber man schneidet die auf stärkeres, möglichst gleichmäßiges Papier gezeichneten Quadrate aus und stellt mit einer feinen Waage, zur Not auf einer Briefwaage fest, ob die beiden Kathetenquadrate zusammen das gleiche Gewicht wie das Hypotenusenquadrat haben.

Alle diese Messungen werden niemals unseren Satz genau bestätigen. Das liegt an den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, deren Größe sich nach der Geschicklichkeit des einzelnen und

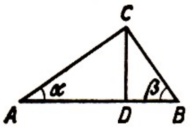
[6] F. Klein (1849-1925), bedeutender Mathematiker. Die Abbildungsgeometrie, zu der die Bewegungsgruppe gehört, wurde von ihm 1872 im sog. Erlanger Programm begründet.

nach der Genauigkeit der benutzten Zeichen- und Messwerkzeuge richtet.
Nur ein deduktiver Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, etwa in der Art des euklidischen Beweises oder eines Zerlegungsbeweises überzeugt uns davon, dass die durch den Satz gegebene Aussage in allen Fällen exakt erfüllt ist.

4 Pythagoreischer Lehrsatz und Ähnlichkeitslehre

1. Fällt man vom Scheitel des rechten Winkels in unserem rechtwinkligen Dreieck die Höhe CD, so zerfällt das Dreieck in zwei wieder rechtwinklige Dreiecke (Bild 44).

Bild 44



Diese Dreiecke sind einander und dem ursprünglichen Dreieck ähnlich. Der Nachweis ist leicht erbracht an Hand des Ähnlichkeitssatzes:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Man sieht nämlich, dass außer dem rechten Winkel die Dreiecke ABC und ACD den Winkel α, die Dreiecke CBD und ABC den Winkel β gemeinsam haben.
Dass die beiden Teildreiecke auch einander ähnlich sind, folgt schon daraus, dass sie jedes für sich dem ganzen ähnlich sind. Man kann es im übrigen auch unmittelbar feststellen.

Da in ähnlichen Dreiecken gleichliegende Seiten in gleichem Verhältnis stehen, so folgt aus der Ähnlichkeit des ganzen und eines Teildreiecks:

$$AD : AC = AC : AB$$

oder, wenn man die Produktengleichung bildet:

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

Mit den Ausdrücken der Proportionenlehre heißt das:

Die Kathete im rechtwinkligen Dreieck ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Vom Standpunkt der Flächenlehre aus ist die Gleichung gleichbedeutend mit der bei dem euklidischen Beweise benutzten Tatsache:

Das Quadrat über einer Kathete ist gleich dem aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt gebildeten Rechteck.

Wir brauchen diese Tatsache noch ein zweites Mal für die andere Kathete

$$BC^2 = DB \cdot AB$$

und finden durch Addition

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB(AD + BD) = AB^2$$

Wir haben so einen auf die Ähnlichkeitslehre gestützten, recht einfachen Beweis für den pythagoreischen Lehrsatz erhalten.

Er findet sich bei dem Inder Bhaskara (geb. 1114 u.Z.) und später bei Leonardo Fibonacci von Pisa (in der Practica geometriae von 1220); später ist er unabhängig davon von dem englischen Mathematiker Wallis (1616 bis 1703, Oxford) wieder gefunden worden.

Aufgabe 32. Einen anderen Beweis führe selbst: ABC sei das rechtwinklige Dreieck, der Scheitel seines rechten Winkels C. Schlage mit b um A einen Kreis, der die Hypotenuse und ihre Verlängerung in D und E schneidet. Dann sind die Dreiecke BCD und BCE ähnlich, es gilt die Proportion

$$a : (c - b) = (c + b) : a$$

und daraus folgt der pythagoreische Lehrsatz (Bild 45). Man kann sich auch auf den Sekanten-Tangentensatz berufen, aus dem sich unmittelbar ergibt: $a^2 = (c + b) \cdot (c - b)$.

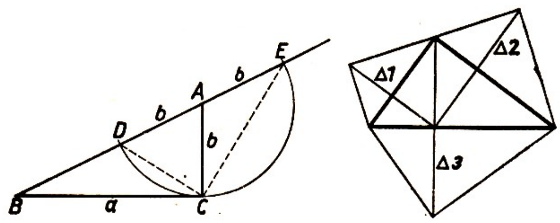


Bild 45 und 46

2. In Bild 44 denke man sich das Dreieck ACD um AC nach außen geklappt, ebenso DBC um CB und $\triangle CAB$ um AB. Die Figur, die dann entsteht (Bild 46), unterscheidet sich von der so oft bei früheren Beweisen gebrauchten dadurch, dass jetzt rechtwinklige Dreiecke, und zwar untereinander ähnliche, an die Stelle der Quadrate getreten sind.

Wie dort die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat, ist auch hier, wie sich aus der Entstehung der Figur sofort ergibt, die Summe der Dreiecke über den Katheten gleich dem Dreieck über der Hypotenuse. Man wird die Frage aufwerfen, gibt es außer dem Quadrat und diesen besonderen rechtwinkligen Dreiecken noch andere Flächen F_1 und F_2 über den Katheten und eine zugehörige Fläche F_3 über der Hypotenuse, für die

$$F_1 + F_2 = F_3$$

ist. Selbstverständlich gilt diese Beziehung nicht für irgendwelche ganz beliebige Figuren. Was wir zeigen wollen, ist:

Errichtet man über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks irgendwelche ähnliche Figuren F_a, F_b und F_c, in denen die Katheten und die Hypotenuse homologe Stücke sind, so ist

$$F_a + F_b = F_c$$

Dieser Satz steht bereits bei Euklid (im 6. Buche der Elemente) und ist wahrscheinlich sein geistiges Eigentum. Das geht aus einer Äußerung von Proklos hervor, die gleichzeitig den Beweis liefert, dass man schon im Altertum diese Form des pythagoreischen Lehrsatzes als die recht eigentlich das Wesentliche treffende ansah. Proklos sagt:

"Ich bewundere zwar auch die, welche zuerst der Wahrheit dieses Problems nachgeforscht haben; mehr aber noch schätze ich den Verfasser der Elemente nicht nur, weil er das Theorem mit dem bündigsten Beweise versah, sondern auch, weil er das im sechsten Buche enthaltene, noch allgemeinere Problem durch die unwiderlegbaren Gründe der Wissenschaft feststellte."

3. Wir ziehen für die Beantwortung unserer Frage einen Hilfssatz aus der Ähnlichkeitslehre heran, der sich in jedem Lehrbuch der elementaren Geometrie findet:

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Sind F_a, F_b, F_c die den Katheten a und b und der Hypotenuse c anliegenden ähnlichen Vielecke, dann gilt nach diesem Hilfssatz die Proportion:

$$F_a : F_b : F_c = a^2 : b^2 : c^2$$

Diese Proportion bedeutet: Es lässt sich eine Zahl k, der Proportionalitätsfaktor, so finden, dass

$$F_a = ka^2, \qquad F_b = kb^2, \qquad F_c = kc^2$$

ist. Dann folgt aus $a^2 + b^2 = c^2$ durch die Multiplikation mit k

$$F_a + F_b = F_c$$

Über den Zusammenhang zwischen dieser Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes und dem Satz selbst wollen wir ein wenig nachdenken. Wir haben gesehen, dass die allgemeinere Gleichung

$$F_a + F_b = F_c$$

sich aus der pythagoreischen Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ergibt. Umgekehrt ist klar, dass bei Gültigkeit der Beziehung $F_a + F_b = F_c$ für beliebige einander ähnliche und über den Katheten sowie der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierte Vielecke F_a, F_b und F_c diese auch für die Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gilt. Somit ist der allgemeine Satz seinem Spezialfall (dem Satz des Pythagoras) äquivalent.

Interessant ist hierbei, dass ein beliebiger Spezialfall dieses allgemeinen Satzes dem Satz selbst und damit auch dem Satz des Pythagoras gleichwertig ist. In der Tat, gilt die Gleichung

$$F_a + F_b = F_c$$

für wenigstens ein Tripel einander ähnlicher, über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC derart konstruierter Vielecke, dass AC, BC und AB entsprechende Stücke dieser Vielecke sind, so ist

$$ka^2 + kb^2 = kc^2$$

(wobei k irgendeinen bestimmten Wert hat, der von der Wahl der Vielecke abhängt; um welchen Wert es sich dabei handelt, ist uns völlig gleichgültig). Hieraus folgt aber

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und damit die Gültigkeit der Gleichung $F_a + F_b = F_c$ für beliebige über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert ähnliche Vielecke und insbesondere auch für Quadrate.

Nun brauchen wir nur noch zu bemerken, dass für ein bestimmtes Tripel ähnlicher Vielecke, die über den Seiten AC, BC und AB konstruiert sind, und zwar für rechtwinklige Dreiecke, die dem Dreieck ABC ähnlich sind, die Gleichung $F_a + F_b = F_c$ stets erfüllt wird. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nicht auf Bild 46 zurückzugreifen, sondern kann unmittelbar von Bild 44 ausgehen (in dem die rechtwinkligen Dreiecke auf der gleichen Seite der Seiten des

Dreiecks ABC liegen wie das ursprüngliche Dreieck ABC selbst; vgl. Abschnitt II, 13).

Hieraus folgt aber, wie wir gesehen hatten, dass diese Gleichung für beliebige über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierte ähnliche Vielecke, insbesondere auch für Quadrate gilt.

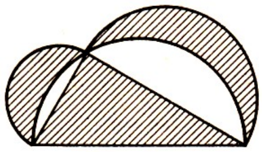
Dieser hübsche Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes (der sich allerdings auf die Ähnlichkeitslehre stützt) ist wohl einer der einfachsten.

4. Wir wollen gleich eine interessante Anwendung dieser Tatsache kennenlernen, einen Satz, den man in vielen Lehrbüchern angeführt und dann meist als Satz von den lunulae Hippocratis bezeichnet findet.

Hippocrates von Chios (2. Hälfte des 5. Jahrh. v.u.Z.; Athen) hat sich mit der Quadratur von Möndchen (griechisch $\mu\eta\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$, lateinisch lunula) beschäftigt. Als Möndchen bezeichnet er ein zwischen zwei Kreisbögen liegendes Flächenstück[7]; die Quadratur einer solchen Figur kommt darauf hinaus, ein ihr flächengleiches Quadrat zu zeichnen.
Unser Satz findet sich bei Hippocrates nicht, der nur einzelne Möndchen quadrierte. In seiner vollen Allgemeinheit bewies der Araber Ibn al-Haitham (gest. 1039) den Satz. Die französischen Mathematiker A. de Lionne und G. Pardies sprechen ihn 1654 und 1671 erneut aus, ob abhängig von der arabischen Quelle, ist nicht festzustellen. Pardies spricht dabei in seinen Elements de Geometrie von den Lunes d'Hippocrate de Scio.
Auch in einer Euklidausgabe von Tacquet-Whiston (1745) wird der allgemeine Fall des Satzes fälschlich dem Hippocrates zugeschrieben.

Wenn wir über der Hypotenuse unseres rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser einen Halbkreis - jedoch nicht nach außen, sondern nach innen - ziehen, so geht dieser durch den Scheitel des rechten Winkels - das ist ein von den Griechen dem Thales von Milet zugeschriebener aber schon den alten Babyloniern bekannter Satz. Werden jetzt auch noch über den Katheten Halbkreise geschlagen, so entstehen zwei in Bild 47 schraffierte Möndchen.

Bild 47



Es seien K_a, K_b, K_c die Flächeninhalte der über den Katheten und der Hypotenuse errichteten Halbkreise. Nach unserem Satze in Abschnitt IV, 3 ist dann

$$K_a + K_b = K_c$$

Aufgabe 33. Der Satz in Abschnitt IV, 3 war nur für Vielecke ausgesprochen worden. Gilt er denn auch für Kreise?

Das gleiche Ergebnis erhält man rechnerisch, wenn man die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

[7] Was wir also am Himmel bei zunehmendem oder abnehmendem Mond sehen, ist nach dieser Definition kein "Möndchen", denn der belichtete Teil der Mondscheibe wird von einem Halbkreis und einer halben Ellipse begrenzt, die sich durch die Projektion eines Kreises (Peripherie des Erdschattens) auf eine Kugel (den Mond) ergibt.

beiderseits mit $\frac{\pi}{8}$ multipliziert. In der Tat bedeutet

$$\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$$

dass der Inhalt des Halbkreises mit dem Durchmesser c gleich der Summe der Inhalte der beiden anderen mit dem Durchmesser a und b ist.
Zieht man sowohl von dem Hypotenusenhalbkreis wie von den Kathetenhalbkreisen die in Bild 47 nicht schraffierten Teile ab, so ergibt sich die Flächengleichheit der Summe der Möndchen und des Dreiecks.

5. Wir kehren zu unserem rechtwinkligen Dreieck und seinen Teildreiecken zurück (Bild 44); Es sei h die Höhe vom Scheitel des rechten Winkels aus, p und q seien die von der Höhe erzeugten Abschnitte auf der Hypotenuse. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke die Proportion

$$p : h = h : q \qquad \text{oder} \qquad h^2 = p \cdot q$$

das heißt mit den Worten der Flächenlehre:

Das Quadrat über der Höhe ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

Man kann diesen Satz auch ohne Ähnlichkeitslehre unmittelbar aus dem pythagoreischen Lehrsatz herleiten. Es ist nämlich aus dem einen Teildreieck

$$h^2 = a^2 - p^2$$

und aus dem anderen

$$h^2 = b^2 - q^2$$

Man addiere beides und setze in

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2$$

für die Summe $a^2 + b^2$ der Kathetenquadrate das Hypotenusenquadrat

$$c^2 = (p + q)^2$$

ein. Dann vereinfacht sich, wenn man $(p+q)^2$ ausquadriert und durch 2 dividiert, der Ausdruck auf

$$h^2 = p \cdot q$$

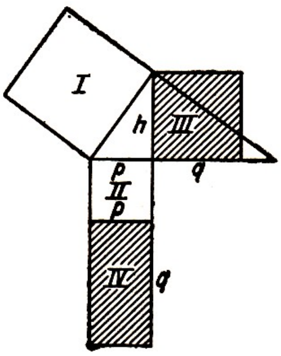


Bild 48

Einen anschaulichen Beweis liefert Bild 48. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist das Höhenquadrat III flächengleich Kathetenquadrat I - Quadrat II oder, da I dem Rechteck II + IV flächengleich ist, dem Rechteck IV. Dessen Seiten sind aber p und q.

Einen sehr schönen Beweis des Höhensatzes hat K. Meitzner veröffentlicht.

Man legt die rechtwinkligen Teildreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ (Bild 49), in die die Höhe des ganzen Dreiecks dieses teilt, so aneinander, dass die beiden Hypotenusen eine Strecke PQ bilden; das ist auf zwei verschiedene Weisen möglich, wie die Bilder 50 und 51 zeigen.

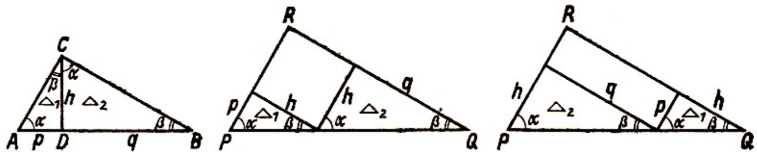


Bild 49 bis 50

In Bild 50 ergänzt das Quadrat h^2, in Bild 51 das Rechteck $p \cdot q$ die Figuren zu einem rechtwinkligen Dreieck PQR. Diese beiden Dreiecke sind aber kongruent. Mithin ist $h^2 = p \cdot q$.

6. Die Strecke c zerfalle in die Teilstrecken p und q über c, p und q als Durchmesser seien Halbkreise nach der gleichen Seite geschlagen (Bild 52).

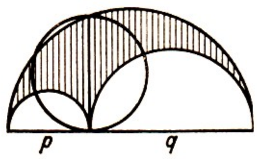


Bild 52

Die von den drei Halbkreisen begrenzte Figur hat man mit einem gekrümmten Schustermesser verglichen und danach den Namen Arbelos dafür gewählt. Archimedes hat darüber einige Sätze ausgesprochen.

Wir begnügen uns hier mit einer Tatsache. Wir ergänzen die Figur zu einem Bild 52 rechtwinkligen Dreieck, in dem c Hypotenuse, p und q Hypotenusenabschnitte sind. Dann ist der Kreis über der Höhe als Durchmesser flächengleich jenem Arbelos.

Bei dem Beweise gehen wir zweckmäßig gleich von der in Abschnitt IV, 5 benutzten Gleichung

$$2h^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

aus. Multiplizieren wir sie mit $\frac{\pi}{8}$,

$$\frac{\pi h^2}{4} = \frac{\pi c^2}{8} - \frac{\pi p^2}{8} - \frac{\pi q^2}{8}$$

so steht links der Kreis mit der Höhe als Durchmesser, rechts der Inhalt des Arbelos.

7. Das zu Beginn dieses Abschnitts angewandte Verfahren wollen wir jetzt auf beliebige Dreiecke übertragen und an Hand dieser Figur eine Schuld aus dem vorangehenden Abschnitt abtragen.
Wir setzen voraus, dass der Winkel γ eines Dreiecks ABC stumpf sei (Bild 53), und tragen, und zwar gleich nach innen, ein $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck den Seiten b und a an, was wir auch so erreichen können, dass wir in C an AC $\angle\beta$, an BC $\angle\alpha$ antragen. Die Schnitte der freien Schenkel mit der Seite c seien D_1 und D_2.

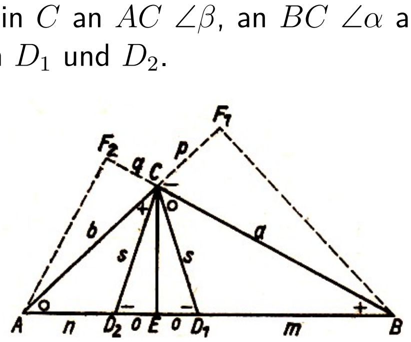


Bild 53

Da γ stumpf, $\alpha + \beta$ also spitz ist, entsteht so ein gleichschenkliges Dreieck CD_1D_2 mit der Höhe CE, und beiderseits davon liegen die untereinander und zum Ausgangsdreieck ähnlichen

Dreiecke D_1CB und D_2AC. Führen wir die Abkürzungen $AD_2 = n$, $D_2E = ED_1 = o$, $D_1B = m$, $CD_1 = CD_2 = s$ ein, dann erhalten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke die drei Proportionen

$$s : n = m : s, \quad (1) \qquad a : m = c : a, \quad (2) \qquad b : n = c : b, \quad (3)$$

oder als Produktengleichung die Beziehungen

$$s^2 = m \cdot n, \quad (4) \qquad a^2 = m \cdot c, \quad (5) \qquad b^2 = n \cdot c \quad (6)$$

Ich empfehle dem Leser, sich diese Gleichungen auch geometrisch dadurch zu deuten, dass er die Quadrate und Rechtecke wirklich zeichnet. Dann wird es ihm noch klarer werden, dass wir es hier mit einer Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes zu tun haben.
Aus (5) und (6) folgt

$$a^2 + b^2 = c(m + n)$$

und - das ist ein kleiner Kniff -, wenn ich rechts $2oc$ addiere und subtrahiere,

$$a^2 + b^2 = c(m + n + 2o) - 2oc$$

In der Klammer steht c. Ich kann also die Gleichung schreiben

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2oc \tag{7}$$

Das ist eine lehrreiche Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes. Man sieht sofort, dass für den Fall, dass $\gamma = 90°$ wird, $o = 0$ ist; wir haben dann unseren Beweis vom Eingang dieses Abschnitts vor uns.

Aufgabe 34. Führe die gleichen Überlegungen durch, wenn γ ein spitzer Winkel ist!

8. Wenn wir zu unserer Darlegung das Ergebnis von Aufgabe 34 hinzunehmen, so haben wir unmittelbar den Beweis für die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes in der Hand (Abschnitt III, 4): Es sei $c^2 = a^2 + b^2$.
Die Behauptung lautet, dass dann γ ein rechter Winkel ist. Wäre es nicht der Fall, so könnte γ stumpf oder spitz sein. Im ersten Falle ergäbe sich eine Gleichung (7) mit einem $o \neq 0$, im zweiten Falle als Ergebnis von Aufgabe 34 ein entsprechendes $o \neq 0$. Beides widerspricht unserer Voraussetzung.

9. Wir zeigen durch eine Hilfskonstruktion, dass unsere Gleichung (7) nichts anderes ist als eine Abart des gleichfalls schon in Abschnitt III, 4 ausgesprochenen allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes.

Fällt man (Bild 53) etwa von B auf b das Lot und nennt den Fußpunkt, der im Falle des stumpfen Winkels γ außerhalb AC liegt, F_1, dann ist $\triangle BF_1C \sim \triangle CED_1$, da die Winkel bei C und D_1 gleich sind. (Ebenso könnte ich die entsprechende Konstruktion von A aus machen; in der Figur ist das ausgeführt.)

CF_1, die Projektion von a auf b, heiße p; in dem anderen Dreieck ist $CF_2 = q$ die Projektion von b auf a. Die beiden ähnlichen Dreiecke liefern die Proportion

$$o : s = p : a \qquad \text{oder} \qquad o = \frac{s \cdot p}{a}$$

Greifen wir jetzt auf zwei unserer früher betrachteten drei ähnlichen Dreiecke zurück, so erhalten wir

$$s : b = a : c \qquad \text{oder} \qquad \frac{s}{a} = \frac{b}{c}$$

Unser Zusatzglied in (7) nimmt also die Gestalt an

$$2oc = 2 \cdot \frac{sp}{a} \cdot c = 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot p \cdot c = 2bp$$

und damit (7) selbst $c^2 = a^2 + b^2 + 2bp$.
Ebenso hätte uns das andere Hilfsdreieck die Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot q$$

geliefert. Das ist die Aussage unseres verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatzes für den Fall eines stumpfen Winkels γ.

Aufgabe 35. Führe den Beweis des Satzes für den Fall eines spitzen Winkels γ durch!

10. R. Dintzl hat gezeigt, dass man auch für die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes einen Parkettierungsbeweis erbringen kann.

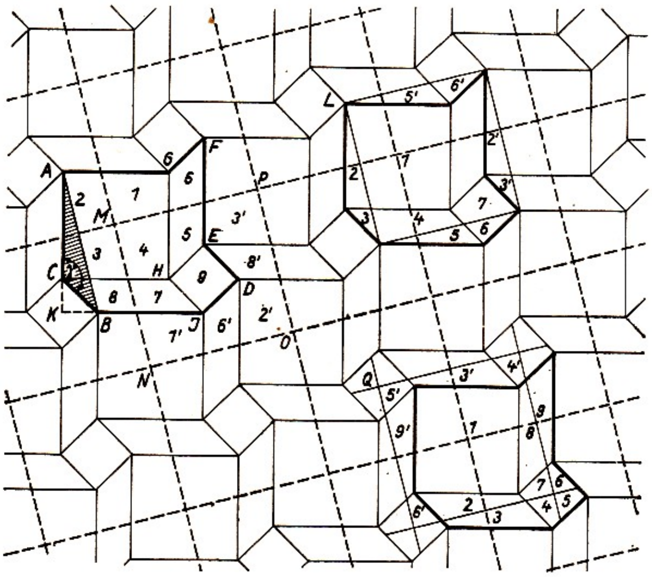


Bild 54

Wir gehen von dem bei C stumpfwinkligen Dreieck ABC aus und wählen (Bild 54) als Element der Parkettierung das Achteck $ACBJDEFG$, das sich aus zwei Quadraten $ACHG$ mit der Dreiecksseite b als Seite und $HJDE$ mit der Dreiecksseite a als Seite zusammensetzt, sowie aus den beiden kongruenten Parallelogrammen $CBJH$ und $HEFG$, deren Seiten b und a sind.

Wählt man als Eckpunkte des darüber gelegten quadratischen Gitters die Mitten der großen Quadrate, dann lässt sich nachweisen, dass sich z.B. das Quadrat $MNOP$ aus den gleichen Teilstücken 1, 2, ..., 9 bzw. aus ihren kongruenten Stücken 1', 2', 3', 6', 8' zusammensetzen lässt wie das Achteck der ursprünglichen Parkettierung.
Daraus folgt aber, dass $AB = MN$ ist,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2CH \cdot CK$$

und das ist der verallgemeinerte pythagoreische Lehrsatz.

Aufgabe 36. Das Verfahren lässt sich auch auf spitzwinklige Dreiecke ABC ausdehnen, die Figur wird aber verwickelter, da Überdeckungen auftreten. Versuche trotzdem, ob du durchkommst!

Aufgabe 37. Wie im Falle des pythagoreischen Lehrsatzes kann man nun das quadratische Gitter beliebig verschieben und erhält andere Zerlegungen. In Bild 54 sind zwei Fälle eingetragen. Einmal ist als Eckpunkt des Quadrates der A entsprechende Punkt L genommen, zum anderen der Mittelpunkt des kleinen Quadrates. Untersuche in diesen Fällen die Zerlegung des Quadrates c^2!

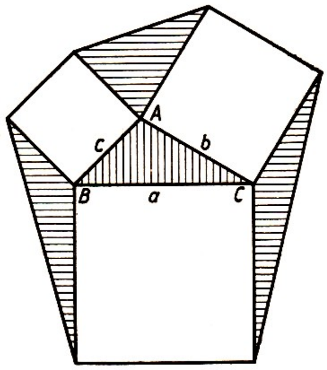


Bild 55

11. Zieht man außer der Ähnlichkeitslehre auch die aus ihr erwachsende Trigonometrie heran, dann nimmt, da die Projektion der Dreiecksseite a auf b je nachdem ob γ spitz oder stumpf ist, $a \cdot \cos\gamma$ oder $-a \cdot \cos\gamma$ ist, in beiden Fällen der verallgemeinerte pythagoreische Lehrsatz die Gestalt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

an; das ist der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie.
Mit den Mitteln der Trigonometrie lässt sich ein Satz leicht beweisen, den ein Schüler J. Klein gefunden hat.

In Bild 55 sind zu dem beliebigen Dreieck ABC über den Seiten a, b und c die Quadrate gezeichnet. Dann sind die in der Figur schraffierten Dreiecke flächengleich. Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man von der Inhaltsformel $f = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ausgeht und $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$ berücksichtigt.

Aufgabe 38. Führe hiernach den Beweis!

12. Vektoren sind Klassen gerichteter und orientierter Strecken, die durch Angabe der Länge oder des Betrages (d.h. eines Zahlenwertes), einer Richtung und des Richtungssinns bestimmt sind; Wir bezeichnen sie mit deutschen Buchstaben.

Die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ addiert man, indem man in dem durch sie gebildeten Parallelogramm die Diagonale zieht. Ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}$.
Unter dem "skalaren" Produkt zweier Vektoren versteht man das Produkt der Beträge der Vektoren und des Kosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren, also die Maßzahl des Flächeninhaltes des Rechtecks, dessen eine Seite der eine Vektor ist, während die Projektion des anderen Vektors auf ihn die andere Seite ist.

Bilden also die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ miteinander den Winkel γ, so ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Darin sind a und b die Beträge der Vektoren (d.h. die Längen der Strecken). Stehen die Vektoren senkrecht aufeinander, dann ist wegen $\cos 901\circ = 0$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$$

Für $\gamma = 0$ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{a}^2 = a^2$$

Für das skalare Produkt gilt das distributive Gesetz

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{m}\mathfrak{a} + \mathfrak{m}\mathfrak{b}$$

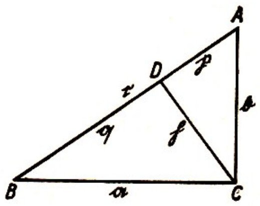


Bild 56

In dem bei C rechtwinkligen, von den Vektoren $\mathfrak{a} = CB$, $\mathfrak{b} = CA$, $\mathfrak{c} = AB$ gebildeten Dreieck ist (Bild 56) $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ nach dem Gesetz der Vektoraddition, folglich

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$

Quadriert man, dann folgt

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

Da $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$, folglich

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 \qquad \text{oder} \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

Das ist der pythagoreische Lehrsatz.
Ist das Dreieck ABC beliebig (also nicht notwendig rechtwinklig), so liefert die gleiche Formel

$$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

d.h. den Kosinussatz, der ebenfalls eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes darstellt.

Zerlegt der von C ausgehende, zu $\mathfrak{c}$ senkrechte Vektor $\mathfrak{h}$ den Vektor $\mathfrak{c}$ in die von D ausgehenden Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, dann ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} + \mathfrak{h}$, folglich

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{q} + \mathfrak{h}) \cdot (\mathfrak{p} + \mathfrak{h}) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{h} + \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^2$$

also $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{h}^2 = 0$ und, da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entgegengesetzt gerichtet sind,

$$h^2 = p \cdot q$$

Damit ist auch der Höhensatz bewiesen.

5 Berechnungen mit Hilfe der pythagoreischen Gleichung

1. Bei Berechnungen geometrischer Stücke aus anderen auf Grund der pythagoreischen Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

stoßen wir sehr bald auf Quadratwurzeln und wollen über diese eine Bemerkung vorausschicken. Ausdrücke wie $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ sind offensichtlich keine ganzen Zahlen. Aber sind es nicht vielleicht Brüche?

Um diese Annahme von vornherein aus der Welt zu schaffen, zeigen wir, dass das nicht der Fall ist. Wir wählen als Beispiel $\sqrt{2}$.

Nehmen wir an, es sei

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ bereits soweit wie möglich gekürzt ist. Quadriert man und bringt man den Nenner auf die andere Seite, so hat man

$$2q^2 = p^2$$

p wäre also eine gerade Zahl. Dann ist aber p^2 durch 4 teilbar. Kürzt man beiderseits 2 fort, so sieht man, dass auch q^2 und damit auch q eine gerade Zahl wäre. Das aber widerspricht unserer Annahme, dass p und q keinen Teiler mehr gemein haben.

Ganz allgemein gilt, dass eine Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl keine rationale Zahl sein kann, wenn sie nicht von vornherein ganzzahlig ist.

Aufgabe 39. Führe den entsprechenden Nachweis für $\sqrt{3}$!

2. Wenn wir es jetzt unternehmen, einige Berechnungen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes anzugeben, so liegt es uns fern, eine ausführliche oder gar vollständige - das wäre überhaupt wohl kaum möglich - Zusammenstellung aller der Fälle zu geben, in denen unser Satz in dieser Weise praktische Anwendung findet.

Der eigentliche Anwendungsbereich erschließt sich zudem erst recht dann, wenn man auch schon die ebene Trigonometrie und Goniometrie beherrscht.

Aber ich möchte doch den Leser davor bewahren, dass er denkt, es handle sich nur um solche Aufgaben, wie jener Professor in den "Fliegenden Blättern" sie löste:
Das Bett, das man ihm angewiesen, ist in Anbetracht seiner Körperlänge zu klein; also misst er erst Länge a und Breite b des Bettes, konstatiert durch Rechnung auf soundsoviel Dezimalen, dass seine eigene Länge kleiner als $\sqrt{a^2+b^2}$ ist, und legt sich dann befriedigt über die Nützlichkeit der Mathematik im allgemeinen und die des pythagoreischen Lehrsatzes im besonderen in der Diagonale seines Bettes zur Ruhe.

3. Wir wollen zunächst die uns durch den pythagoreischen Lehrsatz gegebenen Möglichkeiten zur Berechnung von Stücken einiger bekannter Figuren benutzen.

Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seite a lässt sich als Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit den Katheten a ansehen. Es ist also $d^2 = 2a^2$ und folglich

$$d = \sqrt{2}a$$

Aufgabe 40. Bei den TGL-Formaten ist das Seitenverhältnis das der Quadratseite zu ihrer Diagonale. Eine Bogenseite ist 420 mm, wie groß die andere?

Aufgabe 41. Aus einem Format erhält man das nächstkleinere, indem man jeweils die längere Seite halbiert. Stelle die Reihe der Formate ausgehend vom Vierfachbogen mit $841 \cdot 1188$ dar!

In ähnlicher Weise lässt sich die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seiten a und b als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b berechnen. Es wird

$$d^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{und folglich} \qquad d = \sqrt{a^2+b^2}$$

die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a oder, was bekanntlich dasselbe ist, die Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte, lässt sich auffassen als die eine

Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Dreiecksseite a ist, während die andere Kathete die halbe Dreiecksseite, also $\frac{a}{2}$ ist. Es ist also

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \text{oder} \qquad h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Daraus folgt

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$$

Ein letztes Beispiel aus der ebenen Geometrie. Bild 57 zeigt ein Trapez $ABB'A'$ mit zwei rechten Winkeln bei A und B.

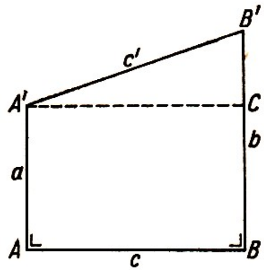


Bild 57

Es sei $AA' = a$, $BB' = b$, $AB = c$, $A'B' = c'$. Man sagt in diesem Falle auch, die Strecke AB ist die Projektion von $A'B'$ auf die Gerade. Wir wollen zwei Ausdrücke bilden; einmal nämlich soll c' und zum anderen c aus den anderen Stücken berechnet werden.
Die Parallele $A'C$ durch A' zu AB liefert uns ein rechtwinkliges Dreieck $A'CB'$ mit der Hypotenuse c', der einen Kathete c und der anderen Kathete $b - a$. Es ist also

$$c' = \sqrt{c^2 + (b-a)^2} \qquad \text{und} \qquad c = \sqrt{c'^2 - (b-a)^2}$$

Diese Ausdrücke geben die Möglichkeit, wenn die Abstandsdifferenz $b - a$ der Endpunkte gegeben ist, aus der Projektion die Strecke und aus der Strecke die Projektion zu berechnen.

4. Die Möglichkeiten sind mit den ebenen Figuren nicht erschöpft; wir wollen auch einige Raumgebilde untersuchen und begnügen uns mit den einfachsten. Bild 58 zeigt einen Würfel mit einer quer durch den Körper gehenden Diagonale d. Sie ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen, in der Figur schraffierten Dreieck, dessen eine Kathete eine Würfelkante ist.

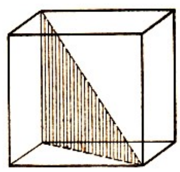


Bild 58

Die andere Kathete ist die uns aus Abschnitt V, 3 bekannte Quadratdiagonale $\sqrt{2}a$. Es ist demnach

$$d^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \qquad , \qquad d = \sqrt{3}a$$

Eine ähnliche Überlegung können wir bei einem Quader mit den Kanten a, b und c anstellen und finden

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Aufgabe 42. Zeichne einen Quader mit einer Körperdiagonale und beweise die eben genannte Formel!

Wir wollen nun weiter eine Pyramide untersuchen. Wir wählen als Beispiel eine solche mit quadratischer Grundfläche - Seite a -, deren Spitze über der Quadratmitte liegt - Höhe h.
Wie lang sind, das soll die erste Frage sein, die Seitenkanten s der Pyramide?

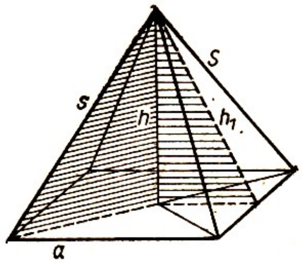


Bild 59

Sie sind (Bild 59) Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken, deren eine Kathete die Höhe h, deren andere Kathete die halbe Quadratdiagonale, also $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$ ist. Wir erhalten also

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}$$

Sodann wollen wir die Höhe h_1 der Seitenflächen berechnen. h_1 ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete h, dessen andere Kathete $\frac{a}{2}$ ist. So ergibt sich

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}$$

Aufgabe 43. Berechne den "Mantel" der Pyramide!

5. Man wird vielleicht unsere Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes für reichlich theoretisch halten. Weit gefehlt!
Fasst man z.B. unsere vierseitige Pyramide als Turmdach (Zeltdach) auf, so handelt es sich bei unserer ersten Frage darum, wie lang man bei vorgeschriebener Grundfläche und Höhe die Seitenkanten machen muss, und die Frage nach dem Mantel muss sich etwa der Dachdecker vorlegen, wenn er den Preis für die Dachdeckerarbeiten kalkuliert.

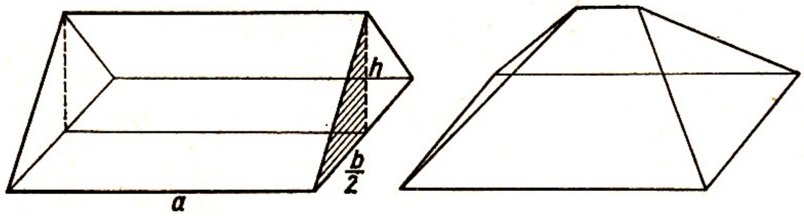


Bild 60 und 61

Man kann übrigens die Dachflächenberechnung nach einer sehr einfachen Regel erledigen, die immer dann gilt, wenn die einzelnen Dachflächen, wie viele ihrer auch sind, alle die gleiche Neigung haben.
Sie heißt: Man multipliziert die überdachte Fläche mit der Länge eines Sparrens und dividiert das Produkt durch die Projektion dieses Sparrens auf die überdachte Fläche. Was ist hier unter Sparren zu verstehen?

Aufgabe 44. Untersuche diese Regel a) für ein Satteldach (Bild 60). b) für ein Zeltdach (Bild 59), c) für ein Walmdach (Bild 61), d) für ein kegelförmiges Dach!

Aufgabe 45.: Beweise den Satz allgemein!

Aufgabe 46. Wie lautet die Regel, wenn man statt des Verhältnisses von Sparrenlänge und ihrer Projektion die Dachneigung benutzt?

6. Die Fenster gotischer und romanischer Bauwerke werden in ihren oberen Teilen durch Steinrippen gegliedert, die einmal als Ornament dienen, dann aber auch für die Festigkeit des Ganzen

von Bedeutung sind; man bezeichnet diese Teile als Maßwerk.

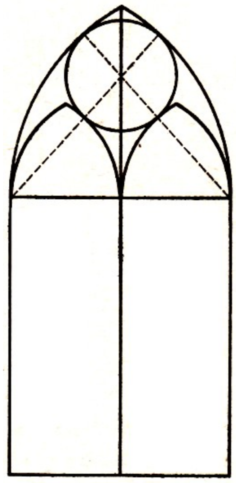


Bild 62

Ein einfaches Beispiel eines solchen Fensters mit gotischem Maßwerk ist in Bild 62 dargestellt.
Die Konstruktion ist hier sehr leicht gefunden. Von den sechs Kreisbögen sind sofort die Mittelpunkte ersichtlich, und als Radien treten, wenn b die Fensterbreite ist, die Größen b und $\frac{b}{2}$ auf. Bleibt noch der Vollkreis, der vier der Kreisbögen berührt. Da er zwischen konzentrischen Kreisen liegt, ist sein Durchmesser gleich dem Abstande $\frac{b}{2}$ der konzentrischen Kreise; sein Radius ist also $\frac{b}{4}$. Jetzt ist auch die Lage des Mittelpunktes bestimmt.

Aufgabe 47. Konstruiere das Maßwerk im Maßstab 1 : 50 mit Zirkel und Lineal, wenn die Breite $b = 3$ m gegeben ist!

7. Die Bestimmung der Radien ließ sich eben sehr leicht ausführen. Ein Beispiel zeige, wie nun manchmal zur Durchführung der Rechnungen der pythagoreische Lehrsatz herangezogen werden kann. Ein an romanischen Bauten häufig auftretendes Motiv ist in Bild 63 dargestellt.

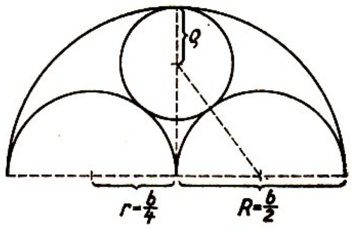


Bild 63

Ist wieder b die Fensterbreite, sind also die Radien der Halbkreise $R = \frac{b}{2}$ und $r = \frac{b}{4}$, so kann man den Radius ρ des Kreises in der Mitte aus dem in Bild 62 punktiert eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck berechnen.
Die Hypotenuse, die durch einen Berührungspunkt des Kreises geht, hat die Länge $\frac{b}{4} + \rho$, die eine Kathete ist $\frac{b}{4}$, die andere $\frac{b}{2} - \rho$.
Es gilt also nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Gleichung

$$\left(\frac{b}{4} + \rho\right)^2 = \left(\frac{b}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \rho\right)^2$$

oder

$$\frac{b^2}{16} + \frac{b\rho}{2} + \rho^2 = \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4} - b\rho + \rho^2 \quad \text{oder} \quad \frac{b\rho}{2} = \frac{b^2}{4} - b\rho$$

Dividiert man durch b und ordnet, so ergibt sich

$$\frac{3}{2}\rho = \frac{b}{4} \qquad , \qquad \rho = \frac{b}{6}$$

Aufgabe 48. Konstruiere die Figur in Bild 63 mit Zirkel und Lineal!

8. Wir haben in Abschnitt III gesehen, dass der pythagoreische Lehrsatz ein wichtiger, wenn nicht der wichtigste Satz der Flächenlehre im System der Geometrie ist.
In dem vorliegenden Abschnitt hat er sich von einer anderen Seite gezeigt. Er offenbarte sich als das entscheidende Werkzeug der Streckenrechnung. Man hat es als eine erste Krisis der

Geometrie bezeichnet, als man merkte, dass man mit dem ursprünglichen Zahlbegriff, der die ganzen und gebrochenen Zahlen umfasste, nicht auskam.

Mag sein, dass Pythagoras den nach ihm benannten Satz nicht als erster gefunden hat, so ist es doch sein und seiner Schule Verdienst, dass sie diese Krise erkannt und den Weg zu ihrer Überwindung gewiesen haben.

6 Funktionsbetrachtungen

1. Der pythagoreische Lehrsatz stellt eine Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks her derart, dass eine Seite berechnet werden kann, Wenn die beiden anderen bekannt sind. Mit einem anderen Wort gesagt: Jede Seite ist eine Funktion der beiden anderen.

Wir wollen zunächst der Behandlung dieser Funktion ein damit eng zusammenhängendes einfacheres Problem vorausschicken.
Es soll eine Seite einen festen Wert a haben, dann soll eine zweite Seite, die unabhängige Veränderliche x, variieren, und die dritte Seite, die abhängige Variable y, ist daraus jeweilig zu bestimmen. Wir haben dann folgende drei Fälle zu untersuchen:

(1) Wie ändert sich die Hypotenuse, wenn eine Kathete veränderlich ist, die andere konstant bleibt?
(2) Wie ändert sich die eine Kathete, wenn die Hypotenuse veränderlich ist, die andere Kathete konstant bleibt?
(3) Wie ändert sich die eine Kathete, wenn die andere Kathete veränderlich ist, die Hypotenuse konstant bleibt?

2. Wir wenden uns der ersten Frage zu. Die eine Kathete, die unabhängige Variable, nennen wir x, die Hypotenuse y, die andere Kathete schließlich sei eine konstante Größe a, für die wir im Beispiel 4 Einheiten irgendeines Maßstabes, etwa cm, setzen werden.

Dann ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz $y^2 = x^2 + a^2$, also, wenn ich die Quadratwurzel ziehe, $y = \sqrt{x^2 + a^2}$. Der negative Wert der Wurzel kann außer acht bleiben, da wir von Strecken negativer Länge nicht sprechen wollen.
Zu jedem x lässt sich jetzt ein y berechnen. Wir erhalten die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ll} x = 1; & y = \sqrt{17} = 4,123 \\ x = 2; & y = \sqrt{20} = 4,472 \\ x = 3; & y = \sqrt{25} = 5,000 \\ x = 4; & y = \sqrt{32} = 5,657 \\ x = 5; & y = \sqrt{41} = 6,403 \\ ... & \end{array}$$

Diese Quadratwurzeln lassen sich nach den allgemein bekannten Regeln berechnen; einfacher ist es jedoch, sie irgendeiner Quadratwurzeltafel zu entnehmen.
Wir haben uns bei den Quadratwurzeln mit drei Stellen nach dem Komma begnügt. Man kann sich aus diesen Werten schon einen Begriff von dem Verlauf der Funktion machen. Recht anschaulich wird das erst, wenn wir die Funktion, wie man sagt, graphisch darstellen (Bild 64).

Wir nehmen ein Stück Millimeterpapier oder einen Bogen kariertes Papier aus einem Rechenheft, und ziehen zwei der senkrecht zueinander stehenden Linien als "Achsenkreuz" aus. Von dem Schnitt der beiden, dem Nullpunkte, aus tragen wir auf der einen Achse nach rechts, auf der anderen nach oben die Einheiten auf. Die waagerecht verlaufende Gerade nennen wir ein für allemal die x-Achse, die senkrecht dazu stehende die y-Achse.

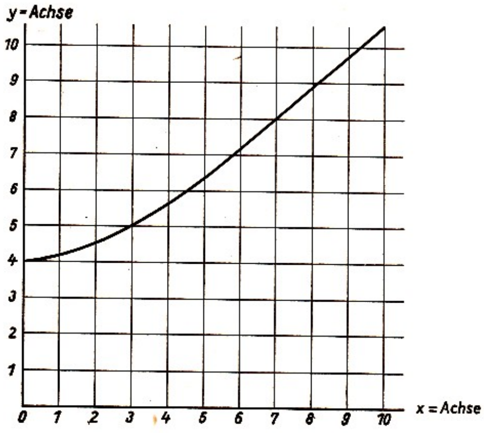


Bild 64

Wir verfahren nun so: Dort, wo an der x-Achse der Wert 1 angeschrieben ist, tragen wir senkrecht - also parallel der y-Achse - den zu $x = 1$ gehörigen Wert $y = 4,123$ auf. Ebenso bei $x = 2$ den zugehörigen Wert $y = 4,472$ usf.

In dieser Weise erhalten wir eine Folge von Punkten, die eine anschauliche Darstellung der Abhängigkeit der y von den x geben; besonders gut lassen sich die Wachstumsverhältnisse der y beobachten; man sieht beispielsweise, dass die Zunahme der y mit wachsendem an immer schneller wird.

Bisher haben wir unsere Funktion nur für ganzzahlige Werte von x ausgerechnet und in die graphische Darstellung eingetragen. Man erhält natürlich aber auch Resultate für y, wenn x ein Bruch, etwa 1,1, dann 1,2 usf. ist. Diese Punkte deuten in ihrer Gesamtheit einen Linienzug an, dessen Gestalt aus Bild 64 ersichtlich ist.

Aufgabe 49. Man kann die jeweilig aufzutragenden y auch durch Konstruktion erhalten. Wie kann man das am zweckmäßigsten machen? Konstruiere auf diese Weise die Werte für 0,5; 1,5; 2,5 usf.!

Die Kurve beginnt mit dem Punkte $x = 0$. Man wird sagen, in diesem Falle ist ein Dreieck und damit die Ausrechnung der Hypotenuse nach dem pythagoreischen Lehrsatz ein Ding der Unmöglichkeit.
In der Tat mag dieser Wert nur als ein Grenzfall angesehen werden; nämlich wenn die eine Kathete den konstanten Wert 4 hat, die andere immer kleiner und kleiner wird, so nähert sich die Hypotenuse immer mehr der Länge 4. Es ist also sehr einleuchtend, wenn in unserem Bild für den Wert $x = 0$ der Wert $y = 4$ aufgetragen ist.

Das Kurvenstück, das die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}$$

liefert, ist ein Teil einer gleichseitigen Hyperbel.

3. Wir gehen zur Untersuchung der zweiten Frage über, wie sich die eine Kathete ändert, wenn die andere Kathete konstant erhalten bleibt, wenn aber die Hypotenuse verändert wird. Die unabhängige Variable, hier die Hypotenuse, sei wieder x genannt, die abhängige, die eine Kathete, sei y. Dann ist, wenn der konstante Wert der anderen Kathete mit a bezeichnet wird,

$$x^2 = y^2 + a^2, \qquad \text{also} \qquad y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

wobei wieder nur der positive Wert der Quadratwurzel in Betracht kommt.
Um uns ein Bild vom Verlauf der Funktion zu machen, stellen wir zunächst eine Tabelle auf. Dabei ist im Gegensatz zu früher die Wahl von x nicht mehr ganz beliebig: Wenn wir etwa $a = 4$, wie in Abschnitt VI, 2, annehmen, so würde man für $x = 2$ auf den Wert

$$y = \sqrt{4 - 16} = \sqrt{-12}$$

stoßen, und der liefert keinen reellen Wert für y. Damit unter der Wurzel eine positive Zahl stehe, muss notwendig $x > a$ sein; für $x = a$ erhält man den Wert $y = \sqrt{0} = 0$.
Geometrisch leuchtet dieses Verhalten der x und y sofort ein, x ist ja die Hypotenuse, und es ist klar, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, in dem die Hypotenuse kleiner als die Kathete ist; ja der Fall, dass die Hypotenuse gleich der einen Kathete ist ($x = a$, hat auch nur die Bedeutung eines Grenzfalles, bei dem sich die andere Kathete als Null herausstellt ($y = 0$).
Jetzt können wir unsere Tabelle aufstellen; es ergibt sich

$$\begin{array}{ll} x = 4; & y = \sqrt{0} = 0,000 \\ x = 5; & y = \sqrt{9} = 3,000 \\ x = 6; & y = \sqrt{20} = 4,472 \\ x = 7; & y = \sqrt{33} = 5,745 \\ x = 8; & y = \sqrt{48} = 6,928 \\ x = 9; & y = \sqrt{65} = 8,062 \\ ... & \end{array}$$

Die graphische Darstellung dieser Werte, die man durch eingeschobene Bruchwerte von x mit beliebiger Genauigkeit erreichen kann, liefert eine Kurve, die in Bild 65 gezeichnet ist.

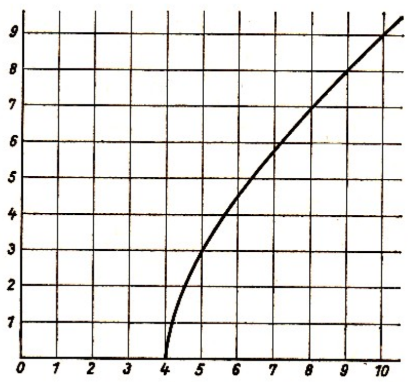


Bild 65

Aufgabe 50. Der Tabelle ist bereits zu entnehmen, dass die Funktion y immer langsamer wächst. Setze die Tabelle bis $x = 15$ fort und bilde die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender y. Welche Rolle spielen diese Differenzen in der graphischen Darstellung?

4. Wer die Figur, die wir soeben erhielten, mit derjenigen des Abschnitts VI, 2 vergleicht, der wird vielleicht eine gewisse Verwandtschaft entdecken. Wir wollen einen Augenblick dabei verweilen.
Wir stellen zunächst fest, dass von den beiden Funktionen, um die es sich hier handelt,

$$y = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \text{und} \qquad y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

die eine aus der anderen durch Vertauschung von x und y entsteht. Nimmt man z.B. in der ersten der Funktionen diese Vertauschung vor, so erhält man erst

$$x = \sqrt{y^2 + a^2}$$

und wenn man das nach y auflöst, so ergibt sich die zweitgenannte Funktion. In der Tat war ja die Hypotenuse einmal mit y, das andere Mal mit x bezeichnet, und mit der Kathete war es umgekehrt.

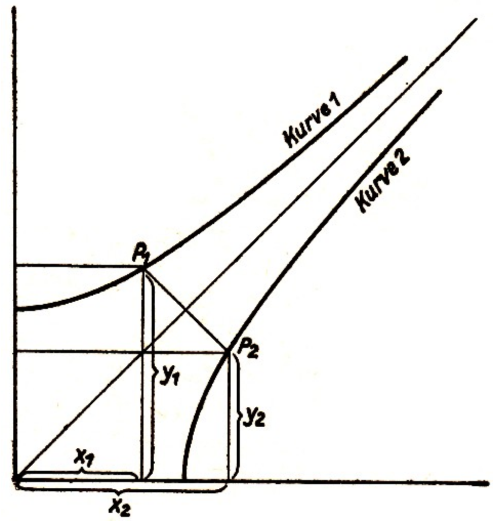


Bild 66

Man sagt: Die eine Funktion ist die Umkehrung der anderen; das eine Mal ist die Hypotenuse als Funktion einer Kathete, das andere Mal die eine Kathete als Funktion der Hypotenuse betrachtet.

Welches ist nun die geometrische Bedeutung dieser Tatsache?
Auf der Kurve 1, wir wollen als solche die zuerst behandelte (Bild 64) wählen, liegt ein Punkt P_1, der einem gewissen x_1 und dem zugehörigen y_1 entspricht (Bild 66). Von diesem Punkte fälle man das Lot auf die Winkelhalbierende der beiden Achsen und verlängere dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst; mit anderen Worten, man denke sich die Winkelhalbierende als Spiegel und suche das Spiegelbild zu dem Punkte P_1.

Dann wird man auf einen Punkt der zweiten Kurve gestoßen sein. Warum? Nun, aus der Figur sieht man sofort, dass für diesen Punkt P_2 das zugehörige y_2 den Wert x_1, das zugehörige x_2 den Wert y_1 hat. Wenn P_1 auf der Kurve 1 liegt, so muss $y_1 = \sqrt{x_1^2 + a^2}$ sein, also $x_1 = \sqrt{y_1^2 - a^2}$; also ist $y_2 = \sqrt{x_2^2 - a^2}$, d. h. der Punkt P_2, mit den Werten x_2, y_2 liegt auf der Kurve 2. Was für einen Punkt gilt, gilt für alle; es entsteht also die Kurve 2 aus der Kurve 1 durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden der beiden Achsen.

5. Es bleibt uns nun noch die Untersuchung des dritten Falles übrig: Die unabhängige Veränderliche x soll jetzt die eine Kathete sein, abhängige Veränderliche y ist die andere Kathete, die Hypotenuse soll den konstanten Wert c besitzen. Dann liefert unser Satz

$$x^2 + y^2 = c^2, \qquad \text{und daraus folgt} \qquad y = \sqrt{c^2 - x^2}$$

Auch hier wieder werden wir eine Tabelle aufstellen und erhalten für ganzzahlige x, wenn wir der Konstanten c etwa den Wert 5 beilegen:

$$\begin{aligned} x = 0; &\quad y = \sqrt{25} = 5,000 \\ x = 1; &\quad y = \sqrt{24} = 4,899 \\ x = 2; &\quad y = \sqrt{21} = 4,583 \\ x = 3; &\quad y = \sqrt{16} = 4,000 \\ x = 4; &\quad y = \sqrt{9} = 3,000 \\ x = 5; &\quad y = \sqrt{0} = 0,000 \end{aligned}$$

...

Werte für x, die über 5 hinausgehen, scheiden aus, da sie auf negative Radikanden führen.

Aufgabe 51. Rechne die Werte der Funktion für $x = 0,1; 0,2; 0,3$ und ebenso für $4,9; 4,8; 4,7$ aus und stelle die Differenzen der so sich ergebenden Funktionswerte fest! Erkläre die Ergebnisse an der graphischen Darstellung!

Wir zeichnen Wieder die Punkte in bekannter Weise auf Millimeterpapier; die Kurve, die wir erhalten (Bild 67), hat große Ähnlichkeit mit einem Kreisviertel. Ist es wirklich ein Kreis?

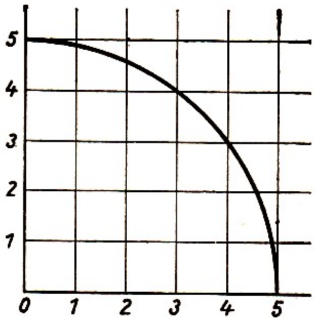


Bild 67

Sollte es zutreffen, so müsste der Kreis den Radius c, in unserm Beispiel also 5 haben. Ich ziehe diesen Kreis und sehe, dass er durch die von uns bezeichneten Punkte geht. Aber es wäre ja möglich, dass Kreis und Kurve zwar in diesen Punkten übereinstimmen, dass aber unsere Kurve dazwischen etwa Wellen nach oben und unten macht.

Wir können die Frage leicht erledigen, wenn wir einen ganz beliebigen Punkt P_1 auf dem Kreise ins Auge fassen. Fällen wir das Lot auf die x-Achse, so sei die Strecke zwischen P_1 und dem Fußpunkt des Lotes y_1, die Strecke zwischen Fußpunkt und Nullpunkt x_1, dann ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$x_1^2 + y_1^2 = c^2, \qquad \text{also} \qquad y_1 = \sqrt{c^2 - x_1^2}$$

Es ist also P_1 ein Punkt der Kurve. Was wir hier ausgeführt haben, gilt für jeden Punkt des Viertelkreises, Kurve und Kreis fallen also zusammen.

6. Wir kommen nun zu der Frage, wie sich die einzelnen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks als Funktion der beiden anderen Stücke ausdrücken. Wir nehmen zunächst die beiden Katheten als unabhängige Veränderliche und nennen sie x und y; dann ist die Hypotenuse z bestimmt durch die Funktion

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Bei einer solchen Funktion von zwei Veränderlichen versagt unsere bisherige Methode graphischer Darstellung in der Ebene; wir benützen den Raum, um uns ein Bild von der durch unsere Funktion ausgedrückten Abhängigkeit zu machen.

Wir betrachten eine Ebene mit Achsenkreuz; jedem Punkte P_1 des Quadranten zwischen der x-Achse nach rechts und der y-Achse nach oben entspricht ein ganz bestimmtes Wertepaar x_1, y_1 und umgekehrt. Die Entfernung eines solchen Punktes P_1 vom Koordinatenanfangspunkt hat dann den Wert

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Diese Strecke denken wir uns in P_1 senkrecht zur Ebene, in der das x-y-Achsenkreuz liegt, nach oben bis zu einem Endpunkte P aufgetragen. Jedem Punkte des Ebenenquadranten ist jetzt also ein Punkt P senkrecht über ihn zugeordnet. Der Inbegriff aller Endpunkte, die man auf diese Weise findet, wird eine Fläche bilden, die für unsere Funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ein geometrisches Bild gibt.

Was ist das nun für eine Fläche?
Wenn man sich ein Bild von einer Fläche machen will - denken wir etwa an einen Ausschnitt aus einer berg- und talreichen Landschaft -, so ist eine beliebte Methode dafür die Feststellung der Kurven gleicher Höhe über irgendeiner Nulllage, etwa dem Meeresniveau.

Man nennt die Kurven Höhenlinien; auf jedem Messtischblatt finden wir sie eingetragen, also die Kurvenzüge, die etwa von den Punkten mit 100 m Höhe über Meeresniveau, mit 105 m Höhe usw. gebildet werden. Wie sehen die Höhenlinien bei unserer Fläche aus?

Wir wollen einmal die zu der Höhe 10 - gemessen in Einheiten, in denen auch die x und y gemessen sind - gehörigen Höhenlinien feststellen. Für alle Punkte dieser Kurve, die wir vorerst noch nicht kennen, ist $z = 10$. Es gilt also für diese Punkte der Kurve die Gleichung

$$10 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{also} \qquad 100 = x^2 + y^2$$

und schließlich

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Die Punkte x und y der Grundebene, für die diese Gleichung zutrifft, liegen auf einem Kreis (genauer einem Kreisquadranten) mit dem Radius 10, wie wir in Abschnitt VI, 5 gesehen haben.
Wenn ich in den Punkten eines Kreises senkrecht zur Kreisebene Strecken von der Länge 10 nach oben auftrage, so bilden die Endpunkte dieser Strecken wieder einen ebenen Kreis.

Die Höhenlinie ist also ein Kreis. Was für diese, gilt für jede andere; alle sind sie Kreise oder genauer Kreisquadranten. Da der tiefste Punkt der Fläche im Koordinatenanfangspunkt liegt, denn an dieser Stelle ist für $x = 0$ und $y = 0$ auch $z = 0$, und da mit wachsender Entfernung vom tiefsten Punkt auch die Höhe über der Grundebene steigt, so haben wir als Fläche den durch die Ebenen zy und zx begrenzten Quadranten einer Art Krater vor uns.

Was wir bisher Wissen, genügt noch nicht zur vollen Kenntnis der Fläche. Es entsteht die Frage, wie steht es mit der Böschung dieses Kraters; wechselt der Neigungswinkel oder bleibt er derselbe, und wenn das letztere der Fall ist, wie groß ist er?

In der Grundebene sei ein durch O gehender Strahl gezeichnet, auf dem eine Reihe von Punkten P_1, P_2, P_3 ... liegen. Wenn ich dann OP_1 in P_1 senkrecht zur Grundebene auftrage bis P_1', ebenso OP_2 in P_2 bis P_2', OP_3 in P_3 bis P_3' usf., so sind P_1', P_2', P_3' ... Punkte unserer Fläche. Lege ich durch den Strahl senkrecht zur Grundebene einen Schnitt, in dem P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3' ... liegen, so gibt die Schnittfigur (Bild 68) eine Anschauung von der Böschung des Kraters.

Man kann ihr entnehmen, dass der Neigungswinkel überall gleich groß, und zwar, da die Dreiecke OP_1P_1', OP_2P_2' ... rechtwinklig-gleichschenklig sind, gleich $45°$ ist.
Was für diesen Strahl durch O gilt, gilt ebenso für jeden anderen durch O gehenden Strahl der Grundebene.

Wir sehen: von jedem Punkte der Fläche aus zum tiefsten Punkte hin ist ein gleichmäßiges Gefälle vorhanden, und der Neigungswinkel beträgt $45°$.
Und was ist das nun für eine Fläche? Nun, es ist eine sehr bekannte, nämlich der vierte Teil des Mantels eines Kegels.
Der Kegel hat die z-Achse zur Achse und steht mit der Spitze nach unten im Koordinatenanfangspunkt auf der Grundebene, sein halber Öffnungswinkel ist $45°$.

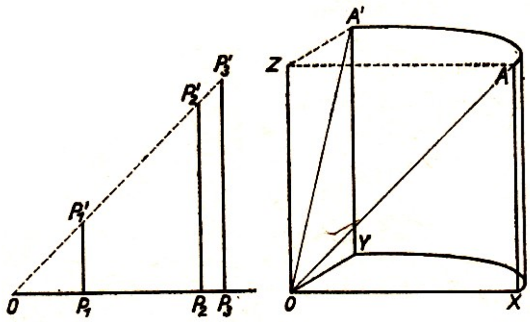


Bild 68 und 69

Ich kann ihn mit etwa so entstanden denken, dass die Winkelhalbierende zwischen z- und x-Achse um die z-Achse gedreht ist (Bild 69).

7. In gleicher Weise wie oben lässt sich nun die Frage behandeln, wie sich die eine Kathete 2 als Funktion der Hypotenuse x und der Kathete y darstellt. Es ist in diesem Falle für die Funktion

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

eine Fläche als geometrisches Bild zu suchen. Diese Fläche hat zunächst die Eigentümlichkeit, dass sie für $x = y$, d.h. für Punkte auf der Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes, lauter Werte $z = 0$ hat, sie schneidet also die Grundebene in dieser Winkelhalbierenden.

Über dem halben Quadranten zwischen Winkelhalbierender und y-Achse ist überhaupt kein Punkt unserer Fläche vorhanden, denn für alle Punkte dieser Gegend ist $y > x$, der Radikand unserer Funktion wird also negativ.

Wir wollen nun die Fläche nicht weiter im einzelnen diskutieren und nur das Ergebnis, dessen Herleitung wir dem Leser empfehlen, aussprechen.
Die gesuchte Fläche ist ein Viertel eines Kegelmantels, dessen halber Spitzenwinkel $45°$ ist (dies alles wie im vorangegangenen Fall), und dessen Achse die x-Achse ist. Man kann ihn sich am einfachsten so entstanden denken, dass man die Winkelhalbierende des x-y-Achsenkreuzes um die x-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 52. Untersuche die Höhenlinien! Welche z gehören zu den Punkten der x-Achse? Untersuche die z, die zu einer Senkrechten zur x-Achse gehören! Welchen Weg kann man einschlagen, um zu erkennen, dass der halbe Spitzenwinkel des Kegels $45°$ ist?

Hätten wir nicht die Variable x als Hypotenuse und y als Kathete gewählt, sondern umgekehrt y als Hypotenuse und x als Kathete, so hätten wir den gleichen Kegelmantel, nur mit der y-Achse als Rotationsachse erhalten.

Aufgabe 53. Der Vertauschung von x und y entspricht hier im Raume eine Spiegelung an einer Ebene; welche ist das?

8. Wer die hier gefundenen Kurven und Flächen, außer dem Kreis die Hyperbeln und Kegel, schon kennt, wird es wohl als Schönheitsfehler empfunden haben, dass wir immer nur Teile von ihnen herausgeschnitten haben. Strecken sehen wir eben als positive Größen an, und so scheinen die x, y und z nur positiver Werte fähig. Denkt man aber an die reine Zahlenbeziehung, die uns die pythagoreische Gleichung liefert, an

$$z^2 = x^2 + y^2$$

im Falle des Abschnitts VI, 6 z.B., dann können alle drei Größen sehr Wohl auch negative Werte annehmen, denn ihre Quadrate sind ja wieder positiv; die Beschränkung auf positive

Werte fällt also weg. Tragen wir dem auch in der graphischen Darstellung Rechnung, dann vervollständigen sich Kreis und Hyperbeln und auch der Kegel zum Ganzen.

Aufgabe 54. Führe die Vervollständigung der Kurven dadurch, dass du auch negative Werte von x und y heranziehst, in den Fällen der Abschnitte VI, 2; VI, 3; und VI, 5 rechnerisch und zeichnerisch durch!

Aufgabe 55. Wie gestaltet sich die Verallgemeinerung auf positive und negative Werte der Veränderlichen x, y und z in dem im Abschnitt VI, 6 behandelten Falle?

Wenn wir die Ergebnisse des Abschnitts VI zusammenfassen, so haben wir folgendes gefunden: Die graphische Veranschaulichung eines Stückes der pythagoreischen Gleichung als Funktion der beiden anderen liefert in allen Fällen einen geraden Kreiskegel, dessen Öffnungswinkel ein rechter ist.

Als Darstellung einer Größe als Funktion einer anderen bei konstant gehaltener anderen erhalten wir einen "Kegelschnitt", nämlich eine Höhenlinie des entsprechenden Kegels in der durch die Konstante gegebenen Höhe über die z-Ebene. Als solche Kegelschnitte finden wir den Kreis und die gleichseitige Hyperbel.

7 Pythagoreische Zahlen

1. Man nennt drei positive ganze Zahlen x, y und z, durch welche die "pythagoreische" Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

befriedigt wird, pythagoreische Zahlen. Das einfachste Beispiel pythagoreischer Zahlen haben wir schon kennengelernt; es entspricht dem bekannten Dreieck aus den Seiten 3, 4 und 5. In der Tat ist

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Wir stellen nun die Frage: Gibt es noch andere Tripel pythagoreischer Zahlen und welche?
Zunächst ist eins ohne weiteres klar: wenn 3, 4 und 5 pythagoreische Zahlen sind, so sind es auch $2 \cdot 3$; $2 \cdot 4$; $2 \cdot 5$; ferner $3 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $3 \cdot 5$ usf. Allgemein gesagt:
Ist a, b, c ein pythagoreisches Zahltripel, so ist auch ma, mb, mc, wobei m irgendeine positive ganze Zahl ist, ein solches. Wenn nämlich

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist, so ist auch

$$m^2(a^2 + b^2) = m^2c^2 \qquad \text{also} \qquad (ma)^2 + (mb)^2 = (mc)^2$$

So liefert jedes pythagoreische Zahltripel eine unendliche Folge neuer; man hat nur die drei Zahlen mit einer und derselben positiven ganzen Zahl zu multiplizieren.

Die ganze Reihe dieser Zahltripel entspringt aus einem Tripel, dessen einzelne Zahlen keinen gemeinschaftlichen Teiler mehr haben. Wir wollen dies ein Grundtripel, alle anderen abgeleitete Tripel nennen. Es ist also 3, 4, 5 ein Grundtripel, 6, 8, 10 ein abgeleitetes Tripel pythagoreischer Zahlen.

Wir sagten soeben, die drei Zahlen eines Grundtripels hätten keinen gemeinsamen Teiler; es genügt bereits zu wissen, dass irgend zwei der drei Zahlen keine gemeinsamen Faktoren haben.

Nehmen wir nämlich einmal an, zwei Zahlen a und b irgendeines pythagoreischen Tripels haben den gemeinsamen Faktor f, es ist also

$$a = f \cdot a_1 \qquad , \qquad b = f \cdot b_1$$

dann folgt aus $a^2 + b^2 = c^2$

$$f^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2$$

d.h., es müsste auch c durch c teilbar sein.

2. Schreibt man die Reihe der Quadratzahlen hin und bildet die Differenzen je zweier aufeinander folgenden, so erhält man die Reihe der ungeraden Zahlen:

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Allgemein ist die Differenz der n-ten Quadratzahl und der $(n+1)$-ten Quadratzahl die ungerade Zahl $2n + 1$, denn es ist

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Geometrisch ist das einfach aus Bild 70 abzulesen:

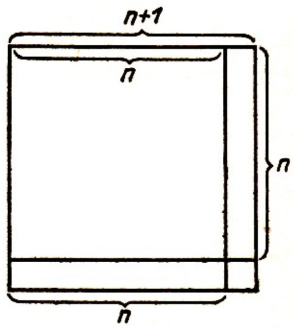


Bild 70

Wenn wir die n Einheiten messende Seite eines Quadrates um eine Einheit vergrößern, so bestimmt diese Seite ein Quadrat mit dem Inhalt $(n + 1)^2$, und zwar ist dieses um $2n + 1$ Flächeneinheiten größer als das ursprüngliche Quadrat.

Unter diesen ungeraden Zahlen der Differenzenreihe treten auch alle ungeraden Quadrate auf. Es sei $2n + 1$ ein solches Quadrat, also etwa 9, 25, 49, 81, 121 usf., dann ist der Wert n entsprechend auf die einzelnen Fälle bezogen 4, 12, 24, 40, 60 usf.

In allen diesen Fällen liefert $(n+1)$, n und die Zahl, deren Quadrat $2n+1$ ist, ein pythagoreisches Zahltripel; es ist nämlich immer

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$$

Mit unseren ersten Beispielen erhalten wir z.B. die Tripel

$$5^2 = 4^2 + 3^2, \quad 13^2 = 12^2 + 5^2, \quad 25^2 = 24^2 + 7^2, \quad 41^2 = 40^2 + 9^2, \quad 61^2 = 60^2 + 11^2$$

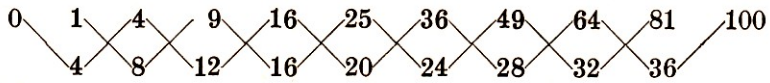
Das erste dieser Tripel ist das allbekannte. Das zweite Tripel, jedoch in der abgeleiteten Form $39^2 = 36^2 + 15^2$, kommt bereits in einer indischen Schrift des 4. oder 5. Jahrhunderts v.u.Z. vor, dort ist auch das dritte angeführt.

Alle Tripel, die man auf diesem Wege erhält, sind notwendig Grundtripel, denn eine positive ganze Zahl n und ihren Nachfolger $n+1$ können sicherlich keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Teiler besitzen.

Da sich unsere Reihe nach Belieben fortsetzen lässt, so haben wir damit gezeigt, dass es unendlich viele Grundtripel pythagoreischer Zahlen gibt.

3. Wir werden uns nun fragen, haben wir mit unserer Methode alle pythagoreischen Zahlen gewonnen? Oder gibt es noch andere?
Alle Grundtripel, die wir bisher gefunden haben, hatten die Eigentümlichkeit, dass zwei der Zahlen aufeinanderfolgende waren. Das hing damit zusammen, dass wir von der Reihe der Quadratzahlen jedesmal die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden gebildet haben.

Wir wollen nun einmal nicht von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, sondern von je zwei durch eine Quadratzahl getrennten Quadratzahlen die Differenzenreihe bilden. Das sieht dann so aus, wenn man neben der 1 auch die 0 als Quadratzahl mitnimmt:



usf. Jetzt liefert die Differenzenreihe die Vielfachen von 4. Ist ein solches Vielfaches ein Quadrat, so liefert es uns ein pythagoreisches Tripel.

So gehört beispielsweise zu der Differenz 16 das bekannte Tripel 3; 4 ; 5, zu 36 das daraus abgeleitete Tripel 8; 6; 10.
Wir sehen also, dass wir in diesem Falle nicht nur Grundtripel erhalten. Ein erstes, neues Grundtripel liefert uns erst die Quadratzahl 64, nämlich 15; 8; 17 ; auch das war übrigens bereits den Indern bekannt.

Beim Weitergehen erhält man auf diesem Wege weitere neue Grundtripel. Für uns genügt aber schon unsere Feststellung, um zu wissen, dass die Lösung des vorangegangenen Abschnittes uns nicht alle pythagoreischen Zahlen geliefert hat, also unvollständig war.

Aufgabe 56. Setze die Reihe der Differenzen weiter fort; leite die allgemeine Beziehung zwischen einem Quadrat n^2 dem zweitfolgenden und der Differenz ab!

Aufgabe 57. Suche das nächste Grundtripel an der Hand der allgemeinen Regel!

Wir wollen nun versuchen, alle Lösungen der Gleichung zu finden. Auch die eben angegebene Erweiterung der Methode kann uns dazu nicht verhelfen; wir brauchten ja nur die Differenzen je zweier, durch zwei, drei usf. Quadratzahlen getrennter Quadratzahlen aufzustellen und werden immer neue pythagoreische Tripel erwarten.

4. Ehe wir uns der vollständigen Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

zuwenden, wollen wir in einer Vorbemerkung untersuchen, wie es mit dem Gerade- oder Ungeradesein der einzelnen Zahlen steht.
Da es uns nur auf Grundtripel ankommt, nehmen wir die Zahlen teilerfremd an; es dürfen also insbesondere von den Zahlen x, y und z nicht zwei gerade sein. Es können aber auch die Zahlen x und y nicht beide ungerade sein. Wenn überhaupt x und y gleichzeitig als ungerade Zahlen möglich sein sollten, so wäre notwendig z eine gerade Zahl, etwa

$$z = 2z_1$$

Demnach wäre

$$z^2 = 4z_1^2$$

und ließe bei einer Division durch 4 den Rest 0. Das gleiche muss von der Summe $x^2 + y^2$ gelten, wenn anders die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 4z_1^2$$

in ganzen Zahlen erfüllt werden soll. Es sei

$$x = 2p + 1 \qquad ; \quad y = 2q + 1$$

dann ist

$$x^2 + y^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1$$

und man sieht sofort, dass das bei einer Division durch 4 nicht den Rest 0, sondern den Rest 2 gibt. So ist also die Möglichkeit, dass x und y beide ungerade Zahlen sind, von der Hand zu weisen.
Wir werden also jetzt immer annehmen können, dass x ungerade, y gerade und z folglich wieder ungerade ist.

Aufgabe 58. Kann nicht auch x gerade, y ungerade sein? Inwiefern ist die obige Annahme berechtigt?

5. Man kann der Gleichung auch die Gestalt geben

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y) \cdot (z - y) \tag{1}$$

Für $z + y$ will ich den Wert m, für $z - y$ den Wert n einführen, woraus übrigens $z = \frac{m+n}{2}$, $y = \frac{m-n}{2}$ folgt, dann ist also

$$x^2 = m \cdot n \tag{2}$$

Die Zahlen m und n sind beide ungerade, denn wäre auch nur eine gerade, so müsste es auch ihr Produkt und mithin x sein, und das ist nicht der Fall.

Weiter müssen die Zahlen teilerfremd sein. Hätten nämlich m und n etwa den Teiler t gemeinsam (t ist nicht gleich 2), so dass man setzen könnte

$$m = tm_1 \qquad , \qquad n = tn_1$$

dann wären auch z und y beide durch t teilbar; es wäre

$$z = \frac{m + n}{2} = t \cdot \frac{m_1 + n_1}{2} \qquad , \qquad y = \frac{m - n}{2} = t \cdot \frac{m_1 - n_1}{2}$$

Das ist aber nicht möglich, denn y und z waren ja, wie wir gesehen haben, teilerfremd.

6. Wenn das Produkt zweier teilerfremder ganzen Zahlen ein Quadrat ist, so muss notwendig jede der Zahlen ein Quadrat sein.
Wenn ich also z.B. die Zahl 36 in teilerfremde Faktoren zerlege, so muss jeder Faktor ein Quadrat sein. In der Tat ist z.B. $4 \cdot 9$ eine Zerlegung der gewünschten Art und übrigens, abgesehen von der selbstverständlichen $1 \cdot 36$, die einzige.

Die Tatsache lässt sich leicht allgemein zeigen; in einer Quadratzahl treten nämlich alle Primzahlfaktoren in gerader Anzahl auf; es ist z.B.

$$30^2 = 900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Wenn nun einer der beiden Faktoren, in die wir die Quadratzahl zerlegen, irgendeinen der Primfaktoren in ungerader Anzahl hätte, also etwa $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, so müsste notwendig der andere Faktor $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ jenen Primfaktor, den der erste Faktor in ungerader Anzahl besitzt, auch enthalten, d.h. beide Zahlen hätten einen gemeinschaftlichen Faktor.
Nur wenn die Faktoren jeweilig in gerader Anzahl auftreten, wenn sie also selbst Quadrate sind, ist Teilerfremdheit möglich.

Kehren wir nun zu unserer Gleichung in der Form $x^2 = m \cdot n$ zurück: Da m und n teilerfremd sind, ihr Produkt aber eine Quadratzahl ist, so müssen auch m und n Quadratzahlen sein; wir können etwa setzen

$$m = u^2 \qquad , \qquad n = v^2$$

wobei auch die Zahlen u und v ungerade und teilerfremd sind. Unsere letzte Gleichung nimmt also die Form an

$$x^2 = u^2 \cdot v^2$$

woraus folgt, dass

$$x = u \cdot v \tag{I}$$

ist. Wir können jetzt auch die Gleichungen für y und z gleich anfügen, indem wir auch bei ihnen m und n durch die Quadratzahlen u^2 und v^2 ersetzen. Wir haben dann

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} \tag{II}$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{III}$$

7. Die Gleichungen I, II und III geben die vollständige Lösung unseres Problems. Unsere Ausführungen haben uns gelehrt, dass für die Erfüllbarkeit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

die Gleichungen I, II, III notwendige Bedingungen sind.
Umgekehrt kann man nun aber auch schließen, dass, wenn man u und v irgendwelche ungeraden, teilerfremden Werte beilegt, wobei $u > 0$ ist, aus ihnen vermittels der Gleichungen I, II und III zugehörige Werte x, y, z gewonnen werden können, die der Gleichung (1) genügen. Es ist nämlich

$$(u \cdot v)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Wovon man sich durch Ausrechnung sofort überzeugt.

Wir können mit diesem Mittel zur Gewinnung pythagoreischer Zahlen gleich einmal einen Versuch machen, um ein Tripel etwas größerer pythagoreischer Zahlen zu gewinnen.
Wir setzen etwa $u = 11$, $v = 9$; die zugehörigen Zahlen sind $x = 99$, $y = 20$, $z = 101$.
Übrigens kann man aus der Gleichung (2) folgern, dass auch nicht teilerfremde Zahlen u und v, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind, Lösungen der Gleichung liefern, nur führen sie stets auf abgeleitete Zahltripel.

Aufgabe 59. Stelle eine Liste der pythagoreischen Zahlen auf, indem du u und v alle in Betracht kommenden Werte von 1 bis 10 durchlaufen lässt!

Aufgabe 60. Wie lässt sich aus der allgemeinen Lösung die in Abschnitt VII, 2 entwickelte besondere herleiten?

Die Formeln (I), (II) und (III) sind für die Theorie der pythagoreischen Zahlen grundlegend. Die Existenz unendlich vieler pythagoreischer Zahlentripel (ja sogar unendlich vieler Grundtripel) gestattet es, Aufgaben über das Aufsuchen von pythagoreischen Zahlen zu stellen, die irgendwelchen zusätzlichen Bedingungen genügen.

Wir haben bereits gesehen, dass es z.B. unendlich viele pythagoreische Zahlentripel mit der Eigenschaft gibt, dass zwei von den drei Zahlen unmittelbar aufeinander folgen (z.B. die Tripel 3, 4, 5; 7, 24, 25; 9, 40, 41; ...).
Tripel pythagoreischer Zahlen jedoch, bei denen zwei Zahlen Quadrate sind, gibt es überhaupt nicht (wegen des Beweises hierfür siehe Abschnitt VIII, 5-8).

Das bekannteste Problem dieser Art ist die folgende, äußerst schwierige, von Fermat stammende Aufgabe:

Man bestimme diejenigen Tripel (x, y, z) pythagoreischer Zahlen (mit $x^2 + y^2 = z^2$), für die $x + y$ und z vollständige Quadrate sind.

Es zeigt sich, dass es unendlich viele derartige pythagoreische Tripel gibt, doch bestehen diese aus sehr großen Zahlen. Das kleinste Tripel dieser Art ist

$$x = 4565486027761, \quad y = 1061652293520, \quad z = 4687298610289$$

(hier ist $x + y = (2372159)^2$ und $z = (2165017)^2$).

Aufgabe 61. In einem rechtwinkligen Dreieck mögen sich die Seiten durch ganze Zahlen ausdrücken lassen. Man zeige, dass dann der Flächeninhalt dieses Dreiecks durch 6 und das Produkt aller Seitenlängen durch 60 teilbar ist.

8. Mancher Leser wird vielleicht daran gedacht haben, wie man sich denn nun über dieses Vielerlei von pythagoreischen Zahlen am besten einen Überblick verschafft. Man kann an eine Tabelle denken, deren Anlegung Aufgabe 58 empfiehlt.

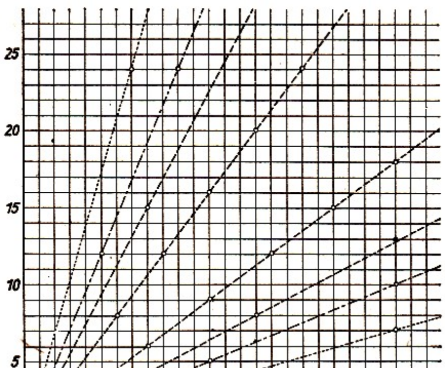


Bild 71

Hier soll noch ein geometrischer Verteilungsplan beschrieben werden. Wir haben für die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

in Bild 71 ein x-y-Achsenkreuz gezeichnet und in dem Gitter, das durch die ganzzahligen Parallelen zu den Koordinatenachsen gebildet wird, in leicht erkennbarer Weise die einzelnen Lösungen durch kleine Kreise eingetragen. Grundtripel und zugehörige abgeleitete Zahltripel pythagoreischer Zahlen bilden dann jeweilig einen Zahlstrahl.

Jedes Grundtripel bestimmt einen Zahlstrahl; je weiter man die x-y-Ebene ausdehnt (wir sind nur bis $x = 25$, $y = 25$ gegangen), desto mehr Zahlstrahlen treten auf.

Aufgabe 62. Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre, dass die zu einem Grundtripel gehörenden abgeleiteten Tripel auf einem Zahlstrahl liegen!

Aufgabe 63. Beweise, dass die Verteilung der Zahlen im Netz symmetrisch zur Winkelhalbierenden ist!

9. Der Frage nach den pythagoreischen Zahlen kann man noch eine andere Form geben. Dividiert man die Ausgangsgleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

durch z^2, so nimmt sie die Form

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

an. Wir können jetzt die von uns behandelte Aufgabe auch so fassen: Es sind von der Gleichung

$$u^2 + v^2 = 1 \tag{3}$$

solche Lösungen u und v zu bestimmen, die rational, d.h. in der Form gemeiner Brüche, darstellbar sind. Ist nämlich etwa

$$u = \frac{x}{z} \qquad , \qquad v = \frac{y}{z}$$

eine Lösung, bei der die Brüche sofort gleichnamig gemacht sind, dann gilt die Gleichung (2) und damit (1). Die Gleichung (3) lässt nun eine sehr einfache geometrische Deutung zu, sie ist nichts anderes als die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 (vgl. Abschn. VI, 5), des Einheitskreises.

Die Frage nach rationalen Lösungen der Gleichung (1) ist dann gleichbedeutend mit der Aufsuchung von Kreispunkten mit rationalen Koordinaten.

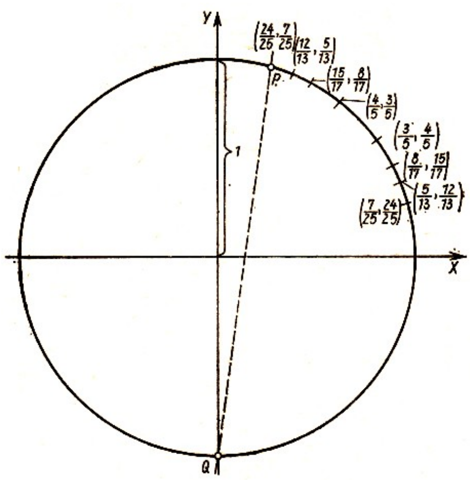


Bild 72

In Bild 72 ist eine ganze Reihe solcher Punkte eingetragen, ein Koordinatenpaar ist z.B. $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$. Dass der Kreis durch diesen Punkt geht, folgt aus

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1$$

Aufgabe 64. Die Punkte in Bild 72 sind mit Hilfe von Bild 71 gefunden. Welches war wohl dieser Weg?

Aufgabe 65. Zeige, dass auf einem noch so kleinen Teil des Kreisbogens immer noch Punkte mit rationalen Koordinaten liegen.

Die neue Formulierung der Aufgabe über pythagoreische Zahlen gestattet eine sehr einfache Herleitung der Grundformeln (I) bis (III) von Abschnitt VII, 6.
Wir müssen ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe man sämtliche rationalen Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ angeben kann, d.h. die Punkte des Kreises, deren Koordinaten rational sind.

Es sei P ein solcher Punkt. Wir verbinden ihn mit dem Punkt $Q(0; -1)$, in dem unser Kreis die y-Achse schneidet (Bild 72). Die Gleichung einer beliebigen Geraden durch den Koordinatenursprung O (außer der y-Achse) lässt sich in der Form $y = kx$ schreiben, wobei k eine gewisse Zahl (den Richtungsfaktor) bedeutet. Die Gleichung einer Geraden, die durch Q hindurchgeht, hat die Form

$$y + 1 = kx \qquad (*)$$

wobei die Zahl k ebenfalls als Richtungsfaktor bezeichnet wird. Schneidet unsere Gerade den Kreis in einem rationalen Punkt $P(x, y)$, so ist ihr Richtungsfaktor k rational (denn in diesem Falle ist $k = \frac{y+1}{x}$), wobei x und y die rationalen Koordinaten des Punktes P bedeuten).
Ist umgekehrt k rational, so schneidet unsere Gerade den Kreis in einem rationalen Punkt P. Dies lässt sich leicht unmittelbar überprüfen. In der Tat, die Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden und des Kreises führt auf die Lösung des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad , \qquad y + 1 = kx$$

das sich leicht auf eine einzige Gleichung, und zwar

$$\left(\frac{y+1}{h}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad (1 + k^2)y^2 + 2y + 1 - k^2 = 0$$

reduzieren lässt. Hieraus folgt

$$y_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \qquad , \qquad y_2 = -1$$

und demzufolge

$$x_1 = \frac{y_1 + 1}{k} = \frac{2k}{k^2 + 1} \qquad , \qquad x_2 = \frac{y_2 + 1}{k} = 0$$

Man kann daher sämtliche rationalen Punkte des Kreises bestimmen, indem man die Schnittpunkte des Kreises mit den Geraden (*) ermittelt, deren Richtfungsfaktor rational ist, d.h. dass $k = \frac{u}{v}$ bei ganzzahligem u und v gilt. Diese Punkte findet man nach den Formeln

$$x_1 = \frac{2k}{k^2 + 1} = \frac{2uv}{u^2 + v^2} \qquad , \qquad y_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = \frac{u2 - v^2}{u^2 + v^2} \qquad (**)$$

Man erkennt leicht, dass es sich bei den Formeln (**) um die gleichen Formeln (I) bis (III), allerdings in einer leicht modifizierten Schreibweise handelt.

10. Legt man zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen pythagoreische Zahlen sind, und die eine gleich lange Kathete haben, mit dieser Kathete aneinander, so entsteht ein Dreieck, dessen Seitenlängen ganze Zahlen sind, und dessen Inhalt gleichfalls eine ganze Zahl ist.

Legt man beispielsweise die pythagoreischen Dreiecke mit den Seiten 9, 12, 15 und 5, 12, 13 mit den Katheten 12 aneinander, so entsteht ein Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 und der zur Seite 14 gehörigen Höhe 12. Der Inhalt ist also $\frac{12 \cdot 14}{2} = 84$. Man nennt solche Dreiecke heronische Dreiecke.

Aufgabe 66. Setze aus den uns bekannten pythagoreischen Dreiecken noch einige andere heronische zusammen! Zur Aufsuchung geeigneter Zahlen ist Bild 71 brauchbar.

Man kann eine allgemeine Regel angeben, beliebig viele heronische Dreiecke zu bilden. Es seien (wir setzen die Hypotenuse immer als letzte Zahl) .

$$a_1, b_1, c_1 \qquad , \qquad a_2, b_2, c_2$$

die Seitenlängen zweier pythagoreischer Dreiecke. Dann sind auch

$$a_1 b_2, b_1 b_2, c_1 b_2 \qquad \text{und} \qquad a_2 b_1, b_2 b_1, c_2 b_1$$

und

$$a_1 a_2, b_1 a_2, c_1 a_2 \qquad \text{und} \qquad a_2 a_1, b_2 a_1, c_2 a_1$$

pythagoreische Dreiecke; sie sind nämlich aus den vorherigen durch Multiplikation aller Seiten mit b_2 und b_1 bzw. a_2 und a_1 entstandene abgeleitete Tripel. Die rechtwinkligen Dreiecke haben die Kathete mit der Länge $b_1 b_2$ bzw. $a_1 a_2$ gemeinsam.
Legt man die Dreiecke in passender Weise zu einem Dreieck zusammen, so dass die gemeinsame Kathete Dreieckshöhe wird, so erhält man z.B. im ersten Falle ein heronisches Dreieck mit den Seiten $(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, $c_1 b_2$, $c_2 b_1$. Die Höhe des Dreiecks ist $b_1 b_2$, der Inhalt also

$$\frac{1}{2} b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

11. Um der Frage nach einer allgemeinen Lösung für heronische Dreiecke nachzugehen, knüpfen wir an die früher gegebene Lösung der pythagoreischen Gleichung an.
Zunächst machen wir uns aber eins klar: Aus irgendeinem heronischen Dreieck können wir, genauso wie auch bei den pythagoreischen Dreiecken dadurch beliebig viele neue schaffen, dass wir alle Maßzahlen der Seiten mit ein und derselben Zahl multiplizieren.

Wir können jetzt auch - die Einzelheiten der Überlegung seien dem Leser überlassen - die Forderung ganzzahliger Seiten durch die Forderung rationaler Seiten ersetzen; zu den Seiten sollen noch die Inhalte oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Höhen hinzukommen.

Aufgabe 67. Warum sind mit den Seiten und dem Inhalt eines heronischen Dreiecks auch alle drei Höhen rational?

Es kommt uns also im folgenden nur auf das Seitenverhältnis $a : b : c$ an.
Es seien nun zwei rechtwinklige Dreiecke gegeben, deren Seiten ein pythagoreisches Grundtripel bilden, dann ist etwa im ersten Dreieck

$$a_1 = u_1 \cdot v_1; \qquad b_1 = \frac{u_1^2 - v_1^2}{2}; \qquad c_1 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2}$$

und im zweiten Dreieck

$$a_2 = u_2 \cdot v_2; \qquad b_2 = \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}; \qquad c_2 = \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$$

wobei die u_1, u_2, v_1, v_2 noch gewisse Bedingungen erfüllen, über die uns unsere früheren Überlegungen Auskunft geben. Wir bilden jetzt aus den beiden Dreiecken nach dem soeben angegebenen Verfahren zwei neue pythagoreische Dreiecke, die eine Kathete gemeinsam haben.

$$a_3 = u_1v_1\frac{u_2^2 - v_2^2}{2}; \qquad b_3 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4}; \qquad c_3 = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4}$$

$$a_4 = u_2v_2\frac{u_1^2 - v_1^2}{2}; \qquad b_4 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4}; \qquad c_4 = \frac{(u_2^2 + v_2^2)(u_1^2 - v_1^2)}{4}$$

Legen wir jetzt die beiden rechtwinkligen Dreiecke aneinander mit den gleichen Katheten $b_3 = b_4 = h$, so erhalten wir ein heronisches Dreieck mit den Seiten $a = c_3$, $b = c_4$, $c = a_3 + a_4$ und der Höhe h.

Den Ausdruck für c wollen wir noch etwas umformen. Es ist, wovon man sich durch Ausmultiplizieren der Klammern überzeugt,

$$u_1v_1(u_2^2 - v_2^2) + u_2v_2(u_1^2 - v_1^2) = (u_1v_2 + v_1u_2) \cdot (u_1u_2 - v_1v_2)$$

Wir erhalten dann, wenn wir noch alle Ausdrücke mit 4 multiplizieren

$$a : b : c = [(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)] : [(u_2^2 + v_2^2)(u_1^2 - v_1^2)] : [2(u_1v_2 + v_1u_2) \cdot (u_1u_2 - v_1v_2)]$$

Wir dürfen natürlich nicht erwarten, dass die rechts stehenden drei Zahlen, selbst wenn u_1 zu v_1 und u_2 zu v_2 teilerfremd sind, nun auch teilerfremd sind.

Wir wollen als einfachstes Beispiel nehmen

$$u_1 = 3, \quad v_1 = 1, \quad u_2 = 5, \quad v_2 = 1$$

dann erhalten wir $a : b : c = 240 : 208 : 224$ oder $a : b : c = 15 : 13 : 14$. Das ist das bereits bekannte heronische Dreieck.[8]

Aufgabe 68. Berechne selbst einige heronische Dreiecke!

Euler (1707 bis 1783) hat ein anderes Formelsystem angegeben, das man, ausgehend von den beiden Ursprungsdreiecken, dadurch erhält, dass man $a_1 \cdot a_2$ als gemeinsame, zur Höhe werdende Kathete wählt.

Aufgabe 69. Zeige, dass man dann auf die Seiten

$$a = u_2v_2\frac{u_1^2 + v_1^2}{2}, \qquad b = u_1v_1\frac{u_2^2 + v_2^2}{2}, \qquad c = \frac{(u_1v_2 + v_1u_2)(u_1u_2 - v_1v_2)}{2}$$

kommt!

Dividiert man hier noch durch $u_1 \cdot v_1 \cdot u_2 \cdot v_2$ und multipliziert mit 2, so erhält man

$$a : b : c = \frac{u_1^2 + v_1^2}{u_1v_1} : \frac{u_2^2 + v_2^2}{u_2v_2} : \frac{(u_1v_2 + v_1u_2) \cdot (u_1u_2 - v_1v_2}{u_1u_2v_1v_2}$$

Aufgabe 70. Berechne nach dieser Formel ein heronisches Dreieck mit $u_1 = 3, v_1 = 1, u_2 = 5, v_2 = 1$.

[8] Für den Freund merkwürdiger Zahlen seien einige weitere rationale Dreiecke angegeben, deren Seiten aufeinanderfolgende Zahlen sind: 51, 52, 53; 193, 194, 195; 723, 724, 725; 2701, 2702. 2703.

Aufgabe 71. Gib in beiden Fällen den allgemeinen Ausdruck für die Höhe, die aus der gemeinsamen Kathete entstanden ist, und den Inhalt an!

Aufgabe 72. Von Brahmagupta (geboren um 600 u.Z.) sind die Formeln angegeben

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right), \qquad q = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c} + c\right), \qquad r = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - c\right)$$

Erörtere diese Ausdrücke; wie groß ist hier die Höhe angenommen?

12. Man hat im Anschluss an die Behandlung heronischer Dreiecke noch weitere Forderungen gestellt, etwa so, dass auch andere Größen, etwa die Seitenhalbierenden, die Winkelhalbierenden, rational wurden.

So hat z.B. Euler angegeben, dass bei einem Dreieck mit den Seiten 136, 170, 174 der Flächeninhalt und sämtliche Seitenhalbierenden ganzzahlig sind.
Man hat bewiesen, dass dieses Dreieck das kleinste heronische Dreieck mit ganzzahligen Seitenhalbierenden ist. Man hat auch die Aufgabe behandelt, sämtliche heronischen Dreiecke zu bestimmen, deren Umfang ihrem Flächeninhalt gleich ist (das einfachste hiervon ist das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 6, 8 und 10).

Eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Problem der pythagoreischen Zahlen weisen die folgenden Aufgaben auf:

Man bestimme sämtliche Dreiecke, deren Seiten sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen und bei denen die Differenz zweier Winkel $90°$ beträgt (bei den rechtwinkligen Dreiecken beträgt die Summe zweier spitzer Winkel $90°$); oder man bestimme die Dreiecke, deren Seiten sich in ganzen Zahlen ausdrücken lassen und in denen der eine Winkel $60°$ oder $120°$ beträgt (in einer schärferen Variante lautet diese Aufgabe:
die Seiten lassen sich ganzzahlig ausdrücken und der eine der Winkel lässt sich durch eine beliebige rationale Zahl in Graden messen) ; oder schließlich:
man bestimme die Dreiecke, deren Seiten sich ganzzah1ig ausdrücken lassen und in denen der eine Winkel ein ganzzahliges Vielfaches eines anderen Dreieckswinkels ist (etwa das Doppelte oder das Siebenfache).

Die Lösungen dieser Aufgaben werden durch Formeln gegeben, die den Grundformeln (I) bis (III) von Abschnitt VI ähnlich sind (allerdings sind sie etwas komplizierter gebaut).

Ein weiterer Weg führt zu anderen ebenen Figuren mit rationalen Maßzahlen, zunächst zu rationalen Parallelogrammen mit rationalen Diagonalen, zu allgemeinen und besonderen rationalen Vierecken, wie etwa Sehnenvierecken usf.

Schließlich warf man auch die Frage nach Körpern mit rationalen Maßzahlen auf. Der einfachste Körper, für den die Frage nicht trivial War, ist das Vierflach.
Natürlich gehört das regelmäßige Tetraeder nicht hierher, wenn man außer der Rationalität der Kanten etwa noch die des Inhalts fordert. Es ist offensichtlich nicht ohne weiteres sicher, dass es solche rationalen Vierflache überhaupt gibt. Dieses Problem ist nicht leicht in allgemeiner Form zu lösen.

Ein schönes Beispiel eines rationalen Vierflaches ist das folgende: Der Rauminhalt des Tetraeders mit den Kanten 6, 7, 8, 9, 10 und 11 ist 48.

Ein weiteres interessantes Beispiel liefert das Tetraeder mit den Kantenlängen 896, 990, 1073, 1073 1073 und 1073 (die Kanten mit den Längen 896 und 990 liegen einander gegenüber).

Dieses Tetraeder besitzt nicht nur einen ganzzahligen Rauminhalt von 62092800, sondern auch die Flächeninhalte der Seitenflächen sind ganzzahlig, und zwar 436800, 436800, 471240 und 471240. Weiteres findet man in dem Buch von T. Roman.

8 Das Fermatsche Problem

1. Wir haben in dem vorangegangenen Abschnitt unendlich viele Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

in ganzen positiven Zahlen x, y, z kennengelernt. Es liegt nahe, in gleicher Weise nach der Lösung der Gleichungen

$$x^3 + y^3 = z^3; \qquad x^4 + y^4 = z^4 : \qquad ...$$

allgemein der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

zu suchen. Wenn man nun zunächst einmal auf gut Glück probiert, von irgendeiner dieser Gleichungen Lösungen zu finden, so wird das Ergebnis negativ sein.

Man kennt bisher noch kein einziges Zahlentripel, das irgendeine dieser Gleichungen, so hoch auch der Exponent gewählt wird, befriedigt. Wir werden also den Satz vermuten:

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für keinen ganzzahligen Wert $n > 2$ in ganzen Zahlen x, y, z lösbar.

Man nennt diesen Satz den großen Fermatschen Lehrsatz.
Fermat, ein Jurist in Toulouse und sicherlich einer der größten Mathematiker aller Zeiten (1608 bis 1665), hat diese Aussage neben anderen als Randbemerkung in sein Handexemplar der Diophantausgabe von Bachet eingetragen.
Diophantos, ein spätgriechischer Mathematiker (um 300 u.Z.) hatte sich bereits mit solchen Gleichungen beschäftigt und seine Ergebnisse in einem Buch zusammengestellt. Fermat fügte hinzu, er habe einen wirklich wunderbaren Beweis gefunden, den er jedoch aus Mangel an Platz nicht mit angeben könne. - Es ist bisher nicht geglückt, einen vollständigen Beweis für diesen Satz zu finden, man spricht also vorderhand besser vom Fermatschen Problem.

2. Nachdem bereits Euler den Satz für die Exponenten 3 und 4, der Göttinger Mathematiker Dirichlet (1805 bis 1859) für den Exponenten 5 bewiesen hatte, ist es erst Kummer (1810 bis 1893) mit den von ihm geschaffenen Methoden der modernen algebraischen Zahlentheorie gelungen, einen beträchtlichen Schritt zur Erbringung eines allgemeinen Beweises vorwärts zu tun.

Man sieht leicht ein, dass der Unmöglichkeitsbeweis nur für den Exponenten 4 und die ungeraden Primzahlexponenten 3, 5, 7, 11, ... erbracht zu werden braucht. Gäbe es nämlich z.B. eine Lösung der Gleichung

$$x^6 + y^6 = z^6$$

durch ganzzahlige Größen a, b und c, so würde es dann auch Lösungen der Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

geben, nämlich die Werte a^2, b^2 und c^2.

Kummer hat nun den Unmöglichkeitsbeweis für alle sogenannten regulären Primzahlen erbracht. Zu diesen regulären Primzahlen, deren genaue Definition sich nicht in elementarer Weise geben lässt, gehören bis 100 nur drei nicht, nämlich 37, 59 und 67. Ob übrigens die Anzahl der regulären Primzahlen unendlich ist oder nicht, weiß man bis jetzt nicht.

Auch für eine gewisse Gruppe aus der Zahl der nichtregulären Primzahlen, zu der auch die eben genannten drei Zahlen gehören, konnte Kummer den Unmöglichkeitsbeweis erbringen, so dass also zu seinen Zeiten der Satz mit seinen Methoden z.B. für Exponenten bis 100, vollständig bewiesen war.

Es ist nicht möglich, hier von den von Kummer entwickelten, später von Hilbert, Furtwängler und dann von einer ganzen Gruppe von Mathematikern vereinfachten und ausgebauten Methoden der algebraischen Zahlentheorie einen Begriff zu vermitteln.
Nur soviel sei gesagt: Man greift die Lösung des Problems in einem erweiterten Zahlbereich an, und wenn man dort die Unmöglichkeit der Lösung durch ganze Zahlen dieser Bereiche nachgewiesen hat, folgt sie von selbst für den engeren Bereich unserer rationalen ganzen Zahlen.

3. Das Fermatsche Problem wäre nicht in aller Munde, wenn nicht - leider, könnte man sagen - der in Darmstadt verstorbene Mathematiker Dr. P. Wolfskehl einen Betrag von 100000 M der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vermacht hätte mit der Bedingung, diese Summe als Preis für die Lösung des Fermatschen Problems auszusetzen.

Nach den Festsetzungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften muss die Lösung in einer Zeitschrift oder als Buch erscheinen, eine Prüfung von Manuskripten lehnt die Gesellschaft ab; die Zuerkennung des Preises kann frühestens zwei Jahre nach Erscheinen der Arbeit geschehen.
Der Preis erlischt im Jahre 2007; die Zinsen des Kapitals werden zur Förderung der mathematischen Wissenschaften verwendet. - Der Preis wurde bereits durch die nach dem ersten Weltkrieg eingetretene Inflation entwertet; die Zinsen sind früher mehrfach im Sinne der Bedingungen verwandt worden.

Dieses Geld wurde z.B. verwendet, um hervorragende deutsche und ausländische Mathematiker und Physiker nach Göttingen zu Vorträgen einzuladen. Wie man erzählt, hat der Vorsitzende der Kommission zur Verleihung des Wolfskehl-Preises, der große deutsche Mathematiker David Hilbert, der als Professor an der Universität Göttingen wirkte, nach einer wieder einmal fälligen Beurteilung eingereichter Lösungen einmal folgendes gesagt:

"Glücklicherweise gibt es anscheinend außer mir keinen Mathematiker bei uns, der in der Lage wäre, diese Aufgabe zu lösen. Allerdings gedenke ich selbst niemals die Henne zu schlachten, die uns goldene Eier legt."

Einmal ist eine Summe an A. Wieferich, den Verfasser einer Arbeit, die einen tatsächlichen Fortschritt in der Richtung eines Beweises bedeutete, ausgezahlt worden.

Soviel von der Stiftung selbst; nun aber zu ihren Folgen! Und die waren fürchterlich!

Früher erhielt wohl jeder etwas bekanntere Mathematiker, vor allem die Redakteure der mathematischen Zeitschriften, hin und wieder einen Lösungsversuch der Quadratur des Zirkels[9] oder der Dreiteilung des Winkels[10], obwohl doch die Unmöglichkeit solcher Konstruktionen

[9]Dieses Problem wird behandelt in E. Beutel. Die Quadratur des Kreises. (Math.-Phys. Bibl. I, 12). 5. Aufl., Teubner, Leipzig 1951.
[10]W. Breidenbach, Die Dreiteilung des Winkels. (Math.-Phys. Bibl. I, 78). 2. Aufl. Teubner, Leipzig 1951.

mit Lineal und Zirkel in endlicher Anzahl Anwendungen vollständig bewiesen ist.

Nun aber trat an die Stelle dieser Konstruktionen das Fermatsche Problem, denn hier lockte neben dem Ruhm auch klingende Münze. Es waren wunderlicherweise - wer genauer zusieht, wird es doch nicht so verwunderlich finden - nicht so sehr die Mathematiker, die mit Lösungen des Problems hervortraten, vielmehr waren es Angehörige der verschiedensten Berufe, die mit Mathematik eigentlich wenig zu tun hatten, und nicht nur aus Deutschland, sondern aus aller Herren Länder.
Dem Gros dieser Bewerber ist, so schrieb eines der Mitglieder der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, nur das gemeinsam, "dass sie keine Ahnung von der ernsten mathematischen Bedeutung des Problems haben".

Schon ehe die Göttinger Gesellschaft die Preisbedingungen veröffentlicht hatte, waren auf die bloße Zeitungsmeldung hin mehrere Hundert "Beweise" eingelaufen, und bald war die Zahl 1000 weit überschritten. Welche Summe von Arbeit, Zeit und Geld!
Dabei ist 1000 gegen 1 zu Wetten, dass auch nicht einer dieser Beweise stichhaltig ist, wenn auch schon manche Bewerber mit Klagen auf die Auszahlung "ihrer" 100000 M. gedroht haben. -

Eine mathematische Zeitschrift, das "Archiv der Mathematik und Physik" (Verlag B. G. Teubner, Leipzig), hatte damals in verdienstlicher Weise eine ständige Rubrik zur "Abschlachtung von Fermatbeweisen" eingerichtet. Bis Anfang 1911 waren dort 111 Beweise untersucht und sämtlich als unrichtig erkannt worden. Auch nachdem die Zeitschrift ihr verdienstliches Werk eingestellt hatte, schwoll die Flut der Beweise immer weiter an.

Man konnte da die ergötzlichsten Dinge erleben. In einem Beweise, der mir[11] zugesandt wurde, waren zwei Tatsachen nicht bewiesen, sondern nur an Beispielen erläutert. Die eine Sache war sehr leicht zu ergänzen, bei der anderen saß der Haken.
Ich schrieb dem Einsender das. Umgehend erhielt ich 10% des Gewinnes zugesagt, wenn ich den Beweis für jene erste Tatsache angäbe. Und so hätte ich mit einer Kleinigkeit, die jeder Schüler wissen müsste, 10000 M. verdient, wenn ...

Eine Tageszeitung schrieb bei der Ankündigung des Preises

$$x^n + y^n = z^n (n + 2) \tag{1}$$

an Stelle von

$$x^n + y^n = z^n (n > 2) \tag{2}$$

Natürlich setzte sich sofort jemand hin und wies nach, dass der vermeintliche Lehrsatz (1) durchaus falsch sei; für $n = 1$ er halte man schon soundso viele Lösungen. Das sandte er der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ein, ehe noch die Zeitung Gelegenheit gefunden hatte, ihre Notiz zu berichtigen.

Was traute jener Mann wohl den Mathematikern zu, die für solche Dinge Preise von 100000 M. aussetzten?

Ein Mann schrieb kurz und bündig etwa so: Bekanntlich ist $a^2 + b^2 = c^2$; wäre nun auch $a^n + b^n = c^n$, so müsste $n = 2$ sein; das ist aber nicht der Fall, mithin ist die Unmöglichkeit bewiesen.

Belehrungen über Unrichtigkeiten Wurden je nach Temperament mit Hohn und überlegenem

[11] W. Lietzmann

Lächeln oder mit dem Ausdruck tiefsten Weltenschmerzes entgegengenommen. Überzeugte man jemanden, dann folgte dem ersten als falsch erkannten Beweise in kurzer Zeit ein zweiter, oder es wurde der ersten Schrift - sie sind fast alle im "Selbstverlage" erschienen - ein erster, ein zweiter, ein dritter Nachtrag nachgesandt. Die Hydra der "Beweise"war nicht tot zu kriegen. Nur ganz selten einmal klang ein solcher Briefwechsel aus in Worte, die mir einmal jemand schrieb:

Nicht zähl' ich zu den geistig Starren
Zu jenen "unbedingten" Narren -
Ich hab's gewagt, ich geb's verloren,
Zu and'rem noch ist man geboren -
'Und Sie verzeihen einem - Toren.

Nein - wer sich soweit durchgerungen hat, der hat sich von der Torheit frei gemacht.
Auch die erste Auflage dieses Büchleins hat, trotz aller Mahnung so manchen Schreibebrief mit Fermatbeweisen zur Folge gehabt. Vielleicht war es der einzige Segen der Inflation nach dem ersten Weltkrieg, dass diese Flut versiegte.
Wem's ums Geld zu tun ist, der wird jetzt verzichten; wer aber aus Liebe zur Mathematik herangeht an das Problem, dem gebe ich den Rat, seinen Drang nach mathematischer Beschäftigung in irgendeiner Richtung zu betätigen, die Aussicht auf Befriedigung und vielleicht auch auf eigene Forschungsergebnisse gewährt.

Die Mathematische Schülerbücherei wird eine ganze Reihe von Gebieten der Mathematik jedem an der Mathematik Interessierten erschließen - es ist Raum genug für Selbstbetätigung und Entdeckerfreude.

4. Wenn wir in diesem Büchlein über den pythagoreischen Lehrsatz und über pythagoreische Zahlen auf das Fermatproblem eingegangen sind, so hat das einen besonderen Grund. Nicht selten begegnet man der Meinung, die Mathematik sei eine starre, in allen Teilen bereits fertig entwickelte Wissenschaft.
Dass dem nicht so ist, sehen wir hier. Da liegt dicht neben Wahrheiten, die schon zwei und mehr Jahrtausende bekannt sind, ein ungelöstes Problem, noch dazu eines, dessen Inhalt man jedermann, ohne dass er besondere mathematische Vorkenntnisse besitzt, klarmachen kann.

Wir hatten berichtet, dass der Beweis des Fermatschen Satzes für die Exponenten 3, 4 und 5 bereits vor Kummer geführt war. Wir wollen wenigstens für einen dieser Fälle, nämlich für die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

diesen einer elementaren Behandlung zugänglichen Beweis wiedergeben. Er stammt von Euler.
Mit der Unmöglichkeit der Gleichung (1) für ganze Zahlen x, y und z ist natürlich auch die Gleichung

$$x^{4n} + y^{4n} = z^{4n} \tag{2}$$

wobei n irgendeine positive ganze Zahl > 1 ist, erledigt.

5. Wir behandeln, ehe wir an die Gleichung (1) herantreten, die Lösung oder vielmehr Unlösbarkeit (in ganzen Zahlen) der Gleichung

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2 \tag{1}$$

Sie ist gleich in der Form geschrieben, die auf den Zusammenhang mit der pythagoreischen Gleichung hinweist. Die Frage ist, gibt es unter den pythagoreischen Zahlen solche, von denen die zwei kleineren Quadratzahlen sind?

Es ist uns zwar ein derartiges Tripel bisher noch nicht vorgekommen, das sagt aber natürlich noch nichts gegen seine Existenz. Es könnte sich ja um ganz große Zahlen handeln.

Wir fragen natürlich gleich nach einem Grundtripel, die abgeleiteten Tripel interessieren uns nicht, wir können also x, y und z teilerfremd annehmen.

Wir werden zeigen, dass die Gleichung (1) keine ganzzahligen Lösungen hat. Das wird auf eine ganz raffinierte Weise geschehen, die erst an einem Beispiel klargelegt werden soll. Es gibt keinen kleinsten positiven Bruch. Warum?
Nun, wenn mir jemand einen Bruch nennt, etwa $\frac{1}{100}$, allgemein $\frac{1}{n}$, so kann ich ihm immer einen Bruch nennen, nämlich $\frac{1}{101}$ und im allgemeinen Falle $\frac{1}{n+1}$, der noch kleiner ist.

Ähnlich verfahren wir hier. Wir nehmen von einer Lösung der Gleichung an, sie sei die kleinste, zeigen, wie wir daraus eine noch kleinere gewinnen können, und haben damit bewiesen, dass es keine kleinste Lösung gibt.
Da es sich aber im Falle unserer Gleichung nur um ganzzahlige Lösungen handelt, von denen doch, wenn überhaupt welche vorhanden sind, eine diejenige mit den kleinsten Zahlen sein müsste, so löst sich hier der Widerspruch nur so, dass überhaupt keine Lösung vorhanden ist.

Wir haben noch genauer zu sagen, was wir unter einer Lösung in kleinsten Zahlen verstehen. Wir meinen damit eine solche Lösung x_1, y_1, z_1, bei der z_1 den kleinstmöglichen Wert annimmt. Sollte es mehrere Wertetripel mit gleichem kleinstmöglichem z_1 geben, so sei von ihnen als kleinstes das bezeichnet, dessen x_1 am kleinsten ist.

An das in diesem Sinne kleinste Tripel, das natürlich ein Grundtripel ist, knüpfen wir nun unsere Überlegungen an.

6. Ist

$$(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2$$

so muss nach dem, was wir im vorangegangenen Abschnitt über die allgemeine Lösung der pythagoreischen Gleichung abgeleitet haben, folgende Darstellungsweise in ungeraden, teilerfremden Zahlen u und v (wobei beiläufig u größer als v ist) möglich sein:

$$x_1^2 = u \cdot v, \qquad y_1^2 = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{1,2,3}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen schließen wir in gleicher Weise wie in Abschnitt VII, 6, dass die teilerfremden Größen u und v sich als Quadrate darstellen. Es sei etwa

$$u = u_1^2 \qquad , \qquad v = v_1^2$$

wobei auch u_1 und v_1 wieder ungerade teilerfremde Zahlen sind und auch wieder $u_1 > v_1$ ist. Wir setzen jetzt diese neuen Zahlen in die Gleichung (2) für y_1^2 ein; die Gleichung für z_1 Werden wir für unseren Zweck vorläufig nicht mehr brauchen. Es ist

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 - v_1^2)}{2}$$

An Stelle dieser Zahlen u_1 und v_1 führen wir jetzt wieder neue Zahlen ein. Wir setzen

$$u_1 + v_1 = 2u_2 \qquad , \qquad u_1 - v_1 = 2v_2$$

dann ist also

$$u_1 = u_2 + v_2 \qquad , \qquad v_1 = u_2 - v_2$$

Wenn wir in dem ersten Gleichungspaar den Faktor 2 verwerteten, so ist das möglich, weil ja die Summe oder Differenz zweier ungerader Zahlen stets gerade sein muss.
Die neuen Zahlen u_2 und v_2 sind wieder teilerfremd. Wäre nämlich t ein Teiler beider Zahlen gleichzeitig, so wäre sowohl u_1 wie v_1 durch t teilbar, jene beiden Zahlen könnten also nicht, wie wir es doch von ihnen wissen, teilerfremd sein.

Wir wollen gleich noch hinzufügen, dass auch der Ausdruck $u_2^2 + v_2^2$ keinen Teiler mit u_2 oder mit v_2 gemeinsam haben kann.

Aufgabe 73. Beweise das!

Wir drücken jetzt y_1^2 durch die neuen Zahlen u_2 und v_2 aus. Es ist

$$u_1^2 - v_1^2 = 4u_2 \cdot v_2 \qquad , \qquad u_1^2 + v_1^2 = 2(u_2^2 + v_2^2)$$

folglich

$$y_1^2 = 4u_2 \cdot v_2 \cdot (u_2^2 + v_2^2)$$

7. Auf die letzte Gleichung wenden wir unseren schon mehrfach benutzten Satz an: Wenn das Produkt teilerfremder Zahlen ein Quadrat ist, sind die Zahlen selbst Quadrate.
Wir wissen nicht, ob u_2 oder v_2 teilerfremd zu dem Faktor 4 ist, wollen ihn also der Vorsicht halber dadurch beseitigen, dass wir ihn auf die linke Seite der Gleichung bringen. In

$$\frac{y_1^2}{4} = u_2 \cdot v_2 \cdot (u_2^2 + v_2^2)$$

steht links noch eine ganze Zahl, denn y_1^2 sollte unserer allgemeinen Festsetzung nach (vgl. Abschnitt VII, 3) eine gerade Zahl sein, und eine gerade Zahl, die gleichzeitig Quadratzahl ist, ist stets durch 4 teilbar.

Jetzt müssen also u_2, v_2 und $u_2^2 + v_2^2$ nach unserem Satze Quadrate sein, etwa

$$u_2 = x_2^2, \qquad v_2 = y_2^2, \qquad u_2^2 + v_2^2 = z_2^2$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt aber:

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$$

d.h., wir haben auf einem allerdings nicht ganz einfachen Wege aus dem Lösungstripel x_1, y_1, z_1 unserer Gleichung ein zweites x_2, y_2, z_2 gewonnen, das nebenbei bemerkt sogar ein Grundtripel ist.

Aufgabe 74. Der am Anfang dieses Abschnittes VIII, 7 benutzte Satz ist in Abschnitt VII. 6 nur für zwei Faktoren benutzt werden ; führe den Beweis für drei Faktoren!

8. Nun bleibt noch zu beweisen, dass die Zahl z_2 kleiner ist als z_1. Es ist, Wenn wir zurückgehen,

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2}$$

Nun war

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Da die Summe von zwei ganzen positiven Zahlen, von denen wenigstens eine nicht gleich 1 ist, stets kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden Zahlen, so ist

$$z_2^2 < z_1$$

Erst recht ist also, da ja z_2 größer als 1 ist,

$$z_2 < z_1$$

Wir haben jetzt erreicht, was wir wollten; wir haben bei Annahme eines kleinsten z_1 ein noch kleineres z_2 bestimmt und also einen Widerspruch herbeigeführt, der nur dadurch zu lösen ist, dass wir unsere Annahme eines kleinsten z fallenlassen, dass also mit anderen Worten, die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2$$

ohne ganzzahlige Lösungen ist.

Aufgabe 75. Eine "Lösung" unserer Aufgabe gibt es doch, nämlich $x = 1, y = 0, z = 1$. Warum spielt diese "Lösung" in unserer Überlegung keine Rolle?

9. Das Fermatsche Problem für den Fall des Exponenten 4 ist jetzt schnell zu erledigen. Angenommen, die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

hätte eine ganzzahlige Lösung x_1, y_1, z_1, dann wäre das Wertetripel x_1, y_1, z_1^2 eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2$$

und die existiert nicht. Demnach kann also auch die erste Gleichung keine ganzzahlige Lösung haben.

10. Es ist einleuchtend, dass die eben zur Erledigung des Falles $n = 4$ eingeschlagene Methode nicht ohne weiteres auf beliebige Primzahlexponenten übertragbar ist.
Schon der Fall $n = 3$ erfordert andere Mittel, deren Entwicklung den Rahmen, den wir uns in dieser Schrift gesteckt haben, überschreitet. Wir wollen aber versuchen, von dem gegenwärtig in der Bewältigung des Problems erreichten Stand wenigstens einen Begriff zu geben.

Wir wollen zwei Fälle unterscheiden. Typ I soll diejenigen Fälle umfassen, in denen in

$$x^p + y^p = z^p$$

keine der drei Zahlen x, y und z durch die ungerade Primzahl p teilbar ist.
Für Typ II bleiben diejenigen Fälle übrig, in denen eine der drei Zahlen durch p teilbar ist.

Wir können sagen, nur eine, denn wenn zwei Zahlen durch p teilbar wären, müsste es auch die dritte sein, und wir könnten gemeinsame Faktoren wegheben.

11. Wir betrachten im folgenden den Typ I etwas genauer.
A. Wieferich, dessen Namen wir bereits erwähnten, hat gezeigt, dass eine Lösung dieses Typs nur möglich wäre für Primzahlen p, für die der Ausdruck

$$P(2) = \frac{2^p - 2}{p}$$

durch p teilbar ist.

Die Tatsache, dass die Zahl $2^p - 2$ für jede Primzahl p durch p teilbar ist, lässt sich leicht beweisen (vgl. unten Abschnitt 12), Zahlen p hingegen, für die $2^p - 2$ durch p^2 (und damit $P(2)$ durch p) teilbar ist, treten sehr selten auf.

Der bekannte sowjetische Mathematiker D.A. Grave nahm sogar an, dass es solche Zahlen überhaupt nicht gibt. Auf Grund dieser Annahme behauptete er in seinem Lehrbuch der Zahlentheorie, dass das Fermatsche Problem keine Lösungen vom Typ I besitzen kann.

Er stützte sich dabei auf die von seinen Schülern vorgenommene unmittelbare Überprüfung der Tatsache, dass für alle Primzahlen, die kleiner sind als 1000 der Ausdruck $P(2)$ nicht durch p teilbar ist. Später wurde festgestellt, dass die kleinste Primzahl, für die diese Bedingung erfüllt ist, 1093 ist.
Es gehört übrigens eine gehörige Portion Geduld dazu, das, selbst wenn man die Wieferichsche Bedingung schon kennt, durch Rechnung herauszufinden; man hat schon hier mit wahren Zahlenriesen zu tun. Mirimanoff hat später gefunden, dass auch

$$P(3) = \frac{3^p - 3}{p}$$

durch p teilbar sein muss, wenn eine Lösung für den Primzahlexponenten p möglich sein soll. Diese Ergebnisse sind dann noch von Vandiver durch Auffindung der entsprechenden Bedingungen $P(5)$, von Frobenius der Bedingungen $P(11)$ und $P(17)$ und einigen anderen Mathematikern mit gewissen Einschränkungen erweitert worden.
Damit schnellt die Größe eines p, das möglicherweise eine Lösung vom Typ I liefert, noch beträchtlich weiter hinauf.

12. Man ist dem Typ I noch auf einem anderen Wege auf den Leib gerückt. Schon Legendre hat gezeigt, dass solche Primzahlen p ausschalten, für die entweder $q_2 = 2p + 1$ oder $q_4 = 4p + 1$ oder $q_8 = 8p + 1$ oder $q_{16} = 16p + 1$ selbst wieder Primzahlen werden. Es gibt noch einige andere q_{2k} dieser Art, jedoch sind dabei Ausnahmen zu beachten.

Dickson, ein englischer Mathematiker, hat schließlich den Nachweis der Unlösbarkeit des Typs I für alle Primzahlen erbracht, die kleiner als 7000 sind.

Wir wollen den Gedankengang einer solchen Untersuchung wenigstens für den einfachsten Fall darlegen. Dazu brauchen wir die Hilfe eines Satzes, der in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielt; man nennt ihn den Fermatschen Satz - manchmal auch recht unschön den "kleinen Fermatschen Satz" im Gegensatz zu dem uns hier angehenden, mit vollem Beweis noch ausstehenden "großen Fermatschen Satz".

Irgendeine positive ganze Zahl n sei nicht durch die Primzahl p teilbar, dann lässt sie also bei der Division durch p irgendeinen Rest, der zwischen 0 und p liegt.
Aber auch die Zahlen $2n$, $3n$, $4n$, ..., $(p-1)n$ sind nicht durch p teilbar, sondern lassen jeweils bei Division durch p Reste. Ich behaupte, alle diese Reste sind verschieden.

Ließe nämlich $f \cdot n$ und $g \cdot n$ denselben Rest, Wobei f die größere der beiden Zahlen f und g sein soll, dann wäre $fn - gn = (f - g)n$ durch p teilbar. Das ist aber nicht möglich, da n nicht durch p teilbar ist, aber auch nicht $f - g$, denn beide Zahlen f und g sind kleiner als p und erst recht ihre Differenz.

Das heißt aber, unter den Resten der Zahlen n, $2n$, $3n$, $4n$, ..., $(p-1)n$ treten alle überhaupt möglichen Reste auf, und das sind, wenn auch in anderer Reihenfolge $1, 2, 3, 4, ..., (p - 1)$.
Das besagt nun aber weiter, das Produkt

$$n \cdot 2n \cdot 3n \cdot ... \cdot (p - 1)n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p - 1) \cdot n^{p-1}$$

und das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1)$ haben bei Division durch p denselben Rest. Ihre Differenz

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p - 1) \cdot (n^{p-1} - 1)$$

ist also durch p teilbar. Da $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1)$ es nicht ist, muss es der zweite Faktor

$$n^{p-1} - 1$$

sein. Mit anderen Worten: n^{p-1} lässt bei der Division durch p den Rest 1. Das ist der Fermatsche Satz.

Aufgabe 76. Gib Zahlenbeispiele für den Fermatschen Satz an!

13. Wir wollen jetzt einmal annehmen, es gelte für die drei durch p nicht teilbaren Zahlen a, b und c die Fermatsche Gleichung

$$a^p + b^p = c^p$$

und es sei $q_2 = 2p + 1$ eine Primzahl. Wir wollen sie im folgenden kurz q nennen.
Dann lässt $a^{q-1} = a^{2p}$ bei Teilung durch q entweder den Rest 0, wenn es nämlich durch q teilbar ist, oder aber $+1$. Was folgt daraus für a^p?

Bei Teilung durch q bleibt entweder der Rest 0 (mit anderen Worten a^p ist durch q teilbar) oder der Rest + 1, und dann ist noch ein dritter Fall möglich, der nämlich, dass ein von $+1$ verschiedener Rest bleibt, dessen Quadrat den Rest $+1$ liefert.
Gestattet man auch negative Reste, deren Absolutwerte kleiner als p sind, dann kann man diesen Rest mit -1 annehmen.

Die gleichen drei Möglichkeiten eröffnen sich für b^p und c^p. Wir gehen jetzt die hiernach möglichen Fälle durch; das sind, da a und b gleichwertig sind, insgesamt 6.

	Es habe		dann hat
1.	a^p den Rest + 1,	b^p den Rest + 1,	c^p den Rest + 2;
2.	a^p den Rest + 1,	b^p den Rest - 1,	c^p den Rest 0;
3.	a^p den Rest + 1,	b^p den Rest 0,	c^p den Rest + 1;
4.	a^p den Rest - 1,	b^p den Rest - 1,	c^p den Rest - 2;
5.	a^p den Rest - 1,	b^p den Rest 0,	c^p den Rest - 1;
6.	a^p den Rest 0,	b^p den Rest 0,	c^p den Rest 0;

Die Fälle 1 und 4 scheiden aus, sie führen bei c^p auf unmögliche Reste. Ebenso scheidet der Fall 6 aus, weil wir a, b und c teilerfremd voraussetzten. Die Fermatsche Gleichung ist deshalb nur möglich, wenn eine der drei Zahlen durch $q = 2p + 1$ teilbar ist.

Aufgabe 77; Untersuche, ob die Überlegungen auch für die pythagoreischen Zahlentripel gelten, und ziehe daraus eine Folgerung!

Dehnen wir das Ergebnis auf die früher genannten Primzahlen der Form q_{2k} aus, so sehen wir schon nach dem, was uns unser Beispiel q_2 gelehrt hat, dass die Anzahl der Faktoren, die mögliche Lösungen der Fermatschen Gleichung haben müssen, recht beträchtlich ist, mit anderen Worten, dass nicht nur die Exponenten (im Falle des Typus I), sondern auch die Basiszahlen recht groß sein müssten.

Warum ich das hier anführe? Als Warnung für diejenigen, die etwa versuchen wollten, durch Auffindung eines Gegenbeispiels auf rein rechnerischem Wege des Probierens den Fermatschen Satz zu Fall zu bringen.

Ich muss aber auch vor einem Fehlschluss warnen, der jetzt recht nahe liegt. Es wäre sehr schön, wenn man nachweisen könnte, dass man für jede Primzahl so unendlich viele Primzahlen der Form q_{2k} angeben kann, durch die mindestens eine Zahl des Tripels teilbar ist.

Dann hätte man nämlich unendlich viele Primfaktoren zur Hand, und es müsste wenigstens eine der drei Zahlen des Tripels unendlich viele Primfaktoren haben, könnte also nicht endlich sein.

Es ist aber im Gegenteil von Dickson bewiesen werden, dass zu jeder Primzahl p nur eine endliche Anzahl von Primzahlen q_{2k} gehört, die jene uns erwünschte Eigenschaft haben.

14. Wir wollen von dem Fermatschen Problem nicht scheiden, ohne noch auf seinen geometrischen Gehalt eingegangen zu sein.

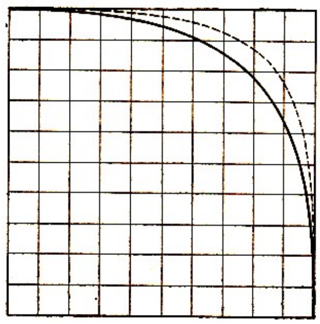
Wir knüpfen an das in Abschnitt VII, 9, Gesagte an. Wie dort können wir, wenn wir in

$$x^n + y^n = z^n$$

durch z^n dividieren, dem Problem die Fassung geben: Die Gleichung

$$X^n + Y^n = 1 \tag{1}$$

ist durch rationale Werte X und Y nicht zu befriedigen.

Bild 73


In Bild 73 ist von den Funktionen

$$Y = \sqrt[n]{1 - X^n}$$

für $n = 3$ und $n = 4$ das zwischen x- und y-Achse im ersten Quadranten liegende Stück der Kurve gezeichnet. Für $n = 2$ kommen wir auf den Einheitskreis (Abschnitt VIII, 9) ; für $n = 5$, $n = 6$ usf. schmiegt sich die Kurve in dem uns interessierenden Quadranten immer mehr dem Einheitenquadrat an - der Ausdruck wird sofort verständlich sein.

Was bedeutet nun: Die Gleichung (1) hat keine rationalen Lösungen?
Es heißt nichts anderes, als dass die Kurven (2), von dem Falle $n = 2$ abgesehen, durch keinen Punkt mit rationalen Koordinaten gehen; sie winden sich also durch die überall dichte Mannigfaltigkeit der Punkte mit rationalen Koordinaten, ohne auch nur einen einzigen auf ihrem Wege zu berühren.

Das ist in der Tat eine sehr merkwürdige Tatsache, die aus der Richtigkeit des großen Fermatschen Satzes folgen würde.

9 Literatur

Quellen, Mathematikgeschichte

1. Euklid, Die Elemente, I. Buch. Im Urtext in der Ausgabe von Heiberg, Leipzig 1883. Neu herausgegeben von Stamatis, Athen 1957.

2. Euklid, Elemente, I. Buch. Deutsche Übertragung von Cl. Thaer, Ostwalds Klassiker der Naturwissenschaften Nr. 235. Leipzig 1933.

3. Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I, 3. Aufl. Leipzig 1907.

4. Chasles, M., Geschichte der Geometrie. Übersetzung von L. A. Sohncke, Halle 1849. Wiederabdruck Würzburg 1966.

5. Neugebauer, O., Zur Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes. Nacht. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1928.

6. Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Bd. 1. Berlin 1934.

7. Proklos Diadochas, Kommentar zum 1. Buch von Euklids Elementen. Übertragen von P. L. Schönberger, Halle 1945.

8. Struik, D.I., Abriss der Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. Berlin 1963.

9. Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 4, Ebene Geometrie. 3. Aufl. Berlin 1940.

10. van der Waerden, B. L., Erwachende Wissenschaft, 2. Aufl. Basel 1967.

11. Wussing, H., Mathematik in der Antike, 2. Aufl. Leipzig 1965.

Geometrie

1. Beck, H., Koordinatengeometrie, Bd. 1, Die Ebene. Berlin 1919.

2. Beck, H ., Elementargeometrie, Bd. 1, Leipzig 1929.

3. Birkhoff, O., und R. Beatley, Basic Geometry, 3. Aufl. New York 1959.

4. Coxeter, H.S.M., Unvergängliche Geometrie, Basel 1963.

5. Gelfand/Glagolewa/Kyrillow, Die Koordinatenmethode. MSB Nr. 41. Leipzig 1968.

6. Hameister, E., Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. MSB Nr. 4. 2. Aufl. Leipzig 1967.

7. Klein, F., Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus, Bd. 2, Geometrie, 3. Aufl. Berlin 1925.

8. Roman, T. Reguläre und halbreguläre Polyeder. MSB Nr. 45. Berlin 1968.

9. Zacharias, M., Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Berlin 1930.

Zahlen, Funktionen, Fermatproblem

I. Dynkin, E.B., und W. A. Uspenski, Aufgaben aus der Zahlentheorie. MSB Nr. 20. 3. Aufl. Berlin 1966.

2. Gelfond, A.O., Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen). MSB Nr. 22. 3. Aufl. Berlin 1966.

3. Hasse, H., Proben mathematischer Forschung. Frankfurt a.M. 1955.

4. Winogradow, I.M., Einführung in die Zahlentheorie. Berlin 1955.