
Tiberiu Roman

Reguläre und halbreguläre Polyeder

Übersetzung: Horst Antelmann
1987 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 45
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Einleitung

Im Laufe der Zeit haben sich zahlreiche Mathematiker von verschiedenen Gesichtspunkten aus mit dem Studium von Polyedern befasst.

Um einige berühmte Namen zu nennen: Euklid (um 300 v.u.Z.), Archimedes (287-212 v.u.Z.), J. Kepler (1571 bis 1630), L. Euler (1706-1783), L. Poincaré (1777-1859), A. Cauchy (1789-1857), H. Poincaré (1854-1912), A. D. Alexandrow (geb. 1912).

Im folgenden untersuchen wir Polyederecken und Polyeder; nachdem wir sie definiert haben, beweisen wir Aussagen darüber.

Daran anschließend leiten wir den Eulerschen Polyedersatz her - einen der ersten Sätze aus der Topologie - und ziehen daraus mehrere Folgerungen. Der Begriff des regulären Polygons wird auf den Raum erweitert; wir betrachten reguläre konvexe Polyeder und Sternpolyeder.

Des weiteren werden die verschiedenen Typen von archimedischen Körpern bestimmt sowie die dual-archimedischen Körper durch ihre Eigenschaften beschrieben.

Über die zuletzt genannten Polyeder teilen wir einige neuere Ergebnisse mit. Für alle betrachteten Polyeder werden Darstellungen in Parallelprojektion angegeben.

Ferner finden sich Hinweise für ihre räumliche Konstruktion sowie zur Realisierung ihrer ebenen Netze, mit deren Hilfe Modelle angefertigt werden können.

Inhaltsverzeichnis

1 Polyeder und Polyederecken	3
2 Der Eulersche Polyedersatz	6
3 Reguläre Polyeder	15
4 Reguläre Sternpolyeder	23
5 Halbreguläre Polyeder (archimedische Körper)	28
6 Die Konstruktion der archimedischen Körper	37
7 Die Konstruktion der dual-archimedischen Körper	48
8 Anwendung der regulären und der halbregulären Polyeder	55
9 Aufgaben	59
10 Literaturverzeichnis	73

1 Polyeder und Polyederecken

Definitionen. Unter einer Polyederecke verstehen wir eine Figur, die aus einem Punkt V , aus n ($n \geq 3$) von V ausgehenden Halbgeraden $VA, VB, VC, \dots, VJ, VK$ (in dieser Reihenfolge) und aus den Innengebieten der ebenen Winkel $AVB, BVG, \dots, JVK, KVA$ besteht.

Der Punkt V heißt Ecke der Polyederecke; die Halbgeraden VA, VB, \dots, VK sind ihre Kanten; ebene Winkel der Polyederecke sind die Winkel AVB, BVG, \dots, KVA ; ihre (Seiten-) Flächen sind die Innengebiete dieser Winkel; die Flächenwinkel der Polyederecke sind die Winkel zwischen je zwei Seitenflächen, deren Scheitel jeweils auf den Kanten VA, VB, \dots liegen (für $n = 6$ siehe Abb. 1).

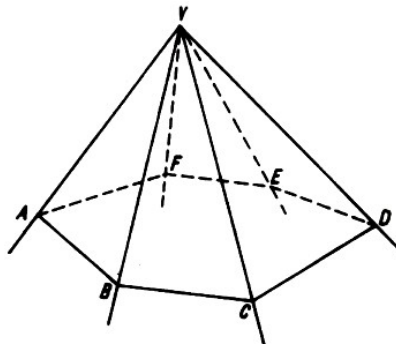


Abb. 1: Sechsstufige Pyramide mit der Ecke der Polyederecke in V und mit sechs Triederecken in A, B, C, D, E, F

Eine Polyederecke besitzt mindestens drei Flächen; man spricht in diesem Falle von einer Triederecke (beispielsweise in Abb. 1 das Trierer mit der Ecke B und den Kanten BA, BV, BC). Eine Polyederecke mit vier Kanten wird Tetraederecke, eine mit fünf Kanten Pentaederecke genannt usw.

Eine Polyederecke heißt konvex, wenn sie ganz auf einer Seite jeder der Ebenen liegt, zu denen man sich jede Seitenfläche fortgesetzt denkt.

Satz 1. In einer Polyederecke ist jeder ebene Winkel kleiner als die Summe der übrigen ebenen Winkel,

Offenbar braucht dieser Satz nur für denjenigen ebenen Winkel bewiesen zu werden, der größer als alle anderen ebenen Winkel ist.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: zuerst für Triederecken, dann für beliebige Polyederecken.

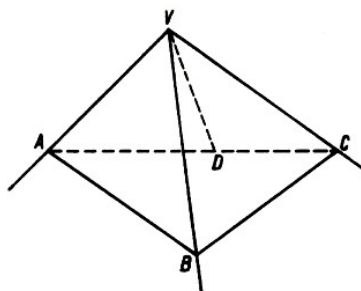


Abb. 2: Zum Beweis von Satz 1 für eine Triederecke

Es sei $VABC$ eine Triederecke (Abb. 2), in welcher AVC der größte ebene Winkel ist. Auf der Fläche AVC konstruieren wir den ebenen Winkel AVD , der gleich AVB ist.

Wir erhalten auf den Halbgeraden VB und VD die gleichlangen Strecken $VB = VD$. Durch D legen wir eine Gerade, welche die Kanten VA und VC in A und C schneidet. Jetzt werden die Geraden BA und BC konstruiert. Die Dreiecke AVB und AVD sind kongruent; folglich ist $AB = AD$. Aus der Beziehung

$$AC = AD + DC < AB + BC$$

ergibt sich $DC < BC$.

Vergleichen wir die Dreiecke DVC und BVC miteinander, welche die gleichlangen Seiten VD und VB besitzen, die Seite CV gemeinsam haben und in denen $DC < BC$ ist, so erhalten wir

$$\angle DVC < \angle BVC$$

Wenn wir nun noch berücksichtigen, wie wir den Winkel AVD konstruiert haben, so ist tatsächlich

$$\angle AVC = \angle AVD + \angle DVC + \angle AVB + \angle BVC$$

Damit ist Satz 1 für Triederecken bewiesen.

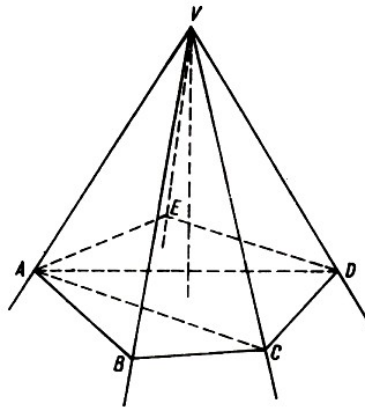


Abb. 3: Zum Beweis von Satz 1 für eine Pentaederecke

Um ihn für eine beliebige Polyederecke (Abb. 3) zu beweisen, konstruieren wir durch eine Kante VA und die gegenüberliegenden Kanten VC, VD gehende diagonale Ebenen und wenden unser Ergebnis nacheinander auf die Triederecke $VAED, VADC, VABC, \dots$ an. Dabei haben wir angenommen, der Winkel AVB sei der größte ebene Winkel der Polyederecke. (Die Abb. 3 zeigt eine Pentaederecke; daran wird das Prinzip des Beweises auch für andere Polyederecke deutlich !)

Satz 2. Die Summe der ebenen Winkel in einer konvexen Polyederecke ist kleiner als 360° .

Wir betrachten eine Ebene, die alle Kanten der Polyederecke schneidet und dabei ein konvexes Polygon $ABCDE$ bestimmt (Abb. 3).

Wenden wir Satz 1 auf die Triederecke mit den Ecken A, B, C, D, E an, so gelangen wir zu den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \angle EAB &< \angle EAV + \angle VAB, & \angle ABC &< \angle ABV + \angle VBC, \\ \angle BCD &< \angle BCV + \angle VCD, & \angle CDE &< \angle CDV + \angle VDE, \\ \angle DEA &< \angle DEV + \angle VEA. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so zeigt sich, dass die Summe der Innenwinkel des Polygons $ABCDE$ kleiner ist als die Summe der Basiswinkel in den Dreiecken $VAB, VBC, VCD,$

VDE, VBA.

Andererseits ist die Summe der Innen- und Außenwinkel des Basispolygons gleich der Summe aller Winkel der dreieckigen Seitenflächen. (Die Summe der Winkel jeder Dreiecksfläche ist 180° , ebenso die Summe jeweils eines Innen- und eines Außenwinkels.)

Da die Summe der Außenwinkel in einem konvexen Polygon 360° beträgt, ist folglich die Summe der Winkel in den Spitzen der Seitenflächen (d.h. die Summe der ebenen Winkel der Polyederecke) kleiner als 360° .

Definitionen. Ein von Ebenen begrenzter Körper wird Polyeder genannt.

Diejenigen Teile dieser Ebenen, welche durch andere Ebenen ausgeschnitten werden, sind die (Seiten-)Flächen des Polyeders. Es sind Polygone.

Jede Seite eines solchen Polygons gehört zu zwei Flächen. Diese Seiten werden als die Kanten des Polyeders bezeichnet. Jeder Eckpunkt der polygonalen Flächen gehört zu wenigstens drei Flächen. Diese Eckpunkte nennen wir die Ecken des Polyeders.

Man unterscheidet bei einem Polyeder Flächenwinkel (an jeder Kante einer) und räumliche Winkel, das Innere einer Polyederecke (an jeder Ecke des Polyeders einer).

Ein Polyeder heißt konvex, wenn es ganz auf einer Seite der Ebene jeder seiner Flächen liegt.

Beispiele. Aus dem Geometrieunterricht bekannte Beispiele sind das Prisma, die Pyramide, der Pyramidenstumpf und das Prismatoid.

Die Namen einiger Polyeder leiten sich von der Anzahl ihrer Flächen ab: Tetraeder (Vierflächner, z.B. eine Dreiecks-Pyramide), Pentaeder (Fünfflächner, ein Polyeder mit fünf Flächen; Beispiele sind das dreiseitige Prisma und das Prismatoid - Abb. 4), Hexaeder (ein Polyeder mit sechs Flächen; als Beispiel mag der Stumpf einer vierseitigen Pyramide dienen, der zwischen der Grundfläche und einer Schnittebene liegt, welche nicht zur Grundfläche parallel ist und alle Seitenkanten schneidet - Abb. 5), Oktaeder (ein Polyeder mit acht Flächen; eine vierseitige Doppelpyramide, d.h. zwei vierseitige Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche - Abb. 6), usw.

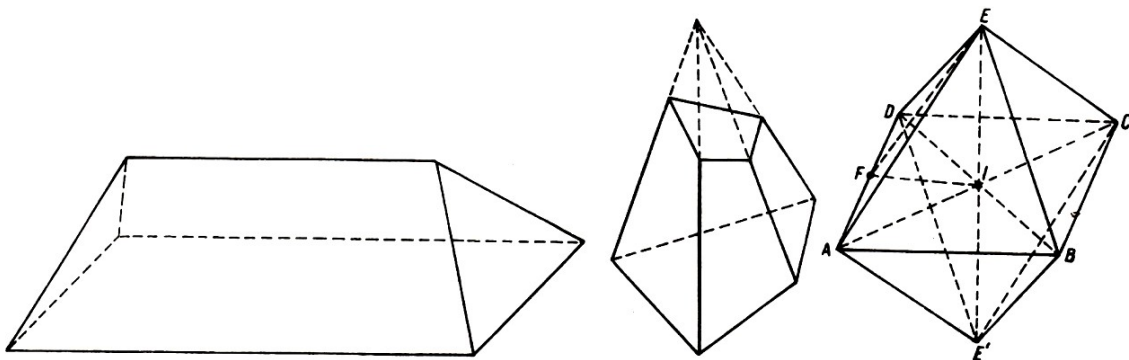


Abb. 4: Prismatoid, Abb. 5: Beispiel für ein Hexaeder, Abb. 6: Beispiel für ein Oktaeder

Satz 3. In jedem Polyeder gilt die Beziehung

$$2K = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots = 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + \dots \quad (1)$$

Dabei bezeichnet K die Anzahl der Kanten, F_n die Anzahl der polygonalen Flächen mit n Seiten und E_n die Anzahl der Ecken von Polyederecken mit n Kanten.

Die Anzahl der Seiten der Dreiecksflächen eines Polyeders ist $3F_3$; die Anzahl der Ecken der Vierecksflächen ist $4F_4$, usw. Da jede Kante eines Polyeders zu zwei Flächen gehört, ist die

Anzahl der Seiten der Flächen des Polyeders doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten:

$$2K = 3F_3 + 4F_4 + \dots \quad (1')$$

In analoger Weise überlegt man sich, dass die Anzahl der Kanten von Triederecken gleich $3F_3$, die Anzahl der Kanten von Tetraederecken gleich $4F_4$; ist, usw. Da jede Kante des Polyeders Kante von zwei Polyederecken ist; beträgt die Anzahl aller Kanten der Polyederecken das Doppelte der Kantenzahl des Polyeders:

$$2K = 3E_3 + 4E_4 + \dots \quad (1'')$$

Bemerkung. Mit den Bezeichnungen ergeben sich aus dem Satz unmittelbar die Beziehungen

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots \quad \text{und} \quad E = E_3 + E_4 + E_5 + \dots \quad (1''', 1''')$$

2 Der Eulersche Polyedersatz

Einleitung. Es gibt beiden Polyedern zwei Arten geometrischer Eigenschaften.

Zur ersten Art - den metrischen Eigenschaften - gehören solche Eigenschaften, die mit den Längen der Kanten, der Größe der ebenen Winkel, der Flächenwinkel und der räumlichen Winkel, dem Inhalt der Flächen, dem Volumen usw. zusammenhängen. Diese Eigenschaften werden in der Stereometrie behandelt.

Die zweite Art - die topologischen Eigenschaften - beziehen sich auf Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man ein Polyeder durch ein zu ihm isomorphes Polyeder ersetzt.

Definition. Zwei Polyeder heißen isomorph, wenn sich zwischen ihren Flächen, Kanten und Ecken eine eindeutige Zuordnung¹ herstellen lässt derart, dass

- a) einander entsprechende Flächen dieselbe Eckenzahl besitzen;
- b) zwei Flächen mit einer gemeinsamen Kante Flächen entsprechen, die ebenfalls eine Kante gemeinsam haben;
- c) zwei Kanten mit einer gemeinsamen Ecke Kanten entsprechen, die ebenfalls eine Ecke gemeinsam haben.

Alle untereinander isomorphen Polyeder und nur diese gehören zu einer Klasse. Die Menge aller Polyeder zerfällt somit in Äquivalenzklassen² zueinander isomorpher Polyeder, so dass jedes Polyeder zu genau einer Klasse gehört.

Als Beispiele für isomorphe Polyeder seien genannt: zwei gleiche Polyeder, zwei ähnliche Polyeder, zwei Prismen mit Polygonen derselben Seitenzahl als Grundflächen; ein Pyramidenstumpf mit viereckiger Grundfläche und das Polyeder aus Abb. 5; alle Tetraeder; alle Pentaeder mit einer Tetraederecke; alle Pentaeder, die nur Triederecken besitzen (wie in Abb. 4).

¹Das heißt, jedem Element (Fläche, Kante, Ecke) des ersten Polyeders wird genau ein entsprechendes Element des zweiten Polyeders zugeordnet, und umgekehrt.

²Man zeigt leicht, dass die Isomorphie zweier Polyeder eine Äquivalenzrelation ist; die Isomorphie ist nämlich reflexiv (jedes Polyeder ist zu sich selbst isomorph); symmetrisch (wenn das Polyeder P zum Polyeder Q isomorph ist, dann ist auch Q zu P isomorph); transitiv (wenn das Polyeder P zum Polyeder Q isomorph und Q zu einem Polyeder R isomorph ist, dann ist auch P zu R isomorph). Man vergleiche dazu [1], [8], [14], [15].

Beispiele für topologische Eigenschaften sind: die Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen, Flächenwinkel, Triederecken, Tetraederecken usw. von isomorphen Polyedern. Eine weitere topologische Eigenschaft der Polyeder ist das Geschlecht.

Definitionen. Ein Polyeder ist vom Geschlecht Null, wenn jeder auf der Oberfläche des Polyeders gezeichnete geschlossene Streckenzug diese Oberfläche in zwei getrennte Flächenstücke zerlegt. Trennen wir eine Fläche eines solchen Polyeders ab, so erhalten wir eine Polyederfläche, die einfach zusammenhängend genannt wird.

Beispiele für Polyeder vom Geschlecht Null sind: die konvexen Polyeder, die Prismen mit konkavem Basispolygon (jedoch nicht jedes nichtkonvexe Polyeder).

Ein Polyeder ist vom Geschlecht n , wenn n die Maximalzahl der geschlossenen einander nicht überschneidenden Streckenzüge ist, die sich auf der Oberfläche des Polyeders einzeichnen lassen und diese dabei nicht in getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen.

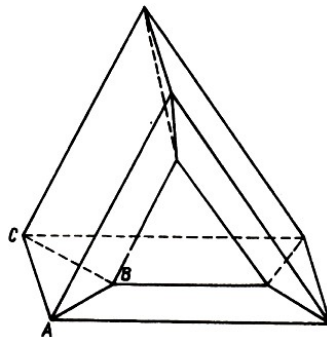


Abb. 7: Beispiel für ein Polyeder vom Geschlecht 1

Ein Beispiel für ein Polyeder vom Geschlecht Eins zeigt Abb. 7. Dieser Körper ist aus drei dreiseitigen Prismen mit horizontalen Kanten zusammengesetzt. Keines dieser Prismen hat eine horizontale Fläche. (Die Prismen gehen auseinander hervor, indem man das eine um 120° um eine außerhalb des Prismas liegende Achse dreht.)

Andere Beispiele finden sich in Satz 10 (Sterndodekaeder) und in Aufgabe 1.

Eine wichtige topologische Eigenschaft der Polyeder ist die Konstanz der Eulerschen Charakteristik³ für Polyeder desselben Geschlechts.

Wir wollen mit E die Anzahl der Ecken eines Polyeders bezeichnen, mit K die Anzahl seiner Kanten und mit F die Anzahl seiner Flächen. Die Eulersche Charakteristik eines Polyeders ist die Zahl

$$E - K + F$$

Satz 4 (Eulerscher Polyedersatz). Für jedes Polyeder vom Geschlecht Null ist die Eulersche Charakteristik gleich 2:

$$E - K + F = 2 \tag{2}$$

Beweis. Wenn wir eine Fläche des Polyeders abtrennen, so entsteht eine einfach zusammenhängende Polyederfläche. Dabei haben sich E und K nicht geändert, während die Anzahl der Flächen jetzt $F' = F - 1$ ist. Daher ist nun die Beziehung

$$E - K + F' = 1 \tag{3}$$

³Von L. Euler 1758 in den Memoiren der Petersburger Akademie veröffentlicht.

zu beweisen.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Flächenzahl F .

Für $F' = 1$ ist die Bedingung offensichtlich erfüllt, denn in einem Polygon ist $E = K$.

Wir nehmen an, die Beziehung (3) sei für alle Polyederflächen mit weniger als F' Flächen bewiesen. Nun betrachten wir eine Polyederfläche mit F' Flächen und legen einen Schnitt, welcher längs m Kanten der Oberfläche zwei Eckpunkte auf dem Rand der Oberfläche verbindet, d.h. also $m + 1$ Ecken.

Die Polyederfläche zerfällt dabei in zwei Flächenstücke⁴, und diese haben F_1 bzw. F_2 Flächen; E_1 bzw. E_2 Ecken, K_1 bzw. K_2 Kanten. Da F_1 und F_2 kleiner sind als F' , ist die Beziehung (3) erfüllt:

$$E_1 - K_1 + F_1 = 1 \quad , \quad E_2 - K_2 + F_2 = 1$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$(E_1 + E_2) - (K_1 + K_2) + (F_1 + F_2) = 2 \tag{4}$$

Nun lassen sich aber die Beziehungen zwischen der Anzahl der Elemente der gegebenen Oberfläche und denen der bei der Zerlegung entstehenden Flächenstücke ganz leicht bestimmen:

$$E_1 + E_2 = E + m + 1; \quad K_1 + K_2 = K + m; \quad F_1 + F_2 = F'$$

Setzt man diese Beziehungen in (4) ein, so ergibt sich (3).

Beispiele. In der folgenden Tabelle sind die Eulerschen Charakteristiken für einige bekannte Polyeder angegeben:

Polyeder	E	K	F	$E - K + F$	Geschlecht
Tetraeder	4	6	4	2	0
Pentaeder (Abb. 4)	6	9	5	2	0
Fünfeckspyramide (Abb. 3)	6	10	6	2	0
Würfel	8	12	6	2	0
Hexaeder (Abb. 5)	8	12	6	2	0
Oktaeder (Abb. 6)	6	12	8	2	0
Prisma mit n -seitigem Basispolygon	$2n$	$3n$	$n + 2$	2	0
Pyramide mit (konvexem oder konkavem) n -seitigem Basispolygon	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	2	0
das Polyeder aus Abb. 7	9	18	9	0	1

Bemerkung . Für konvexe Polyeder kann Satz 4 folgendermaßen direkt bewiesen werden.

Trennt man von einem konvexen Polyeder eine Fläche Q (mit l Seiten) ab, so ist die dabei entstehende Polyederfläche S zu einem ebenen Gebiet isomorph, das lückenlos von Polygonen ausgefüllt ist und jeweils von einem Polygon mit einer Seite berandet wird.

Wir betrachten nun einen Punkt N außerhalb des ursprünglichen Polyeders, der jedoch in der Nähe der Fläche Q und innerhalb der Oberfläche liegt, die sich bei der Verlängerung derjenigen Flächen des Polyeders ergibt, die mit der Fläche Q eine Kante gemeinsam haben.

Die Oberfläche S wird vom Zentrum N aus auf die Ebene der Fläche Q projiziert. Wie man sofort sieht (Abb. 8), wird die Fläche Q von einer Anzahl von Polygonen überdeckt, die gleich der Anzahl der Flächen von S ist, und die Seitenzahlen dieser Polygone stimmen überein.

⁴Wie man zeigen kann, sind diese Flächenstücke einfach zusammenhängend.

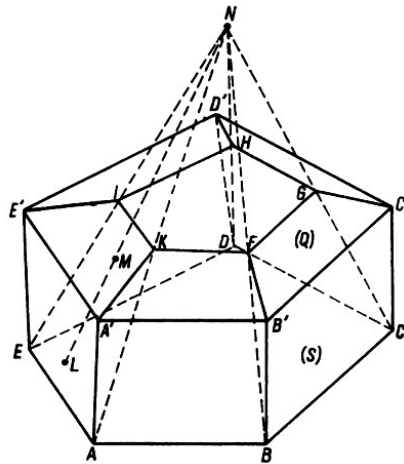


Abb. 8: Projektion der Oberfläche eines Polyeders auf die Ebene einer seiner Flächen (Projektionszentrum N)

Jeder Punkt der Fläche Q ist die Projektion eines Punktes der Fläche S , und umgekehrt.⁵

In Abb. 8 ist die Projektion der Fläche $ABCDE$ die Fläche $KFGHI$; die der Fläche $ABB'A'$ ist $KFB'A'$; die Flächen $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$ bzw. $EAA'E'$ haben als Projektionen jeweils die Vierecke $FGC'B'$, $GHD'C'$, $HIE'D'$, $IKA'E'$, die alle in der Ebene der Fläche Q liegen. Der Punkt M der Fläche Q ist die Projektion des Punktes L der Fläche S .

Die Beziehung zwischen der Anzahl der Polygone aus Q , der Anzahl ihrer Seiten und Ecken wird unten abgeleitet. In Q liegen $F - 1$ Polygone.

Wir bezeichnen mit k_1 und e_1 die Anzahl der Seiten und Ecken des ersten Polygons, mit k_2 und e_2 die Anzahl der Seiten und Ecken des zweiten Polygons, die nicht zum ersten gehören, mit k_3 und e_3 die Anzahl der Seiten und Ecken des dritten Polygons, die nicht zu den beiden vorhergehenden gehören, usw.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir $F - 1$ Gleichungen der Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = k_1 \\ e_2 + 1 = k_2 \\ e_3 + 1 = k_3 \\ \dots \end{array} \right\} \quad (5)$$

Die Addition der Beziehungen (5) liefert

$$(e_1 + e_2 + e_3 + \dots) + F - 1 = (k_1 + k_2 + k_3 + \dots) \quad (5')$$

Nun stellen die Klammern in (5') aber die Anzahlen E bzw. K des ursprünglichen Polyeders dar. Wir sind also wieder zu der Relation (3) gekommen, und von dieser gelangen wir zum Eulerschen Polyedersatz.

Verallgemeinerungen des Eulerschen Polyedersatzes

1. Was ist die Eulersche Charakteristik eines Polyeders vom Geschlecht n , wenn n von Null verschieden ist?

Am Beispiel der Abb. 7 haben wir gesehen, dass dann $E - K + F$ nicht mehr 2, sondern 0 ist.

⁵Damit ist auch die früher aufgestellte Behauptung bewiesen, dass ein konvexes Polyeder ein Polyeder vom Geschlecht Null ist.

Um die Eulersche Charakteristik eines Polyeders vom Geschlecht n zu bestimmen, zeichnen wir auf seiner Oberfläche einen geschlossenen Streckenzug ein, der aus m Kanten des Polyeders besteht und die Oberfläche nicht in zwei getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt.

Längs dieses Schnittes wird die Polyederfläche durch Hinzufügen von zwei Flächen wieder geschlossen (falls der eingezeichnete geschlossene Streckenzug eben ist). Auf diese Art sind wir zu einem Polyeder vom Geschlecht $n - 1$ gelangt, in dem die Anzahl der Kanten und der Ecken um jeweils m , die Anzahl der Flächen jedoch um 2 größer ist als im Ausgangspolyeder.

Die Eulersche Charakteristik $E - K + F$ ist folglich um 2 gewachsen. Wenn der auf der Polyederoberfläche eingezeichnete geschlossene Streckenzug nicht eben, sondern windschief ist, werden nicht zwei ebene Flächen, sondern $2p$ Flächen hinzugefügt.

Hierbei ist p die Anzahl⁶ der Ebenen, in denen das Polygon liegt. In diesem Fall wird die Anzahl der Ecken um m größer, die Anzahl der Kanten um $m + 2(p - 1)$, die der Flächen um $2p$, so dass die Eulersche Charakteristik insgesamt um

$$m - [m + 2(p_1)] + 2p = 2$$

wächst, ebenso wie im vorhergehenden Fall.

Das oben beschriebene Verfahren wird wiederholt, d.h., es werden weitere geschlossene Streckenzüge eingezeichnet, die aus Kanten⁷ des Polyeders bestehen und weder die bereits eingezeichneten Streckenzüge schneiden noch das Polyeder in getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen.

Jedesmal wird die entstandene Oberfläche mit Hilfe von zwei (oder $2p$) Flächen wieder geschlossen. Während das Geschlecht des Polyeders jeweils um 1 abnimmt, wird die Eulersche Charakteristik jeweils um 2 größer.

Wenn das Geschlecht der Oberfläche die Zahl Null erreicht hat, ist demzufolge ihre Eulersche Charakteristik gleich 2 (nach Beziehung (2)), und diese ist die um $2n$ vergrößerte Eulersche Charakteristik des Ausgangspolyeders. Infolgedessen ist die Eulersche Charakteristik eines Polyeders vom Geschlecht n gleich $2 - 2n$:

$$E_K + F = 2 - 2n \tag{6}$$

womit wir zu einer ersten Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes gelangt sind.

Über die Beziehung (6) lässt sich das Geschlecht n eines Polyeders unmittelbar definieren; sie zeigt außerdem, dass diese topologische Eigenschaft der Polyeder nicht von der Wahl der Kanten zur Konstruktion der oben benutzten Streckenzüge abhängt.

Als geschlossener Streckenzug, der das Polyeder aus Abb. 7 nicht in zwei getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt, kann das Dreieck ABC genommen werden. Wie man leicht sieht, ist das Geschlecht dieses Polyeders tatsächlich gleich 1. Man verifiziert das etwa auf diesem Wege oder mit Hilfe der Beziehung (6).

2. Eine andere Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes ist von Poincaré für N -dimensionale Räume angegeben worden.

⁶Die Zahl p genügt der Beziehung $1 \leq p \leq m - 2$; sie kann bestimmt werden, indem man alle Diagonalen des Polygons zu einer seiner Ecken zieht und die verschiedenen Ebenen betrachtet, in denen die Dreiecke liegen, in welche das Polygon zerfällt.

⁷Wie man zeigen kann, lassen sich die in der Definition des Geschlechts eines Polyeders vorkommenden Streckenzüge allein aus dessen Kanten zusammensetzen.

Im eindimensionalen Raum ist die Strecke diejenige geometrische Figur, welche dem Polyeder im dreidimensionalen Raum entspricht; im zweidimensionalen Raum entspricht ihm das Polygon; im N -dimensionalen Raum (das ist ein abstrakter Raum, in dem jeder Punkt N linear unabhängige Koordinaten besitzt) heißt die entsprechende geometrische Figur Polytop (eine Bezeichnung, welche Strecke, Polygon und Polyeder als Spezialfälle umfasst).

Mit n_0 bezeichnen wir die Anzahl der Ecken⁸ eines Polytops, mit n_1 die Anzahl seiner Kanten⁹, mit n_2 die Anzahl seiner Flächen¹⁰, mit n_3 die Anzahl seiner dreidimensionalen Elemente, usw.

Im eindimensionalen Raum ist die Eulersche Charakteristik

$$n_0 = 2$$

(die Anzahl der Endpunkte einer Strecke).

Im zweidimensionalen Raum ist die Eulersche Charakteristik

$$n_0 - n_1 = 0$$

(die Eckenzahl und die Seitenzahl eines Polygons sind gleich).

Im dreidimensionalen Raum ist, wie wir wissen, die Eulersche Charakteristik eines konvexen Polyeders (oder allgemeiner, eines Polyeders vom Geschlecht Null)

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

Im N -dimensionalen Raum lautet die Formel von Euler-Poincaré¹¹ für konvexe Polytope

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \dots + (-1)^{N-1} n_{N-1} = 1 + (-1)^{N-1} \quad (7)$$

mit anderen Worten: Die Eulersche Charakteristik eines konvexen Polytops ist in Räumen gerader Dimension gleich Null, in Räumen ungerader Dimension gleich 2.

3. In der algebraischen Topologie ist die Beziehung (7) wesentlich verallgemeinert worden. Wir verweisen den interessierten Leser für ein weiteres Studium der diesbezüglichen Probleme auf folgende Werke:

P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, Springer, Berlin 1935;

S. Lefschetz, Algebraic Topology, American Mathematical Society, New York 1942;

C. Kuratowski, Topologie, Vol. I, 4. ed., PWN, Warschau 1958.

Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz

1. In jedem Polyeder vom Geschlecht Null gelten die Beziehungen

$$K + 6 \leq 3F \leq 2K \quad , \quad K + 6 \leq 3E \leq 2K \quad (8,9)$$

Ersetzen wir F in der Ungleichung $3F \leq 2K$ (die in jedem Polyeder erfüllt ist, vgl. Aufgabe 2) durch den aus (2) abgeleiteten Ausdruck, so ergibt sich

$$3(K - E + 2) \leq 2K$$

⁸Der Index 0 besagt, dass eine Ecke die Dimension Null hat.

⁹Der Index 1 besagt, dass eine Kante als Strecke auf einer Geraden (Hypergeraden) die Dimension Eins hat.

¹⁰Der Index 2 besagt, dass eine Fläche als eine in einer Ebene (Hyperebene) gelegene Figur die Dimension 2 hat.

¹¹Diese Formel soll hier nicht bewiesen werden.

Dafür können wir auch schreiben:

$$K + 6 \leq 3E \tag{9'}$$

Nun ersetzen wir E in der Ungleichung $3E \leq 2K$ (die ebenfalls für alle Polyeder gilt, vgl. Aufgabe 2) durch den aus (2) abgeleiteten Ausdruck und erhalten

$$3(K - F + 2) \leq 2K$$

Das schreiben wir nun als

$$K + 6 \leq 3F \tag{8'}$$

Damit sind die Ungleichungen (8) und (9) vollständig bewiesen.

2. Die Summe aus der Anzahl der Dreiecksflächen und der Anzahl der Trienderecken beträgt in einem Polyeder vom Geschlecht Null mindestens 8.

Zuerst multiplizieren wir die Beziehung (2) mit 2. Dann ersetzen wir F und E durch die aus (1''') und (1'') abgeleiteten Ausdrücke und schließlich noch $2K$ durch (1'). Es ergibt sich

$$2(F_3 + F_4 + \dots) + 2(E_3 + E_4 + \dots) - (3F_3 + 4F_4 + \dots) = 4$$

bzw.

$$2(E_3 + E_4 + \dots) - (F_3 + 2F_4 + \dots) = 4 \tag{10}$$

Nun wiederholen wir die einzelnen Beweisschritte; wir ersetzen F und E wie oben, setzen jetzt allerdings für $2K$ den aus (1'') erhaltenen Ausdruck ein. Damit kommen wir zu der Beziehung

$$2(F_3 + F_4 + \dots) - (E_3 + 2E_4 + \dots) = 4 \tag{11}$$

Addieren wir die Gleichungen (10) und (11), so folgt

$$E_3 - E_5 - 2E_6 - \dots + F_3 - F_5 - 2F_6 - \dots = 8$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$E_3 + F_3 = 8 + E_5 + F_5 + 2(E_6 + F_6) + \dots \tag{12}$$

Bemerkung. Aus der obenstehenden Gleichung folgt außerdem:

Besitzt in einem Polyeder vom Geschlecht Null keine Fläche mehr als vier Seiten und keine Polyederecke mehr als vier Kanten, dann ist $E_3 + F_3 = 8$.

Das ist beispielsweise beim Tetraeder (Abb. 2) der Fall. Auch bei der vierseitigen Pyramide ist $E_3 + F_3 = 8$; denn hier ist $E_3 = F_3 = 4$. Ferner gilt diese Gleichung beim Pentaeder (Abb. 4) mit $E_3 = 6, F_3 = 2$, bei der dreiseitigen Doppelpyramide mit $E_3 = 2, F_3 = 6$, beim Hexaeder (Abb. 5) mit $E_3 = 8, F_3 = 0$ und beim Oktaeder (Abb. 6) mit $E_3 = 0, F_3 = 8$. Jedes der genannten Polyeder kann noch durch ein anderes aus der Klasse der zu ihm isomorphen Polyeder ersetzt werden.

3. In einem Polyeder vom Geschlecht Null gibt es
 mindestens vier Dreiecksflächen, wenn es keine Vierecks- und Fünfecksflächen besitzt;
 mindestens sechs Vierecksflächen, wenn es keine Dreiecks- und Fünfecksflächen besitzt ;
 mindestens 12 Fünfecksflächen, wenn es keine Dreiecks- und Vierecksflächen besitzt.

Zum Beweis multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (11) mit 2 und addieren das Ergebnis zur Gleichung (10). Nach dem Zusammenfassen gleicher Ausdrücke erhalten wir

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - 2F_8 - \dots = 12 + 2(E_4 + 2E_5 + 3E_6 + \dots)$$

Aus dieser Gleichung folgen die oben aufgestellten Behauptungen.

Wenn $F_4 = F_5 = 0$ ist, dann ist $3F_3 - F_7 - \dots \geq 12$, also $F_3 \geq 4$.

Wenn $F_3 = F_5 = 0$ ist, dann ist $2F_4 - F_7 - \dots \geq 12$, also $F_4 \geq 6$.

Wenn $F_3 = F_4 = 0$ ist, dann ist $F_5 - F_7 - \dots \geq 12$, also $F_5 \geq 12$.

4. In einem Polyeder vom Geschlecht Null gibt es
 mindestens vier Trienderecken, wenn es keine Tetraeder- und Pentaederecken besitzt;
 mindestens sechs Tetraederecken, wenn es keine Trierer- und Pentaederecken besitzt;
 mindestens 12 Pentaederecken, wenn es keine Trierer- und Tetraederecken besitzt.

Analog zum Beweis von Folgerung 3 multipliziere man beide Seiten der Relation (10) mit 2 und addiere das Ergebnis zur Beziehung (11). Nach dem Zusammenfassen entsprechender Ausdrücke ergibt sich

$$3E_3 + 2E_4 + E_5 - E_7 - 2E_8 - \dots = 12 + 2(F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \dots)$$

Setzt man nun nacheinander $E_4 = E_5 = 0$, $E_3 = E_5 = 0$, $E_3 = E_4 = 0$, so erhält man die oben angegebenen Resultate. .

Bemerkung zur Dualität einiger für Polyeder (insbesondere Polyeder vom Geschlecht Null) abgeleiteten Beziehungen und Eigenschaften.

Den oben aufgestellten Beziehungen zwischen der Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten einiger Klassen von Polyedern ist zu entnehmen, dass E und F (oder nur E_3 und F_4 , E_4 und F_4 usw.) symmetrisch auftreten. Vertauscht man sie in einer dieser Beziehungen miteinander, so bleibt diese ungeändert, während im Falle eines Paares von Beziehungen diese ineinander übergehen.

Diese Aussage trifft für die Beziehungen (2) bzw. (12), für die Paare von Beziehungen (8) - (9), (10) - (11) und für die in den Folgerungen 3, 4 abgeleiteten Eigenschaften zu.

Dieselbe Gesetzmäßigkeit tritt uns in dem Paar von Ungleichungen aus Aufgabe 2 entgegen, in den beiden Paaren von Ungleichungen aus Aufgabe 3, in den Paaren von Aussagen aus den Aufgaben 4, 5, 7.

Des weiteren finden sich solche Beziehungen zwischen Polyedern im folgenden auch bei der Betrachtung der dualen regulären Polyeder sowie bei der Untersuchung der in den Ecken bzw. in den Flächen halbrekulären Polyeder.

5. In einem Polyeder vom Geschlecht Null beträgt die Summe der Winkel aller Flächen das Doppelte der Summe der Innenwinkel eines konvexen Polygons mit derselben Eckenzahl.

Die Winkelsumme S der Polyederflächen ist

$$\begin{aligned} S &= 180^\circ \cdot F_3 + 360^\circ \cdot F_4 + 540^\circ \cdot F_5 + \dots = 180^\circ(F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \dots) \\ &= 180^\circ(3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots) - 360^\circ(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) \end{aligned}$$

Formen wir mit Hilfe der Beziehungen (1') und (1'') diese Summe um, so ergibt sich

$$S = 180^\circ \cdot 2K - 360^\circ \cdot F = 360^\circ(K - F)$$

Berücksichtigen wir den Eulerschen Polyedersatz, so erhalten wir

$$S = 2 \cdot 180^\circ(E - 2)$$

was zu beweisen war.

6. Eine weitere Folgerung aus dem Eulerschen Polyedersatz bezieht sich auf topologisch reguläre Polyeder. Für diese Polyeder wollen wir jetzt eine wichtige Eigenschaft herleiten.

Definition. Ein Polyeder vom Geschlecht Null heißt topologisch regulär, wenn seine Flächen Polygone mit derselben Seitenzahl l sind, während die Polyederecken alle die Kantenzahl m besitzen.

Beispiele. Parallelepipede, dreiseitige Pyramiden, vierseitige Doppelpyramiden.

Satz 5. Es gibt nur fünf topologisch reguläre Polyeder, die zueinander nicht isomorph sind.

Für die topologisch regulären Polyeder gehen die Beziehungen (1') und (1'') über in

$$2K = lF = mE$$

Folglich ist $F = \frac{2}{l}K$, $E = \frac{2}{m}K$. Damit erhalten wir aus der Beziehung (2)

$$\frac{2}{l}K + \frac{2}{m}K - K = 2$$

Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch $2K$, so folgt

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K} \quad (13)$$

Wie die Beziehung (13) zeigt, können l und m nicht gleichzeitig größer als 3 sein¹², denn aus $l \geq 4$ und $m \geq 4$ folgt $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2}$, was der Beziehung (13) widerspricht.

Für $l = 3$ führt die Beziehung (13) auf $\frac{1}{m} = \frac{1}{6} + \frac{1}{K}$, also $m < 6$.¹³ Folglich ergibt sich für $l = 3$ und

$m = 3$: es ist $K = 6$, $F = 4$, $E = 4$ (ein zum Tetraeder isomorphes Polyeder);

$m = 4$: es ist $K = 12$, $F = 8$, $E = 6$ (ein zum Oktaeder (Abb. 6) isomorphes Polyeder);

$m = 5$: es ist $K = 30$, $F = 20$, $E = 12$ (ein zum Ikosaeder - einem Polyeder mit 20 Dreiecksflächen - isomorphes Polyeder).

Für $m = 3$ führt die Beziehung (13) auf $\frac{1}{l} = \frac{1}{6} + \frac{1}{K}$, also $l < 6$.¹⁴ Folglich ergibt sich für $m = 3$ und

$l = 3$ ebenfalls ein zum Tetraeder isomorphes Polyeder;

$l = 4$: es ist $K = 12$, $F = 6$, $E = 8$ (ein zu einem Hexaeder (Abb. 5) oder zu einem Würfel isomorphes Polyeder);

$l = 5$: es ist $K = 30$, $F = 12$, $E = 20$ (ein zum Dodekaeder - einem Polyeder mit 12 Fünfecksflächen - isomorphes Polyeder).

Die fünf untereinander nicht isomorphen topologisch regulären Polyeder sind demzufolge: das Tetraeder mit vier Dreiecksflächen; das Hexaeder mit sechs Vierecksflächen; das Oktaeder mit acht Dreiecksflächen; das Ikosaeder mit zwanzig Dreiecksflächen; das Dodekaeder mit zwölf Fünfecksflächen.

¹²Zu diesem Resultat gelangt man auch in Aufgabe 4.

¹³Zu demselben Ergebnis gelangt man im zweiten Teil von Aufgabe 5.

¹⁴Der erste Teil von Aufgabe 5 führt auf dasselbe Ergebnis.

3 Reguläre Polyeder

Definitionen. Als reguläre Polyederecke wird eine konvexe Polyederecke mit gleichen ebenen Winkeln und gleichen Flächenwinkeln bezeichnet.

Als reguläres (oder metrisch reguläres) Polyeder wird ein Polyeder mit gleichen regulären Flächen und gleichen regulären Polyederecken bezeichnet.¹⁵

Satz 6 . Es gibt nur fünf konvexe reguläre Polyeder, die zueinander nicht isomorph sind.

E ... Anzahl der Ecken, m ... Anzahl der in jeder Ecke zusammenlaufenden Kanten, K ... Anzahl der Kanten, F ... Anzahl der Flächen, l ... Anzahl der Seiten jeder Fläche

Klasse	E	m	K	F	l	Bezeichnung
1	4	3	6	4	3	Reguläres Tetraeder
2	8	3	12	6	4	Würfel
3	6	4	12	8	3	Reguläres Oktaeder
4	20	3	30	12	5	Reguläres Dodekaeder
5	12	5	30	20	3	Reguläres Ikosaeder

Da die konvexen Polyeder vom Geschlecht Null sind, folgt, dass die konvexen regulären Polyeder zugleich topologisch regulär sind. Daher kann Satz 5 angewendet werden.

Es gibt somit fünf Klassen¹⁶ (oder Typen) von konvexen regulären Polyedern, die durch die in der nebenstehenden Tabelle angegebenen Daten charakterisiert werden.

Bemerkungen

1. Zur Vervollständigung des Beweises muss noch gezeigt werden, dass diese fünf Typen von (metrisch oder topologisch) regulären Polyedern existieren. Dazu geben wir im Raum ein Konstruktionsverfahren an (was etwas später geschieht).

Ferner ist zu zeigen, dass jeder Klasse aus der nebenstehenden Tabelle nur ein einziges reguläres Polyeder entspricht. Mit anderen Worten, wir müssen nachweisen, dass alle zu einer Klasse gehörenden regulären Polyeder einander ähnlich sind. Letzteres beweisen wir jetzt.

Bekanntlich (siehe dazu [9]) sind zwei isomorphe Polyeder ähnlich, wenn sie ähnliche Flächen haben oder wenn diese im selben Ähnlichkeitsverhältnis stehen und wenn die Polyederecken gleich sind.

Berücksichtigt man nun die (in der nebenstehenden Tabelle angegebenen) charakteristischen Elemente der regulären Polyeder, so folgt aus der Ähnlichkeit der regulären Polyeder mit derselben Anzahl von Seiten und denselben Flächenwinkeln (zu deren Berechnung vgl. Aufgabe 13), dass der zitierte Satz angewendet werden kann.

2. Im Jahre 1880 hat W. Stringham zum ersten Male reguläre Polyeder (reguläre Polytope) im vierdimensionalen Raum untersucht. Er hat gezeigt, dass nur sechs ähnliche Körper existieren. Sie sind, außer von Punkten (Anzahl n_0), Kanten (Anzahl n_1), zweidimensionalen Flächen (Anzahl n_2), auch von dreidimensionalen Hyperflächen (Anzahl n_3) begrenzt, welche reguläre Polyeder sind. In der folgenden Tabelle sind ihre charakteristischen Daten zusammengestellt:

¹⁵Es lassen sich auch Definitionen mit weniger einschränkenden Bedingungen angeben. Aus diesen können dann einige der in der obenstehenden Definition enthaltenen Bedingungen hergeleitet werden. So definiert man beispielsweise: Unter einem regulären Polyeder versteht man ein Polyeder mit regulären Flächen von gleicher Seitenzahl und mit gleichen Flächenwinkeln.

¹⁶Zu einer Klasse gehören alle Polyeder, deren Flächen die gleiche Anzahl l von Seiten und deren Polyederecken die gleiche Anzahl m von Kanten besitzen.

Nr.	Polytop	n_0	n_1	n_2	n_3	Hyperflächen	Dualität
1	von 5 Polyedern begrenzt	5	10	10	5	Tetraeder	selbstdual
2	von 8 Polyedern begrenzt	16	32	24	8	Würfel	dual zu Nr.3
3	von 16 Polyedern begrenzt	8	24	32	16	Tetraeder	dual zu Nr. 2
4	von 24 Polyedern begrenzt	24	96	96	24	Oktaeder	selbstdual
5	von 120 Polyedern begrenzt	600	1200	720	120	Dodekaeder	dual zu Nr. 6
6	von 600 Polyedern begrenzt	120	720	1200	600	Tetraeder	dual zu Nr. 5

Die Beziehung (7) ist erfüllt; denn für alle diese Polytope ist

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 0$$

Man kann diese Polytope in den dreidimensionalen Raum projizieren. Die Bilder der ersten drei Polytope bei einer derartigen Projektion sind in Abb. 76 angegeben.

Dabei liegt das Projektionszentrum im Mittelpunkt eines der begrenzenden Polyeder und das betreffende Polyeder erscheint nicht deformiert. Die anderen Hyperflächen sind deformiert, bleiben jedoch isomorphe Polyeder.

Abb. 224 in der Arbeit [17] stellt die Projektion des von 120 Dodekaedern begrenzten Polytops (oben Nr. 5) in den dreidimensionalen Raum dar.

Im vierdimensionalen Raum sind Punkte und dreidimensionale Hyperflächen, Kanten und zweidimensionale Flächen zueinander dual.

Nach diesem Hinweis bestätigt man leicht die Dualitäten zwischen den Polytopen, Wie sie in der letzten Spalte der nebenstehenden Tabelle angegeben sind.

3. In Räumen mit mehr als vier Dimensionen sind die Verhältnisse übersichtlicher: Es gibt nur drei reguläre Polytope, die dem regulären Tetraeder, dem Würfel und dem regulären Oktaeder aus dem dreidimensionalen Raum entsprechen bzw. den ersten drei regulären Polytopen aus dem vierdimensionalen Raum.

Ihre charakteristischen Daten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Nr.	n-dimensionales Polytop	Anzahl der Ecken	Dualität
1	begrenzt von $n + 1$ Polytopen der Dimension $n - 1$, mit je n Hyperflächen der Dimension $n - 2$	$n + 1$	selbstdual
2	begrenzt von $2n$ Polytopen der Dimension $n - 1$, mit je $2n - 2$ Hyperflächen der Dimension $n - 2$	2^n	dual zu Nr. 3
3	begrenzt von 2^n Polytopen der Dimension $n - 1$, mit je n Hyperflächen der Dimension $n - 2$	$2n$	dual zu Nr. 2

Die Konstruktion der konvexen regulären Polyeder setzt die Kenntnis der grundlegenden geometrischen Konstruktionen in der Ebene und im Raum voraus (insbesondere α) die Errichtung einer Senkrechten in einem gegebenen Punkt auf einer Ebene, also die Konstruktion einer Trieredreiecke mit drei rechten Winkeln; β) die Konstruktion einer Ebene durch einen gegebenen Punkt parallel zu einer gegebenen Ebene; γ) die Konstruktion einer durch drei Punkte definierten Ebene; δ) die Konstruktion einer Geraden, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist und durch einen gegebenen Punkt geht).

a) Die geometrische Konstruktion des regulären Tetraeders mit gegebener Kante a .

Der Fußpunkt der Höhe AO des regulären Tetraeders (Abb. 9) ist der Mittelpunkt der Grundfläche BCD .

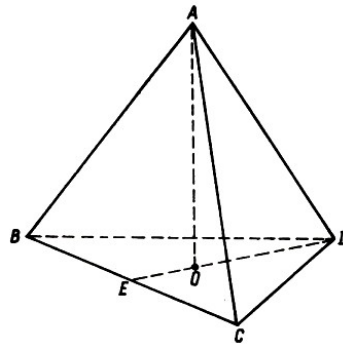


Abb. 9: Geometrische Konstruktion des regulären Tetraeders

Daher ist OD der Radius des der Grundfläche umschriebenen Kreises. Somit ist¹⁷ $OD = \frac{a}{\sqrt{3}}$; unmittelbar ergibt sich

$$AO^2 = AD^2 - OD^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \quad \text{und} \quad AO = a\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (14)$$

Also verläuft die gesuchte Konstruktion folgendermaßen:

Im Mittelpunkt O eines gleichseitigen Dreiecks BCD mit der Seite a wird eine zur Ebene dieses Dreiecks Senkrechte OA der Länge $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ errichtet. Die Punkte A, B, C, D sind die Ecken des regulären Tetraeders mit der Kante a .

b) Die geometrische Konstruktion des Würfels mit gegebener Kante a .

In der Ecke A eines Quadrates $ABCD$ (Abb. 10) mit der Seite a wird die Senkrechte AA' der Länge a errichtet. Durch A' wird eine zur Ebene des Quadrates $ABCD$ parallele Ebene Q gelegt.

Nun zieht man durch die Punkte B, C, D Parallelen zu AA' , welche die Ebene Q in B', C', D' schneiden. Der gesuchte Würfel ist das Hexaeder $ABCDA'B'C'D'$. Es ist leicht zu zeigen, dass die Bedingungen der zweiten Klasse konvexer regulärer Polyeder erfüllt sind.

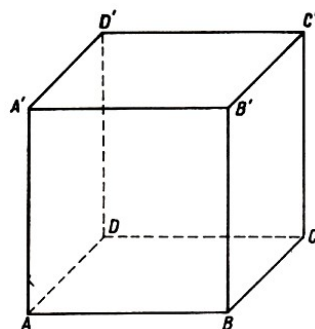


Abb. 10: Geometrische Konstruktion des Würfels

¹⁷Im Original werden Strecken als geometrische Objekte durch ihre Endpunkte, ihre Längen (als Maßzahlen) durch den Querstrich darüber bezeichnet. Für Strecken und ihre Maßzahlen werde auch kleine lateinische Buchstaben verwendet. Bei Winkeln wird nicht zwischen dem geometrischen Objekt und seinen Maßzahlen unterschieden, da keine Missverständnisse zu befürchten sind. In dieser Abschrift werden die Längen von Strecken nicht besonders gekennzeichnet.

c) Die geometrische Konstruktion des regulären Oktaeders mit gegebener Kante a .

In Abb. 6 wird angenommen, die gesuchte Konstruktion sei ausgeführt. $ABCD$ ist ein Quadrat, die Flächen mit den Eckpunkten E und E' sind gleichseitige Dreiecke. In dem rechtwinkligen Dreieck EIF ist

$$IF = \frac{a}{2}, \quad EF = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{also} \quad EI = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad (15)$$

Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Im Mittelpunkt I eines Quadrates $ABCD$ mit der Seite a wird eine zur Ebene des Quadrates senkrechte Gerade errichtet.

Zu beiden Seiten des Punktes I trägt man auf dieser Senkrechten die Strecken $IE = IE' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ab. Die Doppelpyramide mit den Spitzen E, E' und der gemeinsamen Grundfläche $ABCD$ ist das gesuchte Oktaeder. Die von E und E' ausgehenden Kanten haben nämlich sämtlich die Länge a , da das rechtwinklige Dreieck AEI Katheten der Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ besitzt.

d) Die geometrische Konstruktion des regulären Dodekaeders mit gegebener Kante a

Man geht bei dieser Konstruktion von drei regulären Fünfecken mit der Seite a aus. Die Fläche des ersten, $ABCDE$, wird mit den beiden anderen so zusammengesetzt, dass diese mit dem ersten Fünfeck und untereinander jeweils eine Seite gemeinsam haben: $ABHGF$ und $BCJIH$ (Abb. 11).

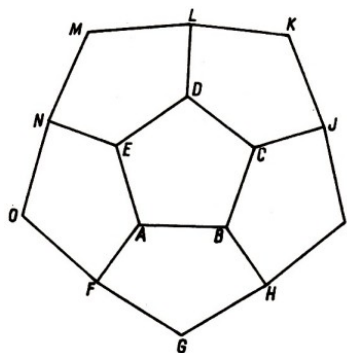


Abb. 11: Projektion eines regulären Halbdodekaeders auf die Ebene $ABCDE$

Es lässt sich zeigen¹⁸, dass dabei zwei kongruente Trienderecken entstehen, eine mit der Ecke A (und den Kanten AE, AF, AB) und eine mit der Ecke B (und den Kanten BA, BH, BC). Betrachtet man drei weitere reguläre Fünfecke mit der Seite a und setzt die oben begonnene Konstruktion fort, so ergeben sich weitere drei Trienderecken (in C, D und E), die den Trienderecken in A und B kongruent sind.

Dabei ist eine Hälfte des Dodekaeders konstruiert: eine aus sechs kongruenten regulären Fünfecken bestehende offene Polyederfläche, die von einem windschiefen Zehneck $FGHIJKLMNO$ begrenzt wird. Man kann zeigen, dass die Winkel in diesem Zehneck einander gleich sind.

Danach wird analog zur ersten eine zweite Polyederfläche konstruiert. Zusammengesetzt werden die beiden Polyederhälften, wenn die Basisfünfecke $ABCDE$ und $PQRST$ (Abb. 12) in parallelen Ebenen liegen und eine gegen das andere bezüglich einer durch die Mittelpunkte der Basisfünfecke gehenden Achse um 36° verdreht ist.

Man zeigt ohne Mühe¹⁹, dass auch die Trienderecken in $F, G, H, J, K, L, M, N, O$ in dem

¹⁸Mit Hilfe von Kriterien für die Kongruenz von Trienderecken (Vgl. [9])

¹⁹Mit Hilfe von Kriterien für die Kongruenz von Trienderecken (vgl. [9]).

erhaltenen Dodekaeder einander kongruent sind und dass diese beispielsweise der Triederecke in A kongruent sind.

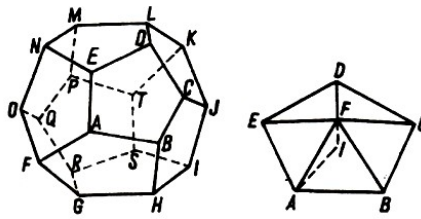


Abb. 12. Reguläres Pentagondodekaeder, Abb. 13. Zur Konstruktion des regulären Ikosaeders

e) Die geometrische Konstruktion des regulären Ikosaeders mit gegebener Kante a .

Man geht aus von einem regulären Fünfeck $ABCDE$ mit der Seite a (Abb. 13). Im Mittelpunkt I wird eine auf der Ebene des Fünfecks senkrecht stehende Gerade IF errichtet. Nun wird in der Ebene AIF die Strecke $AF = a$ konstruiert.

Aus der Relation, welche die Länge der Seite a mit dem Radius R des dem Fünfeck umschriebenen Kreises verknüpft, d.h. aus

$$a = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad (16)$$

ergibt sich

$$IA = R = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad (17)$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als a . Daher ist die Konstruktion der Strecke AF möglich. Sämtliche Kanten der fünfseitigen Pyramide $FABCDE$ sind gleich a , und die Triederecken in A, B, C, D, E sind einander kongruent.

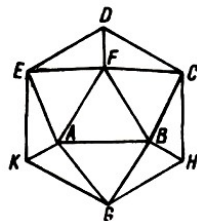


Abb. 14. Projektion eines Halbikosaeders auf die Ebene ABF

Jetzt werden noch zwei zur vorigen Pyramide kongruente fünfseitige Pyramiden hinzugenommen. Alle drei Pyramiden werden so zusammengesetzt, wie es Abb. 14 zeigt, d.h. die Spitze der zweiten Pyramide in A und das Basisfünfeck in $BFEKG$, die Spitze der dritten Pyramide in B , das Basisfünfeck in $CFAGH$.

Insgesamt erhält man so eine aus zehn kongruenten gleichseitigen Dreiecken bestehende und von dem windschiefen Sechseck $CDEKGH$ begrenzte Polyederfläche. Es zeigt sich, dass die Winkel in diesem Sechseck untereinander gleich sind.

Nun wird eine zweite, zur vorigen kongruente Polyederfläche konstruiert. Fügt man beide zusammen, so entsteht ein Polyeder. Dabei werden die begrenzenden Sechsecke in parallele Ebenen gelegt, jedoch bezüglich der ihre Mittelpunkte verbindenden Achse um 30° gegeneinander verdreht, so dass beispielsweise in C eine Triederecke der zweiten Polyederhälfte liegt, in D dagegen eine Tetraederecke derselben.

Danach wird gezeigt, dass das so entstandene Ikosaeder regulär ist (Abb. 15). Es hat in C ,

D, E, K, G, H einander kongruente Pentaederecke, die sämtlich der Pentaederecke in F kongruent sind.

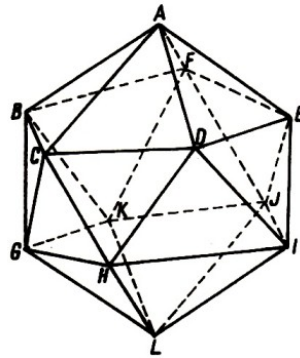


Abb. 15. Reguläres Ikosaeder

Bemerkung. Modelle konvexer regulärer Polyeder lassen sich am praktischsten mit Hilfe ihrer ebenen Netze anfertigen. Für jedes derartige Polyeder geben wir zusätzlich an, wo Klebefalze angebracht werden müssen.

Diese Verbindungsstücke der im ebenen Netz getrennt liegenden Flächen müssen jeweils auf die Flächen geklebt werden, welche durch den gleichen, jedoch mit einem Strich versehenen kleinen Buchstaben gekennzeichnet sind.²⁰

a) Anfertigung eines regulären Tetraeders mit der Kante a .

Das ebene Netz des regulären Tetraeders (Abb. 16) ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $2a$. Nachdem das ebene Netz längs der inneren Strecken aufgebogen worden ist, werden die Falze a, b, c mit den am Rande mit a', b' bzw. c' bezeichneten Flächen verklebt ("verheftet").

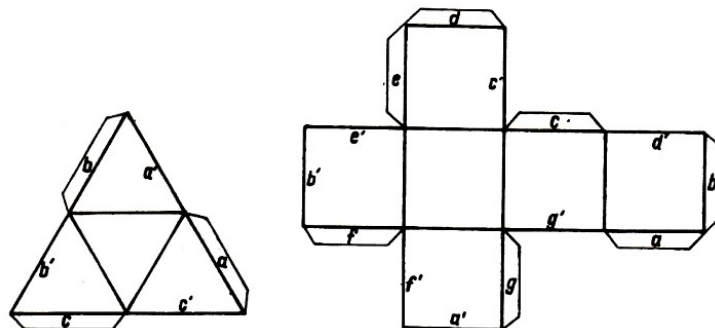


Abb. 16. Ebenes Netz des regulären Tetraeders, Abb. 17. Ebenes Netz des Würfels

b) Anfertigung eines Würfels mit der Kante a .

Das ebene Netz hat z.B. die Gestalt der Abb. 17. Es ergibt sich beim Aneinanderfügen von sechs Quadraten der Seitenlänge a . Nachdem das ebene Netz längs der inneren Seiten der Quadrate und Falze aufgebogen werden ist, werden die Falze a bis g jeweils auf die am Rande mit a' bis g' bezeichneten Flächen geklebt.

c) Anfertigung eines regulären Oktaeders mit der Kante a .

Als ebene Netz des Oktaeders möge z.B. das in Abb. 18 dienen. Es ergibt sich beim Zusammenlegen von acht gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge a . Das ebene Netz wird längs der inneren Seiten der Dreiecke und Falze aufgebogen. Die Falze a bis e werden mit den Flächen verklebt, die am Rande durch a' bis e' gekennzeichnet sind.

²⁰Der Leser, der sich die verschiedenen regulären und halbrekulären Polyeder selbst basteln will, sollte deren Netze, einschließlich der Klebefalze, im gewünschten Maßstab konstruieren. Es empfiehlt sich dabei, auf einfachem Material (z.B. Papier) zu üben, während die endgültige Konstruktion dann mit Zeichenkarton, Pappe, Plexiglas u.ä. ausgeführt wird.

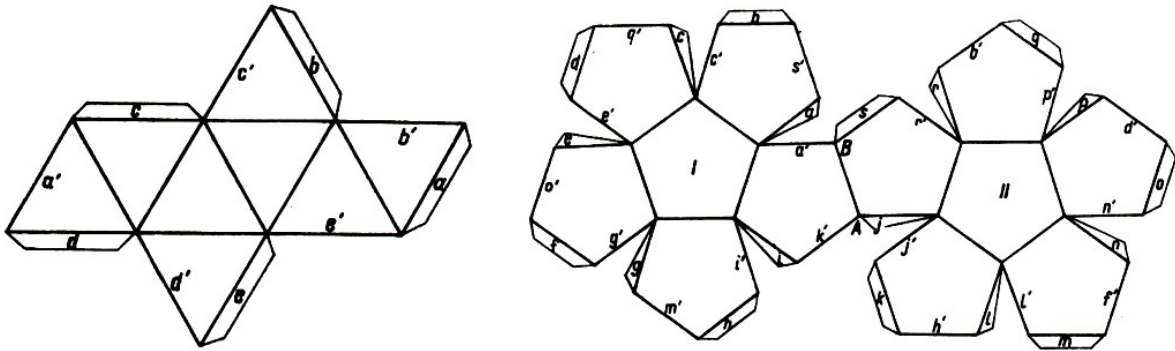


Abb. 18. Ebenes Netz eines regulären Oktaeders, Abb. 19. Ebenes Netz eines regulären Pentagondodekaeders

d) Anfertigung eines regulären Dodekaeders mit der Kante a .

Um zum ebenen Netz dieses Polyeders zu gelangen, gehen wir von zwei regulären Fünfecken aus (I und II in Abb. 19). Auf deren Seiten konstruieren wir jeweils fünf reguläre Fünfecke, von denen zwei (die von verschiedenen Basisfünfecken stammen) eine Seite gemeinsam haben (AB in Abb. 19). Das ebene Netz wird längs der inneren Seiten der Fünfecke und Falze aufgebogen. Die Falze a bis s werden mit den Flächen verklebt, deren Ränder mit a' bis s' bezeichnet sind.

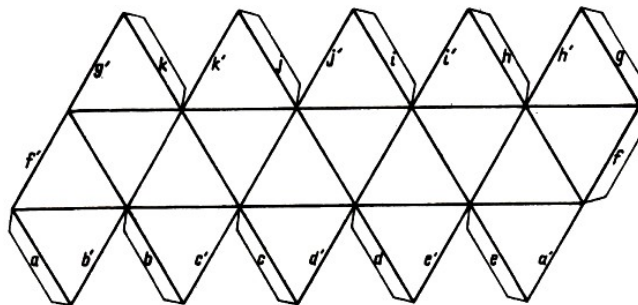


Abb. 20. Ebenes Netz eines regulären Ikosaeders

e) Anfertigung eines regulären Ikosaeders mit der Kante a .

Als ebenes Netz kann das in Abb. 20 dargestellte genommen werden. An die zu einem Parallelogramm mit den Seitenlängen $5a$ und a zusammengesetzten zehn kongruenten gleichseitigen Dreiecke werden oben und unten je fünf gleichseitige Dreiecke angehängt.

Das ebene Netz wird längs der inneren Seiten der gleichseitigen Dreiecke und Falze aufgebogen. Die Falze a bis k werden mit den Flächen verklebt, deren Ränder durch a' bis k' gekennzeichnet sind.

Bemerkungen

1. Sieht man sich die Tabelle mit den charakteristischen Daten der konvexen regulären Polyeder, wie sie durch Satz 6 gegeben sind, an, so bemerkt man, dass zwischen dem regulären Oktaeder und dem Würfel folgende Beziehung besteht:

Jeder Fläche des einen entspricht eine Ecke des anderen und jeder Seite einer Fläche des einen die Kante einer Polyederecke des anderen. (Die Anzahl der Kanten ist bei beiden Polyedern gleich.)

Eine analoge Zuordnung besteht zwischen dem Ikosaeder und dem regulären Dodekaeder, während sich das Tetraeder selbst entspricht.

Diese Art der Wechselbeziehung²¹ wird Dualität genannt. Die betreffenden Polyeder heißen zueinander dual.

²¹Man kann zeigen: Wenn ein reguläres Polyeder einer Sphäre einbeschrieben (was stets möglich ist, vgl.

Eine übersichtliche Darstellung dieser Dualität geben die Aufgaben 10 und 11. Der Leser möge Zeichnungen bzw. Modelle anfertigen, um die Paare von dualen Polyedern tatsächlich herzustellen (vgl. [20], Kap. VIII).

2. In dem Büchlein [1] wird eine leicht zugängliche Einführung in die Gruppentheorie gegeben; unter den zahlreichen Beispielen finden sich auch reguläre Polyeder. In dieser Hinsicht ist auch die Arbeit [13] zu empfehlen.

3. Die Drehgruppen der konvexen regulären Polyeder und ihre Symmetrieelemente sind in [17], S. 124-129, dargestellt. Die Gruppen aller Symmetrien dieser Polyeder finden sich auf den Seiten 156-158, zusammen mit Beispielen von Körpern, die diese Symmetriegruppen besitzen.

Aufgabe 14) und jede seiner Flächen durch ihren Pol in bezug auf diese Sphäre ersetzt wird, so erhält man die Ecken des zu dem gegebenen Polyeder dualen Polyeders.

4 Reguläre Sternpolyeder

Bekanntlich gibt es in der Ebene konvexe reguläre Polygone und reguläre Sternpolygone (bzw. konkave reguläre Polygone). Die Seiten dieser Polygone schneiden einander, wobei sie ein konvexes reguläres Polygon mit derselben Eckenzahl bestimmen, das im Innern des Sternpolyeders liegt. Genau wie man konvexe reguläre Polyeder untersucht, kann man reguläre Sternpolyederecken und reguläre Sternpolyeder bestimmen.

Definitionen. Als reguläre Sternpolyederecke bezeichnen wir eine konkave Polyederecke, deren ebene Winkel sämtlich einander gleich sind, und welche gleiche spitze Flächenwinkel besitzt. (Die ebenfalls gleichen stumpfen Flächenwinkel werden für die Polyederecke nicht als charakteristisch angesehen.)

Ein Beispiel für eine reguläre Sternpolyederecke ist die Spitze einer Pyramide, deren Grundfläche ein Sternfünfeck ist.

Die Definition des regulären Sternpolyeders entspricht der des konvexen regulären Polyeders. Jedoch müssen die Begriffe Fläche, Kante und Ecke für das reguläre Sternpolyeder genauer gefasst werden.

Seine Flächen sind diejenigen ebenen Figuren, welche in minimaler Anzahl das Polyeder abschließen. Die Kanten sind die Seiten der Flächen, so dass jede Kante zu zwei Flächen gehört und die Kantenzahl gleich der halben Seitenzahl aller Flächen ist. Flächenwinkel werden nur in der Nähe dieser Kanten gebildet, bei anderen Schnitten von Seitenflächen nicht. Ecken sind diejenigen Punkte, in denen (drei oder mehr) Kanten zusammentreffen und Polyederecken bilden.

Bekanntlich schneiden sich für $n \geq 5$ die n Seiten eines konvexen regulären Polygons, wenn man sie verlängert, und es entstehen dabei reguläre Sternpolygone²² oder entsprechende reguläre Sternpseudopolygone²³.

In analoger Weise kann man auch bei den regulären Sternpolyedern vorgehen. So hat A. L. Cauchy Polyeder untersucht, wie sie sich bei der Verlängerung der Kanten und Flächen von konvexen regulären Polyedern ergeben.

Andererseits entstehen, wenn man die Ecken von regulären Sternpolygonen (bzw. Sternpseudopolygonen) durch gerade Linien verbindet, bekanntlich die entsprechenden regulären Polygone. In analoger Weise ist J. Bertrand bei der Herleitung der regulären Sternpolyeder vorgegangen. Weiter unten wird die Herleitung entsprechender Sätze skizziert.

Satz 7. Ist ein reguläres Sternpolyeder S gegeben, so existiert immer ein konvexes reguläres Polyeder C , das dieselben Ecken wie S hat.

Wir setzen die folgenden Aussagen als bewiesen voraus:

1. Jedes konvexe reguläre Polyeder bzw. jedes reguläre Sternpolyeder kann einer Kugel einbe-

²²Bei Fünfecken, Achtecken und Zehnecken entsteht ein reguläres Sternpolygon, bei Siebenecken entstehen zwei, bei Neunecken drei, bei Elfecken vier usw.

²³Darunter versteht man die Überlagerung von p (konkaven oder konvexen) regulären Polygonen mit $\frac{n}{p}$ Seiten, die gegeneinander um $\frac{360^\circ}{n}$ verdreht sind. Aus dem Achteck ergibt sich beispielsweise ein reguläres Sternpseudoachteck, das aus zwei gleichen Quadraten mit demselben Mittelpunkt besteht, von denen eines gegen das andere um 45° verdreht ist.

Aus dem Zwölfeck ergeben sich zwei reguläre Sternpseudozwölfecke: das eine besteht aus zwei Sechsecken, das andere aus drei Quadraten mit demselben Mittelpunkt, wobei das erste Quadrat gegen das zweite Quadrat um 30° gedreht ist, und das zweite gegen das dritte ebenfalls um 30° .

geschrieben werden.²⁴

2. Sind im Raum n Punkte gegeben, so lässt sich ein konvexes Polyeder bestimmen, das gewisse dieser Punkte zu Ecken hat und die eventuellen übrigen Punkte im Innern enthält.

Daher kann man, wenn sich S einbeschreiben lässt, ein konvexes Polyeder K finden, das als Ecken alle Ecken von S und nur diese besitzt.

Die beiden Polyeder S und K zusammen bilden eine Figur F_1 . Mit F_2 bezeichnen wir eine zu F_1 kongruente Figur. Da S ein reguläres Polyeder ist, fällt F_1 mit F_2 zusammen, wenn jede Ecke von F_2 auf eine Ecke von F_1 gelegt wird. Damit ist gezeigt, dass das Polyeder K kongruente Polyederecken besitzt.

Es folgt, dass die ebenen Winkel und die Flächenwinkel einer Polyederecke aus K gleich sind, wenn man bedenkt, dass die Übereinstimmung der Polyederecken in einer F_1 und F_2 gemeinsamen Ecke auf drei, vier oder fünf Arten realisiert werden kann, je nachdem, ob die Ecke drei, vier oder fünf Kanten hat.

Eine Polyederecke in einem regulären Polyeder vom Geschlecht Null kann nicht mehr Kanten besitzen (Vgl. Aufgabe 5).

Ferner zeigt sich, dass die Flächen des Polyeders K kongruente Polygone sind. Dabei ist zu beachten, dass aus dem Vorhergehenden bereits folgt, dass ihre Winkel übereinstimmen und dass das Zusammenfallen der Flächen auf drei, vier oder fünf Arten erreicht werden kann, je nachdem, ob die Fläche drei, vier oder fünf Seiten hat (eine Fläche eines regulären Polyeders kann aber nicht mehr Seiten besitzen). Folglich ist K , also auch C , ein konvexes reguläres Polyeder.

Satz 8. Es gibt nur vier reguläre Sternpolyeder, die zueinander nicht isomorph sind.

Unter Berücksichtigung von Satz 7 bildet man, ausgehend von einer Ecke eines konvexen regulären Polyeders, mit Hilfe anderer Ecken des Polyeders reguläre Polygone. Ein derartiges Polygon kann Fläche eines Sternpolyeders sein, das dieselben Ecken wie das konvexe Polyeder hat, von dem wir ausgegangen sind.

Damit die Konstruktion des Sternpolyeders ausführbar ist, ist notwendig, dass die so in der Umgebung einer Ecke gebildeten Polygone zu einer Polyederecke zusammengesetzt werden können.

Untersucht man für jedes konvexe reguläre Polyeder die verschiedenen möglichen Fälle im einzelnen, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

1. Aus dem regulären Tetraeder ergibt sich nichts.
2. Beim regulären Oktaeder entstehen in jeder Ecke zwei Quadrate, die sich nicht zu einer Polyederecke zusammenfügen lassen.
3. Beim Würfel erhält man in jeder Ecke drei gleichseitige Dreiecke, die auf ein Tetraeder führen - also kein Sternpolyeder.
4. Beim regulären Dodekaeder ergeben sich in jeder Ecke:
 - a) drei gleichseitige Dreiecke, wenn man die Ecke mit zwei anderen Ecken verbindet, die zu Flächen gehören, welche durch die betrachtete Ecke des Dodekaeders gehen. Diese Dreiecke (etwa LCE , LJT , LPN in Abb. 12) bilden keine Trierederecke, denn sie haben paarweise keine Kante gemeinsam.

²⁴Über die Möglichkeit, (konvexe) reguläre Polyeder einer Kugel einzubeschreiben, vgl. Aufgabe 14.

b) sechs gleichseitige Dreiecke, wenn man die Ecke mit zwei anderen Ecken verbindet, die zu Flächen gehören, welche zu denen aus a) benachbart sind (etwa LAI , LIQ , LQA und LSB , LBO , LOS in Abb. 12). Diese gleichseitigen Dreiecke bilden Trieredrecken, die jeweils zu einem Tetraeder gehören (im angeführten Beispiel mit der Grundfläche AIQ bzw. SBO ; Abb. 12).

c) drei konvexe reguläre Fünfecke, wenn man die Ecke mit anderen Ecken verbindet derart, dass diese neuen Fünfecke in Ebenen liegen, die zu den Flächen des Dodekaeders parallel sind, welche nicht durch die betrachtete gehen (für die Ecke L sind das beispielsweise das Fünfeck $LNPHJ$, dessen Kanten zum Fünfeck $DEABC$ parallel sind, das Fünfeck $LCHRP$, das zu $KJIST$, und das Fünfeck $LEFRT$, das zu $MNOQP$ parallel ist; Abb. 12). Diese Fünfecke bilden keine Polyederecke, da sie paarweise keine Kante gemeinsam haben.

d) drei Sternfünfecke, die den konvexen Fünfecken aus c) einbeschrieben sind (beispielsweise $LFJNH$, $LHPCR$, $LFTER$; Abb. 12). Sie haben paarweise eine Kante gemeinsam (in unserem Beispiel das erste und das zweite Sternfünfeck die Kante LH , das zweite und das dritte die Kante LR , und das dritte und das erste die Kante LF), und sie bilden eine Trieredrecke.

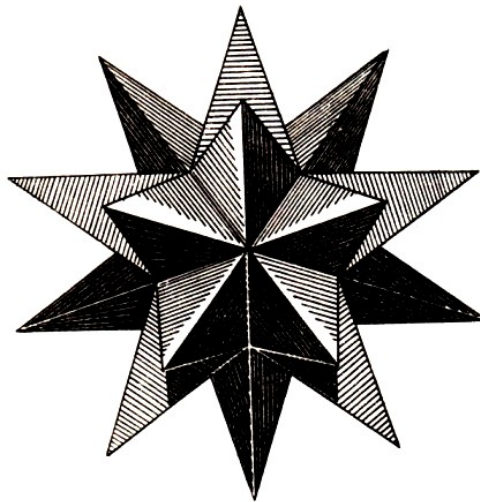


Abb. 21. Großes Sterndodekaeder

Die in entsprechender Weise in jeder Ecke des Dodekaeders konstruierten Sternfünfecke ergeben ein reguläres Sternpolyeder, das Große Sterndodekaeder (Abb. 21) mit folgenden charakteristischen Daten: $E = 20$ (wie beim Dodekaeder, aus dem es hervorgeht); $F = 12$ (denn in jeder Ecke laufen drei Sternfünfecke zusammen, von denen jedes durch fünf Ecken geht); aus der Relation (1) folgt $K = 30$.

5. Beim regulären Ikosaeder ergeben sich in jeder Ecke:

a) fünf gleichseitige Dreiecke, deren Seiten die Seiten von Sternfünfecken sind, welche regulären Fünfecken der Seitenlänge a einbeschrieben sind (etwa AGI , AIK , AKH , AHJ , AJG ; Abb. 15) und die paarweise eine Kante gemeinsam haben (so gehört beispielsweise AI zum ersten und zum zweiten Dreieck, AK zum zweiten und dritten, AH bzw. AJ , AG zu den übrigen).

Diese gleichseitigen Dreiecke bilden eine Pentaederecke, die sich durch ein Sternfünfeck schließen lässt (im oben stehenden Beispiel $GIKHJ$). Die in analoger Weise in allen Ecken des Ikosaeders konstruierten gleichseitigen Dreiecke ergeben ein reguläres Sternpolyeder, das Große Ikosaeder (Abb. 22) mit folgenden charakteristischen Daten: $E = 12$ (wie beim Ikosaeder, aus

dem es hervorgeht); $F = 20$ (denn in jeder Ecke stoßen fünf gleichseitige Dreiecke zusammen, von denen jedes durch jeweils drei Ecken geht); aus der Relation (1) erhält man $K = 30$.

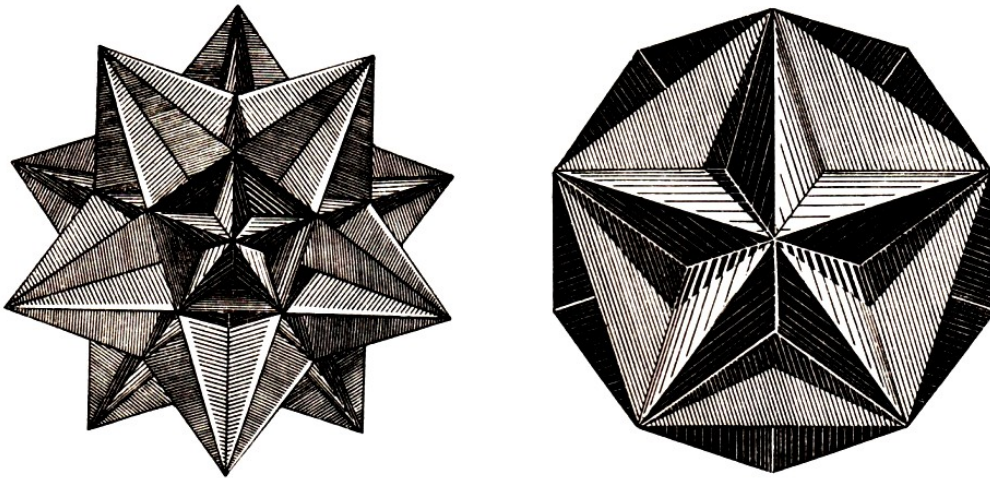


Abb. 22. Großes Ikosaeder, Abb. 23. Großes Dodekaeder mit konvexen Flächen²⁵

b) fünf konvexe reguläre Fünfecke (etwa $ACGFK$, $ADIJF$, $ACHIE$, $ABKJE$, $ABGHD$; Abb. 15), die paarweise eine Kante gemeinsam haben (in unserem Beispiel haben das erste und das zweite Fünfeck die Kante AF , das erste und das dritte die Kante AG , das zweite und das fünfte die Kante AD , das dritte und das vierte die Kante AE , das vierte und das fünfte die Kante AB gemeinsam).

Sie bilden daher eine Pentaederecke, die sich durch ein Sternfünfeck abschließen lässt (im Beispiel $BDFCE$).

Die in analoger Weise in allen Ecken des Ikosaeders konstruierten regulären Fünfecke bilden ein reguläres Sternpolyeder, das Große Dodekaeder (Abb. 23) mit den folgenden charakteristischen Daten: $E = 12$ (wie beim Ikosaeder, aus dem es hervorgeht); $F = 12$ (denn in jeder Ecke stoßen fünf reguläre Fünfecke zusammen, von denen jedes durch jeweils fünf Ecken geht); aus (1) ergibt sich $K = 30$.

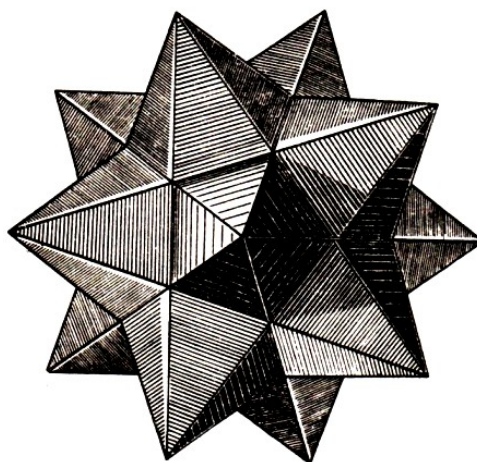


Abb. 24. Kleines Sterndodekaeder

c) fünf reguläre Sternfünfecke, die den konvexen Fünfecken aus b) eingeschrieben sind, paarweise eine Kante gemeinsam haben und eine Pentaederecke bilden, die sich durch ein konvexes Fünfeck abschließen lässt.

²⁵Im Originalbuch sind die Abbildungen 23 und 24 fehlerhaft vertauscht.

Die in entsprechender Weise in jeder Ecke des Ikosaeders konstruierten Sternfünfecke bilden ein reguläres Sternpolyeder, das Kleine Sterndodekaeder (Abb. 24) mit den folgenden charakteristischen Daten: $E = 12$ (wie beim Ikosaeder, aus dem es hervorgeht); $F = 12$ und $K = 30$ (was sich ebenso wie in b) ergibt).

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Bemerkungen. Das Kleine und das Große Sterndodekaeder waren bereits J. Kepler im 17. Jh. bekannt.

Im Jahre 1810 hat L. Poincot auch die beiden anderen Körper entdeckt. Die Existenz des Großen Dodekaeders und des Kleinen Sterndodekaeders waren anfangs bezweifelt worden, da sich herausstellte, dass für sie der Eulersche Satz nicht gilt. Beide Polyeder haben nämlich, wie aus (6) folgt, das Geschlecht 4.

Die Sternpolyeder sind zueinander dual: das Große Sterndodekaeder zum Großen Ikosaeder, das Große Dodekaeder zum Kleinen Sterndodekaeder. Diese Dualitäten lassen sich ohne Mühe nachweisen.

Die Drehgruppen der Sternpolyeder stimmen mit der Drehgruppe des regulären Dodekaeders bzw. der des regulären Ikosaeders überein, je nachdem, aus welchem der beiden Polyeder sie hervorgehen.

Die praktische Herstellung dieser Körper mit Hilfe ihrer ebenen Netze bereitet einige Schwierigkeiten. Anhand der Abbildungen 21 bis 24 können sie aus Plastilina oder Gips geformt bzw. aus Holz geschnitzt werden. In [3] findet der Leser Hinweise für ihre Anfertigung aus Karton.

5 Halbreguläre Polyeder (archimedische Körper)

Der Begriff des regulären Polyeders lässt sich auf verschiedene Weise verallgemeinern. Die folgenden Verallgemeinerungen beschränken sich auf konvexe Polyeder.

Einzelne Typen von halbregulären Polyedern sind bereits von Archimedes untersucht worden, wie uns Pappus überliefert hat, der gegen Endes des 3. Jh. in Alexandria lebte. Eine vollständige Theorie der halbregulären Polyeder findet sich bei J. Kepler, im 2. Buch des Werkes *Harmonices mundi* (1619).

Definitionen. Als archimedische Körper bezeichnet man solche Polyeder, deren Flächen (nicht notwendig kongruente) reguläre Polygone sind, während die Polyederecken kongruent sind.

Beispiele.

a.) Ein reguläres Prisma. (dessen Grundfläche ein reguläres n -seitiges Polygon ist) mit quadratischen Seitenflächen; in jeder Ecke stoßen zwei Quadrate und ein reguläres n -seitiges Polygon zusammen;

b) das abgestumpfte Tetraeder, das man erhält, indem man ein Tetraeder mit zu jeweils einer Fläche des Tetraeders parallelen Ebenen schneidet, deren Abstand von der Ecke $\frac{1}{3}$ der entsprechenden Höhe beträgt. Die Flächen des entstehenden Polyeders sind vier reguläre Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke. In jeder Ecke stoßen zwei Sechsecke und ein Dreieck zusammen (Abb. 25).

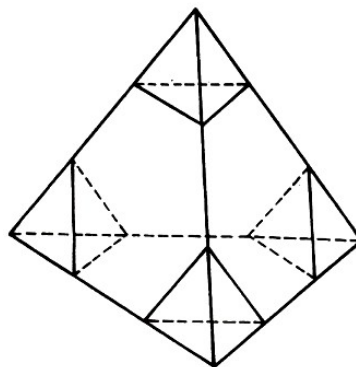


Abb. 25. Ebene Schnitte im regulären Tetraeder zur Konstruktion des abgestumpften Tetraeders

Dual-archimedische Körper werden solche Polyeder genannt, die (nicht notwendig kongruente) reguläre Polyederecken, jedoch kongruente Flächen besitzen.

Beispiele.

s.) Eine reguläre Doppelpyramide (die beiden Pyramiden "gemeinsame Grundfläche" sei ein reguläres n -seitiges Polygon), deren Seitenflächen gleichschenklige, einander kongruente Dreiecke sind, welche gleiche Flächenwinkel einschließen;

b) das Triakistetraeder. Dieses Polyeder wird durch die Tangentialebenen an eine Kugel bestimmt, welche durch die Eckpunkte des dieser Kugel einbeschriebenen abgestumpften Tetraeders ²⁶ gehen (Abb. 43a). Dieser Körper besitzt zwölf gleichschenklige, einander kongruente Dreieckflächen, vier Trieredreiecke und vier Hexaederecken. (Hinsichtlich seiner praktischen Anfertigung vgl. Abschnitt 7, Abb. 44.)

²⁶Alle archimedischen Körper lassen sich einer Kugel einbeschreiben.

Bemerkung. Die obenstehenden Definitionen stellen zwei Verallgemeinerungen des Begriffs des metrisch regulären Polyeders dar. Einige archimedische bzw. dualarchimedische Körper bzw. deren charakteristische Flächen finden sich in der Natur in Kristallen gewisser mineralischer bzw.-organischer Substanzen.

Um alle Typen halbregulärer Polyeder anzugeben, macht es sich erforderlich, vorher einige Eigenschaften der topologischen halbregulären Polyeder zu untersuchen.

Definitionen. Die aus den in einer Ecke A eines Polyeders zusammenstoßenden Polygonen gebildete Polyederfläche wird der Stern der Ecke A genannt.

Ein Polyeder vom Geschlecht Null heißt in den Ecken topologisch halbregulär (oder topologisch-archimedisch), wenn seine sämtlichen Sterne einander isomorph sind.

Ein in den Flächen topologisch halbreguläres (oder topologisch dual-archimedisches) Polyeder ist das Dual eines topologisch-archimedischen Polyeders. Man kann es folgendermaßen erhalten:

Man betrachtet ein topologisch-archimedisches Polyeder, das dem gegebenen Polyeder isomorph ist und sich einer Kugel einbeschreiben lässt. Durch jede Ecke wird die Tangentialebene an die umbeschriebene Kugel gelegt (oder es wird jeder Fläche der der Kugel nächstgelegene Pol zugeordnet). Beim Schnitt der Tangentialebenen (bzw. bei der geradlinigen Verbindung der Flächenpole) ergibt sich das gesuchte topologisch dual-archimedische Polyeder.

Satz 9. In einem in den Ecken topologisch halbregulären Polyeder

- a) besteht jede Polyederecke aus derselben Anzahl von Dreiecken bzw. aus derselben Anzahl von Quadraten usw.;
- b) folgen die Flächen mit derselben Seitenzahl in jeder Ecke des Polyeders in derselben Reihenfolge aufeinander.

In einem in den Flächen topologisch halbregulären Polyeder

- a) tritt jede Fläche bei der Bildung derselben Anzahl von Trienderecken bzw. derselben Anzahl von Tetraederecken usw. auf;
- b) folgen die Polyederecken mit derselben Kantenzahl in den Eckpunkten der Flächen in derselben Reihenfolge aufeinander.

Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Definition der topologisch-archimedischen Polyeder und aus der Definition des Isomorphismus. Der zweite Teil des Satzes ergibt sich aus der Definition der topologisch dual-archimedischen Polyeder sowie aus den vorher für die topologisch-archimedischen Polyeder bewiesenen Eigenschaften.

Bemerkung. Aus den obenstehenden Definitionen folgt, dass die archimedischen Körper Spezialfälle von topologisch-archimedischen Polyedern sind. Ebenso sind die dual-archimedischen Körper Spezialfälle von topologisch dual-archimedischen Polyedern.

Satz 10. Es gibt nur dreizehn topologisch-archimedische Polyeder, die zueinander nicht isomorph sind, sowie zwei Folgen derartiger Polyeder.

Wir bezeichnen mit E , K , F die Anzahl der Ecken, der Kanten und der Flächen eines topologisch-archimedischen Polyeders, mit f_1, f_2, f_3, \dots die Anzahl seiner Flächen mit n_1, n_2, n_3, \dots Seiten, mit s_1, s_2, s_3, \dots die Anzahl der Flächen des Sternes in jeder Ecke mit n_1, n_2, n_3, \dots Seiten.

Die Bezeichnungen seien so gewählt, dass die Ungleichungen $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots$ erfüllt sind und dass, wenn $s_1 = s_2$ ist, $n_1 < n_2$ gilt; wenn $s_2 = s_3$ ist, $n_2 < n_3$ gilt, usw.

Bezeichnet man mit s die Anzahl der Kanten (oder Flächen) eines Sternes, so ergibt sich die Gleichung

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots \quad (18)$$

Die Beziehung (1'') geht in diesem Falle über in

$$sE = 2K \quad (19)$$

Setzt man den aus (19) gewonnenen Ausdruck für E in die Formel des Eulerschen Polyedersatzes ein, so ergibt sich

$$E - \frac{sE}{2} + F = 2 \quad \text{woraus} \quad E = \frac{2(F-2)}{s-2} \quad (20,20')$$

folgt. Unter Berücksichtigung von (19) wird die Anfangsbeziehung aus Aufgabe 2 zu

$$3F \leq sE$$

Ersetzt man hierin E durch den aus (20') abgeleiteten Ausdruck, so ergibt sich $s(F+4) = 6F$. Es zeigt sich also, dass s nicht größer als 5 sein kann. Da ein Stern mindestens drei Flächen besitzen muss, folgt: s kann nur die Werte 3, 4 oder 5 annehmen.

Die Anzahl der Seiten von Flächen mit n_1 Ecken ist $n_1 f_1$, falls wir sie als Seiten der Flächen summieren, oder sie ist $s_1 E$, falls wir sie als Kanten der Ecken summieren.

Entsprechend ergibt sich die Anzahl der Seiten von Flächen mit n_2 Ecken, mit n_3 Ecken usw. Hieraus ergeben sich die Beziehungen

$$f_1 = \frac{s_1}{n_1} E, \quad f_2 = \frac{s_2}{n_2} E, \quad f_3 = \frac{s_3}{n_3} E, \quad \dots \quad (21)$$

Mit den obenstehenden Bezeichnungen kann die Beziehung (1''') in folgender Form geschrieben werden:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

oder unter Berücksichtigung von (21)

$$F = E \left(\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} + \dots \right)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (20) ein und dividiert danach durch E , so ergibt sich

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} + \dots = \frac{s-2}{2} + \frac{2}{E} \quad (22)$$

Auf Grund der früher durchgeführten Bestimmung der topologisch regulären Polyeder folgt, die Beziehung (22) muss mindestens zwei verschiedene Werte für n_i enthalten.

Unter Berücksichtigung der Definition von s_1, s_2, s_3, \dots und der Beziehung (18) betrachten wir nun nacheinander die für s möglichen Werte 3, 4 und 5.

Für $s = 3$ können zwei Fälle eintreten:

a) $s_1 = 2, s_2 = 1$ oder b) $s_1 = s_2 = s_3 = 1$.

Für $s = 4$ wären die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

a) $s_1 = 3, s_2 = 1$ oder b) $s_1 = 2, s_2 = 2$ oder c) $s_1 = 2, s_2 = 1, s_3 = 1$ oder d) $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$

Es lässt sich jedoch zeigen, dass der letzte Fall ausgeschlossen werden kann. Aus der Beziehung (22) würde nämlich folgen:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 + \frac{2}{E}$$

Berücksichtigen wir die Definition der Zahlen n_i und ihre oben festgelegte Anordnung $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$, so erhalten wir die Ungleichungen

$$n_1 \geq 3, \quad n_2 \geq 4, \quad n_3 \geq 5, \quad n_4 \geq 6$$

Die linke Seite der vorhergehenden Beziehung wird zu

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} \quad \text{woraus} \quad 1 + \frac{2}{E} \leq \frac{19}{20}$$

folgt, was unmöglich ist.

Daher bleiben für $s = 4$ nur die Fälle a), b) und c) zu betrachten.

Für $s = 5$ wären folgende sechs Fälle möglich:

- a) $s_1 = 4, s_2 = 1$;
- b) $s_1 = 3, s_2 = 2$;
- c) $s_1 = 3, s_2 = s_3 = 1$;
- d) $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 1$;
- e) $s_1 = 2, s_2 = s_3 = s_4 = 1$;
- f) $s_1 = 2 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$.

Wir zeigen, dass nur der Fall a) eintreten kann.

Für b) geht die Beziehung (22) über in

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}$$

Es ist jedoch

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{3}{n_1} + \frac{2}{n_2} \leq \frac{3}{3} + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

was der vorhergehenden Gleichung widerspricht.

Für c) geht die Beziehung (22) über in

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist jedoch kleiner oder höchstens gleich

$$\frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{39}{20} < \frac{3}{2}$$

was der vorigen Gleichung widerspricht.

Für d) geht die Beziehung (22) über in

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}$$

Die linke Seite ist jedoch kleiner oder höchstens gleich

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{41}{30} < \frac{3}{2}$$

was der vorhergehenden Beziehung widerspricht.

Für e) geht die Beziehung (22) über in

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}$$

Die linke Seite ist jedoch kleiner oder höchstens gleich

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{77}{60} < \frac{3}{2}$$

was der vorigen Beziehung widerspricht.

Für f) geht die Beziehung (22) über in

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}$$

Die linke Seite ist jedoch kleiner oder höchstens gleich

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{153}{140} < \frac{3}{2}$$

was der vorhergehenden Gleichung widerspricht.²⁷

Wir müssen folglich noch die folgenden sechs Gleichungen in natürlichen Zahlen lösen, die drei (bzw. vier) Unbekannte enthalten:

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{E}, \quad s = 3; \quad (\text{I})$$

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1 + \frac{2}{E}, \quad s = 4; \quad (\text{II})$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} = 1 + \frac{2}{E}, \quad s = 4; \quad (\text{III})$$

$$\frac{4}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{E}, \quad s = 5; \quad (\text{IV})$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{E}, \quad s = 3; \quad (\text{V})$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{E}, \quad s = 4; \quad (\text{VI})$$

Nach der Berechnung von n_1, n_2 (und gegebenenfalls n_3) und E werden f_1, f_2 (und f_3) aus den Relationen (21) bestimmt. Während sich F unmittelbar ergibt, muss K mit Hilfe der

²⁷Die Beweise für e) bis f) können direkt aus dem für den Fall b) gegebenen Beweis abgeleitet werden, wenn man bedenkt, dass in diesen Fällen das Anfangsglied der Beziehung (22) jedesmal kleiner wird, während die rechte Seite größer als $\frac{3}{2}$ bleibt.

Beziehung (19) berechnet werden.

Es sei bemerkt, dass nicht alle ganzzahligen Lösungen der obenstehenden sechs Gleichungen (die außerdem Ungleichungen der Form $n_1 \geq 3$, $n_2 \geq 3$, $n_3 \geq 3$, $E \geq 4$ genügen) tatsächlich auf topologisch-archimedische Polyeder führen. Es bleiben vielmehr einige unberücksichtigt. Die dazu notwendigen Untersuchungen können wir hier jedoch nicht durchführen.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Angaben für die Konstruktion der topologisch-archimedischen Polyeder zusammengestellt. Diese Tabelle schließt auch den Beweis von Satz 10 ab.

Unter Berücksichtigung von Satz 10 und der dem Satz vorangehenden Bemerkung ergibt sich der

Satz 11. Archimedische Körper sind:

die dreizehn archimedischen Körper, welche den in der nachfolgenden Tabelle (mit Ausnahme der Zeilen 1 und 7) definierten topologisch-archimedischen Polyedern isomorph sind;

die archimedischen Prismen;

die archimedischen Antiprismen.

Nr.	Gleichung	n_1	n_2	n_3	f_1	f_2	f_3	E	F	K	Bezeichnung des archimedischen Körpers
1	(I)	4	n	-	n	2	-	$2n$	$3n$	$n+2$	archimedisches Prisma
2	(I)	6	3	-	4	4	-	12	18	8	abgestumpftes Tetraeder
3	(I)	6	4	-	8	6	-	24	36	14	abgestumpftes Oktaeder
4	(I)	6	5	-	20	12	-	60	90	32	abgestumpftes Ikosaeder
5	(I)	8	3	-	6	8	-	24	36	14	abgestumpfter Würfel
6	(I)	10	3	-	12	20	-	60	90	32	abgestumpftes Dodekaeder
7	(II)	3	n	-	$2n$	2	-	$2n$	$4n$	$2n+2$	archimedisches Antiprisma
8	(II)	4	3	-	18	8	-	24	48	26	Rhombenkuboktaeder
9	(III)	3	4	-	8	6	-	12	24	14	Kuboktaeder
10	(III)	3	5	-	20	12	-	30	60	32	Ikosidodekaeder
11	(IV)	3	4	-	32	6	-	24	60	38	abgeschrägter Würfel
12	(IV)	3	5	-	80	12	-	60	150	92	abgeschrägtes Dodekaeder
13	(V)	4	6	8	12	8	6	48	72	26	abgestumpftes Kuboktaeder
14	(V)	4	6	10	30	20	12	120	180	62	abgestumpftes Ikosidodekaeder
15	(VI)	4	3	5	30	20	12	60	120	62	Rhombenikosidodekaeder

Bemerkungen

1. Die Bezeichnungen dieser Polyeder erklären sich aus der Art ihrer Konstruktion (vgl. die Aufgaben 15 bis 17).

2. Ein archimedisches Prisma besitzt als Grundfläche ein reguläres n -seitiges Polygon ($n = 3, 5, 6, \dots$), während die Seitenflächen quadratisch sind.

3. Ein archimedisches Antiprisma ist ein Polyeder, dessen Grundflächen zwei reguläre n -seitige Polygone sind ($n = 4, 5, 6, \dots$), die in parallelen Ebenen liegen und deren Mittelpunkte auf derselben, zu diesen beiden Ebenen senkrechten Geraden liegen. Die Grundflächenpolygone sind um $\frac{180^\circ}{n}$ gegeneinander verdreht. Die Seitenflächen des archimedischen Antiprismas sind $2n$ gleichseitige Dreiecke, deren Basen abwechselnd die Seiten der Grundflächenpolygone sind.

In Abb. 26 ist für den Fall $n = 4$ ein Beispiel angegeben.

Durch Dualisierung können aus den Sätzen 10 und 11 die verschiedenen Typen der topologisch dual-archimedischen Polyeder sowie der dual-archimedischen Körper gewonnen werden:

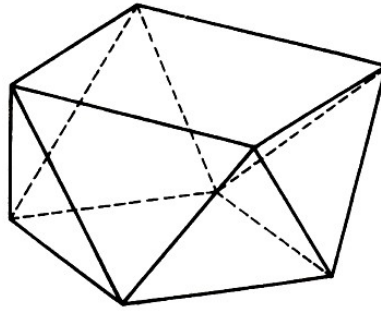


Abb. 26. Archimedisches Antiprisma mit quadratischen Grundflächen

Satz 12. Unter den topologisch dual-archimedischen Polyedern, die zueinander nicht isomorph sind, gibt es dreizehn Typen, die aus jeweils einem Element bestehen, sowie zwei Folgen von Elementen.

Die Bezeichnungen sind in diesem Falle folgendermaßen gewählt: E, K, F stehen wie gewöhnlich für die Angabe der Ecken, Kanten und Flächen des Polyeders; v_1 bzw. v_2, v_3, \dots bezeichnen die Anzahl der Ecken mit m_1 bzw. m_2, m_3, \dots Kanten; p_1 bzw. p_2, p_3, \dots die Anzahl der Ecken einer Fläche des dual-archimedischen Körpers, von denen m_1 bzw. m_2, m_3, \dots Kanten des Polyeders ausgehen. Die Bezeichnungen werden so gewählt, dass die Ungleichungen

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots$$

bestehen und dass, wenn $p_1 = p_2$ ist, $m_1 < m_2$ gilt; wenn $p_2 = p_3$ ist, $m_2 < m_3$ gilt, ... Ist die Anzahl der Seiten (oder der Ecken) einer Fläche gleich p , so ergibt sich die Beziehung

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (18')$$

und aus (1') folgt

$$pF = 2K \quad (19')$$

Man geht nun entsprechend wie in Satz 10 vor, wobei nur die folgenden Vertauschungen der Elemente zu beachten sind:

Satz 10	Satz 12	Satz 10	Satz 12
E	F	n_i	m_i
F	E	s_i	p_i
f_i	v_i	s	p

Im folgenden ergeben sich sechs Gleichungen, die bezüglich der drei (bzw. vier) Unbekannten in natürlichen Zahlen zu lösen sind:

$$\frac{2}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 3; \quad (VII)$$

$$\frac{3}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1 + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 4; \quad (VIII)$$

$$\frac{2}{m_1} + \frac{2}{m_2} = 1 + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 4; \quad (IX)$$

$$\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 5; \quad (X)$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 3; \quad (XI)$$

$$\frac{2}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 + \frac{2}{F} \quad , \quad p = 4; \quad (XII)$$

In der nachstehenden Tabelle sind die für die Konstruktion von topologisch dual-archimedischen Polyedern möglichen Werte zusammengestellt. Mit dieser Tabelle ist auch der Beweis von Satz 12 abgeschlossen.

Nr.	Gleichung	v_1	v_2	v_3	m_1	m_2	m_3	E	F	K	Bezeichnung des dual-archimedischen Körpers
1	(VII)	m	2	-	4	m	-	$n+2$	$3n$	$2n$	archimed. Doppelpyramide
2	(VII)	4	4	-	6	3	-	8	18	12	Triakistetraeder
3	(VII)	8	6	-	6	4	-	14	36	24	Tetrakishexaeder
4	(VII)	20	12	-	6	5	-	32	90	60	Pentakisdodekaeder
5	(VII)	6	8	-	8	3	-	14	36	24	Triakisoktaeder
6	(VII)	12	20	-	10	3	-	32	90	60	Triakisikosaeder
7	(VIII)	$2m$	2	-	3	m	-	$2m+2$	$4m$	$2m$	archimedisches Trapezoeder
8	(VIII)	18	8	-	4	3	-	26	48	24	Deltoiddikositetraeder
9	(IX)	8	6	-	3	4	-	14	24	12	Rhombendodekaeder
10	(IX)	20	12	-	3	5	-	32	60	30	Rhombentriakontaeder
11	(X)	32	6	-	3	4	-	38	60	24	Pentagonikositetraeder
12	(X)	80	12	-	3	5	-	92	150	60	Pentagonhexakontaeder
13	(XI)	12	8	6	4	6	8	26	72	48	Hexakisoktaeder
14	(XI)	30	20	12	4	6	10	62	180	120	Hexakisikosaeder
15	(XII)	30	20	12	4	3	5	62	120	60	Deltoidhexakontaeder

Satz 13. Die dual-archimedischen Körper sind:
 die dreizehn dual-archimedischen Körper, die den in der obenstehenden Tabelle definierten topologisch dual-archimedischen Polyedern isomorph sind (mit Ausnahme der Zeilen 1 und 7),
 die archimedischen Doppelpyramiden;
 die archimedischen Trapezoeder.

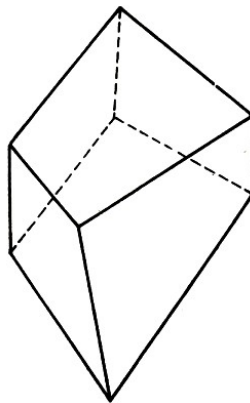


Abb. 27. Archimedisches Trapezoeder ($m = 3$)

Bemerkungen

- Die Bezeichnungen dieser Polyeder erklären sich folgendermaßen: Die (griechischen) Vorsilben Triakis-, Tetrakis-, Pentakis-, Hexakis- zeigen an, um welchen Faktor sich die Anzahl der Flächen des entsprechenden regulären Polyeders vergrößert hat; das Iksitetraeder ist ein Polyeder mit 24 Flächen, des Triakontaeder hat 30 Flächen, des Hexakontaeder 60; der Ausdruck Trapezoid wird in Bemerkung 3 erklärt.
- Eine archimedische Doppelpyramide besteht aus einem Paar von Pyramiden, die über derselben Grundfläche (einem regulären m -seitigen Polygon) konstruiert sind und deren Seitenflächen solche gleichschenkligen Dreiecke sind, die gleiche Flächenwinkel einschließen.

3. Ein archimedisches Trapezoeder entsteht beim Schnitt von zwei regulären Polyederecken mit derselben Achse und derselben Anzahl m von Kanten ($m = 4, 5, 6, \dots$), die gegeneinander um $\frac{180^\circ}{m}$ verdreht sind. Der Schnitt der Seitenflächen der beiden Polyederecken erzeugt ein windschiefes Polygon mit $2m$ gleichen Seiten.

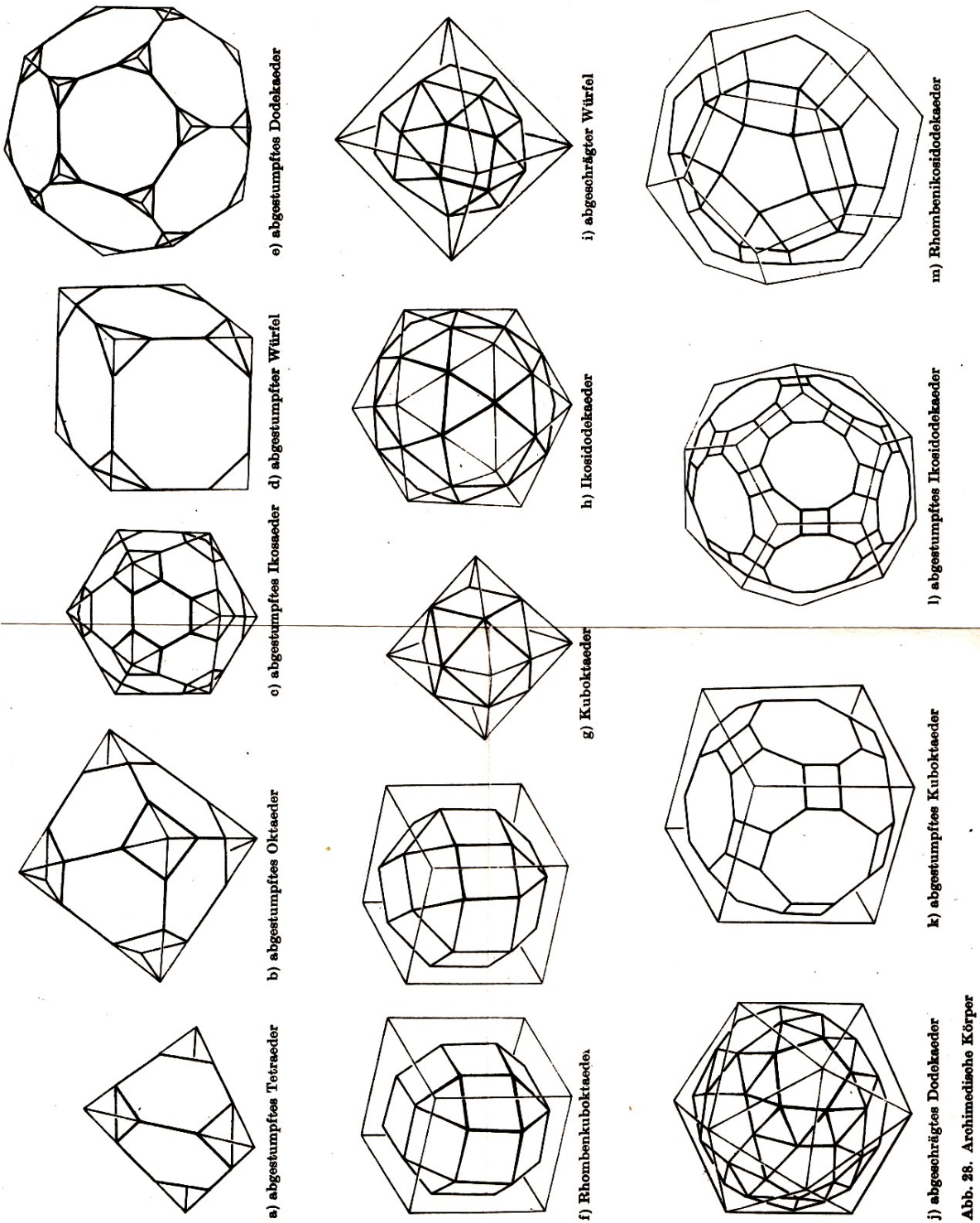


Abb. 28. Archimedische Körper

6 Die Konstruktion der archimedischen Körper

Die geometrische Konstruktion einiger dieser Polyeder wird in den Aufgaben 15 bis 18 besprochen, wo auch Hinweise zur Berechnung ihrer Flächenwinkel gegeben werden.

In Abb. 28 sind in Parallelprojektion von jeweils einem Element sämtliche dreizehn Typen der archimedischen Körper dargestellt, die im Satz 11 definiert wurden.

Wir bringen nun einige Hinweise zur Anfertigung von Modellen archimedischer Körper mit Hilfe ihrer ebenen Netze, wobei wir auch die für das Zusammenkleben wichtigen Falze angeben.

a) Anfertigung des abgestumpften Tetraeders. Das ebene Netz des abgestumpften Tetraeders (Abb. 29) besteht aus vier kongruenten regulären Sechsecken mit der Seite a , von denen je zwei eine Seite gemeinsam haben, und vier gleichseitigen Dreiecken, die jeweils auf einem Sechseck konstruiert sind.

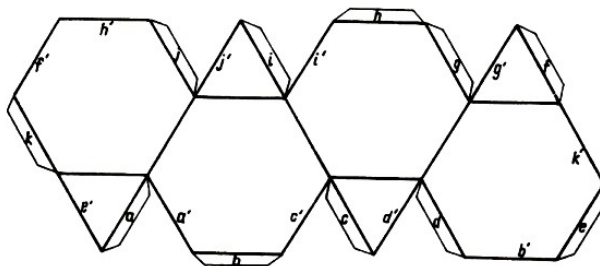


Abb. 29. Ebenes Netz des abgestumpften Tetraeders

Nachdem das ebene Netz längs der Seiten der Dreiecke und Sechsecke in einer Richtung aufgebogen worden ist, werden die Falze a bis k mit den Flächen verklebt, die am Rande mit a' bis k' bezeichnet sind.

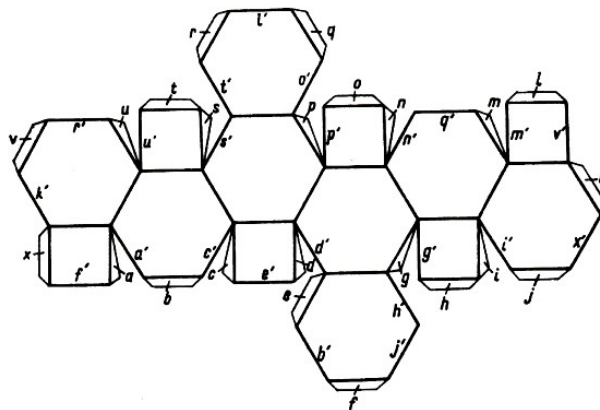


Abb. 30. Ebenes Netz des abgestumpften Oktaeders

b) Anfertigung des abgestumpften Oktaeders.

Das ebene Netz des Oktaeders (Abb. 30) besteht aus sechs Sechsecken mit der Seite a , die im Zickzack aneinanderliegen, sowie zwei weiteren Sechsecken (die die Grundflächen des Polyeders abgeben). Ferner ist auf jedem der erstgenannten Sechsecke ein Quadrat mit der Seite a konstruiert.

Nachdem das ebene Netz längs der Seiten der Quadrate und Sechsecke in einer Richtung aufgebogen worden ist, werden die Falze a bis z jeweils mit den Flächen verklebt, die am Rande durch a' bis z' gekennzeichnet sind.

c) Anfertigung des abgestumpften Ikosaeders.

Das ebene Netz des abgestumpften Iksaeders (Abb. 31) besteht aus zehn regulären Sechsecken mit der Seite a , die im Zickzack zusammenhängen, zehn ebensolchen Sechsecken, die mit den erstgenannten jeweils eine Seite gemeinsam haben, zehn regulären Fünfecken mit der Seite a , die mit den erstgenannten Sechsecken jeweils eine Seite gemeinsam haben; zwei weiteren solchen Fünfecken, die als Grundflächen dieses halbregulären Polyeders dienen.

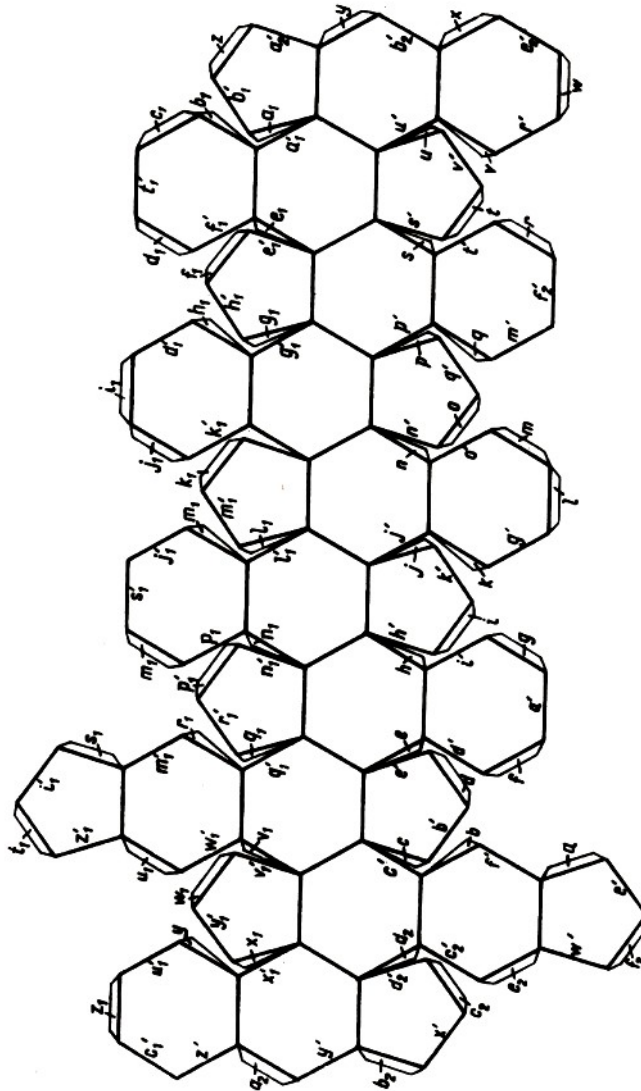


Abb. 31. Ebenes Netz des abgestumpften Iksaeders

Nachdem das ebene Netz längs der Seiten der Sechsecke und Fünfecke aufgebogen werden ist, werden die Falze a bis z , a_1 bis z_1 und a_2 bis f_2 jeweils mit den Flächen verklebt, die auf dem Rande durch a' bis z' , a'_1 bis z'_1 bzw. a'_2 bis f'_2 gekennzeichnet sind.

d) Anfertigung des abgestumpften Würfels. Das ebene Netz des abgestumpften Würfels (Abb. 32) besteht aus sechs regulären Achtecken mit der Seite a , die wie die Quadrate im Würfelnetz (Abb. 17) angeordnet sind.

Dazu kommen acht gleichseitige Dreiecke mit der Seite a , die auf den schrägen Seiten der Achtecke aus der Grundreihe stehen (die mit (a', b) bzw. (t, u') bezeichneten Dreiecke können auch auf den durch a bzw. u gekennzeichneten Seiten des ersten Achtecks links errichtet werden).

Nachdem das ebene Netz längs der Seiten der Achtecke und Dreiecke in einer Richtung aufgebogen werden ist, werden die Falze a bis w jeweils mit den Seiten verklebt, die mit a' bis w'

bezeichnet sind.

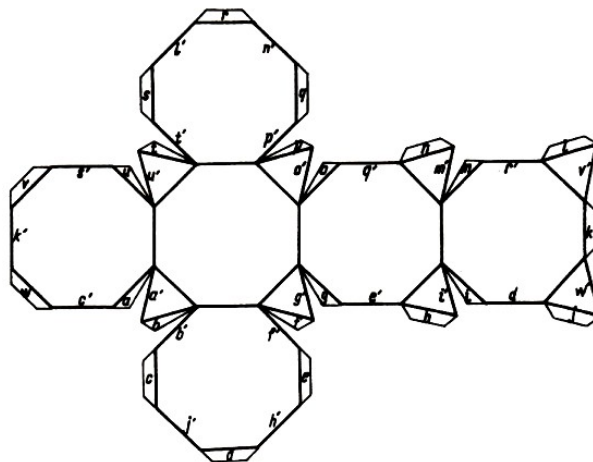


Abb. 32. Ebenes Netz des abgestumpften Würfels

e) Anfertigung des abgestumpften Dodekaeders. Das ebene Netz des abgestumpften Dodekaeders (Abb. 33) besteht aus zwölf regulären Zehnecken mit der Seite a , die wie die Fünfecke im Dodekaedernetz (Abb. 19) liegen, sowie aus zwanzig, in vier Gruppen angeordneten gleichseitigen Dreiecken: zwei Gruppen zu jeweils fünf auf den freien Seiten der mit I und II bezeichneten Zehnecke (die den in gleicher Weise bezeichneten Fünfecken aus Abb. 19 entsprechen) und zwei Gruppen zu jeweils fünf Dreiecken, von denen immer eins auf jeder dritten freien Seite (in positivem Umlaufssinn) der anderen Zehnecke steht.

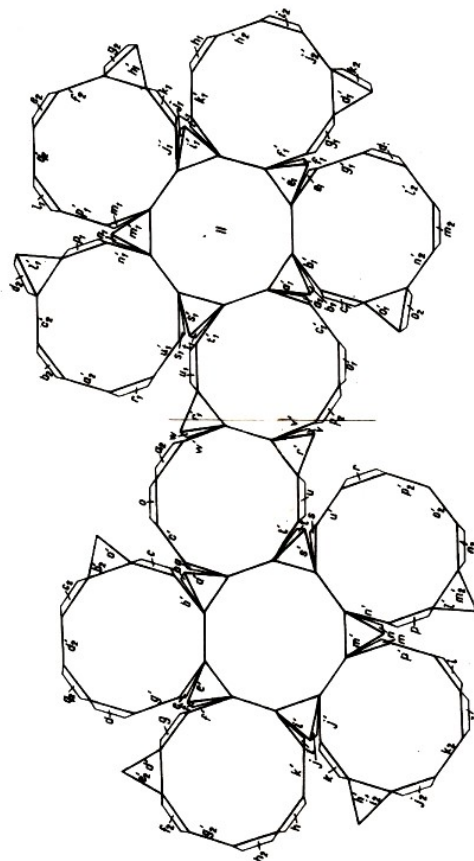


Abb. 33. Ebenes Netz des abgestumpften Dodekaeders

Nun wird das ebene Netz aus Abb. 33 längs der Seiten der Zehnecke und Dreiecke in einer Richtung aufgebogen. Die Teile a bis u und a' bis u' bzw. a_1 bis u_1 und a'_1 bis u'_1 bilden nach entsprechendem Zusammenkleben die beiden Hälften des halbbregulären Polyeders.

Die Teile v bis w , v' bis w' sowie a_2 bis p_2 und a'_2 bis p'_2 verbinden diese Hälften und schließen das Polyeder.

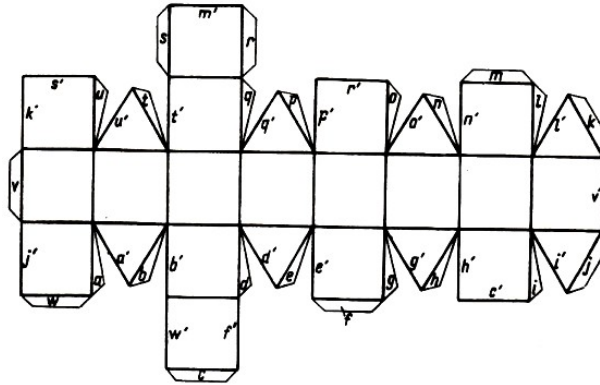


Abb. 34. Ebenes Netz des Rhombenkuboktaeders mit äquatorialer Symmetrieebene

f) Anfertigung der Rhombenkuboktaeder. Ebenes Netz und Polyeder selbst (Abb. 28f, links) waren bis vor kurzem nur in der in Abb. 34 angegebenen Form bekannt, welche auf ein Rhombenkuboktaeder mit äquatorialer Symmetrieebene führt. Der sowjetische Mathematiker W. G. Aschkinuse [2] hat gezeigt, dass dieses Polyeder mit den Charakteristiken aus den Sätzen 10 und 11 auch in der durch Abb. 28f, rechts, gegebenen Form realisiert werden kann, und zwar mit dem ebenen Netz aus Abb. 35.

Diese Form besitzt keine äquatoriale Symmetrieebene.

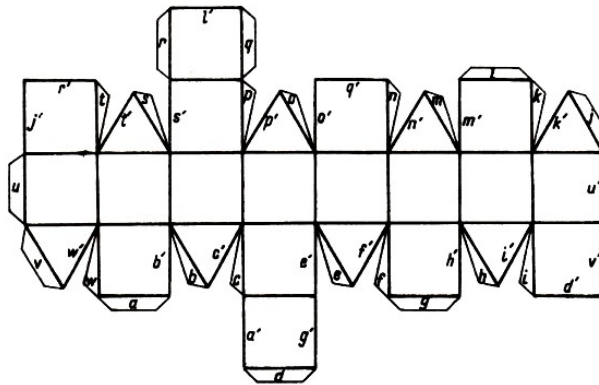


Abb. 35. Ebenes Netz des Rhombenkuboktaeders ohne äquatorialer Symmetrieebene

Der Leser möge einmal die beiden Rhombenkuboktaeder aus Abb. 28f bzw. die sich aus den Netzen der Abb. 34 und 35 ergehenden Rhombenkuboktaeder miteinander vergleichen. Beide sind archimedische Körper mit denselben charakteristischen Daten.

Beim zweiten sind jedoch alle der Deckfläche benachbarten Flächen (einschließlich der Deckfläche) gegen die entsprechenden, der Grundfläche benachbarten Flächen um 45° verdreht.

g) Anfertigung des Kuboktaeders. Das ebene Netz des Kuboktaeders (Abb. 36) kann, ausgehend von einem Quadrat (der Grundfläche des Polyeders), folgendermaßen realisiert werden:

Auf jeder Seite des Grundflächenquadrates werden ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat konstruiert, auf den gegenüberliegenden Seiten dieser Quadrate jeweils ein weiteres gleichseitiges Dreieck. Das sechste Quadrat (die Deckfläche des Kuboktaeders) wird auf einem der letztgenannten gleichseitigen Dreiecke in passender Weise angebracht.

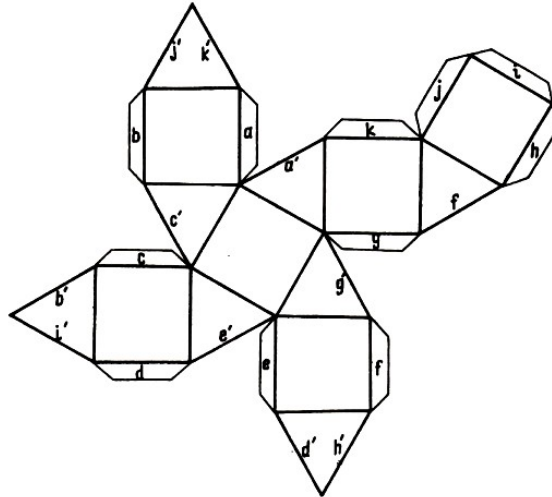


Abb. 36. Ebenes Netz des Kuboktaeders

Nachdem das Netz längs der Seiten der Quadrate und gleichseitigen Dreiecke in einer Richtung aufgebogen werden ist, werden die Falze a bis k jeweils mit den Flächen verklebt, die am Rande durch a' bis k' gekennzeichnet sind.

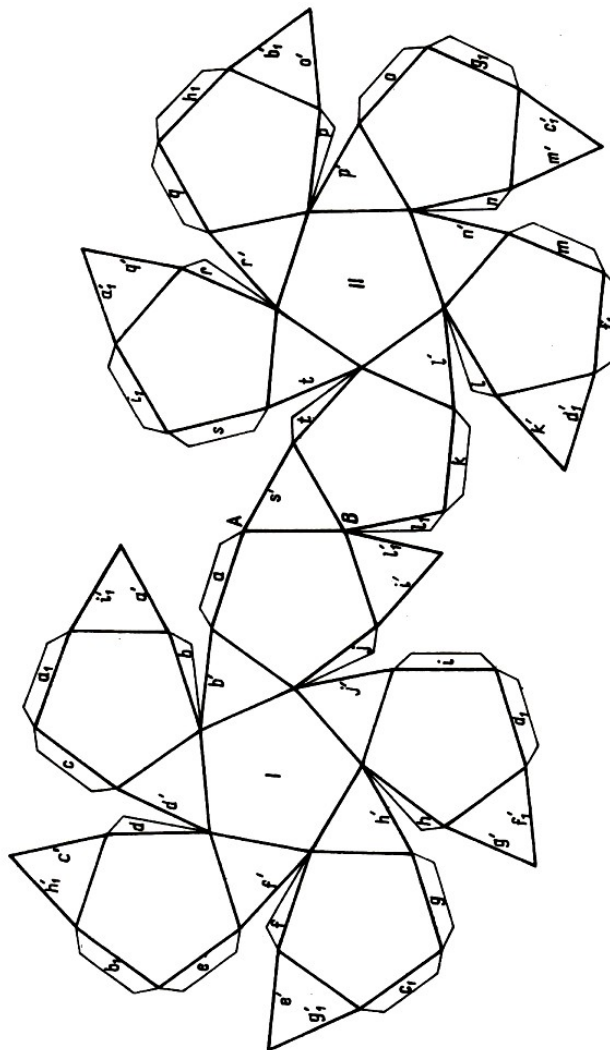


Abb. 37. Ebenes Netz des Ikosidodekaeders

h) Anfertigung des Ikosidodekaeders.

Das ebene Netz des Ikosidodekaeders (Abb. 37) besteht aus zwei Basisfünfecken (I und II) - dem Dodekaeder entsprechend -, auf denen jeweils fünf gleichseitige Dreiecke konstruiert sind. Auf jedem dieser Dreiecke ist, in einer Richtung, jeweils ein reguläres Fünfeck angebracht und auf jedem dieser Fünfecke in analoger Lage ein gleichseitiges Dreieck. Die beiden Figuren (jeweils sechs reguläre Fünfecke und zehn gleichseitige Dreiecke) hängen längs der Linie AB miteinander zusammen. Diese Strecke ist die Seite eines Fünfecks aus der einen Figur und eines Dreiecks aus der anderen.

Die Falze a bis j (bzw. k bis t) werden jeweils mit den auf den Rändern durch a' bis j' (bzw. k' bis t') gekennzeichneten Flächen verklebt. Dabei entstehen die beiden Hälften des Polyeders. Verklebt man nun noch die Falze a_1 bis i_1 mit den entsprechenden Rändern der mit a'_1 bis i'_1 bezeichneten Flächen, so ist das Ikosidodekaeder fertig. Selbstverständlich muss das Netz, bevor die oben angegebenen Verheftungen ausgeführt werden, längs der Seiten der Fünfecke und Dreiecke in einer Richtung aufgebogen worden sein.

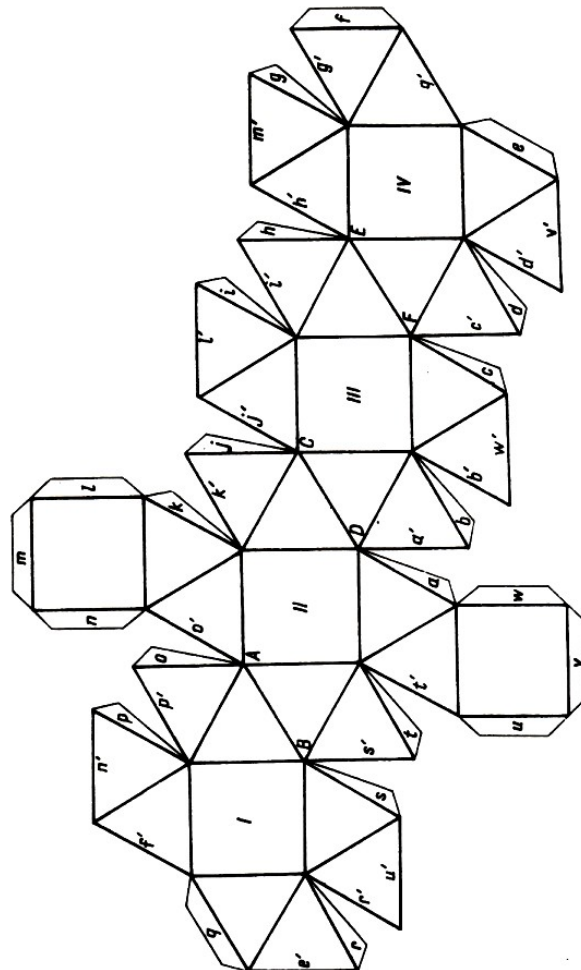


Abb. 38. Ebenes Netz des abgeschrägten Würfels

i) Anfertigung des abgeschrägten Würfels. Das ebene Netz des abgeschrägten Würfels (Abb. 38) ergibt sich, ausgehend von vier Quadraten (I bis IV), indem man auf diesen jeweils vier gleichseitige Dreiecke konstruiert und auf jedem dieser Dreiecke ein weiteres, in der durch die Abbildung angegebenen Lage.

Die vier Teile hängen längs der Seiten gewisser der gleichseitigen Dreiecke (in der Abbildung: AB , CD , EF) zusammen. Danach fügt man auf den horizontalen Seiten zweier gleichseitiger

Dreiecke zwei Quadrate hinzu, und zwar oberhalb und unterhalb der Linie, welche die Mittelpunkte der Quadrate verbindet.

Nachdem das ebene Netz längs der Seiten der Quadrate und Dreiecke aufgebogen worden ist, werden die Falze a bis w jeweils mit den am Rande durch a' bis w' gekennzeichneten Flächen verklebt.

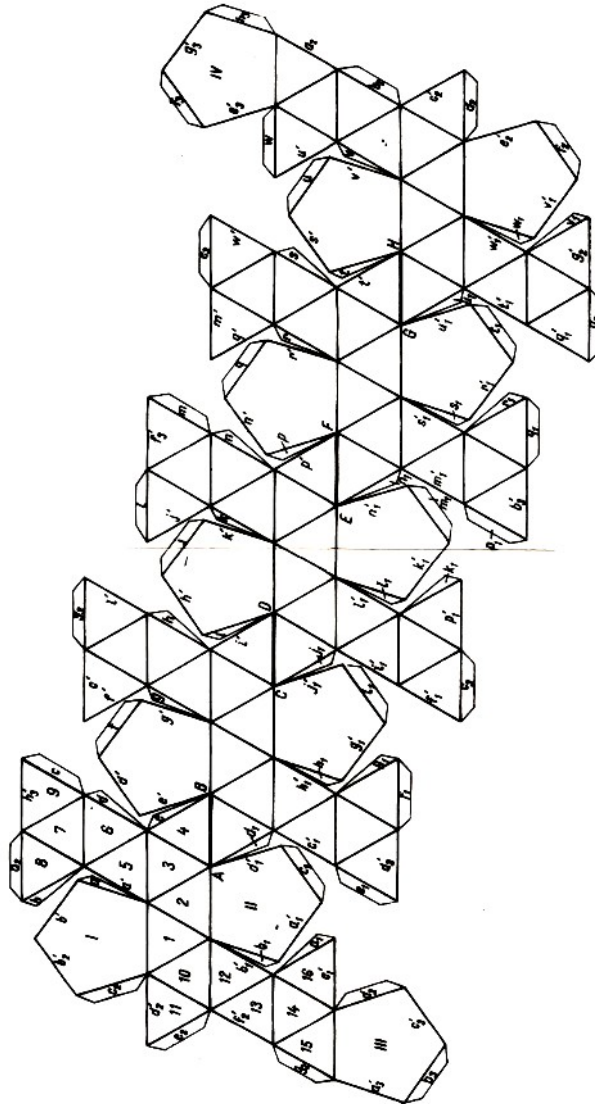


Abb. 39. Ebenes Netz des abgeschrägten Dodekaeders

j) Anfertigung des abgeschrägten Dodekaeders. Zum ebenen Netz des abgeschrägten Dodekaeders (Abb. 39) gelangt man in mehreren Schritten:

a) Es wird das reguläre Fünfeck I konstruiert, danach die gleichseitigen Dreiecke 1 und 2 sowie das reguläre Fünfeck II; es werden die gleichseitigen Dreiecke 3 bis 13 hinzugefügt;

b) diese aus zwei regulären Fünfecken und sechzehn gleichseitigen Dreiecken bestehende Figur wird noch viermal angefertigt; danach werden die fünf Gebilde längs der dick ausgezogenen Strecken AB , CD , EF , GH verbunden;

c) oberhalb und unterhalb des Streckenzuges, welcher die Mittelpunkte der bereits konstruierten Fünfecke verbindet, werden die letzten beiden regulären Fünfecke (III und IV) angebracht.

Geschlossen wird das Polyeder ebenfalls schrittweise:

- a) Die Falze a bis w (entsprechend a_1 bis w_1) werden mit den auf dem Rande durch a' bis w' (bzw. a'_1 bis w'_1) gekennzeichneten Flächen verklebt ;
 b) die Falze a_2 bis g_2 werden in passender Weise auf die Ränder a'_2 bis g'_2 geklebt;
 c) um die Grundflächen und die mit ihnen zusammenhängenden Seitenflächen zu befestigen, werden die Falze a_3 bis h_3 in geeigneter Weise auf die Ränder a'_3 bis h'_3 geklebt. Nun ist das Polyeder vollständig geschlossen.
 Natürlich muss das Netz, bevor die Falze in der oben angegebenen Weise verklebt werden, längs der Seiten der Fünfecke und Dreiecke in einer Richtung aufgebogen werden.

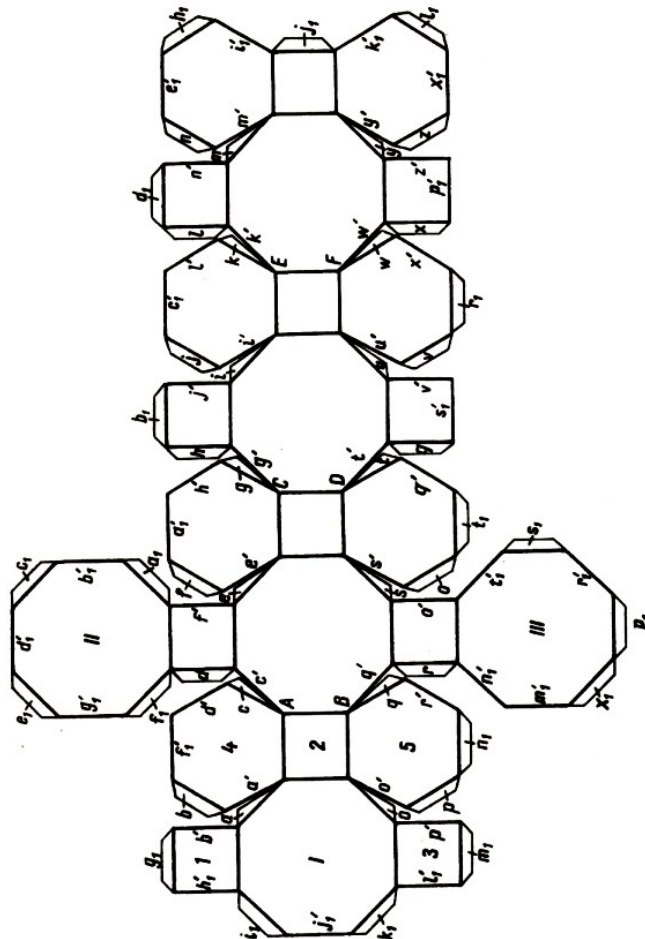


Abb. 40. Ebenes Netz des abgestumpften Kuboktaeders

k) Anfertigung des abgestumpften Kuboktaeders. Zum ebenen Netz des abgestumpften Kuboktaeders (Abb. 40) gelangt man in mehreren Schritten:

- a) Es werden das reguläre Achteck I, die Quadrate 1, 2, 3 und die Sechsecke 4 und 5 konstruiert;
 b) diese Figur (bestehend aus einem Achteck, zwei Sechsecken und drei Quadraten) wird noch dreimal konstruiert; die Teilfiguren werden längs der Strecken AB , CD , EF verbunden;
 c) auf den Seiten von zwei Quadraten, die oberhalb und unterhalb der horizontalen Achse der Figur liegen, werden zwei weitere reguläre Achtecke konstruiert (sie sind in der Figur mit I I und III bezeichnet).

Der Zusammenbau des Polyeders erfolgt in drei Etappen:

- a) Die Falze a bis n werden auf die Flächen mit den Rändern a' bis n' geklebt;

- b) die Falze o bis z werden auf die Flächen mit den durch o' bis z' gekennzeichneten Rändern geklebt;
- c) um die Grundflächen zu verkleben und das Polyeder zu fixieren, werden auch die Falze a_1 bis t_1 auf die entsprechenden Ränder der Flächen a'_1 bis t'_1 geklebt.
- Bevor alle hier angegebenen Verheftungen ausgeführt werden, wird das Netz des Polyeders in einer Richtung längs der Seiten der Achtecke, Sechsecke und Quadrate aufgebogen.

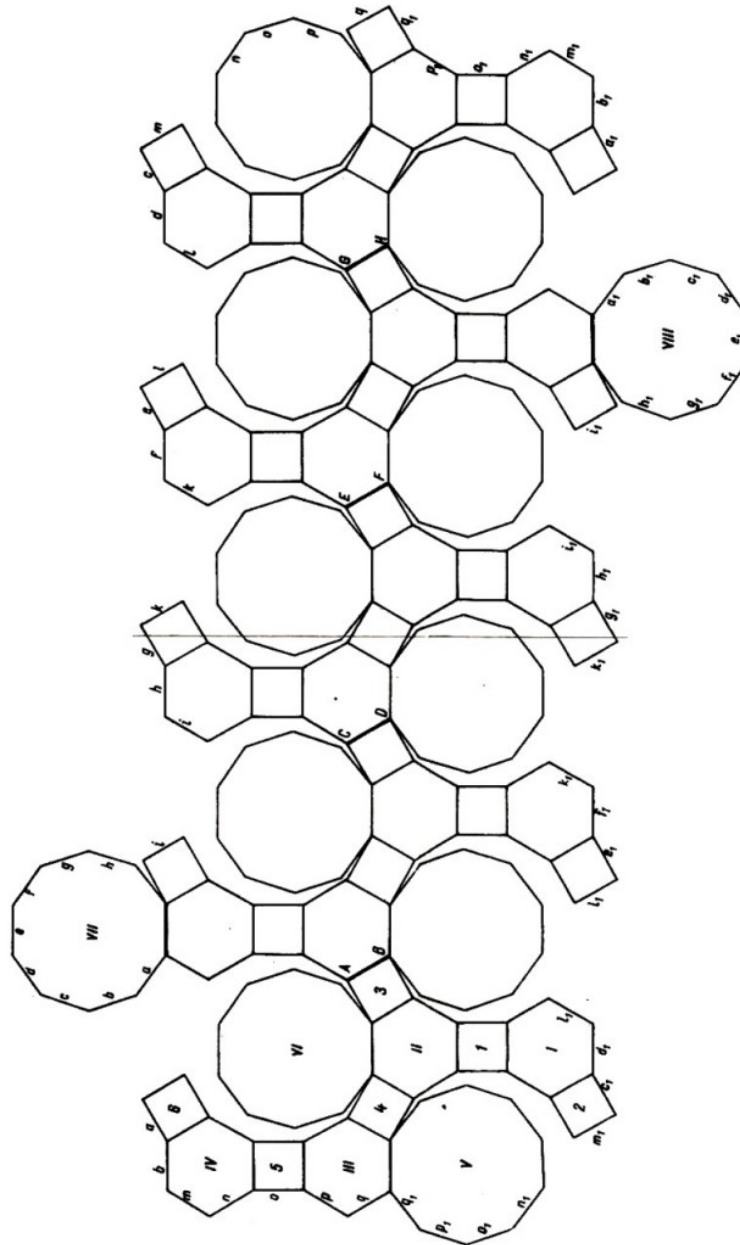


Abb. 41. Ebenes Netz des abgestumpften Ikosidodekaeders

l) Anfertigung des abgestumpften Ikosidodekaeders. Um das ebene Netz des abgestumpften Ikosidodekaeders (Abb. 41) zu bekommen, geht man folgendermaßen vor:

- a) Es werden zwei reguläre Sechsecke mit der Seite a konstruiert (in der Abbildung I und II), die über ein Quadrat (in der Abbildung 1) zusammenhängen; darauf werden drei Quadrate (in der Abbildung 2, 3, 4), zwei Sechsecke (III, IV), noch zwei Quadrate (5, 6) und zwei reguläre Zehnecke (V, VI) hinzugefügt;
- b) dieses Gebilde (bestehend aus zwei Zehneckern, vier Sechsecken und sechs Quadraten) wird

noch viermal angefertigt, und die Vereinigung der fünf so entstandenen Teilfiguren erfolgt längs der Seiten AB , CD , EF , GH ;

c) auf den Seiten von zwei Sechsecken (vom Typ der mit III und IV bezeichneten) aus zwei verschiedenen Teilfiguren (in der Abbildung aus der zweiten und vierten) wird jeweils ein Zehneck (VII und VIII) angebracht.

In der Annahme, ein Leser, der die vorhergehenden halbrekulären Polyeder gebastelt hat, habe inzwischen genügend Erfahrungen gesammelt, haben wir in der Abbildung die Falze und die Ränder, auf welche sie geklebt werden, für die ersten beiden Bauabschnitte nicht angegeben, d.h. für die Konstruktionsschritte, in denen Folgen von Quadraten und Sechsecken um die Zehnecke aus der oberen Reihe (vom Typ VI) bzw. aus der unteren Reihe (vom Typ V) herum zusammengesetzt werden.

In der Abbildung sind (mit denselben Buchstaben) die Seiten kenntlich gemacht, die beim Schließen des Polyeders aufeinander zu liegen kommen. Der Leser ermittle die der Abbildung nicht zu entnehmenden Falze für das Zusammenkleben selbst.

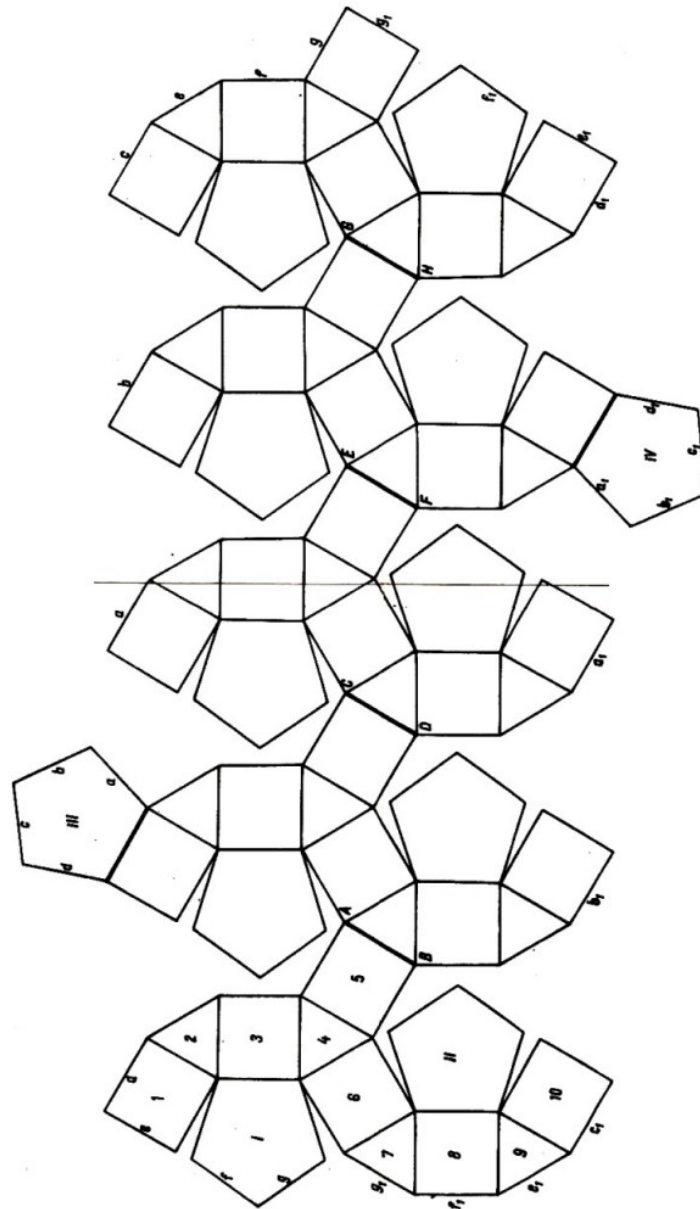


Abb. 42. Ebenes Netz des Rhombenikosidodekaeders

m) Anfertigung des Rhombenikosidodekaeders. Um das ebene Netz des Rhombenikosidodekaeders (Abb. 42) zu erhalten, verfährt man folgendermaßen:

a) Zuerst wird eine aus sechs Quadraten und vier gleichseitigen Dreiecken bestehende Figur konstruiert (die Quadrate und Dreiecke sind so angeordnet wie die mit 1 bis 10 nummerierten Quadrate und Dreiecke aus der Abbildung), und es werden zwei reguläre Fünfecke I, II hinzugefügt;

b) diese Figur wird noch viermal angefertigt; die Vereinigung der so erhaltenen fünf Figuren erfolgt längs der Strecken AB , CD , EF , GH ;

c) auf den Seiten von Quadraten in verschiedenen Teilfiguren (in der Abbildung in der zweiten und vierten) werden zwei, weitere Fünfecke konstruiert (vom Typ der in der Abbildung mit III und IV bezeichneten Fünfecke).

Wie schon beim vorangehenden halbregulären Polyeder wurden auch hier keine Falze mehr angegeben. Jedoch sind die Seiten, die beim Schließen dieses Körpers aufeinander zu liegen kommen, durch denselben Buchstaben gekennzeichnet worden.

Der Leser, der das Rhombenikosidodekaeder baut, bringe an geeigneter Stelle die Falze an und verklebe das ebene Netz unter Berücksichtigung der bei der Anfertigung der vorhergehenden Körper gegebenen Hinweise.

7 Die Konstruktion der dual-archimedischen Körper

In Abb. 43 sind einige dual-archimedische Körper in Parallelprojektion dargestellt, und zwar solche, die in der Kristallographie vorkommen.²⁸

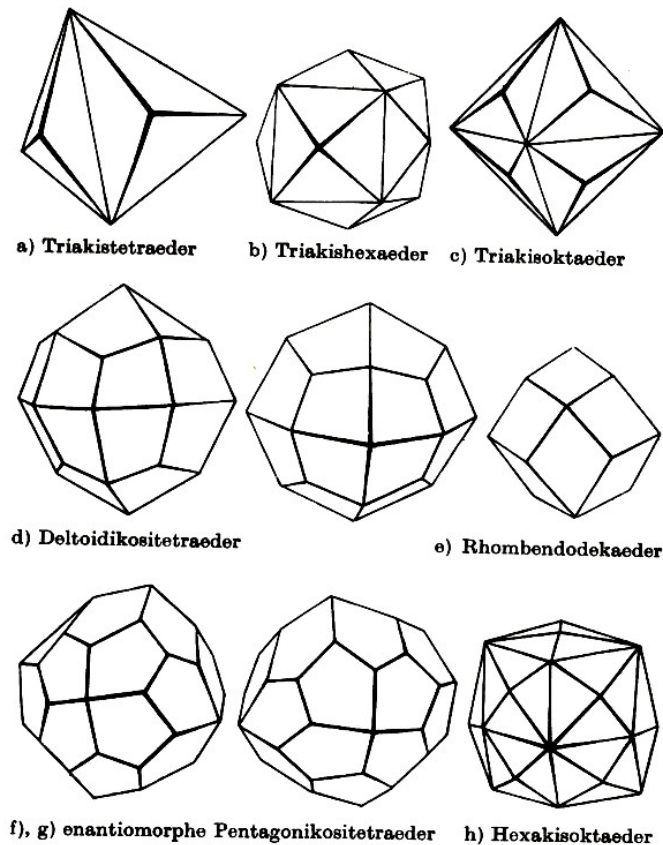


Abb. 43. Dual-archimedische Körper

1) Wie aus ihrer Definition zu ersehen ist, sind die Flächen dieser Polyeder keine regulären Polygone, so dass ihre Konstruktion mit Hilfe ebener Netze gewisse Schwierigkeiten bereitet. Im weiteren geben wir für einige einfachere Fälle die Konstruktion derartiger Polyeder als Beispiel an. Für die übrigen dual-archimedischen Körper beschränken wir uns auf Hinweise zu ihrer Konstruktion.

a) Anfertigung des Triakistetraeders. Die Grundfigur im Netz dieses Polyeders besteht aus drei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, die paarweise eine gleichlange Seite gemeinsam haben ($ABCDE$, Abb. 44). Der stumpfe Winkel beträgt in diesen gleichschenkligen Dreiecken (etwa $112^{\circ}53'$)²⁹

Das ebene Netz des Triakistetraeders ist in Abb. 44 dargestellt.

²⁸Sie gehören alle zur kubischen Kristallklasse.

²⁹Die Modelle der dual-archimedischen Körper werden mit Hilfe ihrer ebenen Netze hergestellt. Da die Flächen dieser Polyeder keine regulären Polygone sind, wird ihre Konstruktion vermittels der in Graden und Minuten gemessenen charakteristischen Winkel angegeben (näherungsweise also, wie später ausführlich gezeigt wird). Die Bestimmung dieser Winkel erfolgt mit Hilfe einiger Beziehungen aus der sphärischen Trigonometrie unter Berücksichtigung der Definition dieser Polyeder oder über die Dualität zu den archimedischen Körpern.

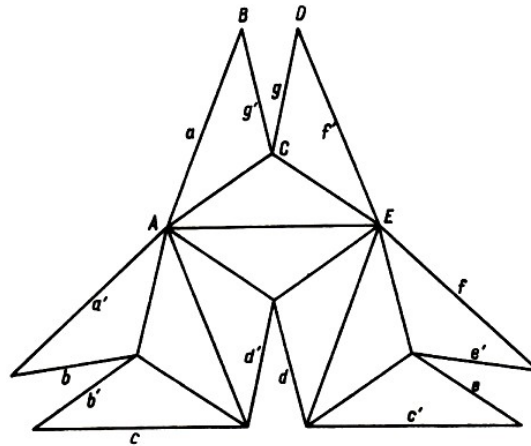


Abb. 44. Ebenes Netz des Triakistetraeders

Es besteht aus vier Grundfiguren (zwölf gleichschenkligen Dreiecken). Vergleicht man es mit dem ebenen Netz des Tetraeders (Abb. 16), so sieht man, dass jedes gleichseitige Dreieck des letzteren durch eine Grundfigur des Triakistetraeders ersetzt wird.

Um das Triakistetraeder praktisch anzufertigen, müssen an den äußeren Seiten (die mit kleinen Buchstaben bezeichnet sind) Falze angebracht werden. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der Dreiecke werden die Falze auf diejenigen Flächen geklebt, welche durch denselben, mit einem Strich versehenen kleinen Buchstaben gekennzeichnet sind.

b) Anfertigung des Tetrakishexaeders. Die Grundfigur im Netz dieses Polyeders besteht aus vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, die paarweise eine gleichlange Seite gemeinsam haben ($ABCDEF$, Abb. 45). Der größte Winkel beträgt in diesen gleichschenkligen Dreiecken (etwa) $83^{\circ}37'$.

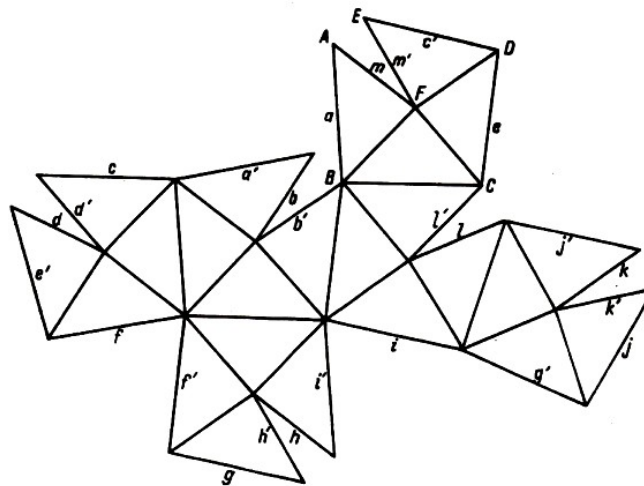


Abb. 45. Ebenes Netz des Tetrakishexaeders

Das ebene Netz des Tetrakishexaeders ist in Abb. 45 dargestellt. Es besteht aus 24 gleichschenkligen Dreiecken, d.h. sechs Grundfiguren. Jede davon ersetzt ein Quadrat aus dem ebenen Netz des Würfels (Abb. 17).

Zur praktischen Anfertigung dieses Polyeders müssen an den äußeren Seiten (die durch kleine Buchstaben a bis k gekennzeichnet sind) Falze angebracht werden. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der Dreiecke werden die Falze auf die mit demselben, mit einem Strich versehenen kleinen Buchstaben gekennzeichneten Flächen geklebt.

c) Anfertigung des Triakisoktaeders. Die Grundfigur im Netz dieses Polyeders besteht aus drei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, die paarweise eine gleichlange Seite gemeinsam haben ($ABCDE$, Abb. 46). Der stumpfe Winkel beträgt in diesen gleichschenkligen Dreiecken (etwa $117^{\circ}14'$).

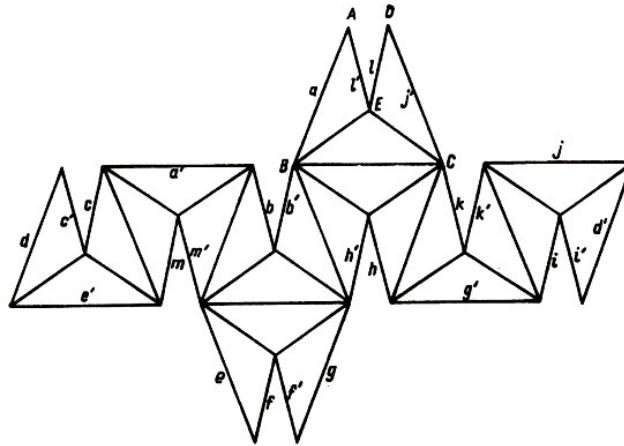


Abb. 46. Ebenes Netz des Triakisoktaeders

Das ebene Netz des Triakisoktaeders ist in Abb. 46 dargestellt. Es besteht aus 24 gleichschenkligen Dreiecken, d.h. acht Grundfiguren. Jede davon ersetzt ein gleichseitiges Dreieck aus dem ebenen Netz des Oktaeders (Abb. 18).

Zur praktischen Anfertigung des Polyeders werden an den äußeren Seiten, die mit den kleinen Buchstaben a bis e bezeichnet sind, Falze angebracht. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der gleichschenkligen Dreiecke wird jeder Falz mit der Fläche verklebt, die durch denselben, mit einem Strich versehenen kleinen Buchstaben gekennzeichnet ist.

d) Anfertigung des Pentakisdodekaeders. Die Grundfigur besteht aus fünf kongruenten gleichschenkligen Dreiecken (Abb. 47), die paarweise eine gleichlange Seite gemeinsam haben ($ABCDEF$, Abb. 47). Der Scheitelwinkel in jedem dieser Dreiecke beträgt (etwa $68^{\circ}36'$).

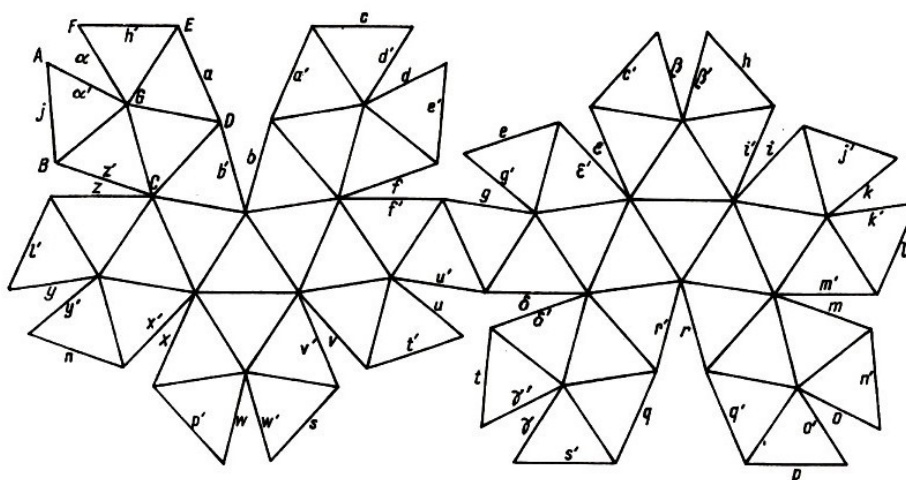


Abb. 47. Ebenes Netz des Pentakisdodekaeders

Das ebene Netz des Pentakisdodekaeders ist in Abb. 47 dargestellt. Es besteht aus 60 gleichschenkligen Dreiecken, d.h. zwölf Grundfiguren. Jede davon steht für ein Fünfeck aus dem ebenen Netz des Pentagondodekaeders (Abb. 19).

Zur praktischen Anfertigung des Pentakisdodekaeders werden an den äußeren Seiten, die durch die kleinen Buchstaben a bis z gekennzeichnet sind, Falze angebracht. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der gleichschenkligen Dreiecke wird jeder Falz auf die mit demselben, mit einem Strich versehenen kleinen Buchstaben bezeichnete Fläche geklebt.

e) Anfertigung des Deltoidikositetraeders. Die Grundfigur besteht aus drei kongruenten Vierecken, die paarweise eine der gleichlangen kurzen Seiten gemeinsam haben ($ABCDEF$, $ABCH$, $DEFG$, Abb. 48a). Der stumpfe Winkel jedes Vierecks beträgt (etwa) $115^\circ 16'$, während die anderen Winkel einander gleich sind.

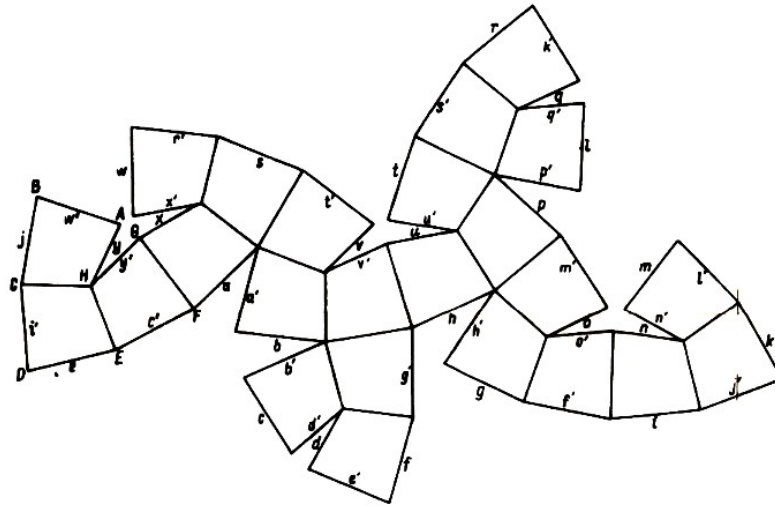


Abb. 48a. Ebenes Netz des Deltoidikositetraeders mit äquatorialer Symmetrieebene

Das Viereck $ABCH$, das Paare gleicher Seiten besitzt, $AB = BC$ und $HA = CH$, ist ein Deltoid oder Trapezoid.

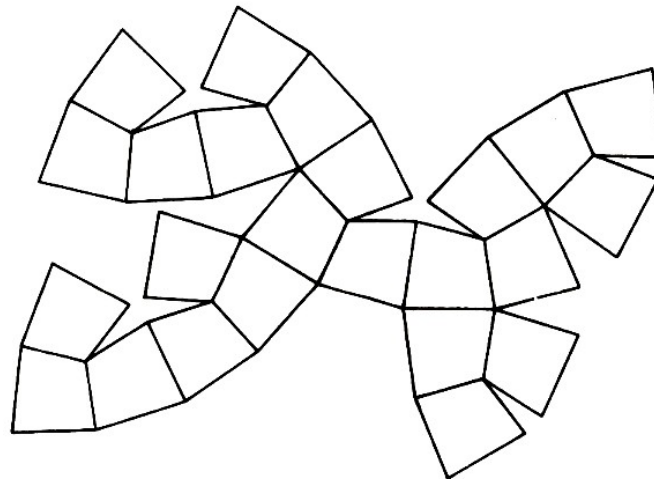


Abb. 48b. Ebenes Netz des Deltoidikositetraeders ohne äquatorialer Symmetrieebene

Das ebene Netz des Deltoidikositetraeders mit äquatorialer Spiegelebene (Abb. 43d, links) ist in Abb. 48a dargestellt. Es besteht aus acht Grundfiguren (24 Trapezoiden). Unlängst hat der sowjetische Mathematiker Damm [5] gezeigt, dass dieses Polyeder auch in einer Variante ohne äquatoriale Spiegelebene realisiert werden kann (Abb. 43d, rechts), deren ebenes Netz durch Abb. 48b wiedergegeben ist.

Die beiden Deltoidikositetraeder aus Abb. 43d sind zu den beiden Rhombenkuboktaedern aus Abb. 28f dual.

Zur praktischen Anfertigung der beiden Deltoidikositetraeder werden an den äußeren, durch die kleinen Buchstaben a bis g gekennzeichneten Seiten Falze angebracht. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der Trapezoide wird jeder Falz auf diejenige Fläche geklebt, welche denselben, mit einem Strich versehenen Buchstaben trägt.

f) Anfertigung des Rhombendodekaeders. Die Grundfigur besteht aus einem Rhombus, in dem das Verhältnis der Diagonalen zueinander gleich $\sqrt{2}$ ist ($ABCD$, Abb. 49).

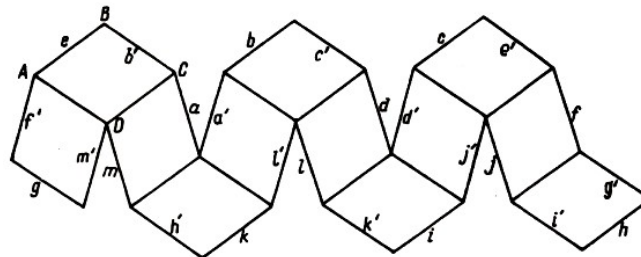


Abb. 49. Ebenes Netz des Rhombendodekaeders

Das ebene Netz des Rhombendodekaeders besteht aus zwölf kongruenten Rhomben, die wie in Abb. 49 aneinandergereiht sind.

Zur praktischen Anfertigung dieses Polyeders werden an den äußeren, mit den Buchstaben a bis m bezeichneten Seiten Falze angebracht. Nach dem Aufbiegen des Netzes längs der Seiten der Rhomben wird jeder Falz auf die mit demselben, jedoch gestrichenen kleinen Buchstaben gekennzeichnete Fläche geklebt.

g) Anfertigung der Pentagonikositetraeders. Die Grundfigur im ebenen Netz dieses Polyeders besteht aus drei kongruenten Fünfecken ($ABCDE$, $GHEDF$, $KDCIJ$; Abb. 50), in denen jeweils zwei lange und drei kurze Seiten gleichlang sind (so ist z.B. im ersten Fünfeck oben $AB = AE$, $BC = CD = DE$). Diese drei Fünfecke hängen paarweise längs kleiner Seiten zusammen. Der spitze Winkel (z.B. in A) beträgt (etwa) $80^\circ 46'$, während die stumpfen Winkel einander gleich sind.

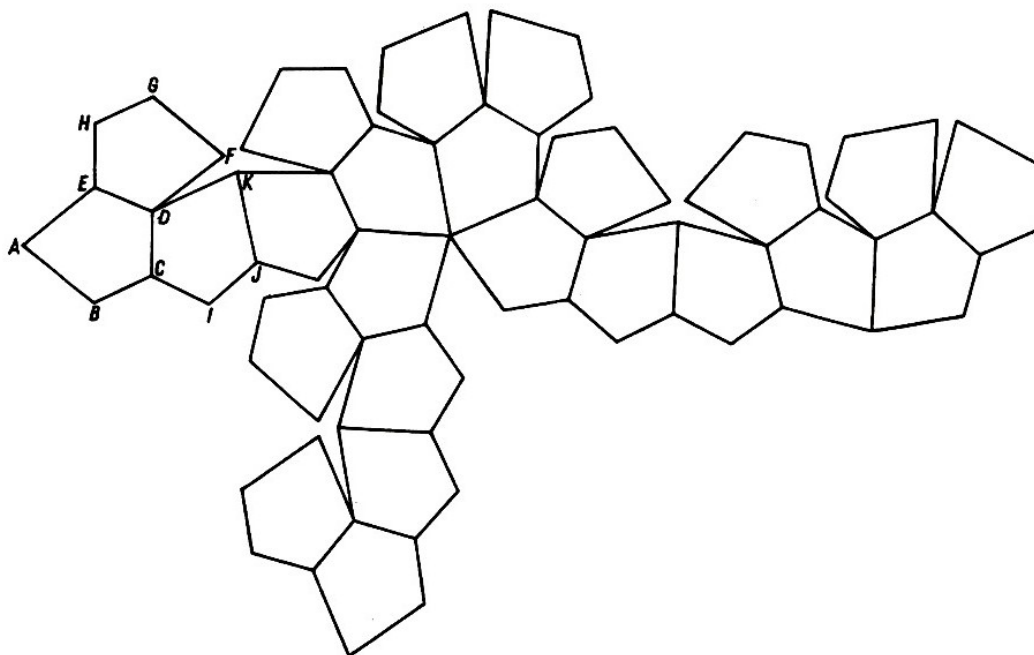


Abb. 50. Ebenes Netz des Pentagonikositetraeders

Das ebene Netz des Pentagonikositetraeders ist in Abb. 50 dargestellt. Es besteht aus acht Grundfiguren (24 Fünfecken).

Bei der praktischen Anfertigung dieses Polyeders verfährt man wie in den vorhergehenden Fällen.

h) Anfertigung des Hexakisoktaeders. Die Grundfigur besteht aus sechs kongruenten schiefwinkligen Dreiecken, die abwechselnd Seiten gemeinsam haben, welche den Winkeln gegenüberliegen, die annähernd gleich $87^{\circ}12'$ und $37^{\circ}46'30''$ sind.

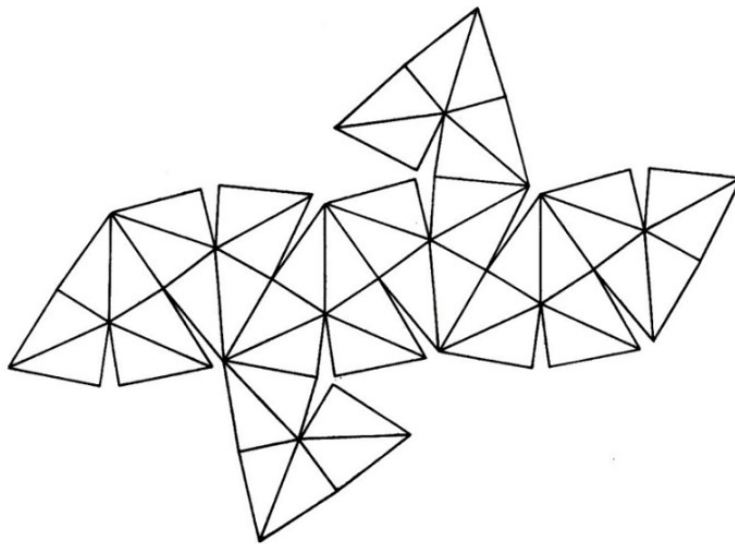


Abb. 51. Ebenes Netz des Hexakisoktaeders

Das ebene Netz des Hexakisoktaeders ist in Abb. 51 dargestellt. Es besteht aus 48 schiefwinkligen Dreiecken, d.h. aus acht Grundfiguren. Jede davon ersetzt ein gleichseitiges Dreieck aus dem ebenen Netz des Oktaeders (Abb. 18).

Bei der praktischen Anfertigung dieses Polyeders geht man wie in den bisherigen Fällen vor.

i) Anfertigung des Triakisikosaeders, des Rhombentriakontaeders, des Pentagonhexakontaeders, des Hexakisikosaeders und des Deltoidhexakontaeders.

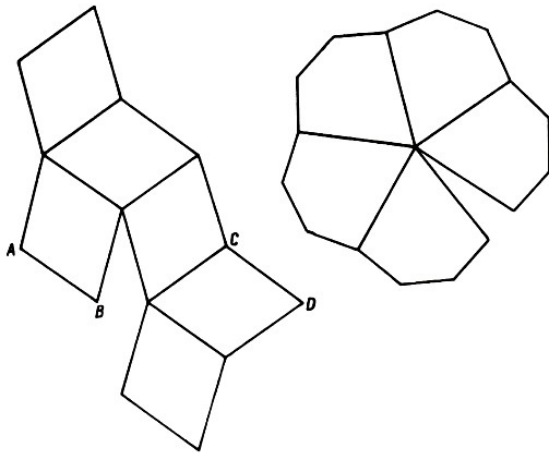
Weiter unten folgt die Konstruktion der Grundfiguren. Es werden Hinweise für den Zusammenbau gegeben, ohne dass jedoch für jedes dieser fünf Polyeder das ebene Netz dargestellt wird.

Die Grundfigur beim Triakisikosaeder besteht aus drei gleichschenkligen Dreiecken, die paarweise längs gleichlanger Seiten zusammenhängen, wie es die Dreiecke $ABCDE$ in Abb. 44 zeigen. Hierbei beträgt der stumpfe Winkel (etwa) $119^{\circ}3'$.

Das ebene Netz des Polyeders setzt sich aus zwanzig Grundfiguren zusammen, die wie die das Netz des Ikosaeders (Abb. 20) bildenden Dreiecke aufeinander folgen.

Die Grundfigur beim Rhombentriakontaeder besteht (Abb. 52) aus drei kongruenten Rhomben, deren Diagonalenverhältnis gleich $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist. Das ebene Netz entsteht aus der Vereinigung von fünf Grundfiguren derart, dass die Strecke AB der zweiten Grundfigur mit der Strecke CD aus der ersten zusammenfällt, usw.

Die Grundfigur beim Pentagonhexakontaeder besteht aus fünf kongruenten Fünfecken, die längs ihrer gleichlangen Seiten zusammenhängen. Der spitze Winkel beträgt in jedem Fünfeck (etwa) $67^{\circ}28'$, während die anderen vier Winkel einander gleich sind (Abb. 53).



Das ebene Netz dieses Polyeders setzt sich aus 60 Fünfecken zusammen, d.h. aus zwölf Grundfiguren, die wie die Fünfecke aus dem ebenen Netz des Dodekaeders (Abb. 19) aufeinander folgen.

Abb. 52. Grundfigur im ebenen Netz des Rhombentriakontaeders;
Abb. 53. Grundfigur im ebenen Netz des Pentagonhexakontaeders

Die Grundfigur beim Hexakisikosaeder besteht aus zehn kongruenten schiefwinkligen Dreiecken mit zwei Winkeln, die (etwa) 89° und $32^\circ 46'$ betragen. Die Dreiecke hängen wie in Abb. 54 zusammen. Das ebene Netz ergibt sich aus der Vereinigung von zwölf Grundfiguren (120 Dreiecken). Diese sind in analoger Weise wie die Fünfecke aus dem Dodekaedernetz (Abb. 19) zusammengesetzt.

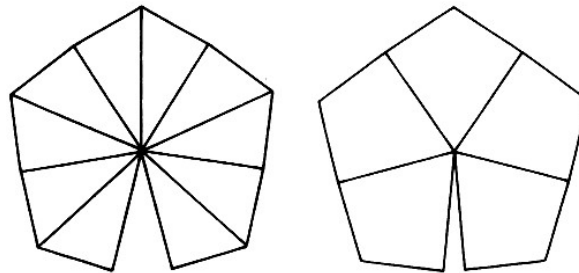


Abb. 54. Grundfigur im ebenen Netz des Hexakisikosaeders, Abb. 55. Grundfigur im ebenen Netz des Deltoidhexakontaeders

Die Grundfigur beim Deltoidhexakontaeder besteht aus fünf kongruenten Trapezoiden (Abb. 55), deren Winkel (etwa) $67^\circ 46'$, $86^\circ 59'$, $118^\circ 16'$ und wieder $86^\circ 59'$ betragen. Das ebene Netz dieses Polyeders erhält man wie die Netze der beiden vorgenannten Polyeder.

8 Anwendung der regulären und der halbregulären Polyeder

In der geometrischen Kristallographie kommen die (konvexen) regulären Polyeder sowie gewisse dual-archimedische Körper vor (vgl. Abb. 43), die allgemeine oder spezielle Formen in den fünf Klassen des kubischen Systems darstellen.

Die realen Kristalle sind Kombinationen von allgemeinen³⁰ und speziellen Formen aus einer Klasse. Genauer gesagt:

Die Kristalle der Substanzen, die im kubischen System kristallisieren, sind von ebenen Flächen begrenzt, welche (durch ihre Neigungen gegen ein Trieder mit drei rechten Winkeln) für gewisse Polyeder charakteristisch sind.

Es sollen hier nicht die Gesetze der geometrischen Kristallographie erörtert werden, denn das würde uns zu weit von unserem eigentlichen Gegenstand entfernen.³¹ Es sei jedoch wenigstens gesagt, dass die Struktur der kristallinen Substanzen keine fünfzähligen Drehachsen³² zulässt, weshalb unter den Kristallen weder Ikosaeder noch solche dual-archimedischen Körper vorkommen, die sich aus dem Ikosaeder und dem Pentagondodekaeder ableiten.

Im folgenden gehen wir auf die Kristallklassen des kubischen Systems ein, betrachten die dabei auftretenden, von uns bereits untersuchten Polyeder und geben einige Substanzen an, die in diesen Klassen kristallisieren.

Die tritetraedrische Klasse (T) ist dadurch charakterisiert, dass alle Kristalle vier dreizählige³³ und drei zweizählige³⁴ Achsen als Symmetrieelemente besitzen.

Die weiter unten aufgezählten Polyeder haben auch noch andere Symmetrieelemente. Ihre Flächen sind jedoch derartig kombiniert, dass die Kristalle aus dieser Klasse außer Drehungen um dreizählige und zweizählige Achsen keine Transformationen (in sich) zulassen.

Die Kristalle aus dieser Klasse können von Flächen der folgenden, von uns untersuchten Polyeder³⁵ begrenzt sein: Pentagondodekaeder³⁶, Triakistetraeder, Rhombendodekaeder, reguläres Tetraeder, Würfel.

Einige der wenigen Substanzen, die in dieser Klasse kristallisieren, ist das Natriumchlorat (Abb. 56).

³⁰Es gibt auch andere allgemeine Polyeder, die von uns aber nicht untersucht wurden, da sie weder regulär noch halbregulär sind.

³¹Näheres darüber findet sich in dem Hochschullehrbuch: Mineralogie, Teil 1, Kristallographie, von A. Codarcea, erschienen bei Editura didactica si pedagogica, 1961. Der deutsche Leser sei verwiesen auf [6] und [11a].

³²Man vgl. dazu das oben zitierte Lehrbuch S. 76-78, bzw. [17], S. 70, 213, oder [11a], S. 57ff. Ein Körper besitzt eine fünfzählige Drehachse, wenn er bei Drehungen von 72° , 144° , 216° und 288° um diese Achse in sich übergeht.

³³Ein Körper besitzt eine dreizählige Achse, wenn er bei Drehungen von 120° und 240° um diese Achse in sich übergeht.

³⁴Ein Körper besitzt eine zweizählige Achse, wenn er bei einer Drehung von 180° um diese Achse in sich übergeht.

³⁵Tatsächlich treten auch Flächen von Polyedern auf, die nicht regulär bzw. halbregulär sind.

³⁶Das steht nicht im Widerspruch zu der früheren Bemerkung, dass die kristallinen Substanzen keine fünfzähligen Achsen zulassen. Die Pentagondodekaederflächen, die im kubischen System auftreten, sind derartig mit Flächen anderer Polyeder kombiniert, dass der betreffende Kristall bei einer Drehung um einen Winkel von 72° nicht in sich übergeht.

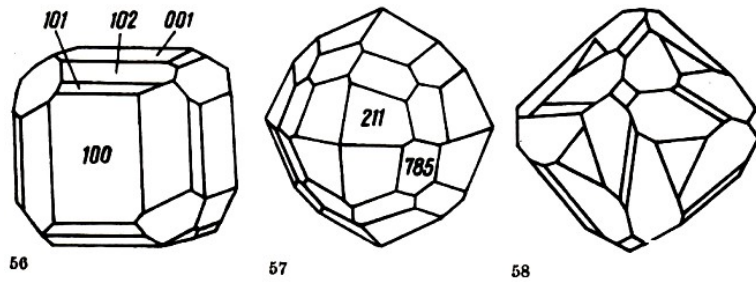


Abb. 56. Natriumchloratkrystall: 100, 001 - Würfelflächen; 101 - Rhombendodekaederfläche ; 102 - Pentagondodekaederfläche

Abb. 57. Salmiakkrystall: 211 - Deltoidikositetraederfläche; 785 - Pentagonikositetraederfläche

Abb. 58. Rotkupfererzkrystall

Die trioktaetrische Klasse (0) ist durch das Vorhandensein der folgenden Symmetrieelemente charakterisiert: drei vierzählige³⁷ Achsen, vier dreizählige Achsen, sechs zweizählige Achsen. Die Kristalle dieser Klasse enthalten auch Flächen von Polyedern, die, für sich betrachtet, noch andere Symmetrieelemente zulassen. Der Kristall als ganzes gestattet jedoch außer Drehungen keine anderen Transformationen (in sich) um die vierzähligen, dreizähligen und zweizähligen Achsen.

Die Kristalle aus dieser Klasse können von Flächen der folgenden, von uns untersuchten Polyeder begrenzt sein: Pentagonikositetraeder, Tetrakisheptaeder, Deltoidikositetraeder, Triakisoktaeder, Rhombendodekaeder, Würfel, Oktaeder.

Beispiele für einige Substanzen, die in dieser Klasse kristallisieren: Salmiak - NH_4Cl (Abb. 57), Rotkupfererz - Cu_2O (Abb. 58).

Die hexakistetraedrische Klasse (T_d) ist dadurch charakterisiert, dass die betreffenden Kristalle nur folgende Symmetrieelemente besitzen: drei vierzählige Drehspiegelachsen³⁸, vier dreizählige Achsen, sechs Spiegelebenen.

Die Kristalle aus diesen Klassen können von folgenden von uns untersuchten Polyedern begrenzt sein: Tetrakisheptaeder, Triakisoktaeder, Rhombendodekaeder, Würfel, reguläres Tetraeder.

Beispiele für Substanzen, die in dieser Klasse kristallisieren: Zinkblende - ZnS (Abb. 59, 60), Boracit, Eulytin, Würfelerz.

Die didodekaedrische Klasse (T_h) umfasst Kristalle, welche die folgenden Symmetrieelemente zulassen: vier dreizählige Achsen, drei zweizählige Achsen, drei Spiegelebenen und ein Symmetriezentrum.

Die Kristalle aus dieser Klasse können von Flächen folgender untersuchter Polyeder begrenzt sein: Triakisoktaeder, Deltoidikositetraeder, Pentagondodekaeder, Rhombendodekaeder, Oktaeder, Würfel.

Beispiele für Minerale, die in dieser Klasse kristallisieren: Pyrit - FeS_2 (Abb. 61), Cobaltin - $CoAsS$ (Abb. 62).

Die hexakisoktaedrische Klasse (O_h) besitzt die höchste Symmetrie, die für kristallisierte Substanzen möglich ist. Ihre Kristalle besitzen die folgenden Symmetrieelemente: drei vierzählige

³⁷Ein Körper besitzt eine vierzählige Achse, wenn er bei Drehungen von 90° , 180° , 270° um diese Achse in sich übergeht.

³⁸Ein Körper besitzt eine vierzählige Drehspiegelachse, wenn er bei einer Drehung von 90° um diese Achse und einer anschließenden Spiegelung an einer zu dieser Achse senkrechten Ebene in sich übergeht.

Achsen, vier dreizählige Achsen, sechs zweizählige Achsen, neun Spiegelebenen und ein Symmetriezentrum.

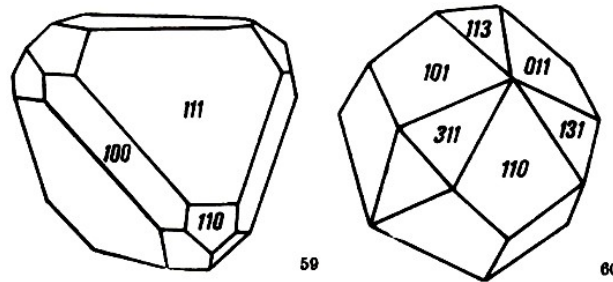


Abb. 59. Zinkblendekristall: 100 - Würfelfläche; 110 - Rhombendodekaederfläche; 111 - Fläche eines regulären Tetraeders

Abb. 60. Zinkblendekristall: 101, 110, 011 - Rhombendodekaederflächen; 113, 131, 311 - Triakistetraederflächen

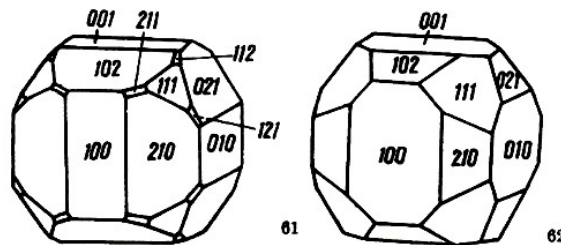


Abb. 61. Pyritkristall: 001, 010, 100 - Würfelflächen; 111 - Oktaederfläche; 021, 210 - Pentagondodekaederflächen; 211, 112, 121 - Deltoidikositetraederflächen

Abb. 62. Cobaltinkristall: 100, 010, 001 - Würfelflächen; 111 - Oktaederfläche ; 102, 210 - Pentagondodekaederflächen

Die Kristalle aus dieser Klasse können von Flächen folgender untersuchter Polyeder begrenzt sein: Hexakisoktaeder, Triakisoktaeder, Deltoidikositetraeder, Tetrakisheptaeder, Rhombendodekaeder, Oktaeder, Würfel.

In dieser Klasse kristallisieren sehr viele Minerale - etwa 15% aller bekannten. Als Beispiele seien angeführt: Diamant, Gold, Silber, Kupfer, Platin, Eisen, Kochsalz, Bromsilber, Spinelle, Chromit, Pechblende (Uranoxyd), Granat (Aluminiumsilikat) (Abb. 63), Flussspat - CaF_2 (Abb. 64), Bleiglanz (Abb. 65).

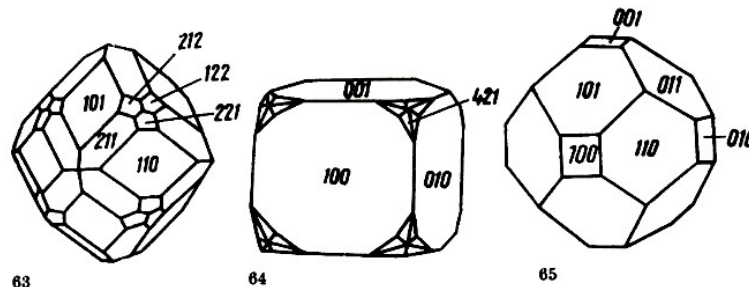


Abb. 63. Granatkristall: 110, 101 - Rhombendodekaederflächen; 211 - Deltoidikositetraederfläche; 221, 122, 212 - Triakisoktaederflächen

Abb. 64. Flussspatkristall: 100, 010, 001 - Würfelflächen; 421 - Hexakisoktaederfläche

Abb. 65. Bleiglanzkristall: 100, 010, 001 - Würfelflächen; 101, 110, 011 - Rhombendodekaederflächen

Bemerkung. Die Kombination von Flächen regulärer Polyeder, die als einfache Formen des kubischen kristallinen Systems auftreten, kann auch auf archimedische Körper führen. Ein Beispiel dafür stellt der Pyrit dar, der in Kuboktaedern (Abb. 28g) kristallisieren kann.

In der Ornamentik kommen reguläre und halbrekuläre Polyeder bei verschiedenen Gelegenheiten vor:

- beim Schleifen von Edelsteinen, speziell solcher, die im kubischen System kristallisieren;
- bei der Gestaltung von Ornamenten in Reliefs (es finden sich dabei Würfel, Oktaeder, abgestumpfte Tetraeder, abgestumpfte Oktaeder, abgestumpfte Würfel, archimedische Antiprismen, Triakishexaeder usw.);
- bei der Herstellung von Gebrauchsgegenständen (Schachteln, Bonbonnieren), Lampen (Abb. 66) usw.



Abb. 66. Laterne mit 30 sechseckigen und fünfeckigen Flächen; Bologna, 17. Jh.

Die regulären und die halbrekulären Polyeder werden in der Ornamentik nur in geringem Umfang verwendet, was bei der Vielfalt ihrer geometrischen Eigenschaften und den Möglichkeiten ihrer Benutzung eigentlich merkwürdig ist.

9 Aufgaben

1. Bezüglich einer der Flächen mit dem größten Abstand von der vertikalen Drehachse konstruiere man das zum Polyeder aus Abb. 7 symmetrische Polyeder.

Man zeige, dass das aus dem gegebenen und dem konstruierten Polyeder gebildete Polyeder vom Geschlecht 2 ist.

Hinweise

a) Man stelle die maximale Anzahl von ebenen Schnitten fest, welche das Polyeder in Streckenzügen schneiden, die aus den Kanten der Polyederfläche bestehen, ohne dabei die einfach zusammenhängende Oberfläche so zu zerlegen, dass sie zerfällt.

b) Es kann auch die Beziehung (6) aus dem verallgemeinerten Eulerschen Polyedersatz benutzt werden.

2. Man zeige, dass für jedes Polyeder die folgenden Beziehungen gelten:

$$3F \leq 2K \quad \text{und} \quad 3E \leq 2K$$

Hinweise

a) Verfährt man wie beim Beweis von Satz 3, so zeigt sich, dass die Summe der Seiten aller Flächen (die gleich $2K$ ist) gleich $3F$ ist, falls alle Flächen Dreiecke sind, und größer als $3F$, wenn auch Flächen mit mehr als drei Seiten vorkommen.

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass die Summe aller Kanten der Polyederecken (die gleich $2K$ ist) gleich $3E$ ist, wenn alle diese Ecken Triederecken sind, und größer als $3E$, wenn auch Polyederecken mit mehr als drei Kanten vorkommen.

b) Die gegebenen Ungleichungen können auch mit Hilfe der im Satz 3 hergeleiteten Beziehungen (1') bzw. (1'') bewiesen werden.

3. Man zeige, dass in jedem Polyeder vom Geschlecht Null die folgenden Beziehungen gelten:

$$K \leq 3F - 6 \quad ; \quad K \leq 3E - 6$$

$$E + 4 \leq 2F \leq 4E - 8 \quad ; \quad F + 4 \leq 2E \leq 4F - 8$$

Hinweise . Die ersten beiden Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus den Ungleichungen (8') und (9'). Zum Beweis der übrigen geht man von dem in der Form

$$2E + 2F = 2K + 4$$

geschriebenen Eulerschen Polyedersatz aus. Unter Berücksichtigung der in Aufgabe 2 bewiesenen Ungleichungen ergibt sich

$$2E + 2F \geq 3E + 4 \quad \text{und} \quad 2E + 2F \geq 3F + 4$$

und daraus folgt

$$2F \geq E + 4 \quad \text{und} \quad 2E \geq F + 4$$

Multipliziert man diese Ungleichungen mit 2, so erhält man sofort die restlichen Beziehungen.

4. Man beweise: Ein Polyeder vom Geschlecht Null besitzt mindestens eine Dreiecksfläche oder eine Triederecke.

Hinweise

a) Der Beweis kann indirekt geführt werden, indem man in den Beziehungen (1') und (1'') $F_3 = E_3 = 0$ setzt. Es folgt

$$2K \geq 4F \quad \text{und} \quad 2K \geq 4E$$

und daraus

$$E + F \leq K$$

was dem Eulerschen Polyedersatz widerspricht.

b) Die Behauptung lässt sich auch mit Hilfe des Ergebnisses von Folgerung 2 zum Eulerschen Polyedersatz beweisen.

5. Man zeige: In einem Polyeder vom Geschlecht Null kann nicht jede Fläche mehr als fünf Seiten bzw. jede Polyederecke mehr als fünf Kanten haben.

Hinweise

a) Wenn jede Fläche mehr als fünf Seiten hätte, wäre $F_3 = F_4 = F_5 = 0$, und das ergäbe, eingesetzt in (1'),

$$2K = 6F_6 + 7F_7 + \dots \quad \text{oder} \quad 2K \geq 6F, \quad \text{d.h.} \quad K \geq 3F$$

Dieses Resultat widerspricht jedoch der ersten Ungleichung aus Aufgabe 3: $K \leq 3F - 6$. Daher ist die Annahme $F_3 = F_4 = F_5 = 0$ falsch.

Hätte jede Polyederecke mehr als fünf Kanten, d.h., wäre $E_3 = E_4 = E_5 = 0$, und setzte man das in (1'') ein, so ergäbe sich $2K = 6E_6 + 7E_7 + \dots$ oder $K \geq 3E$. Das widerspricht aber der zweiten Ungleichung aus Aufgabe 3.

b) Einen anderen Beweis erhält man, wenn man die Folgerungen 3 und 4 aus dem Eulerschen Polyedersatz benutzt.

6. Welche Polyeder vom Geschlecht Null besitzen mindestens zehn Kanten?

Hinweise. Entweder mit Benutzung der Beziehung (8) oder direkt kann gezeigt werden, dass Polyeder mit ein, zwei, drei, vier, fünf Kanten nicht existieren können. Das Polyeder mit minimaler Kantenzahl ist das Tetraeder: $K = 6$.

Aus der Beziehung (8) folgt, dass es keine Polyeder mit sieben Kanten geben kann. Das würde nämlich auf die nicht erfüllbaren Ungleichungen

$$13 \leq 3F \leq 14$$

führen.

Polyeder mit acht Kanten gibt es; denn die Beziehung (8) führt auf die Ungleichungen $14 \leq 3F \leq 16$, die $F = 5$ als Lösung besitzen, während (9) zeigt, dass auch $E = 5$ ist. Es handelt sich dabei um Pyramiden mit einem Viereck als Grundfläche sowie um alle dazu isomorphen Polyeder.

Polyeder mit neun Kanten existieren, da die Beziehungen (8) und (9) auf die Ungleichungen $15 \leq 3F \leq 18$ und $15 \leq 3E \leq 18$ führen. In Verbindung mit dem Eulerschen Polyedersatz ergeben sich aus $F + E = 11$ die Lösungen $F = 5, E = 6$ und $F = 6, E = 5$.

Im ersten Fall erhält man ein Polyeder, das zu einem dreiseitigen Prisma isomorph ist. Im zweiten Fall ist das entstehende Polyeder zu einer dreiseitigen Pyramide isomorph.

7. Man zeige: Wenn ein Polyeder vom Geschlecht Null keine Dreiecks- und Vierecksflächen

besitzt, dann hat es mindestens zwanzig Triederecken. Besitzt es keine Triederecken und Tetraederecken, so hat es mindestens zwanzig Dreiecksflächen.

Hinweise. Gleichung (11) wird mit 3 multipliziert, Gleichung (10) mit 2. Die Ergebnisse werden addiert. Nach Zusammenfassen entsprechender Glieder erhält man

$$4F_3 + 2F_4 + E_3 = 20 + 2F_6 + \dots + 2E_4 + 5E_5 + \dots$$

woraus für $F_3 = F_4 = 0$ folgt: $E_3 \geq 20$.

Vertauscht man die Rollen der Gleichungen (10) und (11) in der obigen Rechnung, so ergibt sich

$$4E_3 + 2E_4 + F_3 = 20 + 2E_6 + \dots + 2F_4 + 5F_5 + \dots$$

woraus für $E_3 = E_4 = 0$ folgt: $F_3 \geq 20$.

8. Man beweise direkt, dass es nur fünf Klassen von konvexen regulären Polyedern gibt.

Hinweise. Da die Summe der ebenen Winkel in einer konvexen Polyederecke kleiner als 360° ist, folgt auf Grund von Satz 2, dass die Polyederecken in einem regulären Polyeder nicht beliebig viele Kanten haben können.

Wenn daher die Flächen einer Polyederecke (die zu einem regulären Polyeder gehört) gleichseitige Dreiecke sind ($l = 3$), könnte die betreffende Polyederecke drei, vier oder fünf solche Flächen besitzen (denn wären es sechs oder mehr, so würde die Summe der entsprechenden Winkel mindestens 360° sein).

Wenn die Flächen einer Polyederecke (aus einem regulären Polyeder) Quadrate oder Fünfecke sind, könnte die betreffende Polyederecke nur drei solche Flächen besitzen. Wären es vier oder mehr Quadrate, so würde die Summe der ebenen Winkel mindestens 360° sein. Hätte die Polyederecke vier oder mehr Fünfecke, so würde die Summe der ebenen Winkel die Zahl 360° ebenfalls übersteigen.

Die Flächen eines regulären Polyeders können keine Polygone mit mehr als fünf Seiten sein; denn die Summe der ebenen Winkel eines Polyeders mit drei derartigen Flächen beträgt 360° (für das Sechseck) oder mehr (für Polygone mit mehr als sechs Seiten).

Somit haben sich fünf Klassen von regulären Polyedern ergeben:

$$l = 3, m = 3; \quad l = 4, m = 3; \quad l = 3, m = 4; \quad l = 5, m = 3; \quad l = 3, m = 5;$$

die mit den in Satz 6 angegebenen übereinstimmen.

9. Man gebe für das reguläre Oktaeder mit der Kante a eine geometrische Konstruktion mit Hilfe seiner Diagonalen an.

Hinweise. Wie der Abb. 6 zu entnehmen ist, schneiden sich drei Diagonalen AC , BD , EE' des Oktaeders unter rechten Winkeln, und zwar in gleichen Teilen der Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Nun kann die Konstruktion des Oktaeders unmittelbar ausgeführt werden.

Danach wird gezeigt, dass das entstandene Polyeder gleich lange Kanten besitzt.

10. Man zeige, dass sich ein reguläres Oktaeder ergibt, wenn man die Flächenmittelpunkte eines Würfels verbindet, und dass ein Würfel entsteht, wenn man die Flächenmittelpunkte eines regulären Oktaeders verbindet.

Hinweise. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge $a\sqrt{2}$. Verbindet man den Mittelpunkt der Deckfläche $A'B'C'D'$ bzw. der Grundfläche $ABCD$ (Abb. 9) mit den Mittelpunkten der Seitenflächen, so ergeben sich acht Strecken der Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = a$.

Werden die Mittelpunkte der Seitenflächen verbunden, so entsteht ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls gleich a sind. Die Flächen des solchermaßen erhaltenen Oktaeders sind gleichseitige Dreiecke.

Verbindet man die Mittelpunkte der nebeneinander liegenden Flächen des regulären Oktaeders, so zeigt sich in entsprechender Weise, dass sechs Quadrate entstehen, welche die Flächen eines Würfels sind.

11. Man zeige, dass sich ein reguläres Ikosaeder ergibt, wenn man die Flächenmittelpunkte eines regulären Dodekaeders verbindet, und dass ein reguläres Dodekaeder entsteht, wenn man die Flächenmittelpunkte eines regulären Ikosaeders verbindet.

Hinweise. Der Mittelpunkt einer fünfeckigen Fläche wird mit den Mittelpunkten der fünf benachbarten Flächen verbunden. Es entsteht eine reguläre Pentaederecke.

Wiederholt man diesen Vorgang in jedem Flächenmittelpunkt, so ergeben sich zwölf kongruente reguläre Pentaederecken. Jeder Ecke des Dodekaeders wird jeweils eine Fläche des neuen Polyeders entsprechen. Dieses besitzt also zwanzig Flächen, und diese sind gleichseitige Dreiecke.

In analoger Weise wird gezeigt, dass durch Verbinden der Flächenmittelpunkte eines regulären Ikosaeders zwölf kongruente reguläre Fünfecke entstehen, die den Fünfecken des Ikosaeders von der Art $BCDEF$, $ABGHD$ (Abb. 15) ähnlich sind.

12. Einem Würfel lassen sich zwei reguläre Tetraeder einbeschreiben: $A'C'D$ und $AC'B'D'$ (Abb. 9). Man zeige, dass diese beiden Tetraeder dieselbe Drehgruppe besitzen, die eine Untergruppe der Gruppe aller Drehungen des Würfels ist.

Man zeige weiter, dass die Gruppe der Drehungen des Tetraeders $A'C'D$ ungeändert bleibt, wenn dieses Tetraeder einer Transformation aus der Gruppe der Drehungen des Würfels unterworfen wird.

Hinweise. Das Tetraeder $A'C'D$ ($AC'B'D'$) ist regulär, denn seine Kantenlängen sind gleich $m\sqrt{2}$, wenn m die Länge der Würfelkante ist.

Konstruiert man die Achsen der Drehungen, die jedes Tetraeder in sich überführen, so stellt man fest, dass sie mit Achsen von Drehungen übereinstimmen, die den Würfel in sich überführen. Danach überzeugt man sich sogleich, dass die Drehgruppe eines Tetraeders aus der Hälfte der Elemente der Drehgruppe des Würfels besteht.

Bei einer Transformation aus der Gruppe der Drehungen des Würfels geht das Tetraeder $A'C'D$ in sich oder in $AC'B'D'$ über. Somit stimmen die zulässigen Drehungen beider Tetraeder überein (vgl. auch Abb. 25).

13. Man berechne die Flächenwinkel der konvexen regulären Polyeder.

Hinweise

a) Zur Berechnung des Winkels AED im regulären Tetraeder (Abb. 9) benutzen wir die Beziehungen

$$OE = \frac{1}{3}ED = \frac{1}{3}AE \quad \text{sowie} \quad \cos \angle AED = \frac{1}{3}$$

daher ist $\angle AED = 70^\circ 31' 44''$.

Mit O wurde hierbei der Schwerpunkt des Dreiecks BCD bezeichnet.

b) Zur Berechnung des Winkels EFI im regulären Oktaeder mit der Kante a (Abb. 6) bzw.

des Winkels bei E , der gleich der Hälfte des Flächenwinkels ist, ergeben sich die Beziehungen

$$EF = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad FI = \frac{a}{2}, \quad EI = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

daraus folgt

$$\cos \angle E = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan \angle E = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \angle EFE' \approx 109^\circ 28' 16''$$

c) Für das reguläre Dodekaeder mit der Kantenlänge a (Abb. 12) werden die Kanten, welche in den Eckpunkten einer Fläche enden (beispielsweise FA , HB , JC , LD , NE) über diese Seite ($ABCDE$) hinaus verlängert, bis sie sich in einem Punkt V schneiden.

Diese Kanten laufen tatsächlich in einem Punkt zusammen, da sie auf der betreffenden Fläche des Dodekaeders gleich geneigt sind. Sie bilden somit eine reguläre fünfseitige Pyramide (Abb. 67).

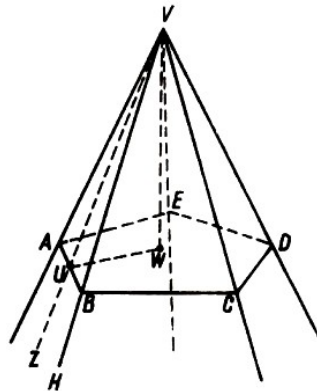


Abb. 67. Polyederecke, entstanden bei der Verlängerung der Kanten mit Endpunkten in den Ecken einer Fläche des regulären Dodekaeders

Der gesuchte Flächenwinkel ist ZUW , der Ergänzungswinkel zu VUW .

Der Winkel HBA beträgt 108° , denn er ist ein Winkel aus einem regulären Fünfeck. Daher ist der Winkel VBU gleich 72° . Der Winkel BWA ist gleich 72° , denn er ist Zentriwinkel über einer Seite des regulären Fünfecks. Es ergeben sich die Beziehungen

$$VU = \frac{a}{2} \tan 72^\circ, \quad UW = \frac{a}{2} \cot 36^\circ$$

daraus folgt

$$\cos \angle VUW = \frac{UW}{VU} = \frac{\cot 36^\circ}{\tan 72^\circ} = \frac{1 - \tan^2 18^\circ}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

sowie $\tan \angle VUW = 2$.

Daher ist $\angle VUW \approx 63^\circ 26' 6''$ und $\angle ZUW \approx 116^\circ 33' 54''$.

Der Flächenwinkel im regulären Dodekaeder lässt sich auch unter Benutzung des zweiten Teiles von Aufgabe 11 berechnen. Dort ergab sich, dass dieser Winkel beispielsweise gleich dem von den Ebenen der Fünfecke $ADIJF$ und $BCDEF$ (Abb. 15) eingeschlossenen Winkel ist.

Diese beiden Ebenen schneiden sich in der Geraden DF . Bezeichnet M den Mittelpunkt der Strecke DF , so ist die Seite AE der Länge a im Dreieck AME (Abb. 68) die Kante des Iksaeders, und der Winkel $\angle AME$ ist der Flächenwinkel des regulären Dodekaeders. Es ist

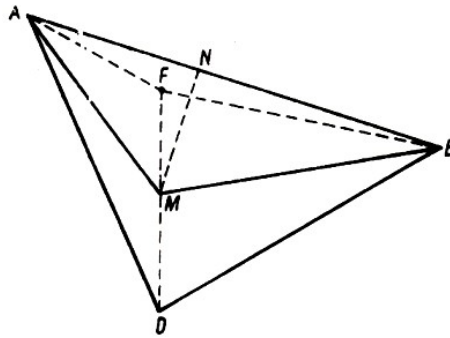


Abb. 68. Hilfskonstruktion zur Berechnung des Flächenwinkels im regulären Dodekaeder

$$AM = ME = a \cos \frac{\angle FED}{2} = a \cos 54^\circ = a \sin 36^\circ$$

Es sei N der Fußpunkt des von M auf AE gefällten Lotes. Wir erhalten die Beziehung

$$\sin \frac{\angle AME}{2} = \frac{AN}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{a \sin 36^\circ} = \frac{1}{2 \sin 36^\circ}$$

daher ist $\frac{\angle AME}{2} \approx 58^\circ 16' 57''$; daraus folgt $\angle AME = \angle ZUW$ (aus Abb. 67) $\approx 116^\circ 33' 54''$.

d) Bezeichnet P den Mittelpunkt einer Kante der Länge a (beispielsweise von CD , Abb. 69) eines regulären Ikosaeders (Abb. 15), so ist der gesuchte Flächenwinkel APH . Dabei ist AH die Seite des Sternfünfecks, das dem regulären Fünfeck $ABGHD$ mit der Seite a einbeschrieben ist.

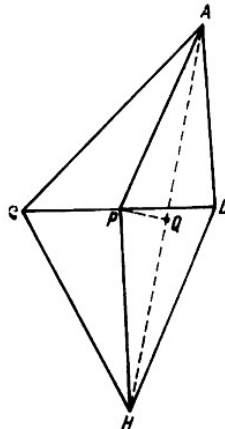


Abb. 69. Hilfskonstruktion zur Berechnung des Flächenwinkels im Ikosaeder

Der Fußpunkt des von P auf AH gefällten Lotes sei Q . Es ergeben sich die Beziehungen

$$AP = PH = a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad AQ = QH = a \sin 54^\circ$$

sowie

$$\sin \frac{\angle APH}{2} = \frac{AQ}{AP} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 60^\circ}$$

daraus folgt $\angle APH \approx 138^\circ 11' 23''$.

Der Flächenwinkel eines regulären Ikosaeders kann auch mit Hilfe von Aufgabe 11 berechnet werden. Der Mittelpunkt des Fünfecks $BCDEF$ wird mit R , der des Fünfecks $CDILG$ mit S bezeichnet (Abb. 70). Der von den Ebenen dieser beiden Fünfecke gebildete Flächenwinkel wird mit dem ebenen Winkel $\angle RPS$ gemessen, und er ist der Ergänzungswinkel des Flächenwinkels im Dodekaeder, d.h. $\angle RPS \approx 63^\circ 26' 6''$.

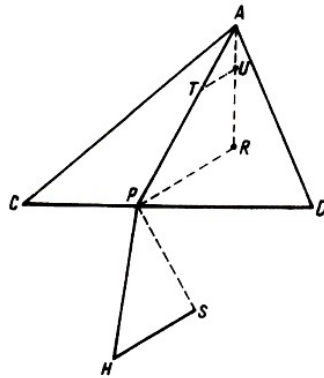


Abb. 70. Beziehung zwischen den Flächenwinkeln im regulären Dodekaeder und im Iksaeder

Den Winkel APR kann man erhalten, wenn man bedenkt, dass

$$AP = a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad PR(= UW, \text{ Abb. 67}) = \frac{a}{2} \cot 36^\circ$$

ist; daher ist

$$\cos \angle APR = \frac{PR}{AP} = \frac{\cot 36^\circ}{\cot 30^\circ}$$

Folglich ist $\angle APR \approx 37^\circ 22' 38''$.

Unmittelbar ergibt sich $\angle HPS = \angle APR$ und

$$\angle APH = \angle RPS + 2\angle APR \approx 63^\circ 26' 6'' + 74^\circ 45' 17''$$

woraus der vorher errechnete Wert folgt.

Bemerkungen. Der Flächenwinkel im Würfel beträgt offenbar 90° .

Die oben für die Flächenwinkel der anderen konvexen regulären Polyeder errechneten Werte sind gerundet, damit nicht Bruchteile von Sekunden vorkommen. Der auftretende Fehler ist jedesmal kleiner als eine halbe Sekunde. Aufgerundet wurde beim regulären Tetraeder und beim regulären Iksaeder, abgerundet beim regulären Oktaeder und beim regulären Dodekaeder.

Berücksichtigt man, dass die regulären Polyeder einer Sphäre einbeschrieben werden können, und zieht man eine Formel aus der sphärischen Trigonometrie heran, so lässt sich eine Beziehung angeben, welche die Berechnung der Flächenwinkel für alle regulären Polyeder gestattet:

$$\sin \frac{D}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\sin \frac{180^\circ}{l}}$$

Dabei wurden, wie in Satz 6, mit m die Anzahl der Kanten der Polyederecken und mit l die Anzahl der Seiten der Flächen des betrachteten regulären Polyeders bezeichnet, während D für seinen Flächenwinkel steht.

Die oben angestellten Berechnungen setzen die Kenntnis der sphärischen Trigonometrie nicht voraus; sie regen jedoch zu einem eingehendem Studium der geometrischen Eigenschaften der Polyeder an, da sie für die verschiedenen Polyeder die Benutzung verschiedener Wege erfordern.

14. Man zeige, dass jedes (konvexe) reguläre Polyeder einer Sphäre einbeschrieben und einer zu dieser Sphäre konzentrischen Sphäre umbeschrieben werden kann.

Hinweise

a) Zum Beweis der ersten Behauptung werden zwei benachbarte Flächen F' und F'' des regulären Polyeders betrachtet, die die Kante MN gemeinsam haben. Da F' und F'' reguläre Polyeder sind, lassen sie sich zwei Kreisen mit den Mittelpunkten C' und C'' einbeschreiben, die beide zu einer Sphäre mit dem Mittelpunkt O gehören.

Der Punkt O ist durch den Schnittpunkt der in C' und C'' auf den Ebenen der Flächen F' und F'' errichteten Senkrechten bestimmt. (Es ist leicht zu zeigen, dass sich diese Senkrechten schneiden, weil die Punkte M, N zu beiden Kreisen gehören.)

Das Polyeder geht bei einer Drehung um die Achse OC' in sich über, wobei MN auf die andere Seite der Fläche F' zu liegen kommt. F'' fällt dabei mit einer anderen Fläche F''' zusammen, die zu F'' benachbart ist.

Die genannte Drehung transformiert auch die Kugel in sich, so dass also die Eckpunkte von F''' auf der Kugel liegen. Damit ist gezeigt, dass die Ecken aller zu F', F'', F''' usw. benachbarten Flächen auf dieser Kugel liegen.

b) Wie man leicht sieht, sind alle Pyramiden mit der Spitze O , deren Grundflächen die Flächen des Polyeders sind, kongruent; denn bei den oben angegebenen Drehungen gehen sie ineinander über. Die (gleichen) Höhen dieser Pyramiden sind Radien der dem regulären Polyeder einbeschriebenen Kugel. Die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der Flächen des Polyeders.

Bemerkungen

1. Der obenstehende Beweis bleibt - im wesentlichen - auch für reguläre Sternpolyeder gültig, wenn man die besonderen Definitionen ihrer Ecken und Flächen berücksichtigt, wie sie im betreffenden Abschnitt gegeben werden.

2. Jeder archimedische Körper kann einer Kugel S_2 einbeschrieben werden, die zu der Kugel S_1 konzentrisch ist, welche dem regulären Polyeder umbeschrieben ist, aus dem man das halbreguläre Polyeder erhält.

Diese Behauptung beweist man durch eine Analyse der in den nachfolgenden Aufgaben untersuchten Typen, bei der sich herausstellt, dass der Abstand des Mittelpunktes der Kugel S_1 von allen Ecken des betreffenden halbregulären Polyeders derselbe ist, nämlich gleich der Länge des Radius der Kugel S_2 .

15. Man führe die geometrische Konstruktion³⁹ derjenigen archimedischen Körper aus, die man durch Abstumpfung erhält⁴⁰, und berechne ihre Flächenwinkel.

Hinweise

a) Für das abgestumpfte Tetraeder wurde die Konstruktion bereits angegeben (vgl. dazu Abb. 25). Seine Flächenwinkel⁴¹ sind $D_{6-6} = D_{Tetr} \approx 70^\circ 31' 44''$ (was unmittelbar aus der Abbildung abgelesen werden kann) sowie $D_{6-3} = D_{Okt} \approx 109^\circ 28' 16''$ (was man zeigen kann, indem man in der Abb. 25 ebene Schnitte legt, die zu den Dreiecksflächen parallel sind und durch die Mittelpunkte der Kanten des Tetraeders gehen, und bedenkt, dass dabei ein Oktaeder entsteht).

³⁹Im Sinne der Ausführungen über die Konstruktion der konvexen regulären Polyeder in Abschnitt 3.

⁴⁰Vgl. die Punkte a) - e) in Abschnitt 6.

⁴¹Die Bezeichnung D_{m-n} steht für einen Flächenwinkel zwischen zwei Flächen mit m bzw. n Seiten. Mit D_{Tetr} , D_{Okt} , $D_{Wür}$, D_{Dod} bezeichnen wir die Flächenwinkel der regulären Polyeder, deren Anfangsbuchstaben sie als Index haben.

b) Das abgestumpfte Oktaeder erhält man folgendermaßen aus dem regulären Oktaeder: Jede Kante wird in drei gleich lange Strecken geteilt. Die vier einer Ecke nächstgelegenen Teilpunkte (auf den in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten) gehören zu einer Ebene, die einer Diagonalebene des Oktaeders parallel ist. Legt man in dieser Weise durch alle Ecken des Oktaeders Schnitte, so werden seine Dreiecksflächen sechseckig, und sechs neue quadratische Flächen kommen hinzu.

Die Flächenwinkel errechnen sich leicht zu

$$D_{6-6} = D_{Okt} \approx 109^\circ 29' 16'' \quad , \quad D_{6-4} = 180^\circ - \frac{D_{Okt}}{2} \approx 180^\circ - 54^\circ 44'' = 125^\circ 15' 52''$$

Die letzte Behauptung folgt aus Abb. 6, kombiniert mit Abb. 71, in der $\angle EFE'$ gleich D_{Okt} ist, während GH die zur Schnittebene (welche die quadratische Fläche bestimmt) und zur Ebene EFE' gehörende Gerade ist.

c) Das abgestumpfte Ikosaeder ergibt sich folgendermaßen aus dem regulären Ikosaeder: Jede Kante des Ikosaeders wird in drei gleich lange Strecken geteilt. Die fünf einer Ecke nächstgelegenen Teilpunkte (auf den in dieser Ecke zusammenstoßenden Kanten) liegen in einer Ebene, die zur Ebene eines Fünfecks parallel ist (vgl. dazu die geometrische Konstruktion des Ikosaeders).

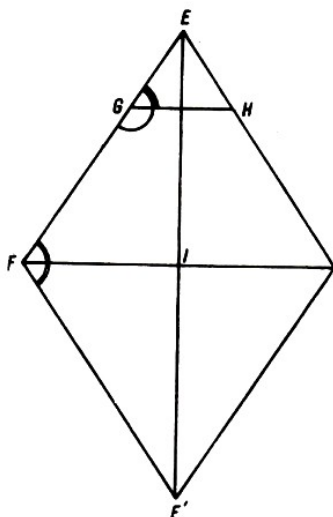


Abb. 71. Hilfskonstruktion zur Berechnung des Flächenwinkels D_{6-4} im abgestumpften Oktaeder

Schneidet man alle Ecken des Ikosaeders mit solchen Ebenen, dann gehen die Dreiecksflächen in reguläre Sechsecke über, und jede Ecke wird durch ein Fünfeck ersetzt. Für die Flächenwinkel des abgestumpften Ikosaeders erhält man

$$D_{6-6} = D_{Ikos} \approx 138^\circ 11' 23''$$

$$D_{6-5} = 180^\circ - \angle APR \text{ (vgl. Aufgabe 13 d)} \approx 142^\circ 37' 22''$$

Die letzte Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass die der Ecke A entsprechende Schnittebene zur Ebene des Fünfecks $BCDEF$ (Abb. 15) parallel und $D_{6-5} = \angle PTU$ ist (Abb. 70), wobei $AT = \frac{1}{3}AP$ und $AU = \frac{1}{3}AR$ ist.

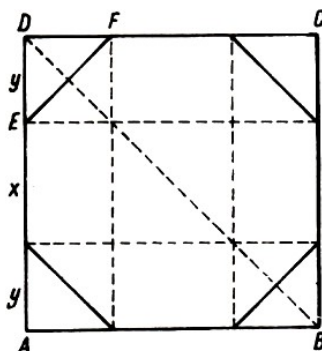


Abb. 72. Ebener Schnitt eines Würfels zur Bestimmung der Fläche eines abgestumpften Würfels

d) Den abgestumpften Würfel erhält man folgendermaßen aus dem Würfel:

Jede Kante des Würfels wird in drei Strecken der Länge y, x, y geteilt (Abb. 72), so dass bei der Verbindung von drei Teilpunkten - den einer Ecke nächstgelegenen Teilpunkten auf den in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten - eine zu einer Diagonalebene des Würfels parallele Ebene entsteht.

Schneidet man in analoger Weise jede Ecke des Würfels, so werden seine quadratischen Flächen zu regulären Achtecken, und jede Ecke wird durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt.

Damit ein reguläres Achteck entsteht, muss die Strecke, die auf einer Seite zwei Teilpunkte verbindet (Abb. 72), gleich der von der Seite a des Quadrates übrig bleibenden Strecke zu sein. So ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + 2y = a \quad , \quad \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{y}{a}$$

Daraus erhält man $x = a(\sqrt{2} - 1)$ und $y = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Nun kann die geometrische Konstruktion des abgestumpften Würfels aus einem gegebenen Würfel ausgeführt werden.

Für die Flächenwinkel des abgestumpften Würfels ergibt sich

$$D_{8-8} = D_{W\u00fcr} = 90^\circ \quad , \quad D_{8-3} = 180^\circ - \frac{D_{Okt}}{2} \approx 126^\circ 15' 52''$$

Die letzte Gleichung lässt sich an Abb. 73 nachprüfen. Darin ist EFG eine Dreiecksfläche des abgestumpften Würfels, deren Neigung gegen die Fläche $ABCD$ gleich der gegen die Fläche $A'B'C'D'$ ist.

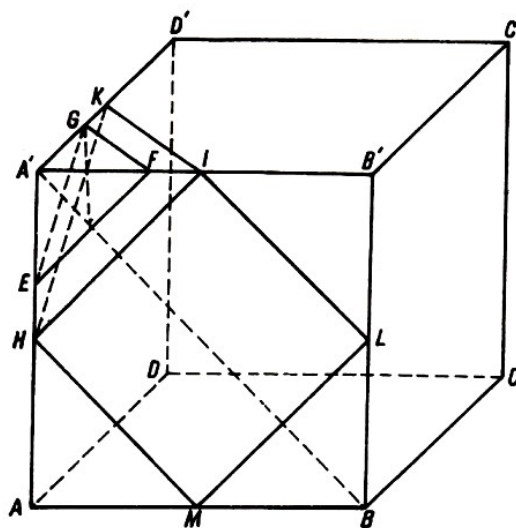


Abb. 73. Hilfskonstruktion zur Berechnung des Flächenwinkel D_{8-3} im abgestumpften Würfel

Betrachtet man die zu EFG bezüglich der Ebenen $ABB'A'$, $A'B'C'D'$, $ADD'A'$ symmetrischen Flächen, so sieht man, dass sich eine Oktaederfläche ergibt. Also beträgt der Flächenwinkel zwischen den Ebenen EFG und $ABB'A'$ die Hälfte von D_{Okt} .

e) Um zum abgestumpften Dodekaeder zu gelangen, verfährt man wie in (1). Jede Kante des Dodekaeders wird in drei Strecken der Länge y, x, y geteilt (Abb. 74), so dass sich bei der Verbindung von drei einer Ecke nächstgelegenen Teilpunkten auf den in dieser Ecke zusammenstoßenden Kanten eine Schnittebene des Dodekaeders ergibt.

Konstruiert man solchermaßen Schnittebenen in allen Ecken des Dodekaeders, so gehen die Fünfecksflächen in reguläre Zehnecke über, und jede Ecke wird durch ein gleichseitiges Dreieck

ersetzt. Damit ein reguläres Zehneck entsteht, müssen, wie man der Abb. 74 entnimmt, die Gleichungen

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{a} \quad , \quad x + 2y = a$$

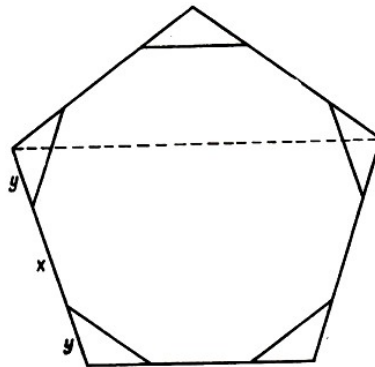


Abb. 74. Ebener Schnitt eines regulären Dodekaeders zur Bestimmung der Fläche eines abgestumpften Dodekaeders

bestehen, wobei mit l die Seite des Sternfünfecks bezeichnet ist, das entsteht, wenn die Ecken des regulären Fünfecks mit der Seite a paarweise verbunden werden. Aus den bekannten Beziehungen (R ist der Radius des Umkreises)

$$a = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad , \quad l = \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

folgt

$$\frac{l}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

und daraus erhält man

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad , \quad y = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{5}}$$

Dieses Resultat gestattet es, die geometrische Konstruktion des abgestumpften Dodekaeders aus einem gegebenen Dodekaeder auszuführen.

Für die Flächenwinkel des abgestumpften Dodekaeders ergibt sich

$$D_{10-10} = D_{Dod} \approx 116^\circ 33' 54''$$

$D_{10-3} = D_{6-5}$ des abgestumpften Ikosaeders $\approx 142^\circ 37' 22''$.

Die letzte Gleichung erhält man unter Berücksichtigung der Dualität von Ikosaeder und Dodekaeder. Ein anderer Beweis ergibt sich für diese Gleichung aus Aufgabe 16b.

16. Man gebe die geometrische Konstruktion derjenigen archimedischen Körper an, die man durch Zusammensetzung⁴² erhält, und berechne ihre Flächenwinkel.

a) Das Kuboktaeder wird wie der abgestumpfte Würfel konstruiert, jedoch werden die Schnittebenen so gelegt, dass sie die Mittelpunkte von jeweils drei Kanten des Ausgangswürfels verbinden, die alle gleich weit von einer Ecke entfernt sind (z.B. HIK , Abb. 73).

Auf diese Weise werden die Flächen des Ausgangswürfels durch die ihnen einbeschriebenen Quadrate von minimalem Flächeninhalt ersetzt. Anstelle der Ecken treten gleichseitige Dreiecke auf, die gegen die Flächen des Würfels die gleiche Neigung haben.

⁴²Vgl. die Punkte g) und h) des Abschnittes 6.

Das Kuboktaeder kann auch analog zum abgestumpften Oktaeder konstruiert werden, indem man die Mittelpunkte von jeweils vier Kanten des Ausgangsoktaeders verbindet, die von einer Ecke gleich weit entfernt sind.

Wie man sofort sieht, ist der Flächenwinkel gleich dem Winkel, der von einer Fläche des Würfels (bzw. des Oktaeders) und einer Fläche des Oktaeders (bzw. des Würfels) eingeschlossen wird:

$$\begin{aligned} D_{34} &= D_{6-4} \text{ des abgestumpften Oktaeders} \\ &= D_{8-3} \text{ des abgestumpften Würfels} \approx 125^\circ 15' 52'' \end{aligned}$$

b) Das Ikosidodekaeder lässt sich aus dem Ikosaeder erhalten, indem man durch die Mittelpunkte der fünf in jeder Ecke zusammenlaufenden Kanten Schnittebenen legt, oder aus dem Dodekaeder, indem man durch die Mittelpunkte der drei in jeder Ecke zusammenlaufenden Kanten Schnittebenen legt.

Der Flächenwinkel ist gleich dem des abgestumpften Ikosaeders (da die entsprechenden Flächen parallel sind) bzw. gleich dem des abgestumpften Dodekaeders: $D_{5-3} \approx 142^\circ 37' 22''$.

17. Man gebe die geometrische Konstruktion derjenigen archimedischen Körper an, die sich durch Schneiden⁴³ entlang den Kanten und Abstumpfung⁴⁴ der Polyeder aus der vorigen Aufgabe ergeben.

a) Bei der geometrischen Konstruktion des Rhombenkuboktaeders mit äquatorialer Symmetrieebene (vgl. Abschnitt 6, Punkt f) geht man entweder vom Würfel oder vom Oktaeder aus.

Man ersetzt jede Kante (ihre Anzahl ist bei diesen beiden dualen Polyedern gleich, nämlich 12) durch eine Ebene, deren Neigungen gegen die Flächen, welche die betreffende Kante bilden, gleich sind. Dabei wird so vorgegangen, dass die entstehenden Flächen reguläre Polygone sind.

Die Werte für die Konstruktion dieser Schnittebenen sind in Aufgabe 15d bestimmt worden. Im Fall des Würfels werden die Kanten durch ebensoviele Quadrate ersetzt, und beim Schnitt der Schnittebenen ergibt sich in jeder Ecke ein gleichseitiges Dreieck; deren Neigungen gegen die Flächen des Ausgangswürfels sind gleich.

Im Fall des Oktaeders werden die Kanten durch ebensoviele Quadrate ersetzt, und beim Schnitt der Schnittebenen entsteht in jeder Ecke ein Quadrat; deren Neigungen gegen die Flächen des Ausgangsoktaeders sind gleich. Dabei ergeben sich die in den Sätzen 10 und 11 angegebenen charakteristischen Daten des Rhombenkuboktaeders.

Für die Flächenwinkel ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{4-4} &= 90^\circ + \frac{D_{W\u00fcr}}{2} = 135^\circ (= \angle FEA, \text{ Abb. 72}) \\ D_{3-4} &= 90^\circ + \frac{D_{Okt}}{2} \approx 144^\circ 44' 8'' \end{aligned}$$

wobei der Satz über die Außenwinkel im Dreieck benutzt wurde;

b) Zur geometrischen Konstruktion des Rhombenikosidodekaeders geht man vom Ikosaeder oder vom Dodekaeder aus. Jede Kante (ihre Anzahl ist bei diesen beiden dualen Polyedern dieselbe, nämlich 30) wird durch eine Ebene ersetzt, deren Neigungen gegen die Flächen, welche die betreffende Kante bestimmen, gleich sind. Dabei wird so vorgegangen, dass die entstehenden Flächen reguläre Polygone sind.

⁴³Es handelt sich dabei um die Polyeder aus den Punkten f) und m) des Abschnittes 6.

⁴⁴Es handelt sich dabei um die Polyeder aus Punkt k) und l) in Abschnitt 6.

Zur Bestimmung der Lage dieser Ebenen genügt es, den Abstand zwischen einer Kante des Polyeders und dem Schnitt der Ebene mit einer Fläche des Polyeders zu kennen.

In Abb. 75 ist der Stern D ; $ACHIE$ des Ikosaeders aus Abb. 15 dargestellt sowie die Ebene $WXYZ$, die zur Kante CD parallel ist. Der Winkel $\angle APH$ ist der ebene Winkel, den die Ikosaederflächen an der Kante CD einschließen (vgl. Abb. 69).

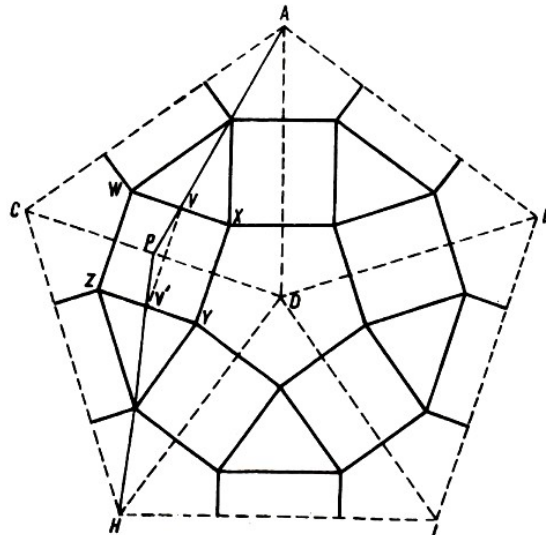


Abb. 75. Ebener Schnitt eines regulären Ikosaeders zur Bestimmung der Fläche eines Rhombenikosidodekaeders

Der Abstand $y = PV$ muss so bestimmt werden, dass die Quadrate, Dreiecke und das Fünfeck, welches sich ergibt, wenn auch die den Kanten HD , ID , ED , AD entsprechenden Ebenen hinzugezogen werden, regulär sind.

Die Seite WX im gleichseitigen Dreieck wird mit Hilfe von Sätzen über ähnliche Dreiecke bestimmt. Es ergibt sich

$$WX = CD - 2y\sqrt{3}$$

Bei der Bestimmung der Seite XY des Fünfecks erhält man

$$XY = VV' = 2PV \sin \angle APQ = 2y \frac{\sin 54^\circ}{\sin 60^\circ} \quad (\text{vgl. Aufgabe 3d})$$

Die Gleichheit der Seiten im Dreieck und im Fünfeck ergibt die Gleichung

$$a - 2y\sqrt{3} = 4y \frac{\sin 54^\circ}{\sqrt{3}}$$

mit der Lösung

$$PV = y = \frac{a\sqrt{3}}{4 \sin 54^\circ + 6}$$

Die Flächenwinkel bestimmt man aus den Beziehungen

$$D_{3-4} = \angle AVV' = 90^\circ + \frac{D_{Ikos}}{2} \approx 159^\circ 5' 41''$$

$$D_{4-5} = 90^\circ + \frac{D_{Dod}}{2} \approx 148^\circ 16' 57''$$

wobei der Satz über die Außenwinkel im Dreieck benutzt wurde.

c) Zur Konstruktion des abgestumpften Kuboktaeders geht man vom Kuboktaeder (Abb. 73) aus, das mit Ebenen geschnitten wird, die den Kanten des Grundwürfels (bzw. Grundoktaeders) parallel sind und die den Ebenen entsprechen, mit denen das Rhombenkuboktaeder aus einem Würfel (bzw. Oktaeder) erhalten wurde.

Die quadratischen Flächen des Kuboktaeders (z.B. $HILM$) werden zu Achtecken, deren Abmessungen in Aufgabe 15d berechnet wurden. Wenn man alle solchen Schnittebenen legt, so gehen die dreieckigen und die quadratischen Flächen des Kuboktaeders in die sechseckigen und achteckigen regulären Flächen des abgestumpften Kuboktaeders über.

Die Ecken des ersteren werden dabei durch die quadratischen Flächen des letzteren ersetzt. Aus der oben beschriebenen Konstruktion ergeben sich die Flächenwinkel:

$$D_{8-4} = D_{4-4} \text{ des Rhombenkuboktaeders} = 135^\circ$$

$$D_{8-6} = D_{4-3} \text{ des Kuboktaeders} \approx 125^\circ 15' 32''$$

$$D_{4-6} = D_{4-3} \text{ des Rhombenkuboktaeders} \approx 144^\circ 44' 8''$$

d) Zur Konstruktion des abgestumpften Ikosidodekaeders geht man vom Ikosidodekaeder aus. Weiter verfährt man wie bei der Konstruktion des Rhombenikosidodekaeders aus einem Ikosaeder (bzw. Dodekaeder). Die sich ergebenden Flächenwinkel sind

$$D_{10-6} = D_{5-3} \text{ des Ikosidodekaeders} \approx 142^\circ 37' 22''$$

$$D_{10-4} = D_{5-4} \text{ des Rhombenikosidodekaeders} \approx 148^\circ 16' 57''$$

$$D_{6-3} = D_{3-4} \text{ des Rhombenikosidodekaeders} \approx 159^\circ 5' 41''$$

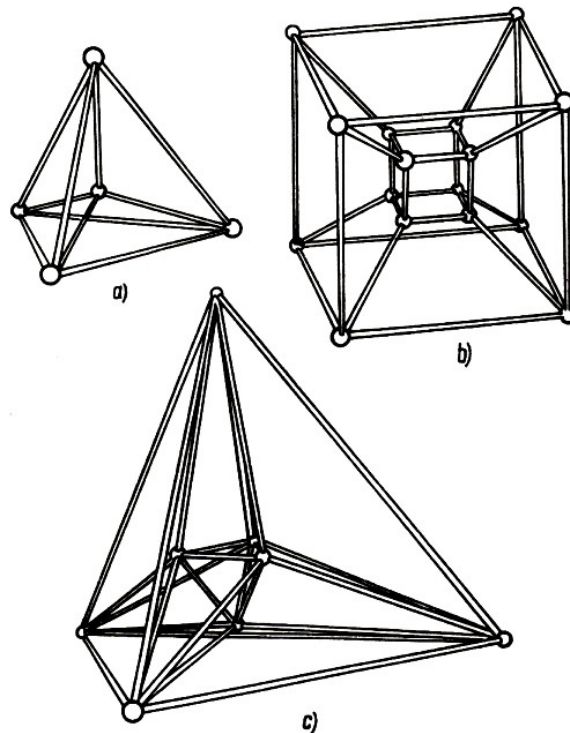


Abb. 76. Projektionen des vierdimensionalen regulären Polytops in den dreidimensionalen Raum: a) das von fünf Tetraedern begrenzt wird; b) das von acht Würfeln begrenzt wird; c) das von 16 Tetraedern begrenzt wird.

10 Literaturverzeichnis

- [1] Alexandroff, P. S., Einführung in die Gruppentheorie, 6. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [2] Aschkinuse, B. G., Über Zahlen halbbregulärer Polyeder, (russisch), Moskau 1957
- [3] Cindy, M., and S. Roman, Mathematical models, Oxford 1956.
- [4] Delon, B. H., Polyeder, (russisch), Große Sowjetenzyklopädie 1954
- [5] Dorfmann, A. G., Rhombenkuboktaeder, (russisch), Moskau 1961
- [6] Fischer, E., Einführung in die geometrische Kristallographie, Akademie-Verlag, Berlin 1956.
- [7] Flint, E. E., Geometrische Kristallographie, (russisch), Moskau 1956
- [8] Frode, A., Algebra superioara, (rumänisch), Bukarest 1958.
- [9] Hadamard, J., Lecons de géométrie élémentaire. Géométrie de l'espace, nouv. éd., Paris 1937.
- [10] Hilbert, D., und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, Berlin 1932.
- [11] Jaskovski, S., Matematyka ornamentu, Warschau 1957
- [11a] Kleber, W., Einführung in die Kristallographie, 7. Aufl., VEB Verlag Technik, Berlin 1964.
- [12] Ljusternik, L. A., Darstellung von Polyedern, (russisch), Moskau 1956
- [13] Moisil, G. C., Grupuri, corpuri si inele, (rumänisch), 1950
- [14] Moisil, G. C., Introducere in algebra, (rumänisch), Bukarest 1954
- [15] Nicolesci, M., Notiunea de echivalenta si importanta ei in matematica, (rumänisch), 1958.
- [16] Rerepelkin, D. I., Elementare Geometrie II, (russisch), Moskau 1949
- [17] Roman, T., Simetria, Ed. Tehnica, Bucuresti 1963
- [18] Rouché, E., et Ch. Comberousse, Traité de géométrie II, Gauthier-Villars, Paris 1931.
- [19] Spreiser, A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4. Aufl., Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1957.
- [20] Steinhaus, H., Kaleidoskop der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Englischen und Polnischen).
- [21] Fejes-Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

Ergänzende Literatur

zusammengestellt von Dr. E. Hameister

1. Klassische Schriften

Grassmann, H., Die lineare Ausdehnungslehre, Leipzig 1844 und 1862.

Hausner, R., Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper, Ostwald's Klassiker Nr. 151, Leipzig 1906. [Enthält folgende grundlegende Arbeiten: Poincot, L., Abhandlung über die Vielecke und Vielfache, Paris 1809; Cauchy, A. L., Untersuchungen über Vielfache, Paris 1813; Bertrand, J., Mitteilung zur Theorie der regelmäßigen Vielfache, Paris 1858; Cayley, A., Zweite Mitteilung über Poincots vier neue regelmäßige Körper, Cambridge 1891.)

Riemann, B., Über die Hypothesen. welche der Geometrie zu Grunde liegen, Herausgegeben von H. Weyl, Berlin 1919.

Schläfli, L., Theorie der vielfachen Kontinuität, 1850-1862, Erschienen in: Neue Denkschrift der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft, Zürich 1901.

Vreoneses, G., Fondamenti di geometria a pin dimensioni, Padova 1891 (deutsche Übersetzung Leipzig 1894).

2. weitere Lehrbücher

Baumgartner, L., Geometrie im Raum von vier Dimensionen, München 1954.

Brückner, M., Vielecke und Vielfache, Leipzig 1900.

Courant, R., und H. Robbins, Was ist Mathematik ?, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.

Coxeter, H. S. M., Regular Polytopes, 2nd ed., New York 1963.

Fejes-Toth, L., Reguläre Figuren, Budapest und Leipzig 1964.

Lietzmann, W., Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie, München 1952.

Niggli, P., Lehrbuch der Mineralogie, Bd. I, 3. Aufl., Berlin 1941.

Nicolle, A., Die Symmetrie und ihre Anwendungen, Berlin 1956.

Schoute, P. H., Mehrdimensionale Geometrie, Bd. 2: Polytope, Sammlung Schubert Bd. 36, Leipzig 1905.

Weitzenböck, R. W., Der vierdimensionale Raum, 2. Aufl., Basel- Stuttgart 1956.

Weyl, H., Symmetrie, Basel-Stuttgart 1952.

Wolf, K. L., und R. Wolff, Symmetrie, Bd. 1 und 2, Münster 1956.

3. Lehrbücher, die weitergehende mathematische Vorkenntnisse verlangen

Blaschke, W., Kreis und Kugel, 2. Aufl., Berlin 1956.

Blaschke, W., und H. Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl., Berlin - Göttingen -Heidelberg 1962.

Bonnesen, T., und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934.

Hadwiger, H., Altes und Neues über konvexe Körper, Basel 1955.

Minkowski, H., Abhandlungen über die Theorie der konvexen Körper, in: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 103-276.