W. Lietzmann

Wo steckt der Fehler ?

Überarbeitung und Ergänzung: W. Oberländer, E. Ludwig
1969 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 11
Abschrift und LaTex-Satz: 2021

Vorwort zur 4. und 5. Auflage

Da Lietzmanns Bändchen "Wo steckt der Fehler" als ein wertvolles Hilfsmittel für Schüler und Lehrer betrachtet werden kann, wurden wir vom Verlag zur Bearbeitung dieses Buches angeregt. Die von uns vorgenommenen Veränderungen und Erweiterungen wurden so gestaltet, dass der Grundgedanke von Lietzmann erhalten blieb.

Dieses Buch wendet sich, wie Lietzmann sagt, an Lehrende und Lernende. Dem Lehrenden mag die Form der bisherigen Auflagen genügt haben. Dem Lernenden blieb - so sind wir überzeugt - auf manche Frage eine Antwort versagt, die er nicht selbst finden konnte.
Damit wurde unserer Meinung nach für diesen Interessentenkreis der bildende und auch der erziehende Wert dieses Bändchens etwas geschmälert. So sahen wir es als unsere Aufgabe an, das Bändchen so zu gestalten, dass es dem jungen Menschen eine Hilfe ist, mathematische Probleme richtig zu erkennen, Trugschlüsse und Fehler zu vermeiden.

Um dieses Ziel zu erreichen, fügten wir, hauptsächlich für den Abschnitt Schülerfehler und für das Kapitel Trugschlüsse, Lösungshinweise hinzu. Bei manchen Hinweisen haben wir uns kurz gefasst, manche Fehler haben wir ausführlicher besprochen, ohne dabei einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Bei anderen sahen wir - im Sinne Lietzmanns handelnd - von einer Erörterung ab, weil wir glauben, dass der Leser die Aufgabe durchschaut.
So hoffen wir, damit das richtige Maß gefunden zu haben. Einige neue uns wertvoll erscheinende Beispiele wurden von uns in die bestehende Darstellung eingearbeitet.

Die in den früheren Auflagen enthaltenen Täuschungen der Anschauung scheinen uns nicht unmittelbar mit dem Anliegen dieses Bändchens verbunden. Wir haben sie deshalb und aus Raumgründen herausgelassen.
Ebenso haben wir bei den Autorenfehlern einige Kürzungen vorgenommen. Für freundliche Unterstützung und fruchtbare Anregungen sind wir Herrn Dr. E. Hameister sehr dankbar.

Die vorliegende Auflage wurde erneut durchgesehen.

Juli 1969 W. Oberländer, E. Ludwig

Inhaltsverzeichnis

Aus der Einführung zur dritten Auflage

Im Rahmen der Mathematisch-Physikalischen Bibliothek gab W. Lietzmann im Jahre 1913 zusammen mit dem dänischen Lehrer Viggo Trier ein Bändchen heraus, das den Titel dieses Buches hatte: Wo steckt der Fehler?

Es enthielt eine Reihe von mathematischen Trugschlüssen, die W. Lietzmann beigesteuert hatte, und eine Sammlung echter Schülerfehler, die zumeist aus einer handschriftlichen Sammlung ausgewählt waren, die Trier als Übungsmaterial bei der Ausbildung von Lehrern seit Jahren verwandt hatte.

Viggo Trier starb 1916. Die Herausgabe einer zweiten Auflage, die 1917 erschien, oblag W. Lietzmann allein. Die Zahl der Trugschlüsse wurde vermehrt, bei den Schülerfehlern wurden einige, die dem Lehrstoff der deutschen Schulen ferner standen, durch andere ausgetauscht.

Inzwischen nahm der Stoff auf beiden Gebieten ständig zu, dank insbesondere der regen Mitarbeit von Lesern des Büchleins. So wurde, da der Stoff den Umfang eines Bändchens der Math. Phys. Bibl. sprengte, eine Teilung erforderlich. Die "Trugschlüsse" erhielten ein eigenes Bändchen, die "Fehlschlüsse" fügten zu den Schülerfehlern eine Sammlung von Täuschungen der Größenschätzung und der Anschauung und, zu den Jungen die Alten, zu den Lernenden die Lehrenden gesellend, von Autorenfehlern hinzu.

Die beiden Bändchen sind jetzt wieder zu einem Ganzen vereinigt, und ein dritter Teil wurde angeschlossen. Unter den Trugschlüssen befanden sich auch einige aus der Infinitesimalrechnung.
Nun sind falsche Schlüsse gerade in diesem Gebiete der mathematischen Analysis außerordentlich häufig. Das legte den Gedanken nahe, diesen Bereich noch weiter auszubauen. Freilich besteht dabei nicht die Absicht, in den dem Hochschulstudium vorbehaltenen Lehrstoff vorzustoßen, vielmehr mit den schon in den Oberklassen der allgemeinbildenden Schulen zur Sprache kommenden Begriffen der Analysis des Unendlichen sich zu begnügen.

Diese Trugschlüsse wurden als Warnzeichen formuliert; es sind Beispiele, die vor irrigen, vorschnellen, wenn auch sehr naheliegenden Schlüssen warnen wollen.

Für den Fachmathematiker handelt es sich dabei vielfach um Alltägliches. Er ist sich darüber im klaren, was den von ihm eingeführten Begriffen an Eigenschaften zukommt und was nicht, und er weiß, welche Operationen mit ihnen erlaubt sind und welche nicht.
Aber der Lehrer kann beim Lernenden diese Kenntnisse nicht ohne weiteres voraussetzen und sollte deshalb warnende Beispiele bei der Hand haben, falschen Schlüssen vorzubeugen. Dazu helfen, ist die Absicht dieses dritten Teiles, der noch sehr ausbaufähig ist.

Manch ein schönes Warnbeispiel blüht im verborgenen oder wird nur bei diesem oder jenem Dozenten in der Vorlesung erwähnt.
Fehler und Trugschlüsse haben immer schon die Freunde der Unterhaltungsmathematik beschäftigt; sie kommen in vielen dieser amüsanten Abart einer strengen Wissenschaft gewidmeten Büchern, dazu in manchen Zeitschriften und neuerdings auch im Rundfunk zu Wort.
Es macht eben Spaß, andere aufs Glatteis zu führen, und manch einer freut sich auch an einem Fehler, den ein anderer gemacht hat.

Die ernsthafte Bedeutung für die Erziehung zum mathematischen Denken scheint mit aber noch keineswegs recht erfasst und genutzt zu sein.

Nicht nur der Lehrer hat es mit den Fehlern zu tun, die seine Schüler machen, der Schüler selbst lernt an einem aufgeklärten Fehler oft mehr als an einer nach vorgeschriebener Weise recht gelösten Aufgabe. Ich erinnerte in der Vorrede zur dritten Auflage des einen Bändchens an das Goethewort:

"Ein junger Mensch, der auf eigenen Wegen irre geht, ist mir lieber als einer, der auf fremden Wegen recht wandelt."

So ist für Unterricht und Erziehung schon eine bloße, Sammlung von Fehlerbeispielen nützlich. Wichtiger aber ist, dass im Mathematikunterricht hiervon wohlüberlegter Gebrauch gemacht wird.

Was hier für die Schule gewünscht wird, gilt auch für die Lehre der mathematischen Wissenschaft in Vorlesung, Übung und Buchdarstellung. Es ist doch merkwürdig, dass erst die "Paradoxien des Unendlichen" von Bolzano (1781-1848), die 1851 veröffentlicht wurden, auf ganz triviale Trugschlüsse hinwiesen.

Es sollte auch in der hohen Wissenschaft nicht genügen zu zeigen, was richtig ist; man sollte auch sagen, was falsch ist, dann nämlich, wenn Irrtümer naheliegen; und man sollte es nicht damit genug sein lassen zu sagen, dass etwas falsch ist, sondern an warnenden Beispielen zeigen, warum es falsch ist.

Der Physiker Wilhelm Weber (1804-1894) wollte einfach nicht glauben, dass es stetige Funktionen gibt, die nicht differenzierbar sind. Eine klare Auseinandersetzung z.B. mit der nach Karl Weierstraß (1815-1897) benannten Funktion, wie sie Felix Klein (1849-1925) in seiner "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" gegeben hat, hätte ihn wohl doch überzeugen können.

Die Klärung des Begriffes "Differential" gelang erst, als man sich durch ein Gestrüpp von Irrtümern hindurchgewunden hatte - R. Rothe (1873-1942) hat sich damit ein bleibendes Verdienst erworben.

Eine Bereinigung des Kapitels der Unendlichen Reihen erfolgte am gründlichsten, als Edmund Landau (1877-1938) schonungslos die Fehler der Darstellungen in vielen Mathematikbüchern aufdeckte.
Man hat einmal davon gesprochen, dass die Mathematik von den ersten Rechenstunden an bis zu den höchsten Höhen der Forschung ein "Wetzstein" des Geistes sei. Das gilt zu Recht auch von der Aufdeckung der mathematischen Fehler und Trugschlüsse, um die es in dieser Sammlung geht.

Dabei ist es gleichgültig, ob die Beschäftigung mit ihr Unterhaltung und Spiel ist oder ob sie ernsthafter Belehrung und dem Eindringen in eine Wissenschaft gilt, der es um die Wahrheit geht.

1 Täuschungen und Fehlschlüsse

1.1 Täuschungen bei der Größenschätzung

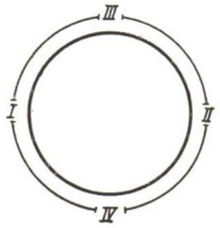
In diesem Abschnitt wird eine Anzahl von Täuschungen vereinigt, die darin begründet sind, dass dem auf die vorgelegte Frage Antwortenden die Vertrautheit mit den in Betracht kommenden Größenverhältnissen abgeht. Eine bessere Schulung in der Größenerfassung, als sie gemeinhin vorhanden ist, würde diese Täuschungen unmöglich machen.

1. Einen Strick denke man sich um den Erdäquator gelegt; er sei etwas zu lang dazu, es mögen etwa 10 m übrigbleiben. Man denke sich trotzdem die Enden des Strickes aneinandergelegt, so dass der Strick rings um die Erde herum ein wenig gelockert wird. Der Einfachheit halber werde angenommen, dass er überall um ein geringes, aber stets gleich großes Stück von der Erdoberfläche abstehe.
Wie groß ist dieser Abstand? Könnte wohl eine Fliege zwischen der Erde und dem gelockerten Strick durchkriechen?

Die Antwort lautet, dass allerdings eine Fliege hindurchkriechen, ja, dass ein nicht allzu großer Junge unter dem Strick weggehen könnte, ohne sich zu bücken. Mit der anschaulichen Erfassung dieses Ergebnisses ist es nun wirklich eine heikle Sache.
Manch ein Mathematiker versicherte, es sei ihm unmöglich, sich das vorzustellen; nicht wenige Nichtmathematiker behaupteten, es sei überhaupt nicht wahr, die Rechnung müsse falsch sein.

Man kann manchmal durch eine leichte Abänderung der Fassung der Aufgabe das Übel beseitigen. Im Grunde die gleiche Aufgabe wie die Strickgeschichte ist die folgende: Um wieviel ist der Weg, den der Kopf eins Wanderers um die Erde zurücklegt, länger als der, den die Füße zu machen haben. Da hat man sofort "das Gefühl", dass es nicht so gar viel sein wird.

Wem das noch nicht genügt, der mache noch einen anderen Versuch: Statt an einer Stelle des Kreisumfangs 10 m einzusetzen, setzen wir an vier Stellen je 2,5 m ein (Abb. 1).



Macht man das bei I und II, so wird der Kreis um je 1,25 m nach oben und unten verschoben. Tut man das gleiche bei III und IV, so wird der Kreis nach rechts und links um je 1,25 m verschoben.
Die neue Linie, die freilich kein Kreis mehr ist, steht dann überall 1,25 m von der alten ab.

Übrigens: Jeder weiß, dass ein Hemdkragen, der auch nur um eine Nummer zu weit ist, schon beträchtlich weit vom Halse absteht.
Es ist eben bei dem Problem ganz gleichgültig, wie groß der Kreis ist, von dem man ausgeht, ob es der Erdäquator ist oder etwa ein Fingerring.

2. Unter einer arithmetischen Folge versteht man eine Folge von Zahlen, bei denen die Differenz zweier Nachbarzahlen immer konstant ist. Für die Summe s einer n-gliedrigen arithmetischen Reihe

$$a + a + d + a + 2d + ... + a + (n-1)d$$

gilt der Ausdruck

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

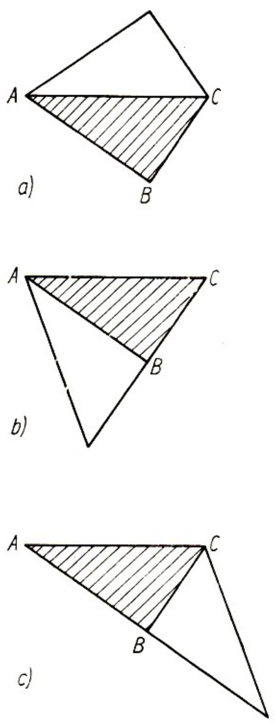
Als Beispiel dafür, wie sehr man sich über das Anwachsen dieser Summe mit zunehmender Gliederzahl täuschen kann, diene statt vieler Beispiele eine einzige Frage, die zunächst "nach dem Zahlengefühl", dann nach Rechnung zu beantworten ist:

A macht mit B eine Wette. A will nach einem 6000 Schritte entfernten Orte hin- und zurückgehen, bevor B 200 Apfel in einen Korb gesammelt hat. Allerdings sollen die Äpfel in einer Reihe liegen, jeder von dem andern einen Schritt entfernt, und sollen einzeln herangeholt werden zu dem Korb, der bei dem ersten Apfel stehenbleibt.
Die beiden Wettenden sollen gleich schnell gehen. Wer gewinnt?

3. Noch stärker ist das Anwachsen der Summe bei zunehmender Gliedzahl bei den geometrischen Reihen, bei denen also der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist. Ich erinnere da nur an das sehr bekannte Beispiel von dem Erfinder des Schachspieles, das auf einen Bericht des arabischen Geschichtsschreibers Ja'qubi zurückzugehen scheint. Jener Mann erbat sich vom König als Belohnung die Summe von Weizenkörnern, die man auf folgende Weise erhält:

Auf das erste Feld des Schachspiels wird ein Korn gelegt, auf das zweite kommen zwei Körner, auf das dritte vier usf., immer auf jedes Feld doppelt soviel wie auf das vorhergehende. Wer die Aufgabe durchrechnet und sich von der Zahl der errechneten Körner eine anschauliche Vorstellung zu verschaffen sucht, der wird genauso wie jener König überrascht sein, dass es mit der großen Bescheidenheit des Erfinders wirklich nicht weit her war.

4. Wir legen zwei gleich große Münzen so auf den Tisch, dass sie sich berühren. Die eine Münze bleibt liegen, die andere wird ohne Gleiten am Rande der festen Münze bis in die Anfangsstellung einmal herumgedreht. Da die Umfänge beider Münzen gleich groß sind, ist die Frage, wie oft sich dabei die bewegliche Münze um ihren Mittelpunkt dreht, leicht beantwortet.



Wir wollen nun aber den entsprechenden Fall auch bei zwei Dreiecken ausführen. Die Ausgangsstellung sei durch die Abb. 2a gegeben. Die Drehung beschränkt sich hier auf die Eckpunkte A, B und C des festen Dreiecks.
Wir bringen das bewegliche Dreieck zunächst durch Drehung um A in die Lage b, dann durch Drehung um B in die Lage c, schließlich durch Drehung um C wieder in die Lage a. Dabei beobachten wir; dass das zweite Dreieck sich tatsächlich zweimal um sich selbst gedreht hat. In der Tat erfolgt die Drehung um A um den Winkel $4R - 2\alpha$, um B um den Winkel $4R - 2\beta$, um C um den Winkel $4R - 2\gamma$, wenn α, β und γ die Dreieckswinkel sind. Die gesamte Drehung beträgt also

$$4R - 2\alpha + 4R - 2\beta + 4R - 2\gamma = 12R - 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

oder, da

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

ist, $8R$.

Wenn dir das Ergebnis noch immer erstaunlich sein sollte, dann führe die Überlegung noch

einmal in ganz gleicher Weise beim Quadrat durch.
Wir sehen jetzt ein, warum auch bei den Münzen die bewegliche zwei volle Umdrehungen gemacht hat, Und nun, Hand aufs Herz, hattest du nicht eine Umdrehung er- wartet?

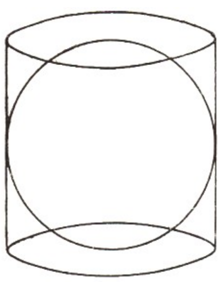
1.2 Autorenfehler

Bevor wir uns dem nächsten, größeren Abschnitt dieses Bändchens, den Schülerfehlern, zuwenden, wollen wir hier eine Reihe von Autorenfehlern zusammenstellen, gleichsam als Trost für die Schüler, dass auch andere Leute Fehler begehen, ja, dass das Fehlermachen häufiger ist, als man denkt.
Wichtiger aber ist es, dass aufgedeckte Fehler dazu dienen sollen, den Leser zu kritischer Aufnahme der Lektüre zu erziehen. Dann sind die Fehler anderer nicht nur, wie es manchmal geschieht, ein Gegenstand des Spottes, vielleicht der Schadenfreude, sondern auch lehrreich.

1. Beim Literaten, beim Romanschriftsteller und beim lyrischen Dichter ist die Mathematik in der Regel nicht gut angeschrieben [10] - wenngleich es auch Ausnahmen von der Regel gibt.
In einem Roman, der die Tragödie des für die Mathematik schlecht veranlagten Schülers zum Gegenstand hat, erzählt der Verfasser, wie vier Adern auf dem Arm des Jungen ein "Parallelepipedon" bilden; er macht seinen Lesern weiß, dass ein Mathematiker bei seinem Studium übergeschnappt ist, als er die Vegasche Logarithmentafel auswendig lernte.

Immermann besuchte 1837 Goethes Arbeitszimmer und sah dort "ein Triangel von Pappe, welchen er selbst verfertigt hat, und ... Goethe wollte sich das Verhältnis der Seelenkräfte verdeutlichen. Sinnlichkeit erschien ihm als die Grundlage alles Übrigen; er wies ihr daher die Grundfläche des Dreiecks an und färbte dieselbe grün. Phantasie erhielt eine dunkelrote, Vernunft eine gelbe, Verstand eine blaue Seitenfläche eingeräumt."

Ein Triangel ist ein Dreieck. Wo sind da die Seitenflächen? Wo sind da die vier Farben unterzubringen? Ich vermute, der Triangel war ein Tetraeder!



Mit den mathematischen Begriffen nehmen es also die Dichter nicht so genau. In einem Roman um Galileo Galilei wird gesagt, dass auf dem Grabmal von Archimedes "eine Pyramide, eine Halbkugel und ein Zylinder" abgebildet seien.
Nun berichtet Cicero in den Tusculanae disputationes'liber V, 25 nur "in summo sepulchro sphaeram esse positam cum cylindro".

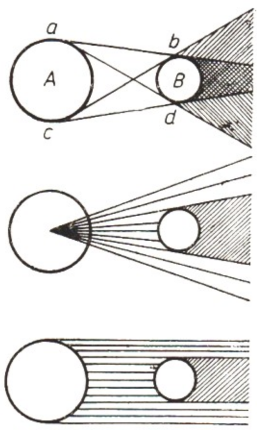
Zuoberst auf dem Grabmal ist eine Kugel mit einem Zylinder (als besonderes Erinnerungsmal) aufgestellt (Abb. 3).

Wenn aber ein dritter Körper auf dem Grabmal angegeben wäre, dann hätte es ein Kegel und keinesfalls eine Pyramide sein müssen.
Plutarch gibt eine Beschreibung, nach der die beiden Körper als Relief das Grabmal zierten.

2. Bedenklicher ist aber die Sache, wenn der Dichter als Kritiker der Wissenschaft auftritt. Ich greife als Beispiel Strindberg heraus, dem mehrfach unfreiwillige Fehlschlüsse unterlaufen sind.

"A stellt die Sonne vor und B die Erde, die bei der Mondfinsternis den Mond im Kernschatten verbirgt (Abb. 4).
Aber wie der Halbschatten entsteht und woher die Linien ad und ob kommen, das begreife ich nicht. Eine Licht aussendende Kugel müsste doch die Strahlen so aussenden, als ausgezogene

Radien; da entsteht kein Halbschatten.
Oder die Strahlen laufen geradlinig parallel, wie es ja in der Physik angegeben wird. Dabei bildet sich kein Halbschatten.



Die Abbildung 4 ist unbegreiflich und widerspricht den Lehren der Physik; die darunter stehenden Figuren sind begreiflich, stehen aber nicht in der Physik."

Als das Fermatsche Problem durch alle Zeitungen ging, schrieb eine Tageszeitung

$$x^n + y^n = z^n(n+2)$$

lasse sich nicht in ganzen Zahlen lösen! Ein Leser setzte sich auch tatsächlich hin, zeigte, dass es schon für $n = 1$ beliebig viele Lösungen gab, und - bewarb sich um den Preis. [11]

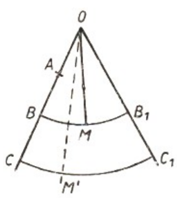
Kurz vor einer Sonnenfinsternis schrieb jemand an zahlreiche Zeitungen, er sei empört, dass man scheinbar auf Verabredung die Leute irrezuführen versuche. Er jedenfalls werde auf den Schwindel nicht hineinfallen.

Er habe im Kalender nachgesehen. An dem Tage, für den die Sonnenfinsternis angekündigt sei, sei ausgerechnet Neumond. Und wenn der Mond gar nicht da sei, könne er doch unmöglich die Sonne verdecken.

3. All denen, die sich mit großem Eifer und hingehender Liebe mit mathematischen Fragen beschäftigen wollen, sei gesagt, dass ihre Mühe vergeudet wäre, würden die gesteckten Ziele nicht den erworbenen Kenntnissen entsprechen.
Man muss nicht immer gleich an die Bezwingung der größten Probleme geben, die zumeist gar nicht voll verstanden werden, gerade weil sie so einfach klingen.

Zu den Winkeldreiteilern, Kreisquadratoren und Kubisten (will sagen Würfelverdopplern) gesellen sich seit einigen Jahrzehnten die Fermatbeweiser. Eine systematische Untersuchung der hier zutage getretenen Fehlergruppen wäre eine gewiss lehrreiche Arbeit. Ich kann mir hier nur drei Proben gestatten:

Die erste ist mir von einem Leser der ersten Auflage dieser Schrift zur Verfügung gestellt worden, dem sie zur Begutachtung überreicht worden war, die zweite stammt aus einem Fermatbeweis, der mir vom Verfasser selbst übersandt wurde. Die dritte ist die "Lösung" eines bekannten Primzahlproblems, die mir gleichfalls brieflich mitgeteilt wurde.



Der Winkel (Abb. 5) mit dem Scheitel O soll in drei gleiche Teile geteilt werden.
Eine beliebige Strecke trägt man dreimal hintereinander auf dem einen Schenkel vom Scheitelpunkt aus ab: $OA = AB = BC$. Mit OB schlägt man einen Kreisbogen, der den andern Schenkel in B_1 trifft.

Man halbiert den Bogen BB_1 und findet M. Mit OC schlägt man gleichfalls um O einen Kreisbogen, der den andern Schenkel in C_1 trifft. Jetzt trägt man den Bogen BM auf dem Bogen CC_1 von C bis M' ab. Dann ist $M'OC = \frac{1}{3}C_1OC$.

Hinweis: Es wird nicht der Bogen BM auf dem Bogen CC_1 abgetragen, sondern die zum Bogen BM gehörende Sehne. Da nur in gleichen Kreisen zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, sind die Bogen BM und CM' nicht gleich.

Und der Fermatbeweiser schreibt so:
"Was geht nun aus dem Fermatschen Satz hervor? Wollen wir uns die 3. Potenz (den Kubus) einer Zahl versinnlicht denken, so haben wir uns einen Würfel vorzustellen. Nach dem Fermatschen Satz ist es nun ausgeschlossen (Weil $a^3 - b^3 = c^3$, a, b und c ganze Zahlen, unmöglich ist), dass man aus dem Restkörper, den man nun erhält, wenn man von dem Inhalt eines größeren Würfels den Inhalt eines kleineren Würfels abzieht, wieder einen mathematisch genauen Würfel erhält.

Oder: würden wir zwei Würfel aus leicht schmelzbarem Stoffe schmelzen (dabei vorausgesetzt, dass nichts von dem Stoffe verlorengeht), so würde sich aus der nun erhaltenen flüssigen Gesamtmasse ein regelmäßiger Würfel nicht herstellen lassen.
Sollte es ein mathematisch genauer Würfel werden, so müsste der Masse noch Stoff hinzugefügt oder ein Teil unverwendet gelassen werden, auf keinen Fall würde sich aus der Gesamtmasse ein mathematisch genauer Würfel herstellen lassen."

"In Ihrem Büchlein 'Riesen und Zwerge im Zahlenreich' teilen Sie im Abschnitt 7 (Von großen Primzahlen) mit, dass das Problem, ob die Paare von Primzahlen, die sich nur um 2 unterscheiden, einmal ganz aufhören, ob es also ein letztes, größtes gäbe, oder ob ihre Anzahl unendlich sei, bis heute noch nicht gelöst sei.
Nun scheint mir die Antwort auf diese Frage aber außerordentlich einfach zu sein. Ich knüpfe unmittelbar an den Euklidischen Beweis für die unendlich große Anzahl der Primzahlen an,

Nehmen wir an, es gäbe eine größte Primzahl p. Euklid zeigt, dass dann $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p + 1$ eine weitere Primzahl ist, die größer als p ist.
Auf dieselbe Weise ist aber auch zu zeigen, dass die Zahl $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p - 1$ eine Primzahl ist. Wir haben somit ein Primzahlenpaar, dessen Zahlen sich nur um 2 unterscheiden.
Wenn nun das ursprünglich als größtes Primzahlenpaar angesehene Paar die Zahlen r und $r+2$ waren, so brauche ich jetzt nur $p = r + 2$ zu setzen, und die oben definierten Zahlen n und m bilden ein weiteres Primzahlenpaar, dessen Zahlen größer als die ursprünglich angenommenen sind."

Hinweis: Der zitierte Beweis von Euklid (IX, 20) verläuft in Anlehnung an die Übersetzung von Thaer wie folgt:
Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen. Vorgelegte Primzahlen: a, b, c.

Die kleinste von a, b, c gemessene (geteilte) Zahl ist $a \cdot b \cdot c$.
Vorgegeben: $a \cdot b \cdot c + 1$

Fallunterscheidung :
1. Ist $a \cdot b \cdot c + 1$ Primzahl, dann hat man eine weitere Primzahl gefunden.
2. $a \cdot b \cdot c + 1$ ist keine Primzahl.
Damit muss $a \cdot b \cdot c + 1$ von einer Primzahl gemessen (geteilt) werden, z.B. von der Primzahl g.
Behauptung: $a \neq g$, $b \neq g$, $c \neq g$

Beweis: Wir nehmen an, g würde mit einer der Primzahlen a, b, c zusammenfallen, dann würde g $a \cdot b \cdot c$ teilen.
g teilt aber auch $a \cdot b \cdot c + 1$. Es müsste also g die Einheit teilen. Daraus und aus der Tatsache, dass g Primzahl ist, erwächst ein Widerspruch. Also fällt g nicht mit a, b oder c zusammen.

Es gibt demnach zu den vorgegebenen Primzahlen a, b, c auf jeden Fall eine weitere Primzahl, entweder $a \cdot b \cdot c + 1$ oder g. (Quelle: Euklid, Elemente, Buch VII-IX, Ostwalds Klassiker Nr. 240) [17]

4. In einem Lehrbuch steht die Aufgabe: "Den Durchmesser der Hyperbel $5x^2 - 6y^2 = 30$ anzugeben, der die Sehne $y = 2x + 4$ halbiert."

Damit man lerne, ein wenig zurückhaltend in der schnellen Verurteilung solcher "Autorenfehler" zu sein, bringe ich im folgenden einen Abschnitt aus Eulers Algebra (es ist Nr. 33 vom 1. Abschnitt des 1. Teils), einem Buche, das eine neuere Logik gelegentlich als eine Sammelstelle logischer Fehler bezeichnet hat.
Und doch war Euler (1707-1783) ein wahrer Mathematiker!

"Hierbey ist zunächst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde ab; ob aber das Zeichen + oder - dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß. So viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen - seyn. Denn $-a$ mit $+b$ mult. gibt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muss das Gegentheil herauskommen welches nehmlich heißt, $+ab$."

1935 erschien ein Buch M. Lecat, Erreurs de Mathématiciens des origines à nos jours, Brüssel, Castaigne. Es enthält etwa 500 "Irrtümer" von etwa 330 Autoren der reinen und angewandten Mathematik, wobei auf die vielen Fehler, die bei den Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises zu lösen, den großen Fermatschen Lehrsatz zu beweisen, bis auf einige Ausnahmen nicht eingegangen ist.

Unter den Verfassern, die mit ihren Fehlschlüssen angeführt werden, finden sich fast alle großen Mathematiker: Abel, d'Alembert, Jakob und Johann Bernoulli, Cauchy, Descartes, Euler, Fermat, Galilei, Gauß, Lagrange, Laplace, Legendre, Leibniz, Monge, Newton, Poincaré, Steiner, um nur die bekanntesten zu nennen.

Zweierlei ist besonders zu beachten: Was früher als streng bewiesen galt, erscheint zuweilen einer späteren Zeit, die mit schärferen Beweismitteln an die Probleme herangeht, unvollständig dargelegt.
Das gilt z.B. von der Infinitesimalrechnung. Als ein Historiker einst einen Vortrag über Newton hielt, meinte ein als Kritiker bekannter Mathematiker: "Ach, das ist der Mann, der das fand, aus dem später einmal die Differentialrechnung wurde."

Und weiter: In statu nascendi eines neuen Wissenszweiges kommt man erst mit der Zeit von einer lockeren Begründung zu einer streng systematischen Beweisführung. Ich habe das als Student erlebt, als einer unserer größten Mathematiker, David Hilbert (1862-1943), die Lehre von den Integralgleichungen schuf.
Damals schrieb der Assistent Andrä, der das Kolleg ausarbeitete, an den Rand der Maschinenschrift mit dünnem Bleistift: "Von Seite ... bis ... kann eine Garantie für die Richtigkeit nicht übernommen werden", und der Mathematische Verein erfreute auf der Weihnachtsfeier den Professor mit dem Verslein:

Der eine bleibt erst unverständlich,
Der Andrä macht es klar dann endlich.

Erst jüngst schrieb ein bekannter Mathematiker im Vorwort eines Buches: "Beim Aufbau der klassischen Topologie hat man vom menschlichen Vorrecht des Irrens seit Poincaré oft

Gebrauch gemacht. Ich habe diesen großen Vorbildern in meiner 'kleinen' Topologie eifrig nachgestrebt."

1.3 Schülerfehler

Vorbemerkungen

Die im folgenden mitgeteilten Beispiele sind mit ganz wenigen Ausnahmen "wirkliche" , d.h., sie sind in der vorliegenden Form von Schülern tatsächlich abgeliefert worden. Dabei wurde in den folgenden Abschnitten darauf verzichtet, ganz unsinnige Dinge, die in Schülerheften nicht gerade selten sind, wiederzugeben. Trotzdem aber davon ein paar Beispiele, die ans Komische grenzen.

1. Aus der schriftlichen Prüfungsarbeit einer jungen Dame, die die Reife eines Lyzeums als Auswärtige erwerben wollte:
"Der Pythagoras lautet: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten."
Behauptung: Ich behaupte $a^2 = b^2 + c^2$.

"Beweis: Wenn der Inhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich 2 ist und der Inhalt der beiden Quadrate über den beiden Katheten je 1 beträgt, so komme ich zu dem Resultate $2 = 1 + 1$.
$1 + 1$ ist aber 2. Also $2 = 2$. Setze ich statt dieser Zahlen a, b und c, so erhalte ich $a^2 = b^2+c^2$, was zu beweisen war."

2. Für die Aufgabe: Die Gleichung eines Kreises durch den Punkt $P(4, 2)$ und mit $r = \sqrt{13}$ ist zu bestimmen, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt - fand ein Schüler folgenden "Lösungsweg".
Das Ergebnis ist sogar richtig!

"In die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

setze ich die bekannten Werte ein $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$. Ich nehme zuerst y und dann x aus

$$y^2 - 4y + 7 = 0 \quad , \quad y = 2 \pm \sqrt{4 - 7}$$

y wird Null, da die Wurzel nicht ausziehbar ist.

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \quad , \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 1, \quad (y_1 = 0, y_2 = 0)$$

Es gibt demnach zwei Lösungen:[1]

$$(x - 7)^2 + (y - 0)^2 = 13 \quad \text{und} \quad (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 13$$

3. Es ist bei unseren Aufgaben ganz davon abgesehen worden, sie durch eine geschickte Einkleidung besonders schwierig zu machen, wohl geradezu auf eine falsche Lösung hinzuweisen; es sind banale Schulaufgaben.
Nur ein Beispiel, wie man durch eigenartige Fassung aus einer trivialen Aufgabe ein scheinbar schwieriges Problem machen kann.

[1] Der Schüler verwechselt wiederholt die Koordinaten des Kurvenpunktes mit den Koordinaten des Mittelpunktes.

Ein Punkt einer Hyperbel wird mit den Brennpunkten verbunden. Auf den Brennstrahlen werden die Mittelsenkrechten errichtet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der beiden Mittelsenkrechten, wenn der Punkt auf der Hyperbel wandert?

Man wird analytisch oder synthetisch an die Lösung gehen, entwirft wohl auch eine schöne, aber zumeist ungenaue Figur und hat sich täuschen lassen. Wo der Punkt auch wandert, immer schneiden sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkte, immer also liegt der Schnittpunkt der beiden auf der Mittelsenkrechten der beiden Brennpunkte.

Missverständnisse und Nichtverständnisse der gelernten Sätze nebst Versündigungen gegen die Logik sind die Fehler, die am häufigsten auftreten. Bisweilen ist alles, was niedergeschrieben ist, richtig, aber etwas mehr oder weniger Bedeutendes fehlt und macht dadurch die Lösung unbefriedigend; dann und wann rührt das Verkehrte von unrichtiger Zeichnung her.
Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen einzelne kuriose Fälle, wo das Ergebnis richtig ist, obwohl schwere Fehler begangen sind.

Ein Fehler ist der Mehrzahl dieser wortgetreu wiedergegebenen Schülerdarstellungen gemeinsam. Sie scheuen den Text und beschränken sich auf das Formelgerippe oft auch in Fällen, wo Erläuterungen unumgänglich gewesen wären. Welche Schwierigkeiten daraus für das Verständnis entstehen, zeigen nicht wenige der nachfolgenden Beispiele.

Gleichungen

1. Die Gleichung $\dfrac{a-x}{1-ax} = \dfrac{1-bx}{b-x}$ ist zu lösen.
Lösung:

$$\begin{aligned}
(a-x)(b-x) &= (1-ax)(1-bx)\\
ab-ax-bx-x^2 &= 1-bx-ax+abx^2\\
x^2 &= 1+abx^2-ab\\
x^2-1 &= ab(x^2-1)\\
1 &= ab
\end{aligned}$$

Hinweis: Es wurde durch (x^2-1) dividiert. Selbst wenn $x^2-1 \neq 0$ wäre, bliebe die Verringerung der Anzahl von möglichen Lösungen (Graderniedrigung). Richtige Lösung: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

2. Vorgelegt ist die Gleichung $(x+1)^2 - (x+2)(x+3) = (x+4)(x+5) - (x+6)^2$
Lösung:

$$\begin{aligned}
x^2+2y+1-x^2-5x-6 &= x^2+9x+20-x^2-12x-36\\
-3x-5 &= -3x-16\\
5 &= 16
\end{aligned}$$

Hinweis: Es gibt keinen endlichen Wert von x, der die Gleichung erfüllt.

3. Löse die Gleichung $\dfrac{6}{x-3} - \dfrac{9}{x-2} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{4}{x-1}$.
Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{6(x-2)-9(x-3)}{(x-2)(x-3)} &= \frac{(x-1)-4(x-4)}{(x-4)(x-1)}\\
\frac{6x-12-9x+27}{x^2-5x+6} &= \frac{x-1-4x+16}{x^2-5x+4}\\
\frac{15-3x}{x^2-5x+6} &= \frac{15-3x}{x^2-5x+4}\\
\text{also}\quad 6 &= 4
\end{aligned}$$

Hinweis: Siehe Aufgabe Nr. 1. Richtige Lösung ist $x = 5$.

4. Man soll die Gleichung $\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1} = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}$ lösen.
Lösung:

$$\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{6x}+\sqrt{x}+4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}+4 = \sqrt{x^2+x}+2\sqrt{6x}+\sqrt{x}-4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}-4$$
$$8\sqrt{x+1}+8 = 4\sqrt{6x}$$
$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{6x}-2$$
$$4x+4 = 6x+4-4\sqrt{6x}$$
$$2\sqrt{6x} = x$$
$$24x = x^2$$
$$x = 24$$

Hinweis: Aus $24x - x^2 = 0$ folgt $x_1 = 0$ und $x_2 = 24$.
Da es sich um eine Wurzelgleichung handelt, müssen diese Werte durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung überprüft werden. Durch das Quadrieren kann eine zweite Lösung entstehen, die die Ausgangsgleichung nicht erfüllt. Dabei wird nur $x = 24$ als Lösung bestätigt.

5. Löse die Gleichung $\sqrt{x-4} - \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-1} = 0$.
Lösung:

$$x-4-3-\sqrt{(x-1)(x-4)} = 0$$
$$x-7 = \sqrt{(x-1)(x-4)}$$
$$x^2-14x+49 = x^2-5x+4$$
$$9x = 45$$
$$x = 5$$

Hinweis: $x = 5$ erfüllt die Ausgangsgleichung nicht. Es lässt sich nachweisen, dass es für diese Aufgabe keine reelle Lösung gibt.

6. Es ist die Gleichung zu bilden, deren Wurzeln alle beide um $\frac{1}{2}$ größer als die Wurzeln der Gleichung $7x^2 - 6x + 1 = 0$ sind.

Lösung: α und β seien die Wurzeln der gegebenen Gleichung; die der neuen Gleichung sind dann $\alpha + \frac{1}{2}$ und $\beta + \frac{1}{2}$, und die Gleichung lautet so:

$$y^2 - (\alpha + \frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2})y + (\alpha + \frac{1}{2})(\beta + \frac{1}{2}) = 0$$

Nun ist aber

$$\alpha + \beta = 6 \qquad , \qquad \alpha\beta = 1$$

(Sätze über die Summe und das Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung), also erhält man

$$y^2 - 7y + 4\frac{1}{4} = 0 \qquad \text{oder} \qquad 4y^2 - 28y + 17 = 0$$

Hinweis: Die Ausdrücke $\alpha + \beta = 6$ und $\alpha \cdot \beta = 1$ sind falsch. Der Wurzelsatz des Vieta bezieht sich auf die Normalform.

7. $x + x\sqrt{2} = 1$, man finde x.

Lösung:

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= 1 - x \\ 2x^2 &= 1 + x^2 - 2x \\ x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ x &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Hinweis: Die vorliegende Gleichung ist linear:

$$x(1+\sqrt{2}) = 1 \qquad , \qquad x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Macht man hier den Nenner rational, dann erhält man $x = -1 + \sqrt{2}$. $x = -1 - \sqrt{2}$ ist keine Lösung.

8. $x + 2\sqrt{x} = 3$; man finde x.
Lösung:

$$\sqrt{x} = -1 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases} \qquad , \qquad x = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

Hinweis: $x = 9$ ist keine Lösung, wie man beim Einsetzen sieht.

9. Die folgenden zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten wurden vorgelegt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \tag{1}$$

$$x - y = 4 \tag{2}$$

Lösung: Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2xy \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 0 \\ (x-y)^2 &= 0 \\ x - y = 0 &\wedge x - y = 4 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

Hinweis: Die vorgelegten Gleichungen widersprechen einander. Es gibt keine gemeinsamen Lösungen. Der oben abgedruckte Lösungsweg ist unvollständig, da aus $(x-y)^2 = 0$ auch $-(x-y) = 0$ folgt.

10. Aus den Gleichungen

$$(a-2)x + (3a-1)y = 2a \qquad , \qquad 4x - 2(a-1)y = -a$$

sind x und y zu finden. Besonders sind die Fälle $a = 0$ und $a = -3$ zu untersuchen.

Lösung : Die obere Gleichung wird mit 4, die untere mit $a - 2$ multipliziert. Dann wird durch Subtraktion erhalten:

$$y(2a^2 + 6a) = a^2 + 6a \qquad \text{also} \qquad y = \frac{a(a+6)}{2a(a+3)} = \frac{a+6}{2(a+3)}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die obere Gleichung:

$$x = \frac{a-3}{2(a+3)}$$

Wenn $a = 0$, ist $x = -\frac{1}{2}, y = 1$.
Wenn $a = -3$, ist $x = -\infty, y = \infty$.

Hinweis: Für $a = 0$ sind die beiden angeführten Gleichungen linear abhängig, d.h., es existieren unendlich viele Lösungen. Für $a = -3$ besteht zwischen den beiden Gleichungen ein Widerspruch, d.h., es existiert keine Lösung.

11. Löse die Gleichungen

$$x^2 + xy = 14 \tag{1}$$
$$x + y = 7 \tag{2}$$

Lösung: Die Division ergibt $x = 2$, mithin $y = 5$. Führt man zur Probe $y = 5$ in (1) ein, dann folgt

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \quad , \quad x = -\frac{5}{2} \pm \frac{9}{2} \quad , \quad x_1 = 2, x_2 = -7$$

Aus (2) erhält man den Wert $y_2 = +14$.

Hinweis: Eine Probe bestätigt die errechneten Werte, wenn durch das Einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleichungen diese zur Identität geführt werden.
Der vom Schüler angegebene Weg hat nicht den Charakter einer Probe, da nur gezeigt wird, dass in Gleichung (1) dem Wert $y = 5$ die Werte $x_1 = 2$ und $x_2 = -7$ und in Gleichung (2) dem Wert $x = -7$ der Wert $y = 14$ zugeordnet sind.

12. Aus den Gleichungen

$$a^2x^2 = b^2y^2 \tag{1}$$
$$2ax^2 = b^2cy \tag{2}$$

sind x und y zu finden.
Lösung: Durch Division erhält man

$$\frac{a}{2} = \frac{y}{c} \quad , \quad y = \frac{ac}{2}$$

Durch Einsetzen in (2):

$$2ax^2 = b^2c \cdot \frac{ac}{2} \quad , \quad x^2 = \frac{b^2c^2}{4} \quad , \quad x = \pm\frac{bc}{2}$$

Durch Einsetzen in (1):

$$a^2 \cdot \frac{b^2c^2}{4} = b^2y^2 \quad , \quad y^2 = \frac{a^2c^2}{4} \quad , \quad y = \pm\frac{ac}{2}$$

Hinweis: Siehe vorhergehende Erläuterung.

13. Die Gleichungen

$$x^2 - y^2 = 9 \quad (1) \quad , \quad 2x + 3y = 22 \quad (2)$$

sind zu lösen.
Lösung: Aus (2): $x = \frac{22-3y}{2}$.
in (1) eingesetzt: $5y^2 - 132y + 448 = 0$ ergibt $y = 4$ und $\frac{112}{5}$.

Einsetzung in (1): $x = \pm 5$ und $x = \pm\frac{113}{5}$.
Hinweis: Der Fehler wird vermieden, wenn die aus der Gleichung

$$y^2 - \frac{132}{5}y + \frac{448}{5} = 0$$

errechneten y-Werte in die lineare Gleichung $x = \frac{22-3y}{2}$ oder $2x + 3y = 22$ eingesetzt werden. Die Lösungen sind:

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 4, \qquad x_2 = -\frac{113}{5}, \quad y_2 = \frac{112}{5}$$

14. Das folgende Gleichungssystem wurde vorgelegt:

$$\frac{x}{y} = \frac{y-26}{x-26} \quad (1) \qquad , \qquad x \cdot y = 25 \quad (2)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 - 26x &= y^2 - 26y \\ x^2 - y^2 - 26x + 26y &= 0 \\ (x-y)(x+y) - 26(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y) &= 26(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} a) \quad x - y = 0 & b) \quad x + y = 26 \\ 2x = 26y; \quad x = 13 & 2y = 26; \quad y = 13 \end{array}$$

Der Schüler, der diese Lösung gab, bemerkte dazu: "Auch eine Gleichung mit zwei Unbekannten lässt sich lösen."
Nimmt man hingegen die Lösung b) mit der Ausgangsgleichung (2) zusammen, so hat man

$$x + y = 26 \qquad ; \qquad xy = 25$$

$$\begin{aligned} x(26-x) &= 25 \\ x^2 - 26x + 25 &= 0 \\ x &= 13 \pm \sqrt{13^2 - 5^2} = 13 \pm 12 \end{aligned}$$

$x_1 = 25$, woraus mit $x - y = 0$ folgt $y_1 = 25$;
$x_2 = 1$, woraus ebenso folgt $y_2 = 1$.
Hinweis: Das Gleichungssystem führt auf die Gleichung

$$x^4 - 26x^3 + 650x - 625 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 1, x_2 = 25, x_3 = 5, x_4 = -5 \qquad , \qquad y_1 = 25, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = -5$$

Der oben angeführte Lösungsweg würde zur Bestimmung der Wertepaare führen, welche der ersten Gleichung genügen.
Dabei wurden die Gleichungen a) und b) falsch interpretiert; denn Gleichung a) besagt, dass die erste Gleichung von allen Wertepaaren erfüllt wird, deren Differenz gleich 0 ist, und Gleichung b) besagt, dass die erste Gleichung von allen Wertepaaren erfüllt wird, deren Summe gleich 26 ist.

15. Man sucht zwei Zahlen, deren Summe, Produkt und Quadratsumme gleich sind.

Lösung: Aus $x + y = xy = x^2 + y^2$ erhält man, weil $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$3(x + y) = (x + y)^2 \qquad , \qquad x + y = 3$$

x und y sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - 3u + 3 = 0 \qquad \text{woraus} \qquad u = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Die Aufgabe hat folglich nur imaginäre Lösungen.
Hinweis: Die richtigen Werte erhält man als Lösungen z.B. des Gleichungssystems

$$xy = x + y \qquad , \qquad xy = x^2 + y^2$$

Die Lösungen sind:

$$x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 0, x_3 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}, y_3 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}, x_4 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}, y_4 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

Der oben angeführte Lösungsweg ist ungeschickt und enthält beim Übergang zur Zeile 4 einen Fehler, da die Division durch $(x + y)$ eine Graderniedrigung bedeutet, was den Verlust von Lösungen zur Folge hat.

16. Von Skanderborg nach Silkeborg[2] laufen 3 Eisenbahnzüge, A, B und C. Der Zug A braucht 10 Minuten mehr für die ganze Fahrt als B, aber 40 Minuten weniger als C ; seine Fahrgeschwindigkeit (der während einer Stunde durchlaufene Weg) ist nämlich um $6\frac{1}{5}$ km geringer als die Fahrgeschwindigkeit des Zuges B, aber um $12\frac{2}{5}$ km größer als die des Zuges C.
Wie viele Stunden braucht der Zug A für die ganze Fahrt, und wie groß ist seine Fahrgeschwindigkeit?

Lösung:
A fährt $60x$ Minuten, Fahrgeschwindigkeit y km
B fährt $50x$ Minuten, Fahrgeschwindigkeit $y + 6\frac{2}{5}$ km
C fährt $100x$ Minuten, Fahrgeschwindigkeit $y - 12\frac{2}{5}$ km

Man kann dann die Gleichungen aufstellen:

$60xy = 50xy + 310x$	$xy = \left(x - \frac{1}{6}\right)\left(y + 6\frac{1}{5}\right)$
$y = 31$	Mittels des vorigen Ergebnisses $x = 1$

Die gesuchte Fahrgeschwindigkeit beträgt 31 km und die Dauer der ganzen Fahrt des Zuges A 1 Stunde.

Hinweis: Bezeichnet man die Zeit des Zuges A mit x, seine Geschwindigkeit mit y und die von allen Zügen durchfahrene Strecke mit s, so kommt man auf folgendes Gleichungssystem:

$$xy = s, \qquad \left(x - \frac{1}{6}\right)\left(y + \frac{31}{5}\right) = s, \qquad \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{62}{5}\right) = s$$

mit den Lösungen $y = 31$, $x = 10$, $s = 31$.

[2]Zwei jütländische Städtchen.

Der oben angegebene Lösungsweg führt nur deshalb zufällig zum richtigen Ergebnis, weil $x = 1$ und damit $x - \frac{10}{60} = \frac{50}{60}x$ und $x + \frac{40}{60} = \frac{100}{60}x$ ist.

17. $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x-b^2} = a - b$; man finde x. Speziell soll angenommen werden $a = b$.

Lösung:
$$\begin{aligned} \sqrt{x-a^2} &= a - b - \sqrt{x-b^2} \\ x - a^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + x - b^2 - 2(a-b)\sqrt{x-b^2} \\ a(b-a) &= (b-a)\sqrt{x-b^2} \\ a^2 &= x - b^2 \\ x &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Im speziellen Falle wird $x = 2a^2$.

Hinweis: Eine Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt, dass $x = a^2 + b^2$ unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit des Wurzelsymbols keine Lösung der Gleichung ist. Somit hat die Gleichung keine Lösung. Selbst wenn die Probe die Gleichung bestätigen würde, wäre die Spezialisierung für $a = b$ falsch, da im Rechengang durch $b - a$ geteilt wird, was $a \neq b$. voraussetzt.

18. Aus den Gleichungen

$$x^2 + xy = a^2 + ab \qquad , \qquad y^2 + xy = a^2 - ab$$

sind x und y zu finden.

Lösung: Aus den gegebenen Gleichungen ergibt sich durch Addition

$$(x+y)^2 = 2a^2 \qquad , \qquad x + y = a\sqrt{2}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen erhält man

$$xy(x+y)^2 = a^4 - a^2b^2$$

woraus mittels des vorigen Ergebnisses

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

Man bildet dann eine quadratische Gleichung

$$z^2 - a\sqrt{2} \cdot z + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0$$

aus der man findet

$$z = \frac{a\sqrt{2}}{a} \pm \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2 - b^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Also

$$x_1 = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

Hinweis: Das Gleichungssystem lässt sich z.B. durch Elimination von x aus der zweiten Gleichung und Einsetzen in die erste Gleichung lösen. Man erhält die Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2}$$

und daraus

$$y_1 = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y_2 = -\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_2 = -\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

Zu denselben Lösungen würde man kommen, wenn man bei dem oben angegebenen Lösungsweg berücksichtigen würde, dass aus $(x+y)^2 = 2a^2$ folgt

$$x + y = \pm a\sqrt{2}$$

19. Aus der Gleichung $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$ ist x zu finden.

Lösung: Setzt man $\sqrt{x} = y$, so ändert sich die Gleichung in diese:

$$9 \cdot 12^y = 6^{y^2} \qquad \text{oder} \qquad 9 \cdot (2 \cdot 6)^y = (6^y)^2$$

diese teilt sich in zwei Gleichungen, $6y = 0$ und $9 \cdot 2^y = 6^y$, von denen die erste keinen endlichen Wert von y liefert. Die letzte wird folgendermaßen geändert:

$$9 \cdot 2^y = 2^y \cdot 3^y$$

und teilt sich dann wieder in $2^y = 0$ und $9 = 3^y$. Die erste von diesen Gleichungen wird wie früher vernachlässigt; aus der letzten erhält man:

$$y = 2 \qquad \text{also} \qquad x = 4$$

Hinweis: Die vorgelegte Exponentialgleichung lässt sich umformen in

$$3^2 \cdot 2^{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} = 2^x \cdot 3^x \qquad , \qquad 3^{2+\sqrt{x}} \cdot 2^{2\sqrt{x}} = 2^x \cdot 3^x$$

Daraus folgt

$$(I) \qquad 2 + \sqrt{x} = x \qquad , \qquad (II) \qquad 2\sqrt{x} = x$$

$$(I) \qquad x - 2 = \sqrt{x}, \qquad x_1 = 4, \qquad x_2 = 1$$

$$(II) \qquad x^2 - 4x = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 4$$

$x_2 = 1$ und $x_3 = 0$ sind keine Lösungen der Ausgangsgleichung. $x_1 = x_4 = 4$ ist die gesuchte Lösung.

Der oben gezeigte Weg führt zufällig zum richtigen Ergebnis, da $y = 2$ und $2^2 = 2 \cdot 2$ ist. Allgemein ist aber $6^{y^2} \neq (6^y)^2$.

20. Aus der Gleichung $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$ ist x zu finden.

Lösung: Man erhält $3^{x+7} = 4^{x+7}$, woraus sich, da die Exponenten gleich sind, 3 = 4 ergibt.

Hinweis:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \qquad , \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-7}$$

daraus folgt $x = -7$.
Der oben angeführte Lösungsweg enthält einen Trugschluss, da man aus der Gleichheit der Exponenten zweier gleicher Potenzen nur dann auf die Gleichheit der Basen schließen darf, wenn die Exponenten ungleich Null sind.

21. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = \frac{13}{6}$ man finde x.[3]

1.Lösung:

$$\frac{4^{\lg x}}{6^{\lg x}} + \frac{9^{\lg x}}{6^{\lg x}} = \frac{13}{6}$$

damit dieses stattfindet, muss sein

$$\lg x = 1 \qquad , \qquad x = 10$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x \lg \frac{2}{3} + \lg x \lg \frac{3}{2} &= \lg \frac{13}{6} \\ \lg x \left(\lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{2}\right) &= \lg \frac{13}{6} \\ \lg x \cdot \lg \frac{13}{6} &= \lg \frac{13}{6} \\ \lg x = 1 \qquad &, \qquad x = 10 \end{aligned}$$

3. Lösung:[4] Da $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$ ist, so ist

$$\lg x \left(\lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{2}\right) = \lg \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{\lg x}\right]$$

Nun ist aber ebenso

$$\lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{2} = \lg \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

also $\lg x \cdot \lg 1 = \lg 1$ und $\lg x = 1$, $x = 10$.

I 1 Hinweis: Die Gleichung $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = \frac{13}{6}$ lässt sich wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = y \quad &, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = \frac{1}{y} \\ y + \frac{1}{y} &= \frac{13}{6} \\ y^2 - \frac{13}{6} y + 1 &= 0 \\ y_1 = \frac{3}{2} \quad &, y_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

dann ist $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \frac{2}{3}$, daraus folgt $\lg x = 1$, $x_1 = 10$.
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \frac{3}{2}$, daraus folgt $\lg x = -1$, also $x_2 = \frac{1}{10}$.
Die obigen Lösungen enthalten folgende Fehler:

1. Lösung: Verstoß gegen die Potenzgesetze.
2. Lösung: Eine Summe wird nicht logarithmiert, indem die Summanden logarithmiert werden.
3. Lösung: Siehe zweite Lösung, und außerdem wird der unbestimmte Ausdruck einfach gleich 1 gesetzt.

[3]Man beachte, dass - entsprechend den jetzt allgemein üblichen Bezeichnungen - der allgemeine Logarithmus mit $\log$, der Briggessche Logarithmus mit $\lg$ und der natürliche Logarithmus mit $\ln$ abgekürzt werden.
[4]Diese Lösung ist, ausdrücklich als "trugschlüssig" bezeichnet, von einem Abiturienten eingesandt worden.

4. Division durch 0; $\lg 1 = 0$.

Arithmetik

1. Der Ausdruck $\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}}$ ist durch Umformung zu vereinfachen.

Lösung:

$$\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}} = \sqrt[12]{(2^3 \cdot 3)^6} + \sqrt[12]{(3 \cdot 3)^3} - \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3^3}\right)^2} = 2\sqrt[12]{3^6} + 3^6 \frac{1}{3^6}$$
$$= 2\sqrt[12]{6^6 - \frac{1}{3^6}} = 2\sqrt[12]{18^6 - 1} = 6\sqrt[12]{2^6 - 1} = 6\sqrt[12]{63}$$

Hinweis: Die richtige Lösung erhält man:

$$\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

Im oben angegebenen Lösungsweg wurde die Addition von Wurzeln und Potenzen falsch durchgeführt.

2. Der Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[4]{a^7} - \sqrt[5]{a^9} - \sqrt[6]{11}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[5]{\frac{1}{a}} - \sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$$

ist zu vereinfachen.
Lösung:

$$\frac{\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[4]{a^7} - \sqrt[5]{a^9} - \sqrt[6]{11}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[5]{\frac{1}{a}} - \sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}} = \frac{a^2 + a^3 - a^4 - a^5}{\sqrt[1]{\frac{1}{a}} - \sqrt[7]{\frac{1}{a}}} = \frac{-a^4}{\sqrt[4]{\frac{1}{a}}} = \frac{-a}{\frac{1}{a}} = -a^2$$

Hinweis: Der Bruch hat den Wert $-a^2$; denn

$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[5]{\frac{1}{a}} - \sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right) \cdot (-a^2) = -\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{a}} - \sqrt[5]{\frac{a^{10}}{a}} + \sqrt[4]{\frac{a^8}{a}} + \sqrt[3]{\frac{a^6}{a}}$$
$$= -\sqrt[6]{a^{11}} - \sqrt[5]{a^9} + \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[3]{a^5}$$

Der gezeigte Lösungsweg enthält zahlreiche Verstöße gegen die Wurzel- und Potenzgesetze.

3. Wie groß ist i^{2n}?
Lösung:

$$i^{2n} = (\sqrt{-1})^{2n} = ((-1)^{\frac{1}{2}})^{2n} = ((-1)^{2n})^{\frac{1}{2}} = (+1)^{\frac{1}{2}} = +1$$

Hinweis:

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 2k \\ -1 & \text{für} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Die obige Lösung ist deshalb unvollständig.

4. Aus dem binomischen Lehrsatz

$$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + ... \pm b^n$$

folgt für $n = 0$: $(a \pm b)^0 = 1 \pm 0... \pm 1$,
so dass also $(a \pm b)^0$ sowohl gleich 0 als auch gleich 2 sein kann.

Hinweis: Eine Entwicklung für $(a \pm b)^0$ nach dem binomischen Lehrsatz ist nicht möglich, da dieser Satz nur für positives ganzes n gilt. Laut Definition ist $(a \pm b)^0 = 1$.

5. Ein Gefäß, das anfangs 2000 l Wasser enthält, wird durch ein Rohr geleert, so dass 50 l in jeder Minute hinauslaufen. Wieviel Wasser ist im Gefäß nach Verlauf von 1, 2, 3, ..., x Minuten?
Ist die Wassermenge des Gefäßes der Zeit direkt oder umgekehrt proportional? Ist die hinausströmende Wassermenge der Zeit direkt oder umgekehrt proportional?

Lösung:

Nach dem Verlauf von 1 Minute ist im Gefäß $2000 - 50 = 1950l$
Nach dem Verlauf von 2 Minuten ist im Gefäß $2000 - 2 \cdot 50 = 1900l$
Nach dem Verlauf von 3 Minuten ist im Gefäß $2000 - 3 \cdot 50 = 1850l$
Nach dem Verlauf von x Minuten ist im Gefäß $2000 - x \cdot 50$ l.

Je größer die verflossene Zeit, desto geringer ist die Wassermenge des Gefäßes, d.h., die Wassermenge des Gefäßes ist der Zeit umgekehrt proportional. Je größer die verflossene Zeit, desto größer ist die ausgeströmte Wassermenge, d.h., die ausgeströmte Wassermenge ist der Zeit direkt proportional.

Hinweis: Richtig ist, dass die ausgeströmte Wassermenge der Zeit direkt proportional ist. Die Feststellung, dass die sich noch im Gefäß befindliche Wassermenge mit zunehmender Zeit kleiner wird, genügt nicht, um daraus eine indirekte Proportionalität abzuleiten. Diese besteht auch nicht.

6. Mittels Logarithmen soll berechnet werden $x = \sqrt[3]{\lg 0,3}$.
Lösung:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{0,4771 - 1} = \sqrt[3]{-0,5228} \\ \lg(-x) &= \frac{0,7184}{2} = 0,2395 \\ \lg x &= -0,2395 = 0,7605 - 1 \\ x &= 0,57761 \end{aligned}$$

Hinweis: $x = \sqrt[3]{\lg 0,3}, \quad x = \sqrt[3]{-0,5229}, \quad x = -\sqrt[3]{0,5229}, \quad x = -0,8056$

Im oben angegebenen Weg wird übersehen, dass der Logarithmus eines negativen Numerus in der reellen Analysis nicht erklärt ist.

7. Für welche Werte von a und b ist die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

gültig?
Lösung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> 2ab \\ a^2 - ab &> ab - b^2 \\ a(a-b) &> b(a-b) \\ a &> b \end{aligned}$$

Die Ungleichheit ist also immer gültig, wenn $a > b$.

Hinweis: Für $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad | \cdot ab$ ergibt sich unter der Voraussetzung $a > 0$, $b > 0$ oder $a < 0$, $b < 0$

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad , \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad , \quad (a-b)^2 > 0$$

daraus folgt $a \neq b$ und damit $a > b$ oder $a < b$.
Macht man dagegen die Voraussetzungen
α) $a > 0$, $b < 0$ oder
β) $a < 0$, $b > 0$, so ergibt sich für α), wenn wir $a = a$ und $b = -k$ setzen:

$$-\frac{a}{k} - \frac{k}{a} > 2 \quad , \quad a^2 + k^2 < -2ak \quad , \quad a^2 + 2ak + k^2 < 0$$

und damit $(a+k)^2 < 0$.
Das ist aber nicht möglich. Entsprechendes gilt für den Fall β).
Ergebnis: Die Ungleichung gilt für alle reellen Werte $a \neq b$ mit $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$, $b < 0$.

Der obige Lösungsweg ist fehlerhaft, da einerseits die Beibehaltung des Relationszeichens bei der Multiplikation mit ab nur gesichert ist, wenn sowohl $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$ und $b < 0$ sind, andrerseits durch $(a-b)$ geteilt wird, ohne dass $a \neq b$ feststeht. Außerdem könnte sich hierbei das Relationszeichen wieder ändern.

8. Es ist zu beweisen, dass 240 Teiler von $n^4 - 1$ ist, wobei n eine Primzahl > 5 ist.

Lösung:

$$240 = 3 \cdot 5 \cdot 2^4 \qquad , \qquad n^4 - 1 = (n^2+1)(n+1)(n-1)$$

3 geht auf, weil $n-1$, n und $n+1$ drei aufeinanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind. In einer dieser Zahlen muss 3 aufgeben, kann aber nicht in der Primzahl n aufgehen.
5 geht dem Fermatschen Satze[5] zufolge auf. 2^4 geht auf aus folgenden Gründen:
2 gibt bei Division in n den Rest 1, also gibt n^4 bei Division durch 2^4 den Rest $1^4 = 1$. Wenn aber die Zahl 2^4 den Rest 1 gibt, geht sie in $n^4 - 1$ auf.

Hinweis: $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$

1. $3|(n-1)(n+1)(n^2+1)$. (Sprich: Drei teilt . . .)
Da $(n-1)$, n, $(n+1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, muss eine durch 3 teilbar sein, also wegen $n = p$ $3|(n-1)$ oder $3|(n+1)$
2. $5|(n^4-1)$ nach dem kleinen Fermatschen Satz
3. $16|(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
Da $(n-1)$ und $(n+1)$ wegen $n = p$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind, muss eine von ihnen mindestens durch 2 und die andere mindestens durch 4 teilbar sein, außerdem ist n^2 wegen $n = p$ eine ungerade Zahl, also $n^2 + 1$ ist gerade.
Ergebnis: $3 \cdot 5 \cdot 16|(n^4 - 1)$.

Der oben angegebene Lösungsweg ist im letzten Teil fehlerhaft, weil mit dem Rest falsch umgegangen wird.

9. Welche Reste kann $a^3 - a$ bei Division durch 12 geben? (a ist eine positive, ganze Zahl.)

Lösung: $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$

[5] Der Fermatsche Satz besagt, dass $a^{p-1} - 1$, wobei a eine ganze Zahl und p eine Primzahl ist, durch p ohne Rest teilbar ist, ausgenommen, wenn a durch p teilbar ist.

ist durch 3 teilbar, weil die drei Faktoren drei aufeinanderfolgende Zahlen der Zahlenreihe sind. Bei Division durch 4 muss a einen der Reste 0, 1, 2 oder 3 geben, a^3 also bzw. 0, 1, 8 oder 27, $a^3 - a$ also 0, 0, 6, 24; wird aber der Rest 24, so ist zu sagen, dass die Division aufgeht. Die Antwort ist dann: 0 oder 6.

Hinweis: Da von den Zahlen $(a-1)a(a+1)$ eine Zahl durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar sein muss, ergibt sich nach dem Satz über die Multiplikation von Zahlenkongruenzen[6], dass $a^3 - a \equiv 6$ mod 12 oder, wenn zwei der obengenannten Zahlen durch 2 teilbar sind, $a^3 - a \equiv 0$ mod 12 ist. Es kann also nur die Reste 0 und 6 geben.

Die oben angegebene Überlegung ist fehlerhaft, da, wie im vorhergehenden Beispiel, mit dem Rest falsch umgegangen wird.

10. Wenn zwei Zahlen a und b teilerfremd zueinander sind, werden $a + b$ und $a \cdot b$ auch teilerfremd sein. Beweise das!

Lösung: Eine Zahl, die in ab aufgeht, darf nur in einem der Faktoren aufgehen, z.B. in a. Dann kann sie nicht auch in $a+b$ aufgeben, weil sie dann in b aufgeben müsste (denn eine Zahl wird nur dann in einer Summe aufgehen, wenn alle Addenden dadurch teilbar sind); sie kann aber nicht in b aufgehen, weil a und b teilerfremd sind. Keine Zahl, die in ab aufgeht, kann also in $a + b$ aufgehen, d.h., $a + b$ und ab sind teilerfremd.

Hinweis: Nach dem Satz von der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung ist

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n \qquad , \qquad b = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$$

p_ν und q_μ seien Primzahlen mit $p_\nu \neq q_\mu$ für alle ν und μ. Dann ist

$$a + b = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$$

und

$$a \cdot b = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$$

Annahme: $a + b$ sei durch einen der Primfaktoren von $a \cdot b$ teilbar. Dann ist

$$\frac{a+b}{p_1} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m}{p_1} = p_2 \cdot ... \cdot p_n + \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m}{p_1}$$

Der Bruch lässt sich nach Voraussetzung durch p_1 nicht kürzen. Also ist $a + b$ durch p_1 nicht teilbar.
Analoges lässt sich für jeden anderen Primfaktor von $a \cdot b$ zeigen. Damit sind $a \cdot b$ und $a + b$ teilerfremd.

In der Überlegung des Schülers ist der zugrunde gelegte Lehrsatz falsch, wovon man sich sofort an einfachen Beispielen, wie (5 + 7) : 2 oder (7 + 5 + 9) : 7 überzeugen kann.
Er müsste richtig lauten:

Eine Zahl, welche einen der Summanden teilt, kann eine Summe aus zwei Summanden genau dann teilen, wenn sie auch den anderen Summanden teilt.

11. Beweise, dass, wenn a und b positive Zahlen sind, numerisch $a + b$ größer als $a - b$ ist.

Lösung: Wir bezeichnen den numerischen Wert einer Zahl t durch $|t|$ und schließen dann folgendermaßen:

$$|a + b| = |a| + |b| \qquad , \qquad |a + b| > |a| - |b| \quad , \qquad |a| - |b| = |a - b|$$

[6]Ist $a_1 \equiv b : 1$ mod m und $a_2 \equiv b_2$ mod m, so folgt $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2$ mod m.

Also $|a+b| > |a-b|$, was zu beweisen war.

Hinweis: Unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ und $b > 0$ ist, gilt $a+b > a$ und ebenso $a > a-b$. Daraus folgt $a+b > a-b$. Da $a+b$ sicher positiv ist, folgt daraus $|a+b| > |a-B|$. Der oben gezeigte Beweis enthält die Gleichung $|a| - |b| = |a-b|$, die unter den gegebenen Voraussetzungen nicht mehr gilt, wenn $b > a$ ist.

12. Untersuche, ob man aus

$$ab > cd \qquad \text{und} \qquad ae > cf$$

die Ungleichheit $bf > ed$ herleiten kann. (Alle Buchstaben bezeichnen positive Zahlen.)

Lösung: Durch Division erhält man $\frac{b}{e} > \frac{d}{f}$, woraus $bf > ed$. Die Antwort muss also bejahend sein.

Hinweis: Geht man von $bf > ed$ aus, so ist $f > \frac{ed}{b}$. In $ae > cf$ eingesetzt, erhält man

$$ae > \frac{ced}{b} \quad , \quad a > \frac{cd}{b} \quad , \quad ab > cd$$

d.h., aus $bf > ed$ und $ae > cf$ folgt $ab > cd$.
In der geforderten Richtung jedoch $(I) \quad ab > cd$, $(II) \quad ae > cf$ folgt aus (I) $c < \frac{ab}{d}$ und damit $dcf < abf$. Durch Einsetzen von (II) und Division durch a erhielte man jedoch keine Aussage über das Relationszeichen zwischen ed und bf.

13. Das erste und das vierte Glied einer geometrischen Folge sind bzw. 2,1 und -0,0168; wie viele Glieder der Reihe sind mitzunehmen, damit die Summe 1,75056 werde?

Lösung: $2,1 \cdot q^3 = -0,0168$ gibt $q = -0,2$

$$1,75056 = 2,1 \cdot \frac{(-0,2)^n - 1}{-0,2 - 1}$$

gibt demnächst $(-0,2)^n = -0,00032$, woraus

$$n = \frac{\lg 0,00032}{\lg 0,2} = \frac{0,5042 - 4}{0,3010 - 1} = 5 \qquad \text{(ungefähr)}$$

Hinweis: Der Lösungsweg ist richtig bis zur Zeile $(-0,2)^n = -0,00032$.
Die weiter angestellte Berechnung ist nur nach folgender Überlegung erlaubt: Aus $(-0,2)^n = -0,00032$ folgt, dass n ungerade sein muss. Damit gilt

$$-0,2^n = -0,00032 \qquad \text{also} \qquad 0,2^n = 0,00032$$

und damit $n = 5$.

Ebene Geometrie

1. Konstruiere $x = \sqrt{\frac{(2a^2-b^2)\sqrt{2}}{3}}$
wenn a und b gegebene Strecken bedeuten!

Lösung: Man setzt $2a^2 - b^2 = y^2$ und konstruiert y^2 als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem $2a$ die Hypotenuse und b die andere Kathete ist. Dann ist

$$x = \sqrt{y\frac{y\sqrt{2}}{3}}$$

Hier wird $z = \frac{y\sqrt{2}}{3}$ gesetzt, und z wird als vierte Proportionale zu 3, y und $\sqrt{2}$ konstruiert. Endlich wird

$$x = \sqrt{yz}$$

als mittlere Proportionale zwischen y und z konstruiert.

Hinweis: $x = \sqrt{\frac{(2a^2-b^2)\sqrt{2}}{3}}$ wird umgeformt in

$$x = \frac{\sqrt{2a^2-b^2}\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \qquad , \qquad \frac{x}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{\sqrt{3}}$$

1. Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a hat die Hypotenuse $a\sqrt{2}$.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $a\sqrt{2}$ und einer Kathete b hat die zweite Kathete $\sqrt{2a^2-b^2}$.
3. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 hat die Hypotenuse $\sqrt{2}$.
4. Wird über der Strecke $c = 1 + \sqrt{2}$ ein Halbkreis geschlagen, und wählt man $q = 1$ und $p = \sqrt{2}$, so ist nach dem Höhensatz $h = \sqrt{\sqrt{2}}$.
5. Wird über der Strecke $c = 4$ ein Halbkreis geschlagen und wählt man $q = 1$ und $p = 3$, so ist nach dem Höhensatz $h = \sqrt{3}$.
6. x ergibt sich als vierte Proportionale.

Der oben gezeigte Lösungsweg ist möglich, allerdings sind die Katheten des verwendeten rechtwinkligen Dreieckes b und y und die Hypotenuse $a\sqrt{2}$.

2. Zwei konzentrische Kreise sind gegeben; ihre Radien sind a und b, wo $a > b$.
Finde den Radius eines zu den gegebenen konzentrischen Kreises, der den Kreisring zwischen den gegebenen Kreisen in zwei andere Kreisringe teilt, derart, dass der Flächeninhalt des äußeren doppelt so groß ist wie der des inneren.

Lösung: Der gesuchte Radius sei x genannt; man erhält dann durch Benutzung des Satzes über den Flächeninhalt ähnlicher Figuren

$$\frac{(x-b)^2}{(a-x)^2} = \frac{2}{1}$$

woraus nach Reduktion

$$x^2 - 2x(2a-b) + 2a^2 - b^2 = 0$$
$$x = 2a - b \pm \sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab - 2a^2 + b^2}$$
$$x = 2a - b \pm (a-b)\sqrt{2}$$

Hinweis: Es muss heißen

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2} = \frac{2}{1}$$

daraus ergibt sich der gesuchte Radius $x = \frac{1}{3}\sqrt{3a^2+6b^2}$.
Der oben angegebene Lösungsweg ist falsch, weil sich der benutzte Satz nicht auf die betrachteten Kreisringe anwenden lässt. Die beiden Kreisringe sind nicht ähnlich. Außerdem ist die Proportion falsch.

3. Ein Dreieck ABC ist gegeben. Konstruiere eine Gerade, die AB und BC schneidet und gleiche Abstände von A und B hat, während der Abstand von B doppelt so groß wie der Abstand von C ist (Abb. 6).

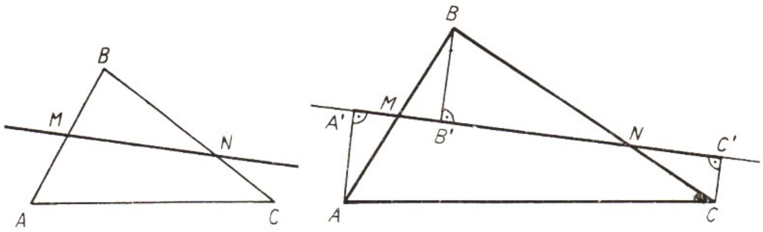


Abb. 6 und 7

Lösung: AB sei im Punkte M halbiert und BC sei in drei gleiche Teile geteilt; sei endlich N der C am nächsten gelegene Teilungspunkt. Die Gerade durch M und N ist dann die gesuchte.

Hinweis: Natürlich sind die Strecken MA, MB, NC und NB nicht die Abstände der Geraden von den Punkten A, B und C.
Die Konstruktion ist trotzdem richtig, denn es gilt (Abb. 7)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{1} \qquad \text{(laut Konstruktion)}$$
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AA'}{BB'} \qquad \text{(2. Strahlensatz)}$$

daraus folgt

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{1}{1} \qquad \text{(q.e.d)}$$

weiter

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2}{1} \qquad \text{(laut Konstruktion)}$$
$$\frac{BN}{NC} = \frac{BB'}{CC'} \qquad \text{(2. Strahlensatz)}$$

daraus folgt

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{2}{1} \qquad \text{(q.e.d.)}$$

4. In dem Dreieck ABC sind die folgenden Seiten gegeben: $a = 1,3$ cm, $b = 0,5$ cm, $c = 1,2$ cm. Die Winkelhalbierende des Nebenwinkels von B schneidet die Verlängerung von AC in D. Finde AD (Abb. 8)!

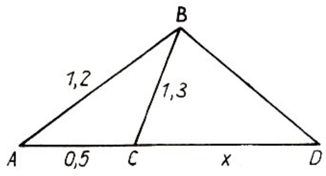


Abb. 8

Lösung: Einem bekannten Satze zufolge kann aufgestellt werden:

$$\frac{x}{1,3} = \frac{x+0,5}{1,2} = \frac{0,5}{-0,1}$$

woraus sich ergibt $x + 0,5 = -6$. Da keine Strecke negativ sein kann, ist $AD = 6$ cm.

Hinweis: Satz: Die Winkelhalbierende eines Dreiecksaußenwinkels teilt die gegenüberliegende Seite außen im Verhältnis der den Winkel einschließenden Seiten.

$$\frac{x}{x+0,5} = \frac{1,2}{1,3} \qquad , \qquad x = 6, \quad DA = 6 \text{ cm}$$

Die oben gezeigte Skizze ist falsch, weil die Größenverhältnisse nicht beachtet wurden (vgl. Abb. 9). Dadurch ergibt sich die fehlerhafte Festlegung des Vorzeichens.

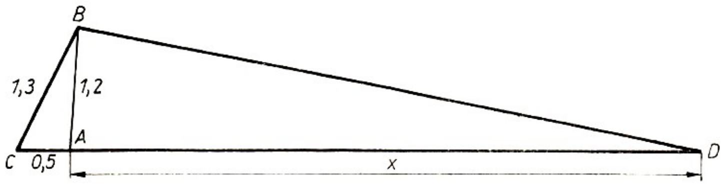


Abb. 9

5. Die Gerade, die einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert, teilt die entgegengesetzte Kathete in zwei Strecken, die 4 und 5 cm lang sind. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks (Abb. 10)?

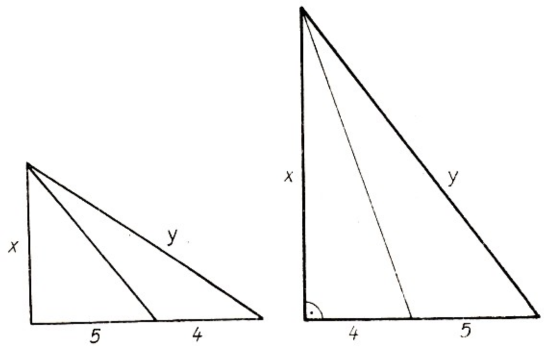


Abb. 10 und 11

Lösung:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} \quad , \quad y^2 = x^2 + 81 \quad , \quad y = \frac{5x}{4}$$

$$\frac{25}{16}x^2 = x^2 + 81 \quad , \quad \frac{9}{16}x^2 = 81 \quad , \quad x^2 = 144$$

d.h. $x = 12$ (cm), $y = 15$ (cm).

Hinweis: Jede Winkelhalbierende eines Innenwinkels im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \qquad , \qquad x^2 + 9^2 = y^2$$

daraus folgt $y = 15$, $x = 12$.
Die Abb. 10 ist falsch, da der größere Abschnitt an die Hypotenuse y anschließen muss (Abb. 11). Dadurch ist die Ausgangsproportion falsch, außerdem wird falsch nach y aufgelöst.

6. Durch den Mittelpunkt einer Kreissehne, deren zugehöriger Zentriwinkel $120°$ ist, ist eine andere Sehne gezogen; der eine Abschnitt derselben ist dreimal so groß wie der andere. Was ist das für eine Sehne?

Lösung: Es muss ein Durchmesser sein, weil der Abstand der Sehne von dem Zentrum dem halben Radius gleich ist, so dass die zwei Abschnitte der gezogenen Sehne $\frac{1}{2}r$ und $\frac{3}{2}r$ werden ($r =$ Radius des Kreises). Der letzte Abschnitt ist also eben das Dreifache des ersten.

Hinweis: Die zu dem Zentriwinkel $\alpha = 120°$ gehörende Sehne habe die Länge $2x$. Dann ergibt sich $MD = \frac{r}{2}$.
Wir nehmen eine zweite Sehne durch D an. D erzeuge auf ihr die Abschnitte z und y. Da D ein Punkt innerhalb des Kreises ist, gilt für die Sehnenabschnitte $x \cdot x = z \cdot y$. Daraus ergibt sich wegen

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}, \quad z = 3y, \quad y = \frac{r}{2}, \quad \text{und} \quad z = \frac{3r}{2}$$

(Abb. 12). Der Durchmesser durch D ist also die einzige Sehne, die diese Aufgabe erfüllt. Der obige Lösungsweg zeigt nicht, dass es keine weitere Lösung gibt.

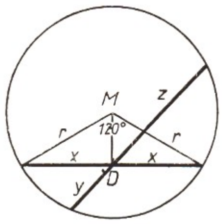


Abb. 12

7. Zwei Kreise, die einander in P und Q schneiden, berühren die Schenkel eines Winkels; die Berührungspunkte des einen sind durch A und A_1, die des anderen durch B und B_1 bezeichnet, so dass A und B auf demselben Winkelschenkel liegen. Beweise,
1. dass die Verlängerungen der Geraden PQ durch die Mittelpunkte von AB und A_1B_1 gehen,
2. dass AA_1, BB_1 und PQ einander parallel sind!

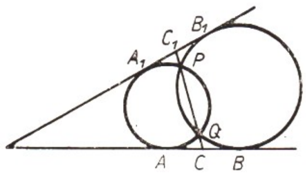


Abb. 13

Lösung: PQ schneide AB in c, A_1B_1 in C_1. Der Potenzsatz gibt dann

$$CA^2 = CP \cdot CQ = CB^2$$

also ist C der Mittelpunkt von AB. In derselben Weise erhält man, dass C_1 der Mittelpunkt von A_1B_1 ist. AA_1, PQ und BB_1 sind einander parallel, weil sie gleiche Stücke auf den Geraden AB und A_1B_1 abschneiden.

Hinweis (Abb. 14): 1. $CA^2 = CD \cdot CP$ (Sekantentangentensatz), $CB^2 = CQ \cdot CP$, daraus folgt $CA = CB$.
Entsprechend erhält man $C_1A_1 = C_1B_1$.

2. Wegen $ZA = ZA_1$, $ZB = ZB_1$ ist $\frac{ZA}{ZB} = \frac{ZA_1}{ZB_1}$.
Nach der Umkehrung des Strahlensatzes gilt dann $AA_1 \parallel BB_1$. Weiter gilt $\frac{ZA}{ZC} = \frac{ZA_1}{ZC_1}$ und damit auch $AA_1 \parallel CC_1$.

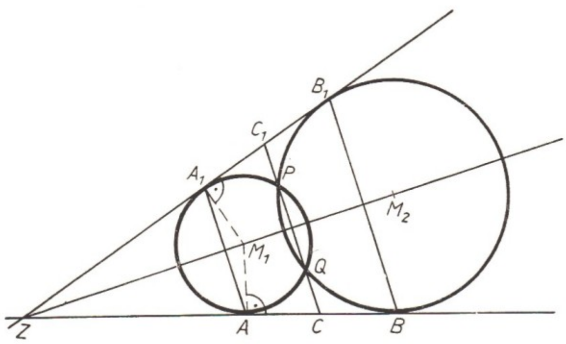


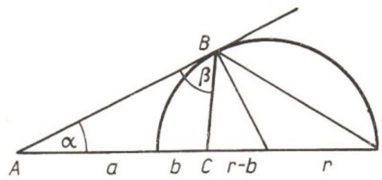
Abb. 14

Ebenso folgt aus $\frac{ZC}{ZB} = \frac{ZC_1}{ZB_1}$ $BB_1 \parallel CC_1$, also $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.
In der Überlegung des Schülers fehlt der Beweis, dass $AA_1 \parallel BB_1$ ist.

8. Konstruiere ein Dreieck, so dass die Winkelhalbierende des Winkels β die diesem Winkel

gegenüberliegende Seite in die gegebenen Stücke a und b teilt. Außerdem sei der an diese Seite anliegende Winkel α gegeben.
Es ist anzugeben, welche Bedingung erfüllt werden muss, damit die Aufgabe zwei verschiedene Lösungen erhält.

Abb. 15



Lösung: Auf den einen Schenkel des gegebenen Winkels (A) werden die gegebenen Stücke a und b abgetragen (Abb. 15).
Die Spitze des dritten Dreieckswinkels wird dann der Schnitt des anderen Schenkels des Winkels mit dem "Verhältniskreise". Wenn zwei Lösungen vorhanden sein sollen, muss der Schenkel den Kreis schneiden.
In dem Falle, wo sie einander berühren, erhalten wir zur Bestimmung des Radius r des Verhältniskreises:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+2r}{2r-b} \qquad \text{woraus} \qquad r = \frac{ab}{a-b}$$

also

$$\sin A = \frac{r}{a+r} = \frac{\frac{ab}{a-b}}{a + \frac{ab}{a-b}} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$

Zwei Lösungen fordern also $\sin A < \frac{b}{a}$.
Bekanntlich ist $\sin A < 1$; aus diesen zwei Ungleichheiten ergibt sich

$$\frac{b}{a} < 1 \qquad \text{oder} \qquad b < a$$

Die gesuchte Bedingung ist also, dass das größte der gegebenen Stücke der Spitze des gegebenen Winkels zunächst liegen muss.

Hinweis: Zugrunde gelegt wird der Satz des Apollonios:

"Der geometrische Ort der Eckpunkte B_i aller Dreiecke ACB_i mit gegebener Seite AC, deren andere Seiten im konstanten Verhältnis $AB_i : CB_i = \lambda$ stehen, ist der Thaleskreis über der Strecke DE als Durchmesser, deren Endpunkte D und E die Seite AC innen und außen im Verhältnis λ, also harmonisch teilen (Abb. 16).

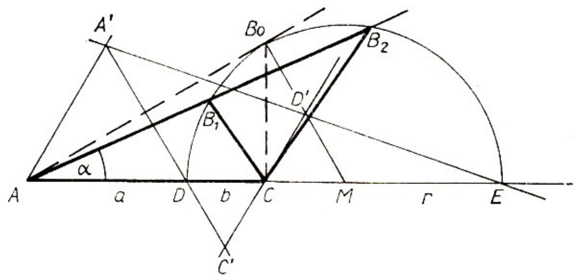


Abb. 16

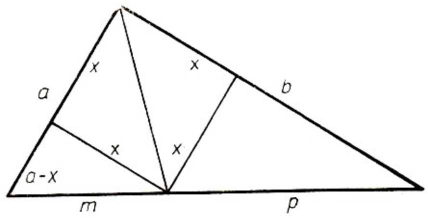
Nach der harmonischen Teilung ist $\frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EC}$, d.i. $\frac{a}{b} = \frac{a+2r}{2r-b}$. Hieraus folgt $r = \frac{ab}{a-b}$.

Für den Fall der Berührung ist $\sin\alpha = \frac{r}{a+r} = \frac{b}{a}$.

Es gibt also zwei Lösungen für $\sin\alpha < \frac{b}{a}$.In der oben angegebenen Lösung ist die Begründung der Teilschritte nicht immer klar außerdem ist die am Ende durchgeführte Schlussfolgerung falsch. Aus $\sin\alpha < \frac{b}{a}$ und $\sin\alpha < 1$ lässt sich nicht folgern $\frac{b}{a} < 1$.

9. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a und b gegeben. Dem Dreieck ist ein Quadrat, dessen eine Ecke in die Spitze des rechten Winkels fällt, eingeschrieben. Wie groß ist die Seite des Quadrats (Abb. 17)?

Abb. 17



Lösung: Die Diagonalen eines Quadrats halbieren die Winkel desselben; also hat man nach einem bekannten Satz über die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels (siehe die Bezeichnungen der Abbildung):

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{p} = \frac{a+b}{m+p} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{daraus} \quad m = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$$

Weiter gibt das kleine rechtwinklige Dreieck links

$$x^2 + (a-x)^2 = m^2 = \frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$$

wenn man diese Gleichung in gewöhnlicher Weise behandelt, findet man für die gesuchte Quadratseite 2 Werte, nämlich

$$x = \frac{ab}{a+b} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{a^2}{a+b}$$

Hinweis: $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$ führt zu $-x(a+b) = -ab$ und daraus

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Die im oben gezeigten Lösungsweg enthaltene Täuschung liegt darin, dass die zweite Lösung nur ein Sonderfall der ersten Lösung ist, denn setzt man $x = \frac{a^2}{a+b}$ in $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$ ein, so erhält man $a = b$.

Diese Lösung ist also nur möglich, wenn das gegebene rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist.

10. Zwei Dreiecke haben beziehungsweise die Seiten a, b, c und a_1, b_1, c_1; ihre Umfänge sind p und p_1. Gegeben ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{p}{p_1}$$

Sind die zwei Dreiecke ähnlich?

Lösung: Wenn die Dreiecke ähnlich sind, ist, wie bekannt,

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

aus dem, was gegeben ist, nebst einem bekannten Satze aus der Proportionenlehre ergibt sich also:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{p}{p_1}$$

und wenn die Seiten zweier Dreiecke proportional sind, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Hinweis: Die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ergibt sich nicht zwingend aus der Angabe, denn aus $\frac{a}{a_1} = \frac{p}{p_1}$ folgt $\frac{a}{a_1} = \frac{b+c}{b_1+c_1}$.
Die Summe $b+c$ lässt sich ebenso wie die Summe b_1+c_1 in beliebig viele Paare von Summanden zerlegen. In der oben angestellten Überlegung wird nicht berücksichtigt, dass zwar aus

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

die Beziehung

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}$$

folgt, jedoch aus

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1}$$

nicht die fortlaufende Proportion

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

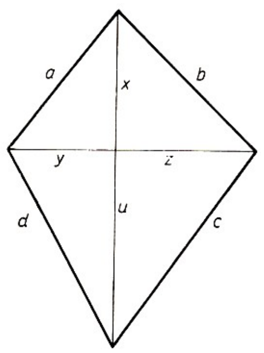


Abb. 18

11. In welchen Tangentenvierecken stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht (Abb. 18)?

Lösung: Da das Viereck ein Tangentenviereck ist, hat man (siehe die Bezeichnungen der Abbildung):

$$a + c = b + d$$

Dem pythagoreischen Lehrsatz zufolge ist

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 + d^2$$

Aus diesen Gleichungen kann hergeleitet werden:

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2 \qquad \text{und} \qquad a - b = d - c$$

durch Division:

$$a + b = d + c; \qquad \text{also} \qquad a = d \qquad \text{und} \qquad b = c$$

$$a^2 - d^2 = b^2 - c^2 \qquad \text{und} \qquad a - d = b - c$$

durch Division:

$$a + d = b + c; \qquad \text{also} \qquad a = b \qquad \text{und} \qquad d = c$$

Alle vier Seiten des Vierecks sind dann gleich, d.h., das Viereck ist ein Rhombus.

Hinweis: Im Tangentenviereck gilt

$$a + c = b + d \tag{1}$$

Bei senkrecht stehenden Diagonalen gilt weiter:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad x^2 + z^2 = b^2 \quad , \quad y^2 + u^2 = d^2 \quad , \quad z^2 + u^2 = c^2$$

Durch Addition folgt

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \qquad , \qquad b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

also

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \tag{2}$$

d.h.

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2 \qquad , \qquad (a+b)(a-b) = (d+c)(d-c)$$

Zusammen mit (1) ergibt sich

$$(a+b)(a-b) = (d+c)(a-b) \qquad , \qquad (a-b)[(a+b)-(d+c)] = 0$$

Daraus folgt $a - b = 0$, d.h. $a = b$ und damit aus (1) $c = d$.
Der zweite Faktor gleich Null gesetzt:

$$(a+b) - (c+d) = 0 \qquad , \qquad a + b = c + d.$$

Zusammen mit (1) folgt $a = d$ und $b = c$.
Damit muss das geforderte Tangentenviereck zumindest ein Drachenviereck bzw. als Sonderfall ein Rhombus oder Quadrat sein. In der Schülerlösung wird durch Null dividiert.

Trigonometrie und Stereometrie

1. Welcher Bedingung werden α, β und γ genügen, wenn

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$$

ist ?

Lösung: Die gegebene Gleichung lässt sich umformen in

$$\tan\alpha = -\frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan\gamma} = -\tan(\beta + \gamma)$$

In derselben Weise erhält man

$$\tan\beta = -\tan(\alpha + \gamma) \qquad \text{und} \qquad \tan\gamma = -\tan(\alpha + \beta)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\tan\beta$ und $\tan\gamma$ in denjenigen für $\tan\alpha$ erhält man

$$\tan\alpha = \frac{\tan(\alpha+\gamma) + \tan(\alpha+\beta)}{1 - \tan(\alpha+\gamma)\tan(\alpha+\beta} = \tan(2\alpha + \beta + \gamma) = -\tan(\beta + gamma)$$

(der obersten Gleichungen zufolge); also $2\alpha+\beta+\gamma = p\pi+\pi-\beta-\gamma$, d.h. $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}(p+1)$.

Hinweis: Die Gleichung lässt sich umformen in

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} &= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \\
\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} &= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \\
\frac{\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} &= \frac{\sin\gamma(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \\
\frac{\cos\gamma(\sin\alpha + \sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} &= \frac{-\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}
\end{aligned}$$

$$\frac{\cos\gamma(\sin\alpha + \sin\beta) + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 0$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

daraus folgt als Bedingung

$$\alpha + \beta + \gamma = k \cdot \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Die Schülerlösung enthält verschiedene Fehler, u.a. wird in unzulässiger Weise substituiert, und der Argumentenvergleich wird nicht exakt durchgeführt.

2. Berechne x aus der Gleichung

$$\tan 2x = \cot(\tan(\lg 7))$$

Lösung:

$$3x = \cot(\lg 7) = \frac{1}{\tan(\lg 7)} = \frac{1}{\tan 48,42^\circ} = \frac{1}{0,052} = 19,23 \quad , \quad x = 0,615$$

Hinweis:

$$\tan 2x = \cot(\tan 0,8451) = \cot(\tan 48,42^\circ) = \cot 1,1261 = \cot 64,52^\circ$$

mit $x = 12,74^\circ = 0,2223$.
Bemerkung zur Schülerlösung: $\cot(\tan\alpha) \neq \tan(\cot\alpha)$.

3. Die Formeln für den Inkreisradius r_i und den Umkreisradius r_u des Dreiecks, in dem s der halbe Umfang ist,

$$r_i = s \cdot \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} \quad , \quad r_u = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

sind zu beweisen.

Lösung: Durch Division der ersten durch die zweite Gleichung ergibt sich

$$\frac{r_i}{r_u} = 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

Die Relation wird auch erhalten durch Division der bekannten Formeln

$$r_u = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad , \quad r_i = a\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Also sind die zwei Formeln richtig.
Hinweis: $r_i = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$. Nach dem Halbwinkelsatz ist

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-s)(s-c)}{s(s-b)}}, \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s(s-c)}}$$

und damit

$$s \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-c)(s-a)(s-b)}{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = r_i$$

$s_i = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ folgt aus der Tatsache, dass der Dreiecksinhalt einmal $A = r_i s$ und zum anderen $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ist (Heronische Flächenformel).

$$r_u = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Wir setzen $r_u = \frac{a}{2\sin\alpha}$ in $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ein und erhalten

$$A = \frac{abc}{4r_u} \qquad \text{d.h.} \qquad r_u = \frac{abc}{4A}$$

und weiter

$$r_u = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Unter Beachtung der Halbwinkelformeln

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

folgt

$$r_u = \frac{s}{4\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}\cdot\frac{s(s-b)}{ac}\cdot\frac{s(s-c)}{ab}}} = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Der im Beweis des Schülers zugrunde gelegte Schluss ist nicht zulässig, da beide zu beweisenden Formeln einen Fehler enthalten könnten, der durch die Division nicht aufgedeckt wird (z.B. in beiden Formeln ein gleicher Faktor).

4. Die Seiten eines Dreiecks sind a, b, c. Es soll $\sin\alpha$ mittels der gegebenen Größen ausgedrückt werden.

Lösung: Wie bekannt, gilt die Relation

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

In einer Proportion ist es gestattet, die Zwischenglieder umzutauschen, man erhält dann

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \text{also} \qquad \sin\alpha = \frac{ac}{b}$$

Hinweis: Flächeninhalt

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad , \qquad A = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{bc\sin\alpha}{2} \qquad , \qquad \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Zur Lösung des Schülers: Die Umformung ist zwar in einer Proportion, nicht aber in einer fortlaufenden Proportion zulässig.

5. Die Höhe vom Punkte A eines Tetraeders $ABCD$ ist h, die drei von B ausgehenden Kanten verhalten sich wie drei gegebene Zahlen p, q und r, der Flächenwinkel zwischen ABC und DBC ist α, $\angle ABC = u$ und $\angle DBC = v$ (Abb. 19).
Finde den Rauminhalt des Tetraeders.

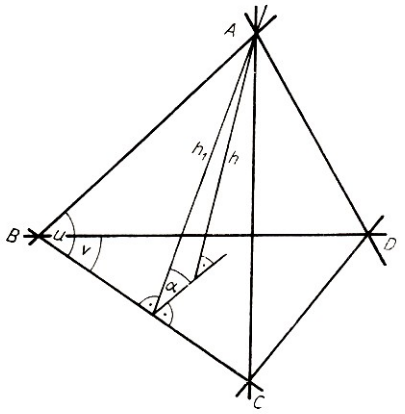


Abb. 19

Lösung:

$$AB : BC : BD = p : q : r$$
$$\frac{AB}{BC\cdot BD} = \frac{p}{qr}$$
$$BC\cdot BD = \frac{ABqr}{p}$$
$$V = \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin v = \frac{1}{6}h\frac{ABqr}{p}\sin v$$
$$AB = \frac{h}{\sin\alpha\cdot\sin u}$$
$$V = \frac{h^3 qr\sin v}{6p\sin\alpha\sin u}$$

Hinweis:

$$AB : BC : BD = p : q : r \qquad , \qquad V = \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin v$$
$$\frac{BC}{BD} = \frac{q}{r} \qquad , \qquad BC = BC\cdot\frac{r}{q}$$
$$V = \frac{h}{3}\frac{BC^2\cdot r\cdot\sin v}{2q} \qquad , \qquad \frac{BC}{BA} = \frac{q}{p}, \qquad BC = BA\cdot\frac{q}{p}$$

Aus dieser Gleichung und aus $\sin\alpha = \frac{h}{h_1}$ und $\sin u = \frac{b_1}{BA}$ folgt

$$BC = \frac{h\cdot q}{\sin\alpha\sin u\cdot p}$$

und damit

$$V = \frac{h^3 qr \sin v}{6p^2 \sin^2 \alpha \sin^2 u}$$

In der Lösung des Schülers ist die fortlaufende Proportion unzulässig umgeformt.

6. Eine Kugel vom Radius r ist durch eine Ebene so zu schneiden, dass die Oberfläche des Abschnittes n-mal so groß ist wie sein Grundkreis.
Welche Höhe hat der Abschnitt? Welche Werte kann n annehmen?

Lösung:

$$2r\pi h = n\rho^2\pi \quad , \quad \rho^2 = h(2r-h) \tag{1,2}$$
$$2rh = nh(2r-h) \quad , \quad h = 2h\frac{n-1}{n}$$

Um die Grenzen von n zu bestimmen, untersuche ich die äußersten Werte für h. Diese sind 1. $h_1 = 0$, 2. $h_2 = 2r$.
Es muss also sein

$$\frac{n-1}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad n-1=0 \quad \rightarrow \quad n=1$$
$$\frac{n-1}{n} = 1 \quad \rightarrow \quad n-1=n \quad \rightarrow \quad 0=1$$

d.h., n kann kein echter Bruch sein.

Hinweis: a) Festlegung: Der zu betrachtende Abschnitt ist höchstens gleich der Halbkugel. Aus

$$h = 2r\frac{n-1}{n} \qquad \text{folgt} \qquad n = \frac{2r}{2r-h}$$

Für $h \to 0$ erhält man $\lim\limits_{h\to 0} n = \frac{2r}{2r} = 1$. Für $h \to r$: $\lim\limits_{h\to r} = \frac{2r}{2r-r} = 2$.
Es gilt also $1 < n \leq 2$.

b) Festlegung: Der zu betrachtende Abschnitt kann größer als die Halbkugel sein.
Für $h \to 2r$ ist $\lim\limits_{h\to 2r} n = \lim\limits_{h\to 2r} \frac{2r}{2r-h} = \infty$.
Es gilt $1 < n < \infty$.
Der in der obigen Lösung vorhandene Widerspruch entsteht dadurch, dass $h_1 = 0$ und zum anderen $h_2 = 2r$ gesetzt wird.

7. Welcher Kugelabschnitt ist n-mal so groß wie der ihm einbeschriebene Kegel mit derselben Grundfläche und Höhe?

Lösung: Mit h als Höhe und ρ als Grundkreisradius ergibt sich

$$n \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \rho^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot h^2(3r-h)$$
$$n\rho^2 = h(3r-h) \tag{1}$$
$$\rho^2 = h(2r-h) \tag{2}$$
$$h = r \cdot \frac{2n-3}{n-1} \tag{3}$$

Es muss also $n > \frac{3}{2}$ sein. Der größte Wert, der von h erreicht werden kann, ist $h = 2r$. Mithin aus

$$2r = r \cdot \frac{2n-3}{n-1} \quad (3), \qquad 2n-2 = 2n-3, \qquad 2 = 3$$

Hinweis: Aus

$$h = r \cdot \frac{2n-3}{n-1} \qquad \text{folgt} \qquad n = \frac{3r-h}{2r-h}$$

1. Fall: Festlegung: Größter Kugelabschnitt ist die Halbkugel.
Für $h \to 0$ erhält man $\lim\limits_{h \to 0} n = \dfrac{3}{2}$, für $h \to r$: $\lim\limits_{h \to r} n = \dfrac{2r}{r} = 2$.
Damit gilt $\frac{3}{2} < n \leq 2$.

2. Fall: Festlegung: Der Kugelabschnitt kann größer als die Halbkugel sein.
Für $h \to 2r$ erhält man $\lim\limits_{h \to 2r} \dfrac{3r-h}{2r-h} = \infty$. Damit gilt $\frac{3}{2} < n < \infty$.
In der Schülerlösung ergibt sich ein Widerspruch, weil $h = 2r$ zugelassen wird.

8. Wenn die krumme Oberfläche eines Rotationskegels in eine Ebene abgewickelt wird, entsteht ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Winkel $\varphi = 237,77°$ entspricht. Berechne den Achsenwinkel des Kegels!

Lösung: Die Seitenlinie des Kegels sei s, der Radius der Grundfläche r und der halbe Achsenwinkel α; dann ist $2\pi r = 237,77°$, woraus $r = 37,85$ ferner

$$\frac{237,77}{360} \cdot \pi s^2 = \pi \cdot 37,85 s \qquad \text{woraus} \qquad s = 57,31$$

endlich $\sin\alpha = \dfrac{37,85}{57,31}$, woraus $\alpha = 41,35°$.

Hinweis: Die Länge des dem Winkel $\varphi = 237,77$ Grad entsprechenden Bogens beträgt

$$b = \frac{\pi \cdot 237,77°}{180°} s$$

Die Länge dieses Bogens ist gleich dem Umfang des Grundkreises des Kegels. Also b= $2\pi r$

$$r = \frac{\pi \cdot 237,77° \cdot s}{180° \cdot 2\pi} = 0,66045, \qquad \sin\alpha = \frac{r}{s} = 0,66045, \qquad \alpha = 41,33°$$

Fehler: $2\pi r = 237,77°$ ist falsch. Der sich hieraus ergebende falsche Wert hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, da r und s in der weiteren Rechnung herausfallen.

9. Wo schneiden sich die Lote, die auf dem gleichen Meridian in $A(\varphi_1)$ und $B(\varphi_2)$ errichtet werden (Abb. 20)?

Lösung: Zur Bestimmung des Längenunterschiedes x und der Breite u setze ich an:

$$\sin x = \frac{\sin y}{\sin u} \quad , \quad \sin x = \frac{\sin z}{\sin u} \tag{1,2}$$

$$\cos u = \cos y \cdot \sin\varphi_1 \quad , \quad \cos u = \cos z \cdot \sin\varphi_2 \tag{3,4}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{\sin y}{\sin u} = \frac{\sin z}{\sin u}, \qquad \sin y = \sin z, \qquad y = z \tag{5}$$

Dies ergibt unter Benutzung von (3) und (4)

$$\cos y \cdot \sin\varphi_1 = \cos z \cdot \sin\varphi_2, \qquad \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 \tag{6}$$

Die Aufgabe ist also sinnlos!

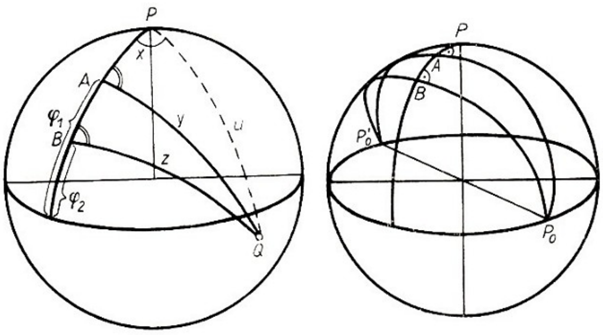


Abb. 20, 21

Hinweis: Ein Meridian ist ein Großkreisbogen. Sämtliche Großkreise, die ihn senkrecht schneiden, gehen durch die beiden Pole des Meridians P_0 und P'_0.
Der geometrische Ort dieser Pole ist der Äquator (Abb. 21).
Fehler: Der Lösungsansatz beruht auf falschen geometrischen Vorstellungen.

Analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung

1. Auf einer Geraden liegen 3 Punkte A, B, C in der angegebenen Ordnung; finde durch analytisches Verfahren den geometrischen Ort der Punkte, von denen AB und BC unter gleichen Winkeln gesehen werden!

Lösung: Das Achsenkreuz wird so gelegt, dass die Punkte A, B, C und der bewegliche Punkt P die Koordinaten $(0,0)$; $(a,0)$; $(b,0)$ und (x,y) beziehungsweise erhalten. Aus dem Verlangten folgt dann

$$\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x(x-a)}} = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x-b}}{1 + \frac{y^2}{(x-a)(x-b)}}$$

Werden die Brüche auf gewöhnliche Form gebracht und wird die Gleichung reduziert, so kommt nach Kürzung durch y heraus

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

die Gleichung stellt einen Kreis dar. Hinweis (Abb. 22):

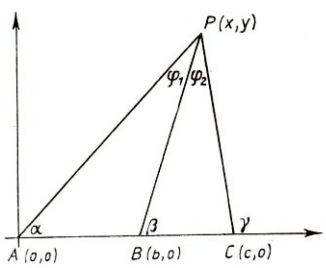


Abb. 22

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{y}{x-b}, \qquad \tan\gamma = \frac{y}{x-c}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{\frac{y}{x-b} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{(x-b)x}} \qquad , \qquad \tan\varphi_2 = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{y}{x-b}}{1 + \frac{y^2}{(x-c)(x-b)}}$$

Aus $\tan\varphi_1 = \tan\varphi_2$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{by}{x^2-bx+y^2} - \frac{(c-b)y}{x^2-(c+b)x+y^2+cb} = 0$$
$$y\left[\frac{b}{x^2-bx+y^2} - \frac{c-b}{x^2-(c+b)x+y^2+cb}\right] = 0$$

1. $y = 0$, d.h., P liegt auf der x-Achse (Entartung).
2. Wenn man den Inhalt der Klammer gleich Null setzt, so erhält man nach Umrechnung und quadr. Ergänzung die Gleichung

$$\left(x - \frac{b^2}{2b-c}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2(c-b)^2}{(2b-c)^2}$$

P liegt also auf dem durch diese Gleichung beschriebenen Kreise. Fehler:

1. Es wird fälschlicherweise durch y dividiert.
2. Die vom Schüler errechnete Gleichung stellt nicht den gesuchten geometrischen Ort dar, sondern einen Punkt (Nullkreis).

2. Die Hypotenuse AB eines rechtwinkligen Dreiecks wird parallel verschoben. Gesucht ist (Abb. 23) der Ort für die Schnittpunkte von AD und BC.

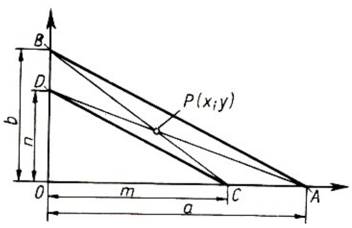


Abb. 23

Lösung: Gleichung von AD:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{n} = 1 \tag{1}$$

Gleichung von BC:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2}$$

Nach dem Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \tag{3}$$

Aus (1) bzw. (2) folgt

$$n = \frac{ay}{a-x} \qquad , \qquad m = \frac{bx}{b-y} \tag{1,2}$$

In (3) eingesetzt:

$$\frac{a^2y}{a-x} = \frac{b^2x}{b-y} \tag{3}$$
$$a^2by - a^2y^2 = ab^2x - b^2x^2$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = ab^2x - a^2by$$
$$(bx-ay)(bx+ay) = ab(bx-ay)$$

Ich dividiere durch $(bx - ay)$

$$bx + ay = ab \qquad , \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

also die gegebene Hypotenuse. (?)[7]

Hinweis: Der angegebene Lösungsweg ist richtig bis zur Gleichung

$$(bx - ay)(bx + ay) = ab(bx - ay)$$

die man umformt in

$$(bx - ay)(bx + ay - ab) = 0$$

1. $bx - ay = 0$: $y = \frac{b}{a}x$
Der geometrische Ort ist also eine Gerade durch den Ursprung.

2. $bx + ay - ab = 0$ führt zu $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, das ist die Gleichung der gegebenen Hypotenuse. Jeder Punkt der Hypotenuse kann also dann gleich P sein, wenn AB mit CD zusammenfällt. Fehler: Die Division durch $bx - ay$ ist nicht erlaubt.

3. Die Gleichung des Kreises ist abzuleiten.

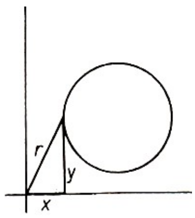


Abb. 24

Lösung: Verbindet man (Abb.24) einen Punkt des Kreises, der die Koordinaten x und y hat, mit dem Koordinatenanfangspunkt, so ist, wenn r die Entfernung des Punktes vom Koordinatenanfangspunkt ist, $x^2 + y^2 = r^2$. Das gilt für jeden Punkt des Kreises.

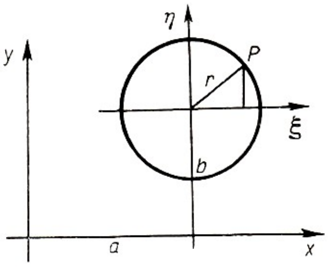


Abb. 25

$$\xi = x - a \quad , \eta = y - b$$
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 \quad , (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Fehler: Der Abstand jedes beliebigen Punktes vom Ursprung lässt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras darstellen. Die angeführte Gleichung hat also keine Beziehung zum darzustellenden Kreis.

4. Welche Koordinaten hat der Parabelpunkt, für den der Brennstrahl die gleiche Länge hat wie die im Punkt gezogene Tangente (Abb. 26)?

Lösung: Länge der Tangente: $l_1 = \sqrt{(2x_1)^2 + y_1^2}$ Länge des Brennstrahls:

$$l_2 = \sqrt{y_1^2 + \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} \qquad , \qquad l_1 = l_2$$

$$(2x_1)^2 + y_1^2 = y_1^2 + \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2, \qquad (2x_1)^2 = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2, \qquad 2x_1 = x_1 - \frac{p}{2}$$

[7] Auch das Fragezeichen wurde von dem Schüler hingeschrieben.

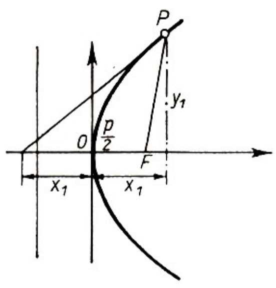


Abb. 26

Es gibt also keinen Parabelpunkt von der verlangten Eigenschaft.

Hinweis: Der Lösungsweg ist richtig bis zur Gleichung

$$(2x_1)^2 = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten

$$2x_1 = +\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)$$

woraus folgt $x_1 = -\frac{p}{2}$, dieser Wert entfällt.

$$2x_1 = -\left(x_1 + \frac{p}{2}\right), \qquad x_1 = \frac{p}{6}, \qquad y_1 = \frac{p}{3}\sqrt{3}$$

Für diesen Punkt gilt $l_1 = l_2 = \frac{2}{3}p$.

Fehler: Beim Lösen der quadratischen Gleichung wird nicht berücksichtigt, dass quadratische Gleichungen im allgemeinen zwei verschiedene Lösungen haben.

5. Es soll $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 3x + \tan 5x}{\tan x}$ gefunden werden.

Lösung: Wenn $x = \frac{\pi}{2}$ ist, ist $\tan 3x = \tan 5x = \tan x$, also ist der gesuchte Grenzwert $\frac{2\tan x}{\tan x} = 2$.

Hinweis: Unter Verwendung der Regel von l'Hospital erhält man folgenden Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\tan 3x + \tan 5x}{\tan x} \\
u &= \tan 3x + \tan 5x; \qquad v = \tan x \\
u' &= \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{5}{\cos^2 5x}; \qquad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\
\frac{u'}{v'} &= \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x} + \frac{5\cos^2 x}{\cos^2 5x}
\end{aligned}$$

Nach Umrechnung erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\frac{u'}{v'} &= \frac{3}{(4\cos^2 3x)^2} + \frac{5}{[(4\cos^2 x - 3)(2\cos^2 x - 1) - (3\sin x - 4\sin^3 x)2\sin x]^2} \\
\frac{u'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{v'\left(\frac{\pi}{2}\right)} &= \frac{3}{(-3)^2} + \frac{5}{[(-3)(-1) - (3-4)2]^2} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x + \tan 5x}{\tan x} = \frac{8}{15}$$

Die Aufgabe lässt sich auch ohne die Regel von l'Hospital lösen, indem man $\tan 3x$ und $\tan 5x$ mit Hilfe der Additionstheoreme ausdrückt.

Fehler: Die Tangensfunktion ist an den interessierenden Stellen nicht definiert.

6. Untersuche die Funktion

$$y = \frac{x^2 + x - 20}{2x - 8}$$

auf Extremwerte!

Lösung:

$$y' = \frac{(2x-8)(2x+1)-(x^2+x-20)\cdot 2}{(2x-8)^2} = \frac{2x^2-16x+32}{(2x-8)^2}$$
$$2x^2-16x+32=0 \qquad , \qquad (x-4)^2=0$$
$$x=+4; \qquad y = \frac{16+4-20}{8-8} = \frac{0}{0}$$

Zur Bestimmung von 4 differenziere ich Zähler und Nenner einzeln.

$$D = \frac{2x+1}{2}$$

Für $x=+4$ erhalte ich den Wert $y=+\frac{9}{2}$. Das Wertepaar $\left(+4,+\frac{9}{2}\right)$ ist das gesuchte.

Hinweis:

$$f(x) = \frac{x^2+x-20}{2x-8}$$

ist definiert für $-\infty < x < 4$ und $4 < x < +\infty$.

$$f'(x) = \frac{2x^2-16x+32}{(2x-8)^2} \qquad , \qquad x^2-8x+16=0$$

würde die Abszisse des Extremwertes $x_E = 4$ ergeben. An dieser Stelle ist aber die Funktion nicht definiert (Lücke). Nun ist

$$f(x) = \frac{x^2+x-20}{2x-8} = \frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)(2x-8)}{2x-8}$$

Kürzt man den Faktor $2x-8$, so entsteht die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Sie ist definiert für alle reellen Zahlen x. Der Punkt $x=4$, $y=\frac{9}{2}$ liegt auf dieser Geraden, die nicht Bild der gegebenen Funktion ist.

7. Ableitung des Brechungsgesetzes (Abb. 27).

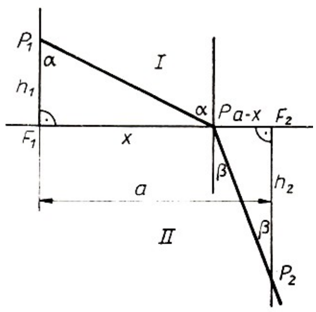


Abb. 27

Der Lichtstrahl möge in I die Geschwindigkeit c_1, in II die Geschwindigkeit c_2 haben. Die Gesamtzeit für den Streckenzug P_1PP_2 ist dann

$$t = \frac{P_1P}{c_1} + \frac{PP_2}{c_2} \tag{1}$$

Nun ist

$$\frac{x}{P_1P} = \sin\alpha \qquad \text{und} \qquad \frac{a-x}{PP_2} = \sin\beta$$

also

$$P_1P = \frac{x}{\sin\alpha} \qquad , \qquad PP_2 = \frac{a-x}{\sin\beta}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$t = \frac{x}{c_1\sin\alpha} + \frac{a-x}{c_2\sin\beta}$$

Das Minimum der Zeit ergibt sich für $t' = 0$, d.h.

$$\frac{1}{c_1\sin\alpha} + \frac{-1}{c_2\sin\beta} = 0$$

oder

$$c_1\sin\alpha = c_2\sin\beta \qquad , \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}{c_2} \\ t'(x) &= \frac{x}{c_1\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{a-x}{c_2\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}} \\ t''(x) &= \frac{h_1^2}{c_1(\sqrt{h_1^2+x^2})^3} - \frac{h_2^2}{c_2(\sqrt{h_2^2+(a-x)^2})^3} > 0 \end{aligned}$$

Aus $t'(x) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{x}{c_1\sqrt{h_1^2+x^2}} &= \frac{a-x}{c_2\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}} \\ \frac{\sin\alpha}{c_1} &= \frac{\sin\beta}{c_2}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} \end{aligned}$$

Fehler: $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ werden beim Differenzieren unberechtigt als konstante Größen behandelt.

2 Trugschlüsse

2.1 Zur Einleitung

Gegenstand des zweiten Teiles dieses Büchleins sind Trugschlüsse.
Ihnen pflegt man die Fehlschlüsse gegenüberzustellen, die im ersten Teil ihren Platz fanden, indem man bei den Trugschlüssen oder Sophismen die Absicht zu täuschen als wesentlich ansieht, während bei den Fehlschlüssen derjenige, der sie begeht, in gutem Glauben handelt. Natürlich ist diese Unterscheidung nicht scharf.

Manchen Fehlschluss, der einem heute begegnet, kann man morgen in der Gestalt eines Trugschlusses weitergeben. Ebenso kommen ganz bekannte Trugschlüsse immer und immer wieder als unabsichtlich begangene Fehler vor.
Man hat wohl versucht, die "Fallacien", unter welchem Namen man Trugschlüsse und Fehlschlüsse manchmal vereinigt, hinsichtlich der Art ihrer Fehler zu gruppieren, doch ist im allgemeinen wenig damit anzufangen aus einem begreiflichen Grunde.
Man pflegt nämlich bei Beweisen und Überlegungen vielfach nicht alle Zwischenglieder der logischen Entwicklung anzugeben. Sehr oft nun wird gerade der Fehler an diesen nicht näher ausgeführten Stellen begangen. So gehören sehr viele Fehlschlüsse und Trugschlüsse in die große Klasse derjenigen, bei denen irgendein nicht näher bezeichneter Punkt als selbstverständlich angesehen wird.

Es ist gerade die Kunst bei der Aufstellung und noch mehr beim Vortrag eines Trugschlusses, den absichtlich begangenen Fehler so zu verdecken, dass er zunächst unbemerkt bleibt, dass Leser oder Hörer erst am absurden Ergebnis merken: irgendwie hast du dich irreführen lassen. Die Absicht wird nicht bei jedermann, auch nicht bei jedem Problem in gleich guter Weise erreicht werden.

Es gibt sehr bedächtige Leute, und ihnen ist schwer beizukommen, zumal wenn die merkwürdige Behauptung sie doppelt vorsichtig macht. Es kommt auch darauf an, in welchem Maße der Leser mit den Rechen- und Beweismitteln bekannt ist.

Trugschlüsse müssen also maskiert sein, wenn sie wirken sollen, wenn der Leser oder Hörer überrascht sein soll. Geschieht das nicht, so ist die Sache trivial und reizlos. Ich gebe drei Beispiele, die uns in verhüllter Form in den ersten beiden Abschnitten mehrfach wieder begegnen werden:

1. Aus $0 \cdot 7 = 0 \cdot 8$
folgt durch Wegheben des links und rechts gemeinsamen Faktors 0: $7 = 8$.

2. Es ist $(-a)^2 = (+a)^2$
Zieht man beiderseits die Quadratwurzel, so ergibt sich $-a = +a$.

3. Es werden zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten vorgelegt:

$$x + y = 1 \qquad , \qquad x + y = 2$$

Daraus schließt man $1 = 2$.

Allerdings kann ein Trugschluss unter Umständen im 5. Schuljahr am Platze sein, der dem größeren Schüler nur noch ein Lächeln entlockt. Ich erinnere etwa an die bekannte Scherzfrage: Wie kann man zeigen, dass $45 - 45 = 45$ ist? [10]

4.Es ist

$$\begin{aligned} 9+8+7+6+5+4+3+2+1 &= 45 \qquad \text{und} \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= 45 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile wird von der ersten subtrahiert und beginne nach den bekannten Subtraktionsregeln von rechts: 9 von 1 geht nicht, borge ich mir eins, 9 von 11 ist 2; 8 von 1 geht nicht, borge ich mir eins, 8 von 11 ist 3; so fahre ich fort: 7 von 12 ist 5; 6 von 13 ist 7; 5 von 14 ist 9; 4 von 5 ist 1; 3 von 7 ist 4; 2 von 8 ist 6; 1 von 9 ist 8. Ich erhalte also

$$8+6+4+1+9+7+5+3+2 = 45$$

und habe gezeigt, dass in der Tat $45 - 45 = 45$ ist.[8]

Freilich, gelegentlich sind auch derartige Trugschlüsse, bei denen der Fehler sofort auf der Hand liegt, nicht ohne Reiz. - Einige Beispiele dieser Art.

5. Zunächst eine sehr bekannte Geschichte. Jemand geht in ein Geschäft und kauft sich ein Bild für 15,- M. Anderen Tages kommt er ins Geschäft zurück: Er wolle das Bild umtauschen. Er sucht sich ein anderes aus, das 30,- M kostet. Ohne zu zahlen, geht er hinaus. Der Geschäftsinhaber hält ihn zurück.
Da sagt der Schlauberger: Ich habe Ihnen ja das Bild im Werte von 15,- M hiergelassen, und gestern habe ich Ihnen 15,- M bar bezahlt. Das macht zusammen 30,- M. Wir sind also quitt!

6. Nicht minder lehrreich ist der folgende Trugschluss:
Man hört oft, dass die Zahl der Menschen in früheren Zeiten weit geringer gewesen sei als in der Gegenwart. Eine einfache Überlegung lehrt, wie falsch diese Ansicht ist.

Es sei die Anzahl der gegenwärtig lebenden Menschen n. Jeder dieser n Menschen hat einen Vater und eine Mutter gehabt, also 2 Eltern; die Zahl seiner Großeltern beträgt insgesamt 4. Geht man bis zur p-ten Generation zurück, so ist die Zahl aller seiner Urahnen in dieser Generation 2^p. Wir nehmen jetzt an, dass die Zahl der Jahre, die einer Generation entspreche, 30 sei; das ist eher zuviel als zuwenig gerechnet.

Dann hat also der einzelne Mensch, wenn man $30 \cdot p$ Jahre zurückgeht, 2^p Urahnen, die zu dieser Zeit lebten. Für n Menschen macht das $n \cdot 2^p$ Urahnen.
Da 2^{10} ungefähr 1000 ist, so lebten also bereits vor 300 Jahren etwa 1000 mal soviel Menschen als in der Gegenwart, vor 600 Jahren sogar 1000000 mal soviel und so fort.

7. Die Gleichung

$$(5-3x) \cdot (7-2x) = (11-6x) \cdot (3-x)$$

löst jemand folgendermaßen [14]:

$$\begin{aligned} 5 - 3x + 7 - 2x &= 11 - 6x + 3 - x \\ 12 - 5x &= 14 - 7x \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Er macht die Probe, und es stimmt, denn $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.

[8] Abgesehen von der überholten Ausdrucksweise "borgen" wird jeweils nicht ein Einer, sondern ein Zehner "geborgt".

8. Ein anderer Schüler kürzte in $\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$ die Exponenten 2 und erhielt $\frac{1+x}{1-x}$; und dabei kam er auf ein richtiges Ergebnis.

Man kann an die Stelle ausgeführter Trugschlüsse auch eine Frage setzen; man gibt also nicht die falsche Lösung an und fordert dann die Aufdeckung des Trugschlusses. Häufig wird dann der Antwortende den Trugschluss begehen, wenn er ihm durch die Fassung der Aufgabe nahegelegt wird, zumal bei einiger Geschicklichkeit des Fragenden.

9. Die Frage, wieviel ein Buch und sein Einband kosten, wenn das gebundene 11,- M kostet und das Buch 10,- M teurer als sein Einband ist, wird der in Mathematik wenig Geübte fast regelmäßig dahin - falsch - beantworten, dass 10,- M das ungebundene Buch, 1,- M der Einband kostet.

10. Jemand kauft beim Kaufmann Ware zu 6,- M. Er bezahlt mit einem Zehnmarkschein. Der Kaufmann kann nicht herausgeben, er wechselt beim Nachbar den Schein und gibt nun dem Käufer 4,- M heraus. Tags darauf bringt der Nachbar den Schein zurück, er ist gefälscht.
Der Kaufmann muss, nachdem er schon dem Käufer 4,- M in richtigem Gelde gegeben, wohl oder übel auch noch dem Nachbar 10,- M in richtigem Gelde geben. Wieviel hat er verloren?
Der vorschnelle Schüler wird erst 14,- M raten, dann vielleicht noch den Verlust der Ware hinzufügen - ohne im Augenblick daran zu denken, dass der Kaufmann ja auch die 10,- M richtigen Geldes vom Nachbar vereinnahmt hat.

11. Ein D-Zug, der von Leipzig nach Berlin fährt, und ein Personenzug, der von Berlin nach Leipzig fährt, treffen sich. Der D-Zug hat eine Stundengeschwindigkeit von 80 km, der Personenzug nur eine solche von 40 km. Welcher von den beiden Zügen ist weiter von Berlin entfernt, der D-Zug oder der Personenzug?
Man mache den Versuch und wird überrascht sein, wie viele Leute man mit dieser Frage hineinlegen kann.

Eine eigene Klasse von Trugschlüssen bilden diejenigen, bei denen gänzlich falsche Rechnungen zum richtigen Ergebnis führen. Wir lernten ja schon in Nr. 7 und 8 Beispiele kennen. Die Überraschung liegt hier eben darin, dass an Stelle des erwarteten falschen Resultats das richtige erscheint. Für diese Gattung zwei weitere Beispiele:

12. In $\frac{26}{65}$ oder $\frac{16}{64}$ kann man ungestraft die 6 "kürzen", man erhält doch das richtige Ergebnis.

13. In $\sqrt{5\frac{5}{24}}$ kann man die 5 einfach vor das Wurzelzeichen ziehen oder in $\sqrt{12\frac{12}{143}}$ die 12. In der Tat ist

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}} \qquad ; \qquad \sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$$

Allgemein ist nämlich

$$\sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n(n^2-1)+1}{n^2-1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$$

In den nun folgenden Kapiteln darf bei den verbreiteteren Trugschlüssen von Quellenangaben abgesehen werden. Bei unbekannten Trugschlüssen jedoch wird der Autorname angegeben.
Über die Geschichte der Trugschlüsse ist, von einigen ganz besonderen Beispielen wie etwa dem Paradoxon des Zeno abgesehen, sehr wenig bekannt. Vielfach werden solche Scherze von Mund zu Mund weitererzählt und irgendwo veröffentlicht, ohne dass man weiß, ob das nun wirklich die erste Wiedergabe ist. [2]

Und nun noch ein Wort über die Lektüre dieser Trugschlüsse.
Mit dem Erstaunen über das falsche Ergebnis und dem daraus abgeleiteten Trugschluss, dass die über alle Täuschung erhabene Mathematik auch einmal versagt, ist es nicht genug. Der Fehler will natürlich entdeckt und erkannt sein. Aber auch das Aufdecken der Fehler durch den Leser dürfte noch nicht das Endziel sein.
Man darf sich nicht damit begnügen, den Finger auf die Stelle zu legen, wo der Fehler steckt. Man versuche, ihn auf eine knappe Form zu bringen, den Fehler gleichsam aus der mehr oder weniger verbergenden Einkleidung herauszuschälen. Vielleicht ist es auch ratsam, selbst eine andere Einkleidung zu ersinnen.

"... wenn ich einen Denker lese, der sich irrt, so muss ich die genaue Stelle suchen, wo er vom Wege abgewichen ist; ich muss dem Irrtum bis in seinen Bau nachspüren ...", so sagte der alte französische Moralist Galiani.

Der Kern nicht weniger dieser Trugschlüsse hat in der Geschichte der Mathematik eine Rolle gespielt; einige Trugschlüsse können geradezu als Ausgangspunkte für neue Wege mathematischer Forschung angesehen werden.

2.2 Arithmetik

1. Es ist 2 kg = 2000 g und 3 kg = 3000 g.
Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches, also ist

$$6 \text{ kg } = 6000000 \text{ g}$$

Dividiert man allerdings die Gleichungen durcheinander, dann erhält man

$$\frac{2}{3} \text{ kg } = \frac{2}{3} \text{ g}$$

2.

$$\sqrt{25000 \text{ Pf}} = \sqrt{50 \text{ Pf} \cdot 50 \text{ Pf}} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{ M} \cdot \frac{1}{2} \text{ M}} = \sqrt{\frac{1}{4} \text{ M}} = \sqrt{25 \text{ Pf}} = 5 \text{ Pf}$$

oder: Es ist $\frac{1}{4}$ M $= 25$ Pf., folglich $\sqrt{\frac{1}{4} \text{ M}} = \sqrt{25 \text{ Pf}}$, folglich $\frac{1}{2}$ M $= 5$ Pf.[9]

3. Wendet man auf die folgenden zwei Sätze:

1 Katze hat 4 Beine
0 Katze hat 3 Beine

(den letzten Satz lies: Keine Katze hat 3 Beine) den Grundsatz an: "Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches", so erhält man das merkwürdige Ergebnis: 1 Katze hat 7 Beine.

4. Ein Vater hinterließ bei seinem Tode 3 Söhne und 17 Kamele. Er hatte bestimmt, diese Kamele so zu verteilen, dass der älteste Sohn die Hälfte, der zweite ein Drittel, der jüngste ein Neuntel der Kamelherde erben solle. Als sich die drei genug herumgestritten hatten, ohne sich zu einigen, kam ein alter Mann daher mit einem alten abgetriebenen Kamel.

Er erklärte sich sofort bereit, die Teilung vorzunehmen und sein eigenes Tier zur Verfügung zu stellen. So erhielt denn der älteste Sohn von den jetzt vorhandenen 18 Kamelen 9, der zweite

[9] In Beispiel 1 und 2 beachte die Bezeichnungen!

6, der dritte 2. Eines blieb übrig - es war nicht gerade jenes abgetriebene des Alten, sondern eines aus der wohlgenährten Herde des Verstorbenen. Mit ihm zog der hilfreiche Alte befriedigt von dannen.

5. Jede Zahl ist gleich ihrem Doppelten. Es ist

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

Zieht man links a vor die Klammer und wendet man rechts die Formel $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ an, so folgt

$$a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$$

Dividiert man jetzt beide Seiten durch den Faktor $(a - a)$, so erhält man das Ergebnis

$$a = 2a$$

Der Trugschluss lässt sich auch in eine andere Form kleiden. Es sei $x = 1$, dann ist $x^2 = 1$ oder $x^2 - 1 = 0$, also nach der Division durch $x - 1$ auch $x + 1 = 0$, d.h. auch $x = -1$. Daraus folgt $1 = -1$ oder auch $2a = 0$, d.h., jede beliebige Zahl ist Null. - Es ist also nicht schwer, das Sprichwort "Einmal ist keinmal" mathematisch zu beweisen!
Hinweis: Division durch Null!

6. Alle Zahlen sind einander gleich. Es seien a und b zwei Zahlen, und zwar sei etwa $a > b$. Dann führt man eine positive Zahl c so ein, dass

$$a = b + c$$

ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $a - b$, so erhält man

$$\begin{aligned} a \cdot a - a \cdot b &= a \cdot b + a \cdot c - b \cdot b - b \cdot c \\ a \cdot a - a \cdot b - a \cdot c &= a \cdot b - b \cdot b - b \cdot c \\ a \cdot (a - b - c) &= b \cdot (a - b - c) \end{aligned}$$

und wenn man durch den gemeinsamen Faktor beiderseits dividiert: $a = b$.

7. $4 = 5$. In einer Badezelle in Weimar wurde im Jahre 1892 der folgende Beweis angeschrieben gefunden. Wir legen vor $a = b + c$:

multiplizieren mit 5	$5a = 5b + 5c,$
addieren	$4b + 4c = 4a$
und subtrahieren noch	$9a = 9a$
dann folgt	$4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$
oder	$4(b + c - a) = 5(b + c - a)$

Daraus folgt sofort die behauptete Tatsache.

8. Beweis, dass $2 \cdot 2 = 5$ ist.
Es gibt ein Theaterstück: $2 \cdot 2 = 5$. Wenn die Güte eines Theaterstückes der Anzahl der Aufführungen proportional ist, muss es sehr schön sein. Ich weiß leider nicht, ob in diesem Theaterstück die Richtigkeit der Titelgleichung bewiesen wird. Jedenfalls könnte es außer

nach dem Vorbilde von Nr. 7 auch noch in folgender Weise geschehen. Es ist

$$\begin{aligned} 16 - 36 &= 25 - 45 \\ 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\ \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\ 4 &= 5 \end{aligned}$$

9. Eine Zahl ändert ihren Wert nicht, wenn man 1 zu ihr addiert. Es ist[10]

$$n^2 - n(2n+1) = (n+1)^2 - (n+1)(2n+1)$$

wovon man sich leicht durch Ausmultiplizieren überzeugt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} n^2 - n(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 &= (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \\ \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2 &= \left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 \\ n - \frac{2n+1}{2} &= n + 1 - \frac{2n+1}{2} \\ n &= n+1 \end{aligned}$$

10. $2 = -2$. Es ist

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot (-4)} = \sqrt{4} = 2$$

Andererseits ist aber

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = i \cdot 2i = -2$$

wenn wir $\sqrt{-1} = i$ und also $i^2 = -1$ setzen. Daraus folgt die Behauptung.

In ähnlicher Weise kann man zeigen:
Jede positive Zahl ist gleich der negativen Zahl, die denselben absoluten Wert hat. Nach den Gesetzen über die Wurzelrechnung ist

$$\begin{aligned} \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} &= \sqrt{(-a) \cdot (-a)} = \sqrt{a^2} = a \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} &= (\sqrt{-a})^2 = -a \end{aligned}$$

folglich ist $a = -a$.

11. $i^2 = 1$. Es ist $\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}$.
Diese Gleichung gilt, welche Werte auch die Größen x und y annehmen. Es ist also

$$\sqrt{a-b} = i \cdot \sqrt{b-a} \qquad \text{und ebenso} \qquad \sqrt{a-b} = i \cdot \sqrt{a-b} \tag{*}$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so folgt

$$\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a} = i^2 \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{a-b}$$

[10] Nr. 8 ist ein Sonderfall von Nr. 9.

| Nach Division durch die gemeinsamen Faktoren erhält man $i^2 = 1$.
Diese Tatsache lässt sich noch auf anderem Wege "beweisen". Es ist

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

folglich

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{i} = i$$

Es ist also $i^2 = 1$.
Hinweis: Für $a > b$ gilt die erste der beiden Gleichungen (*) nicht, für $a < b$ gilt die zweite nicht.

12. $i = 1$. Es ist $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{2}$, woraus die Behauptung folgt.
Hinweis: $\sqrt[4]{-1}$ hat vier Werte.

13. Der Logarithmus einer negativen Zahl ist gleich dem Logarithmus der entsprechenden positiven Zahl. Es ist

$$2\lg a = \lg(a^2) = \lg([-a]^2) = 2\lg(-a)$$

also der Behauptung entsprechend $\lg a = \lg(-a)$.
Ein Sonderfall davon:
Der Logarithmus von -1 ist Null. Wenn man die Gleichung $(-1)^2 = 1$ logarithmiert, so erhält man

$$2\lg(-1) = \lg 1 = 0$$

Aus diesem Ergebnis $\lg(-1) = 0$ kann man noch andere überraschende Schlüsse ziehen. Es folgt daraus z.B.

$$10^0 = -1$$

und da die linke Seite dieser Gleichung den Wert 1 hat, $1 = -1$.

Hinweis: $b = \log_a c$ ist im Bereich der reellen Zahlen nur definiert für $c > 0$. Der Logarithmus einer negativen Zahl ist komplex,

14. Die geraden Zahlen sind 0, die ungeraden Zahlen sind 1. Logarithmiert man die Gleichung $(-1)^{2n} = +1$, so folgt

$$2n\lg(-1) = \lg 1 = 0 \qquad \text{also} \qquad 2n = 0 \quad \text{oder} \quad \lg(-1) = 0$$

Aber

$$(-1)^{2n+1} = -1; \qquad (2n+1)\lg(-1) = \lg(-1); \qquad 2n+1 = 1$$

und folglich $2n = 0$.

15. $+1 = -1$. Es sei b eine positive, von 1 verschiedene Zahl. Wir bestimmen a so, dass $b^a = -1$ ist. Dann ist

$$b^{2a} = +1$$

woraus, da $b \neq 1$ ist, folgt $2a = 0$. Also ist $a = 0$ und $b^a = +1$, woraus im Zusammenhang mit der Ausgangsgleichung unsere Behauptung folgt.

Hinweis: Es gibt kein a so, dass $b^a = -1$ ist.

16. $2\pi = 0$. Es ist für alle φ

$$\cos\varphi = \cos(2\pi + \varphi) \qquad , \qquad \sin\varphi = \sin(2\pi + \varphi)$$

folglich

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos(2\pi + \varphi) + i\sin(2\pi + \varphi)$$

Durch Potenzierung mit i und Anwendung des Moivreschen Satzes ergibt sich

$$\cos i\varphi + i\sin i\varphi = \cos i(2\pi + \varphi) + i\sin i(2\pi + \varphi)$$

Verwendet man nun aber die Formel[11]

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

indem man x einmal $i\varphi$, das andere Mal $i(2\pi + \varphi)$ setzt, dann erhält man die Gleichung

$$e^{-\varphi} = e^{-2\pi-\varphi} \qquad \text{woraus} \qquad e^{2\pi} = 1, \qquad 2\pi = 0$$

folgt.[12]

17. $\pi = 0$. Aus der Formel

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

folgt für

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$2i\pi \ln e = 0$$

wegen $\ln e = 1$ folgt $2i\pi = 0$ und damit $\pi = 0$ oder $i = 0$.
$i = 0$ anzuerkennen, würde bedeuten, sämtliche komplexen Zahlen abzulehnen. Schließt man jedoch $i = 0$ aus, dann folgt $\pi = 0$.

Hinweis: Der Logarithmus einer komplexen Zahl ist eine unendlich vieldeutige Funktion.

18. Wenn $a > b$ ist, dann ist auch $a > 2b$ (a und b sind positive Zahlen). Aus

$$a > b \tag{1}$$

folgt durch Multiplikation mit b

$$a \cdot b > b^2$$

und ferner, wenn man beiderseits a^2 subtrahiert

$$a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2$$

oder nach Division durch $b - a$:[13]

$$a > b + a$$

Addiert man zu dieser schon recht merkwürdigen Ungleichung jetzt die obige Ungleichung (1), so erhält man

$$2a > 2b + a. \qquad \text{Folglich ist} \qquad a > b.$$

[11] Diese Formel ist als eine der Eulerschen Formeln bekannt.
[12] Der Satz von Moivre $(cosx + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ gilt nicht für komplexes n.
[13] Da $b - a < 0$ ist, folgt nach Division durch diese negative Zahl $a < b + a$.

19. Jede positive Zahl ist kleiner als Null. Es sei n eine ganze positive Zahl. Dann ist $2n-1 < 2n$. Multipliziert man diese Ungleichung mit $-a$, wo a irgendeine positive Zahl ist, so erhält man

$$-2an + a < -2an$$

Folglich ist, wenn man beiderseits $2an$ addiert, $a < 0$.

20. $\frac{1}{8}$ ist größer als $\frac{1}{4}$. Es ist $\lg\frac{1}{2} = \lg\frac{1}{2}$, $3 > 2$.
Durch Multiplikation erhält man[14]

$$3\lg\frac{1}{2} > 2\lg\frac{1}{2}; \qquad \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2; \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

und das ist die Behauptung.

21. $-1 > +1$. Wenn in der Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

der links stehende Bruch größer als 1 ist, so muss es auch der rechts stehende sein, mit anderen Worten: Aus $a > b$ folgt $c > d$. Nun ist die Produktengleichung der Proportion

$$a \cdot d = b \cdot c$$

offenbar erfüllt, wenn man $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = +1$ setzt. Hier ist $a > b$, also muss auch $c > d$ sein, d.h. $-1 > +1$.

22. $1 \neq 1$. Aus der Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

denn in beiden Fällen ergibt sich als Produktengleichung $ad = ba$.
In der Proportion

$$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}$$

werde x so bestimmt, dass das Gleichheitszeichen zu Recht besteht. Dann liefert die Anwendung der obigen Regel

$$\frac{3a-4b}{3a-8b} = \frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b}$$

Rechts steht 1, links aber ein Bruch, der sicherlich nicht: 1 ist.[15]

23. $+1 = -1$. Aus der Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

folgt, wie man sich durch Aufstellung der Produktengleichung überzeugen kann,

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

[14] Wegen $\lg\frac{1}{2} < 0$ folgt $3\lg\frac{1}{2} < 2\lg\frac{1}{2}$.
[15] Da $x = a - b$ ist, erhält man rechts den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Das wenden wir auf die Gleichung

$$\frac{x+1}{a+b+1} = \frac{x-1}{a+b-1}$$

an und erhalten

$$\frac{x-a-b}{a+b+1} = \frac{x-a-b}{a+b-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{x+1}{a+b-x} = \frac{x-1}{a+b-x}$$

In beiden Fällen schließt man daraus $+1 = -1$.[16]

2.3 Algebra

1. Vorgelegt sind die Gleichungen

$$2x + y = 8 \qquad \text{und} \qquad x = 2 - \frac{y}{2}$$

Man setzt, um die Gleichungen zu lösen, den Wert von x aus der zweiten Gleichung in die erste ein und erhält:

$$4 - y + y = 8$$

Daraus folgt $4 = 8$.[17]

2. Die Gleichung $6x + 25 = 10x + 15$ behandelt jemand folgendermaßen: Es ist

$$3(2x+5) = 5(2x+5)$$

folglich ist $3 = 5$.

3.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} &= 0 \\
(x+2)(x+3) - 2(x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) &= 0 \\
x^2 + 5x + 6 - 2(x^2 + 4x + 3) + x^2 + 3x + 2 &= 0
\end{aligned}$$

folglich $2 = 0$.
Hinweis:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0$$

führt zu

$$\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$$

es gibt also keinen endlichen Wert für x, der die vorgelegte Gleichung erfüllt.

4.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+3} &= 1 \\
(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) &= (x+1)(x+2)(x+3) \\
x^2 + 5x + 6 + x^3 + 4x^2 + 3x + x^2 + 3x + 2 &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6
\end{aligned}$$

folglich $2 = 0$.

[16] Wegen $x = a + b$ gehen die beiden letzten Gleichungen in $\frac{0}{a+b+1} = \frac{0}{ab-1}$ und $\frac{x+1}{0} = \frac{x-1}{0}$ über.
[17] Die vorgegebenen Gleichungen widersprechen sich.

5. Die Gleichung $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$ löst jemand folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{x+5-5(x-7)}{x-7} &= \frac{4x-40}{13-x} \\ -\frac{4x-40}{x-7} &= \frac{4x-40}{13-x} \\ \frac{4x-40}{7-x} &= \frac{4x-40}{13-x} \end{aligned}$$

und folgert daraus, dass $7 = 13$ ist.

6. Die Gleichung $\frac{3(5x+4)}{x(x+6)} - \frac{4}{x} = \frac{11x-67}{(x+6)(x-5)}$ löst jemand so:[18]

$$\begin{aligned} 3(5x+4)(x-5) - 4(x+6)(x-5) &= x(11x-67) \\ 15x^2 - 63x - 60 - 4x^2 - 4x - 120 &= 11x^2 - 67x \\ 60 &= 0 \end{aligned}$$

7. Beim Vergleich zweier Funktionen

$$f_1(x) = \frac{3x^2 - 15x + 18}{2x-4} \qquad , \qquad f_2(x) = \frac{3x^2 - 15x + 18}{x^2 + 3x - 10}$$

und der Entscheidung der Frage, wo sich die ihnen entsprechenden Kurven schneiden, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{3x^2 - 15x + 18}{2x-4} = \frac{3x^2 - 15x + 18}{x^2 + 3x - 10}$$

Daraus folgt[19]

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 2x - 4 \\ x^2 + x &= 6 \\ x_1 &= 2, \qquad x_2 = -3 \end{aligned}$$

Sind das wirklich die Lösungen?

8. Zwei beliebige Zahlen sind einander gleich. Vorgelegt ist die Gleichung

$$(x-a)^2 = (x-b)^2$$

Zieht man beiderseits die Quadratwurzel, so erhält man $x - a = x - b$, folglich ist $a = b$.

Jemand wird sagen: Wenn $a \neq b$, ist $x - a \neq x - b$, folglich auch $(x-a)^2 \neq (x-b)^2$. Die Ausgangsgleichung ist also unsinnig. Aber doch hat sie eine Lösung. Denn aus

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

folgt

$$2x(a-b) = a^2 - b^2 \qquad , \qquad x = \frac{a+b}{2}$$

[18] Die angegebene Gleichung wird durch keinen endlichen Wert für x erfüllt.
[19] $x = 2$ ist keine Lösung; $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gehen an dieser Stelle in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über.

Hinweis: Aus $(x-a)^2 = (x-b)^2$ folgt $|x-a| = |x-b|$, d.h.

$$1. \quad x-a = x-b \qquad \text{oder} \qquad -(x-a) = -(x-b)$$

und damit $a = b$.

$$2. \quad x-a = -(x-b) \qquad \text{oder} \qquad -(x-a) = x-b$$

und damit $x = \frac{a+b}{2}$.

Anderer Lösungsweg:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= (x-b)^2\\ x^2-2ax+a^2 &= x^2-2bx+b^2 \qquad \text{führt zu}\\ (a-b)[2x-(a+b)] &= 0; \qquad a-b=0; \qquad a=b\\ 2x-a(a+b) &= 0; \qquad x = \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

9. Die Gleichung $\sqrt{x}+x=2$ ist zu lösen. Aus

$$\sqrt{x} = 2-x \qquad \text{folgt} \qquad x = 4-4x+x^2, \quad x^2-5x+4=0$$

$$x_1 = \frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9} = 4 \qquad , \qquad x_2 = \frac{5}{2}-\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9} = 1$$

Setzen wir den ersten Wert in die Ausgangsgleichung ein, dann folgt $6 = 2$.

10. Die Gleichung $3\sqrt{x}+x+2=0$ ist zu lösen. Aus

$$3\sqrt{x} = -x-2 \qquad \text{folgt} \qquad 9x = x^2+4x+4, \quad x^2-5x+4=0$$

$$x_1 = \frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4} = 4 \qquad , \qquad x_2 = 1$$

Setzen wir den ersten Wert in die Ausgangsgleichung ein, dann folgt $12 = 0$, setzen wir den zweiten Wert ein, $6 = 0$.

11. Die folgende Gleichung ist zu lösen:

$$\sqrt{x-9}+\sqrt{x-4} = \sqrt{x-7}+\sqrt{x-6}$$

Quadriert man beiderseits, dann erhält man

$$x-9+2\sqrt{(x-9)(x-4)}+x-4 = x-7+2\sqrt{(x-7)(x-6)}+x-6$$

Hebt man beiderseits gleiche Glieder weg und quadriert abermals, dann wird

$$\begin{aligned}(x-9)(x-4) &= (x-7)(x-6)\\ x^2-13x+36 &= x^2-13x+43\\ 36 &= 42, \qquad 6=7\end{aligned}$$

Hinweis: Es gibt kein endliches x, das die Gleichung erfüllt.

12. Die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 4 \qquad , \qquad x^2 + 2xy - 3y^2 = 9 \tag{1,2}$$

sind vorgelegt. Man multipliziert die beiden Gleichungen "übers Kreuz":

$$9(2x^2 - 3xy + y2) = 4(x^2 + 2xy - 3y^2)$$

ordnet $14x^2 - 35xy + 21y^2 = 0$ und dividiert durch 7:

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$

Nach Division durch y^2 erhält man für $\left(\frac{x}{y}\right)$ die quadratische Gleichung

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 3 = 0$$

Die zwei Lösungen liefern

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = 1\frac{1}{2} \qquad , \qquad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = 1$$

Setzt man $x := 1\frac{1}{2}y$ etwa in die erste Gleichung (1) ein, so erhält man die Wurzeln

$$y_{1,2} = \pm 2 \qquad ; \qquad x_{1,2} = \pm 3$$

Setzt man aber, die zweite Lösung ausnutzend, $x = y$, dann erhält man aus der ersten Gleichung $0 = 4$, aus der zweiten $0 = 9$. Beides recht merkwürdige Ergebnisse!

13. $\frac{b}{c} = \frac{a+b}{a+c}$. Auf das Gleichungssystem

$$\frac{x-a+c}{y-a+b} = \frac{b}{c} \qquad , \qquad \frac{x+c}{y+b} = \frac{a+b}{a+c}$$

wendet man das im vorangehenden Abschnitt angewandte Proportionsgesetz an und findet

$$\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c} = \frac{b}{c} \qquad , \qquad \frac{x-a-b+c}{y-a+b-c} = \frac{a+b}{a+c}$$

Es sind also die beiden Brüche $\frac{b}{c}$ und $\frac{a+b}{a+c}$ auch bei von 0 verschiedenem a gleich.

Hinweis: Durch die ausgeführten Operationen nehmen in beiden Gleichungen die linken Seiten die Form $\frac{0}{0}$ an. (Der Wert dieses unbestimmten Ausdrucks lässt sich nur bestimmen als Grenzwert eines Quotienten, bei dem Zähler und Nenner gegen Null streben [3], [5], [13].) Aus der formalen Gleichheit der linken Seiten kann man also nicht auf die Gleichheit der rechten Seiten schließen.

14. Löse die Gleichung

$$1,3247^x + 1,3247^{x+1} + 1,3247^{x+2} = 1,3247^6$$

Aus $x + (x+1) + (x+2) = 6$ folgt $3x + 3 = 6$ und $x = 1$. Die Probe zeigt, dass das Ergebnis richtig ist.

15. Löse die Gleichung

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}$$

Aus $2x + x = 3$ folgt $x = 1$, und das ist richtig, wie die Probe zeigt.

2.4 Wahrscheinlichkeitslehre

1. Es ist $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$.
Bei einer Münze unterscheidet man Kopfseite (K) und Wappenseite (W). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Wurf wenigstens einmal Wappen fällt?

Es macht für die Beantwortung der Frage nichts aus, ob wir zweimal nacheinander mit einer oder gleichzeitig mit zwei Münzen werfen. Betrachten wir den ersten Fall: Beim ersten Wurf haben wir entweder Wappen, also einen günstigen Fall, oder wir werfen Kopf.
Dann werfen wir noch das zweite Mal und bekommen entweder Wappen oder Kopf. Zwei günstigen Fällen steht ein ungünstiger Fall gegenüber. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$.

Betrachten wir andererseits den zweiten Fall, den gleichzeitigen Wurf zweier Münzen: Wir haben diesmal vier mögliche Fälle zu unterscheiden, die kurz mit WW, WK, KW und KK bezeichnet werden können. Günstig sind drei Fälle. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, Wappen zu werfen, $\frac{3}{4}$. [20]

2. $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Ich werfe drei Münzen gleichzeitig und frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass alle drei die gleiche Seite, sei es Kopf oder sei es Wappen, zeigen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Münzen Kopf zeigen, ist $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Münzen Wappen zeigen, ist ebenfalls $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit also, dass eins oder das andere eintritt, ist $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit lässt sich aber auch auf Grund der folgen- den Überlegung finden. Wie auch der Wurf erfolgt, immer sind notwendigerweise unter den drei Bildern zwei gleiche, seien es nun Köpfe oder Wappen. Die Wahrscheinlichkeit, dass auch noch die dritte Münze das gleiche Bild zeigt, ist $\frac{1}{2}$; so ergibt sich hier als Wahrscheinlichkeit $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3. Die Anzahl der geraden Primzahlen ist 1, die der ungeraden unendlich.
Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine vorgelegte Primzahl gerade ist, $\frac{1}{\infty} = 0$. Es ist also unmöglich, dass mir jemand die Primzahl 2 vorlegt!

Die größte, bisher als Primzahl erkannte Zahl ist

$$2^{2281} - 1$$

sie hat 687 Ziffern. Daraus folgt, dass die Anzahl aller Primzahlen, die die Mathematiker kennen, endlich ist; sagen wir, es sind n Primzahlen bekannt. Die Anzahl aller Primzahlen, die es überhaupt gibt, ist aber unendlich, wie schon Euklid bewiesen hat. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine mir vorgelegte beliebige Primzahl bereits bekannt ist, $\frac{n}{\infty} = 0$.
Mit andern Worten, jede Primzahl, die mir vorgelegt wird, muss unbekannt sein.

2.4. Wahrscheinlichkeitslehre 85 4. $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
Bertrand (1822-1900) hat das folgende Problem gelöst und drei verschiedene Antworten erhalten: In einem Kreise wird eine Sehne beliebig gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie größer ist als die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

a) Man nimmt einen Endpunkt der Sehne fest und macht diesen Punkt zu einem Eckpunkt

[20] Eine der beiden Überlegungen ist ein Fehlschluss, der von d'Alembert (1754) in einem Artikel der Encyclopédie begangen worden ist.

des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Dann ist die Sehne größer als die Dreiecksseite, wenn sie in den Dreieckswinkel fällt. Die Gesamtzahl der möglichen Richtungen steht zu den so gegebenen günstigen Richtungen im Verhältnis von $180°$ zu $60°$, es ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{1}{3}$.

b) Wir wählen einen beliebigen Durchmesser $2r$ und betrachten die dazu senkrechte Schar paralleler Sehnen. Nur diejenigen Sehnen sind dann größer als die Dreiecksseite, die durch Punkte des Durchmessers gehen, deren Abstände vom Kreismittelpunkt kleiner als $\frac{r}{2}$ sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird also $w_2 = \frac{1}{2}$.

c) Wir wählen den Mittelpunkt der Sehne beliebig. Dann wird die durch einen Punkt des Kreises gezogene kürzeste Sehne dann und nur dann größer als die Dreiecksseite, wenn der Punkt innerhalb des um den Kreismittelpunkt mit $\frac{r}{2}$ geschlagenen Kreises liegt. Dessen Fläche ist $\frac{1}{4}$ der Fläche des gegebenen Kreises; also ist $w_3 = \frac{1}{4}$.

5. Zwei Methoden, in Monte Carlo sicher Geld zu gewinnen.
1. Man wählt ein Spiel, bei dem die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $\frac{1}{2}$ ist, also etwa rouge et noir.
Man setzt am 1. Tag 10 fr. Gewinnt man, setzt man noch einmal, und zwar wieder nur 10 fr. Gewinnt man, setzt man wieder 10 fr. usf. Beim ersten Verlieren hört man an diesem Tage auf. So tut man an einer langen Folge von Tagen.
Der mögliche Verlust eines Tages ist dann 10 fr., der mögliche Gewinn aber 10 fr., 20 fr. usf., je nachdem nach zwei-, dreimaligem usf. Spiel aufgehört wird.
Da sich einmaliger Gewinn und einmaliger Verlust in der Wahrscheinlichkeit gleichkommen, steht sich der Spieler mit allen Fällen, in denen er zweimal und mehr am Tage zum Spiel kommt, im Vorteil gegenüber der Bank.

2. Man wählt wieder ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.
Man setzt 10 fr. Gewinnt man, so wiederholt man das Spiel. Verliert man, so setzt man 20 fr. Gewinnt man dann, so hat man, da man 40 fr. ausbezahlt erhält und 30 fr. in die Bank gegeben hat, einen Gesamtgewinn von 10 fr.

Man beginnt von neuem wie eben mit 10 fr. Verliert man aber, so setzt man 40 fr. Gewinnt man jetzt, so ist die Auszahlung 80 fr., die gesamte Einzahlung 10 fr. + 20 fr. + 40 fr. = 70 fr. Wieder ist ein Gewinn von 10 fr. zu verzeichnen.
Verliert man aber wieder, so setzt man jetzt 80 fr. Im Falle des Gewinnes stehen der Auszahlung von 160 fr. insgesamt 150 fr. Einzahlungen gegenüber. So fährt man fort.

Da schließlich, wenn man nur immer auf die gleiche Farbe setzt, doch einmal die günstige Farbe kommt, so muss man schließlich auch einmal gewinnen und hat dann den zwar kleinen, aber sicheren Überschuss von 10 fr.
Bei beiden Methoden ist der Gewinn sicher, obwohl die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes nur $\frac{1}{2}$ ist.

2.5 Planimetrie

1. Zwei Geraden schneiden sich nicht, selbst wenn sie nicht parallel sind.[21]

Man schneidet die gegebenen Geraden a und b durch eine dritte Gerade c so, dass c mit a und b nach einer Seite gleiche spitze Winkel einschließt (Abb. 28).

[21] Nach Proclos von Byzanz, 412 bis 485, Athen.

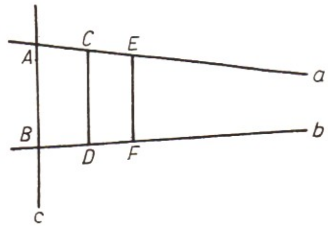


Abb. 28

Dass dann auf der Seite der stumpfen Winkel kein Schnittpunkt von a und b liegt, ist ohne weiteres zu zeigen, wir beschäftigen uns lediglich mit dem Fall auf der Seite der spitzen Winkel. Es seien A und B die Schnittpunkte von c mit a und b. Dann trägt man $\frac{AB}{2}$ auf a und b von A und B aus bis C und D ab.

Es ist nicht möglich, dass C auf D fällt, da im Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist. Noch weniger können die Strecken AC und BD einen Schnittpunkt S gemein haben, denn in $\triangle SAB$ wäre erst recht die Summe zweier Seiten kleiner als die dritte.
Verbindet man jetzt C und D, so entsteht ein gleichschenkliges Trapez $ABDC$. Die Gerade CD gestattet jetzt in gleicher Weise die Konstruktion einer Geraden EF. Die Konstruktion lässt sich beliebig oft wiederholen, immer schreitet man um einen Schritt vorwärts und kann doch, nach unserer Überlegung, nie auf einen Schnittpunkt von a und b kommen. Diese schneiden sich also nicht.

2. Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und einem, entsprechenden Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Die beiden Dreiecke seien ABC und $A'B'C'$, und zwar sei $BC = B'C'$, $AB = A'B'$ und $\alpha = \alpha'$.
Man legt $\triangle A'B'C'$ so an ABC, dass B' auf B, C' auf C fällt - A wird mit A' verbunden.
Dann ist $\triangle BAA'$ gleichschenklig, weil $BA = BA'$ ist, mithin ist $\angle BAA' = \angle BA'A$. Nun ist $\alpha = \alpha'$. Durch Addition oder Subtraktion erhält man je nach der Gestalt der Dreiecke (Abb. 29 und 30), dass $CAA' = CA'A$ ist.

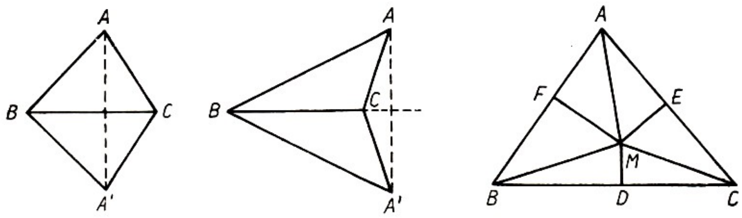


Abb. 29,30,31

Mithin ist $\triangle CAA'$ gleichschenklig. Folglich $CA = CA'$; die beiden Dreiecke sind also nach dem dritten Kongruenzsatz kongruent. -
Die einschränkende Bedingung im vierten Kongruenzsatz, dass der Winkel der größeren Seite gegenüberliegen muss, ist also nicht nötig, wie insbesondere Abb. 30 zeigt.

3. Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
Es sei ABC irgendein Dreieck, dann konstruiere man die Winkelhalbierende des Winkels bei A und die Mittelsenkrechte der Seite BC; die Mitte von BC sei D (Abb. 31).
Beide Geraden werden sich schneiden, es sei denn, dass sie parallel sind; dann wäre das Dreieck aber bereits gleichschenklig, und wir könnten uns den weiteren Beweis ersparen.

Der Schnittpunkt der Geraden sei M. Wir betrachten zunächst den Fall, dass M innerhalb des Dreiecks liegt. Wir fällen von M auf AB und AC die Senkrechten MF und ME.

Dann ist

$$\triangle AFM \cong \triangle AEM \qquad , \qquad \triangle MDB \cong \triangle MDC \tag{1,2}$$

Aus (1) folgt $MF = ME$, aus (2) $MB = MC$, folglich ist auch

$$\triangle MBF \cong \triangle MCE \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt $AF = AE$ und $FB = EC$. (4,5)
Addiert man die Gleichungen (4) und (5), so ergibt sich $AB = AC$. Das ist unsere Behauptung.

Sollten sich die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte nicht innerhalb des Dreiecks schneiden, sondern außerhalb, so lassen sich an der Hand der Abb. 38 die gleichen Schlüsse durchführen wie eben, nur dass am Schluss von den beiden Gleichungen (4) und (5) die eine zu subtrahieren ist.
Eine naheliegende Folgerung aus diesem Satz ist, dass alle Dreiecke gleichseitig sind.

Hinweis: Den Trugschluss kann man bereits durch eine genaue Zeichnung widerlegen. In der Abb. 31 liegt M im Inneren des Dreiecks. Die Punkte D, E, F sind die Fußpunkte der Senkrechten von dem auf dem Umkreis liegenden Punkte M auf die Seiten des Dreiecks ABC (Abb. 32).

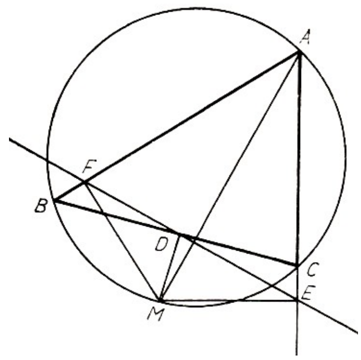


Abb. 32

Nach dem Satz über die Wallace-Gerade[22] liegen die drei Punkte D, E, F auf einer Geraden. Aus diesem Grunde muss einer der Punkte E, F auf einer Dreieckseite und der andere auf der Verlängerung einer Dreieckseite liegen. Es ergibt sich also

$$AB = AF + FB \qquad , \qquad AC = AE - EC$$

Wegen $FB = EC$ (Kongruenz der Dreiecke BMF und MEC) ist

$$AB = AF + FB = AE + EC, \qquad \text{also} \quad AC \neq AB$$

Die Axiome und Sätze des Euklid sind aber doch nicht ausreichend für einen einwandfreien Beweis. Man kann damit nämlich nicht nachweisen, dass eine Gerade nicht alle drei Seiten eines Dreieckes schneiden kann, wenn die Eckpunkte als Schnittpunkte mit der Geraden nicht zugelassen werden.
Man kann sich nur an Hand einer Zeichnung überzeugen, oder man zieht außerdem das Axiom von Pasch (1843-1930) [9] hinzu. Es sagt aus: Eine Gerade, die eine Seite eines Dreieckes schneidet, geht sicher durch genau eine der beiden anderen Seiten, wenn sie nicht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

[22] Wallace (1768-1843) bewies, dass die Fußpunkte der Lote von einem beliebigen Punkt des Umkreises auf die Seiten des Dreiecks auf einer Geraden liegen [4].

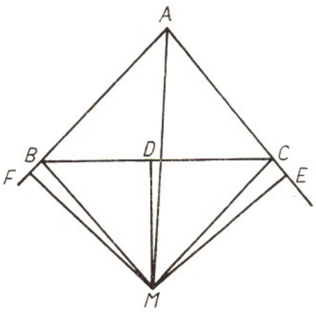


Abb. 33,34

Damit ist auch der Fehler in Abb. 33 offensichtlich. Die Widerlegung des genannten Trugschlusses durch eine Zeichnung ist auf alle Fälle unzulänglich. Auch die hier soeben gezeigte Beweisführung ist letzten Endes nicht voll befriedigend. Um jedoch den Rahmen dieses Buches nicht zu sprengen, kann auf diese interessante Frage nicht weiter eingegangen werden. Wir verweisen auf die sehr eingehende Darlegung in [15], S. 24-32.

4. Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen.
Es sei das Viereck $ABCD$ in Abb. 34 bei A rechtwinklig, die Seiten AD und BC seien gleich lang, $\angle ABC$ schließlich sei ein stumpfer Winkel. Man errichtet auf AB und auf DC Mittelsenkrechte, die sich in S schneiden. S wird mit den Ecken des Vierecks verbunden.
Nun ist $SA = SB$ und $SD = SC$, folglich ist

$$\triangle SAD \cong \triangle SBC$$

Daraus folgt $\angle SAD = \angle SBC$. Zieht man von dieser Gleichung die folgende ab: $\angle SAB = \angle SBA$, so folgt, dass der ursprünglich stumpf vorausgesetzte Winkel ABC dem rechten Winkel BAD gleich ist.

5. Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich sind, so sind die beiden anderen Seiten parallel.
Es sei $ABCD$ ein Viereck, in dem die zwei einander gegenüberliegenden Seiten AB und DC gleiche Längen haben (Abb. 35).

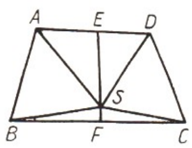


Abb. 35

Im Mittelpunkt E von AD errichte ich die Senkrechte und ebenso im Mittelpunkt F von BC. Beide schneiden sich in dem Punkte S. Wenn sie nämlich parallel wären, so wären auch AD und BC parallel, und ich könnte mir den Beweis meiner Behauptung ersparen. Ich will nun nachweisen, dass ESF eine Gerade ist; daraus folgt dann sofort, dass dem zu beweisenden Satze entsprechend AD und BC parallel sind.

Ich verbinde S mit den Ecken des Vierecks. Dann sind die Dreiecke SAE und SDE, ebenso die Dreiecke SBF und SCF kongruent, mithin auch, da AB und DC gleich sind, die Dreiecke SAB und SDC.
Aus diesen Kongruenzen folgen die folgenden Gleichungen von Winkeln:

$$\angle ESA = \angle ESD, \qquad \angle ASB = \angle DSC, \qquad \angle BSF = \angle CSF \qquad (1,2,3)$$

Durch Addition der drei Gleichungen folgt, dass der Winkel ESF ein gestreckter sein muss. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Freilich bedarf noch ein Punkt der Erörterung. Ich habe angenommen, dass der Schnittpunkt S der beiden Mittelsenkrechten innerhalb des Vierecks liegt. Er könnte aber auch außerhalb des Vierecks liegen.

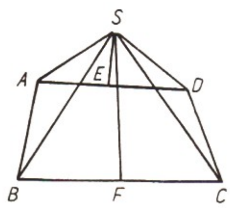


Abb. 36

Die Abb. 36 deutet den ganz entsprechenden Beweisgang für diesen Fall an. Nur sind hier am Schluss die drei Winkelgleichungen nicht zu addieren, vielmehr zeigt man das Zusammenfallen von SE und SF etwa dadurch, dass man die Gleichungen (2) und (3) addiert und nun sowohl SE wie SF als Winkelhalbierende von ASD findet; beide müssen also zusammenfallen.

6. Der rechte Winkel ist $45°$ [19] (Abb. 37)

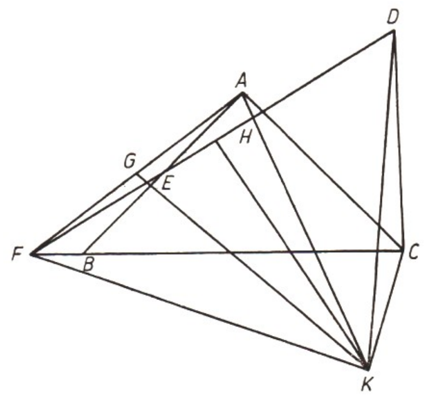


Abb. 37

ABC sei ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck. Man konstruiert $DC \perp BC$ und $DC = AC$. E halbiert AB, DE schneidet die Verlängerung von BC in F. In G ist die Mittelsenkrechte von AF, in H die Mittelsenkrechte von FD gezeichnet. Beide Mittelsenkrechte schneiden sich in K. K ist mit F, A, D und A C verbunden. Dann ist

$$\triangle FGK \cong \triangle AGK$$

folglich $FK = AK$, $\triangle FHK \cong \triangle DHK$, folglich $FK = DK$. Folglich ist $AK = DK$. In $\triangle ACK$ und $\triangle DCK$ ist $AK = DK$, $AC = DC$, $KC = KC$, folglich ist

$$\triangle ACK \cong \triangle DCK \qquad \text{und} \qquad \angle ACK = \angle DCK$$

Zieht man beiderseits $\angle BCK$ ab, dann bleibt

$$\angle ACB = \angle DCB \qquad , \qquad 45° = 90°$$

7. Ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln lässt sich in folgender Weise konstruieren (Abb. 38): Die Kreise um A und B schneiden sich in C. Die Durchmesser CAD und CBE werden gezogen. D wird mit E verbunden. Die Verbindungsgerade schneide den einen Kreis in F, den anderen in G.
Dann sind nach dem Satz von Thales (Winkel im Halbkreis) $\angle CFE$ und $\angle CGD$ rechte, $\triangle CFG$ hat also zwei rechte Winkel.

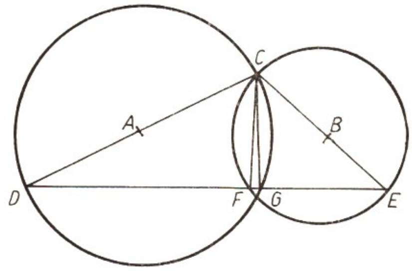


Abb. 38

8. Geometrischer Beweis dafür, dass 64 = 65 ist.
Man schneidet aus Millimeterpapier oder irgendwie anders kariertem Papier zwei Dreiecke mit den Katheten 3 und 8 aus und zwei Trapeze, die je zwei rechte Winkel haben und in denen die parallelen Seiten die Längen 3 und 5 haben, während der Abstand dieser Seiten 5 ist (Abb. 39).

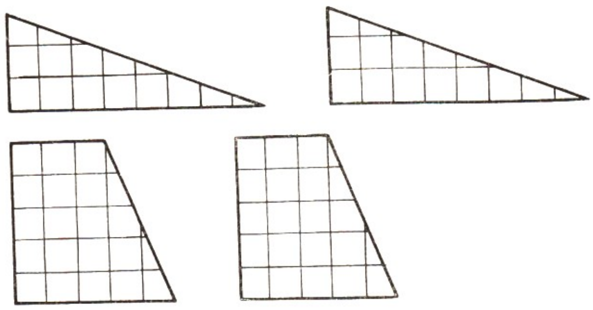


Abb. 39

Setzt man nun die vier Figuren so zusammen, wie es Abb. 40 zeigt, so ist der Flächeninhalt 64, setzt man sie aber so zusammen, wie es Abb. 41 zeigt, offenbar 65.

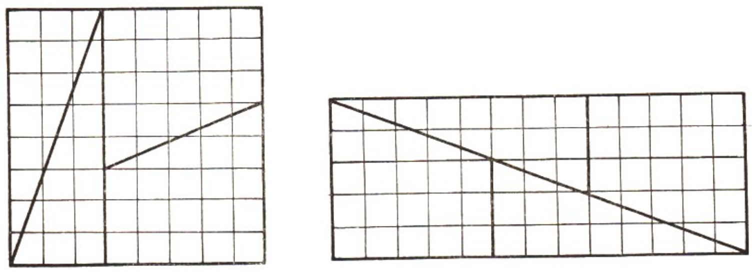


Abb. 40,41

Man kann aus den vier Flächenstücken auch eine Figur erhalten, deren Inhalt 63 ist. Wer kann's ?[23]

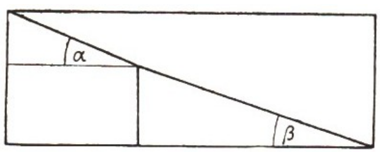


Abb. 42

[23] Eine mathematische Erörterung dieses Trugschlusses bringt M. Busch, Über einen geometrischen Trugschluss, Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter 13 (1916), S. 89ff. Sind nicht wie hier $8 \cdot 8$ und $5 \cdot 13$, sondern allgemein $b \cdot c$ und $a \cdot d$ die Seiten der beiden in verschiedener Weise zu zerlegenden Rechtecke, dann gelten die Gleichungen $d = a + b$ und $b \cdot c = a \cdot d \pm 1$. Eine Lösung liefern z.B. aufeinanderfolgende Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung des Goldenen Schnittes. Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{21}{34}$, ...; $\frac{5}{8}$ und $\frac{8}{13}$ liefern unsern Fall $5 \cdot 13$ und $8 \cdot 8$; $\frac{8}{13}$ und $\frac{13}{21}$ liefern $8 \cdot 21 = 168$ und $13 \cdot 13 = 169$. Das ist aber nicht die einzige Lösung; so ist z.B. das Paar $11 \cdot 5 = 55$ und $9 \cdot 6 = 54$, das Anlass zu einem Trugschluss unserer Art gibt, nicht aus den Näherungsbrüchen unseres Kettenbruches herauszufinden.

Hinweis (Abb. 42): $\tan\alpha = \frac{2}{5}$, $\tan\beta = \frac{3}{8}$, $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$, also $\alpha \neq \beta$.

9. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist Null.
Das gleichseitige Dreieck ABC (Abb. 43) soll in ein Quadrat verwandelt werden.

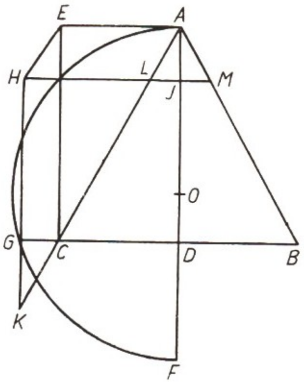


Abb. 43

Man zieht die Höhe AD und zeichnet das dem $\triangle ABC$ inhaltsgleiche Rechteck $ADCE$. Man verlängert AD über D hinaus um CD bis F und beschreibt über AF als Durchmesser den Halbkreis, der die Verlängerung von CD über C hinaus in G schneidet.
Da $GD^2 = AD \cdot DF$ ist, ist das Quadrat $GDJH$ auch flächengleich dem Dreieck ABC, ebenso wie es Rechteck $ADCE$ war. Denkt man sich $\triangle CEA$ längs AC so weit verschoben, dass C auf K, E auf H, A auf L fällt, so erkennt man, dass das Quadrat $GHJD$ aus dem Stück $CLJD$ und dem ihm kongruenten Stück $BMJD$ besteht, also gleich dem Trapez $CBML$ ist.

Da das Quadrat gleichzeitig $\triangle ABC$ flächengleich ist, so bleibt für das gleichseitige Dreieck ALM der Flächeninhalt 0. Das war die Behauptung.

10. Zieht man durch ein Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so ist das zwischen den beiden anderen Seiten liegende Stück gleich der ersten Seite.

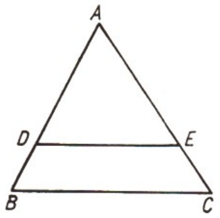


Abb. 44

In Abb. 44 ist nach dem Strahlensatz

$$BC : DE = AB : AD \qquad \text{oder} \qquad BC \cdot AD = DE \cdot AB$$

Multipliziert man die Gleichung mit $BC - DE$, dann folgt

$$BC^2 \cdot AD - BC \cdot AD \cdot DE = BC \cdot DE \cdot AB - DE^2 \cdot AB$$

oder

$$BC^2 \cdot AD - BC \cdot DE \cdot AB = BC \cdot AD \cdot DE - DE^2 \cdot AB$$
$$BC(BC \cdot AD - DE^2 \cdot AB) = DE(BC \cdot AD - DE \cdot AB)$$

mithin $BC = DE$.
Folgerung: Es ist auch $AD = AB$, d.h., jede Strecke ist gleich einem ihrer Teile.

11. Ein Teil einer Strecke ist gleich der ganzen Strecke.

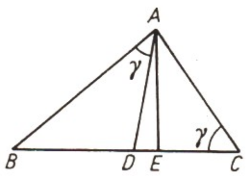


Abb. 45

In dem ungleichseitigen Dreieck ABC sei $\angle\alpha$ der größte Winkel; $\angle\beta$ ist also spitz (Abb. 45). Wir tragen den Winkel γ an AB in A an; der freie Schenkel schneide BC in D. Durch A werde außerdem die Senkrechte AE zu BC gezogen.
Jetzt ist

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \tag{1}$$

und da die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke sich verhalten wie Quadrate homologer Seiten, so ist

$$\triangle ABC : \triangle DBA = AC^2 : AD^2 \tag{2}$$

Nun haben die beiden Dreiecke aber, wenn man die Seiten BD und BC als Grundlinien ansieht, gleiche Höhen, ihre Flächeninhalte verhalten sich also auch wie die Grundlinien BC und BD. So erhält man die Proportion

$$\frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD} \tag{3}$$

Die den Seiten AC im $\triangle ABC$ und AD im $\triangle ABD$ gegenüberliegenden Winkel sind spitz. Ich wende nun den Satz an: Im Dreieck ist das Quadrat über einer Seite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.
Es ist hiernach:

$$\frac{AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE}{BC} = \frac{AB^2 + BD^2 - 2BC \cdot BE}{BD} \tag{4}$$

Wenn man die Summen in den Zählern gliederweise durch die Nenner durchdividiert, so hebt sich $2BE$ beiderseits weg, und es bleibt

$$\frac{AB^2}{BC} + BC = \frac{AB^2}{BD} + BD \tag{5}$$

Vertauschen hierin BC und BD ihre Stellung, so ergibt sich, wenn man nachträglich noch jede der beiden Seiten auf einen Nenner bringt:

$$\frac{AB^2 - BC \cdot BC}{BC} = \frac{AB^2 - BC \cdot BD}{BD}$$

Da die Zähler beider Brüche gleich sind, folgt aus dieser Gleichung $BC = BD$. Das war die Behauptung des Satzes.
Hinweis: $AB^2 - BC \cdot BD = 0$.

12. Jede Gerade durch den Scheitel eines Winkels halbiert ihn. Das Dreieck ABC wird durch eine Gerade in B', A' und C' geschnitten (Abb. 46).

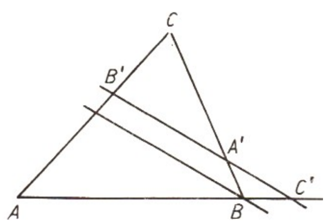


Abb. 46

Dann ist nach dem Lehrsatz von Menelaus

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB' \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CA'}{AC'} = \frac{A'B}{BC'}$$

Wenn man jetzt die beliebige Gerade $B'C'$ so parallel zu sich verschiebt, dass sie durch B geht, so wird $A'B = BC' = 0$ und $CA' = CB$ und $AC' = AB$. Die Gleichung geht also über in

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CB}{AB} = \frac{0}{0} \tag{1}$$

Den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ müssen wir jetzt durch genauere Untersuchung eines speziellen Falles bestimmen. Die Gerade $B'C'$ sei so gelegt, dass $BA' = BC'$. Dann ist

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CA'}{AC'} = 1$$

da wir jetzt wieder durch Parallelverschiebung die Gerade durch B belegen können, ohne dass sich die rechte Seite ändert, haben wir jetzt den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ zu 1 bestimmt. Wir kehren zu unserer Gleichung (1) zurück.

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CB}{AB} = 1$$

schreiben wir in die Proportion $AB : CB = AB' : CB'$ um. Nach der Umkehrung des Satzes, dass die Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Seite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist danach $B'B$ Winkelhalbierende des Winkels ABC. Damit ist die Behauptung bewiesen.

13. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2(a+b)}$.

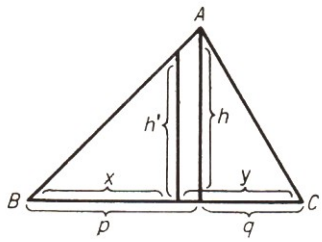


Abb. 47

Ein Dreieck (Abb. 47) hat die Höhenabschnitte p und q. Eine Parallele zur Höhe h, die ich h' nenne, teile das Dreieck in zwei flächengleiche Teile. Der B anliegende Abschnitt, den h' auf BC erzeugt, sei x. Dann ist

$$2xh' = (p+q) \cdot h$$

Nun ist $h' : h = x : p$. Setze ich $h' = \frac{hx}{p}$ oben ein, so erhalte ich

$$\frac{2x^2 h}{p} = (p+q)h$$

h fällt also heraus, es wird $x = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$.

Da der Punkt B mit C gleichberechtigt ist, folgt, wenn y den C anliegenden Abschnitt von h' auf BC bezeichnet, durch die gleichen Überlegungen

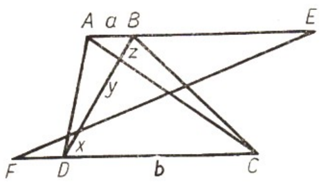
$$y = \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$$

Nun ist $x+y=p+q$, man erhält also, wenn man noch durch $\sqrt{p+q}$ dividiert,

$$\sqrt{p+q}=\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{q}{2}}$$

Unsere Behauptung ergibt sich daraus, wenn man $p=2a$, $q=2b$ setzt.

14. Die Summe der zwei zueinander parallelen Seiten eines Trapezes ist gleich Null. Man verlängert die parallelen Seiten des Trapezes $ABCD$ in entgegengesetzten Richtungen, und zwar a über B hinaus um b bis E, b über D hinaus um a bis F.
Man zieht die beiden Diagonalen des Trapezes, AC und BD, und die Verbindungsgerade der Endpunkte der abgetragenen Strecken, EF. Die drei Abschnitte, in die die Strecke BD durch die andern Strecken AC und EF geteilt wird, seien z, y und x (Abb. 48).



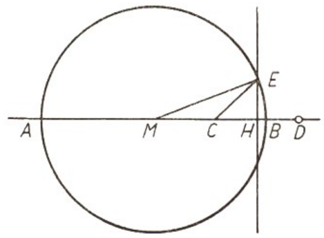


Abb. 48,49

Aus zwei Paaren von ähnlichen Dreiecken erhält man dann nach dem Strahlensatz

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y+z}=\frac{z}{x+y}$$

Wendet man auf den letzten Teil dieser Proportion den Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion an, so ergibt sich

$$\frac{a}{b}=\frac{x-z}{z-x}=-1$$

Es ist also $a=-b$ oder $a+b=0$.

15. Ein jeder Punkt des Durchmessers eines Kreises liegt auf dem Kreisumfang. Es sei (Abb. 49) C ein beliebiger Punkt des Durchmessers AB. Man konstruiere zu A, B, C den vierten harmonischen Punkt D und halbiere CD durch H. Dann ist, wenn noch M den Mittelpunkt des Kreises bezeichnet, nach einem bekannten Satze: $MC\cdot MD=MA^2$. Nun hat man aber

$$MC=MH-CH, \qquad MD=MH+CH, \qquad \text{also ist} \qquad MH^2-CH^2=MA^2 \quad (1)$$

Andererseits ist, wenn das in H auf AB errichtete Lot den Kreisumfang in E schneidet,

$$ME^2=MH^2+HE^2 \qquad , \qquad CE^2=CH^2+HE^2$$

also ist

$$MH^2-CH^2=ME^2-CE^2=MA^2-CE^2 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) zusammen folgt, dass

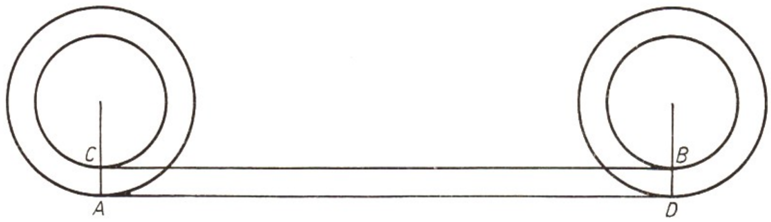
$$MA^2=MA^2-CE^2 \qquad (3)$$

ist, also muss $CE=0$ sein, d.h., der Punkt C liegt auf dem Umfang des Kreises, und da C ganz beliebig gewählt werden durfte, gilt dies für jeden Punkt des Durchmessers AB.

Hinweis: Unrichtige Zeichnung zur Täuschung. $ABCD$ sind vier harmonische Punkte, d.h. $BD : BC = AD : AC$. Da $AD > AC$, so ist $BD > BC$. (Apollonioskreis)

16. Alle Kreise haben gleichen Umfang. Die beiden gegebenen Kreise mögen konzentrisch aufeinandergelegt und fest miteinander verbunden werden (Abb. 50).

Abb. 50



Der größere Kreis rolle längs der Geraden AD seine Peripherie ab. Dann beschreibt der mit C bezeichnete Punkt auf der Peripherie des kleineren Kreises den Weg CB. Die Strecken AD und CB sind gleich, sie sind ja Gegenseiten in einem Rechteck.
Da außerdem die beiden Kreise fest miteinander verbunden sind, so hat sich der kleine Kreis während der einmaligen Umdrehung des größeren auch nur einmal gedreht, CB ist also die Abwicklung der Peripherie des kleineren Kreises. Es ergibt sich also, dass die Umfänge beider Kreise gleich lang sind.

17. Alle Sehnen eines Kreises sind gleich lang. In einem Kreise seien die Sehnen AB und CD parallel. Ist S der Schnittpunkt von AC und BD, dann ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke SAB und SCD

$$AB : CD = AS : SC \qquad \text{folglich} \qquad AB \cdot SC = CD \cdot AS$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit der von 0 verschiedenen Größe $CD - AB$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&AB \cdot SC \cdot CD - AB^2 \cdot SC = AS \cdot CD^2 - AB \cdot AS \cdot CD \qquad \text{oder}\\
&AB \cdot SC \cdot CD - AS \cdot CD^2 = AB^2 \cdot SC - AB \cdot AS \cdot CD \qquad \text{oder}\\
&CS(AB \cdot SC - AS \cdot CD) = AB(AB \cdot SC - AS \cdot CD)
\end{aligned}$$

Kürzen wir durch den gemeinsamen Faktor, so folgt $CD = AB$.
Da man zwei Sehnen des Kreises immer in parallele Lage bringen kann, gilt, was hier von parallelen Sehnen gezeigt ist, von allen Sehnen.

2.6 Trigonometrie und Stereometrie

1. $2^2 = 4^2$.
Aus $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ gewinnt man zunächst

$$(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$$

und daraus

$$cos^3 x + 3 = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3$$

Folglich ist

$$(\cos^3 x + 3)^2 = [(1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3]^2$$

Der Wert $x = 90°$ liefert z.B., da $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$ ist, richtig $3^2 = 3^2$.

Setzt man aber den Wert $x = 180°$ ein, dann erhält man, da $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$ ist, $2^2 = 4^2$.

2. Jedes Dreieck ist gleichseitig.
Man verlängert die Seiten b und c des Dreiecks ABC (Abb. 51) über A hinaus, und zwar c um b bis D und b um c bis E.

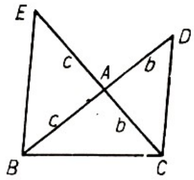


Abb. 51

Aus dem Sinussatz, angewandt auf die Dreiecke BCE und BCD, folgt dann

$$\sin\left(\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha \quad , \quad \sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha$$

Hieraus ergibt sich

$$\sin\left(\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\right) \quad \text{also} \quad \beta = \gamma$$

In ähnlicher Weise erhält man $\gamma = \alpha$, und wenn alle drei Winkel des Dreiecks gleich sind, ist das Dreieck gleichseitig.

Hinweis: Wegen

$$\sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left[180° - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

gilt auch

$$\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left[180° - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

und daraus folgt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

3. Jedes Dreieck ist rechtwinklig.
Im Dreieck ABC mit der Höhe $CD = h$ und den Höhenabschnitten $AD = p$ und $BD = q$ setzt sich das Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

um in

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h}{b}\cdot\frac{q}{a} + \frac{p}{b}\cdot\frac{h}{a} = \frac{h \cdot c}{ab} = \frac{h \cos\sin\gamma}{2r \cdot \sin\alpha\sin\beta}$$

Nun ist $h = 2r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, weil $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ und $b = 2r\sin\beta$ ist. Folglich wird

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \quad , \quad \alpha + \beta = \gamma$$

Mithin $\alpha + \beta = \gamma = 90°$.

4. Alle Dreiecke sind gleichseitig. Es ist, wenn f den Dreiecksinhalt bezeichnet

$$2f = b \cdot c \cdot \sin\alpha \quad , \quad 2f = a \cdot c \cdot \sin\beta$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $2ra$, die zweite mit $2rb$, dann folgt

$$4raf = 2rabc\sin\alpha \quad , \quad 4rbf = 2rabc\sin\beta$$

Folglich wird

$$4raf - 2rabc\sin\alpha = 4rbf - 2rabc\sin\beta$$

Hier führen wir noch $2r\sin\alpha = a$, $2r\sin\beta = b$ ein:

$$4raf - a^2bc = 4rbf - ab^2c \qquad , \qquad a(4rf - abc) = b(4rf - abc)$$

folglich $a = b$; ebenso beweist man a = c.

5. Die Dreiecke mit den Seiten

$$a_1 = 18 \text{ cm}, b_1 = 12 \text{ cm}, c_1 = 8 \text{ cm} \qquad , \qquad a_2 = 27 \text{ cm}, b_2 = 18 \text{ cm}, c_2 = 12 \text{ cm}$$

stimmen außer in zwei Seiten auch in allen drei Winkeln überein, insgesamt also nicht nur in drei, sondern sogar in fünf Stücken.
Also sind sie kongruent. Wie ist es aber da möglich, dass sie in den dritten Seiten nicht übereinstimmen?

Zum Nachweis, dass die Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ sind, verwenden wir die Formeln

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

Im Falle des ersten Dreiecks wird

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = 19, \quad s_1 - a_1 = 1, \quad s_1 - b_1 = 7, \quad s_1 - c_1 = 11$$

im Falle des zweiten Dreiecks

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{2} = 28,5, \quad s_2 - a_2 = 1,5, \quad s_2 - b_2 = 10,5, \quad s_2 - c_2 = 16,5$$

Hiernach wird

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\alpha_1}{2} &= \sqrt{\frac{7\cdot 11}{19}} = \sqrt{\frac{10,5\cdot 16,5}{1,5\cdot 28,5}} = \tan\frac{\alpha_2}{2}\\
\tan\frac{\beta_1}{2} &= \sqrt{\frac{11}{7\cdot 19}} = \sqrt{\frac{16,5\cdot 1,5}{10,5\cdot 28,5}} = \tan\frac{\beta_2}{2}\\
\tan\frac{\gamma_1}{2} &= \sqrt{\frac{7}{11\cdot 19}} = \sqrt{\frac{1,5\cdot 10,5}{16,5\cdot 28,5}} = \tan\frac{\gamma_2}{2}
\end{aligned}$$

Also ist in der Tat $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Rechnet man die Werte aus, so ergibt sich für die drei Winkel $127,2°$, $32,1°$ und $20,7°$. Andere Dreieckspaare dieser Art sind z.B.

$$a_1 = 150 \text{ cm}, b_1 = 180 \text{ cm}, c_1 = 216 \text{ cm} \qquad , \qquad a_2 = 125 \text{ cm}, b_2 = 150 \text{ cm}, c_2 = 180 \text{ cm}$$

und

$$a_1 = 100 \text{ cm}, b_1 = 80 \text{ cm}, c_1 = 64 \text{ cm} \qquad , \qquad a_2 = 125 \text{ cm}, b_2 = 100 \text{ cm}, c_2 = 80 \text{ cm}$$

6. Die Summe der Winkel eines Kugeldreiecks ist $180°$.
Ein bekannter Beweis des Satzes von der Winkelsumme im ebenen Dreieck ist der folgende (Abb. 52):

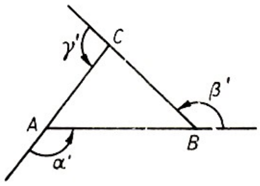


Abb. 52

Man zeichnet das Dreieck ABC etwa auf den Boden, geht dann von A aus zunächst nach B, wendet sich dann nach C, wobei man sich um den Außenwinkel β' gedreht hat, geht jetzt nach C, dreht sich um den Winkel γ' in die Richtung A.
Wenn man sich dann schließlich in A noch wieder in die Richtung nach B um den Außenwinkel α' dreht, so hat man dieselbe Richtung, die man beim Antritt des Rundmarsches gehabt hatte, wiedererlangt, nur hat man sich in der Zwischenzeit einmal um sich selbst, also um einen Winkel von $360°$ gedreht.

Die Summe der Außenwinkel ist also $360°$. Da ein Innenwinkel und sein zugehöriger Außenwinkel zusammen $180°$ betragen, so ist die Summe aller Innen- und Außenwinkel $540°$; für die Innenwinkel allein bleiben also nur $180°$ übrig.

Es ist bei dieser Schlussfolge nirgends davon Gebrauch gemacht, dass man sich auf der Ebene bewegt. Sie lässt sich in genau der gleichen Weise auch auf einer irgendwie gebogenen Fläche anstellen.
Wenn man z.B. als Punkte A, B, C nicht drei nahe beieinander liegende Punkte auf dem Fußboden des Zimmers, sondern drei weit voneinander entfernte Orte etwa Deutschlands oder irgendwo auf der Erde gewählt hätte, so bliebe in der Schlussform alles beim alten.
Daraus erhellt die Richtigkeit der Behauptung auch für Dreiecke auf Kugelflächen, ja, sie ist nicht nur für diese, sondern auch für irgendwie anders gekrümmte Flächen nachgewiesen.

7. Die Summe der Winkel eines Kugeldreiecks ist $180°$.
Es sei ABC ein Kugeldreieck. Angenommen, die Winkelsumme sei, gemessen in Rechten, x. Dann nehme ich im Innern des Dreiecks einen Punkt P an und lege durch P und A, durch P und B, durch P und C größte Kugelkreise.
Dann ist die Winkelsumme von allen diesen Dreiecken je xR, insgesamt also $3xR$. Vergleicht man die Gesamtheit der neun Winkel dieser Dreiecke mit denen des Ausgangsdreiecks, so ist lediglich die Summe der Winkel um P herum hinzugekommen, d.h. $4R$. Es ist also

$$3x - 4 = x, \qquad 2x = 4, \qquad x = 2$$

d.h., die Winkelsumme ist zwei Rechte.

8. Der sphärische Exzess[24] eines Kugeldreiecks ist 0.

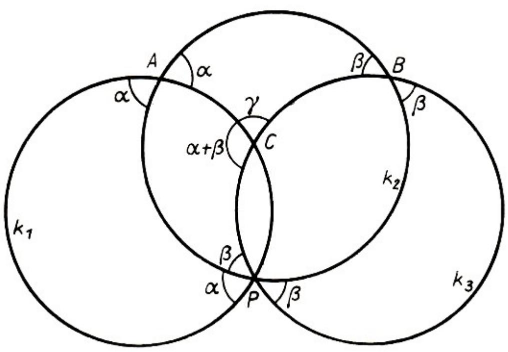


Abb. 53

[24] Unter dem sphärischen Exzess versteht man den Überschuss der Summe der Winkel des sphärischen Dreiecks über $180°$.

Drei Kreise k_1, k_2 und k_3 auf der Kugel haben einen Punkt P gemein und bilden ein Dreieck ABC. Die Abb. 53 ist eine stereographische Projektion, die die Kreise als Kreise wiedergibt und winkeltreu ist.
Die Winkel des Dreiecks sind α, β und γ, und man kann unmittelbar aus der Figur ablesen, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist.

9. Der Umfang eines Kreises ist ebenso groß wie sein Mittelpunkt.[25]
Ich erinnere an die zur Ableitung der Formel für den Kugelinhalt übliche Abb. 54.

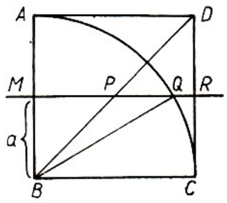


Abb. 54

Das Quadrat $ABCD$ rotiert um AB; dabei beschreibt der Kreisquadrant AC eine Halbkugel, die Diagonale BD den Mantel eines geraden Kreiskegels mit der Spitze B, die Quadratseite DC einen Zylindermantel.
Aus der Schnittgeraden MR wird ein ebener Schnitt durch alle diese Körper. Es wird nun, um nachher den Cavalierischen Grundsatz anzuwenden, bewiesen, dass die Kreisfläche mit dem Radius MQ flächengleich ist dem Kreisring, dessen Breite durch PR gegeben ist, mit anderen Worten, dass

$$\pi MQ^2 = \pi MR^2 - \pi MP^2$$

ist. Diese Beziehung gilt für jede Lage der schneidenden zur gemeinsamen Grundfläche der Körper parallelen Ebene. Nimmt die Ebene die durch AD gekennzeichnete Lage an, so wird die Kreisfläche zum Punkt A, die Ringfläche zum Kreis mit dem Radius AD. Beide haben hiernach gleiche Größe.

2.7 Analytische Geometrie

1. Das Ganze ist gleich einem Teil.
Der Inhalt eines Dreiecks, dessen Ecken die Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) haben, ist

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

Es soll das Viereck berechnet werden, das von den Punkten $(1, 4)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ und dem Koordinatenanfangspunkt gebildet wird.
Wir ziehen die Diagonale, die durch den Nullpunkt geht, und berechnen die beiden Teildreiecke nach unserer Formel (Abb. 55).
Es wird

$$A = \frac{1}{2}[0(4-5)+1(5-0)+3(0-4)+0(3-5)+5(5-0)+3(0-3)] = \frac{1}{2}(5-12+25-9) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Der Inhalt der Vierecksfläche ist also ebenso groß wie die eingezeichneten $4\frac{1}{2}$ schraffierten Einheitsquadrate.

[25] B. Bolzano erwähnt [1] (§ 46), dass schon Galilei in den Discorsi e dimostrazioni matematiche diesen Satz nennt. Dabei beruft sich Bolzano auf Kästner (1719-1800); Anfangsgründe der höheren Analysis (Bd. II, Vorrede).

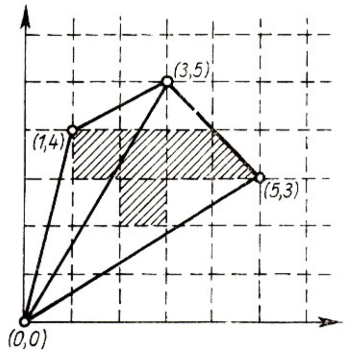


Abb. 55

Hinweis: Die Dreiecke müssen gleichsinnig umlaufen werden.

2. Ein Kreis, der durch den Koordinatenanfangspunkt geht und den Punkt $M \equiv (3,4)$ zum Mittelpunkt hat, schneidet die x-Achse unter $(0,0)$ einem rechten Winkel.

Es ist $r^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Gleichung des Kreises heißt

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$$

Der Kreis schneidet die x-Achse außer im Nullpunkt im Punkte $x_1 = 6$, $y_1 = 0$. Setzt man in die Tangentengleichung

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

die gegebenen Werte ein, so ergibt sich $6x = 25$, $x = 4\frac{1}{6}$. Die Tangente ist also parallel zur y-Achse.

3. Ein Kreis wird von einem Durchmesser nur in einem Punkte geschnitten. Die Gleichung eines Kreises mit dem Radius 1 und dem Koordinatenanfangspunkt als Mitte ist

$$x = \cos\varphi \qquad , \qquad y = \sin\varphi$$

oder, wenn man $\tan\frac{\varphi}{2} = t$ einführt,

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad , \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse erhält man, wenn man $y = 0$ setzt, also für $t = 0$. Das liefert den Wert $x = 1$. Mithin schneidet die x-Achse den Kreis nur in einem Punkte. Ist ein beliebiger Durchmesser gegeben, so kann man ihn immer zur x-Achse machen.

Hinweis: Die angeführte Herleitung engt ein, da aus $y = 0$ ebenso $t = \infty$ folgt. Die richtigen Schnittpunktsabszissen erhält man besser durch: $y = \sin\varphi = 0$; daraus folgt

$$x = \cos\varphi = 1 \qquad , \qquad x = \cos\varphi = -1$$

4. Ein Geradenpaar ist eine Hyperbel.

Die Funktionsgleichungen $x = 4$, $y = 8$ (1a)
und die mit ihnen gleichbedeutenden $x - 4 = 0, y - 8 = 0$ (1b)
stellen zwei Geraden dar, eine Parallele zur y-Achse und eine Parallele zur x-Achse. Beide Gleichungen kann man in üblicher Weise zusammenfassen und findet als Gleichung des Geradenpaares

$$(x-4)(y-8) = 0 \qquad \text{oder} \qquad xy - 4y - 8x + 32 = 0 \qquad \text{(2b,2b')}$$

Andererseits liefert unmittelbare Multiplikation der Gleichungen (1a) die gleichseitige Hyperbel

$$xy = 32 \tag{3}$$

Setzt man (3) in (2b') ein, so erhält man eine Gerade, und zwar keine der Gleichungen (1b), sondern

$$y = -2x + 16 \tag{4}$$

Verschiedenes erhält man auch, wenn man einmal die Funktionalgleichungen in der Form (1a) und zum anderen in der Form (1b) durch einander dividiert. Im ersten Fall erhält man die Gerade

$$y = 2x \tag{5}$$

im andern Falle die Gleichung

$$\frac{y-8}{x-4} = 0$$

aus der ein Unvorsichtiger die Gerade

$$y = 8 \tag{6}$$

ablesen möchte.

5. Es gibt keine Quadratzahlen von der Form $4n + 1$.
Alle Quadratzahlen sind durch die zu ganzen Zahlen gehörenden Ordinaten der Parabel

$$y = x^2 \tag{1}$$

gegeben, alle Zahlen der Form $4n + 1$ durch die zu ganzen Zahlen gehörenden Ordinaten der Geraden

$$y = 4x + 1 \tag{2}$$

Zahlen, die gleichzeitig Quadrate und von der Form $4n + 1$ sind, liegen gleichzeitig auf (1) und (2). Nun hat aber die Parabel (1) mit der Geraden (2) nur zwei Schnittpunkte, die durch die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = 4x + 1 \qquad \text{d.h.} \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

gegeben sind, und beide Werte sind nicht ganzzahlig.

Hinweis: Der angeführte Beweis zeigt, dass für keine ganze Zahl n ein Quadrat der Form $4n+1$ existiert, d.h. $n^2 \neq 4n + 1$. Hingegen existieren Quadratzahlen der Form $4n + 1$; z.B.

$n = 2$ führt zu 9,
$n = 6$ führt zu 25,
$n = 12$ führt zu 49,
$n = 20$ führt zu 81.

6. $1 = -1$.
Es sollen die Richtungsfaktoren der Geraden bestimmt werden, die mit den Geraden

$$y = x + t$$

Winkel von $45°$ bilden. Setzt man in die Formel für den Winkel δ zweier Geraden

$$\tan\delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

die gegebenen Werte ($\tan 45° = 1$; $m_1 = 1$) ein, so ergibt sich

$$1 = \frac{m_2 - 1}{1 + m_2}, \qquad 1 + m_2 = m_2 - 1, \qquad 1 = -1$$

Hinweis: Wenn $\tan\delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ angesetzt wird, so ist die Gleichung $1 = \frac{m_2 - 1}{1 + m_2}$ nur möglich für $m_2 \to \infty$ denn

$$1 = \lim_{m_2 \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_2} + 1}$$

Der Ansatz $\tan\delta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, d.h. $\frac{1 - m_2}{1 + m_2} = 1$, wird durch $m_2 = 0$ erfüllt.

2.8 Logik

Vorbemerkung:

Zur Methode der Mathematik gehört es, dass Begriffe definiert, Sätze bewiesen werden. Beides geschieht mit den Mitteln der Logik. Deshalb sollen auch Trugschlüsse, die diese unentbehrliche Hilfswissenschaft der Mathematik angehen, hier ihre Stelle haben.

1. Die Verneinung des Begriffes Primzahl ist Nichtprimzahl.
Nichtprimzahl ist Nichtprimzahl. Die durch 2 teilbaren Zahlen sind Nichtprimzahlen, die durch 5 teilbaren Zahlen sind Nichtprimzahlen. Folglich sind die durch 2 teilbaren Zahlen gleich den durch 5 teilbaren Zahlen.[26]

2. Keine Regel ohne Ausnahme!
Dieser Satz ist offenbar selbst eine Regel, also hat die in ihm ausgesprochene Behauptung Ausnahmen. Damit ist ein Widerspruch gegeben.

3. Zwei Sätze sind richtig, obwohl der eine das (kontradiktorische) Gegenteil des anderen ist.[27]
Sie heißen:

Das vorletzte Wort des Satzes, den ich jetzt niederschreibe, ist ein Geschlechtswort.
Das vorletzte Wort des Satzes, den ich jetzt niederschreibe, ist kein Geschlechtswort.

4. Obwohl von zwei Sätzen der eine das (kontradiktorische) Gegenteil des andern ist, sind beide falsch.

Die Anzahl der Worte des hier niedergeschriebenen Satzes ist elf.
Die Anzahl der Worte des hier niedergeschriebenen Satzes ist nicht elf.

5. Ein logischer Trugschluss von Hegel (1770-1831).

Wenn ein in seinem Schwerpunkt unterstützter Stab auf einer Seite schwerer wird, so senkt er sich nach dieser Seite. Nun aber senkt ein Eisenstab, nachdem er magnetisiert worden ist, sich nach einer Seite, also ist er daselbst schwerer geworden.

6. Aus $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0$ folgt, so sagt man, $x = 2$ oder $x = 1$.
Aber man könnte daraus doch auch $x = 2$ und $x = 1$ folgern und damit $2 = 1$. Warum darf man das nicht?

[26] Diese hier auf ein mathematisches Beispiel angewandte Trugschlusstechnik ist von Platon (429?-348? v.u.Z.) eingeführt worden.
[27] Die Trugschlüsse 3 u. 4 erwähnt Bolzano [1], S. 3-5, und Wissenschaftslehre, S. 83-86.

7. A sagt zu B: "Ich habe in meinem Leben erst dreimal gelogen."
Darauf B zu A: "Dann hast du jetzt das vierte Mal gelogen."

Der Schluss ist falsch: Entweder hat A tatsächlich bisher nur dreimal gelegen, dann hat er jetzt nicht das vierte Mal gelegen, oder er hatte schon mehr als dreimal gelogen, dann hat er jetzt nicht erst zum vierten Mal gelogen.

8.

1, 2, 3 die kleinste in diesem Rechteck nicht bezeichnete positive ganze Zahl

Angenommen, a sei die kleinste in dem obigen Rechteck nicht bezeichnete Zahl, dann ist sie ja gerade in dem Rechteck angegeben. Damit ist also ein Widerspruch gegeben.

9. Das Krokodil.
Einer Ägypterin wurde das Kind von einem Krokodil geraubt, sie forderte es zurück, und das Krokodil sagte das zu, wenn die Frau richtig angeben würde, was das Krokodil tun werde.
Die Mutter sagte: "Du wirst mir mein Kind nicht wiedergeben."
Darauf sagte das Krokodil: "Wenn du wirklich recht hast, bekommst du, wie du selbst sagst, dein Kind nicht zurück, hast du aber mit deinem Ausspruch unrecht, so erhältst du das Kind nach unserer Verabredung nicht zurück. In jedem Falle: Ich brauche das Kind nicht zurückzugeben."

Die Mutter hingegen sagte: "Im Gegenteil! Wenn ich mit meinem Ausspruch recht habe, bekomme ich das Kind auf Grund unserer Verabredung zurück, habe ich mit meinem Ausspruch unrecht; nun so gibst du ja selbst zu, dass ich das Kind zurückerhalte. In jedem Falle: Ich bekomme mein Kind zurück."
Wer hat recht?

Was hier als Ernst dargestellt ist, bringt die folgende Fassung als Spiel. Es wird ausgemacht, B soll auf alle Fragen antworten "drei Streichhölzer".
Er hat den gemeinsam eingebrachten Betrag von 3 M verloren, wenn er eine andere Antwort gibt. A stellt erst ein paar beliebige Fragen, worauf B stets mit "drei Streichhölzer" antwortet.
Dann fragt schließlich A: "Was willst du lieber haben, die 3 Mark oder 3 Streichhölzer ?"
Antwort von B: "Drei Streichhölzer". A: "Hier hast du sie." Und er gibt A drei Streichhölzer und nimmt sich selbst die 3 M.

10. Der Prozess.
Euathlos hat bei Protagoras Unterricht in der Sophistik genommen. Das Honorar, so wird ausbedungen, soll erst ausgezahlt werden, wenn Euathlos seinen ersten Prozess gewonnen hat. Euathlos führte keinen Prozess, bezahlte aber auch natürlich sein Honorar nicht. Da verklagte ihn Protagoras.

Er sagte: "Gewinne ich den Prozess, so musst du mir das Geld nach dem Urteilsspruch auszahlen, verliere ich ihn, so hast du deinen ersten Prozess gewonnen und musst mir nach unserer Verabredung das Honorar gleichfalls auszahlen,"
"Nein," sagte Euathlos, "gewinne ich den Prozess, so brauche ich dir nach dem Urteilsspruch das Geld nicht auszuzahlen; verliere ich aber diesen meinen ersten Prozess, dann brauche ich wegen unserer Abmachung gleichfalls nicht zu zahlen." Wer hat recht?

11. Der Lügner.

Epimenides, der Kreter, sagt, alle Kreter sind Lügner; nun ist Epimenides selbst ein Kreter, also lügt er, also ist auch sein Satz von oben falsch, also sind die Kreter nicht Lügner - so etwa lautet der bekannte aus dem Altertum überlieferte Trugschluss.

Schärfer und zwingender lässt sich der Trugschluss so fassen. Ein Mann sagt: "Alles, was ich sage, ist falsch."
Also ist auch dieser Satz falsch, es folgt also aus der Voraussetzung, dass nicht alles, was der Mann sagt, falsch ist - und das steht im Gegensatz zu der Voraussetzung.

12. Wer hat Schuld?
Jemand kauft sich eine Mütze, sie passt ihm aber nicht, sie ist zu klein. An wem liegt das, an der Mütze oder am Kopf ?
Die Mütze ist jedenfalls nicht schuld, denn wenn nur der Kopf kleiner wäre, müsste sie passen. Also liegt es am Kopf!
Aber auch das ist falsch. Denn wenn nur die Mütze größer wäre, würde sie passen. Also liegt es an keinem von beiden - weder an der Mütze noch am Kopf.

13. Falsche Anwendung der Induktion.
Der Mathematiker Kummer (1810-1893) soll das folgende Beispiel gebracht haben. 60 ist durch 2 teilbar; die Zahl ist auch durch 3 teilbar, ebenso durch 4, durch 5, durch 6; sie wird also durch alle Zahlen teilbar sein.
Probieren wir es der Vorsicht halber mit einer größeren Zahl, etwa mit 12; es geht auch. Also wird es wohl immer stimmen.

Ein anderes Beispiel sind die bei der Lehre von der Kreisteilung auftretenden Zahlen $p = 2^{2^n}+1$. Für $n = 0$ erhält man 3, für $n = 1$ erhält man 5, für $n = 2$ die Zahl 17, für $n = 3$ die Zahl 257. Das sind alles Primzahlen, und auch für den Fall $n = 4$ fand man eine Primzahl, nämlich 65537.
Fermats Behauptung aber, die Zahlen $2^{2^n} + 1$ seien sämtlich Primzahlen, hat sich nicht bewahrheitet. Für $n = 5$ erhält man $2^{32} + 1$, und diese Zahl ist, wie Euler gefunden hat, durch 641 teilbar. Seitdem sind weitere Fälle bekannt geworden, in denen der Fermatsche Ausdruck nicht auf Primzahlen führt [12].

Es sei in diesem Zusammenhange daran erinnert, dass man auch bei dem großen Fermatschen Problem bisher nur auf Induktion angewiesen ist [11]. Man ist zwar in weiten Kreisen davon überzeugt, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen x, y, z und n nicht lösbar ist. Aber diese Ansicht stützt sich nur auf die Tatsache, dass man für eine - allerdings recht beträchtliche - Anzahl von n den Beweis der Unmöglichkeit gebracht hat.

14. Autologische und heterologische Worte.
Manche Worte bezeichnen Eigenschaften, die sie selbst besitzen. So ist das Wort "dreisilbig" selbst dreisilbig, das Wort "francais" ist französisch, das Wort "deutsch" ist deutsch usf.
Solche Worte sollen autologisch heißen.

Worte, die nicht autologisch sind, sollen heterologisch heißen. So sind viersilbig, französisch, spitz heterologisch.
Natürlich ist die überwiegende Mehrzahl der Worte heterologisch. Ich will nun untersuchen, ob das Wort "heterologisch" heterologisch oder autologisch ist.

Angenommen "heterologisch" sei heterologisch, dann ist es nach der Definition unserer beiden Begriffe autologisch, ich komme also auf einen Widerspruch. Nehme ich andrerseits an, das Wort "heterologisch" sei autologisch, so ist es nach der Begriffsdefinition heterologisch, ich

komme also wieder auf einen Widerspruch.
Was ist denn nun eigentlich mit dem Wort "heterologisch" los?

15. Die kleinste ganze Zahl.
a sei die kleinste ganze Zahl, deren Erklärung mehr als 20 deutsche Worte erfordert. Da dieser Satz weniger als 20 Worte enthält, ist a nicht die gewünschte Zahl. Der Satz enthält also einen Widerspruch in sich.

16. Der Dorfbarbier.[28]
Jemand definiert: Der Dorfbarbier ist der Mann im Dorf, der alle - sagen wir männlichen - Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Wir suchen die Frage zu entscheiden: Rasiert sich der Dorfbarbier selbst?

Angenommen, der Dorfbarbier rasiert sich selbst, dann darf er sich nach der vorangesetzten Erklärung nicht rasieren. Wir sind auf einen Widerspruch gestoßen. Also rasiert er sich nicht selbst. Dann soll er sich aber gerade nach der Definition rasieren. Auch diese zweite mögliche Annahme führt zu einem Widerspruch.

17. Das Russelsche Paradoxon [6].
Wir unterscheiden zwei Arten von Mengen. Zur ersten Art gehören die Mengen, die sich selbst als Element enthalten. Ein Beispiel einer solchen Menge ist diejenige aller abstrakten Begriffe. Zur zweiten Art gehören die Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Ein Beispiel für diese Art, die übrigens die weitaus am häufigsten benutzten Mengen umfasst, ist etwa die Menge der Zahlen 1, 2 und 3. Irgendeine Menge gehört entweder der einen oder der andern Art an.

Wir betrachten nun diejenige Menge, welche alle Mengen der zweiten Art und nur diese umfasst, wir nennen sie M. Gehört M zur ersten oder zur zweiten Art?
Wir nehmen zuerst an, M gehöre der ersten Art an, dann ist also M ein Element von M, Nun sollte aber M nur solche Mengen umfassen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Wir stoßen also bei unserer Annahme auf einen Widerspruch und müssen sie fallenlassen. So bleibt nur die andere Annahme übrig, M sei eine Menge zweiter Art, enthält sich selbst also nicht als Element. Auch das ist aber unmöglich, denn dann hätten wir entgegen unserer Erklärung von M eine Menge zweiter Art gefunden, die ihr nicht angehört. So führt auch die zweite Annahme zu einem Widerspruch [7], [8].

18. Die Geschichte von Tristram Shandy.
Dieser Tristram Shandy begann seine Lebensgeschichte zu schreiben, und er tat es so gründlich, dass er für die Geschichte der beiden ersten Tage seines Lebens zwei Jahre brauchte. Wir nehmen an, er fährt in dieser Weise fort. Es ist klar, auf diese Weise wird er niemals mit seiner Lebensgeschichte fertig, er stirbt über seiner allzu gründlichen Arbeit. Je älter er wird, desto weiter entfernt er sich von dem Stoff seiner Beschreibung.

Wenn er aber unendlich lange leben würde, dann hätte er seine ganze Lebensgeschichte schreiben können, obwohl sich jener Abstand zwischen der Zeit, über die er schreibt, und der Zeit, zu der er schreibt, ständig bis ins Unendliche vergrößert. In der Tat, handelt es sich auch um Tage aus noch so später Lebenszeit, immer kommt er in seiner Historie einmal auch an diese Zeit, da sein Alter ja beliebig viele Jahre erreicht.

(Hinweis: In der Mengenlehre sagt man: Die Zahl seiner Lebenstage würde äquivalent werden

[28] Der Trugschluss ist zuerst von L. Bieberbach (geb. 1886) formuliert.

der Zahl seiner Lebensjahre.)

2.9 Einige Beispiele aus der Physik

1. Grundlagen zur Konstruktion einer Zeitmaschine.
Es ist eine aus der Erdkunde bekannte Tatsache, dass Schiffe, die um die Erde fahren, an einer bestimmten Stelle, der Datumscheide, die ungefähr dem 180. Meridian folgt, das Datum gegenüber der richtigen Folge um einen Tag zurückrücken müssen, wenn sie von Westen nach Osten fahren; ebenso müssen sie das Datum um einen Tag vorausrücken, wenn sie die Datumgrenze von Ost nach West kreuzen.

Man denke sich jetzt den Fall, es gelänge, ein schnelles Flugzeug zu konstruieren, das in 23 Stunden einmal um die Erde fliegen könnte. Der Pilot käme dann, wenn er nach der eben gegebenen Regel verfahren hätte, bei einem Fluge in der Richtung von Westen nach Osten eine Stunde früher am Abflugsorte an, als er abgeflogen ist.

Dieses Problem, beliebig in der Zeit vorwärts und rückwärts zu kommen, kann man auch auf andere Weise lösen.

Man begibt sich an den Nordpol. Wenn man ihn in der Richtung von West nach Ost umkreist, so kommt man bei jeder Umkreisung um einen Tag zurück, da man ja beim Überschreiten der Datumgrenze einen Tag zurückzählen muss.
Wie in die Vergangenheit kann man auch in die Zukunft hineingelangen: Man braucht nur die Umkreisung des Poles in umgekehrter Richtung auszuführen.

Konstruiert man einen Apparat, der für eine schnelle Rotation um den Pol sorgt, so müsste man mit ihm in kürzester Zeit die ältesten Leute wieder jung machen können. Ungeahnte Perspektiven eröffnen sich für die Geschichte; und auch der Blick in die Zukunft steht jedem offen.

2. Ein Flugzeug, z. B. TU 114, hat eine Eigengeschwindigkeit von c km in der Stunde. Es fliegt mit dem Winde, dessen Geschwindigkeit in der Stunde v km betragen möge, nach einer Stadt, die l km entfernt ist. Dort angekommen, wendet es sofort und fliegt jetzt gegen den gleichen Wind wieder zurück. Da die verzögernde Wirkung des Gegenwindes auf dem Rückflug die gleiche ist wie die beschleunigende auf dem Hinflug und da die Strecke, auf der diese Beschleunigung oder Verzögerung wirksam ist, beide Male ebenfalls gleich groß ist, so heben sich beide gegenseitig auf.

Der Hin- und Rückflug wird also in $\frac{2l}{c}$ Stunden geschehen können. Ist z.B. $c = 800$ km/h, $l = 600$ km, so ist die Flugzeit $1,5$ Stunden.
Man sieht, auf die Stärke v des Windes kommt es hierbei gar nicht an. Ganz gleichgültig, wie groß die Windgeschwindigkeit ist, immer wird das Flugzeug in 1,5 Stunden auf dem Ausgangsflugplatz eintreffen können: denn die Verzögerung, die das Flugzeug etwa auf dem Hinflug durch den Gegenwind erfährt, wird durch die Beschleunigung auf dem Rückflug wettgemacht, vorausgesetzt, dass inzwischen nicht ein Wechsel in der Windgeschwindigkeit eingetreten ist.

Dies Ergebnis lehrt, dass das Flugzeug zurückkehren könnte, selbst wenn der Gegenwind auf dem Hin- oder Rückflug der Eigenbewegung des Flugzeuges gleichkommt, ja, wenn er diese übertrifft!

Hinweis:

$$t_1 = \frac{l}{c+v} \quad \text{Hinflug} \qquad , \qquad t_2 = \frac{l}{c-v} \quad \text{Rückflug}$$

also $t = t_1 + t_2 = \dfrac{2lc}{c^2 - v^2}$ Gesamtzeit. Für $c = v$ wäre die Gesamtzeit unendlich, für $c < v$ negativ; also ist der Rückflug für $c \leq v$ nicht möglich.

3. $\pi = 4$. In einem vertikal stehenden Kreise ist vom tiefsten Punkte A aus eine Sehne AB gezogen. Auf dieser bewegt sich reibungslos ein materieller Punkt von B nach A; in B ist die Anfangsgeschwindigkeit Null.
Unter dem Einfluss der Erdanziehung ist die Bewegung gleichmäßig beschleunigt; die Beschleunigung ist $g \sin\alpha$, mithin ist nach der bekannten Formel $s = \frac{b}{2}t^2$ für die bei gleichmäßiger Beschleunigung zurückgelegte Wegstrecke

$$AB = \frac{g \cdot \sin\alpha}{2} \cdot t^2$$

Nun ist $AB = AC \cdot \sin\alpha = 2r \cdot \sin\alpha$, mithin

$$2r \cdot \sin\alpha = \frac{g \cdot \sin\alpha}{2} t^2$$

woraus

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

folgt. t ist also unabhängig von α, alle von A ausgehenden Sehnen werden in gleicher Zeit durchlaufen.

Wir gehen nun zum mathematischen Pendel über. Ist der Ausschlag genügend klein, dann ist der Kreisbogen, den der materielle Punkt des Pendels durchläuft, durch die Sehne zu ersetzen. Nach der Pendelform ist für die hier betrachtete Viertelschwingung

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

wobei in unserem Falle $l = r$ ist. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

woraus sich der merkwürdige Wert 4 für π ergibt [1].

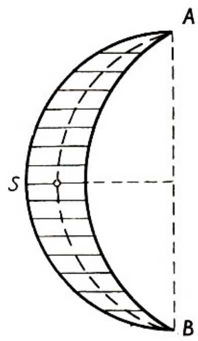


Abb. 56

4. Wie man den Schwerpunkt nicht berechnen soll.
$\triangle ABC$ wird durch beliebig viele Parallelen zu BC in Streifen aufgeteilt. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt aus Symmetriegründen in der Mitte. Mithin ist der geometrische Ort der Schwerpunkte der Streifen die Seitenhalbierende.
Wiederholt man das Verfahren ein zweites Mal von B aus, so erhält man einen zweiten geometrischen Ort, und der Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt.

Es sei nun ein Möndchen (Abb. 56) gegeben. Um seinen Schwerpunkt zu bestimmen, finden wir

nach der Streifenmethode einen geometrischen Ort in der Linie, die die zur Verbindungsstrecke der Möndchenecken A und B senkrechten Möndchensehnen halbiert. Da aus Symmetriegründen der Schwerpunkt ferner auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, ist er als Schnitt S beider Linien bestimmt.
Leider liegt der "richtige" Schwerpunkt nicht dort, sondern an einer anderen Stelle der Mittelsenkrechten.

5. Zur Kritik eines physikalischen Gesetzes.
Wenn ein Gas bei konstantem Druck durch Temperaturerhöhung um t^0 von dem Volumen v_0 bei $0°$ auf v_t ausgedehnt wird, so ist nach dem Gay-Lussacschen Gesetz bekanntlich

$$v_t = v_0(1 + \alpha t) \tag{1}$$

wo α etwa $\frac{1}{273}$ ist.
Lässt man hingegen das Volumen konstant, so besteht zwischen den Drücken p_t und p_0 bei t^0 und $0°$ die Gleichung

$$p_t = p_0(1 + \alpha t) \tag{2}$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so erhält man:

$$v_t \cdot p_t = v_0 \cdot p_0(1 + \alpha t)^2$$

Also ist das bekannte Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz

$$v_t \cdot p_t = v_0 \cdot p_0(1 + \alpha t)$$

falsch?

6. Wenn zwei dasselbe beobachten, brauchen sie nicht dasselbe zu beobachten.
Die Naturwissenschaften setzen doch als selbstverständliche Vorbedingung ihrer Forschung voraus, dass zwei Beobachter der gleichen Tatsache das gleiche Ergebnis finden, abgesehen natürlich von den geringfügigen Unterschieden, die durch die Geschicklichkeit, die Sinnenschärfe u. dgl. gegeben sind.

Dass es mit diesem Grundsatz schlecht bestellt ist, lehrt die folgende schöne Geschichte:
Ein Physiker, ein Lokomotivführer und ein Schlaukopf stehen beieinander. "Warum pfeift denn die Lokomotive, wenn sie herankommt, hoch, wenn sie wegfährt, tief?" fragt der Physiker.
"Weil es die Eisenbahndirektion so befohlen hat", antwortet der Schlaukopf, "das machen alle Lokomotiven, die bei mir vorbeifahren."
"Aber das ist ja gar nicht wahr", sagt der Lokomotivführer, "sie pfeift ja immer gleich hoch; ich muss es doch wissen!"
Hinweis: Dopplereffekt.

3 Warnzeichen aus der Analysis des Unendlichen

3.1 Unendlich-groß und Unendlich-klein

1. Die Zahl ∞ als letzte natürliche Zahl.
Eine Zahl ∞, Unendlich-groß, wird zuweilen eingeführt als letzte, größte Zahl in der Reihe der natürlichen Zahlen, also

$$1, 2, 3, ..., \infty$$

Wir beweisen unter dieser Annahme: 1 ist die größte natürliche Zahl.
Es sei die Zahl $k > 1$ die größte Zahl, dann wäre

$$k \cdot k = k^2 > k \cdot 1 = k$$

d.h., k wäre gar nicht die größte Zahl. Folglich kann keine Zahl $k > 1$ größte Zahl sein, denn aus dieser Annahme ergibt sich ein Widerspruch.
Also ist 1 die größte Zahl, denn nur in diesem Fall trifft der Widerspruch nicht zu.

2. Die Zahl $\infty = \frac{a}{0}$.
Eine Zahl ∞ wird oft durch die Gleichung

$$\frac{a}{0} = \infty$$

eingeführt, wobei a eine beliebige reelle Zahl - offenbar aber nicht selbst ∞ - ist.[29]
Daraus würde folgen: Irgend zwei reelle Zahlen sind gleich. Sind a und b zwei reelle Zahlen, dann ist

$$\frac{a}{0} = \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{0} = \infty$$

folglich

$$\frac{a}{0} = \frac{b}{0}$$

Nun darf man zwar bekanntlich die beiden Seiten einer Gleichung nicht durch 0 dividieren, wohl aber darf man beiderseits mit 0 multiplizieren. Dann folgt $a = b$.

3. Verbindung von ∞ mit der unendlich kleinen Zahl.
Den Gleichungen

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad , \qquad \frac{a}{0} = \infty$$

wird zuweilen die Bemerkung hinzugefügt: "In den beiden ... Gleichungen ist 0 als eine unendlich kleine Zahl aufzufassen."
Die Zahlen Unendlich-groß und Unendlich-klein werden also miteinander verkoppelt eingeführt.
Wir schreiben unter Benutzung eines besonderen Symbols für die unendlich kleine Zahl

$$\frac{a}{\infty} = \emptyset \qquad , \qquad \frac{a}{\emptyset} = \infty$$

Hiernach folgt, gleichgültig, von welcher der beiden Gleichungen man ausgeht, für irgend zwei reelle, von 0 und ∞ verschiedene Zahlen a und b

$$a = \emptyset \cdot \infty \qquad , \qquad b = \emptyset \cdot \infty$$

[29] Da aus $\frac{a}{b} = c$ folgt $\frac{a}{c} = b$, so kann die Einführungsgleichung auch $\frac{a}{\infty} = 0$ heißen. Dann sieht unsere Schlussfolgerung so aus: Es ist $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{b}{\infty} = 0$, folglich $\frac{a}{\infty} = \frac{b}{\infty}$, folglich $a = b$.

und daraus $a = b$.

4. Andere Einführung von Unendlich-groß und Unendlich-klein.
Die Zahlen ∞ und $\emptyset$, Unendlich-groß und Unendlich-klein, werden auch in der Weise eingeführt, dass

$$\infty + a = \infty \qquad \text{und} \qquad \emptyset + a = a \tag{1,2}$$

ist, wenn a eine endliche Zahl ist.
Daraus würde folgen, wenn man auf ∞ und $\emptyset$ die üblichen Rechenregeln anwendet, ∞ ist endlich. Es ist

$$(\infty + a)^2 = \infty^2, \qquad \infty^2 + 2a\infty + a^2 = \infty^2, \qquad \infty = -\frac{a}{2}$$

$\emptyset$ ist endlich. Es ist

$$(\emptyset + a)^2 = a^2, \qquad \emptyset^2 + 2\emptyset a + a^2 = a^2, \qquad \emptyset = -\frac{a}{2}$$

Übrigens folgt hieraus, dass $\emptyset = \infty$, Unendlich-klein gleich Unendlich-groß ist.

Feststellung zu 1 bis 4. Wenn man glaubt, durch die Symbole ∞ und $\emptyset$ neue Zahlen "Unendlich-groß" und "Unendlich-klein" eingeführt zu haben, für die man Gleichungen

$$\frac{a}{\emptyset} = \infty \qquad \text{oder} \qquad \infty + a = \infty, \qquad \emptyset + a = a$$

festsetzen und mit denen man nach den üblichen Rechenmethoden rechnen darf, so trifft man auf Widersprüche. Es gibt also keine konstanten Zahlen ∞ und $\emptyset$.

5. $\infty < -1$. Es ist

$$\frac{a^3}{a} = a^2, \qquad \frac{a^2}{a} = a^1 = a, \qquad \frac{a^1}{a} = a^0 = 1, \qquad \frac{a^0}{a} = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{usw.}$$

So werden manchmal die Potenzen mit negativen Exponenten und mit den Exponenten 1 und 0 eingeführt. Die gleiche Schlussweise hat einmal Wallis auf die folgende Bruchfolge angewandt:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \ldots$$

Also können wir dieser Folge von Ungleichungen insbesondere entnehmen, indem wir $\frac{1}{0} = \infty$ einsetzen,

$$1 < \infty < -1$$

Feststellung: Einführungen von Rechenoperationen, die durch die Weiterführung von Folgen von schon definierten Rechenoperationen begründet werden, sind nicht zulässig.

6. Gleiche Punktmengen; $\sqrt{200} = 10$.

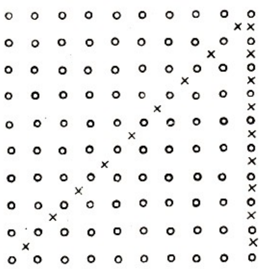


Abb. 57

In dem Punktgitter der Abb. 57 ist die Anzahl der Punkte auf einer Quadratseite gleich der Anzahl der Punkte auf einer Diagonale. Vermehrt man die Anzahl der Punkte des Quadratgitters in der Weise, dass man bei gleichbleibender Quadratgröße den Gitterpunkten die halbe Entfernung gibt, so wie es nur auf der Quadratseite und der Diagonale durch Kreuze angedeutet ist, dann bleibt die Tatsache gleicher Punktanzahl erhalten.

Gleiches ist der Fall, wenn man die Punktanzahl noch einmal so vermehrt und so fortfährt. Im Grenzfall ist also die Punktanzahl auf der Quadratseite und der Diagonale gleich groß, d.h., beide haben gleiche Länge. Wendet man andererseits den pythagoreischen Lehrsatz zur Längenbestimmung der Diagonale an, so ergibt sich das absurde Ergebnis am Kopf dieser Nummer.

7. $1 = \infty$.
Durch die von O ausgehenden Strahlen wird jedem Punkt der gebrochenen Strecke ABC genau ein Punkt der unendlichen Geraden g zugeordnet und umgekehrt (Abb. 58).

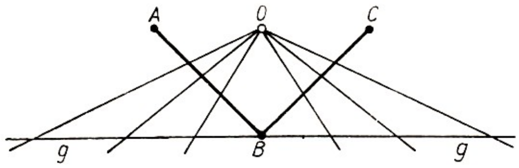


Abb. 58

Macht man $AB = BC = \frac{1}{2}$, so hat also die Strecke von der Länge 1 genausoviel Punkte wie die unendlich lange Gerade g. Misst man beide etwa in Zentimetern, dann ist also $1 : \infty$.

8. Ein Quadrat ist ebenso groß wie seine Seite.
Der Leser wird zunächst sagen, das sei unmöglich, dass eine Fläche so groß sei wie eine Linie.

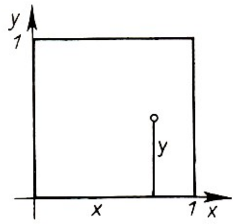


Abb. 59

In der Abb. 59 ist in ein Koordinatenkreuz ein Quadrat von der Seitenlänge 1 eingezeichnet. Irgendein beliebiger Punkt seines Innern mit Einschluss der in die Koordinatenachsen fallenden beiden Seiten habe die Koordinaten x und y. Dann lässt sich x wie y immer als unendlicher Dezimalbruch, der zwischen 0 und 1 liegt - mit Einschluss der einen Grenze 0, mit Ausschluss der Grenze 1 - darstellen.
Sollte es sich nämlich um einen endlichen Dezimalbruch handeln, etwa um 0,43, dann kann ich ihn immer in einen unendlichen umschreiben, nämlich den eben genannten in 0,42999...

Ist nun

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 ... \qquad , \qquad y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 ...$$

so ordne ich dem Punkt $(x; y)$ einen Punkt mit der Koordinate

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 ...$$

auf der x-Achse zu. Die $a_1, a_2, ...$ und $b_1, b_2, ...$ bedeuten dabei Ziffern 0, 1, 2, ..., 9.

Jedem Punkt des Quadrates entspricht damit genau ein Punkt der Quadratseite und umgekehrt. Quadratfläche und Quadratseite haben also gleich viele Punkte, sind also gleich groß.

9. Konzentrische Kreise haben gleichen Umfang.

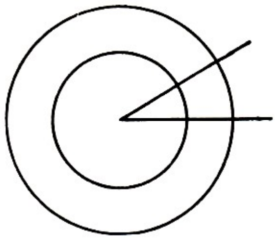


Abb. 60

Abb. 60 zeigt zwei konzentrische Kreise und zwei vom gemeinsamen Mittelpunkt ausgehende Strahlen. Man sieht daraus, dass jedem Punkt des kleinen Kreises genau ein Punkt des großen entspricht und umgekehrt. Beide Kreise haben also gleich viele Punkte, sind also gleich groß.

Feststellung zu 6 bis 9: Die Tatsache, dass man die Punkte einer Linie eineindeutig den Punkten einer anderen Linie oder auch einer Fläche zuordnen kann, besagt nicht, dass die beiden Linien oder dass Linie und Fläche gleiche Größe haben.

10. Winkel als Ausschnitte der Ebene.

Wir beweisen: Die Summe der Winkel im Dreieck ist $180°$.
Der zu einem Winkel von $\alpha°$ gehörige Ausschnitt der ganzen Ebene wird mit $\alpha° \cdot \infty$, also z.B. der zu dem gestreckten Winkel, mit anderen Worten zur Halbebene gehörende Ebenenteil mit $180° \cdot \infty$ bezeichnet. Nun zeigt Abb. 61, dass sich

$$\alpha° \cdot \infty + \beta° \cdot \infty + \gamma° \cdot \infty$$

nur um die endliche Fläche des Dreiecks von der Halbebene unterscheidet.

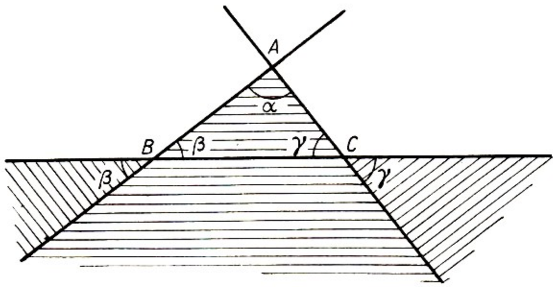


Abb. 61

Da aber dieses endliche Stück auf die Größe der unendlichen Halbebene keinen Einfluss hat, ist

$$\alpha° \cdot \infty + \beta° \cdot \infty + \gamma° \cdot \infty = 180° \cdot \infty \tag{1}$$

folglich $\alpha° + \beta° + \gamma° = 180°$.

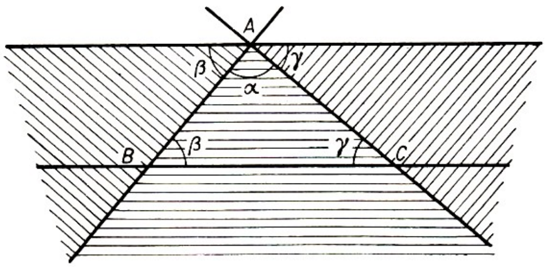


Abb. 62

Wem die Vernachlässigung des endlichen Ebenenstückes missfällt, der kann den gewünschten Nachweis unter Verzicht auf ihn "einwandfreier" erbringen, indem er wie beim üblichen Beweis des Satzes durch A die Parallele zu BC zieht (Abb. 62) und nun ohne weiteres abliest, dass die Halbebene die Gleichung

$$\alpha^\circ \cdot \infty + \beta^\circ \cdot \infty + \gamma^\circ \cdot \infty = 180^\circ \cdot \infty \tag{2}$$

liefert.
Die beiden hier in gleicher Bezeichnung durch $180 \cdot \infty$ auftretenden Halbebenen unterscheiden sich aber nicht um ein endliches, sondern sogar um ein unendliches Flächenstück, nämlich um den Streifen zwischen der Geraden BC und ihrer Parallelen durch A.
Damit erweist sich diese ganze Rechnerei als unzulässig. Die Multiplikation mit ∞ ist nicht definiert (entsprechend der Division durch 0).

11. Billige Fahrräder.
Eine Fabrik schickt an A 5 Gutscheine, die er an 5 Freunde B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 verteilen soll. Ein Gutschein lautet auf 20 M. Wenn A die Gutscheine los ist, erhält er ein Fahrrad, vorausgesetzt, dass B_1, B_2 usf. bis B_5 jeder erstens 20 M eingezahlt hat und zweitens 5 Gutscheine über 20 M verteilt hat an C_{11}, C_{12}, ..., C_{15}, C_{21}, ..., C_{55}.
Die C-Leute sollen in gleicher Weise verfahren. Wird das bis ins Unendliche fortgesetzt, dann bekommt A sein Fahrrad umsonst, jeder weitere aber erhält eines für 20 M. Die Fabrik aber erhält für jedes Fahrrad 100 M.

3.2 Grenzübergänge

1. Ein "Kontinuitätsprinzip"
Von Leibniz (1646-1716) soll das folgende, auch nach Arbogast (1759-1803) genannte Kontinuitätsprinzip stammen:
Jede Eigenschaft, die allen Gliedern der definierenden Reihe zukommt, trifft auch für die Grenze zu.

Dieses Prinzip scheint durch den Übergang vom Peripherie- zum Sehnentangentenwinkel und ebenso durch den Übergang vom Sekantensatz zum Sekantentangentensatz bestätigt zu werden.
Der Sekantensatz sagt, wenn von P aus zwei Strahlen ausgehen, deren Schnitte mit dem Kreis A_1 und A_2 bzw. B_1 und B_2 sind, dann ist $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.
Wird im Grenzfall die eine Sekante zur Tangente PA, wobei A der Berührungspunkt ist, so "folgert" man aus dem angegebenen Prinzip

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

Ein weiteres Beispiel zur Anwendung dieses "Prinzips":
Eine Strecke wird durch ihren Schwerpunkt im Verhältnis 1 : 2 geteilt. In einem gleichschenkligen Dreieck liegt der Schwerpunkt auf der Basishöhe und teilt diese im Verhältnis 1 : 2. Man lässt nun die Basis unter Beibehaltung der Höhe immer mehr zusammenschrumpfen, dabei ändert sich die Lage des Schwerpunktes nicht. In der Grenzlage wird dann das gleichschenklige Dreieck zur Höhe, und der Grenzwert des Schwerpunktes bleibt an der gleichen Stelle, d.h., der Schwerpunkt der Höhe teilt sie im Verhältnis 1 : 2.

2. Die Diagonale eines Quadrates ist gleich der Summe zweier Seiten.

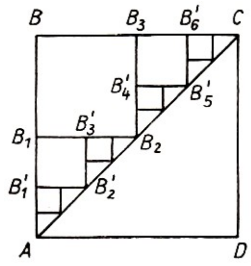


Abb. 63

Wir wollen den Weg von A bis C in dem nebenstehenden Quadrat (Abb. 63), dessen Seite der Einfachheit halber gleich 1 sei, in der Weise zurücklegen, dass wir erst nach B, dann nach C gehen; der zurückgelegte Weg ist dann gleich 2.
Die Weglänge bleibt unverändert, wenn wir statt dieses Weges den Stufenweg $AB_1B_2B_3C$ wählen. Auch wenn wir jetzt die Zahl der Stufen verdoppeln, ihre Höhe also auf die Hälfte herabsetzen, bleibt die gesamte Weglänge 2. Das können wir fortsetzen; die Figur deutet es für die doppelte Stufenzahl noch an.

Lassen wir die Stufenzahl durch immer weiteres Verdoppeln ins Unendliche wachsen, so bleibt die gesamte Weglänge doch immer gleich 2, der Weg selbst aber nähert sich immer mehr der Diagonale AC und stimmt in der Grenze mit ihr überein. Ihre Länge ist demnach gleich 2.

Die Beweisführung ist nicht an die Wahl des Quadrates gebunden; man kann z.B. ebensogut von einem Parallelogramm ausgehen und dann beweisen, dass die Diagonale im Parallelogramm gleich der Summe zweier anliegenden Seiten ist oder eine Seite eines Dreiecks gleich der Summe der beiden andern.

3. $\pi = 2$.
Man zeichne einen Kreis und einen seiner Durchmesser. Ist d die Länge des Durchmessers, so ist der Umfang des Kreises πd. Jetzt zeichne man in den Kreis zwei neue Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Durchmesser liegen und die den halben Durchmesser haben wie der erste Kreis.

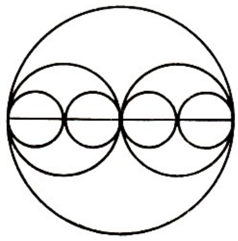


Abb. 64

Sie mögen so liegen, wie es die Abb. 64 anzeigt. Die Umfänge dieser beiden Kreise betragen dann zusammengenommen gleichfalls πd. Schreibt man jedem der Kreise in gleicher Weise wieder je zwei Kreise ein, so ist der gesamte Umfang aller vier Kreise immer noch πd.
Das bleibt auch so, wenn man damit nach Belieben fortfährt. Was gibt das nun in der Grenze für unendlich viele Kreise?

Die Grenzfigur unterscheidet sich nicht von dem Durchmesser selbst, der aber freilich gleichsam doppelt zu denken ist: einmal als Grenze, der die oberen Halbkreise zustreben, und andererseits als Grenze der unteren Halbkreise. So finden wir $\pi d = 2d$ also $\pi = 2$.

4. $\pi = 4$.
Auf einem festen Kreis, der den Radius $r = OA$ hat, rollt außen ein kleiner Kreis ab, der den Radius $\frac{r}{n}$ hat, wobei n eine ganze Zahl ist (Abb. 65).

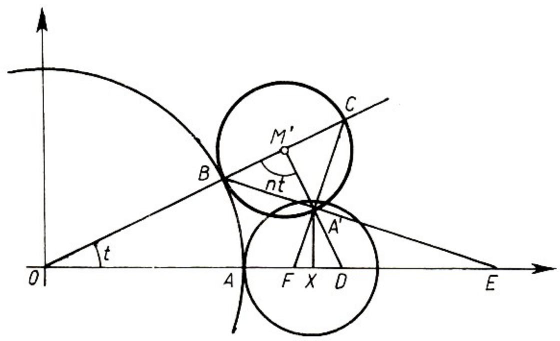


Abb. 65

Dann beschreibt der Punkt A des kleinen Kreises eine Epizykloide. Nach einer Abrollung um den Winkel t sei der Mittelpunkt des kleinen Kreises in die Lage M', der Punkt A in die Lage A' gekommen.

Dann ist $\angle BM'A' = nt$, $\angle BCA' = \frac{nt}{2}$ als Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $BM'A'$.
$M'A'$ schneidet OA in D, BA' schneidet OA in E, CA' in F. Als Außenwinkel von $\triangle M'OD$ wird

$$\angle A'DE = (n+1)t$$

Nun ist $OM' = r + \frac{r}{n} = r\frac{n+1}{n}$, also sind die Koordinaten von M'

$$x' = \frac{r}{n}(n+1)\cos t \qquad , \qquad y' = \frac{r}{n}(n+1)\sin t$$

Sind x und y die Koordinaten von A', also $OX = x$ und $A'X = y$, dann ist (beachte das Vorzeichen der Kosinusfunktion!)

$$x = \frac{r}{n}(n+1)\cos t - \frac{r}{n}\cdot\cos(n+1)t \qquad , \qquad y = \frac{r}{n}(n+1)\sin t - \frac{r}{n}\cdot\sin(n+1)t$$

oder

$$x = \frac{r}{n}[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t] \qquad , \qquad y = \frac{r}{n}[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t]$$

Berechnet man, wie in der Integralrechnung gezeigt wird, zuerst den Flächeninhalt der Epizykloide, so erhält man

$$F = \frac{(n+1)(n+2)\pi r^2}{n^2}$$

Für die Bogenlänge des Epizykloidenbogens, der zu einem ganzen Umlauf $t = 2\pi$ gehört, erhält man als Umfang der ganzen, geschlossenen Kurve dann zweitens

$$u = \frac{8(n+1)r}{n}$$

Geht man in diesen Ausdrücken zur Grenze $n \to \infty$ über, d.h., geht der Radius des abrollenden Kreises gegen 0, so nähert sich die Epizykloide beliebig dem Kreise. In der Tat ergibt auch

$$\lim_{n\to\infty} F = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\pi r^2 = \pi r^2$$

die bekannte Formel für den Inhalt A des Kreises. Andererseits wird

$$\lim_{n\to\infty} u = \lim_{n\to\infty} 8\left(1+\frac{1}{n}\right) r = 8r$$

Da nun bekanntlich der Kreisumfang $2\pi r$ ist, erhält man für π den Wert 4.

5. $\pi^2 = 2\pi$.
Über den Seiten eines regelmäßigen n-Ecks (Abb. 66) sind Halbkreise gezeichnet.

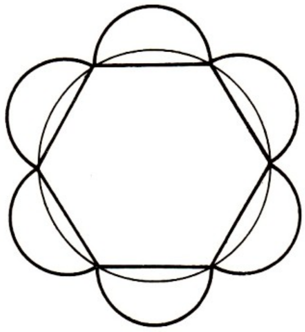


Abb. 66

Ist u_n der Umfang des dem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen n-Ecks, so ist die Länge l_n aller Halbkreise

$$l_n = \frac{\pi}{2} \cdot u_n$$

Geht man jetzt zur Grenze $n \to \infty$ über, so geht u_n gegen $2\pi r$, mithin die von den Halbkreisen gebildete Linie $l_n \to \pi^2 r$, sie fällt aber im Grenzfall mit dem Kreis zusammen, dessen Umfang $2\pi r$ ist.

6. $\pi = 2\frac{2}{3}$.
Der Inhalt der von der kleinen Achse begrenzten Halbellipse ist $\frac{1}{2}\pi ab$, wobei a die große, b die kleine Halbachse ist. Der Inhalt eines Flächenstückes, das von einem Parabelbogen und von einer im Abstand a parallel zur Scheiteltangente gezogenen Sehne von der Länge $2b$ begrenzt wird, ist $\frac{2}{3}a \cdot 2b$.
Lässt man nun in der Ellipse a größer und größer werden, so geht die Ellipse in eine Parabel über. Man erhält also in der Grenze die Gleichung

$$\frac{1}{2}\pi ab = \frac{2}{3}a \cdot 2b$$

Folglich wird $\frac{1}{2}\pi b = \frac{4}{3}b$ oder $\pi = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Feststellung zu 1 bis 6: Das "Kontinuitätsprinzip" ist nicht stichhaltig.

7. Die Oberfläche der Kugel ist $\pi^2 r^2$.
Wenn man die Kugel wie einen Globus mit Meridianen und Breitenkreisen bedeckt und die Schnittpunkte durch Radien mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet, dann kann man die Kugel aus vierseitigen, um die Pole herum dreiseitigen pyramidenähnlichen Körpern aufgebaut denken. Ein bekannter Beweis der Beziehung

$$\frac{\pi}{3} r \cdot O = V$$

zwischen Oberfläche O und Rauminhalt V der Kugel macht sich das zunutze, indem er die Tatsache benutzt, dass "im Grenzfall", d.h., wenn man Meridiane und Breitenkreise genügend dicht nimmt, die pyramidenähnlichen Körper sich beliebig genau als Pyramiden berechnen lassen.

Auch bei der Herleitung der Beziehung zwischen Umfang u und Flächeninhalt F des Kreises

$$\frac{r}{2} u = F$$

stellt man ja eine ähnliche Überlegung an, wobei sich die Kreisausschnitte beliebig genau nach der Dreiecksformel auswerten lassen.

Eine entsprechende Überlegung macht sich der folgende Trugschluss zunutze:

Auf einer Kugel zieht man von einem willkürlich angenommenen Punkt als Pol aus in gleichen Winkelabständen n Meridiane und betrachtet die Kugeldreiecke, die von je zwei benachbarten Meridianen und dem zum Pol gehörigen Äquator gebildet werden. Je größer n wird, je kleiner also der Winkel zwischen den beiden Meridianen wird, um so mehr werden die Dreiecke ihrem Inhalt nach durch Grundlinie mal Höhe angenähert.

Die auf dem Äquator liegende Grundlinie sei g, die Höhe h ist ein Quadrant des größten Kugelkreises, also, wenn r der Radius der Kugel ist, $\frac{\pi r}{2}$.
Der Inhalt eines Dreiecks ist also $\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\pi r}{2}$. Die Oberfläche der Halbkugel wird dann durch $n \cdot g \cdot \frac{\pi r}{4}$, diejenige der ganzen Kugel durch $\frac{n \cdot g \cdot \pi \cdot r}{2}$ gemessen.

Nun ist ng der Äquatorumfang, also $2\pi r$, mithin wird die Oberfläche der ganzen Kugel $\pi^2 r^2$.

Feststellung: Es genügt nicht der womöglich nur gefühlsmäßig begründete Nachweis, dass man die Abweichung eines Flächen- oder eines Raumstückes von einem ausmessbaren Flächen- oder Raumstück beliebig klein machen kann, wenn sich das insgesamt auszuwertende Flächen- oder Raumstück aus beliebig vielen jener Flächen- oder Raumstücke zusammensetzt.

8. $2 = 3 = n$.
Die übliche Herleitung des Differentialquotienten der Funktion

$$y = x^n$$

geht so vor sich: Man rechnet den Differenzenquotienten

$$\frac{x^n - x_1^n}{x - x_1} = x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + x^{n-3}x_1^2 + ... + x x_1^{n-2} + x_1^{n-1}$$

aus und geht zur Grenze $x \to x_1$ über, indem man rechts $x = x_1$ setzt. Dann folgt für den Differentialquotienten an der Stelle x_1

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{x^n - x_1^n}{x - x_1} = n x_1^{n-1}$$

Nun ist

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \qquad , \qquad \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + x + 1$$

und allgemein

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$$

worin n eine natürliche Zahl ist.
Für $x = 1$ nehmen die linken Seiten dieser Gleichungen den gleichen Wert $\frac{0}{0}$ an; es sind also auch die rechten Seiten gleich, d.h. aber, es ist $2 = 3 = n$.

Feststellung: Man kann nicht den Wert einer Funktion, die für einen bestimmten Wert der Veränderlichen sinnlos wird, dadurch bestimmen, dass man sie erst umformt und dann nachträglich die vorher verbotene Operation ausführt.
Die Funktion $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ ist von der Funktion $y = x + 1$ insofern verschieden, als die erste für $x = 1$ keinen Wert hat, wohl aber die zweite, und entsprechend so ist es für die anderen Ausdrücke.[30]

[30] Dieser Einwand gegen eine verbreitete Herleitung des Differentialquotienten ist schon von dem englischen Philosophen Berkeley (1685-1753) erhoben worden.

9. $\sin 2x = 2\sin x$.
Aus der Formel

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{folgt} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x} = 2$$

also ist $\sin 2x = 2\sin x$.
Feststellung: Aus

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g(x)}$$

darf man nicht $f_1(x) = f_2(x)$ schließen.

10. $+1 = -1$ würde sich ergeben, wenn man

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x-y}{x+y} \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x-y}{x+y}$$

gleichsetzte. Die Ausdrücke sind aber verschieden. Es ist nämlich

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} = +1 \qquad \text{also} \qquad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x-y}{x+y} = +1$$

dagegen

$$\lim_{y\to\infty}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1} = -1 \qquad \text{also} \qquad \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x-y}{x+y} = -1$$

11. Gleichheit zweier beliebiger Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ würde sich ergeben, wenn man in

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{ax+cy}{bx+dy}$$

die Vertauschung der Grenzübergänge zuließe. Es ist

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{ax+cy}{bx+dy} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \qquad , \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{ax+cy}{bx+dy} = \lim_{y\to 0}\frac{cy}{dy} = \frac{c}{d}$$

12. $1 = 0$ würde sich ergeben, wenn man in

$$\lim_{a\to 0}\lim_{b\to 0} a^b$$

die Vertauschung der Grenzübergänge zuließe. Es ist

$$\lim_{a\to 0}\lim_{b\to 0} a^b = \lim_{a\to 0} a^0 = \lim_{a\to 0} 1 = 1 \qquad , \qquad \lim_{b\to 0}\lim_{a\to 0} a^b = \lim_{b\to 0} 0^b = \lim_{b\to 0} 0 = 1$$

Feststellung zu 10 bis 12. Die Reihenfolge zweier Grenzübergänge ist nicht immer vertauschbar.

13. Wie groß ist $\lim\limits_{a\to 0} a^a$?
Rechnet man

$$\lim_{a\to 0} a^a = \left(\lim_{a\to 0} a\right)^{\lim\limits_{a\to 0} a}$$

so aus, dass man erst in der Basis zur Grenze übergeht und dann im Exponenten, so erhält man 0, rechnet man aber so, dass man erst im Exponenten zur Grenze übergeht, dann erhält man 1.

14. Ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1$ oder $=\infty$?
Geht man erst in der Basis der unter dem Limes stehenden Potenz zur Grenze $n\to\infty$ über, so findet man nachher den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Beachtet man aber, dass $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}>1$ ist und $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ für $a>1$ den Grenzwert ∞ hat, so scheint der Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ gleich ∞ zu sein. Bekanntlich sind beide Schlüsse falsch.

Feststellung zu 12 und 13. Man darf nicht einen Grenzwert in eine Folge von zwei nacheinander ausführbaren Grenzübergängen auflösen.

15. Steiners[31] Beweis für die Kreisisoperimetrie (nach Perron).
Wenn man irgendeine geschlossene Linie von vorgegebener Länge hat, die kein Kreis ist, dann lässt sich allemal eine andere ebenso lange Linie ermitteln, die eine größere Fläche umschließt.

Man schließt ebenso: $1+x+x^2+\ldots$ konvergiert für verschiedene positive Werte von x. Greife ich einen heraus, so kann ich immer einen Wert x_1 angeben, der größer ist als x, für den die Reihe auch noch konvergiert. Da sie aber nicht für beliebig große Werte konvergiert, gibt es einen größten Wert, für den sie konvergiert.
Das ist aber ein Fehlschluss.

Die Reihe divergiert für $|x|\geq 1$ und konvergiert für $-1<x<+1$. Es gibt also keinen größten Wert zu, für den sie konvergiert.

Feststellung: In dem Steinerschen Beweis fehlt der Nachweis, dass es überhaupt eine Linie gibt, die eine größte Fläche bei fester Länge umschließt. Ist dieser Nachweis erbracht, dann kann es nur der Kreis sein. Bewiesen ist von Steiner nur: Eine vom Kreis verschiedene Linie kann nicht die größte Fläche einschließen.

16. Der gebrochene Streckenzug ABC soll durch eine Kurve angenähert werden, die sich ihm möglichst eng anschließt.
Man ersetzt den Knick bei B durch einen Kreisbogen, der BA und BC zu Tangenten hat. Die Forderung, dass diese Kurve sich möglichst eng dem Streckenzug ABC anschließt, ist unerfüllbar, da es zu jedem Kurvenzug einen solchen gibt, der sich noch enger anschließt.

3.3 Folgen

1. Ordnung einer Folge von Zahlen nach der Größe.
Zahlen einer Folge positiver Elemente sind nicht immer monoton steigend oder monoton fallend, aber wenn sie es nicht sind, lassen sie sich jedenfalls ihrer Größe nach in einer neuen Folge anordnen. Ist z.B. die Folge durch

$$a_{2n-1}=\frac{1}{n}\qquad,\qquad a_{2n}=\frac{1}{2n}$$

gegeben, also $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$, so lässt sie sich umordnen in

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\ldots$$

Wir wollen zusehen, ob das wirklich immer geht.

[31] J. Steiner (1796-1863).

Betrachten wir die Gesamtheit der Brüche $\frac{a}{b}$ zwischen 0 und 1. Ich kann sie in eine Folge bringen, etwa nach der Vorschrift:
Die Brüche, in denen die Summe von Zähler und Nenner den Wert n haben, sollen vor denen stehen, in der diese Summe den Wert $n+1$ hat. Die Brüche einer solchen einzelnen Reihe sollen wieder nach der Größe der Zähler geordnet werden. Brüche, die sich kürzen lassen, bleiben weg. So haben wir also die Folge

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \dots \tag{1}$$

Wir wollen auch hier den Versuch machen, die Brüche dieser natürlich nicht monoton steigenden oder fallenden Folge der Größe nach zu ordnen. Das sei geschehen.
Auf den Bruch $\frac{a}{b}$ folge der Bruch $\frac{c}{d}$. Nun ist auch der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ ein Bruch unserer Folge (1). Aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ folgt $ad < bc$. Ich behaupte

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \tag{2}$$

diese Ungleichung lässt sich in

$$ab + ad < ab + bc$$

umbilden, also ist (2) richtig. Weiter ist

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

denn die Produktenungleichung

$$ad + cd < bc + cd$$

erweist sich ebenfalls als richtig. Es ist also

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

d.h., $\frac{c}{d}$ war gar nicht der auf $\frac{a}{b}$ folgende Bruch. Wir sind auf einen Widerspruch gekommen.

An die Stelle dieser bei den Fabry-Reihen benutzten Mittelbildung hätten wir auch das arithmetische Mittel nehmen können, also

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd}$$

denn es ist auch $\dfrac{a}{b} < \dfrac{ad+bc}{2bd} < \dfrac{c}{d}$.

Feststellung: Es ist nicht immer möglich, eine nicht monoton steigende oder fallende Folge positiver Zahlen in eine monoton steigende oder fallende Folge durch Umstellung der Elemente zu verwandeln.

2. Jemand schließt folgendermaßen: Ist die positive Zahl $a < 1$, dann wird $a^2 < a$, $a^3 < a^2$, ..., die Potenzen von a nehmen also ständig ab, mithin wird

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad \text{für} \quad 0 < a < 1$$

Auch in der Folge

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 1\frac{1}{2}, \quad a_3 = 1\frac{1}{3}, \quad a_4 = 1\frac{1}{4}, \dots$$

nehmen die Glieder ständig ab, sie nähern sich also ständig der 0, aber doch ist nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, sie nähern sich nicht beliebig der Grenze 0. Man sieht ja ohne weiteres, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ist.

Feststellung: Wenn in einer Folge positiver Zahlen von irgendeinem n an beständig $a_{n+1} < a_n$ ist, so folgt daraus keineswegs, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ist.

3. Umgekehrt kann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sein, auch wenn $a_{n+1} < a_n$ nicht erfüllt ist. Das sieht man an der Folge

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad , \qquad a_{2n} = \frac{1}{2n}$$

also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.
Feststellung: Die beiden Forderungen $a_{n+1} < a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ haben nichts miteinander zu tun.

4. $e = \infty$.
Jemand schließt folgendermaßen: Ist $a > 1$, dann wird $a^2 > a$, $a^3 > a^2$, ..., die Potenzen von a wachsen also ständig, mithin wird

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \qquad \text{für} \quad a > 1$$

Wir wollen auf Grund dieser Schlussweise ableiten, dass $e = \infty$ ist. Man definiert bekanntlich

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wir beweisen, dass $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ ist, und haben dann, wie in der obigen Schlussweise, gezeigt, dass die Folge der Zahlen mit dem allgemeinen Glied $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gegen ∞ geht.
Nach dem binomischen Satz ist

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Danach wird für $x = -\frac{1}{n^2}$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

folglich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

und das ist unsere Behauptung.
Feststellung: Die beiden Forderungen $a_{n+1} > a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ haben nichts miteinander zu tun.

5. Die letzte Zahl einer Folge.
Die Folge der Zahlen

$$0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; 0{,}3333; \ldots$$

nähert sich beliebig dem Wert $\frac{1}{3}$; sie hat den Grenzwert $\frac{1}{3}$. Also ist $\frac{1}{3}$ die letzte Zahl dieser Folge.

Dass diese Schlussfolgerung falsch ist, zeigt zunächst die Folge der natürlichen Zahlen, wie bereits aus Nr. 1 (3.1) hervorgeht. Übrigens müsste dann z.B. die Frage Verlegenheit bereiten, ob diese letzte Zahl gerade oder ungerade ist. Ebenso kommt man bei der Folge

$$+1, -1, +1, -1, ...$$

in Verlegenheit, anzugeben, ob die "letzte"Zahl +1 oder -1 ist.
Aber nehmen wir nicht eine divergierende, sondern eine konvergierende Folge. Ist π die letzte Zahl der Folge

$$3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; ...$$

Wer ja sagt, nenne die vorletzte Zahl!
Diese Frage bringt ebenso den in Verlegenheit, der in der Nullfolge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$$

die kleinste Zahl angeben soll, und sie zeigt schließlich auch, dass die als Ausgang dieser Betrachtung gewählte Folge die Zahl $\frac{1}{3}$ nicht erreicht.

Feststellung: Die Zahl, die Grenzwert einer Folge ist, gehört im allgemeinen der Folge nicht an.
Wir haben gesagt "im allgemeinen". Ich kann natürlich den Grenzwert in die Folge aufnehmen und etwa oben als Folge vorlegen

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, ...$$

oder im Ausgangsbeispiel

$$0,3; \frac{1}{3}; 0,33; \frac{1}{3}; 0,333; \frac{1}{3}; 0,3333; \frac{1}{3}; ...$$

6. Vergleich zweier Folgen.
Zwei Folgen seien gegeben. In

$$a_1, a_2, a_3, ... \qquad \text{sei} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und in

$$b_1, b_2, b_3, ... \qquad \text{sei} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Außerdem sei für alle k $a_k > b_k$. Dann braucht nicht daraus $a > b$ zu folgen.
Beispiel: $a_k = \frac{1}{k}$, $b_k = \frac{1}{2k}$.

3.4 Funktionen und Kurven

1. Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \sin \pi x$$

und wollen ihren Grenzwert für $x \to \infty$ feststellen. Wenn x die ganzen Zahlen durchläuft, erhalten wir die Wertefolge

$$\sin 0 = 0, \sin \pi = 0, \sin 2\pi = 0, \sin 3\pi = 0, \sin 4\pi = 0, ...$$

Also scheint $\lim\limits_{x\to\infty} \sin \pi x$ den Wert 0 zu haben. Setzt man aber für x etwa die Folge $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}, ...$ ein, so erhält man für die Funktion die Wertefolge

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{5\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{9\pi}{2} = 1, ...$$

und wenn man x die Folge $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, ... durchlaufen lässt, erhält man wieder andere Werte; der gesuchte Grenzwert existiert nicht.

Feststellung: Um den Grenzwert einer Funktion für $\to a$ zu untersuchen, muss man feststellen, ob die Funktion dem gleichen Grenzwert zustrebt, wenn x eine ganz beliebige gegen a zustrebende Folge durchläuft.

2. Wie sieht die Funktion $y = \frac{x}{x}$ aus?
Man darf von einer scheinbar elementaren Funktion nicht ohne weiteres annehmen, dass sie für jedes x einen Wert hat. Die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

hat für $x = 0$ keinen Wert. Aber es handelt sich um eine hebbare Unstetigkeit. Die Funktion unterscheidet sich von der Funktion $y = 1$ nur in ihrem Verhalten an der Stelle $x = 0$.
Durchläuft x eine beliebige monoton fallende oder steigende Nullfolge, so durchläuft die Folge der zugehörigen Funktionswerte auf jedem Fall die Folge 1, 1, 1, ... Mithin ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Ebenso hat die Funktion $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$ für $x = a$ keinen Wert, es wird aber

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (x + a) = 2a$$

Feststellung: Es kann vorkommen, dass eine Funktion für einen Wert $x = a$ nicht existiert, dass aber $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert.

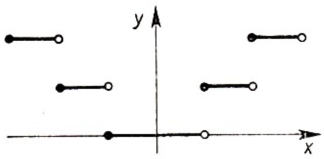
3. Grenzwerte von rechts und links.
Es werde untersucht die Funktion

$$y = E(|x|)$$

worin $|x|$ den absoluten Wert von so bedeutet und $E(|x|)$ den Wert der größten ganzen Zahl, die kleiner oder gleich $|x|$ ist. Abb. 67 zeigt das Bild dieser Funktion.
Wenn man z.B. an den Wert der Funktion für $x = 1$ von links herankommt, so ergibt sich $y = 0$, dagegen ist $\lim\limits_{x\to 1} y$, von rechts herankommend $+1$.

Feststellung: Man muss bei Grenzwerten von Funktionen gegebenenfalls unterscheiden, ob man sich, bildlich gesprochen, von rechts oder von links dem Grenzwert nähert.

Abb. 67,68



4. Wert der Funktion und Grenzwert verschieden:
Man darf von einer Funktion nicht ohne weiteres annehmen, dass der Wert, den sie für ein $x = a$ annimmt, der gleiche ist wie der, den sie für $\lim\limits_{x\to a}$ annimmt.
Die Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|}$$

worin $|x|$ den absoluten Wert von x bedeutet, nimmt für $x = 0$ den Wert 0 an. Für $x \neq 0$ dagegen wird der Grenzwert gleich 1, gleichgültig, ob $x > 1$ oder $x < 1$ wird (für $x = 1$ ist es selbstverständlich, wie hier nicht bewiesen werden soll). Also ist, wie Abb. 68 unmittelbar zeigt,

$$f(0) = 0 \qquad \text{aber} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Feststellung: Für eine Funktion kann an der Stelle $x = a$ ein Wert existieren, der verschieden sein kann von demjenigen, den man beim Grenzübergang $x \to a$ erhält.

5. Selbst wenn eine Funktion verschiedene Grenzwerte von rechts und von links her hat, kann der von der Funktion tatsächlich angenommene, also wirklich existierende Wert möglicherweise weder mit dem einen noch mit dem anderen Wert übereinstimmen (Abb. 69).

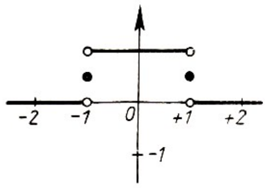


Abb. 69

Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+|x|^n}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |x| < 1 \\ 1 & \text{wenn } |x| = 1 \\ \infty & \text{wenn } |x| > 1 \end{cases}$$

Also ist

für $|x| < 1$: $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+|x|^n} = 1$

für $|x| = 1$: $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+|x|^n} = \dfrac{1}{2}$

für $|x| > 1$: $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+|x|^n} = 0$

6. $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$
Die Funktion $y = \arctan x$ ist die Umkehrfunktion von $y = \tan x$. Man schreibt also $y = \tan x$ um in $x = \arctan y$ und vertauscht nun die Veränderlichen. Die Tatsache ist, dass

$$\lim_{x\to(\pi/2+0)} \tan x = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to(\pi/2-0)} \tan x = +\infty$$

ist, worin $+0$ bedeutet, dass man von rechts, -0, dass man von links sich dem Wert $\frac{\pi}{2}$ nähert.
Das hat zur Folge

$$\lim_{x\to+0} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \lim_{x\to-0} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Den Verlauf der Funktion deutet Abb. 70 an.

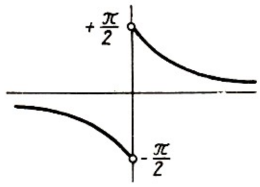


Abb. 70

7. $0 = \infty$?
Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x}}$ ist gegeben. Es wird $\lim\limits_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, dagegen $\lim\limits_{x\to-0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$.

8. Die Funktion $\operatorname{sgn} x$ (gelesen Signum = Vorzeichen von x) sei folgendermaßen festgelegt:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dann zeigen die folgenden Abbildungen 71a bis e noch einmal verschiedene Möglichkeiten des Funktionsverhaltens.

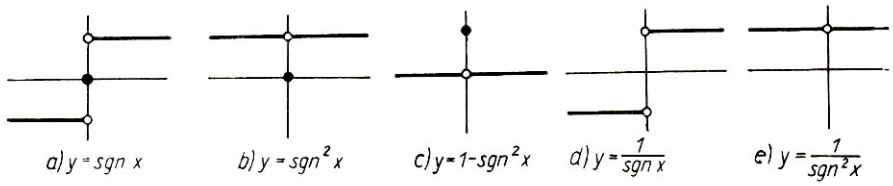


Abb. 71

Dabei ist wie in den vorangehenden Figuren ein Kurvenpunkt bzw. ein Funktionswert durch einen Vollkreis bezeichnet, ein lim-Wert dagegen durch einen leeren Kreis.

9. Wir untersuchen die Funktion
$$f(x) = (-1)^x$$
Durchläuft x die ganzzahligen Werte, so erhalten wir die Folge der Funktionswerte

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = +1, \quad f(3) = -1, ...$$

Durchläuft x die Werte
$$b, 1+b, 2+b, 3+b, 4+b, ...$$
wobei b ein Bruch ist, und zwar $0 < b < 1$, dann unterscheiden sich die Funktionswerte, sofern sie existieren, nur durch das Vorzeichen. Ist $f(b) = B$, so erhält man die Folge $B, -B, +B, -B, + - ...$
Wir können uns also damit begnügen, den Bereich $0 < x < 1$ zu untersuchen.

Durchläuft x die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...$, so nimmt die Funktion, da z.B. $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$ wird, die Folge
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{7}\right) = -1, ...$$
an.
Gleichen Wert hat $f(x)$, wenn x ein Bruch der Form $\frac{p}{q}$ ist, wobei p und q teilerfremd und beide ungerade sind. Es ist ja z.B.

$$(-1)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[5]{-1} = -1$$

Durchläuft dagegen x die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$, ..., so nimmt die Funktion, da z.B.

$$(-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = \sqrt[3]{1} = 1$$

ist, die Folge

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = +1, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = +1, \quad f\left(\frac{2}{7}\right) = +1, ...$$

an. Gleichen Wert hat $f(x)$, wenn x ein Bruch von der Form $\frac{p}{q}$ ist, wobei p und q teilerfremd und p gerade, q ungerade sind.
Durchläuft schließlich x Brüche der Form $\frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sind und q gerade ist, so existiert kein reeller Wert von $f(x)$. Es ist ja z.B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$, und das existiert im Bereiche der reellen Zahlen nicht.

Das Ergebnis ist also: $f(x)$ wird im Bereiche $0 < x < 1 + 1$, wenn $x = \frac{p}{q}$ ein voll gekürzter Bruch mit geradem p, -1, wenn es ein solcher Bruch mit ungeradem p und ungeradem g ist. $f(x)$ existiert nicht, wenn im voll gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ der Nenner q gerade ist.

Würde man $f(x)$ graphisch darstellen, so sähe das Bild so aus, als ob man zwei Parallelen im Abstande 1 beiderseits der x-Achse hätte. Dabei wäre aber zu beachten, dass, wenn ein Punkt der Geraden $y = +1$ zu nehmen ist, der Punkt mit gleicher Ordinate auf der Geraden $y = -1$ ausfällt und umgekehrt und dass außerdem in jedem noch so kleinen Intervall von x beliebig viele Stellen sind, in denen weder die obere noch die untere Gerade einen Wert des Funktionsbildes beisteuert, sagen wir, "Löcher" sind.

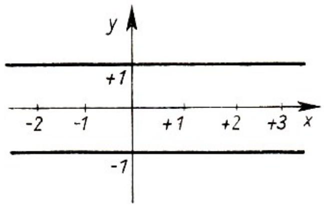


Abb. 72

Aber wohlgemerkt, die Punkte der oberen Geraden, diejenigen der unteren und die "Löcher" liegen überall dicht (Abb. 72).

Welchen Wert nimmt die Funktion $f(x)$ für einen irrationalen Wert an?
Man kann zwar eine Irrationalzahl als Folge von Rationalzahlen erklären, aber schon weil die Unterscheidung, die wir für den Bruch $\frac{p}{q}$ treffen mussten, auf Irrationalzahlen nicht ausdehnbar ist, ist die Bestimmung eines Wertes der Funktion $f(x)$ für ein irrationales $x = c$ nicht möglich, $\lim_{x \to c} f(x)$ existiert nicht.

Man kann solche pathologischen Funktionen sich natürlich viel einfacher verschaffen. Wir definieren etwa $f(x) = -1$ für rationales, $f(x) = 1$ für irrationales x.
Das ist eine Funktion, die in einem beliebig kleinen Intervall der Veränderlichen unendlich viele Unstetigkeiten besitzt. Wollte man sie bildlich veranschaulichen, so bekäme man scheinbar ein Nebeneinander zweier Parallelen, doch jeweils mit der eigentümlichen Eigenschaft, dass, wenn die eine "Gerade" einen Punkt aufweist, auf der Ordinate die andere "Gerade" ein Loch hat.

10. Die Multiplikation einer Funktionsgleichung.
In der Gleichung der in Nr. 2 betrachteten Funktion

$$y = \frac{x}{x} \tag{1}$$

werde beiderseits mit x multipliziert; man erhält

$$yx = x \tag{2}$$

Das graphische Bild (Abb. 73a und b) beider Funktionen ist nicht das gleiche.

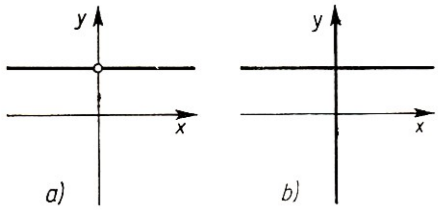


Abb. 73

(1) wird durch die Parallele zur x-Achse im Abstand 1 mit einem "Loch" bei $x = 0$ dargestellt, (2) jedoch als eine nicht unterbrochene Gerade $y = 1$ und die y-Achse, denn (2) wird auch von $x = 0$ befriedigt, und das ist die Gleichung der y-Achse.

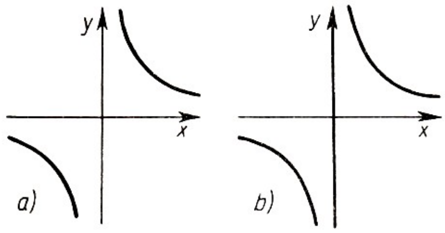


Abb. 74

Ebenso ist das graphische Bild von $y = \frac{x}{x^2}$ eine Hyperbel (Abb. 74a), die für $x = 0$ keinen reellen Wert hat, das graphische Bild von $x^2 \cdot y = x$ dagegen (Abb. 74b) eine Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und die y-Achse,denn die Gleichung wird auch durch $x = 0$ befriedigt.
Eine entsprechende Unterscheidung liegt bei

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

und $yx = \sin x$ vor.

11. Quadrierung einer Funktionsgleichung.
Wenn das Quadratwurzelzeichen $\sqrt{}$ den positiven Wert der Wurzel bezeichnet, ist zwischen der Funktion $y = \sqrt{x}$ und der daraus durch Quadrieren entstehenden Funktion $y^2 = x$ zu unterscheiden, wie die Abb. 75a und b zeigen.

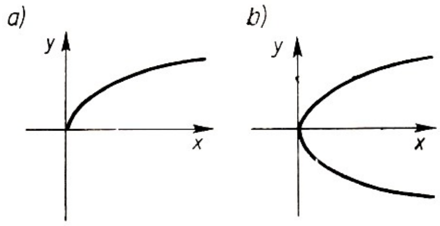


Abb. 75

Feststellung zu 10 und 11. Durch Multiplizieren oder Quadrieren können sich Funktionen und ihre graphischen Bilder ändern.

12. Größter und kleinster Wert.
Man darf von einer Funktion nicht ohne weiteres annehmen, dass sie in einem Intervall, in dem sie definiert ist, einen größten oder einen kleinsten Wert annimmt.
Die Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|x|} - x^2\right)$$

können wir auf Grund von Nr. 4 auswerten. Es wird

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \qquad , \qquad f(x) = 1 - x^2 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Abb. 76 zeigt die graphische Darstellung, wobei aber zu bemerken ist, dass in der Parabel der Scheitelpunkt weggefallen und dafür der Nullpunkt des Koordinatensystems getreten ist.

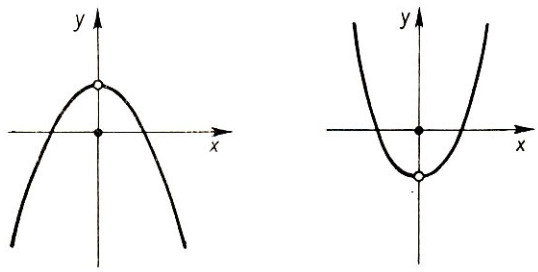


Abb. 76,77

Die Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^2 - \sqrt[n]{|x|}\right)$$

wird für $x = 0$ gleichfalls Null und nimmt für $x \neq 0$ den Wert $f(x) = x^2 - 1$ an. Ihr graphisches Bild gibt Abb. 77 wieder.
Diese Kurve hat kein Minimum, denn auch hier tritt an die Stelle des Scheitels der Nullpunkt des Koordinatensystems.

Feststellung: Es kann vorkommen, dass eine Funktion in einem Intervall zwar für alle Werte definiert ist, aber keinen größten oder keinen kleinsten Wert annimmt.

Die beiden Funktionen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|x| \pm x^2}\right)$$

zeigen weiter, dass eine Funktion für $x = a$ einen Wert haben kann, dass gleichzeitig $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert, dass aber möglicherweise beide Werte nicht übereinstimmen.

Feststellung zu 6, 8 und 12: Die Ausdrücke $f(a)$ und $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ brauchen nichts miteinander zu tun zu haben; sie können verschiedene Werte haben, es kann einer von beiden nicht existieren; natürlich können auch beide gleichzeitig nicht existieren.

13. Falsche Anwendung der Regula falsi.

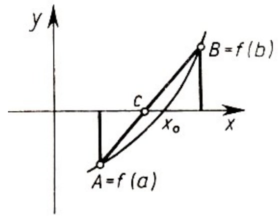


Abb. 78

Ist $f(a) = A$, $f(b) = B$, so liefert die Regula falsi einen Näherungswert $x = c$ für die Nullstelle x_0 in $f(x_0) = 0$ auf Grund der Proportion (Abb. 78):

$$|A| : |B| = (c - a) : (b - c), \qquad |A|b - |A|c = |B|c - |B|a, \qquad c = \frac{|A| \cdot b + |B| \cdot a}{|A| + |B|}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird für $x = +1$ positiv, für $x = -1$ negativ. Es ist $a = -1$, $b = +1$, $A = -1$, $B = +1$, also

$$c = \frac{1-1}{2} = 0$$

Trotzdem hat sie zwischen $+1$ und -1 keine Nullstelle (sie hat überhaupt keine Nullstelle), und c ist keineswegs ein Näherungswert.

Feststellung: Wenn eine Funktion $f(x)$ für $x = a$ positiv, für $x = b$ negativ wird, so darf man daraus noch nicht ohne weiteres schließen, dass damit ein Wert c zwischen a und b gegeben ist so, dass $f(c) = 0$ ist.

14. Kein größter und kein kleinster Wert einer Funktion in einem Bereich.
Wird eine Funktion für einen endlichen Wert von x unendlich, hat die Funktion also eine Unendlichkeitsstelle, so bedeutet das eigentlich, dass die Funktion für diesen x-Wert nicht existiert. Aber es sind Stellen von besonderer Art.
Die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
zeigt, dass $f(x)$ für $x = 0$ keinen Wert hat, dass bei genügender Annäherung an $x = 0$ die Funktion beliebig groß vorschreibbare Werte annimmt (Abb. 79).

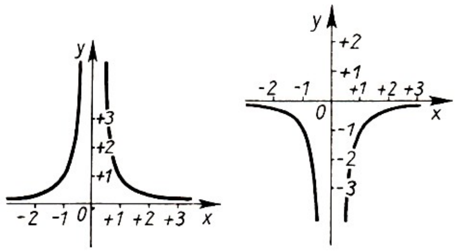


Abb. 79,80

Man schreibt das
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$
Diese Funktion hat keinen größten Wert im ganzen Bereich. Für die Funktion
$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$
gilt das Entsprechende, nur wird
$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$
und die Funktion besitzt keinen kleinsten Wert (Abb. 80).

15. $+\infty = -\infty$?
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird für $x = 0$, je nachdem, ob man von rechts oder links an diesen Wert herankommt, $+\infty$ oder $-\infty$ (Abb. 81).

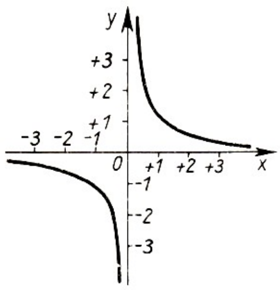


Abb. 81

Gleiches Verhalten zeigt auch $\lim\limits_{x\to\pi/2} \tan x$. Natürlich folgt daraus nicht $+\infty = -\infty$ oder $2\infty = 0$. Wir kommen also zu der

Feststellung: Wenn auch die Schreibweise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ erlaubt ist, wenn $f(x)$ bei Annäherung von x an a über jede angebbare Grenze wächst, so lässt doch der Fall, dass man bei Annäherung von rechts und links einmal $+\infty$, zum anderen $-\infty$ erhält, nicht die gleiche Schreibweise zu. Insbesondere aber ist die Schreibung $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$ bedenklich, wenn nicht genau gesagt ist, was gemeint ist.

16. Betrachten wir jetzt noch die Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x^{2n}}$$

Es wird

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 \quad \text{für} \quad |x| < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 1 \quad \text{für} \quad |x| = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty \quad \text{für} \quad |x| > 1$$

folglich wird

$$f(x) = 1 \quad \text{für} \quad |x| < 1, \qquad f(x) = \infty \quad \text{für} \quad |x| = 1, \qquad f(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x|A > 1$$

Für $x = +1$ und $x = -1$ treten also Unendlichkeitsstellen auf, ohne dass in der Nähe dieser Stellen die Funktionswerte über jede vorgegebene Größe wachsen bzw. fallen.

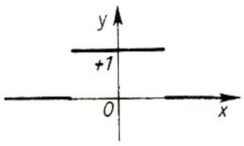


Abb. 82

Wie die Abb. 82 zeigt, nimmt $\lim\limits_{|x|\to 1} f(|x|)$ von rechts und links verschiedene Werte an, beide Werte sind verschieden von dem Wert von $f(|x|) = \infty$.
Feststellung: Es kann vorkommen, dass eine Funktion eine Unendlichkeitsstelle für einen Wert der Veränderlichen hat, ohne dass die Nachbarwerte gegen $+\infty$ oder $-\infty$ hinstreben.

17. Ein Streckenzug, der aus unendlich vielen Strecken besteht, kann eine endliche Länge haben. Wir nehmen als Beispiel eine der beliebten Bewegungsaufgaben und zeichnen gleich den Graphen des Bewegungsvorganges dazu (Abb. 83):

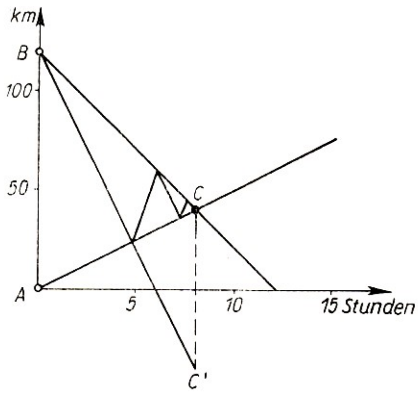


Abb. 83

Ein Wanderer sei auf dem Wege von A aus zu dem 120 km entfernten Orte B und habe eine Geschwindigkeit von 5 km in der Stunde. Ein Radfahrer fährt von B nach A im Tempo 10 km in der Stunde. Dann treffen sich beide, wie man leicht ausrechnen kann, nach 8 Stunden in C, dann hat nämlich der Wanderer 40, der Radfahrer 80 km zurückgelegt.

Nun fliegt eine Taube mit einer Geschwindigkeit von 20 km in der Stunde von A aus dem Radfahrer entgegen, kehrt, wenn sie ihn erreicht hat, um und fliegt zum Wanderer. Dort angekommen, kehrt sie ohne Zeitverlust um und fliegt zum Radfahrer usf.

Man sieht aus dem graphischen Fahrplan sofort, dass sie immer früher ankommt, als die beiden ihren Treffpunkt C erreichen. Nun kann man aber die Länge des Weges der Taube unmittelbar aus dem graphischen Bilde entnehmen. Ihr Zickzackweg ist nämlich ebensolang, als wenn sie geraden Weges nach C' geflogen wäre, also 160 km, die sie in 8 Stunden zurücklegt.

18. Kurvenzüge, die einen Punkt unendlich oft umkreisen und doch endliche Länge haben.

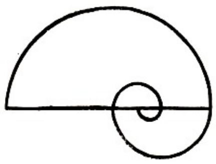


Abb. 84

Über die Strecke a ist ein Halbkreis gezeichnet. An ihn schließt sich (Abb. 84) ein Halbkreis mit dem Durchmesser $\frac{a}{2}$, daran ein Halbkreis mit dem Durchmesser $\frac{a}{4}$ usf.
Die Länge des ersten Halbkreises ist $\pi \cdot a$, die des zweiten $\pi \cdot \frac{a}{2}$, des dritten $\pi \cdot \frac{\pi}{4}$ usf. Die Länge aller Halbkreise wird also

$$\pi a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...) = 2\pi a$$

d.h., die einen gewissen Punkt auf dem Durchmesser a (wo liegt er?) umkreisende, aus Halbkreisen zusammengesetzte Kurve hat die Länge eines Vollkreises über dem Durchmesser a.

Ähnliche Verhältnisse wie bei dieser spiralartigen Kurve ergeben sich bei echten Spiralen und z.B. auf der Kugel bei der Loxodrome[32], die, wenn sie mit den Meridianen einen von $0°$ und $90\circ$ verschiedenen Winkel bildet, den Pol unendlich oft umkreist, aber doch endliche Länge besitzt.

19. Kurvenzüge, die einen Punkt unendlich oft umkreisen und unendliche Länge haben.

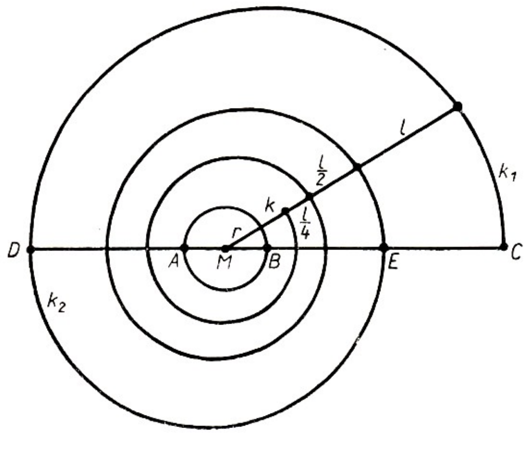


Abb. 85

Der Punkt M sei Mittelpunkt eines Kreises k mit dem Radius r. AB sei ein Durchmesser dieses Kreises.
Um B schlagen wir über der Geraden AB mit einem genügend großen Radius, etwa $6r$ wie in Abb. 85 einen Halbkreis k_1 von C bis D. Punkt E halbiere BC. Über DE schlagen wir

32 Loxodromen sind Kurven auf der Erdkugeloberfläche, die alle Meridiane unter dem gleichen Winkel schneiden.

nach der anderen Seite des Durchmessers einen weiteren Halbkreis k_2 - in der Figur hat er den Radius $4\frac{1}{2}r$ -.
Jetzt konstruieren wir die weitere Kurve als geometrischen Ort der Punkte, die das von k und dem ihm zunächst liegenden Kurvenbogen auf den von M ausgehenden Strahlen herausgeschnittene Streckenstück halbieren. Die so definierte Kurve umkreist den Kreis k unendlich oft, und jeder einmalige Umlauf ist jedenfalls größer als $2\pi r$. Mithin ist die gesamte Kurvenlänge unendlich groß.

20. Eine Kurve, die ein ganzes Quadrat bedeckt.
Ein Quadrat ist durch Parallelen zu den Seiten geviertelt, und ein geschlossener Streckenzug, wie ihn Abb. 86a zeigt, ist in das Quadrat hineingezeichnet.

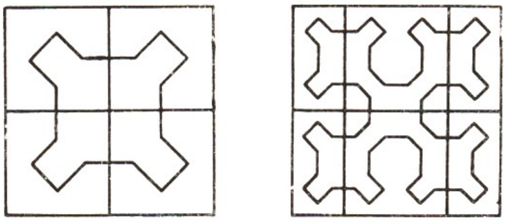


Abb. 86 a,b

Nun wird in ein ebenso großes, gevierteltes Quadrat diese Figur in jedes Viertel hineingezeichnet und durch geeignete Verbindung der einzelnen Figuren wieder ein geschlossener Streckenzug hergestellt, so wie es Abb. 86b zeigt. Dieser Übergang von der Abb. 86a zur Abb. 86b wird in jedem Viertel von Abb. 86b wiederholt und immer wieder wiederholt. Dann wird, wenn wir den Grenzübergang machen, der geschlossene Streckenzug jedem Punkt im Innern des Quadrates beliebig nahe kommen, also das ganze Quadrat überdecken.

21. Die Schneeflockenkurve.

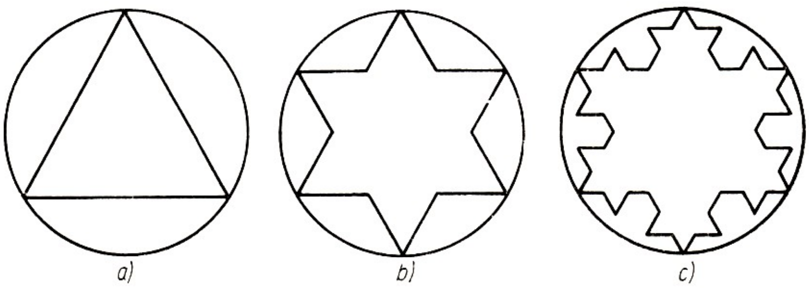


Abb. 87

In Abb. 87a ist ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet, das einem Kreis eingeschrieben ist. Sein Umfang habe die Länge 1. Sein Inhalt ist, da das Dreieck ganz im Kreis liegt, jedenfalls kleiner als dessen Inhalt.
Wir teilen nun jede Seite in drei Teile und errichten über der mittleren Teilstrecke gleichseitige Dreiecke. Wenn wir jetzt die Grundseite durch die beiden anderen ersetzen, dann entsteht ein Sechserstern (Abb. 87b). Dessen Umfang ist dann $\frac{4}{3}$.

Mit jeder Seite dieses Sechsersternes tun wir nun das gleiche. Wir dritteln die Seite und ersetzen die Mittelstrecke durch die beiden Schenkel des über diesem Seitendrittel errichteten gleichseitigen Dreiecks. Der so entstehende Achtzehnerstern hat den Umfang $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Er liegt wie sein Vorgänger ganz im Kreis, sein Inhalt ist also kleiner als der Kreisinhalt (Abb. 87c).
Wiederholen wir das Verfahren ein weiteres Mal mit jeder Seite des Achtzehnersternes, dann wird der Umfang $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, nach n-maliger Wiederholung $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Gehen wir nun zur Grenze $n \to \infty$ über, dann geht der Umfang dieser "Schneeflockenkurve" gegen Unendlich, ihr Inhalt aber bleibt endlich. Es kann also eine geschlossene Kurve von unendlicher Länge einen endlichen Inhalt haben.

22. Die Kammkurve.

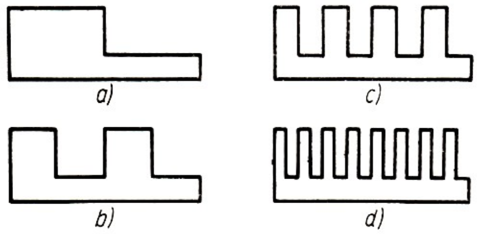


Abb. 88

Die Ausgangsfigur 88a besteht aus einem Rechteck mit den Seiten a und b, dem ein Rechteck mit den Seiten $\frac{a}{2}$ und c aufgesetzt ist. Es sei etwa $a = 8$, $b = 1$, $c = 2$.
Von der Abb. 88a wird zu Abb. 88b in der Weise vorgeschritten, dass das aufgesetzte Rechteck halbiert und jeder Hälfte des unteren Rechtecks aufgesetzt wird, so wie es Abb. 88b zeigt. Dieses Verfahren ist in c wiederholt, abermals in d, und das soll nun beliebig oft fortgesetzt werden.

In der Folge der geschlossenen Figuren bleibt der Inhalt immer der gleiche, nämlich $a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c$.
Der Umfang der Figur aber nimmt zu in der Folge $2a + 2b + 2c$, $2a + 2b + 2^2 c$, $2a + 2b + 2^3 c$ usf., d.h., er wächst über jedes Maß hinaus.
Wir haben also eine Kurve mit konstantem, endlichem Inhalt und im Grenzfall unendlichem Umfang vor uns, die überdies jedem Punkt des Rechtecks $a \cdot c$ beliebig nahe kommt.

23. Die Zahnradkurve.
An einen Halbkreis, Radius r, schließt sich ein Halbkreis, Radius $2r$ mit gleichem Mittelpunkt an (Abb. 89a).

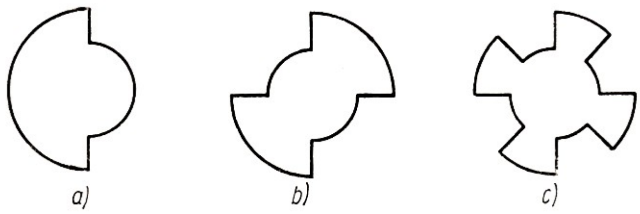


Abb. 89

Diese Ausgangsfigur wird nun so abgeändert, dass der große Halbkreis und ebenso der kleine Halbkreis ersetzt werden durch ein großes Kreisviertel und ein kleines Kreisviertel, so wie es Abb. 89 b zeigt. Das Verfahren wird nun fortgesetzt, d.h., die Kreisviertel werden durch abwechselnd sich folgende Kreisachtel mit Radius $2r$ und Radius r ersetzt. Das geht so weiter beliebig oft. Der Inhalt der geschlossenen Figur bleibt dann konstant

$$f = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{4\pi r^2}{2} = \frac{5\pi r^2}{2}$$

Der Umfang aber bildet die Folge

$$\begin{aligned} u_1 &= \pi r + 2\pi r + 2r = 3\pi r + 2r \\ u_2 &= 3\pi r + 2^2 r \\ u_3 &= 3\pi r + 2^3 r \\ \text{allgemein} \qquad u_n &= 3\pi r + 2^n r \end{aligned}$$

wächst also mit n über alle Grenzen. Wieder haben wir eine geschlossene Figur von konstantem Inhalt, aber im Grenzfall unendlichem Umfang, die auch wieder jedem Punkt des Kreisringes mit dem Inhalt $4\pi r^2$ beliebig nahe kommt.

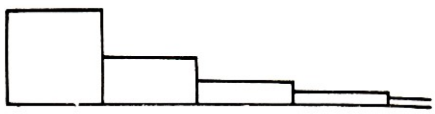
3.5 Reihen

1. Achilles und die Schildkröte.
Achilles und die Schildkröte liefen um die Wette. Die Schildkröte hatte einen Vorsprung von, sagen wir, 100 m. Unsere Überlegung wird zeigen, dass Achilles nicht imstande ist, die Schildkröte einzuholen, wenn er auch, nehmen wir einmal an, 10 mal so schnell laufen kann wie seine Gegnerin.

Hat nämlich Achilles die 100 m zurückgelegt, so hat die Schildkröte noch einen Vorsprung von 10 m. Hat er auch diesen durchmessen, so ist ihm die Schildkröte noch 1 m voraus. Wenn Achilles diesen einen Meter nachgeholt hat, ist ihm seine Konkurrentin immer noch 10 cm voraus. Nach Zurücklegung dieses Abstandes ist die Schildkröte immer noch im Vorsprung.
Fährt man in dieser Überlegung fort, so ergibt sich, dass der Abstand zwar immer geringer wird, aber nie ganz verschwindet; Achilles wird also die Schildkröte tatsächlich nie einholen.

Dazu als Feststellung eine griechische Anekdote, die Pythagoras zugeschrieben wird. Er soll zu einem seiner Schüler, der nicht hinter die Schliche des Achilles-Paradoxons kam, gesagt haben: Der Weg, den eine zum Schlage erhobene Hand bis zu ihrem Ziel zurücklegt, wird zuerst zur Hälfte, dann zu einem weiteren Viertel, dann zu einem weiteren Achtel usf. durchmessen. Immer bleibt noch ein Abstand, erst die Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel usf. Die Hand erreicht nie ihr Ziel.

2. Eine endliche Fläche reicht ins Unendliche.
An ein Quadrat von der Größe 1 wird ein Rechteck angefügt, das die Länge 1, die Höhe $\frac{1}{2}$ hat.

Abb. 90


Dann schließt sich ein Rechteck der Länge 1, der Höhe $\frac{1}{4}$, daran ein Rechteck der Länge 1 und der Höhe $\frac{1}{8}$ an usf., so wie es die Abb. 90 andeutet.
Die so entstehende Treppenfläche reicht bis ins Unendliche und hat den Flächeninhalt

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

Feststellung: Auch bis ins Unendliche reichende Flächen können endlichen Inhalt haben.

3. Die Glieder einer Reihe werden anscheinend immer größer, und doch konvergiert sie?
Die Reihenlehre zeigt, dass die Reihe für

$$e^c=1+\frac{c}{1!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{c^3}{3!}+\ldots$$

für jedes c konvergiert. Es ist ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^{n+1}\cdot n!}{c^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n+1}=0$$

Aber wie sieht diese Reihe etwa für $c=1000$ aus?

$$1+1000+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\frac{1000^4}{4!}+\ldots$$

Man sieht, an die ersten kleinen Glieder schließen sich gewaltig ansteigende weitere Glieder an.

Feststellung: Auch in dieser Reihe nehmen einmal, freilich erst vom tausendundzweiten Gliede an, die Glieder ab. Man darf also keineswegs bei einer konvergenten Reihe erwarten, dass die Glieder gleich von Anfang an abnehmen; damit hat es, wie das Beispiel zeigt, unter Umständen lange Weile.

4. Jede Zahl a ist gleich 0.
Es ist einerseits

$$a - a + a - a + -... = (a - a) + (a - a) + ... = 0$$

andererseits aber auch

$$a - a + a - a + -... = a - (a - a) - (a - a) - ... = a$$

Feststellung: Klammern in unendliche Reihen einführen ist nicht immer erlaubt. [1]

5. Die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + -...$$

nimmt je nach Bedarf die Werte $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usf. an. Durch einfaches Durchdividieren erhält man die folgenden Reihen

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + -... \\ \frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + -... \\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3} &= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + -... \end{aligned}$$

Sie liefern für $x = 1$ rechts die obenstehende Reihe, links aber $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$.
Feststellung: Der Konvergenzbereich der Reihen ist zu beachten.

6. $\infty = -1$.
Man kann den unendlichen Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+}...}}$$

der den größeren Abschnitt der nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke 1 darstellt, in folgender Weise berechnen: Man setzt ihn x, dann ist offenbar

$$\frac{1}{1+x} = x \qquad \text{folglich} \qquad x^2 - x - 1 = 0$$

und nun gibt die Lösung dieser quadratischen Gleichung den gesuchten Wort. Er ist

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

von den beiden Werten scheidet der negative naturgemäß aus. Es bleibt $x = 0,618$.
In gleicher Weise lässt sich z.B. der unendliche Wurzelausdruck

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$$

berechnen. Setzt man ihn gleich x, so wird

$$x = \sqrt{2+x} \qquad \text{also} \qquad 2 + x = x^2$$

und die Lösung dieser quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0$$

liefert das gesuchte x. Ebenso wird

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...}}}$$

durch die Gleichung $x = \sqrt{ax}$ zu $x = a$ bestimmt.

Wir wollen nun nach dieser bewährten, von Jac. Bernoulli angewandten Schlussweise den Wert der Summe

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$$

berechnen. Wir setzen ihn gleich x, dann ist

$$x = 1 + 2x$$

Wir kommen also sogar mit einer linearen Gleichung aus. Es wird $x = -1$.
Wir können auch so zum Ziele kommen:

$$x = 1 + 2 + 4x \qquad , \qquad 3x = -3$$

Auch das führt zum gleichen Ergebnis. Behandelt man in gleicher Weise die Reihe

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - +...$$

so folgt aus

$$1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - +...) \qquad , \qquad x = 1 - 2x, \qquad x = \frac{1}{3}$$

ein Ergebnis, das auch

$$1 - 2 + 4(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - +...) \qquad \text{mit} \qquad x = -1 + 4x, \qquad x = \frac{1}{3}$$

oder

$$1 - 2 + 4 - 8(1 - 2 + 4 - 8 + -...) \qquad \text{mit} \qquad x = 3 - 8x, \qquad x = \frac{1}{3}$$

liefert. [1]
Übrigens liefert nach dieser Methode

$$a - a + a - a + -... = a - (a - a + a - +...) \qquad , \qquad x = a - x, \qquad x = \frac{a}{2}$$

Ergebnis: Man darf mit Ausdrücken nicht rechnen, ehe man ihre Existenz nachgewiesen hat, (vgl. Lindelöf-Ullrich [13] S.128 ff).

7. $-1 < -1$. Aus

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + ...$$

folgt für $x = 1$

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... \tag{1}$$

Andererseits liefert die Entwicklung von $\frac{1}{1-x-x^2}$, wovon man sich auch durch Dividieren überzeugt,

$$\frac{1}{1 - x-^{2}} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ...$$

Setzt man hier $x = 1$, so folgt

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... \tag{2}$$

Vergleicht man die Reihen (1) und (2), so ist, abgesehen vom Anfangsglied, jedes Glied der Reihe (2) kleiner als das an gleicher Stelle stehende Glied der Reihe (1). Also ist die rechts stehende Reihe in (2) größer als die rechts stehende Reihe in (1). Und doch steht beide Male links -1.

8. ∞ und nicht 0 erhält man, wenn man in dem folgenden Beispiel munter drauflos dividiert:

$$\begin{array}{l}
\quad(-10+\ 10) : (-1+\ 2) \quad = 10 + 10 + 20 + 40 + ... = \infty \\
\underline{-(-10+\ 20)} \\
\qquad -\ 10 \\
\quad \underline{-(-10+\ \ 20)} \\
\qquad\qquad -\quad 20 \\
\qquad\quad \underline{-(-\ \ 20+40)} \\
\qquad\qquad\qquad -\ 40...
\end{array}$$

9. ∞ und nicht -1 erhält man, wenn man

$$\begin{array}{l}
\quad(-a\ \ +1) : (-1 + a) = a + a^2 + a^3 + ... \\
\underline{+a^2 - a} \\
\qquad -\ a^2\ +1 \\
\underline{+a^3 - a^2} \\
-a^3 \qquad +1...
\end{array}$$

rechnet für $a > 1$.

Feststellung: Die z.B. bei der Entwicklung gemeiner Brüche und periodischer Dezimalbrüche ohne weiteres vorgenommene Ausdehnung des Divisionsverfahrens auf Fälle, die auf eine unendliche Folge von Teilsummanden führen, ist nicht ohne weitere Bedingungen zulässig.

10. Positive Zahlen sind negativ unendlich, negative Zahlen positiv unendlich.
Aus der Reihe

$$\frac{1}{1-a} = (1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + ...$$

schließen wir für $a = 3$

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... = +\infty$$

aus

$$\frac{-1}{1-a} = -(1-a)^{-1} = -(1+a+a^2+a^3+...)$$
$$\frac{1}{2} = -(1+3+3^2+3^3+...) = -\infty$$

Feststellung: Bei den unendlichen Reihen ist der Konvergenzbereich zu beachten.

11. Manchmal bestätigen scheinbar Rechnungen mit divergenten Reihen unrichtige Behauptungen.
Jemand behauptet, es ist

$$-1 = 4 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + ...$$

und beweist das so: Wenn man beiderseits 1 addiert, wird

$$\begin{aligned} & 0 = 5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + ... \\ \text{oder}\quad & 0 = 0 + 5\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + ... \\ \text{oder}\quad & 0 = 0 + 0 + 5\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3 + ... \\ \text{oder}\quad & 0 = 0 + 0 + 0 + 5\cdot 5^3 + ... \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Ich kann also schrittweise rechts ein Glied nach dem anderen wegschaffen. Das liefert im Grenzfall auch rechts eine Folge von lauter Summanden 0. Mithin war auch die Ausgangsgleichung richtig.

12. Der natürliche Logarithmus der Zahl 2 ist Null.
Die Reihenentwicklung liefert für $\ln 2$ den Wert

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +...$$

Die Reihe ist konvergent. Fasst man die positiven und negativen Glieder der Reihe zusammen, so erhält man

$$\ln 2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ...)$$

Durch Addition und gleichzeitige Subtraktion des Wertes der zweiten Klammer ergibt sich

$$\ln 2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ...) + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ...)$$

Das liefert aber

$$\ln 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...) = 0$$

13. Der Wert des natürlichen Logarithmus von 2 ändert sich nicht, wenn man ihn mit 2 multipliziert.
Wir multiplizieren die Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +...$$

mit 2, erhalten

$$2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - +...$$

nehmen die Glieder mit gleichem Nenner zusammen und ordnen nach steigendem Nenner. Dann folgt

$$2\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +...$$

und das ist wieder $\ln 2$.

14. $\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$.
Aus der Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +...$$

folgt

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - +...$$

Addiert man beide Reihen und ordnet, so erhält man

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + -...$$

Ordnet man die Glieder dieser Reihe nach ihrer Größe, so folgt

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +... = \ln 2$$

15. $\ln 2 = 0$. Greife ich aus

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +...$$

die Glieder

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - ... = 1$$

heraus, so hebt sich das gegen 1 weg. Ebenso hebt sich

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - ... = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ...) = -\frac{1}{3}$$

gegen $+\frac{1}{3}$ weg und so mit allen Gliedern. So ist also die Gesamt- summe gleich Null.

Feststellung zu 12 bis 15. In unendlichen Reihen gilt das Vertauschungsgesetz nicht ohne weiteres. Die Reihe für $\ln 2$ ist nicht absolut konvergent.

16. Das Quadrat einer endlichen Zahl wird unendlich.
Die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + -...$$

konvergiert, da sie alternierend ist und ihre Glieder den Grenzwert 0 haben. Ihre Summe sei s. Wir bilden s^2. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot k}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot(k-1)}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k\cdot 1}}$$

Da das geometrische Mittel kleiner als das arithmetische ist, also

$$\sqrt{a\cdot b} < \frac{a+b}{2}$$

so ist

$$\sqrt{1 \cdot k} < \frac{k+1}{2}, \qquad \sqrt{2(k-1)} < \frac{k+1}{2}, \qquad ... \qquad \sqrt{k \cdot 1} < \frac{k+1}{2}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot k}} > \frac{2}{k+1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2(k-1)}} > \frac{2}{k+1}, \qquad ,... \qquad \frac{1}{\sqrt{k \cdot 1}} > \frac{2}{k+1}$$

d.h., alle Brüche des allgemeinen Gliedes sind größer als $\frac{2}{k+1}$ und alle k Brüche zusammen größer als $\frac{2k}{k+1}$, d.h. größer als 1. Die Reihe divergiert also.

Feststellung: Das Produkt zweier konvergenter Reihen braucht nicht konvergent zu sein.

17. In der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \qquad \text{ist} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Trotzdem ist die Reihe divergent. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Also, wenn ich das allgemeine Glied der divergenten Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

mit b_k bezeichne und in der vorgelegten Reihe

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ a_3 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &... \\ a_k &= \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + ... + \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

setze, dann ist $a_k > b_k$ und also erst recht die vorgelegte Reihe divergent.

Feststellung: Das Kriterium $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ reicht zur Konvergenz nicht aus.

18. In der Reihe

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + ...$$

ist $a_{n+1} < a_n$ für jedes n. Trotzdem divergiert die Reihe; es ist nicht einmal

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die erste Behauptung beweist ein Vergleich mit der divergenten Reihe

$$1 + 1 + 1 + ...$$

die zweite lehrt die Bestimmung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Feststellung: Aus $a_{n+1} < a_n$ folgt keineswegs $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und noch weniger Konvergenz.

19. Aus der konvergenten Reihe

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ... = 0,111... = \frac{1}{9}$$

gewinnen wir durch Umstellung je zweier aufeinanderfolgender Glieder die gleichfalls konvergierende Reihe

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{100000} + ...$$

Hier ist

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{100}{10} = 10 \quad , \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$$
$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{10000}{1000} = 10 \quad , \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{1000}{1000000} = \frac{1}{1000}, \quad ...$$

Man sieht hieraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right|$$

gar nicht existiert, dass vielmehr ein oberer Limes 10, ein unterer $\frac{1}{1000}$ da ist, der eine also größer, der andere kleiner als 1.

Noch drastischer ist das folgende einfache Beispiel:
Es wurde die konvergente Reihe

$$c_1 + c_2 + c_3 + ...$$

umgeschrieben in die damit gleichwertige Reihe

$$c_1 + 0 + c_2 + 0 + c_3 + 0 + ...$$

Dann schwankt $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zwischen 0 und ∞.

Feststellung: Weil $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ein Konvergenzkriterium ist, darf man nicht folgern, zur Konvergenz sei auch die Existenz dieses Grenzwertes erforderlich.

20. In der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + -...$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{+1}} \right) = 0$$

Andererseits ist nicht $a_{n+1} < a_n$. Die Reihe divergiert, denn es ist

$$\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} = \frac{2}{k-1}$$

also lässt sich die Reihe auch schreiben

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + ... = 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...)$$

und hier steht rechts in der Klammer eine bekannte divergente Reihe.
Feststellung: Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt nicht $a_{n+1} < a_n$.

21. Jede unendliche Reihe kann jeden beliebig vorschreibbaren Wert c annehmen.
Im Anschluss an die beliebige Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

setzen wir

$$\begin{aligned} a_1 &= c + (a_1 - c) \\ a_2 &= -(a_1 - c) + (a_1 + a_2 - c) \\ a_3 &= -(a_1 + a_2 - c) + (a_1 + a_2 + a_3 - c) \qquad ... \end{aligned}$$

Durch Addition erhalten wir dann

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = c + (a_1 - c) - (a_1 - c) + (a_1 + a_2 - c) - (a_1 + a_2 - c) + ... = c$$

Feststellung: Das Auflösen der Klammern und Umsortieren der Glieder ist nur bei absolut konvergenten Reihen erlaubt.

22. $1 = 0$. Die Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ...$$

hat den Wert 1, denn sie ist identisch mit

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + ...$$

und hier heben sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Zahlen auf bis auf den ersten Wert 1. Es ist also

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ... \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ... \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ... \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Addiert man diese Reihen, so erhält man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

also $1 = 0$.

Feststellung: Man darf mit divergenten Reihen nicht ohne weiteres Rechnungen durchführen.

23.[33] $1 = \frac{1}{2}$ Es ist

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + ... = 1$$

[33] Dieser Trugschluss wurde von R. Rothe (1873-1942) mitgeteilt.

Andererseits ist

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...=\frac{1}{2}$$

24. Die Reihe

$$-\left(2+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right)+-...$$

hat zur Teilsumme

$$s_n=-2+(1-)^n\frac{n+2}{n+1}$$

Darnach ist der untere Grenzwert der Reihe -3, der obere -1. Die Teilsummen werden also zwischen -3 und -1 liegen, so sollte man meinen. Es ist aber

$$\begin{array}{lcl} s_1=-2-\frac{3}{2}=-3\frac{1}{2} & , & s_2=-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3} \\ s_3=-2-\frac{5}{4}=-3\frac{1}{4} & , & s_4=-2+\frac{6}{5}=-\frac{4}{5} \quad ... \end{array}$$

d.h., alle Teilsummen liegen außerhalb des von den beiden Grenzwerten angegebenen Intervalls.

25. $e=\frac{1}{2}+e$.
Um die Reihe für

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

zu gewinnen, entwickelt man $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz; gewinnt also die $(n+1)$-gliedrige Reihe

$$1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+... \qquad (1)$$

und geht hierin zur Grenze $n\to\infty$ über. Dann gewinnt man

$$e=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$$

Nun ist

$$1+2+3+...+n=n\frac{n+1}{2}$$

also

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (2)$$

Addiere ich (1) und (2) gliederweise, so erhalte ich die Reihe

$$\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{n^2}\right]+\left[\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n^2}\right]+... \qquad (3)$$

Geht man in (1) zur Grenze $n\to\infty$ über, so erhält man die Reihe für e, geht man in (2) zur gleichen Grenze über, so erhält man $\frac{1}{2}$. Geht man aber in (3) zur Grenze $n\to\infty$ über, so erhält man ebenfalls die Reihe für e. Es ist also $e+\frac{1}{2}=e$.

Feststellung: In einer unendlichen Reihe darf man nicht ohne weiteres den Grenzübergang gliedweise durchführen. Außerdem müsste die Reihe (1) heißen:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

26. Die Potenzreihe

$$x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + 4^4x^4 + ...$$

soll daraufhin untersucht werden, für welchen Wert von x sie konvergiert. Es ist sicherlich

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot |x| = \infty$$

für jeden von 0 verschiedenen Wert $x = a$, erst recht also wird

$$\lim_{n\to\infty} (n \cdot |x|)^n = \infty$$

d.h., die Reihe konvergiert überhaupt für keinen von 0 verschiedenen Wert x.
1.5ex] Feststellung: Es gibt Potenzreihen, die für keinen von 0 verschiedenen Wert der Veränderlichen konvergieren.
1.5ex] 27. Die MacLaurinsche Reihe lautet

$$f(x) = f(x) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ...$$

Da

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad , \qquad \frac{d^2e^x}{dx^2} = e^x, \quad ...$$

folgt daraus

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...$$

und da diese Reihe für alle x konvergiert, haben wir e^x durch eine unendliche Reihe dargestellt. Wir verfahren ebenso bei der Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

die wir, da

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ist, noch durch den Wert $f(0) = 0$ ergänzen. Es wird

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_n(x^{-1})$$

wo $P_n(x^{-1})$ ein Polynom in x^{-1} ist. Daraus folgt, dass alle Ableitungen von $f(x)$ für $x = 0$ Null sind. Damit haben wir eine MacLaurinsche Reihe für $e^{-\frac{1}{x^2}}$, die, da alle Glieder 0 sind, konvergiert und den Wert 0 liefert. Daraus würde folgen

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Feststellung: Es genügt nicht, nachzuweisen, dass eine nach MacLaurin entwickelte Reihe konvergiert, es ist auch nachzuweisen, dass die gewonnene Reihe die Funktion darstellt bzw. dass das Restglied in der Grenze 0 wird.

3.6 Differentialrechnung

Der Differentialquotient

1. $+1 = -1$? Die Funktion

$$y = |x|$$

wo $|x|$ den absoluten Wert von x bedeutet, ist für den gesamten Bereich von x stetig.
Was lehrt aber die graphische Darstellung der Funktion (Abb. 91) für die Ableitung an der Stelle $x = 0$?

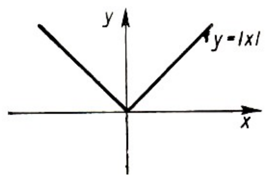


Abb. 91

Von rechts ist $f'(0) = 1$, von links her aber ist $f'(0) = -1$. Die Funktion hat also im Punkte $x = 0$ keinen bestimmten Differentialquotienten.

Feststellung: Stetigkeit einer Funktion in einem Punkte verbürgt noch nicht Existenz der (eindeutigen) Ableitung in diesem Punkte.

2. $\frac{1}{2}gt = gt$.
"Geschwindigkeit ist Weg durch Zeit", so liest man es, und so lernt man es. Der frei fallende Körper legt in der Zeit t den Weg

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

zurück. Infolgedessen ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{2}gt$$

wenn wir die vorangehende Erklärung anwenden.
Das ist aber keineswegs die Geschwindigkeit des Körpers am Anfang, denn da ist sie 0, ebensowenig am Ende der Bewegung zur Zeit t, dort ist sie

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

Feststellung: Es ist zu unterscheiden zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit, gegeben durch den Quotienten aus Wegspanne und Zeitspanne, und der Augenblicksgeschwindigkeit, gegeben durch den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit für den betreffenden Zeitpunkt.

3. Einfache Methode zur Lösung von Gleichungen.
Ist die Gleichung

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$

vorgelegt, so differenziere ich nach x, erhalte

$$2x - 18 = 0 \qquad \text{und daraus} \qquad x = 9$$

Die Probe lehrt, dass in der Tat das die Lösung der Gleichung ist. Das ist aber Zufall. Denn die Methode versagt bei der allgemeinen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

Hier wird
$$2x + a = 0 \qquad , \qquad x = -\frac{a}{2}$$
Die Probe liefert für die linke Seite der Gleichung
$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b \qquad \text{oder} \qquad b - \frac{a^2}{4}$$
Und das ist nicht Null.

Feststellung: Man differenziert Funktionen nach Veränderlichen, nicht Bestimmungsgleichungen nach festen, wenn auch noch unbekannten Werten.

4. $0 \neq 0$, bewiesen nach einer Methode von Euler (1707-1783).
Nach Neper (1550-1617) ist
$$\ln x = \lim_{h\to 0} \frac{x^h - 1}{h}$$
Den Differentialquotienten hat hiernach Euler in folgender Weise hergeleitet:
$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h\to 0} \frac{d}{dx} \frac{x^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hx^{h-1}}{h} = \lim_{h\to 0} x^{h-1} = \frac{1}{x}$$
Übrigens schreibt Euler nicht das lim-Zeichen, sondern statt dessen
$$\frac{x^0 - 1}{0} \qquad \text{usf.}$$
Euler vertauscht hier also Differentiation und Limes. Wir wenden das gleiche Verfahren auf die Funktion
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$
| an. Es ist zunächst
$$\frac{d}{dx} \lim_{x\to 0} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{d}{dx} \frac{b}{d} = 0$$
Andererseits ist
$$\lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x\to 0} \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{d^2}$$
Rechts steht, wenn a, b, c und dso gewählt werden, dass $ad - bc \neq 0$, eine von 0 verschiedene Zahl.

Feststellung: Grenzübergang und Differentiation sind nicht immer vertauschbar.

5. Aus einem Brief an den Verfasser: "Allgemeine Regeln gelten doch auch für Sonderfälle. Woher kommt es nun, dass die Formel
$$\lim(a \cdot b) = \lim a \cdot \lim b$$
nicht auf den Sonderfall des limes, die Ableitung, anwendbar ist? Nach der angeführten Formel müsste doch
$$(uv)' = u' \cdot v'$$
sein, während sich
$$(uv)' = u'v + v'u$$

eindeutig erweist.

6. Was ist eine Tangente?
a) Eine Gerade, die mit der Kurve nur einen Punkt gemeinsam hat. - Aber das graphische Bild einer jeden eindeutigen stetigen Kurve wird von jeder Ordinate in dem Intervall, für das sie definiert ist, in einem Punkte getroffen, und das sind doch im allgemeinen gewiss keine Tangenten.
Andererseits haben die Geraden $y = \pm 1$ mit der Sinuskurve nicht nur einen, sondern sogar unendlich viele Punkte gemeinsam und sind doch Tangenten.

b) Die Tangente ist eine Gerade, die mit der Kurve einen Punkt gemeinsam hat, doch so, dass die Kurvenpunkte in der Umgebung dieses Punktes alle auf einer Seite der Geraden liegen. - Aber die x-Achse durchsetzt die Kurve $y = x^3$ und ist Tangente, nämlich Wendetangente, und Gleiches gilt z.B. bei der Kurve $y = \sin x$ von der Geraden $y = x$.

c) Die Tangente ist eine Sekante durch zwei benachbarte (andere sagen zwei aufeinanderfolgende!) Punkte der Kurve. Aber zwischen zwei beliebig nahe gelegenen Punkten einer stetigen Kurve gibt es immer noch beliebig viele Punkte.

Feststellung: Bei der allgemeinen Fassung des Tangentenbegriffes kommt man ohne den Grenzbegriff nicht aus. Die Tangente in einem Kurvenpunkt ist die durch diesen Punkt hindurchgehende Gerade, deren Steigung mit der Steigung der Kurve in diesem Punkt übereinstimmt (vgl. z.B. [3], [5], [13], [14], [20], [22] und [23]).

7. Existiert die Tangente?
Vorgelegt ist die Kurve mit der Gleichung

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

Der Differentialquotient berechnet sich nach bekannter Formel zu

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Für $x = 0$ existiert y' nicht oder, anders ausgedrückt, wird y' unendlich. Was bedeutet das für die Tangente? Sie existiert, steht aber senkrecht zur x-Achse.

Ebenso gehört zu

$$y = \sqrt{x}$$

der Differentialquotient $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ und besagt, dass für $x = 0$, wo y' nicht existiert, die Tangente senkrecht zur x-Achse steht.

Feststellung: Steht in einem Punkte der zu $y = f(x)$ gehörenden Kurve die Tangente senkrecht zur x-Achse, dann wird y' unendlich, anders ausgedrückt, es existiert nicht.

8. Existiert die Tangente ?
Die Hyperbelfunktion $y = \frac{1}{x}$ hat die Ableitung $y' = -\frac{1}{x^2}$. Im Punkte $x = 0$ wird $y = \infty$, anders ausgedrückt, y' existiert nicht. Ist auch dieses wie in Nr. 7 ein Anzeichen dafür, dass eine zur x-Achse senkrechte Tangente vorhanden ist?
Der Sachverhalt ist der, dass die y-Achse Asymptote wird, also im Endlichen die Kurve nicht berührt. Man sagt freilich manchmal, es handele sich um Berührung im Unendlichen.

Ebenso ist die Parallele zur y-Achse im Abstand $\frac{\pi}{2}$ bei der Tangenskurve $y = \tan x$ Asymptote;

es ist $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und das wird für $x = \frac{\pi}{2}$ unendlich.

Feststellung: Wird für einen Wert der Funktion $y = f(x)$ der Differentialquotient unendlich, so kann es sich bei der zugehörigen Kurve auch um eine Asymptote handeln. Die Feststellung von Nr. 7 ist also nicht umkehrbar.

9. Existiert die Tangente ?
Wir untersuchen die Funktion

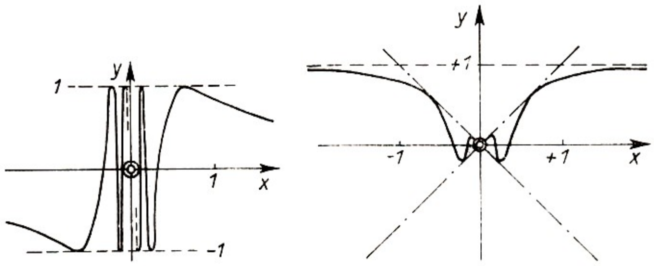
$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

Während

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

nicht existiert, obwohl die Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ stetig ist, existiert von der stetigen Funktion $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ auch der Wert für $x = 0$. Es ist nämlich $f(0) = 0$.[34]
Abb. 92 deutet den Verlauf von $y = \sin\frac{1}{x}$, Abb. 93 von $y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ in der Nähe des Nullpunktes schematisch an.

Abb. 92,93



Von einer Tangente im Nullpunkt lässt sich hiernach bei der Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ nicht reden. Wie aber ist es bei der in $x = 0$ stetigen Funktion $y = x\sin\frac{1}{x}$?
Der Differentialquotient liefert nach der Produktenregel

$$y' = \sin\frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

Beide Glieder dieser Summe existieren für $x = 0$ nicht. Von einer Tangente, kann keine Rede sein.

Feststellung: Es gibt Funktionen, die, obwohl sie für einen bestimmten Wert stetig sind, dort nicht differenzierbar sind. Die entsprechende Kurve hat in einem solchen Punkte keine Tangente.

10. Zwei beliebige Größen a und b sind gleich.
Der eine sagt, $\frac{0}{0}$ ist 0, weil der Zähler 0 ist, der zweite, brucherfahren, $\frac{0}{0}$ ist 1, weil Zähler und Nenner gleich sind, der dritte, besonders klug, $\frac{0}{0}$ ist ∞, weil der Nenner 0 ist.

Wir setzen $a - b = x$ und erhalten einmal durch Quadrieren, zum anderen durch Multiplizieren mit x die Ausdrücke

$$x^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad , \quad x^2 = ax - bx$$

Aus

$$ax - bx = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{folgt} \qquad -a(x + b - a) = b(x + b - a)$$

[34] Persönliche Anmerkung: Nach heutigem Verständnis existiert der Funktionswert nicht, da die Funktion $y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist. Sie ist damit dort auch nicht stetig.

Hiernach wird

$$\frac{x+b-a}{x+b-a} = \frac{a}{b}$$

und daraus würde der erste der klugen Leute $a = 0$, der zweite $a = b$, der dritte $b = 0$ schließen.
Wer hat nun recht?

Die Differentialrechnung schreibt vor, dass man in einem solchen Falle Zähler und Nenner differenziert und den neuen Bruch bildet. Das gibt

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

also sind die zwei beliebig gewählten Zahlen a und b gleich; also ist $x = 0$.

Feststellung: Wenn a und b konstante Größen sind, ist es auch so; es handelt sich also gar nicht um den Quotienten zweier Funktionen.

11. Alle echten Brüche sind einander gleich. Es sei $n < m$. Dann ist, wie man z.B. durch ein einfaches Dividieren findet,

$$\frac{1-x^n}{1-x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - +...$$

Setze ich $x = 1$, so erhalte ich links die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Man wertet sie in bekannter Weise aus, indem man Zähler und Nenner nach x differenziert und dann $x = 1$ setzt, Man erhält

$$\frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + -...$$

Da die rechte Seite von der Wahl von n und m vollkommen unabhängig ist, haben alle echten Brüche den gleichen Wert.

Feststellung: Man darf nicht ohne weiteres mit dem Wert divergenter Reihen rechnen.

12. Im Kreise gibt es weder eine größte noch eine kleinste Sehne.
Gegeben sei der Kreis mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vom Punkte $x = -r, y = 0$ werden die Sehnen gezogen. Ihr anderer Endpunkt habe die Koordinaten x, y. Dann ist das Sehnenquadrat

$$s^2 = (x+r)^2 + y^2 = x^2 + 2rx + r^2 + y^2 = 2r^2 + 2rx$$

Differentiation nach x und Nullsetzen der Ableitung liefert $2r = 0$.

Feststellung: Extremwerte können am Rande des zulässigen Bereichs liegen.

13. Bestimmung von Extremwerten.
Vorgelegt wird die Funktion

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 8$$

Um die Extremwerte zu bestimmen, setzen wir die Ableitung 0. Also wird

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12 = 12(x+1)^2(x-1) = 0$$

Wir erhalten

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +1, \quad y_1 = -3, \quad y_2 = -19$$

Nun ist

$$f(-2) = +8, \quad f(-1) = -3, \quad f(0) = -8, \quad f(1) = -19, \quad f(2) = -24$$

Wir entnehmen diesen Werten, dass zwar beiderseits $f(1)$ die Funktionswerte größer sind, $x_2 = +1$ also ein Minimum liefert, dass aber beiderseits $f(-1)$ die Werte verschiedene Vorzeichen haben und der eine größer, der andere kleiner ist. $x_1 = -1$ liefert also weder ein Maximum noch ein Minimum.

Feststellung: Zur Bestimmung eines relativen Extremwertes reicht die (notwendige) Forderung $f'(x) = 0$ nicht aus. Im vorliegenden Falle ist nämlich $f''(x) = 36x^2+24x-12$ und $f''(-1) = 0$ und nicht $f''(-1) \neq 0$.

14. Bestimmung von Wendepunkten.
Vorgelegt wird die Funktion

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 4$$

Es wird

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = (x-1)^3 \cdot 4$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x-1)^2$$

Setzt man $f''(x) = 0$, so erhält man nach bekannter Regel die Wendepunkte. Also ist

$$x_w = 1 \qquad , \qquad y_w = 3$$

ein Wendepunkt, und zwar der einzige. Nun zeigt aber die Funktionsfolge

$$f(0) = 4, \quad f(1) = 3, \quad f(2) = 4$$

dass x_w, das ja auch wegen $f'(x_w) = 0$ die erste Ableitung zu Null macht, kein Wendepunkt, sondern ein Extremwert, und zwar ein Minimum ist.

Feststellung: Zur Bestimmung eines Wendepunktes reicht die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ nicht aus. Wenn nämlich auch $f'(x) = 0$ ist, kann auch ein Extremwert vorliegen. Im vorliegenden Fall ist nämlich $f'''(x) = 24x - 24$, und es wird auch $f'''(+1) = 0$.

Allgemein gilt: Es sei für x_0 die Folge $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ..., $f1n-1(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) = y_n \neq 0$. Dann ist $x_0, f(x_0)$ ein Maximum, wenn y_n negativ und n gerade, ein Minimum, wenn y_n positiv und n gerade, ein Wendepunkt, wenn n ungerade ist.

Maxima und Minima

15. Folgende Aufgabe ist zu lösen: Einer Kugel soll der Kegel größter Oberfläche eingeschrieben werden.

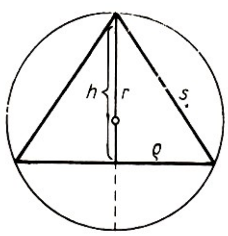


Abb. 94

Es ist (vgl. Abb. 94)

$$O = \pi\rho^2 + \pi\rho s, \qquad \rho^2 = h(2r - h), \qquad s^2 = 2rh$$

Also wird, wenn wir h als Veränderliche x wählen,

$$\frac{O}{\pi} = f(x) = x(2r - x) + \sqrt{2rx^2(2r - x)}$$

Differentiation liefert

$$f'(x) = 2r - 2x + \frac{4r^2x - 3rx^2}{\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}}$$

Setzen wir den Differentialquotienten Null, so gewinnen wir für den Extremwert x_m die Gleichung

$$2(x_m - r)\sqrt{4r^2x_m^2 - 2rx_m^3} = 4r^2x_m - 3rx_m^2$$

Da $x_m = 0$ als für unsere Aufgabe unfruchtbar ausfällt, können wir durch x_m dividieren. Wir quadrieren und erhalten nun die Gleichung

$$4(x_m - r)^2(4r^2 - 2rx_m) = (4r^2 - 3rx_m)^2$$

Das lässt sich vereinfachen zu

$$8x_m^2 - 23rx_m + 16r^2 = 0$$

Also wird

$$x_m = \frac{23 \pm \sqrt{17}}{16}r; \qquad x_{m_1} \approx 1,7r, \qquad x_{m_2} \approx 1,2r$$

Für beide Werte wird $f''(x) < 0$, beide liefern also ein Maximum.

Feststellung: Am einfachsten sieht man an der graphischen Darstellung von $f(x)$, dass nur für $x \approx 1,2r$ ein Maximum eintritt. x_{m_1} ist durch das Quadrieren der Gleichung, die der erste Differentialquotient liefert, eingeschmuggelt. Also Achtung vor Wurzelgleichungen bei Extremwertbestimmungen!

16. Jeder Punkt im Innern eines Kreises ist Mittelpunkt des Kreises.
Wir lösen die Aufgabe: Der kleinste und der größte Abstand eines im Innern des Kreises gelegenen Punktes von der Peripherie ist zu finden. Der Kreis habe die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der beliebige Punkt im Kreisinnern auf der x-Achse im Abstand $+e$ vom Mittelpunkt liege. Dann gilt für das Quadrat des Abstandes s dieses Punktes von einem beliebigen Kreispunkt (x, y) die Gleichung

$$s^2 = (x - e)^2 + y^2 \qquad \text{oder} \qquad s^2 = (x - e)^2 + r^2 - x^2$$

Um die Extremwerte von

$$s = \sqrt{e^2 + r^2 - 2xe}$$

zu erhalten, haben wir nach x zu differenzieren.

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{e}{\sqrt{e^2 + r^2 - 2xe}} = -\frac{e}{s}$$

Also ist, wie unsere Behauptung lautet, $e = 0$.

Feststellung: Es gibt Funktionen, z.B. die lineare Funktion

$$y = mx + n \tag{1}$$

die in einem gegebenen Intervall keinen Extremwert haben, es sei denn, dass man als solchen die an den Grenzen des Intervalls angenommenen Werte ansieht. Auch bei der linearen Funktion (1) würde $y' = m$ folgen, aber daraus nicht $m = 0$ zu schließen sein.

17. Jemand löst die Aufgabe: Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sei 12 cm, die zugehörige Höhe 3 cm. Gesucht wird auf der Höhe oder ihrer Verlängerung derjenige Punkt, für den die Summe der Entfernungen von den drei Ecken möglichst klein ist (Abb. 95).

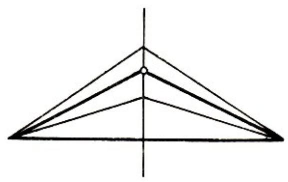


Abb. 95

Er verfährt in gewohnter Weise so:
Liegt der gesuchte Punkt x cm oberhalb der Basis, dann lautet die zu untersuchende Funktion

$$y = (3 - x) + 2\sqrt{x^2 + 36} \tag{1}$$

Es wird

$$y' = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

Die daraus folgende Gleichung

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 1 \tag{2}$$

hat die Lösungen $x = \pm 2\sqrt{3}$.

Nun ist $2\sqrt{3} > 3$. Ist x positiv, so liegt der gesuchte Punkt außerhalb des Dreiecks oberhalb der Spitze. Dass es sich dabei nicht um ein Minimum der fraglichen Summe handeln kann, sieht man sofort, wenn man den Punkt der Spitze nähert.
Der Wert mit dem negativen Vorzeichen kommt erst recht nicht in Frage.

Feststellung: Zunächst ist $-2\sqrt{3}$ gar nicht Wurzel der Gleichung (2). Erneut gilt also die Mahnung, bei Wurzelgleichungen vorsichtig zu sein.
Außerdem gibt die Funktion (1) nicht den in der Aufgabe dargestellten Sachverhalt wieder, denn sie gilt nur für $x \leq 3$; für $x > 3$ wäre $(x - 3)$ negativ, was der Aufgabenstellung widerspricht, da dieser Ausdruck eine Strecke darstellen soll. Der Sachverhalt lässt sich durch folgende Funktionen beschreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} y = (3 - x) + 2\sqrt{x^2 + 36} & \text{für } x \leq 3 \\ y = (x - 3) + 2\sqrt{x^2 + 36} & \text{für } x > 3 \end{array}\right\}$$

oder „

$$y = |3 - x| + \sqrt{x^2 + 36}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass der niedrigste Funktionswert für diese Funktionen an der Stelle $x = 3$, d.h. an der Spitze des Dreiecks liegt.

18. Aufgabe: Zwei Geraden stehen zueinander senkrecht. Eine dritte schneidet von ihnen Stücke von a cm und b cm ab.
Man betrachtet die Rechtecke, deren eine Ecke von den beiden Senkrechten gebildet wird, während die gegenüberliegende Ecke beliebig auf der Schnittgeraden liegt. Wann erreicht der Inhalt des Rechtecks seinen größten oder kleinsten Wert?

Sind x und y die Seiten des Rechtecks, dann verhält sich, wo auch der auf der Schnittgeraden wandernde Punkt liegt,

$$x : a = (b - y) : b \qquad \text{also ist} \qquad y = b - \frac{b}{a}x$$

Der Inhalt des Rechtecks ist demnach

$$I = x \cdot y = bx - \frac{b}{a}x^2$$

Um den Extremwert zu finden, setzt man

$$\frac{dI}{dx} = b - \frac{2b}{a}x = 0 \qquad \text{woraus} \qquad x = \frac{a}{2} \qquad \text{folgt und} \qquad I = \frac{ab}{4}$$

Man sieht aber sofort, dass dieses Rechteck nicht einen Minimalwert des Flächenwertes bildet, denn wenn man den wandernden Punkt sich dem einen oder anderen Schnittpunkt der Geraden mit den beiden Senkrechten nähern lässt, wird der Inhalt kleiner und kleiner, um schließlich Null zu werden.
Und wenn andererseits der Punkt über diese Schnittpunkte noch hinauswandert, dann nimmt der Flächeninhalt des Rechtecks Werte an, die jedes vorgeschriebene Maß überschreiten. Der errechnete Wert kann also weder ein Minimum noch ein Maximum sein.

Feststellung: Man muss auf das Vorzeichen von Strecken achten.

19. Hat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin x}{3x + \sin x}$$

einen bestimmten Wert?
Wendet man das übliche Verfahren an, differenziert also Zähler und Nenner des Quotienten, so erhält man

$$\frac{2 + \cos x}{3 + \cos x}$$

Dieser Ausdruck liefert keinen festen Wert, da der Zähler zwischen 1 und 3, der Nenner zwischen 2 und 4 schwankt, der Quotient also zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$. Jemand differenziert nochmals Zähler und Nenner und erhält nun sogar $\frac{\sin x}{\sin x}$, also den Wert 1.
Andererseits findet man aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin x}{3x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{3 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{3}$$

da ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

ist. Wer hat nun recht?

3.7 Integralrechnung

1. Integration als Umkehrung der Differentiation.
Jemand kürzt hiernach $\int$ gegen d in $\int dx$ und erhält x, ebenso $\int d\sin x = \sin x$.
Er wird kühner, in $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ wird auch noch x gegen x gekürzt, aber das Ergebnis 1 ist falsch.
Und auch bei $displaystyle \int xdx$ erhält er x^2, statt, wie es richtig, $\frac{x^2}{2} + c$.
Eine Feststellung erübrigt sich hier.

2. Das graphische Bild der Sinusfunktion ist die x-Achse.
Es ist $\sin 0 = 0$, $\sin 2n\pi = 0$, wenn n eine ganze Zahl ist. Das zwischen $x = 0$ und $x = 2n\pi$ liegende, von der Funktion $y = \sin x$ und der x-Achse umschlossene Gebiet ist

$$\int\limits_0^{2n\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2n\pi} = -1 + 1 = 0$$

Schließen aber Kurve und x-Achse die Fläche 0 ein, so muss die Kurve mit der x-Achse zusammenfallen.

Feststellung: Die Integration liefert Flächen mit Vorzeichen. Gleich große Flächen mit entgegengesetztem Umlaufsinn heben sich auf.

3. $\tan x = \pm i$. Es ist

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

da

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = 2\cos x \sin x$$

ist. Ebenso ist

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

da

$$\frac{d\cos^2 x}{dx} = -2\cos x \sin x$$

ist. Folglich ist

$$\sin^2 x = -\cos^2 x \qquad \text{oder} \qquad \tan^2 x = -1$$

woraus die obige Behauptung folgt.

4. $\sin x = \pm 1$. Es ist

$$\frac{d\tan^2 x}{dx} = 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

und

$$\frac{d\frac{1}{\cos^2 x}}{dx} = \frac{d(\cos x)^{-2}}{dx} = -2\cos^{-3} x(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Daraus folgt

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Aus

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2} x \qquad \text{folgt} \qquad \sin^2 x = 1, \quad \sin x = \pm 1$$

5. $\cos x = \pm 1$. Es ist

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{-2} = -2(\sin x)^{-3} \cdot \cos x = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$
$$\frac{d}{dx}\cot^2 x = 2\cot x \frac{-1}{\sin^2 x} = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

Also ist

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\cot^2 x$$

Aus

$$\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{folgt} \qquad \cos^2 x = 1, \quad \cos x = \pm 1$$

6. $\sin x = -\cos x$ und $\tan x = -\cot x$ Aus

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x \qquad , \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = -\operatorname{arccot} x$$

Aus

$$z = \arcsin x = -\arccos x \qquad \text{folgt} \qquad \sin z = -\cos z$$

Aus

$$z = \arctan x = -\operatorname{arccot} x \qquad \text{folgt} \qquad \tan z = -\cot z$$

Feststellung zu 3 bis 6: Aus der Gleichheit unbestimmter Integrale folgt nicht die Gleichheit irgendwelcher zugehöriger Stammfunktionen. Die Integrationskonstanten dürfen nicht weggelassen werden. Beachte z. B. bei Nr. 5:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + C = \cot^2 x$$

für $C = -1$ gilt $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \cot^2 x$.

7. $1 = \sin^2 x$.
Wir differenzieren die Funktion $y = tanx$. Es wird

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x} = 2y\cot y'$$

Also wird

$$y'' = (y^2)'$$

Integrieren wir das, dann ergibt sich

$$y' = y^2 \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

daraus folgt die Behauptung.
Feststellung: Man darf beim Integrieren nicht die Integrationskonstante weglassen. [1.7]

8. $2 = 1$. [16] Es sei $f(x)$ irgendeine integrierbare Funktion. Dann können wir schreiben

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \tag{I}$$

Wir substituieren $x = 2u$ im Integral $\int_0^2 f(x)dx$, dann erhalten wir wegen $dx = 2du$ und der unteren Grenze $u_1 = 0$ sowie der oberen Grenze $u_2 = 1$ das Integral

$$2\int_0^1 f(2u)du$$

Wählen wir für u wieder die Bezeichnung x:, so wird aus (I)

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\int_0^1 f(2x)dx - \int_0^1 f(x)dx \tag{II}$$

Wir wählen die Funktion $f(x)$ so, dass $f(2x) = \frac{1}{2}f(x)$. (III)
Damit wird aus Gleichung (II)

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{d.h.} \qquad \int_1^2 f(x)dx = 0 \tag{II}$$

Nun erfüllt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Relation (III). Daher ist

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0 \qquad \text{also} \qquad \ln 2 - \ln 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad 2 = 1$$

Hinweis: $\int_0^1 f(x)dx$ existiert nicht für $f(x) = \frac{1}{x}$, da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist.
Nach Gleichung (I) können wir für $a > 0$ schreiben

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_a^2 \frac{dx}{x} - \int_a^1 \frac{dx}{x}dx \tag{Ia}$$

Führt man in $\int_a^2 \frac{dx}{x}$ die Substitution $x = 2u$ durch, so erhält man, wenn man die Variable zurückbenennt

$$\int_{\frac{a}{2}}^a \frac{2dx}{2x} = \int_{\frac{a}{2}}^1 \frac{dx}{x}$$

Aus (Ia) wird dann

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{\frac{a}{2}}^1 \frac{dx}{x} - \int_a^1 \frac{dx}{x}dx = \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{dx}{x}$$

Man könnte hierin nun eine Bestätigung des obigen Ergebnisses sehen, da dieses Integral mit a gegen Null geht, weil beide Grenzen verschwinden.
Es darf jedoch nicht außer acht gelassen werden, dass $a > 0$ vorausgesetzt werden musste. Es ist

$$\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{\frac{a}{2}}^{a} = \ln a - \ln \frac{a}{2} = \ln 2$$

Das ist damit auch der tatsächliche Wert von $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

9. Ein Körper, der ebenso groß ist wie sein Doppeltes.
Die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ rotiert um die x-Achse, dann entsteht ein zweischaliges Rotationshyperboloid, dessen Scheitel beiderseits vorn Nullpunkt im Abstand 1 auf der x-Achse liegen.
Durch Ebenen $x = \pm 2$ schneidet man von beiden Schalen des Hyperboloids Stücke ab. Wir berechnen ihren Rauminhalt. Aus Symmetriegründen sind die beiden Hyperboloidabschnitte inhaltsgleich.

Ich berechne zunächst in bekannter Weise die eine der Schalen, indem ich von $x = 1$ bis $x = 2$ integriere:

$$V_1 = \pi \int\limits_1^2 y^2 dx = \pi \int\limits_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

Ein zweites Mal berechne ich beide Schalen, indem ich von $x = -2$ bis $x = +2$ integriere. Dann wird

$$V_2 = \pi \int\limits_{-2}^{2} y^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{2} = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

Beide Schalen sind also ebenso groß wie eine allein.

Feststellung: Das Quadrat im Integral kann reelle Beträge vortäuschen, wenn die Funktion selbst imaginär ist.

10. $\ln(-a) = \ln a$, also z. B. $\ln(-1) = 0$. [35] In dem Integralausdruck

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

ersetzt man x durch $-x$. Dann hebt sich unter dem Integral das negative Vorzeichen weg, und es bleibt

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c$$

woraus die Behauptung folgt.

Feststellung: Man muss auf die Definition der Funktionen achten.

11. Ein endlicher Drehkörper mit unendlich großem Achsenschnitt. Es ist

$$\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$$

[35] Der Trugschluss rührt von Joh. Bernoulli her (1667-1748).

und folglich

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \infty$$

Es ist also die von der Hyperbel $y = x$, der x-Achse, der Ordinate $x = 1$ gebildete, bis ins Unendliche sich erstreckende Fläche unendlich groß.
Lässt man diese Fläche jetzt um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Drehkörper mit dem Rauminhalt

$$V = \lim_{x\to\infty}\pi\int\limits_1^x \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{x}\right) = \pi$$

Der Rauminhalt ist also endlich.
Feststellung: "Anschauung" und "gesunder Menschenverstand" täuschen manchmal.

4 Literaturverzeichnis

Im Buch angeführte Literatur

[1] Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851.
[2] Cajori, The History of Zeno's Arguments on Motion, The American Mathematical Monthly 22, 1915
[3] Courant, R., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band 1, 3. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961
[4] Dörrie, H., Mathematische Miniaturen, Breslau 1943
[5] Fichtenholz, G. M., Differential- und Integralrechnung, Band 1, 3. Aufl., Berlin 1968
[6] Fraenkel, A., Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin 1928
[7] Görke, L., Mengen, Relationen, Funktionen, Berlin 1965
[8] Hasse, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, 4. Aufl. MSB Nr. 2, Leipzig 1968
[9] Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. I, Berlin 1925
[10] Lietzmann, W., Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, 7. Aufl., Göttingen 1951
[11] Lietzmann, W., Der Pythagoreische Lehrsatz, MSB Nr. 6, 9. Aufl., Leipzig 1968
[12] Lietzmann, W., Riesen und Zwerge im Zahlenreich, MSB Nr. 13, 8. Aufl., Leipzig 1969
[13] Lindelöf, E., u. E . Ullrich, Einführung in die höhere Analysis, 2. Aufl. Leipzig 1951
[14] Mangold/Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Band 2, Nachdr. d. 12. Aufl., Leipzig 1964
[15] Mathematical Gazette 33, 1949
[16] Maxwell, E. A., Fallacies in Mathematics, Cambridge 1963
[17] Oblath, R., Elemente der Mathematik 7, 1952
[18] Ostwalds Klassiker Nr. 240, Euklid, Buch VI-IX, Leipzig
[19] Priwalow, Einführung in die Funktionentheorie, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1967
[20] Schröder, K., Mathematik für die Praxis, Band II, Berlin 1964
[21] Westavay, F. W., Craftmanship in the Teaching of Elementary Mathematics, London 1931
[22] Kleine Enzyklopädie Mathematik, 2. Aufl., Leipzig 1967
[23] Krein/Uschakowa, Vorkurs zur Analysis, Leipzig 1966

Weitere Literatur zu ähnlichen Problemen

Ahrens, W., Mathematische Spiele, 5. Aufl., Leipzig 1900
Dubnow, J. S., Fehler in geometrischen Beweisen, MSB Nr. 17, 3. Aufl., Berlin 1967
Görke , L., u. a., Rund um die Mathematik, MSB Nr. 34, Berlin 1968
Krbek, F. V., Geometrische Plaudereien, 2. Aufl., Leipzig 1966
Krbek, F. v., Über Zahlen und Überzahlen, 2. Aufl., Leipzig 1969
Kordemski, B. A., Köpfchen, Köpfchen, 6. Aufl., Leipzig 1968
Mathematische Streifzüge, Bd. I, Leipzig 1966, Bd. II, 1967
Peter, R., Das Spiel mit dem Unendlichen, 4. Aufl., Leipzig 1966
Schubert, H., Mathematische Musestunden, 2. Aufl., Leipzig 1900
Steinhaus, H., Kaleidoskop der Mathematik, Berlin 1959
Steinhaus, H., 100 Aufgaben zur Elementarmathematik, Leipzig 1968
Varga, T., Mathematische Logik für Anfänger, MSB Nr. 7, Berlin 1964