Peter Borneleit

Übungen für Junge Mathematiker 4
Gleichungen

1976 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 87
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das Ziel der "Übungen für Junge Mathematiker" wurde vom Herausgeber im Teil 1 dieser Schriftenreihe umrissen. Der vorliegende Teil 4 "Gleichungen" ordnet sich diesem Anliegen unter.

Auch der bewährte Aufbau wurde beibehalten. Nach einer Einleitung, in der für das Gebiet "Gleichungen" wichtige Begriffe zusammengestellt werden, folgen Gleichungen verschiedener Typen, für die "Musterlösungen" anschließend an die Aufgabe oder Lösungen in einem besonderen Lösungsteil angegeben werden.

Damit wird der Leser aufgefordert, nach dem Studium der Musterlösung ähnliche Aufgaben selbst zu bearbeiten. Diese Übungsaufgaben sind wie in den vorangegangenen Teilen dieser Schriftenreihe mit einem „•“ versehen.

Der Autor weiß sich dem Herausgeber dieser Schriftenreihe für die Unterstützung bei der Abfassung dieses Teiles und Herrn Prof. Dr. sc. nat. W. Engel, Rostock, für wertvolle Hinweise zu Dank verpflichtet.
Dank gilt ferner den Herren Diplommathematikern G. Schmidt, U. Wöhrl und H. Englisch, Leipzig, für die Erprobung der Aufgaben in mathematischen Schülerarbeitsgemeinschaften und für manchen Ratschlag sowie der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig für das Entgegenkommen bei der Verwirklichung des Vorhabens.

Leipzig, Sommer 1975

P. Borneleit

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im folgenden sollen kurz und ohne Beweis Kenntnisse, die für das Verständnis der weiteren Kapitel notwendig sind, aufgefrischt und einige Verabredungen über die in diesem Heft gewählten Bezeichnungen getroffen werden.

1.1. Seien M und N zwei Mengen.

Man nennt M eine Teil- oder Untermenge von N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist, und schreibt hierfür $M \subseteq N$.

Sind zugleich alle Elemente von M in N enthalten und alle Elemente von N in M, so nennt man M und N gleich und schreibt $M = N$.

Ist M eine Teilmenge von N, ohne gleich N zu sein, so wird M eine echte Teilmenge oder eine echte Untermenge von N genannt (in Zeichen: $M \subset N$).

$M \cap N$ (gelesen: Durchschnitt von M und N) bezeichnet diejenige Menge, der alle und nur die Elemente angehören, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

$M \cup N$ (gelesen: Vereinigung von M und N) steht für die Menge der Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen M und N angehören.

Für die Menge aller geordneten Paare $(a_1; a_2)$ von Elementen a_1, a_2 der Menge M schreiben wir $M^{(2)}$, entsprechend $M^{(n)}$ für die Menge aller n-tupel $(a_1; a_2; ...; a_n)$ von Elementen $a_1, a_2, ..., a_n$ der Menge M.

$\varnothing$ bezeichnet die leere Menge.

1.2. Die Buchstaben $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnen hier der Reihe nach die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen, die Menge der rationalen Zahlen, die Menge der reellen Zahlen[1] und die Menge der komplexen Zahlen. Das Zeichen $\mathbb{R}_+$ steht für die Menge der positiven reellen Zahlen.

$$-5, 7, 0,5, -0,25, 0,50, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \pi, e$$

usw. sind Zeichen für bestimmte Elemente von $\mathbb{R}$. In unserem Beispiel sind 0,5, 0,50, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ verschiedene Zeichen für ein und dasselbe Element.
Unter Verwendung von Zeichen für Operationen und Funktionen (z.B. $+$, $-$, $\lg$, $\sin$) können wir dieses Element in noch anderer Weise darstellen, etwa durch $0,3 + 0,2$, durch $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, durch $2 : 4$, durch $\sqrt{\frac{1}{4}}$, durch $\lg \sqrt{10}$, durch $\log_3 \sqrt{3}$, oder durch $\sin \frac{\pi}{6}$.

1.3. Innerhalb der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist eine mit dem Zeichen "=" bezeichnete Gleichheitsbeziehung erklärt. Jedes Element von $\mathbb{R}$ steht zu sich selbst, aber zu keinem anderen in dieser Gleichheitsbeziehung. Unter Verwendung des Zeichens "=" lassen sich

[1] Heute (2021) werden die Mengen der ganzen, rationalen und reellen Zahlen mit $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ bezeichnet, ebenso in dieser Abschrift. Im Original werden G, R und P verwendet.

Gleichheitsaussagen, wie z.B.

$$0,5 = \frac{1}{2} \quad (1) \quad ; \quad 0,8 - 0,25 = 1,9 \quad (2)$$
$$\log_3 \sqrt{3} = 0,5 \quad (3) \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = 3 \quad (4)$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (5) \quad ; \quad \log_3 \sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{4}} \quad (6)$$

bilden. Dabei sind die Gleichheitsaussagen (1), (3), (5) und (6) wahr, in ihnen bezeichnen nämlich die Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens "$=$" ein und dasselbe Element. Dagegen erweisen sich die Gleichheitsaussagen (2) und (4) als falsch.

1.4. Variable sind Zeichen für beliebige Elemente aus einem fest vorgegebenen Bereich, dem sogenannten Variablengrundbereich. Für Variable verwenden wir kleine lateinische Buchstaben.

1.5. Zahlen, Variable und gewisse Zusammensetzungen aus ihnen mit Hilfe von Zeichen für Operationen und Funktionen werden Terme genannt.
Beispiele für Terme sind:

$$-0,7 \quad (1); \quad \frac{1}{3} \quad (2); \quad 5,2 - \frac{2}{3} \quad (3); \quad \sqrt{x} \quad (4); \quad \sqrt{a^2 - 1} \quad (5);$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad (6); \quad a^n \quad (7); \quad 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad (8); \quad \log_a x \quad (9); \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \quad (10)$$

Man kann nun Terme, die Variablen enthalten, belegen, d.h. diese Variablen durch Zeichen für Elemente des Variablengrundbereiches ersetzen. In diesem Zusammenhang spricht man auch vom Einsetzen von Elementen aus dem Variablengrundbereich.
Zweckmäßigerweise wird man dabei solche Belegungen von Termen ausschließen, bei denen diese in sinnlose Ausdrücke übergehen. Beispielsweise bezeichnen $\sqrt{-4}$, $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{5-5}$, 0^0, $\log_3 0$ keine Elemente der Menge der reellen Zahlen.
Man wählt also einen solchen Variablengrundbereich, für dessen sämtliche Elemente der betreffende Term "definiert" ist.

1.6. Verbindet man zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen, so erhält man eine Gleichung. Die bereits erwähnten Gleichheitsaussagen sind Beispiele für Gleichungen.
Eine Gleichung in n Variablen kann durch Einsetzen eines n-tupels von Elementen aus den jeweiligen Variablengrundbereichen in eine Gleichheitsaussage überführt werden. Man sagt, dieses n-tupel erfüllt die vorgegebene Gleichung, wenn die auf diese Weise gewonnene Gleichheitsaussage wahr ist, und nennt dann das n-tupel eine Lösung der Gleichung bezüglich der betreffenden Variablengrundbereiche.

(So ist zum Beispiel die reelle Zahl -1 eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 1 = 0$ bezüglich des Variablengrundbereiches $\mathbb{R}$, aber keine bezüglich $\mathbb{R}_+$; und das geordnete Paar $(-1; 1)$ ist eine Lösung der Gleichung $x + y = 0$ bezüglich des Variablengrundbereiches $\mathbb{Z}$ für x und y.)

Die Gesamtheit der Lösungen einer Gleichung bezüglich eines bestimmten Variablengrundbereiches heißt Lösungsmenge dieser Gleichung bezüglich des Variablengrundbereiches. (So hat die quadratische Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ bezüglich $\mathbb{N}$ die Lösungsmenge $\varnothing$, bezüglich $\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge $\{-1\}$ und bezüglich $\mathbb{Q}$ die Lösungsmenge $\{-1, \frac{1}{2}\}$.

1.7. Entsprechend sagt man, ein n-tupel erfüllt ein Gleichungssystem in n Variablen, wenn bei Einsetzung dieses n-tupels alle Gleichungen des Systems in wahre Gleichheitsaussagen übergehen. Man nennt dann auch das n-tupel eine Lösung des Gleichungssystems bezüglich der gewählten Variablengrundbereiche und die Gesamtheit dieser Lösungen Lösungsmenge des Gleichungssystems bezüglich der gewählten Variablengrundbereiche.

Die Lösungsmengen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen werden wir in diesem Heft mit dem Zeichen L kennzeichnen.

1.8. Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Variablen x, p und q ist ein Beispiel für Gleichungen mit Parametern. Sie stellt eine Verallgemeinerung aller solchen quadratischen Gleichungen in einer Variablen dar, die aus $x^2 + px + q = 0$ durch Einsetzen von reellen Zahlen für die Parameter p und q hervorgehen.

Anhand von Gleichungen mit Parametern möchte man in allgemeiner Form Aussagen treffen und Lösungsmethoden entwickeln, die für alle diejenigen Gleichungen gelten, die man erhält, wenn man für die betreffenden Parameter reelle Zahlen einsetzt. Die Aufgabe, die Gleichung $x^2+px+q = 0$ mit den reellen Parametern p und q im Bereich der reellen Zahlen zu lösen, wird z.B. nicht als Auftrag aufgefasst, alle die Tripel $(x_0; p_0; q_0)$ von reellen Zahlen x_0, p_0 und q_0 zu bestimmen, die die vorgegebene Gleichung erfüllen. Man versteht sie vielmehr als Aufforderung, die Lösungsmenge quadratischer Gleichungen in einer Variablen des Typs $x^2 + px + q = 0$ in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter p und q anzugeben. Bekanntlich erhält man

$$L = \begin{cases} \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\} & \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q > 0 \\ \left\{-\frac{p}{2}\right\} & \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q = 0 \\ \varnothing & \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q < 0 \end{cases}$$

Es ist somit für das Verständnis der Aufgabenstellung erforderlich, explizit anzugeben, ob und welche der Variablen einer vorgegebenen Gleichung als Parameter aufzufassen sind.

1.9. Um die Lösungsmenge einer vorgegebenen Gleichung oder eines vorgegebenen Systems von Gleichungen zu bestimmen, nimmt man im allgemeinen Umwandlungen der gegebenen Gleichungen in andere Gleichungen vor, deren Lösungsmenge man schon kennt oder besser überschaut.
Im Hinblick auf die dabei gebräuchlichen Umformungen gewinnen folgende Beziehungen zwischen der Lösungsmenge L_1 der Ausgangsgleichung (1) und der Lösungsmenge L_2 der abgeleiteten Gleichung (2) an Bedeutung:

$$1.\quad L_1 \subset L_2, \qquad 2.\quad L_1 = L_2, \qquad 3.\quad L_1 \supset L_2$$

(Natürlich erschöpfen diese Sonderfälle nicht alle die Beziehungen, in denen die Lösungsmengen L_1 und L_2 zweier beliebiger Gleichungen (1) bzw. (2) zueinander stehen können.)
Gilt $L_1 \subset L_2$, so wollen wir schreiben, dass die Gleichung (2) aus der Gleichung (1) folgt. Im Falle $L_1 = L_2$ heißen die beiden Gleichungen zueinander äquivalent bezüglich des betreffenden Variablengrundbereiches.
(Von zwei bezüglich eines bestimmten Variablengrundbereiches zueinander äquivalenten Gleichungen folgt dann eine jede aus der anderen.) Als Beispiele führen wir an:

(1) $x^2 - 1 = 0$ und $|x| - 1 = 0$ sind äquivalent bezüglich $\mathbb{R}$.
(2) $x^2 - 1 = 0$ und $x - 1 = 0$ sind äquivalent bezüglich $\mathbb{R}_+$.
(3) Aus $\sqrt{x-1} = 2$ folgt $x - 1 = 4$.
(4) Aus $x = 2$ folgt $x^2 = 4$.
(5) Das System $\left.\begin{matrix} x+y=4 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}$ und das System $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ sind bezüglich $\mathbb{R}$ zueinander äquivalent.

Diese Sprechweisen lassen sich analog auf Gleichungssysteme übertragen. Wir erinnern daran, dass die Bestimmung der Lösungsmenge L_1 unser eigentliches Ziel ist und dass die Kenntnis der Lösungsmenge L_2 lediglich dazu verhelfen soll, es zu erreichen.
Im Hinblick darauf ist unter den angeführten Fällen 1. bis 3. sicher der der günstigste, bei dem $L_1 = L_2$ gilt.
Im Falle $L_1 \subset L_2$, bei dem die abgeleitete Gleichung (2) auch solche Lösungen besitzt, die die Ausgangsgleichung (1) nicht erfüllen, gelingt es zumeist, diese Werte durch die Probe auszusondern. Ausgesprochen unerwünscht ist dagegen der Fall $L_1 \supset L_2$.

1.10. Folgende Umformungen überführen eine Gleichung in eine bezüglich des betreffenden Variablengrundbereiches äquivalente Gleichung (man nennt sie deshalb äquivalente Umformungen):

(1) Addition bzw. Subtraktion ein und derselben Zahl oder ein und desselben Terms, der im Variablengrundbereich der gegebenen Gleichung definiert ist, auf beiden Seiten der Gleichung.
(Ist dieser Term nicht im gesamten Variablengrundbereich der gegebenen Gleichung definiert, so ist die Lösungsmenge der abgeleiteten Gleichung eine (möglicherweise echte) Teilmenge der Lösungsmenge der Ausgangsgleichung. So erhält man z.B. in $\mathbb{R}$ aus der Gleichung $x^2 = 4$ mit der Lösungsmenge $L_1 = \{-2; 2\}$ durch Addition des Terms $\frac{1}{x-2}$ auf beiden Seiten die Gleichung $x^2 + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$ mit der Lösungsmenge $L_2 = \{-2\} \subset L_1$.

(2) Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit ein und derselben von Null verschiedenen Zahl oder mit ein und demselben Term, der im Variablengrundbereich der gegebenen Gleichung definiert ist und dort für keine Belegung die Zahl Null ergibt.
(Wenn Belegungen zugelassen sind, bei denen der Term die Zahl Null ergibt, so wird bei der beschriebenen Umformung eine Gleichung. erhalten, die aus der Ausgangsgleichung folgt. So folgt z.B. in $\mathbb{R}$ die Gleichung $x(x-1) = 0$ mit der Lösungsmenge $L_2 = \{0; 1\}$ aus der Gleichung $x - 1 = 0$ mit der Lösungsmenge $L_1 = \{1\}$).

(3) Division beider Seiten der Gleichung durch ein und dieselbe von Null verschiedene Zahl oder durch ein und denselben Term, der im Variablengrundbereich der gegebenen Gleichung definiert ist und dort für keine Belegung die Zahl Null ergibt.

(4) Vertauschen beider Seiten der Gleichung.

(5) Anwenden äquivalenter Termumformungen auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung.

1.11. Quadrieren beider Seiten einer gegebenen Gleichung überführt diese in eine Gleichung, die aus der gegebenen folgt.

1.12. Es seien zwei Gleichungen (1) und (2) gegeben. Die Gleichung (3) werde aus ihnen dadurch erhalten, dass sowohl die linken als auch die rechten Seiten der beiden Gleichungen addiert oder multipliziert werden.
Dann gilt für die Lösungsmengen L_1, L_2, L_3 der Gleichungen (1), (2) bzw. (3): $L_1 \cap L_2 \subseteq L_3$.
Ein Beispiel dafür liefern die folgenden Gleichungen in P mit den zugehörigen Lösungsmengen:

$$x^2 = 4 \qquad L_1 = \{-2; 2\} \tag{1}$$
$$-x = 2 \qquad L_2 = \{-2\} \tag{2}$$
$$x^2 - x = 6 \qquad L_3 = \{-2; 3\} \tag{3}$$
$$-x^3 = 8 \qquad L_{3'} = \{-2\} \tag{3'}$$

1.13. Am Beispiel des linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1,2}$$

sei die Anwendung des sogenannten Einsetzungsverfahrens demonstriert.
Dazu formt man zunächst eine der beiden Gleichungen schrittweise so lange äquivalent um, bis eine der Variablen nur noch allein auf einer Seite der abgeleiteten Gleichung steht:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}\right\} \tag{1,2'}$$

Der Term auf der anderen Seite der abgeleiteten Gleichung wird für die betreffende Variable in die nicht umgeformte Gleichung des Systems eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3(3x - 2) &= 5 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}\right\} \tag{1',2'}$$

Das Gleichungssystem $\{(1'); (2')\}$, das auf diese Weise erhalten wird, folgt aus dem Gleichungssystem $\{(1); (2)\}$, von dem ausgegangen wurde. Es ist äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}\right\} \tag{1'',2'}$$

Nun wird der in (1") rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term in Gleichung (2') für x eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \cdot 1 - 2 \end{aligned}\right\} \qquad (1'',2'')$$

Das so erhaltene Gleichungssystem $\{(1''); (2'')\}$ folgt aus dem Gleichungssystem $\{(1'); (2')\}$ und damit auch aus dem $\{(1); (2)\}$. Es hat die Lösungsmenge $L'' = \{(1; 1)\}$.

Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems $\{(1); (2)\}$ ist nach dem Gesagten eine Teilmenge von L''. Die Probe zeigt nun, dass das geordnete Paar $(1; 1)$ das Gleichungssystem $\{(1); (2)\}$ erfüllt, dass also $L = L''$ gilt.

Man bedient sich des Einsetzungsverfahrens bei der Bestimmung der Lösungsmenge eines Gleichungssystems in mehreren Variablen, um mit seiner Hilfe zu einem abgeleiteten System zu gelangen, dessen Gleichungen eine Variable weniger als die des Ausgangssystems besitzen.
Im Falle der Anwendung des Einsetzungsverfahrens stehen die Lösungsmenge L'' des abgeleiteten Systems und die gesuchte Lösungsmenge L in der Beziehung $L \subseteq L''$ zueinander.

1.14. Eine Funktion f ordnet jedem Element x (Argument) ihres Definitionsbereiches genau ein Element $f(x)$ (Funktionswert) zu: $f : x \to f(x)$.
Insofern diese "Zuordnung" von Argument x und Funktionswert $f(x)$ einfach durch das geordnete Paar $(x; f(x))$ beschrieben werden kann, hat sich folgende Definition als sachgemäß erwiesen:

Eine Menge geordneter Paare $(x; y)$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, in der es zu jedem $x \in X$ genau ein Paar $(x; y)$ gibt, heißt Funktion. X wird Definitionsbereich und Y Wertebereich der betreffenden Funktion genannt.

Gegeben sei ein Term mit genau einer Variablen. Setzt man für diese Variable ein Element aus einem geeignet gewählten Variablengrundbereich ein, so geht der Term in ein bestimmtes Element des zugrunde gelegten Zahlbereiches über. Damit wird aber durch diesen Term eine Funktion festgelegt.
So bestimmt z.B. der Term $\frac{1}{2}x - 2$ die Funktion $f : x \to \frac{1}{2}x - 2$, also die Menge geordneter Paare $(x; \frac{1}{2}x - 2)$, mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und dem Wertebereich $\mathbb{R}$.
Auch Terme, die keine Variablen enthalten, legen Funktionen fest - z.B. der Term "3" die Funktion $f : x \to 3$.

Die Lösungsmenge einer Gleichung in zwei Variablen ist eine Menge geordneter Paare. Sofern sie überdies der oben angeführten Bedingung für eine Funktion genügt, kann die ihr zugrunde liegende Gleichung in zwei Variablen als eine Funktionsgleichung (als eine Gleichung, durch die eine Funktion festgelegt ist) aufgefasst werden. Funktionsgleichungen sind beispielsweise:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1) &\qquad\qquad y = x^2 \quad (2) \\ y = |x| \quad (3) &\qquad\qquad x + y = 0 \quad (4) \\ x + x = xy \quad (5) &\qquad\qquad 3x + 3y - 1 = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Jedem geordneten Paar reeller Zahlen lässt sich nach Einführung eines cartesischen Koordinatensystems umkehrbar eindeutig ein Punkt der Ebene zuordnen. Einer Funktion entspricht bei dieser Zuordnung eine Punktmenge der Ebene, die als Graph der betreffenden Funktion bezeichnet wird.

1.15. Für Intervalle[2] der Menge der reellen Zahlen werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$(a;b) \underset{Def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a;b) \underset{Def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$[a;b] \underset{Def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a;b] \underset{Def}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

[2] Im Original werden als Klammern $\langle , \rangle$ für abgeschlossene Bereiche verwendet, in der Abschrift die mittlerweile üblichen $[,]$

2 Gleichungen in einer Variablen

2.1 Lineare Gleichungen

2.1.1. Man bestimme alle reellen x, die der Gleichung

$$a + bx = c + dx \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

genügen!

Bemerkung: Obige Gleichung ist eine Gleichung mit Parametern (Abschnitt 1.8.). Bei entsprechend gewählten Werten für die Parameter a, b, c, d geht sie in eine Gleichung mit einer einzigen Lösung (z.B. in $3 + 2x = 9 - 4x$), in eine Gleichung mit der leeren Menge als Lösungsmenge (z.B. in $2 + 3x = 1 + 3x$) oder in eine Gleichung mit der Lösungsmenge $\mathbb{R}$ (z.B. in $5 - 4x = 5 - 4x$) über.
Die gesuchte "allgemeine" Lösungsmenge der Gleichung $a + bx = c + dx$; mit den reellen Parametern a, b, c, d muss somit alle diese Fälle als Sonderfälle in Abhängigkeit von der speziellen Wahl dieser Parameter erfassen. Es ist also eine Fallunterscheidung erforderlich.

Lösung:
Man formt zunächst die gegebene Gleichung wie folgt äquivalent um:

$$\begin{aligned} a + bx &= c + dx \\ bx - dx &= c - a \\ x(b - d) &= c - a \end{aligned} \tag{1}$$

Für $b \neq d$ (1. Fall) lässt sich Gleichung (1) äquivalent umformen zu

$$x = \frac{c - a}{b - d} \tag{2}$$

für $b = d$ (2. Fall) wäre der Übergang von Gleichung (1) zu Gleichung (2) keine äquivalente Umformung [Abschnitt 1.10. (3)].

1. Fall: $b \neq d$.
Man formt Gleichung (1) äquivalent in Gleichung (2) um und erhält als Lösungsmenge

$$L_1 = \left\{ \frac{c - a}{b - d} \right\}$$

2. Fall: $b = d$. Gleichung (1) ist für $b = d$ äquivalent zu

$$x \cdot 0 = c - a \tag{3}$$

Im Falle $c \neq a$ besitzt die Gleichung (3) keine Lösung (d.h. $L_{21} = \varnothing$), während sie im Falle $c = a$ von allen reellen Zahlen erfüllt wird (d.h. $L_{22} = \mathbb{R}$). Somit ergibt sich als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung

$$L = \begin{cases} \left\{ \frac{c-a}{b-d} \right\} & \text{für } b \neq d \\ \varnothing & \text{für } b = d, c \neq a \\ \mathbb{R} & \text{für } b = d, c = a \end{cases}$$

2.1.2.• Für welche reellen Werte der Parameter $a \neq 0$ und $b \neq 0$ hat die Gleichung $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}x = \frac{1}{2}$ positive reelle Lösungen?

2.1.3. Man löse die Gleichung $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-ac}{a+c} = b+c$ ($x \in \mathbb{R}$), in der a, b, c reelle Parameter mit $a \neq -b$ und $a \neq -c$ sind!

1. Lösung:
Man formt die vorgegebene Gleichung zunächst wie unten angegeben äquivalent um:

$$\begin{aligned}
\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} &= b+c \qquad (1)\\
(x-ab)(a+c) + (x-ac)(a+b) &= (a+b)(a+c)(b+c)\\
2ax + bx + cx &= 2a^2b + 2a^2c + 4abc + ab^2 + ac^2 + bc^2 + b^2c\\
x(2a+b+c) &= (2a+b+c)(ab+ac+bc) \qquad (2)
\end{aligned}$$

1.Fall: $2a+b+c \neq 0$.
In diesem Fall ist die Gleichung (2) äquivalent zur Gleichung

$$x = ab + ac + ba$$

mit der Lösungsmenge $L_1 = \{ab+ac+bc\}$.

2.Fall: $2a+b+c = 0$.
In diesem Fall ist die Gleichung (2) äquivalent zur Gleichung

$$x \cdot 0 = 0 \cdot (ab+ac+bc)$$

die von allen reellen Zahlen x erfüllt wird. $L_2 = \mathbb{R}$
Man erhält somit als Lösungsmenge der Gleichung (1)

$$L = \begin{cases} \{ab+ac+bc\} & \text{für } 2a+b+c \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } 2a+b+c = 0 \end{cases}$$

2. Lösung:
Man nimmt der Reihe nach folgende äquivalente Umformungen vor:

$$\begin{aligned}
\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} &= b+c \qquad (1)\\
\frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-ac}{a+c} - b &= 0\\
(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

1. Fall: $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} \neq 0$.
In diesem Fall ist Gleichung (2) äquivalent zur Gleichung

$$x = ab + ac + bc$$

mit der Lösungsmenge $L_1 = \{ab + ac + bc\}$.

2. Fall: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0$.
In diesem Falle ist Gleichung (2) äquivalent zur Gleichung

$$(x - ab - ac - bc) \cdot 0 = 0$$

mit der Lösungsmenge $L_2 = \mathbb{R}$.
Als Lösungsmenge von Gleichung (1) erhält man somit

$$L = \begin{cases} \{ab + ac + bc\} & \text{für } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0 \end{cases}$$

Bemerkung:
Man überprüft leicht, dass die Bedingungen $2a + b + c \neq 0$ und $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \neq 0$ bzw. die Bedingungen $2a + b + c = 0$ und $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0$ zueinander äquivalent sind.

2.2 Gleichungen mit absoluten Beträgen, in denen die Variable in der 1. Potenz auftritt

Vor der Behandlung der nächsten Aufgaben sind einige Bemerkungen über die Terme $|x|$ und $\operatorname{sgn} x$ (gelesen: "absoluter Betrag von x" bzw. "Signum x") angebracht. Die folgenden Definitionen geben darüber Auskunft, was für reelle Zahlen $|x|$ und $\operatorname{sgn} x$ bei Belegung der Variablen bezeichnen.

$$|x| \underset{Def}{=} \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x \underset{Def}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wir notieren, dass der absolute Betrag einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist und nur für die reelle Zahl Null den Wert Null annimmt.

2.2.1. Man bestimme alle reellen x, die die Gleichung

$$|x + p| + |x - p| = x + p \tag{1}$$

mit dem reellen Parameter p erfüllen!

Lösung:
Durch äquivalente Umformung von Gleichung (1) erhält man

$$|x + p| + (x - p) = -|x - p| \tag{2}$$

1. Fall: $x \geq -p$
In diesem Falle ist nach Definition des absoluten Betrages $|x + p| = x + p$ für alle x. Gleichung (2) ist deshalb äquivalent zu

$$0 = -|x - p|$$

daraus folgt $x = p$ (3)
Wegen der Bedingung $x \geq -p$ hat Gleichung (3) für nichtnegative p die Lösungsmenge $\{p\}$ und für negative p keine Lösung.

2. Fall: $x < -p$
In diesem Falle gilt $|x + p| = -(x + p)$ für alle x. Gleichung (2) ist dann äquivalent zu

$$2|x + p| = -|x - p| \qquad (4)$$

Da der absolute Betrag einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, kann Gleichung (4) nur von solchen Werten x und p befriedigt werden, für die sowohl $|x + p|$ als auch $|x - p|$ gleich Null ist. Aus $|x + p| = 0$ folgt aber $x = -p$ im Widerspruch zu $x < -p$. Gleichung (4) besitzt also keine Lösungen für $x < -p$.
Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit

$$L = \begin{cases} \{p\} & \text{für } p \geq 0 \\ \varnothing & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

2.2.2.• Man bestimme alle reellen x, die der Gleichung

$$\frac{|ax + b|}{a + b} = x - |x| \qquad (a, b \in \mathbb{R}; a \neq -b)$$

genügen!

2.2.3. Wie sind die reellen Parameter a und b zu wählen, damit die Gleichung $||x|-a| = b$ im Bereich der reellen Zahlen keine (genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier) Lösungen hat?

1. Lösung:
Die Anwendung der Fallunterscheidung und äquivalenter Umformungen der vorgegebenen Gleichung liefert:
1. Für $x \geq 0$: $x = a + b$, wenn zudem $x \geq a$ (1)
$x = a - b$, wenn zudem $x < a$ (2)

2. Für $x < 0$: $x = -a - b$, wenn zudem $x \leq -a$ (3)
$x = -a + b$, wenn zudem $x > -a$ (4)

In Bezug auf den Parameter a unterscheiden wir die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.

1. Fall: $a > 0$.
Die Gleichung $||x| - a| = b$ hat in diesem Fall wegen (1)-(4) genau dann Lösungen, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen für den Parameter b erfüllt ist:

$$0 \leq b, \quad 0 < b \leq a, \quad 0 \leq b, \quad 0 < b < a \qquad (1',2',3',4')$$

Also gibt es im Fall $b < 0$ keine Lösung.
Im Fall $0 < b < a$ erfüllt der Parameter b jede der Bedingungen (1')-(4'), so dass es wegen (1)-(4) genau vier Lösungen gibt.

Im Fall $b = a$ erfüllt der Parameter b die Bedingungen (1')-(3') und die Bedingung (4') nicht, so dass sich nach (1)-(3) genau drei Lösungen ergeben.
Im Fall $b > a$ erfüllt der Parameter die Bedingungen (1') und (3') und die Bedingungen (2') und (4') nicht, so dass es wegen (1) und (3) genau zwei Lösungen gibt.

2. Fall: $a = 0$.
Für $a = 0$ sind nur die Fälle (1) und (3) zu betrachten. Die Gleichung $||x| - a| = b$ hat wegen (1) und (3) genau dann Lösungen, wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$b \geq 0, \qquad b > 0 \qquad (1'',3'')$$

Also gibt es im Fall $b < 0$ keine Lösung.
Im Fall $b = 0$ erfüllt der Parameter b die Bedingung (1''), aber nicht die Bedingung (3''), und es gibt wegen (1) genau eine Lösung.
Im Fall $b > 0$ erfüllt der Parameter die Bedingungen (1'') und (3''), und es gibt wegen (1) und (3) genau zwei Lösungen.

3. Fall: $a < 0$.
Für $a < 0$ sind nur die Fälle (1) und (3) zu betrachten. Die Gleichung $||x| - a| = b$ hat wegen (1) und (3) genau dann Lösungen, wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$b \geq -a, \qquad b < -a \qquad (1''',3''')$$

Im Fall $b < -a$ gibt es demnach keine Lösung.
Im Fall $b = -a$ erfüllt b die Bedingung (1'''), aber nicht die Bedingung (3'''), und es gibt wegen (1) genau eine Lösung.
Im Fall $b > -a$ erfüllt b die Bedingungen (1''') und (3'''), und es gibt wegen (1) und (3) genau zwei Lösungen.

Zusammenfassend ist festzustellen:
Die Gleichung $||x| - a| = b$ hat
- keine Lösung für $a \geq 0$ und $b < 0$; für $a < 0$ und $b < -a$;
- genau eine Lösung für $0 = a = b$; für $0 < a = -b$;
- genau zwei Lösungen für $0 < a < b$; für $0 = a < b$; für $0 < -a < b$;
- genau drei Lösungen für $0 < b = a$;
- genau vier Lösungen für $0 < b < a$.

2. Lösung:
Die Gleichung $||x| - a| = b$ zu lösen ist äquivalent der Aufgabe, diejenigen Argumente x zu finden, für die die Funktion $f : x \to y$ mit der Gleichung $y = ||x| - a|$ den Funktionswert b annimmt.

1. Fall: $a > 0$.
Wir unterteilen den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ dieser Funktion f in die Teilbereiche $(-\infty; -a]$, $(-a; 0)$, $[0; a)$, $[a; \infty)$. Die angeführten Teilbereiche von $\mathbb{R}$ sind disjunkt[3] und sämtlich nichtleer, und ihre Vereinigung ergibt den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$ der Funktion

[3] Mengen heißen zueinander fremd oder disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist.

f. Innerhalb dieser Teilbereiche lässt sich die Funktion f durch lineare Gleichungen beschreiben, und zwar:

$$(-\infty; -a] : y = -x - a \qquad \text{Wertebereich: } [0; \infty) \tag{1}$$
$$(-a; 0) : y = x + a \qquad \text{Wertebereich: } (0; a) \tag{2}$$
$$[0; a) : y = -x + a \qquad \text{Wertebereich: } (0; a] \tag{3}$$
$$[a; \infty) : y = x - a \qquad \text{Wertebereich: } [0; \infty) \tag{4}$$

Damit ist die Funktion f innerhalb eines jeden dieser Teilbereiche umkehrbar eindeutig, somit jedem Element des zugehörigen Wertebereiches genau ein Argument zugeordnet.

Nun gehört b im Falle $b = 0$ genau den Wertebereichen (1) und (3), im Falle $0 < b < a$ jedem der Wertebereiche (1)-(4), im Falle $b = a$ genau den Wertebereichen (1), (3) und (4) und im Falle $b > a$ genau den Wertebereichen (1) und (4) an.
Nach den obigen Feststellungen ist dies gleichbedeutend damit, dass die vorgegebene Gleichung für $b = 0$ genau zwei, im Falle $0 < b < a$ genau vier, im Falle $b = a$ genau drei und im Falle $b > a$ genau zwei Lösungen besitzt. Wenn $b < a$ ist, so hat sie keine Lösung. Analog untersucht man die Fälle $a = 0$ und $a < 0$.

Geometrische Veranschaulichung: Abbildung 1 zeigt den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = ||x| - a|$ für $a > 0$. Man konstruiert ihn schrittweise wie folgt:
Aus dem Graph der Funktion mit der Gleichung $y = |x|$ gewinnt man zunächst durch Verschiebung um $-a$ in Richtung der y-Achse den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = |x| - a$.

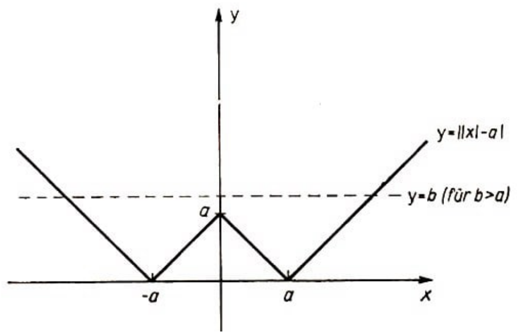

Abb. 1

Indem man von letzterem die Punkte mit negativer Ordinate an der x-Achse spiegelt, erhält man den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = ||x| - a|$.
Ersichtlich gibt es für $b < 0$ keinen, für $b = 0$ genau zwei, für $0 < b < a$ genau vier, für $b = a$ genau drei und für $b > a$ genau zwei Punkte mit der Ordinate b.

2.3 Gleichungen, in denen der Term $[x]$ und die Variable in der 1. Potenz auftreten

Der Term $[x]$ bezeichnet den dem Argument x zugeordneten Funktionswert einer für alle reellen x definierten Funktion, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielt und "größtes Ganzes" genannt wird. Ihr Funktionswert $[x]$ ist die größte ganze Zahl g, die nicht größer als x ist, für die also

$$g \leq x < g + 1$$

gilt. Zum Beispiel ist $[5,2] = 5$, $[\pi] = 3$, $[-4,75] = -5$, $[-\pi] = -4$, $[6] = 6$ und $[-7] = -7$.

2.3.1. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$[x] + 2x = 3 \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

ist zu bestimmen!

1. Lösung:
Gleichung (1) ist äquivalent zur Gleichung

$$[x] = 3 - 2x \tag{2}$$

1. Fall: $3 - 2x \notin \mathbb{Z}$.
In diesem Falle ist die Lösungsmenge der Gleichung (2) offensichtlich die leere Menge: $L_1 = \varnothing$.

2. Fall: $3 - 2x \in \mathbb{Z}$.
In diesem Falle ist $2x$ für jedes x eine ganze Zahl, d.h., x lässt sich in der Form $x = \frac{g}{2}$ mit $g \in \mathbb{Z}$ darstellen. Wir gehen deshalb von Gleichung (2) zur Gleichung

$$\left[\frac{g}{2}\right] = 3 - 2 \cdot \frac{g}{2} \tag{3}$$

über.
Wenn nun g gerade ist, so ist $\left[\frac{g}{2}\right] = \frac{g}{2}$ für alle g, somit Gleichung (3) äquivalent zu

$$\frac{g}{2} = 3 - 2 \cdot \frac{g}{2} \qquad \text{bzw. zu} \qquad g = 2$$

Damit ist aber die Lösungsmenge von Gleichung (2) $L_{21} = \{1\}$.
Für alle ungeraden g gilt $\left[\frac{g}{2}\right] = \frac{g-1}{2}$, und Gleichung (3) ist in diesem Fall äquivalent zu

$$\frac{g-1}{2} = 3 - 2 \cdot \frac{g}{2} \text{bzw. zu} \qquad g = \frac{7}{3}$$

Wegen $g \in \mathbb{Z}$ ist dann die Lösungsmenge der Gleichung (2) die leere Menge: $L_{22} = \varnothing$.
Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ergibt sich somit zu $L = L_1 \cup L_{21}$.

2. Lösung:
Jede reelle Zahl x lässt sich in ihr "größtes Ganzes" und einen "Rest" aufspalten:

$$x = [x] + a \qquad \text{mit} \qquad a \in [0;1) \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) erhalten wir damit

$$[[x] + a] + 2([x] + a) = 3 \tag{3}$$

und weiter nach Definition des "größten Ganzen" die zu (3) äquivalenten Gleichungen

$$[x] + 2[x] + 2a = 3 \qquad \text{und} \qquad [x] = 1 - \frac{2}{3}a \tag{4}$$

Gleichung (4) hat genau dann eine Lösung, wenn $a = 0$ ist, wenn also in (2) $[x] = x$ gilt. Dann ist aber wegen (4) $x = 1$.
Wir erhalten somit als Lösungsmenge der Gleichung (1) $L = \{1\}$.

3. Lösung:
Da der Wertebereich des Terms $[x]$ die Menge G der ganzen Zahlen ist, kommen als Lösungen der Gleichung (1) nur solche $x \in \mathbb{R}$ in Frage, die sich in der Form $x = \frac{g}{2}$ mit $g \in \mathbb{Z}$ darstellen lassen. Wir ersetzen deshalb in (1) die Variablen; an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $\frac{g}{2}$ und erhalten

$$\left[\frac{g}{2}\right] = 3 - 2 \cdot \frac{g}{2} \tag{2}$$

Offensichtlich ist jedes $g_0 \in \mathbb{Z}$, das die Gleichung (2) erfüllt, auch Lösung der Ungleichung

$$3 - 2 \cdot \frac{g}{2} \leq \frac{g}{2} < 4 - 2 \cdot \frac{g}{2} \tag{3}$$

d. h., Ungleichung (3) folgt aus Gleichung (2). Nun ist Ungleichung (3) äquivalent zu

$$3 \leq \frac{3}{2}g < 4 \qquad \text{und weiter zu} \qquad 2 \leq g < \frac{8}{3}$$

Als einzige ganze Zahl erfüllt 2 die Ungleichung (4). Wie die Probe zeigt, ist 2 auch Lösung der Gleichung (2). Wir erhalten somit als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) $L = \{1\}$.

2.3.2. • Man bestimme alle reellen x, die die Gleichung $2[x] + p = [2x]$ mit $p \in \mathbb{R}$ erfüllen!

2.3.3. • Man gebe alle reellen x an, für die $|[x]| = |x - p|$ $(p \in \mathbb{R})$ gilt!

2.3.4. Die Lösungsmenge der Gleichung $|[|x|] - 2| = |[x]|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist zu bestimmen!

Lösung:
1. Fall: $x \geq 2$.
Unter dieser Voraussetzung ist die vorgegebene Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$[x] - 2 = [x] \qquad \text{mit der Lösungsmenge} \qquad L_1 = \varnothing$$

2.Fall: $0 \leq x < 2$.
In diesem Fall ist die gegebene Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$2 - [x] = [x]$$

bzw. zur Gleichung

$$[x] = 1 \qquad \text{mit der Lösungsmenge} \qquad L_2 = [1; 2)$$

3. Fall: $-2 \leq x < 0$.
Unter dieser Voraussetzung ist Gleichung $|[|x|] - 2| = |[x]|$ äquivalent zur Gleichung

$$[-x] - [x] = 2 \tag{2}$$

Wir setzen $x = -p$ mit $p > 0$ und gehen damit über zur Gleichung

$$[p] - [-p] = 2 \tag{3}$$

Offensichtlich gilt für $p > 0$:

$$[-p] = \begin{cases} -[p] & \text{falls } p \text{ ganzzahlig} \\ -[p+1] & \text{falls } p \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases}$$

Wenn nun p ganzzahlig ist, so ist Gleichung (3) äquivalent zu $[p] = 1$, und Gleichung (2) hat die Lösungsmenge $L_{31} = \{-1\}$.
Wenn p nicht ganzzahlig ist, so ist Gleichung (3) äquivalent zu

$$[p] + [p+1] = 2 \qquad \text{und weiter zu} \qquad [p] + [p] + 1 = 2$$

bzw. zu

$$2[p] = 1 \qquad \text{mit der Lösungsmenge} \qquad L_{32} = \varnothing$$

4. Fall: $x < -2$.
In diesem Fall ist die gegebene Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$[-x| + [x] = 2$$

Wir setzen $x = -p$ mit $p > 0$ und gehen über zur Gleichung

$$[p] + [-p] = 2 \tag{4}$$

Wenn p ganzzahlig ist, so ist Gleichung (4) äquivalent zur Gleichung

$$[p] - [p] = 2 \qquad \text{mit der Lösungsmenge} \qquad L_{41} = \varnothing$$

Anderenfalls ist (4) äquivalent zur Gleichung

$$[p] - [p] = 3 \qquad \text{mit der Lösungsmenge} \qquad L_{42} = \varnothing$$

Wir erhalten somit als Lösungsmenge der Gleichung

$$|[|x|] - 2| = |[x]| : L = L_1 \cup L_2 \cup L_{31} \cup L_{32} \cup L_{41} \cup L_{42} = \{-1\} \cup [1; 2)$$

Geometrische Veranschaulichung: Jeder der beiden Terme rechts und links des Gleichheitszeichens in der gegebenen Gleichung definiert eine Funktion. Die betreffenden Funktionsgleichungen sind $y_1 = |[|x|] - 2|$ und $y_2 = |[x]|$.

Die Gleichung $|[|x|] - 2| = |[x]|$ zu lösen ist damit äquivalent der Aufgabe, solche Argumente x zu finden, für die die zugehörigen Funktionswerte y_1 und y_2 übereinstimmen.
Wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung von geordneten Paaren, bestehend aus Argument und Funktionswert, zu Punkten der Ebene beinhaltet obige Aufgabenstellung folgendes:
Es sind die Abszissen aller gemeinsamen Punkte der Graphen beider Funktionen zu bestimmen.

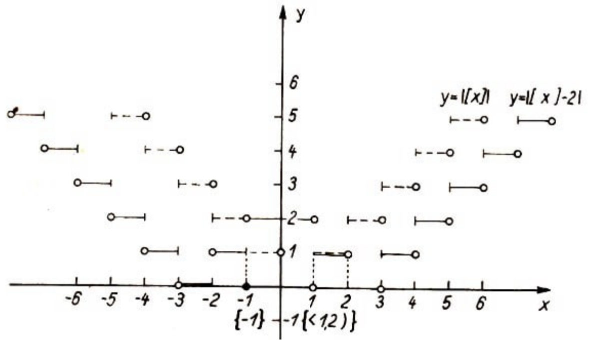

Abb. 2

Abbildung 2 zeigt die Graphen der Funktionen $f_1 : x \to y_1$ (ausgezogen) und $f_2 : x \to y_2$ (gestrichelt). Man entnimmt der Abbildung, dass $P(-1;1)$ und $P(a;1)$ mit $a \in [1;2)$ die gemeinsamen Punkte der Graphen beider Funktionen sind.

2.4 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen lassen sich bekanntlich durch äquivalente Umformungen auf die sogenannte Normalform, d.h. auf eine Gleichung der Gestalt

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

bringen. Die Differenz $D = \frac{p^2}{4} - q$ nennt man Diskriminante der betreffenden quadratischen Gleichung (1). Wie die Angabe der Lösungsmenge in Abschnitt 1.8. zeigt, ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) durch die Größe der Diskriminante bestimmt.

Erinnert sei auch an den Wurzelsatz von Vieta: Die reellen Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$, wenn gilt

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

2.4.1. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ die reelle Zahl 1 als eine Lösung hat!

Lösung:
Zunächst erhält man durch Einsetzen von 1 in obige Gleichung

$$a + b + c = 0$$

als notwendige Bedingung dafür, dass 1 eine Lösung der gegebenen quadratischen Gleichung ist.
Der Versuch einer Zerlegung des Polynoms $ax^2 + bx + c$ liefert:

$$\begin{array}{rl}
(ax^2 + bx + c) & : (x-1) = ax + (a+b) \\
-(ax^2 - ax) & \\
\hline
(a+b)x + c & \\
-(a+b)x - (a+b) & \\
\hline
a + b + c &
\end{array}$$

Die gegebene Gleichung ist also äquivalent zur Gleichung

$$[ax + (a + b)] \cdot (x - 1) + a + b + c = 0$$

Letzterer entnimmt man, dass im Falle $a + b + c = 0$ die reelle Zahl 1 eine Lösung der vorgegebenen Gleichung ist.
Damit ist $a + b + c = 0$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ die reelle Zahl 1 als eine Lösung hat.

2.4.2.• Für welche reellen Parameterwerte p hat die Gleichung

$$(p - 1)x^2 - 2(p + 1)x + p + 1 = 0$$

genau eine reelle Lösung?

2.4.3.• Für welche Werte des reellen Parameters p ist der absolute Betrag der Differenz der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (p + 1)x + p = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gleich 1?

2.4.4. Es sind alle diejenigen Werte des reellen Parameters p zu ermitteln, für die die quadratische Gleichung $ax^2 - 4(p - 1)x + 4(p - 2)^2 = 0$ wenigstens eine reelle Lösung mit dem absoluten Betrag kleiner 1 hat!

Lösung:
Die Diskriminante der gegebenen Gleichung errechnet sich zu

$$D = 4(p - 1)^2 - 4(p - 2)^2 = 4(2p - 3)$$

so dass die Gleichung für $p \geq \frac{3}{2}$ reelle Lösungen besitzt. Diese sind

$$w_1 = 2(p - 1 + \sqrt{2p - 3}) \qquad \text{und} \qquad w_2 = 2(p - 1 - \sqrt{2p - 3})$$

Die Aufgabe fordert, zu untersuchen, welche Werte von $p \geq \frac{3}{2}$ die Ungleichung

$$-1 < 2(p - 1 + \sqrt{2p - 3}) < 1 \qquad \text{und} \qquad -1 < 2(p - 1 - \sqrt{2p - 3}) < 1 \quad (1,2)$$

erfüllen. Ungleichung (1) ist äquivalent zu

$$-p + \frac{1}{2} < \sqrt{2p - 3} < -p + \frac{3}{2} \tag{3}$$

Die Ungleichung (3) wird nun von keinem Wert von $p \geq \frac{3}{2}$ (d.h. $-p + \frac{3}{2} \geq 0$) erfüllt.
Ungleichung (2) ist äquivalent zu

$$p - \frac{3}{2} < \sqrt{2p - 3} < p - \frac{1}{2} \tag{4}$$

Wegen $p \geq \frac{3}{2}$ ist $p - \frac{3}{2} < \sqrt{2p-3}$ äquivalent zu

$$\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 < 2p - 3$$

Weitere äquivalente Umformungen liefern

$$p^2 - 5p < -\frac{21}{4} \qquad , \qquad \left(p - \frac{5}{2}\right)^2 < 1$$

und bei Anwendung der binomischen Formel schließlich

$$\left(p - \frac{5}{2} + 1\right)\left(p - \frac{5}{2} - 1\right) < 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \left(p - \frac{3}{2}\right)\left(p - \frac{7}{2}\right) < 0 \tag{5}$$

Bezüglich des vorgeschriebenen Variablengrundbereiches von p ($p \in \mathbb{R}$, $p \geq \frac{3}{2}$) besitzt Ungleichung (5) die Lösungsmenge $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$.
Andererseits ist die Ungleichung

$$\sqrt{2p-3} < p - \frac{1}{2}$$

für $p \geq \frac{3}{2}$ äquivalent zur Ungleichung

$$-1 < \left(p - \frac{3}{2}\right)^2$$

mit der Lösungsmenge $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Die Gleichung $x^2 - 4(p-1)x + 4(p-2)^2 = 0$ hat also für $p \in \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ eine reelle Lösung mit dem absoluten Betrag kleiner 1.

2.5 Gleichungen höheren Grades

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und ihre Lösungsmenge bezüglich des Variablengrundbereiches $\mathbb{R}$ wurden im Abschnitt 1.8. betrachtet. Im Variablengrundbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen besitzt sie stets genau zwei Lösungen x_1, x_2 (im Falle $\frac{p^2}{4} - q = 0$ eine Doppellösung $x_1 = x_2$). Allgemein gilt:

Jede Gleichung n-ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten hat genau n komplexe Lösungen, von denen insbesondere einige oder auch alle reell sein können. Einige Lösungen können zusammenfallen, so dass sich mehrfache Lösungen ergeben.

Wir machen weiterhin verschiedentlich - ohne dies dann ausdrücklich zu erwähnen - von einem Satz Gebrauch, nach dem eine Gleichung n-ten Grades mit den komplexen Lösungen $x_1, x_2, ..., x_n$ von denen einige oder auch alle reell sein können, äquivalent zur Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0$$

ist.
Im Unterricht der Oberschule wird (allerdings nur für $x, p, q \in \mathbb{R}$, $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$) für quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die sogenannte "allgemeine Lösungsformel"

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

hergeleitet. Diese gestattet es, die Lösungen der betreffenden Gleichung aus ihren Koeffizienten zu berechnen.

Allgemeine Lösungsformeln, die das leisten, lassen sich auch für Gleichungen dritten und vierten Grades aufstellen. Im Vergleich zur obigen sind sie aber wesentlich komplizierter. Für Gleichungen höheren als vierten Grades bewies der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) die Unmöglichkeit, derartige allgemeine Lösungsformeln zu finden.

Wir betrachten im folgenden spezielle Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische und lineare Gleichungen zurückführen lassen.

2.5.1. Man gebe alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^6 + (1+)x^3 + \frac{p}{2} = -\frac{1}{4} \tag{1}$$

an, in der p ein reeller Parameter ist!

Lösung:
Setzt man $x^3 = z$, so erhält man aus obiger Gleichung

$$z^2 + (1+p)z + \frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$z_1 = -\frac{2p+1}{2} \qquad \text{und} \qquad z_2 = -\frac{1}{2}$$

Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$\left(x^3 + \frac{2p+1}{2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Die Lösungsmenge L der Gleichung (2) ist die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^3 + \frac{2p+1}{2} = 0 \qquad \text{und} \qquad x^3 + \frac{1}{2} = 0 \tag{3,4}$$

Gleichung (3) hat im Falle $\frac{2p+1}{2} \geq 0$, also $p \geq -5$ die reelle Lösung[4]

$$x = -\sqrt[3]{\frac{2p+1}{2}}$$

[4] Jede Gleichung der Form $x^3 = a$ ($a \neq 0$, reell) besitzt nur eine reelle Lösung. (Siehe Aufgabe 2.5.2!)

im Falle $\frac{2p+1}{2} < 0$, also $p < -\frac{1}{2}$ die reelle Lösung

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2p+1}{2}}$$

Gleichung (4) hat die reelle Lösung

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Die vorgegebene Gleichung (1) hat also die Lösungsmenge

$$L = \begin{cases} \left\{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{2p+1}{2}}\right\} & \text{für } p \geq -\frac{1}{2} \\ \left\{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{-\frac{2p+1}{2}}\right\} & \text{für } p < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dabei ist $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ im Falle $p = 0$ eine Doppellösung der Gleichung.

2.5.2.• Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + a = 0 \qquad (a, x \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

2.5.3. Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) = 8$$

anzugeben!

1. Lösung:
Obige Gleichung ist äquivalent zu

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 8 \tag{1}$$

Setzt man $x^2 - 5x + 5 = z$, so erhält man aus Gleichung (1)

$$(z-1)(z+1) = 8 \tag{2}$$

und die zu (2) äquivalente Gleichung $z^2 - 9 = 0$ mit den beiden reellen Lösungen

$$z_1 = -3 \qquad \text{und} \qquad z_2 = 3$$

Auf Grund dessen ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$(x^2 + 5x + 5 + 3)(x^2 - 5x + 5 - 3) = 0$$

Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + 2 = 0$ sind

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Die Gleichung $x^2-5x+8=0$ hat eine negative Diskriminante und somit keine reellen Lösungen. Die reellen Lösungen der Gleichung

$$(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=8$$

sind somit

$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$$

2. Lösung: Die Gleichung $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=8$ ist äquivalent zu

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=8 \tag{1}$$

Setzt man $x-\frac{5}{2}=z$, so erhält man aus Gleichung (1)

$$\left(z^2-\frac{9}{4}\right)\left(z^2-\frac{1}{4}\right)=8$$

Gleichung (2) ist äquivalent zur biquadratischen Gleichung

$$z^4-\frac{10}{4}z^2-\frac{119}{4}=0$$

mit den reellen Lösungen

$$z_1=\frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{und} \qquad z_2=-\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Mit $x-\frac{5}{2}=z$ erhält man

$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$$

als reelle Lösungen der Gleichung $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=8$.

2.5.4.• Man gebe alle reellen x mit $|x|\neq 1$ an, für die Gleichung gilt:

$$x^2+2x=\frac{24}{x^2-1}$$

2.5.5.• Man löse die Gleichung

$$(4x+3)^2\cdot(2x-1)(x+2)=\frac{39}{2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

2.5.6. Man löse die Gleichung

$$x^4+8x^3+20x^2+16x+3=0 \qquad (x\in\mathbb{R}) \tag{1}$$

Lösung:

Es gilt $20x^2 = 16x^2 + 4x^2$ und $4x^2 + 16x = 4(x^2 + 4x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 4(x^2 + 4x) + 3 = 0$$

und weiter zu

$$(x^2 + 4x)^2 + 4(x^2 + 4x) + 3 = 0$$

Mit Hilfe des Verfahrens der quadratischen Ergänzung erhält man

$$(x^2 + 4x + 2)^2 - 1 = 0$$

und weiter nach der binomischen Formel die zu (1) äquivalente Gleichung

$$(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

Die Lösungsmenge L der Gleichung (1) ergibt sich dann als Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 4x + 1 = 0 \tag{2,3}$$

Nun hat Gleichung (2) die reellen Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$ und Gleichung (3) die reellen Lösungen

$$x_3 = -2 + \sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -2 - \sqrt{3}$$

so dass sich als Lösungsmenge der Gleichung (1)

$$L = \{-2 - \sqrt{3}; -3; -1; -2 + \sqrt{3}\}$$

ergibt.

2.5.7.• Man gebe alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5 = 0$$

an!

2.5.8. Eine Gleichung heißt reziprok, wenn mit jeder ihrer Lösungen x_0 auch deren reziproker Wert $\frac{1}{x_0}$ eine Lösung der Gleichung ist (x_0 und $\frac{1}{x_0}$ müssen dabei nicht notwendig verschieden sein).
Die Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

Besitze keine mehrfachen Lösungen. Man gebe unter dieser Voraussetzung notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass Gleichung (1) reziprok ist!

Lösung: Angenommen, die Gleichung (1) sei reziprok.
Als Gleichung vierten Grades hat sie genau vier Lösungen, die nach Voraussetzung voneinander verschieden sind. Sie besitzt demnach entweder eine Lösungsmenge der Gestalt $\left\{x_0; \frac{1}{x_0}; x_1; \frac{1}{x_1}\right\}$ mit $x_0 \neq x_1$, $|x_0| \neq 1$ und $|x_1| \neq 1$ oder eine Lösungsmenge

der Gestalt $\left\{x_0; \frac{1}{x_0}; 1; -1\right\}$ mit $|x_0| \neq 1$.

1. Fall: Die Lösungsmenge der Gleichung (1) sei

$$\left\{x_0; \frac{1}{x_0}; x_1; \frac{1}{x_1}\right\} \qquad \text{mit } x_0 \neq x_1, |x_0| \neq 1, |x_1| \neq 1$$

Dann ist Gleichung (1) äquivalent zur Gleichung

$$(x - x_0)\left(x - \frac{1}{x_0}\right)(x - x_1)\left(x - \frac{1}{x_1}\right) = 0 \tag{2}$$

Die Berechnung des Produktes links des Gleichheitszeichens von (2) ergibt, dass diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} x^3 - x^3 &\left(x_0 + \frac{1}{x_0} + x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + x^2\left[2 + \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\right] \\ &- x\left(x_0 + \frac{1}{x_0} + x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + 1 = 0 \end{aligned}$$

ist. Damit ergibt sich für diesen Fall $a = e$ und $b = d$ als notwendige Bedingung dafür, dass Gleichung (1) reziprok ist.

2. Fall: Die Lösungsmenge der Gleichung (1) sei

$$\left\{x_0; \frac{1}{x_0}; 1; -1\right\} \qquad \text{mit } |x_0| \neq 1$$

In diesem Fall ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$(x - x_0)\left(x - \frac{1}{x_0}\right)(x - 1)(x + 1) = 0$$

und weiter zu

$$x^4 - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)x^3 + \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)x - 1 = 0$$

womit sich $a = -e$ und $b = -d$ und $c = 0$ als notwendige Bedingung dafür ergibt, dass Gleichung (1) reziprok ist.

Zusammengefasst erhält man: Dafür, dass Gleichung (1) mit 4 voneinander verschiedenen Lösungen reziprok ist, ist notwendig, dass entweder $a = e$ und $b = d$ oder $a = -e$ und $b = -d$ und $c = 0$ gilt. Wie im folgenden gezeigt wird, ist diese Bedingung auch hinreichend.

1. Fall: $a = e$ und $b = d$.
Setzen wir $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0 \tag{3}$$

Sei nun $x_0 \neq 0$ eine (eventuell komplexe) Lösung der Gleichung (3), d.h., es gelte

$$x_0^4 + px_0^3 + qx_0^2 + px_0 + 1 = 0 \tag{4}$$

Aus (4) folgt bei Division durch x_0^4

$$1 + p \cdot \frac{1}{x_0} + q\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + p\left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_0}\right)^4 = 0 \tag{5}$$

Man entnimmt nun (5), dass auch $\frac{1}{x_0}$ Lösung der Gleichung (3) ist, somit Gleichung (3) und damit auch Gleichung (1) reziprok sind.

2.Fall: $a = -e$ und $b = -d$ und $c = 0$.
Setzen wir $\frac{b}{a} = p$, so ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^4 + px^3 - px - 1 = 0 \tag{6}$$

Sei nun $x_0 \neq 0$ eine Lösung der Gleichung (6), so dass also

$$x_0^4 + px_0^3 - px_0 - 1 = 0 \tag{7}$$

gilt. Aus (7) folgt bei Division durch $-\frac{1}{x_0}$

$$-1 - p\left(\frac{1}{x_0}\right) + p\left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_0}\right)^4 = 0 \tag{8}$$

(8) ist zu entnehmen, dass auch $\frac{1}{x_0}$ eine Lösung der Gleichung (6) und der Gleichung (1) ist, somit Gleichung (1) reziprok ist.

2.5.9.• Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$ reziprok ist!

2.5.10. Man bestimme die reellen Lösungen der Gleichung

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2 - x^4 = 0 \tag{1}$$

Lösung:
Die reelle Zahl 1 ist offenbar keine Lösung der vorgegebenen Gleichung (1). Wir dürfen deshalb den Variablengrundbereich in der unten angegebenen Weise einschränken, ohne dass die Lösungsmenge von (1) davon beeinträchtigt wird: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2 - x^4 &= \left(\frac{x^5 - 1}{x - 1}\right)^2 - x^4 = \frac{(x^5 - 1)^2 - x^4(x - 1)^2}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^{10} - 2x^5 + 1 - x^6 + 2x^5 - x^4}{(x - 1)^2} = \frac{x^4(x^6 - 1) - (x^6 - 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^6 - 1}{x - 1} = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

Somit ist Gleichung (1) bezüglich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ äquivalent zur Gleichung

$$(x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist also die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 1 \tag{2,3}$$

Gleichung (2) hat als reziproke Gleichung dritten Grades $x_0 = -1$ als eine Lösung.[5] Sie ist äquivalent zur Gleichung

$$(x^2 + 1)(x + 1) = 0$$

Man entnimmt daraus, dass sie neben $x_0 = -1$ keine weiteren reellen Lösungen hat. Durch Probieren erhält man $x_1 = -1$ als eine Lösung der Gleichung (3). Letztere ist äquivalent zu

$$(x^4 + x^2 + 1)(x + 1) = 0$$

Man überprüft leicht, dass sie neben $x_1 = -1$ keine weiteren reellen Lösungen hat.
Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung (1) ist damit $L = \{-1\}$.

2.5.11.• Man gebe die reellen Lösungen der Gleichung an:

$$1 + x + x^2 + ... + x^{2n-1} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$$

2.6 Weitere Gleichungen, in denen Signum, absoluter Betrag oder größtes Ganzes auftreten

2.6.1. Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 \cdot \operatorname{sgn} x - \frac{3}{2}x + \operatorname{sgn} x = 0 \tag{1}$$

zu bestimmen.[6]

Lösung:
1. Fall: $x > 0$.
Für $x > 0$ ist $\operatorname{sgn} x = 1$. In diesem Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \tag{2}$$

Als reziproke Gleichung dritten Grades wird (2) von der reellen Zahl -1 erfüllt.[7] -1 gehört aber wegen $x > 0$ nicht dem Variablengrundbereich an, ist somit nicht Lösung von (2).
Auf Grund dieser Nichtzugehörigkeit von -1 zum Variablengrundbereich ist die Division beider Seiten von (2) durch $x + 1$ eine äquivalente Umformung. [Abschnitt 1.10. (3)] Sie liefert

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

[5] Siehe Lösung zur Übungsaufgabe 2.5.9.
[6] Zur Definition von "$\operatorname{sgn} x$" siehe Einleitung zum Abschnitt 2.2.1.
[7] Siehe Lösung zur Übungsaufgabe 2.5.9.

mit den Lösungen

$$x_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

2. Fall: $x = 0$.
Für $x = 0$ ist $\operatorname{sgn} x = 0$. Offensichtlich ist in diesem Falle $x_3 = 0$ eine Lösung der Gleichung (1).

3. Fall: $x < 0$.
Für $x < 0$ ist $\operatorname{sgn} x = -1$. In diesem Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \tag{3}$$

Die reelle Zahl 1 erfüllt die reziproke Gleichung dritten Grades (3), gehört aber wegen $x < 0$ nicht dem Variablengrundbereich an. Damit ist die Division beider Seiten von (3) durch $x - 1$ eine äquivalente Umformung. Sie liefert

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_4 = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x_5 = -2$$

Gleichung (1) hat also die Lösungsmenge

$$L = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 2\right\}$$

2.6.2. Man bestimme alle reellen x für die gilt:

$$x^4 - \left|\frac{5}{6}x^3\right| - \frac{19}{3}x^2 - \left|\frac{5}{6}x\right| + 1 = 0 \tag{1}$$

Lösung:
1. Fall: $x > 0$. In diesem Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0 \tag{2}$$

Division durch x^2 liefert die bezüglich des gewählten Variablengrundbereiches zu (2) äquivalente Gleichung

$$x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3} - \frac{5}{6x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

die ihrerseits äquivalent zu

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{19}{3} = 0 \tag{3}$$

ist. Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, so erhält man wegen $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ aus (3) die Gleichung

$$z^2 - 2 - \frac{5}{6}z - \frac{19}{3} = 0$$

die von den Werten

$$z_1 = \frac{10}{3} \qquad \text{und} \qquad z_2 = -\frac{5}{2}$$

erfüllt wird. Gleichung (3) ist nach diesem Ergebnis bezüglich des gewählten Variablengrundbereiches äquivalent zu

$$x + \left(\frac{1}{x} - \frac{10}{3}\right)\left(x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}\right) = 0$$

Die Lösungsmenge L_1 von (4) ist also die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x + \frac{1}{x} - \frac{10}{3} = 0 \qquad \text{und} \qquad x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} = 0$$

Unter Berücksichtigung von $x > 0$ erhält man

$$L_1 = \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$$

2. Fall: $x = 0$.
Offensichtlich erfüllt die reelle Zahl 0 Gleichung (1) nicht.

3. Fall: $x < 0$.
In diesem Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 1 = 0 \tag{5}$$

Bei analogem Vorgehen wie im 1. Fall findet man

$$L_3 = \left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$$

als Lösungsmenge der Gleichung (5).
Zusammenfassend ergibt sich die Lösungsmenge der Gleichung (1) zu

$$L = \left\{-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 3\right\}$$

2.6.3. Man gebe alle reellen Lösungen der Gleichung

$$[-2x^6 + 4x^3] = [(px)^4 + 2] \tag{1}$$

an, in der p ein reeller Parameter ist!

Lösung:
Für alle p, $x \in \mathbb{R}$ gilt $(px)^4 + 2 \geq 2$ und damit auch

$$[(px)^2 + 2] \geq 2$$

Andererseits ist für alle reellen x

$$-2x^6 + 4x^3 = -2((x^3-1)^2 - 1) = 2 - 2(x^3-1)^2 \leq 2$$

und damit

$$[-2x^6 + 4x^3] \leq 2$$

Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (1) äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l}[-2x^6 + 4x^3] = 2 \\ [(px)^4 + 2] = 2\end{array}\right\}$$

und damit äquivalent dem System von Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l}2 \leq -2x^6 + 4x^3 < 3 \\ 2 \leq (px)^4 + 2 < 3\end{array}\right\} \tag{2,3}$$

Äquivalente Umformungen von Ungleichung (2) ergeben

$$-\frac{3}{2} < x^6 - 2x^3 \leq -1 \qquad , \qquad -\frac{1}{2} < (x^3 - 1)^2 \leq 0 \tag{4}$$

Ungleichung (4) hat offenbar die reelle Zahl 1 als einzige Lösung. Diese erfüllt auch die Ungleichung (3), sofern nur $|p| < 1$ gewählt wird. Man erhält somit als Lösungsmenge der gegebenen Gleichung (1)

$$L = \begin{cases} \varnothing & \text{für } |p| \geq 1 \\ \{1\} & \text{für } |p| < 1 \end{cases}$$

2.6.4.• Man bestimme alle reellen x, für die $\frac{1}{2} + \sqrt{[x]} = x$ gilt.

2.7 Wurzelgleichungen

2.7.1.• Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{px - 1} + \sqrt{1 - px} = p$$

anzugeben, in der p ein reeller Parameter ist!

2.7.2. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{px - 1} - \sqrt{x + 1} = 0 \tag{1}$$

in der p ein reeller Parameter ist!

Lösung:
Da die Operation des Radizierens nur für nichtnegative Radikanden erklärt ist, muss

$$px \geq 1 \qquad \text{und} \qquad x \geq -1 \tag{2}$$

gelten. Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$\sqrt{px - 1} = \sqrt{x + 1} \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) folgt die Gleichung

$$px - 1 = x + 1 \tag{4}$$

Sie wird in $\mathbb{R}$ im Falle $p = 1$ von keiner reellen Zähl und im Falle $p \neq 1$ von $\frac{2}{p-1}$ erfüllt. $\frac{2}{p-1}$ ist aber dann und nur dann eine Lösung der Gleichung (1), wenn es der Bedingung (2) genügt. Somit bleibt noch festzustellen, für welche Werte von p dies der Fall ist.

1. Fall: $p > 1$.
Man überprüft leicht, dass für alle reellen $p > 1$

$$p \cdot \frac{2}{p-1} \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{p-1} \geq -1$$

gilt, dass also $\frac{2}{p-1}$ die Ungleichungen (2) befriedigt.

2. Fall: $0 \leq p < 1$.
In diesem Fall ist die Ungleichung $p \cdot \frac{2}{p-1} \geq 1$ äquivalent zu $p \geq -1$ und die Ungleichung $\frac{2}{p-1} \geq -1$ äquivalent zu $p \geq -1$, so dass kein Wert des Intervalls $[0; 1)$ die Bedingung (2) erfüllt.

3. Fall: $p < 0$.
In diesem Fall ist $p \cdot \frac{2}{p-1} \geq 1$ äquivalent zu $p \leq -1$ und $\frac{2}{p-1} \geq -1$ äquivalent zu $p \leq -1$. Die Bedingung (2) ist nur für $p \leq -1$ erfüllt. Im Ergebnis dieser Überlegungen erhält man

$$L = \begin{cases} \varnothing & \text{für } p \in (-1; 1] \\ \left\{\frac{2}{p-1}\right\} & \text{für } p \in (-\infty; -1] \cup (1; \infty) \end{cases}$$

2.7.3. Man gebe alle reellen x an, die der Gleichung

$$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{64 - x} = 4 \tag{1}$$

genügen.

Lösung:
Wir setzen $\sqrt[5]{x} = y$ und $\sqrt[5]{64 - x} = z$ und bestimmen zunächst die geordneten Paare $(y; z)$ reeller Zahlen y und z, die das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 4 \\ y^4 + z^5 = 64 \end{array}\right\} \tag{2}$$

erfüllen.
Nun handelt es sich bei diesem Gleichungssystem um ein Paar symmetrischer Gleichungen, d.h. solcher, die bei gleichzeitigem Ersetzen von y durch z und von z durch y an allen Stellen in ihnen äquivalente Gleichungen übergehen. Bei der Lösung von Systemen symmetrischer Gleichungen ist es zweckmäßig, die Substitution $y + z = u$ und $xy = v$ durchzuführen. Es gilt

$$\begin{aligned} y^5 + z^5 &= (y+z)^5 - 5y^4z + 10y^3z^2 - 10y^3z^2 + 5yz^4 \\ &= (y+z)^5 - 5yz(y^3 + 2y^2z + 2yz^2 + z^3) = (y+z)^5 - 5yz[(y+z)^3 - y^2z - yz^2] \\ &= (y+z)^5 - 5yz[(y+z)^3 - yz(y+z)] = (y+z)^5 - 5yz(y+z)^3 + 5y^2z^2(y+z) \end{aligned}$$

für alle $y, z \in \mathbb{R}$, so dass man nach der angekündigten Substitution aus dem Gleichungssystem (2) das einfachere

$$\left.\begin{aligned} u = 4 \\ u^5 - 5u^3v + 5uv^2 = 64 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

erhält. Aus (3) folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u = 4 \\ 1025 - 320v + 20v^2 = 64 \end{aligned}\right\}$$

mit den Lösungen $(4; 4)$ und $(4; 12)$. Es sind somit die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} y + z = 4 \\ yz = 4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{bzw.} \qquad \left.\begin{aligned} y + z = 4 \\ yz = 12 \end{aligned}\right\}$$

zu betrachten. Das erste hat als einzige Lösung $(2; 2)$, das zweite Gleichungssystem besitzt keine reellen Lösungen.

Wir setzen 2 für y und z in $\sqrt[5]{x} = y$ bzw. $\sqrt[5]{64 - x} = z$ ein und erhalten $x = 32$. Die Probe ergibt, dass 32 auch Lösung der Ausgangsgleichung (1) ist. Es ist also $L = \{32\}$.

2.7.4.• Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt[4]{x^2 - 19} + \sqrt[4]{116 - x^2} = 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2.7.5.• Man gebe alle reellen Zahlen x an, die der Gleichung

$$\sqrt[3]{25 + x} + \sqrt{200 - x} = 15$$

genügen.

2.8 Exponentialgleichungen

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben machen wir - ohne dies an den entsprechenden Stellen ausdrücklich zu erwähnen - Gebrauch von dem Satz:

Jede Gleichung $a^x = b$ $(a, b \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1)$ hat genau eine reelle Lösung.

2.8.1. Es sind alle rationalen x zu bestimmen, die der Gleichung

$$7 \cdot 4^{x+1} + 4 \cdot 5^{x+2} = 3 \cdot 4^{x+1} + 5^{x+3} \tag{1}$$

genügen.

Lösung:
Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$7 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 4^{x+1} = 5^{x+3} - 4 \cdot 5^{x+2} \tag{2}$$

Bei Anwendung der entsprechenden Potenzgesetze erhält man die zu (2) äquivalente Gleichung

$$4^x(7 \cdot 4 - 3 \cdot 4) = 5^x(5^3 - 4 \cdot 5^2) \qquad \text{bzw.} \qquad 4^x \cdot 16 = 5^x \cdot 25 \tag{3}$$

Äquivalente Umformung von (3) liefert

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16} \tag{4}$$

Gleichung (4) hat die Lösung $x = -2$. Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist also $L = \{-2\}$.

2.8.2.• Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$27 \cdot 9^x + 64 \cdot 16^x = 84 \cdot 12^x \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

2.8.3. Man gebe alle rationalen Zahlen x an, für die gilt:

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x = 6 \tag{1}$$

Lösung:
Es ist

$$3-\sqrt{8} = \frac{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}} = \frac{1}{3+\sqrt{8}}$$

somit Gleichung (1) äquivalent zu

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + \frac{1}{(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x} = 6 \tag{2}$$

Setzt man $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = z$, so erhält man aus Gleichung (2)

$$z + \frac{1}{z} = 6 \tag{3}$$

Da nun z für kein rationales x den Wert Null annimmt, kann man von (3) zu der ihr bezüglich $\setminus\{0\}$ äquivalenten Gleichung

$$z^2 - 6z + 1 = 0 \tag{4}$$

übergehen. Diese besitzt die reellen Lösungen

$$z_1 = 3-\sqrt{8} \qquad \text{und} \qquad z_2 = 3+\sqrt{8}$$

Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$\left[(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x - \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right]\left[(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x - (\sqrt{3+\sqrt{8}})\right] = 0$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist die Vereinigung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen '

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} \qquad \text{und} \qquad (\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = \sqrt{3+\sqrt{8}} \tag{5,6}$$

Gleichung (5) hat die Lösung $x = -2$ und Gleichung (6) die Lösung $x = 2$. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung (1) ist somit $L = \{-2; 2\}$.

2.8.4.• Man ermittle alle rationalen x, die der Gleichung

$$(\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}})^x + (\sqrt{|p| - \sqrt{p^2-1}})^x = 2p$$

genügen, in der p ein reeller Parameter vom Betrage größer oder mindestens gleich 1 ist!

2.8.5.• Es sind alle rationalen Lösungen der Gleichung

$$8x^x - 12x^{x+1} + 4x^{x+2} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

zu bestimmen.

2.8.6. Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$|x-2|^{\frac{1}{x-1}} = |x^2-x+1|^{\frac{1}{x-1}} \cdot |(x-1)^3-1|^{\frac{1}{1-x}} \tag{1}$$

für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$!

Lösung:
Wir vermerken zunächst, dass keiner der Terme $x-2$, x^2-x+1, $(x-1)^3-1$ und $1-x$, $x-1$ für eine Belegung aus $\mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$ den Wert Null annimmt.
Die gegebene Gleichung (1) ist äquivalent in $\mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$ zu

$$1 = |x^2-x+1|^{\frac{1}{x-1}} \cdot \left|\frac{(x-1)^3-1}{x-2}\right|^{\frac{1}{1-x}}$$

und damit weiter äquivalent zu

$$1 = |x^2-x+1|^{\frac{1}{1-x}} \cdot |x^2-x+1|^{\frac{1}{1-x}} \tag{2}$$

Nun ist $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0$ für alle x aus $\mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$. Bei Anwendung des entsprechenden Potenzgesetzes erhält man die zu (2) äquivalente Gleichung

$$1 = |x^2-x+1|^0 \tag{3}$$

Offensichtlich wird diese Gleichung (3) von allen Werten aus $\mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$ erfüllt. Somit ist die Lösungsmenge der Gleichung (1) $L = \mathbb{Q} \setminus \{1; 2\}$.

2.9 Logarithmische Gleichungen

Wie einleitend zum Abschnitt 2.8. mitgeteilt wurde, hat jede Gleichung $a^y = b$ mit den positiven reellen Parametern a, b und $a \neq 1$ genau eine reelle Lösung. Damit erfüllt für jedes $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ die Gleichung

$$a^y = x \qquad (x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R})$$

die Bedingungen, die an eine Funktionsgleichung zu stellen sind (Ab- schnitt 1.14.).
Die Funktion $f : x \to y$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ und dem Wertebereich $\mathbb{R}$ heißt eine Logarithmusfunktion. Für ihren Funktionswert, der dem Argument $x \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet ist, schreibt man "$\log_a x$" (gelesen: Logarithmus von x zur Basis a).

Man überlegt sich nun leicht anhand der Funktionsgleichung $a^y = x$ ($a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}$), dass Logarithmusfunktionen innerhalb ihres gesamten Definitionsbereiches umkehrbar eindeutig sind.
Von dieser Eigenschaft und von den nachfolgend angeführten Logarithmengesetzen wird bei der Lösung der Aufgaben dieses Abschnittes Gebrauch gemacht.

Sind a, b, c positive reelle Zahlen und ist $a \neq 1$, so gilt:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \tag{1}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \tag{2}$$

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b \quad (r \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

Sind a, b, c positive reelle Zahlen und ist $a \neq 1$ sowie $b \neq 1$, so gilt:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \tag{4}$$

2.9.1. Man bestimme alle positiven reellen x, für die

$$\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = \frac{21}{4} \tag{1}$$

gilt!

Lösung:
Nach Logarithmengesetz (4) gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Auf Grund dessen ist über dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}_+$ Gleichung (1) äquivalent zu

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 81} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \log_3 x = \frac{21}{4}$$

bzw. zu

$$\frac{\log_3 x}{4} + \frac{\log_3 x}{2} + \log_3 x = \frac{21}{4}$$

und weiter zu

$$\log_3 x = 3 \tag{2}$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen erhält man die reelle Zahl 27 als einzige Lösung der Gleichung (2). Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist somit $L = \{27\}$.

2.9.2. Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} = 17 \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{1}$$

Lösung:
Es ist $x^{\log_2 x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Multiplikation beider Seiten der Gleichung (1) mit $x^{\log_2 x}$ überführt deshalb (1) in die ihr äquivalente Gleichung

$$x^{2\log_2 x} + 16 = 17x^{\log_2 x} \tag{2}$$

Setzt man $x^{\log_2 x} = z$, so erhält man aus (2) die quadratische Gleichung

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

mit den beiden Lösungen $z_1 = 16$ und $z_2 = 1$. Gleichung (2) ist nach diesem Ergebnis äquivalent zu

$$(x^{\log_2 x} - 16)(x^{\log_2 x} - 1) = 0 \tag{3}$$

und die Lösungsmenge von Gleichung (3) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^{\log_2 x} - 16 = 0 \qquad , \qquad x^{\log_2 x} - 1 = 0 \tag{4,5}$$

Gleichung (4) bzw. (5) ist äquivalent zu

$$x^{\log_2 x} = 16 \qquad \text{bzw.} \qquad x^{\log_2 x} = 1$$

und weiter wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen äquivalent zu

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 16 \qquad \text{bzw.} \qquad \log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 1 \tag{6,7}$$

Bei Anwendung des entsprechenden Logarithmengesetzes erhält man die zu (6) bzw. (7) äquivalenten Gleichungen

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = 4 \qquad \text{bzw.} \qquad \log_2 x \cdot \log_2 x = 0 \tag{8,9}$$

Gleichung (8) ist äquivalent zur Gleichung

$$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 2) = 0$$

die offensichtlich von den reellen Zahlen $\frac{1}{4}$ und 4 und wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen auch nur von diesen reellen Zahlen erfüllt wird. Gleichung (9) hat die reelle Zahl 1 als einzige Lösung.
Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L = \left\{\frac{1}{4}; 1; 4\right\}$.

2.9.3.• Man ermittle alle positiven reellen x, für die gilt:

$$x^{\log_2 x} - 3x^{\log_4 x} + 3x^{\log_8 x} = 1$$

2.9.4.• Es ist die Menge aller positiven reellen Zahlen anzugeben, die die Gleichung

$$2^{\lg x - 1} + 2^{\lg x + 2} = 3^{\lg x - 1} + 3^{\lg x}$$

erfüllen!

2.9.5. Man bestimme alle reellen x, die der Gleichung

$$|\log_2 x| = |\log_2 4x^2| - 3 \qquad (x > 0) \tag{1}$$

genügen!

Bemerkung:
Ohne Beweis sei angeführt, dass es sich bei der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \log_2 x$ ($x > 0$, reell) um eine monoton wachsende Funktion handelt, was bedeutet, dass ihre Funktionswerte mit wachsendem Argument steigen.

Es ist dies auch der Abbildung 3 zu entnehmen, die den Graphen der Logarithmusfunktion f zeigt. Man überlegt sich leicht, dass die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 4x^2$ im Bereich $\mathbb{R}_+$ ebenfalls monoton wachsend ist und dass sich diese Eigenschaft auf die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \log_2 4x$ überträgt. Von diesem Wissen über die Funktionen f und g machen wir im folgenden bei der Lösung der Aufgabe 2.9.5. Gebrauch.

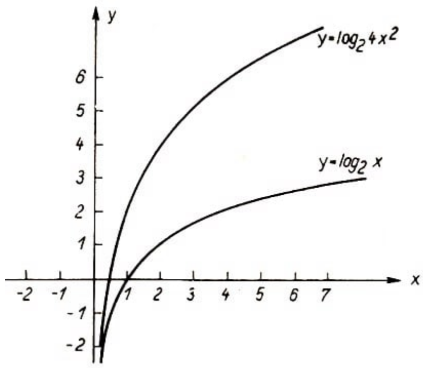

Abb. 3

Lösung:
Die Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = \log_2 x$ bzw. $g(x) = \log_2 4x^2$ sind monoton wachsende Funktionen, die für $x = 1$ bzw. für $x = \frac{1}{2}$ den Funktionswert 0 annehmen. Die Funktionswerte von f sind deshalb im Bereich $(0; 1)$ negativ und im Bereich $(1; \infty)$ positiv, die von g sind im Bereich $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ negativ und im Bereich $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ positiv.

1. Fall: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$
In diesem Fall ist Gleichung (1) äquivalent zu den Gleichungen

$$-\log_2 x = -\log_2 4x^2 - 3 \qquad , \qquad -\log_2 x = -2(\log_2 x + 1) - 3$$

und

$$\log_2 x = 5 \tag{2}$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen erhält man die reelle Zahl 32 als einzige Lösung der Gleichung (2).

2. Fall: $x = \frac{1}{2}$.
Die reelle Zahl 5 ist keine Lösung der Gleichung (1).

3. Fall: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$
In diesem Fall ist Gleichung (1) äquivalent zu den Gleichungen

$$-\log_2 x = \log_2 4x^3 - 3 \qquad \text{und} \qquad \log_2 x = \frac{1}{3} \tag{3}$$

Gleichung (3) hat im Bereich $(\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ keine Lösung.

4. Fall: $x = 1$.
Die reelle Zahl 1 ist keine Lösung der Gleichung (1).

5. Fall: $x \in (1; \infty)$.
In diesem Fall ist Gleichung (1) äquivalent zu den Gleichungen

$$\log_2 x = \log_2 4x^3 - 3 \qquad \text{und} \qquad \log_2 x = 1 \tag{4}$$

Gleichung (4) hat im Bereich $(1; \infty)$ keine Lösung. Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L = \{32\}$.

2.9.6.• Es sind alle positiven reellen Zahlen x zu bestimmen, die die Gleichung

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$

befriedigen.

2.9.7.• Man gebe alle x aus $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ an, die die Gleichung

$$\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{27}} 3 = \log_{\frac{x}{81}} 3$$

erfüllen.

2.9.8.• Man ermittle alle positiven reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\log_a x \cdot \log_b x = \log_a x + \log_b x \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

genügen.

2.10 Gleichungen aus der Kombinatorik

Beim Studium der Literatur zur Kombinatorik stößt man auf die Terme $n!$, $\binom{n}{k}$ und V_n^k. Sie sind Abkürzungen für andere Terme, und zwar ist

$$n! \underset{Def}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \text{ und } n=1 \\ (n-1)!n & \text{für } n\in\mathbb{N}, n>1 \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} \underset{Def}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k,n\in\mathbb{N}; k\leq n)$$

$$V_n^k \underset{Def}{=} k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (k,n\in\mathbb{N}; k\leq n)$$

Die Bedeutung dieser Terme für die Kombinatorik ist in folgendem begründet: Für eine Menge von n verschiedenen Elementen gibt $\binom{n}{k}$ die Anzahl ihrer verschiedenen Untermengen zu k Elementen und V_n^k die Anzahl der verschiedenen k-tupel von Elementen der vorgegebenen Menge an.
Man bezeichnet diese Untermengen bzw. k-tupel auch als Kombinationen bzw. Variationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen.

Der Unterschied zwischen $\binom{n}{k}$ und V_n^k ist offenbar der, dass (2) nur Untermengen abzählt, während mit V_n^k auch die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten ihrer Elemente erfasst werden.

Unter Verwendung des Terms $\binom{n}{k}$ lässt sich mit dem sogenannten Binomiallehrsatz eine Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$ formulieren:

Für alle $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Weiterhin gelten für alle natürlichen Zahlen k und n mit $k\leq n$ die Beziehungen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ferner ist $\binom{n}{k}=1$ für die natürlichen Zahlen k,n mit $k\leq n$ genau dann, wenn $k=0$ oder $k=n$ gilt.

2.10.1. Man bestimme alle die natürlichen Zahlen x, für die

$$45V_{x+4}^x = \frac{1}{24}V_{x+6}^{x+4} \tag{1}$$

ist.
Lösung:
Nach Definition des Terms V_n^k ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$45 \cdot 24 \cdot \frac{(x+4)!}{(x+4-x)!} = \frac{(x+6)!}{(x+6-x-4)!}$$

also zu

$$45 \cdot 24 \cdot \frac{(x+4)!}{4!} = \frac{(x+6)!}{2!} \tag{2}$$

Gleichung (2) ist äquivalent zu

$$90 = \frac{(x+6)!}{(x+4)!} \qquad \text{und weiter zu} \qquad 90 = (x+5)(x+6) \tag{3}$$

Gesucht sind also aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $x+5$ und $x+6$, deren Produkt gleich 90 ist. Offensichtlich haben genau die natürlichen Zahlen 9 und 10 diese Eigenschaft, so dass sich $x = 4$ als Lösung der Gleichung (3) ergibt.
(Man kann diese Lösung selbstverständlich auch durch Anwendung der allgemeinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen ermitteln, nachdem man Gleichung (3) auf die Normalform quadratischer Gleichungen gebracht hat.)
Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L = \{4\}$.

2.10.2.• Es ist die Lösungsmenge der Gleichung $V_{x+9}^{x+3} = V_{x+6}^{x+5}$ ($x \in \mathbb{N}$) anzugeben!

2.10.3. Es ist die Menge aller natürlichen Zahlen x mit $x > 2$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$\binom{x^2}{x^2-2x-2} - \binom{x^2-1}{2x+1} = 1$$

genügen.

Lösung:
Es ist $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und deshalb Gleichung (1) äquivalent zu

$$\binom{x^2}{2x+2} - \binom{x^2-1}{2x+1} = 1 \tag{2}$$

Ferner gilt $\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, so mit ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$\binom{x^2-1}{2x+2} = 1 \tag{3}$$

Nun ist $\binom{n}{k} = 1$ für die natürlichen Zahlen k, n mit $k \leq n$ genau dann, wenn $k = 0$ oder $k = n$ gilt. Damit erhält man die Lösungsmenge der Gleichung (3) als Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$2x+2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x+2 = x^2-1 \tag{4,5}$$

Im Bereich der natürlichen Zahlen hat Gleichung (4) keine Lösung und Gleichung (5) als einzige Lösung $x = 3$.
Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L = \{3\}$.

2.10.4.• Man ermittle alle natürlichen Zahlen x mit $x \neq 0$, für die gilt:

$$\binom{x+1}{x-1} = 2^x - 2$$

3 Gleichungen in mehreren Variablen

3.1 Eine Gleichung in mehreren Variablen

In Abschnitt 1.6. wurde bereits erwähnt, dass die Lösungsmenge einer Gleichung in n Variablen (sofern sie nicht leer ist) eine Menge von n-tupeln von Elementen des betreffenden Variablengrundbereiches ist. Für $n = 2$ ist sie eine Menge geordneter Paare und in besonderen Fällen sogar eine Funktion. (Abschnitt 1.14.)

Wie im vorangegangenen Kapitel 2. wird uns auch im folgenden zumeist die Aufgabe gestellt werden, die Lösungsmenge einer vorgegebenen Gleichung zu bestimmen, d.h. sie klar und eindeutig zu charakterisieren. Nun ist die Lösungsmenge einer Gleichung in mehreren Variablen nur in Ausnahmefällen endlich, so dass man sie im allgemeinen nicht durch Aufzählung aller ihrer Elemente angeben kann. Man wird also bei Vorhandensein unendlich vieler Lösungen bemüht sein, die Menge aller dieser Lösungen in anderer Weise geeignet zu beschreiben, z.B. durch Angabe eines Bildungsgesetzes, mit dessen Hilfe man diese Menge überschauen kann.
Oft gelingt es auch, eine sogenannte allgemeine Lösung in Form eines n-tupels von Termen, die Variablen enthalten, anzugeben. Man nennt diese Variablen freie Parameter der Lösung. So beschreibt

$$(r; s; -r)$$

unendlich viele (allerdings nicht alle) Lösungen der in der nächsten Aufgabe vorgegebenen Gleichung, die man dann einzeln dadurch erhalten kann, dass man für die freien Parameter r und s der Lösung $(r; s; -r)$ reelle Zahlen einsetzt.

3.1.1. Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{1}$$

Lösung:
Durch äquivalente Umformung von Gleichung (1) erhält man

$$\frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{1}{x+y+z} \tag{2}$$

Gleichung (2) ist für $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x + y + z \neq 0$ äquivalent zu

$$(yz + xz + xy)(x + y + z) = xyz \tag{3}$$

Dabei kann die Bedingung $x + y + z \neq 0$ sogar fallengelassen werden.
Ein Tripel von Werten aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, das $x + y + z = 0$ erfüllt, ist nicht Lösung von Gleichung (2), da für dieses Tripel der Term $\frac{1}{x+y+z}$ nicht definiert ist.
Es ist aber auch nicht Lösung der Gleichung (3), da sich nach seinem Einsetzen in (3) links des Gleichheitszeichens das Produkt Null ergibt, während rechts des Gleichheitszeichens wegen $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein von Null verschiedener Wert steht.

Durch äquivalente Umformung von Gleichung (3) erhält man nun der Reihe nach

$$\begin{aligned}(x+y)(yz+xz+xy)+z(yz+xz+xy)&=xyz\\(x+y)(yz+xz+xy)+z^2y+z^2x+xyz&=xyz\\(x+y)(yz+xz+xy)+z^2(x+y)&=0\\(x+y)(yz+xz+xy+z^2)=(x+y)(z+x)(y+z)&=0 \qquad (4)\end{aligned}$$

Gleichung (4) entnimmt man die Lösungsmenge von Gleichung (1):

$$L=\{(r;-r;t)\}\cup\{(r;s;-r)\}\cup\{(r;s;-s)\}$$

wobei r, s und t freie reelle Parameter mit $r\neq 0$, $s\neq 0$, $t\neq 0$ sind.

3.1.2.• Man gebe alle die Tripel reeller Zahlen an, die die Gleichung erfüllen:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

3.1.3. Man zeige, dass die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\cdot(b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n)$$

$(x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R})$ für keine Wahl der reellen Parameter $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$ allgemeingültig ist!

Lösung:
Angenommen, für die Werte $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in\mathbb{R}$ sei die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)\cdot(\beta_1x_1+\beta_2x_2+...+\beta_nx_n)$$

allgemeingültig, d.h., ihre Lösungsmenge sei gleich $\mathbb{R}$. Dann zeigt das Ausmultiplizieren der rechten Seite von Gleichung (1) - eine äquivalente Umformung - mit anschließendem Koeffizientenvergleich, dass

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\beta_1=1\\\alpha_2\beta_2=1\\...\\\alpha_n\beta_n=1\end{array}\right\}\qquad\text{und}\qquad \alpha_i\beta_k=-\alpha_k\beta_i \qquad (2{,}3)$$

für alle $i,k\in\{1;2;...;n\}$ mit $i\neq k$ gelten muss. Wegen (3) gilt dann insbesondere

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\beta_2=-\alpha_2\beta_1\\\alpha_2\beta_3=-\alpha_3\beta_2\\\alpha_3\beta_4=-\alpha_4\beta_3\\...\\\alpha_{n-1}\beta_n=-\alpha_n\beta_{n-1}\\\alpha_n\beta_1=-\alpha_1\beta_n\end{array}\right\}\qquad (4)$$

Multiplikation der rechten und linken Seiten der Gleichungen des Systems (4) und Anwendung des Assoziativ- und des Kommutativgesetzes liefern als notwendige Bedingung für die Werte $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$

$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\beta_1\beta_2...\beta_n=-\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\beta_1\beta_2...\beta_n$$

also

$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\beta_1\beta_2...\beta_n = 0 \tag{5}$$

Andererseits ergibt sich aber bei Multiplikation der linken und rechten Seiten der Gleichungen des Systems (3) und Anwendung des Assoziativgesetzes und des Kommutativgesetzes

$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\beta_1\beta_2...\beta_n = 1$$

als notwendige Bedingung im Widerspruch zu (5).
Es gibt somit keine solchen Werte der Parameter $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ für die die vorgegebene Gleichung allgemeingültig ist.

3.1.4. Es sind alle positiven ganzzahligen x und y zu bestimmen, die der Gleichung $7x - 4y = 5$ genügen!

Bemerkung:
3.1.4. liefert ein Beispiel für eine diophantische Gleichung. Diophantisch heißt eine Gleichung; wenn sie zwei oder mehr Variablen enthält und als Variablengrundbereich der der positiven ganzen Zahlen vorgeschrieben ist. Derartige Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker Diophantus von Alexandrien benannt, der im 4. Jahrhundert lebte und dem man die Angabe der ersten Lösungsmethoden für solche Aufgaben zuschreibt.

1. Lösung:
Aus Gleichung

$$7x - 4y = 5 \tag{1}$$

erhält man durch äquivalente Umformungen die Gleichung

$$4y = 8x - x - 5 \tag{2}$$

Für alle die positiven ganzzahligen x, für die es eine positive ganze Zahl y mit $4y = 8x - x - 5$ gibt, gilt nun offensichtlich $4|8x - x - 5$ und deshalb $4|x + 5$.
Für diese x nimmt also der Term $x+5$ nur solche Werte an, die sich in der Form $4(n+2)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen lassen. Wir setzen darum $x + 5 = 4(n + 2)$, also $x = 4n + 3$ und erhalten bei dieser Substitution aus Gleichung (2)

$$4y = 28n + 16$$

und weiter durch äquivalente Umformung

$$y = 7n + 4$$

Nach diesen Ergebnissen lässt sich jede Lösung der Gleichung (1) in der Form $(4n + 3; 7n + 4)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Umgekehrt ist aber auch für jede natürliche Zahl n das geordnete Paar $(4n + 3; 7n + 4)$ eine Lösung der Gleichung (1). Es ist nämlich für jedes natürliche n

$$7(4n + 3) - 4(7n + 4) = 28n + 21 - 28n - 16 = 5$$

Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L = \{(4n+3; 7n+4) : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Lösung:[8]
Für alle positiven ganzzahligen x bzw. y gilt

$$7x \equiv 3x \mod 4, \qquad 4y \equiv 0 \mod 4, \qquad 5 \equiv -3 \mod 4$$

Deshalb genügt jedes positive ganzzahlige x, für das es eine positive ganze Zahl y mit

$$7x - 4y = 5 \tag{1}$$

gibt, der Bedingung

$$3x \equiv -3 \mod 4 \tag{2}$$

Da 3 zum Modul 4 teilerfremd ist, ist die Bedingung (2) äquivalent zu

$$x \equiv -1 \mod 4$$

und damit äquivalent zu

$$x \equiv 3 \mod 4 \tag{3}$$

Alle positiven ganzzahligen x, für die (3) gilt, lassen sich in der Form $4n+3$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Bei Substitution $x = 4n + 3$ erhält man wie in der 1. Lösung aus Gleichung (1) $y = 7n + 4$.
Damit haben alle Lösungen der Gleichung (1) die Gestalt $(4n + 3; 7n + 4)$ mit $n \in \mathbb{N}$, und umgekehrt ist - wie die Probe zeigt - für jedes natürliche n das geordnete Paar $(4n + 3; 7n + 4)$ eine Lösung der Gleichung (1). Die Lösungsmenge von Gleichung (1) ist nach diesem Ergebnis $L = \{(4n + 3; 7n + 4) : n \in \mathbb{N}\}$.

3.1.5.• Man bestimme alle geordneten Paare positiver ganzer Zahlen, die die Gleichung $5x - 17y = 1$ erfüllen!

3.1.6.• Es sind alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 20 = (y + 2)^2 \qquad (x, y \in \mathbb{Z})$$

anzugeben!

3.1.7. Man bestimme die Menge aller Tripel von positiven ganzen Zahlen, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 32$ erfüllen!

Bemerkung:
Jedes Tripel von positiven ganzen Zahlen, die der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, wird pythagoreisches Zahlentripel genannt. Nach der Umkehrung eines bekannten Lehrsatzes, dessen Entdeckung (möglicherweise zu Unrecht) dem griechischen Philosophen und Mathematiker Pythagoras von Samos (6. Jahrh. v. u. Z.) zugeschrieben wird, sind die Zahlen derartiger pythagoreischer Tripel Maßzahlen von Seiten rechtwinkliger Dreiecke.

[8] Zum Rechnen mit Kongruenzen siehe E. Lehmann, Zahlentheorie, Übungen für junge Mathematiker Teil 1, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1968, S. 49ff.

Lösung:
Wir notieren zunächst, dass die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \text{und} \qquad (kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2 \quad (k \in \mathbb{Z}, k > 0) \tag{1,2}$$

bezüglich des vorgegebenen Variablengrundbereiches zueinander äquivalent sind. Es heißt dies, dass für jede Lösung $(x_0; y_0; z_0)$ der Gleichung (1) auch das Tripel $(kx_0;$ $ky_0;$ $kz_0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $k > 0$ eine Lösung von (1) ist.

Bei Kenntnis derjenigen Lösungstripel $(x_0; y_0; z_0)$, deren Elemente x_0, y_0 und z_0 teilerfremd sind, lassen sich also alle weiteren Lösungstripel durch Multiplikation von x_0, y_0 und z_0 mit ein und derselben positiven ganzen Zahl gewinnen. Wir wenden uns deshalb im folgenden der Bestimmung der Lösungsmenge der Gleichung (1) unter der zusätzlichen Voraussetzung zu, dass x, y und z teilerfremd sind.

Alle positiven ganzzahligen x, y und z, die der Gleichung (1) genügen und teilerfremd sind, sind sogar paarweise teilerfremd. Besitzen nämlich irgend zwei dieser Zahlen einen gemeinsamen Teiler t, so ist dieser wegen (2) auch Teiler der dritten Zahl.
Wir bestimmen also im folgenden die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{mit } x, y, z \in \mathbb{Z}, x > 0, y > 0, z > 0$$

$$\text{und } \mathrm{ggT}(x, y) = ggT(x, z) = ggT(y, z) = 1$$

1. Fall: x und y sind beide ungerade.

Für jede natürliche Zahl n gilt $(2n)^2 = 4n^2$ und $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4(n^2+n)+1$. Somit lässt das Quadrat einer positiven ganzen Zahl bei Division durch 4 nur den Rest 0 oder den Rest 1.
Für ungerade positive ganzzahlige x, y und positive ganzzahlige z, die der Gleichung (1) genügen, müsste z^2 bei Division durch 4 den Rest 2 lassen, was nach dem eben Gesagten unmöglich ist. Deshalb ist in diesem Falle die Lösungsmenge der Gleichung (1) leer.

2. Fall: x ist gerade, y ist ungerade.

Gleichung (1) ist bezüglich des gewählten Variablengrundbereiches äquivalent zu

$$z^2 - y^2 = x^2 \tag{3}$$

und weiter zu

$$\frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \tag{4}$$

Da nun nach Voraussetzung für x nur gerade positive ganze Zahlen und für y und z nur ungerade positive ganze Zahlen eingesetzt werden dürfen, nehmen die Terme $\frac{z+y}{2}$, $\frac{z-y}{2}$ und $\frac{x}{2}$ für jede Belegung der Variablen ganzzahlige Werte an.
Für alle teilerfremden positiven ganzzahligen y, z sind auch $\frac{z+y}{2}$ und $\frac{z-y}{2}$ teilerfremd. Hätten letztere nämlich einen gemeinsamen Teiler, so wäre dieser auch Teiler ihrer Summe z und Teiler ihrer Differenz y. Damit ist aber ihr Produkt dann und nur dann

eine Quadratzahl, wenn sie beide selbst Quadratzahlen sind.

Wir setzen deshalb $\frac{z+y}{2} = v^2$ und $\frac{z-y}{2} = w^2$ mit $v, w \in \mathbb{Z}$ und $v > 0$, $w > 0$ und erhalten

$$z = v^2 + w^2 \qquad , \qquad y = v^2 - w^2$$

sowie wegen $x^2 = (v^2 + u^2)^2 - (v^2 - w^2)^2 = 4v^2w^2$

$$x = 2vw$$

Für alle v und für alle w, die den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} v, w \in \mathbb{Z} \\ v > w > 0 \\ \mathrm{ggT}(v, w) = 1 \\ v \text{ und } w \text{ sind nicht beide ungerade} \end{array}\right\} \tag{5}$$

genügen, sind auch x, y und z positiv ganzzahlig und paarweise teilerfremd sowie x und y nicht beide ungerade. Ferner gilt für alle diese v und für alle diese w

$$(2vw)^2 + (v^2 - w^2)^2 = (v^2 + w^2)^2$$

Nach diesem Ergebnis ist die Lösungsmenge von Gleichung (1) für den 2. Fall $L_2 = \{(vw; v^2 - w^2; v^2 + w^2)\}$, wobei v und w der Bedingung (5) genügen.

3. Fall: x ist ungerade, y ist gerade.

Bei entsprechendem Vorgehen wie im 2. Fall erhält man $L_3 = \{(v^2-w^2; 2vw; v^2+w^2)\}$, wobei v und w der Bedingung (5) genügen, als Lösungsmenge der Gleichung (1).
Lassen wir nun noch die bisher angenommene Voraussetzung $\mathrm{ggT}(x, y) = \mathrm{ggT}(x, z) = \mathrm{ggT}(y, z) = 1$ fallen, so gibt

$$L = \{(2kvw; kv^2 - kw^2; kv^2 + kw^2)\} \cup \{(kv^2 - kw^2; 2kvw; kv^2 + kw^2)\}$$

die gesuchte Lösungsmenge der Gleichung (1) an, wenn $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ ist und v und w der Bedingung (5) genügen.

Bemerkung:
Wenn man unter den gemachten Voraussetzungen für v und w den Faktor k positiv rational wählt, so gibt L die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ für den Variablengrundbereich der positiven rationalen Zahlen an.

3.1.8.• Man gebe die Menge aller Tripel von positiven ganzen Zahlen, die teilferfremd sind, nicht mehr als zwei Ziffern haben und der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, durch Aufzählung ihrer Elemente an!

3.1.9.• Man löse die Gleichung $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$ $(x, y \in \mathbb{N})$!

3.1.10.• Es sind alle die natürlichen Zahlen n zu ermitteln, für die die Gleichung $x + y = nxy$ $(x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ Lösungen hat, und diese Lösungen anzugeben!

3.1.11. Man bestimme alle die natürlichen Zahlen n, für die bei gewähltem Variablengrundbereich der positiven ganzen Zahlen die Gleichung $x^n + y^n = nxy$ Lösungen hat und gebe diese Lösungen an!

Lösung:
1. Fall: $n = 0$.
Es ist $z^0 = 1$ für alle positiven ganzzahligen z, somit Gleichung

$$x^0 + y^0 = 0 \cdot xy$$

äquivalent zur Gleichung

$$2 = 0 \cdot xy$$

mit der Lösungsmenge $L_0 = \varnothing$.

2. Fall: $n = 1$.
Die Gleichung $x + y = xy$ ist äquivalent zur Gleichung

$$y(x - 1) = x$$

Letztere hat im Falle $x = 1$ keine Lösung, im Falle $x \neq 1$ nur die Lösung $(2; 2)$. Es ist also $L_1 = \{(2; 2)\}$.

3. Fall: $n = 2$.
Durch äquivalente Umformungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2xy$ erhält man

$$(x - y)^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x = y$$

mit der Lösungsmenge $L_3 = \{(a; a) : a \in \mathbb{Z} \text{ und } a > 0\}$.

4. Fall: $n \geq 3$.
Die Gleichung

$$x^n + y^n = nxy \tag{1}$$

ist symmetrisch, d.h., sie geht in eine ihr äquivalente über, wenn man gleichzeitig die Variable x durch y und die Variable y durch x ersetzt. Wegen dieser Symmetrie ist mit jeder ihrer Lösungen $(a; b)$ auch $(b; a)$ eine Lösung der Gleichung. Macht man von dieser Überlegung Gebrauch, so genügt es, sich beim Lösen der Gleichung (1) zunächst auf den Fall $x \geq y$ zu beschränken, um alle ihre Lösungen zu finden.

Für alle x und für alle y aus dem gewählten Variablengrundbereich mit $x \geq y$ und $x^{n-2} \geq n$ gilt

$$x^n + y^n - nxy \geq x^n + y^n - nx^2 = x^2(x^{n-2} - n) + y^n > 0$$

Es heißt dies aber, dass Gleichung (1) unter der Bedingung $x \geq y$ und

$$x^{n-2} \geq n \tag{2}$$

keine Lösungen besitzt.

Nach den eben getroffenen Feststellungen sind für $n = 3$ lediglich die geordneten Paare $(1; 1)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$ und $(1; 2)$ daraufhin zu untersuchen, ob sie Lösungen der Gleichung (1) sind. Die Probe zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Gleichung (1) hat für $n = 3$ die Lösungsmenge $L_3 = \varnothing$.

Sei nun $n \geq 4$. Dann ist das geordnete Paar $(1; 1)$ keine Lösung der Gleichung (1), wie die Probe zeigt.
Wie im weiteren noch nachgewiesen wird sind aber auch alle Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen x und y mit $x \geq 2$ nicht Lösungen von (1), und wegen der Symmetrie dieser Gleichung sind es dann auch die geordneten Paare $(y; x)$ nicht. Die Lösungsmenge L_n von (1) ist also für $n \geq 4$ leer: $L_n = \varnothing$.

Es erfüllen nämlich alle x mit $x \geq 2$ die Bedingung (2). Zum Beweis dieser Behauptung notieren wir zunächst, dass aus $x \geq 2$ im gegebenen Variablengrundbereich $x^{n-2} \geq 2^{n-2}$ für alle $n \geq 4$ folgt.
Ferner weisen wir im folgenden durch vollständige Induktion nach, dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 4$ die Ungleichung $2^{n-2} \geq n$ gilt.

Es ist $2^{4-2} = 2^2 = 4$, die Behauptung für $n = 4$ somit wahr.
Für alle natürlichen k mit $k \geq 4$ folgt aus $2^{k-2} \geq k$ die Ungleichung $2 \cdot 2^{k-2} \geq 2k$ und deswegen

$$2^{(k+1)-2} = 2^{k-1} = 2 \cdot 2^{k-2} \geq 2k = k + k > k + 1$$

Auf Grund der letzten Feststellung und der Gültigkeit der Behauptung für $n = 4$ gilt $2^{n-2} \geq n$ für alle natürlichen n mit $n \geq 4$.
In Zusammenfassung der Ergebnisse in den Fällen 1.-4. erhalten wir als Lösungsmenge L der Gleichung (1)

$$L = \begin{cases} \{(2; 2)\} & \text{für } n = 1 \\ \{(a; a) : a \in \mathbb{Z}, a > 0\} & \text{für } n = 2 \\ \varnothing & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

3.1.12.• Man ändere die Aufgabenstellung von 3.1.11. dahingehend ab, dass als Variablengrundbereich für x und y die Menge der positiven reellen Zahlen gewählt wird, und löse die auf diese Weise gewonnene Aufgabe!

(Hinweis: Es empfiehlt sich, die Substitution $y = z \cdot x^{n-1}$ mit $z \in \mathbb{R}_+$ vorzunehmen.)

3.2 Gleichungssysteme

3.2.1. Man bestimme alle Tripel positiver ganzer Zahlen x, y und z, für die gilt:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + u &= 22 \\ 72x + 22y + 23z + 8u &= 447 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bemerkung:
Aufgabe 3.2.1. fordert, ein sogenanntes diophantisches Gleichungssystem zu lösen. In derartigen Gleichungssystemen ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der

auftretenden Variablen und als Variablengrundbereich die Menge der positiven ganzen Zahlen vorgeschrieben.

Lösung:
Das Gleichungssystem (1) ist äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 22x + 22y + 22z + 22u = 484 \\ 72x + 22y + 23z + 8u = 447 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Wir multiplizieren beide Seiten der zweiten Gleichung von (2) mit -1 und addieren die so gewonnene Gleichung zur ersten Gleichung des Systems (2). Auf diese Weise erhalten wir

$$-50x - z + 14u = 37 \qquad (3)$$

Alle Lösungen des Gleichungssystems (2) erfüllen dann die Gleichung (3). (Abschnitt 1.12.) Selbstverständlich erfüllen sie auch die erste Gleichung des Systems (1)

$$x + y + z + u = 22$$

Somit folgt aus dem Gleichungssystem (2) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + u = 22 \\ -50x - z + 14u = 37 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Es ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + u = 22 \\ z = 14u - 50x - 37 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus dem Gleichungssystem (5) das System

$$\left.\begin{aligned} x + y + 14u - 50x - 37 + u = 22 \\ z = 14u - 50x - 37 \end{aligned}\right\}$$

welches äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} y = -15u + 49x + 59 \\ z = 14u - 50x - 37 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ist.

1. Fall: $x = 1$.
In diesem Fall erhalten wir aus (6) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y = -15u + 108 \\ z = 14u - 87 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Man entnimmt (7), dass einzig für $u = 7$ die rechten Seiten der Gleichungen des Systems beide positive Werte annehmen. Diese Werte sind 3 bzw. 11.
Die Probe zeigt, dass das Quadrupel $(1; 3; 11; 7)$ eine Lösung des Gleichungssystems (1) ist.

2. Fall: $x = 2$.

Aus (6) wird das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y &= -15u + 157 \\ z &= 14u - 137 \end{aligned}\right\}$$

gewonnen. Nur für $u = 10$ nehmen die rechten Seiten der Gleichungen beide positive Werte an, und zwar 7 bzw. 3. Die Probe ergibt, dass das Quadrupel $(2; 7; 3; 10)$ das Gleichungssystem (1) erfüllt.

3. Fall: $x = 3$.
Man erhält das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y &= -15u + 206 \\ z &= 14u - 187 \end{aligned}\right\}$$

Es gibt keine solche Belegung von u, für die die rechten Seiten des Systems beide positive Werte annehmen.

4. Fall: $x = 4$.
Für keine Belegung von u sind die rechten Seiten der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= -15u + 255 \\ z &= 14u - 237 \end{aligned}\right\}$$

beide positiv.

5. Fall: $x \geq 5$.
In diesem Fall lassen sich keine positiven ganzen Zahlen x, y, z und u finden, für die

$$\left.\begin{aligned} y &= -15u + 49x + 59 \\ z &= 14u - 50x - 37 \end{aligned}\right\}$$

gilt. Wären nämlich x_0, y_0, z_0, u_0 solche Werte, so würde für sie

$$-u_0 - x_0 + 22 = y_0 + z_0 > 0$$

und damit

$$u_0 < 22 - x_0 \leq 22 - 5 = 17$$

gelten, Andererseits wäre aber dann

$$z_0 = 14u_0 - 50x_0 - 37 < 14 \cdot 17 - 50 \cdot 5 - 37 = -49 < 0$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1) ist damit

$$L = \{(1; 3; 11; 7), (2; 7; 3; 10)\}$$

3.2.2.• Man löse das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} [x] + [y] + [z] &= 14 \\ 12[x] + 9[y] + [z] &= 120 \end{aligned}\right\}$$

mit dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}_+$.

3.2.3.• Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$, für die $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und

$$\left.\begin{aligned} x - z &= y \\ 5x + 2y &= z - 2 \end{aligned}\right\}$$

gilt!

3.2.4. Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen anzugeben, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} |y-1| &= 1 - |x| \\ y - 2 &= 2x \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Lösung:
Das Gleichungssystem (1) ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} |y-1| &= 1 - |x| \\ y - 1 &= 1 + 2x \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1. Fall: $y - 1 \geq 0$.
Nach Definition des absoluten Betrages ist (2) äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= 1 - |x| \\ y - 1 &= 1 + 2x \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (3) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= 1 - |x| \\ 1 - |x| &= 1 + 2x \end{aligned}\right\}$$

das wir äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 - |x| \\ 0 &= |x| + 2x \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

umformen. Das Gleichungssystem wird offenbar nur vom geordneten Paar $(0; 2)$ erfüllt. Wie die Probe zeigt, ist $(0; 2)$ auch Lösung des Gleichungssystems (1).

2.Fall: $y - 1 < 0$.
In diesem Fall ist (1) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= |x| - 1 \\ y - 1 &= 1 + 2x \end{aligned}\right\} \qquad \text{aus dem} \qquad \left.\begin{aligned} y - 1 &= |x| - 1 \\ |x| - 1 &= 1 + 2x \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

folgt. Durch äquivalente Umformung erhält man aus (5)

$$\left.\begin{aligned} y &= |x| \\ 0 &= 2 + 2x - |x| \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das Gleichungssystem (6) hat im Falle $x \geq 0$ keine Lösung. Im Falle $x < 0$ wird es vom geordneten Paar $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ erfüllt. Wie die Probe zeigt, ist $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ auch Losung des Gleichungssystems (1).

Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1)

$$L = \left\{(0,2), \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$$

Geometrische Veranschaulichung: In Abbildung 4 sind die durch die Gleichung $|y-1| = 1 - |x|$ vermittelte Zuordnung von reellen Zahlen x und y sowie die Funktion mit der Gleichung $y - 2 = 2x$ graphisch dargestellt.

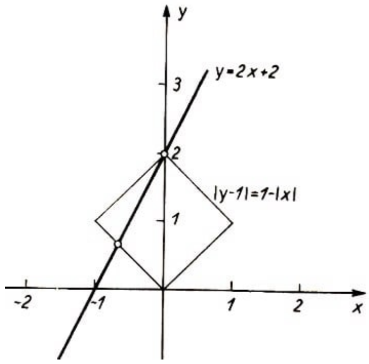

Abb. 4

Wie man die Darstellung der erstgenannten Zuordnung gewinnt, ist im Teil 3 dieser Broschürenreihe mit dem Titel "Ungleichungen", Autor G. Kleinfeld, ausführlich beschrieben.
Den Lösungen des Gleichungssystems (1) entsprechen dann gerade diejenigen Punkte, die beiden Graphen gemeinsam sind.

3.2.5.• Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{r} |y-1| = 1 - |x| \\ (y-1)^2 = \frac{10}{16} - x^2 \end{array}\right\}$$

im Variablengrundbereich $\mathbb{R}$!

3.2.6.• Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems $(x, y \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{r} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| + y = -5 \end{array}\right\}$$

3.2.7.• Es sind alle geordneten Paare positiver reeller Zahlen zu bestimmen, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\left.\begin{array}{r} x = 4y \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 20 \end{array}\right\}$$

3.2.8. Man bestimme alle geordneten Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, für die gilt:

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0 \\ x + xy + y = -1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bemerkung:
Es handelt sich bei dem in Aufgabe 3.2.8. gegebenen Gleichungssystem um ein Paar von symmetrischen Gleichungen, d.h. von Gleichungen, die bei gleichzeitigem Ersetzen

der Variablen x durch y und der Variablen y durch x in ihnen äquivalente Gleichungen übergehen. Bei der Lösung von Systemen symmetrischer Gleichungen erweist es sich als zweckmäßig, die Substitution $u = x + y$ und $v = xy$ vorzunehmen.

Lösung:
Das Gleichungssystem (1) ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 2x^2y - 2xy^2 = 0 \\ x + xy + y = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Durch weitere äquivalente Umformungen von (2) erhält man

$$\left.\begin{aligned} (x+y)^3 - 2xy(x+y) = 0 \\ x + xy + y = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Indem man $x + y = u$ und $xy = v$ setzt, gewinnt man aus (3) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u^3 - 2vu = 0 \\ u + v = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Dieses ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} u(u^2 - 2v) = 0 \\ v = -1 - u \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (5) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u(u^2 + u + 2) = 0 \\ v = -1 - u \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (6) ist damit die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} u = 0 \\ v = -1 - u \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} u^2 + 2u + 2 = 0 \\ v = -1 - u \end{aligned}\right\} \qquad (7,8)$$

Das Gleichungssystem (7) hat die Lösungsmenge $L_1 = \{(0; -1)\}$.
Die Diskriminante der ersten Gleichung des Systems (8) ist negativ. Deshalb hat das Gleichungssystem (8) im gegebenen Variablengrundbereich $\mathbb{R}$ keine Lösungen,) seine Lösungsmenge ist $L_2 = \varnothing$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (6) ist somit

$$L_3 = L_1 \cup L_2 = \{(0; -1)\}$$

Wegen $x + y = u$ und $xy = v$; ist jetzt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

zu lösen. Nun gilt offensichtlich für alle geordneten Paare $(x; y)$, die (9) erfüllen, $x \neq 0$, $yneq0$. Deshalb führt die Einschränkung des Variablengrundbereichs auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht zu einem Verlust an Lösungen. Bezüglich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist (9) äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} x + y = 0 \\ y = -\tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (10) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x - \tfrac{1}{x} &= 0 \\ y &= -\tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\}$$

woraus man durch weitere äquivalente Umformung bezüglich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ y &= -\tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

erhält. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (11) ist $L = \{(1; -1), (-1; 1)\}$.
Die Probe zeigt, dass dies auch die Lösungsmenge des vorgegebenen Gleichungssystems (1) ist.

3.2.9.• Man löse das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3 &= 8 \\ x^2 - 3xy + y^2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

mit dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen!

3.2.10. Man gebe alle Quintupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ natürlicher Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 an, für die gilt:

$$\left.\begin{aligned} 288x_1 &= x_2x_3x_4x_5 \\ 72x_2 &= x_1x_3x_4x_5 \\ 32x_3 &= x_1x_2x_4x_5 \\ 18x_4 &= x_1x_2x_3x_5 \\ 2x_5 &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Lösung:
1. Fall: Es gilt $x_i = 0$ für wenigstens ein $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. In diesem Fall ist das Gleichungssystem (1) offensichtlich äquivalent zum Gleichungssystem

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$$

mit der Lösungsmenge $L_1 = \{(0; 0; 0; 0; 0)\}$.

2. Fall: Es ist $x_i \neq 0$ für alle $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen zerlegen wir zunächst die in den Gleichungen von (1) auftretenden Koeffizienten in Primfaktoren und erhalten aus (1)

$$\left.\begin{aligned} 2^5 \cdot 3^2 x_1 &= x_2x_3x_4x_5 \\ 2^3 \cdot 3^2 x_2 &= x_1x_3x_4x_5 \\ 2^5 x_3 &= x_1x_2x_4x_5 \\ 2 \cdot 3^2 x_4 &= x_1x_2x_3x_5 \\ 2x_5 &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Aus dem Gleichungssystem (2) folgt die Gleichung

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2x_1x_2x_3x_4x_5 = (x_1x_2x_3x_4x_5)^4$$

die durch Multiplikation der linken Seiten und der rechten Seiten der Gleichungen des Systems (2) entsteht (Abschnitt 1.12.). Durch äquivalente Umformung wird daraus

$$2^15 \cdot 3^6 = (x_1x_2x_3x_4x_5)^3 \qquad \text{und weiter} \qquad 2^5 \cdot 3^2 = x_1x_2x_3x_4x_5 \tag{3}$$

erhalten. Im gegebenen Variablengrundbereich $N \setminus \{0\}$ ist Gleichung (3) äquivalent zu

$$\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4x_5} \tag{4}$$

Da nach unseren Feststellungen alle Lösungen von (2) auch die Gleichung (4) erfüllen, ist das Gleichungssystem (2) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 2^5 \cdot 3^2 x_1 &= x_2x_3x_4x_5 \\ 2^3 \cdot 3^2 x_2 &= x_1x_3x_4x_5 \\ 2^5 x_3 &= x_1x_2x_4x_5 \\ 2 \cdot 3^2 x_4 &= x_1x_2x_3x_5 \\ 2x_5 &= x_1x_2x_3x_4 \\ \tfrac{1}{2^5 \cdot 3^2} &= \tfrac{1}{x_1x_2x_3x_4x_5} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus (5) folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= 1 \\ x_2^2 &= 2^2 \\ x_3^2 &= 3^2 \\ x_4^2 &= 2^4 \\ x_5^2 &= 2^4 \cdot 3^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

das man erhält, indem man von den ersten fünf Gleichungen des Systems (5) jede mit der letzten Gleichung von (5) multipliziert und anschließend äquivalente Umformungen vornimmt.
Das Gleichungssystem (6) mit dem Variablengrundbereich $N \setminus \{0\}$ hat die Lösungsmenge $L_2 = \{(1; 2; 3; 4; 12)\}$.
Die Probe zeigt, dass dies auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1) mit dem Variablengrundbereich $N \setminus \{0\}$ ist.
Indem man die Ergebnisse beider untersuchter Fälle zusammenfasst, erhält man als Lösungsmenge des Gleichungssystems (1)

$$L = \{(0; 0; 0; 0; 0), (1; 2; 3; 4; 12)\}$$

3.2.11.• Es sind alle Tripel von positiven reellen Zahlen anzugeben, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_9 x + \log_3 y + \log_9 z &= 2 \\ \log_{16} x + \log_{16} y + \log_4 z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

3.2.12.• Es ist das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 &= p^2 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n &= pq \end{aligned}\right\}$$

mit dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}$ zu lösen, in dem $a_1, a_2, ..., a_n, p, q$ reelle und von Null verschiedene Parameter sind, für die zudem

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = q^2$$

gelten soll!

3.2.13. Man bestimme alle n-tupel von reellen und von Null verschiedenen Zahlen, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = x_2 \\ \frac{x_2}{2} + \frac{1}{x_2} = x_3 \\ ... \\ \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}} = x_n \\ \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = x_1 \end{array}\right\}$$

Lösung:
Multiplikation beider Seiten einer jeden der Gleichungen des Systems

$$\frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} = x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } x_{n+1} = x_1) \tag{1}$$

mit der reellen Zahl $\sqrt{2}$ liefert das zu (1) äquivalente Gleichungssystem

$$\frac{x_i}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x_i} = \sqrt{2}x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } x_{n+1} = x_1) \tag{2}$$

Wir setzen $\frac{x_i}{\sqrt{2}} = y_i$ für $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und suchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$y_i + \frac{1}{y_i} = 2y_{i+1} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } y_{n+1} = y_1) \tag{3}$$

1. Fall: $y_1 > 0$.
Man entnimmt dem Gleichungssystem (3) unmittelbar, dass für alle n-tupel $(y_1, y_2, ..., y_n)$, die (3) erfüllen, mit $y_1 > 0$ auch $y_i > 0$ für alle $i \in \{2; 3; ...; n\}$ gilt.
Wir dürfen deshalb den Variablengrundbereich auf $\mathbb{R}_+$ einschränken, ohne dass Lösungen verlorengehen.

Nun ist nach einem bekannten Satz das arithmetische Mittel zweier positiver reeller Zahlen größer oder mindestens gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen.[9] Es gilt deshalb für alle $y_i \in \mathbb{R}_+$:

$$2 = 2\sqrt{y_i \frac{1}{y_i}} \leq y_i + \frac{1}{y_i} \tag{4}$$

Auf Grund dessen folgt aus dem Gleichungssystem (3) das Ungleichungssystem

$$2 \leq 2y_{i+1} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } y_{n+1} = y_1)$$

[9]Einen Beweis dieses Satzes findet man in G. Kleinfeld, Ungleichungen, Übungen für junge Mathematiker Teil 3, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969, S. 92 ff.

bzw.

$$y_i \geq 1 \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } y_{n+1} = y_1) \tag{5}$$

Aus dem Ungleichungssystem (5) folgt das System

$$y_i \geq \frac{1}{y_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } y_{n+1} = y_1) \tag{6}$$

und weiter die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} \tag{7}$$

die man durch Addition aller linken Seiten und durch Addition aller rechten Seiten innerhalb des Ungleichungssystems (6) erhält. In (7) gilt das Gleichheitszeichen nur im Falle

$$y_1 = y_2 = ... = y_n = 1$$

Andererseits folgt aus dem Gleichungssystem (3) durch Addition aller linken Seiten und Addition aller rechten Seiten die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i + \frac{1}{y_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} 2y_i$$

Äquivalente Umformungen liefern

$$\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} \tag{8}$$

Nach unseren Feststellungen kommt damit lediglich das n-tupel $(1; 1; ..; 1)$ als Lösung des Gleichungssystems (3) und wegen unserer vorgenommenen Substitution

$$\frac{x_i}{\sqrt{2}} = y_i \qquad \text{für } i \in \{1, 2, ..., n\}$$

nur das n-tupel $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; ...; \sqrt{2})$ als Lösung des Gleichungssystems (1) in Frage. Die Probe zeigt, dass das letzte n-tupel das System (1) tatsächlich erfüllt.

2. Fall: $y_1 < 0$.
Man entnimmt dem Gleichungssystem (3), dass für alle n-tupel $(y_1; y_2; ..., y_n)$, die (3) erfüllen, mit $y_1 < 0$ auch $y_i < 0$ für alle $i \in \{2; 3; ...; n\}$ gilt.
Wir setzen $-y_i = z_i$ für $i \in \{1; 2; ...; n\}$ und lösen das Gleichungssystem

$$z_i + \frac{1}{z_i} = 2z_{i+1} \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ und } z_{n+1} = z_1) \tag{9}$$

Durch entsprechende Überlegungen wie im ersten Fall erhält man das n-tupel $(1; 1; ...; 1)$ als einzige Lösung von (9) und weiter das n-tupel $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; ...; -\sqrt{2})$ als einzige Lösung des Gleichungssystems (1) im Variablengrundbereich $(-\infty, 0)$.

Zusammenfassend erhält man als Lösungsmenge des Gleichungssystems (1)

$$L = \{(\sqrt{2}; \sqrt{2}; ...; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; ...; -\sqrt{2})\}$$

4 Lösungen der Übungsaufgaben

Zu 2.1.2.
Durch äquivalente Umformung der Gleichung

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}x = \frac{1}{2} \tag{1}$$

erhält man

$$\frac{ax+bx}{ab} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x(a+b) = \frac{1}{2}ab \tag{2}$$

1. Fall: $a \neq -b$.
In diesem Fall ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$x = \frac{ab}{2(a+b)} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) hat genau dann positive Lösungen, wenn $ab > 0$ und $2(a+b) > 0$ (4) oder $ab < 0$ und $2(a+b) < 0$ (5) ist. Als äquivalente Bedingungen für (4) und für (5) gewinnt man $a > 0$ und $b > 0$ bzw. $0 < a < -b$ oder $a < -b < 0$.

2. Fall: $a = -b$.
In diesem Fall ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$x \cdot 0 = \frac{1}{2}ab \tag{6}$$

Wegen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist die Lösungsmenge von (6) leer, und es gibt somit insbesondere keine positiven Lösungen.
Zusammenfassend ist festzustellen: Gleichung (1) hat genau dann positive Lösungen, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$a > 0$ und $b > 0$, $a > 0$ und $b < 0$ und $a < -b$, $a < 0$ und $b > 0$ und $a < -b$.

Zu 2.2.2.
Zur Bestimmung der Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{|ax+b|}{a+b} = x - |x| \qquad (a, b, x \in \mathbb{R}; a \neq b) \tag{1}$$

notieren wir zunächst, dass der Term $x - |x|$ nur im Variablengrundbereich $[0; \infty)$ und dort für jede Belegung den Wert 0 annimmt.

1.Fall $ax + b > 0$.
In diesem Falle nimmt der Term $\frac{|ax+b|}{a+b}$ für jede Belegung der Variablen x von Null verschiedene Werte an. Deshalb gibt es innerhalb des Bereiches $[0; \infty)$ keine Lösungen. Bezüglich des Variablengrundbereiches $(-\infty; 0)$ ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$\frac{ax+b}{a+b} = 2x \qquad \text{und weiter zu} \qquad (a+2b)x = b \tag{2}$$

Wir vermerken, dass es wegen $a \neq -b$ ausgeschlossen ist, dass zugleich $a+2b=0$ und $b=0$ gilt.
Wie man leicht nachprüft, hat Gleichung (2) genau dann eine Lösung innerhalb des Variablengrundbereiches $(-\infty, 0)$, wenn folgende drei Bedingungen zugleich erfüllt sind:

$$a + 2b \neq 0 \qquad \text{und} \qquad b \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sgn} b \neq \operatorname{sgn}(a + 2b)$$

Diese Lösung ist $x_1 = \frac{b}{a+2b}$.

2. Fall: $ax + b = 0$.
In diesem Falle hat Gleichung (1) keine Lösungen im Bereich $(-\infty; 0)$. Innerhalb des Bereiches $[0; \infty)$ hat sie genau dann eine Lösung, wenn

$$0 \neq \operatorname{sgn} a \neq \operatorname{sgn} b$$

ist. Diese Lösung ist $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3.Fall: $ax + b < 0$.
In diesem Falle hat Gleichung (1) keine Lösungen im Bereich $[0; \infty)$. Gleichung (1) ist bezüglich des Variablengrundbereiches $(-\infty; 0)$ äquivalent zu

$$\frac{-ax - b}{a + b} = 2x \qquad \text{und weiter zu} \qquad (3a + 2b)x = -b \tag{3}$$

Es ist ausgeschlossen, dass zugleich $3a + 2b = 0$ und $b = 0$ gilt. Wie man leicht nachprüft, hat Gleichung (3) genau dann eine Lösung innerhalb von $(-\infty; 0)$, wenn

$$0 \neq \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn}(3a + 2b)$$

ist. Diese Lösung ist $x_3 = -\frac{b}{3a+2b}$.
Die folgende Tabelle gibt die Lösungsmenge der Gleichung (1) in Abhängigkeit von der Wahl der reellen Parameter a und b mit $a \neq -b$ an:

a	b	Lösungsmenge
$a > 0$	$b > 0$	$\{x_3\}$
	$b = 0$	$\varnothing$
	$0 > b > -a/2$	$\{x_1, x_2\}$
	$-a/2 \geq b > -a$	$\{x_2\}$
	$-a > b \geq -3a/2$	$\{x_2\}$
	$-3a/2 > b$	$\{x_2, x_3\}$
$a = 0$	$b > 0$	$\{x_3\}$
	$b < 0$	$\{x_3\}$
$a < 0$	$b < 0$	$\{x_3\}$
	$b = 0$	$\varnothing$
	$0 < b < -a/2$	$\{x_1, x_2\}$
	$-a/2 \leq b < -a$	$\{x_2\}$
	$-a < b \leq -3a/2$	$\{x_2\}$
	$-3a/2 < b$	$\{x_2, x_3\}$

Zu 2.3.2.
Jede reelle Zahl x lässt sich in ihr größtes Ganzes und einen Rest aufspalten:

$$x = [x] + a \qquad \text{mit} \qquad a \in [0;1)$$

1. Fall: $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$
Wir ersetzen in der Gleichung

$$2[x] + p = [2x] \tag{1}$$

die Variable x an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $[x] + a$ und erhalten

$$2[[x] + a] + p = [2([x] + a)]$$

und weiter nach Definition des "größten Ganzen" einer reellen Zahl

$$2[x] + p = 2[x]$$

Diese Gleichung besitzt offenbar für $p \neq 0$ keine Lösung. Für $p = 0$ ist jedes $x = g + a$ mit $g \in \mathbb{Z}$ und $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$ eine Lösung der Gleichung.

2. Fall: $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$
Entsprechende Überlegungen wie im ersten Falle führen in diesem Falle zu

$$2[[x] + a] + p = [2([x] + a)]$$

und weiter zu

$$2[x] + p = 2[x] + 1$$

Diese Gleichung besitzt für $p \neq 1$ keine Lösung; und für $p = 1$ ist jedes $x = g + a$ mit $g \in \mathbb{Z}$ und $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ eine Lösung der Gleichung. Wir erhalten somit als Lösungsmenge der Ausgangsgleichung

$$L = \begin{cases} \bigcup\limits_{g \in \mathbb{Z}} \left[g + \frac{1}{2}; g + 1\right) & \text{für } p = 1 \\ \bigcup\limits_{g \in \mathbb{Z}} \left[g; g + \frac{1}{2}\right) & \text{für } p = 0 \\ \varnothing & \text{für } 0 \neq p \neq 1 \end{cases}$$

Zu 2.3.3.

$$|[x]| = |x - p| \qquad (p \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1. Fall: $\operatorname{sgn}[x] = \operatorname{sgn}(x - p)$
In diesen Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$[x] = x - p \qquad \text{und weiter zu} \qquad x = [x] + p \tag{2,3}$$

Gleichung (3) hat offensichtlich nur im Falle $p \in [0;1)$ (d.h. $[p] = 0$) Lösungen; und zwar ist dann für jedes $g \in \mathbb{Z}$ die reelle Zahl $x = g + p$ eine Lösung der Gleichung.

2. Fall: $\operatorname{sgn}[x] \neq \operatorname{sgn}(x - p)$.

In diesem Falle ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$[x] = p - x \tag{4}$$

Da der Wertebereich des Terms $[x]$ die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist, kommen als Lösungen der Gleichung (4) nur solche reellen Zahlen x in Frage, die sich in der Form $x = p - g$ mit $g \in \mathbb{Z}$ darstellen lassen. Ersetzt man in (4) die Variable x an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $p - g$, so erhält man aus Gleichung (4)

$$[p - g] = g \tag{5}$$

Nun ist aber $[p - g] = [p] - g$ für alle $g \in \mathbb{Z}$ und alle $p \in \mathbb{R}$. Somit ist Gleichung (5) äquivalent zu

$$[p] - g = g \qquad \text{und weiter zu} \qquad [p] = 2g \tag{6}$$

Offensichtlich hat Gleichung (6) dann und nur dann Lösungen, wenn $[p]$ gerade und verschieden von Null ist; es ist dann nämlich $p - \frac{[p]}{2}$ Lösung der Gleichung.
(Für $[p] = 0$ würde zwar $x = p$ Gleichung (4) erfüllen, es wäre dann aber $\operatorname{sgn}[x] = \operatorname{sgn}(x - p) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.)

Zusammenfassend sind im Hinblick auf die Lösungen der vorgegebenen Gleichung (1) folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $[p]$ ist ungerade. Dann hat Gleichung (1) keine Lösungen. Ihre Lösungsmenge ist $L = \varnothing$.
2. $[p]$ ist gerade.
Wenn $[p] = 0$ ist, so hat Gleichung (1) unendlich viele Lösungen; und zwar ist dann für jedes $g \in \mathbb{Z}$ die reelle Zahl $x = g + p$ eine Lösung der Gleichung. In diesem Falle ist die Lösungsmenge von (1): $L = \{g + p : g \in \mathbb{Z}\}$.
Wenn $[p] \neq 0$ ist, so hat Gleichung (1) als einzige Lösung $p - \frac{[p]}{2}$. Die Lösungsmenge von (1) ist dann $L = \left\{p - \frac{[p]}{2}\right\}$.

Zu 2.4.2.
1. Fall: $p = 1$
In diesem Falle ist die vorgegebene Gleichung äquivalent zu der Gleichung $-4x + 2 = 0$ mit der einzigen Lösung $x = \frac{1}{2}$.

2. Fall: $p \neq 1$
In diesem Falle ist die vorgegebene Gleichung

$$(p - 1)x^2 - 2(p + 1)x + p + 1 = 0 \tag{1}$$

äquivalent zur Gleichung

$$x^2 - \frac{2(p + 1)x}{p - 1}x + \frac{p + 1}{p - 1} = 0 \tag{2}$$

Dafür, dass Gleichung (2) genau eine Lösung hat, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Diskriminante gleich Null ist, dass also

$$\left(\frac{p + 1}{p - 1}\right)^2 - \frac{p + 1}{p - 1} = 0 \tag{3}$$

gilt. Die Bedingung (3) ist äquivalent zur Bedingung

$$\frac{p+1}{p-1} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{p+1}{p-1} = 1$$

und, da $\frac{p+1}{p-1} = 1$ von keinem p erfüllt wird, weiter äquivalent zu $p = -1$.
Folglich hat die Gleichung $(p-1)x^2-2(p+1)x+p+1 = 0$ für die reellen Parameterwerte $p = 1$ und $p = -1$ und nur für diese genau eine Lösung.

Zu 2.4.3.
Nach dem Satz von Vieta und der in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingung für die Lösungen x_1 und x_2 (o.B.d.A. $x_1 > x_2$) der gegebenen Gleichung müssen diese dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p + 1 \\ x_1 \cdot x_2 &= p \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

genügen. Aus (1) folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= p + 2 \\ x_1 \cdot x_2 &= p \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

das man erhält, indem man die letzte Gleichung von (1) zur ersten Gleichung von (1) addiert. (Abschnitt 1.12.) Das Gleichungssystem (2) ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{p+2}{2} \\ x_1 \cdot x_2 &= p \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Aus (3) folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{p+2}{2} \\ \tfrac{p+2}{2} \cdot x_2 &= p \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

das man bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens erhält. (Abschnitt 1.1.3.)

1. Fall: $p \neq -2$
In diesem Falle ist das Gleichungssystem (4) äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{p+2}{2} \\ x_2 &= \tfrac{2p}{p+2} \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aus (5) folgt bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{p+2}{2} \\ x_2 &= \tfrac{2p}{p+2} \\ \tfrac{p+2}{2} - \tfrac{2p}{p+2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Äquivalente Umformung von (6) liefert das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \frac{p+2}{2} \\ x_2 = \frac{2p}{p+2} \\ p^2 - 2p = 0 \end{array}\right\}$$

mit den Lösungen

$$x_{11} = 1; x_{21} = 0; p_1 = 0; \qquad \text{und} \qquad x_{12} = 2; x_{22} = 1; p_2 = 2$$

Tatsächlich erfüllen für $p = 0$ die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ der vorgegebenen quadratischen Gleichung die Bedingung $x_1 - x_2 = 1$. Gleiches gilt für die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 2$ im Fall $p = 2$.

2. Fall: $p = -2$.
In diesem Falle nimmt die vorgegebene quadratische Gleichung die Gestalt

$$x^2 + x - 2 = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$ an. Offensichtlich erfüllen diese Werte die Bedingung $x_1 - x_2 = 1$.
Die vorgegebene quadratische Gleichung hat also für die Werte 2, 0, -2 des reellen Parameters p und nur für diese Werte zwei Lösungen, deren Differenz den absoluten Betrag gleich 1 hat.

Zu 2.5.2.
1. Fall: $a < 0$.
Offensichtlich hat die kubische Gleichung in diesem Falle $\sqrt[3]{-a}$ als eine Lösung. Wir rechnen

$$\begin{array}{lr}
(x^3 & +a) : (x - \sqrt[3]{-a}) = x^2 + \sqrt[3]{-a}x + \sqrt[3]{a^2} \\
-(x^3 - \sqrt[3]{-a}x^2) & \\
\hline
\quad \sqrt[3]{-a}x^2 & +a \\
\quad -(\sqrt[3]{-a^2}x^2 - \sqrt[3]{a^2}x) & \\
\hline
\quad\quad \sqrt[3]{a^2}x & +a \\
\quad\quad -(\sqrt[3]{a^2}x) & +a
\end{array}$$

Nach diesem Ergebnis ist die vorgegebene kubische Gleichung äquivalent zu

$$(x - \sqrt[3]{-a})(x^2 + \sqrt[3]{-a}x + \sqrt[3]{a^2}) = 0$$

Da die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \sqrt[3]{-a}x + \sqrt[3]{a^2} = 0$$

negativ ist, hat die vorgegebene kubische Gleichung nur die eine Lösung $\sqrt[3]{-a}$.

2. Fall: $a > 0$.

Offensichtlich hat die kubische Gleichung in diesem Falle $-\sqrt[3]{a}$ als eine Lösung. Entsprechende Überlegungen wie im ersten Fall liefern die zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung

$$(x+\sqrt[3]{a})(x^2-\sqrt[3]{a}x+\sqrt[3]{a^2})=0$$

Da die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$x^2-\sqrt[3]{a}x+\sqrt[3]{a^2}=0$$

negativ ist, hat die vorgegebene kubische Gleichung in diesem Falle$-\sqrt[3]{a}$ als einzige Lösung.
Als Lösungsmenge der Gleichung $x^3+a=0$ $(a\neq 0)$ bei vorgegebenem Variablengrundbereich $\mathbb{R}$ wird somit

$$L=\begin{cases}\{-\sqrt[3]{a}\} & \text{für } a>0\\ \{\sqrt[3]{-a}\} & \text{für } a<0\end{cases}$$

erhalten.

Zu 2.5.4.
Durch äquivalentes Umformen der Ausgangsgleichung

$$x^2+2x=\frac{24}{x^2-1} \qquad (|x|\neq 1) \tag{1}$$

erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned}(x^2+2x)(x^2-1)&=24\\ x(x+2)(x+1)(x-1)&=24\\ (x^2+x-2)(x^2+x)&=24 \qquad (2)\end{aligned}$$

Man setzt $x^2+x=z$ und erhält aus (2) $(z-2)z=24$ und weiter durch äquivalentes Umformen

$$z^2-2z-24=0 \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) hat die Lösungen -4 und 6. Damit ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$(x^2+x+4)(x^2+x-6)=0 \tag{4}$$

und die Lösungsmenge der Gleichung (4) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^2+x+4=0 \qquad \text{und} \qquad x^2+x-6=0 \tag{5,6}$$

Gleichung (5) hat keine reellen Lösungen, und Gleichung (6) hat die reellen Lösungen $x=-3$ und $x=2$.
Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist damit $L=\{-3;2\}$.

Zu 2.5.5.
Die vorgegebene Gleichung

$$(4x+3)^2(2x-1)(x+2)=\frac{39}{2} \tag{1}$$

ist äquivalent zu

$$(16x^2 + 24x + 9)(2x^2 + 3x - 2) = \frac{39}{2} \qquad (2)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (2) mit 8, so erhält man die zu (2) äquivalente Gleichung

$$(16x^2 + 24x + 9)(16x^2 + 24x - 16) = 156 \qquad (3)$$

Setzt man nun $16x^2 + 24x - 16 = z$, so erhält man aus (3) die Gleichung

$$(z - 25)z = 156$$

mit den reellen Lösungen 12 und 13. Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$(16x^2 + 24x - 28)(16x^2 + 24x - 29) = 0 \qquad (4)$$

und die Lösungsmenge von (4) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$16x^2 + 24x - 28 = 0 \qquad \text{und} \qquad 16x^2 + 24x - 29 = 0 \qquad (5{,}6)$$

Bei Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf (5) und (6) erhält man als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1)

$$L = \left\{ -\frac{3+\sqrt{38}}{4}, -\frac{3+\sqrt{35}}{4}, -\frac{3-\sqrt{35}}{4}, -\frac{3-\sqrt{38}}{4} \right\}$$

Zu 2.5.7.
Es gilt $-3x^2 = x^2 - 4x^2$ und $-4x^2 - 4x = -4(x^2 + x)$ für alle reellen x. Die Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad (1)$$

ist deshalb äquivalent zu

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 4(x^2 + x) - 5 = 0$$

Weitere äquivalente Umformungen der Gleichung liefern

$$(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) - 5 = 0 \qquad , \qquad (x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 4 = 9$$

$$(x^2 + x - 2)^2 = 9 \qquad \text{und} \qquad |x^2 + x - 2| = 3 \qquad (2)$$

1. Fall: $x^2 + x - 2 > 0$.
In diesem Falle ist Gleichung (2) äquivalent zur quadratischen Gleichung $x^2 + x - 5 = 0$ mit den Lösungen

$$x_1 = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

2. Fall: $x^2 + x - 2 < 0$.

In diesem Fälle ist Gleichung (2) äquivalent zur quadratischen Gleichung $x^2+x+1=0$ mit der Lösungsmenge $L_2=\varnothing$.
Zusammenfassend erhält man als Lösungsmenge von (1)

$$L=\left\{-\frac{1+\sqrt{21}}{2},-\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$$

Zu 2.5.9.
Wenn die Gleichung

$$ax^2+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0) \tag{1}$$

reziprok ist, so hat sie entweder eine Lösungsmenge der Gestalt $\left\{x_1;\frac{1}{x_1};-1\right\}$ oder eine Lösungsmenge der Gestalt $\left\{x_1;\frac{1}{x_1};1\right\}$, wobei $x_1\neq 0$ ist. Daher ist dann die Gleichung (1) entweder zu

$$(x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_1}\right)(x+1)=0 \qquad \text{oder zu} \qquad (x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_1}\right)(x-1)=0$$

somit zu

$$x^3+x^2\left(1-x_1-\frac{1}{x_1}\right)+x\left(1-x_1-\frac{1}{x_1}\right)+1=0$$

bzw. zu

$$x^3-x^2\left(1+x_1+\frac{1}{x_1}\right)+x\left(1+x_1+\frac{1}{x_1}\right)-1=0$$

äquivalent. Als notwendige Bedingung dafür, dass (1) eine reziproke Gleichung ist, erhält man damit, dass

entweder $a=d$ und $b=c$ (1.Fall) oder $a=-d$ und $b=-c$ (2. Fall)

gilt. Wie im folgenden gezeigt wird, ist diese Bedingung auch hinreichend.

1.Fall: $a=d$ und $b=c$.
Setzt man $\frac{b}{a}=p$, so ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$x^3+px^2+px+1=0 \tag{2}$$

Es sei $x_0\neq 0$ eine (eventuell komplexe) Lösung der Gleichung (2), d.h., es gelte

$$x_0^3+px_0^2+px_0+1=0 \tag{3}$$

Aus (3) folgt bei Division durch x_0^3

$$1+p\cdot\frac{1}{x_0}+p\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)^2+\left(\frac{1}{x_0}\right)^3=0 \tag{4}$$

Gleichung (4) zeigt nun aber, dass auch $\frac{1}{x_0}$ eine Lösung der Gleichung (2) ist. Damit ist zugleich nachgewiesen, dass Gleichung (1) im Falle $a=d$ und $b=c$ reziprok ist.

2. Fall: $a=-d$ und $b=-c$.

Analog erfolgt der Nachweis für diesen Fall.

Zu 2.5.11.
Die reelle Zahl 1 ist offenbar keine Lösung der vorgegebenen Gleichung

$$1 + x + x^2 + ... + x^{2n-1} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}; n \geq 1) \tag{1}$$

Wir dürfen deshalb den Variablengrundbereich in der unten angegebenen Weise einschränken, ohne dass die Lösungsmenge der Gleichung (1) davon beeinträchtigt wird: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Bezogen auf diesen Variablengrundbereich, ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$(1 + x + x^2 + ... + x^{2n-1})(x - 1) = 0$$

und damit auch äquivalent zu

$$x^{2n-1} - 1 = 0 \qquad \text{bzw. zu} \qquad x^{2n} = 1 \tag{2}$$

Man überlegt leicht, dass Gleichung (2) bezüglich des Variablengrundbereiches $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ die reelle Lösung $x = -1$ und keine weiteren hat.
Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist deshalb $L = \{-1\}$.

Zu 2.6.4.
Der Term $\sqrt{[x]}$ ist für negative x nicht erklärt, so dass als Variablengrundbereich $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ festzulegen ist. Aus der vorgegebenen Gleichung

$$\frac{1}{2} + \sqrt{|x|} = x \tag{1}$$

folgt die Gleichung

$$[x] = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Da $[x]$ für alle x nur ganzzahlige Werte liefert und zudem $x \geq 0$ gilt, lassen sich alle Lösungen der Gleichung (2) in der Form

$$x = \frac{2n+1}{2} \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

darstellen. Ersetzen wir in (2) die Variable x an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $\frac{2n+1}{2}$, so erhalten wir

$$\left[\frac{2n+1}{2}\right] = n^2 \tag{3}$$

Nach der Definition des "größten Ganzen" einer reellen Zahl gilt (3) genau dann für eine natürliche Zahl n, wenn diese der Bedingung

$$n^2 \leq \frac{2n+1}{2} < n^2 + 1 \tag{4}$$

genügt. Dabei gilt für natürliche Zahlen n

$$n^2 \leq \frac{2n+1}{2} \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \leq n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \tag{5}$$

Die Ungleichung

$$\frac{2n+1}{2} < n^2 + 1$$

wird von allen natürlichen Zahlen erfüllt. Die Ungleichung (5) befriedigen nun genau zwei natürliche Zahlen, nämlich 0 und 1. Durch Einsetzen dieser Werte in $x = \frac{2n+1}{2}$ erhält man $x = \frac{1}{2}$ bzw. $x = \frac{3}{2}$.
Die Probe zeigt, dass $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ auch Lösungen der vorgegebenen Gleichung (1) sind. Die Lösungsmenge von (1) ist somit

$$L = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

Geometrische Veranschaulichung: Abbildung 5 zeigt die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = x - \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{[x]}$ und dem Definitionsbereich $[0; \infty)$.

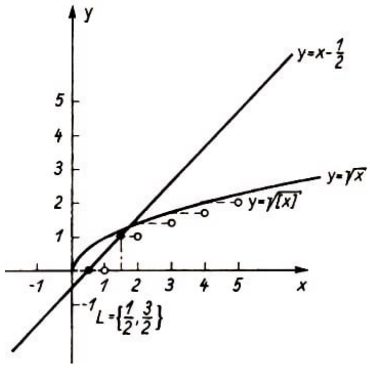

Abb. 5

Den Lösungen der Gleichung $\sqrt{[x]} = x - \frac{1}{2}$ $(x \in [0; \infty))$ entsprechen die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = \sqrt{[x]}$ und $y = x - \frac{1}{2}$.

Zu 2.7.1.
Da im Bereich der reellen Zahlen eine Wurzel für negative Radikanden nicht erklärt ist, müssen die Lösungen der vorgegebenen Gleichung

$$\sqrt{px-1} + \sqrt{1-px} = p \tag{1}$$

das System von Ungleichungen

$$\left. \begin{array}{r} px - 1 \geq 0 \\ 1 - px \geq 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

erfüllen. Das System (2) ist äquivalent zur Gleichung

$$px = 1 \tag{3}$$

Die Gleichung (3) hat für $p = 0$ keine und für $p \neq 0$ als einzige Lösung $x_0 = \frac{1}{p}$. Die Probe zeigt, dass $x_0 = \frac{1}{p}$ $(p \neq 0)$ keine Lösung der Gleichung (1) ist. Somit ist die Lösungsmenge von (1) $L = \varnothing$.

Zu 2.7.4.
Wir setzen $\sqrt[4]{x^2 - 19} = y$ und $\sqrt[4]{116 - x^2} = z$ und erhalten mit

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 5 \\ y^4 + z^4 &= 97 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ein Paar symmetrischer Gleichungen. Nun gilt für alle reellen y und z

$$\begin{aligned} y^4 + z^4 &= (y+z)^4 - 4y^3z - 6y^2z^2 - 4yz^3 = (y+z)^4 - 4yz\left(y^2 + \frac{3}{2}yz + z^2\right) \\ &= (y+z)^4 - 4yz\left[(x+y)^2 - \frac{1}{2}yz\right] = (y+z)^4 - 4yz(x+y)^2 + 2y^2x^2 \end{aligned}$$

Unter Beachtung dieser Identität erhalten wir, wenn wir $y + z = u$ und $yz = v$ setzen, aus (1) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u &= 5 \\ u^4 - 4u^2v + 2v^2 &= 97 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus dem Gleichungssystem (2) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u &= 5 \\ 625 - 100v + 2v^2 &= 97 \end{aligned}\right\}$$

mit den Lösungen $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ und $u_2 = 5$, $v_2 = 44$.
Auf diese Weise wurde die Lösung der Ausgangsgleichung auf die Lösung der Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 5 \\ yz &= 6 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left.\begin{aligned} y + z &= 5 \\ yz &= 44 \end{aligned}\right\} \tag{3,4}$$

zurückgeführt. Das System (3) hat die zwei Lösungen $y_1 = 2$; $z_1 = 3$ und $y2 = 3$; $z_2 = 2$, während das System (4) keine reellen Lösungen besitzt.
Wegen $\sqrt[4]{x^2 - 19} = y$, woraus $x^2 - 19 = y^4$ folgt, sind nun noch die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - 19 = 19 \qquad \text{und} \qquad x^2 - 19 = 81$$

zu lösen. Wir erhalten als deren Lösungen $x_1 = \sqrt{35}$, $x_2 = -\sqrt{35}$ bzw. $x_3 = 10$, $x_4 = -10$. Die Probe zeigt, dass diese Werte auch Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt[4]{x^2 - 19} + \sqrt[4]{116 - x^2} = 5$ ist somit

$$L = \{-10; -\sqrt{35}; \sqrt{35}; 10\}$$

Zu 2.7.5.

1. Lösung:

$$\sqrt[3]{25+x}+\sqrt{200-x}=15 \tag{1}$$

Setzt man $x=z^3-25$, so erhält man aus (1) die Gleichung

$$z+\sqrt{225-z^2}=15 \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt{225-z^3}=15-z \tag{2}$$

Aus (2) folgt die Gleichung

$$225-z^3=225-30z+z^2 \tag{3}$$

Gleichung (3) ist äquivalent zu

$$z^3+z^2-30z=0 \qquad \text{und weiter äquivalent zu} \qquad z(z+6)(z-5)=0$$

Sie besitzt damit die Lösungen $z_1=0$, $z_2=-6$ und $z_3=5$. Setzt man diese Werte in $x=z^3-25$ ein, so erhält man $x_1=-25$, $x_2=-241$ und $x_3=100$.
Wie die Probe zeigt, sind $x_1=-25$ und $x_3=100$ Lösungen der vorgegebenen Gleichung (1). Setzt man in dieser Gleichung $x_2=-241$ ein, so wird der erste Radikand auf der linken Seite von (1) negativ. $x_2=-241$ ist also keine Lösung von (1).
Als Lösungsmenge der Gleichung (1) erhält man somit $L=\{-25;100\}$.

2. Lösung:
Setzt man $\sqrt[3]{25+x}=z_1$ und $\sqrt{200-x})z_2$, so erhält man aus

$$\sqrt[3]{25+x}+\sqrt{200-x}=15 \tag{1}$$

das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_2&=15\\ z_1^3+z_2^2&=225 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das System (2) ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z_2&=15-z_1\\ z_1^3+z_2^2&=225 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (3) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z_2&=15-z_1\\ z_1^3+(15-z_1)^2&=225 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Das Gleichungssystem (4) ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} z_2&=15-z_1\\ z_1^3+z_1^2-30z_1&=0 \end{aligned}\right\}$$

und weiter äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} z_2&=15-z_1\\ z_1(z_1+6)(z_1-5)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Das Gleichungssystem (5) besitzt die Lösungen $(0;15)$, $(-6;21)$ und $(5;10)$. Bei Berücksichtigung von

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[3]{25+x} &= z_1\\ \sqrt{200-x} &= z_2\end{aligned}\right\}$$

und Anwendung der Probe erhält man als Lösungsmenge der Gleichung (1) $L = \{-25;100\}$.

Zu 2.8.2.
Die vorgegebene Gleichung

$$27\cdot 9^x + 64\cdot 16^x = 84\cdot 12^x \tag{1}$$

ist äquivalent zu

$$9^x - \frac{28}{9}\cdot 12^x + \frac{64}{27}\cdot 16^x = 0$$

Weitere äquivalente Umformungen liefern

$$(3^2)x^2 - \frac{28}{9}\cdot(3\cdot 4)^x + \frac{64}{27}\cdot(4^2)^x = 0 \qquad \text{und} \qquad 3^{2x} - \frac{28}{9}\cdot 3^x\cdot 4^x + \frac{64}{27}\cdot 4^{2x} = 0 \tag{2}$$

Der Term 4^{2x} nimmt für keine Belegung aus dem Variablengrundbereich $\mathbb{Q}$ den Wert 0 an. Somit ist die Division beider Seiten von (2) durch 4^{2x} eine äquivalente Umformung. Sie liefert

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \frac{28}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{64}{27} = 0 \tag{3}$$

Setzt man $\left(\frac{3}{4}\right)^x = a$, so erhält man aus (3) die Gleichung

$$a^2 - \frac{28}{9}a + \frac{64}{27} = 0$$

mit den Lösungen $a_1 = \frac{16}{9}$ und $a_2 = \frac{4}{3}$. Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (3) äquivalent zu

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{16}{9}\right]\cdot\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{4}{3}\right] = 0 \tag{4}$$

Die Lösungsmenge von Gleichung (4) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{16}{9} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{4}{3} = 0 \tag{5,6}$$

Gleichung (5) hat als einzige Lösung $x_1 = -2$. Gleichung (6) wird nur von $x_2 = -1$ erfüllt. Damit ist die Lösungsmenge von Gleichung (1) $L = \{-2;-1\}$.

Zu 2.8.4.

$$\left(\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}}\right)^x + \left(\sqrt{|p| - \sqrt{p^2-1}}\right)^x = 2p \tag{1}$$

1. Fall: $p = 1$.
In diesem Falle ist die Lösungsmenge der Gleichung (1) offensichtlich $L_1 = \mathbb{Q}$.

2. Fall: $p \neq 1$.
Es gilt

$$\sqrt{|p| - \sqrt{p^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}}}$$

für alle p mit $|p| > 1$. Somit ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$(\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}})^x + \left(\frac{1}{\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}}}\right)^x = 2p \qquad (2)$$

Setzt man $(\sqrt{|p| + \sqrt{p^2-1}})^x = z$, so erhält man aus (2) die Gleichung

$$z + \frac{1}{z} = 2p$$

Nun gilt bekanntlich für alle reellen a, b die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Damit gilt

$$2 = 2 \cdot \sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} \leq z + \frac{1}{z}$$

für alle reellen z. Somit hat die Gleichung (3) im Falle $p \leq 1$ keine reellen Lösungen.

Im Falle $p > 1$ ist Gleichung (3) (da z für keine Belegung von x aus dem Variablengrundbereich $\mathbb{Q}$ den Wert 0 annimmt) äquivalent zur Gleichung

$$z^2 - 2pz + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = p - \sqrt{p^2-1} \qquad \text{und} \qquad z_2 = p + \sqrt{p^2-1}$$

Nach diesem Ergebnis ist im Falle $p > 1$ Gleichung (2) äquivalent zu

$$\left[\left(\sqrt{p + \sqrt{p^2-1}}\right)^x - p + \sqrt{p^2-1}\right] \cdot \left[\left(\sqrt{p + \sqrt{p^2-1}}\right)^x - p - \sqrt{p^2-1}\right] = 0$$

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$\left(\sqrt{p + \sqrt{p^2-1}}\right)^x - p + \sqrt{p^2-1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\sqrt{p + \sqrt{p^2-1}}\right)^x - p - \sqrt{p^2-1} = 0 \qquad (4,5)$$

Die Gleichung (4) wird nur von $x = -2$ und die Gleichung (5) nur von $x = 2$ erfüllt. Zusammenfassend erhält man als Lösungsmenge der Gleichung (1)

$$L = \begin{cases} \varnothing & \text{für } p \leq 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } p = 1 \\ \{-2; 2\} & \text{für } p > 1 \end{cases}$$

Zu 2.8.5.
Die vorgegebene Gleichung

$$8x^2 - 12x^{x+1} + 4x^{x+2} = 0 \tag{1}$$

ist bezüglich des gegebenen Variablengrundbereiches äquivalent zu

$$x^x(8 - 12x + 4x^2) = 0 \tag{2}$$

Die Lösungsmenge von Gleichung (2) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x^x = 0 \qquad \text{und} \qquad 8 - 12x + 4x^2 = 0 \tag{3,4}$$

Der Term x^x nimmt für keine Belegung aus dem Variablengrundbereich den Wert 0 an. Somit ist die Lösungsmenge der Gleichung (3) $L_1 = \varnothing$.
Gleichung (4) hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, somit die Lösungsmenge $L_2 = \{1; 2\}$. Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist also $L = L_1 \cup L_2 = \{1; 2\}$.

Zu 2.9.3.
Nach Logarithmengesetz (4) gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Auf Grund dessen ist über dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}_+$ die vorgegebene Gleichung

$$x^{\log_2 x} - 3x^{\log_4 x} + 3x^{\log_8 x} = 1 \tag{1}$$

äquivalent zu

$$x^{3\log_8 x} - 3x^{2\log_8 x} + 3x^{\log_8 x} = 1 \tag{2}$$

Setzt man $x^{\log_8 x} = z$, so erhält man aus Gleichung (2) die kubische Gleichung

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$$

Äquivalente Umformung der Gleichung (3) liefert

$$(z - 1)^3 = 0 \tag{3}$$

Gleichung (3) hat als (dreifache) Lösung $z_0 = 1$. Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$x^{\log_8 x} = 1 \tag{4}$$

Man entnimmt (4) unmittelbar die Lösungsmenge der Gleichung (1) $L = \{1\}$.

Zu 2.9.4.
Bei Anwendung der entsprechenden Potenzgesetze erhält man die zu

$$2^{\lg x - 1} + 2^{\lg x + 2} = 3^{\lg x - 1} + 3^{\lg x} \tag{1}$$

äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\lg x} + 4 \cdot 2^{\lg x} = \frac{1}{3} \cdot 3^{\lg x} + 3^{\lg x} \tag{2}$$

Äquivalente Umformung von (2) liefert

$$\frac{9}{2} \cdot 2^{\lg x} = \frac{4}{3} \cdot 3^{\lg x}$$

und weiter (da der Term $2^{\lg x}$ für keine Belegung aus $\mathbb{R}_+$ den Wert 0 annimmt)

$$\frac{9}{2} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} \tag{3}$$

Offensichtlich wird die Gleichung (3) von $x_0 = 1000$ und nur von diesem Wert erfüllt. Damit ist die Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) $L = \{1000\}$.

Zu 2.9.6.
Nach Logarithmengesetz (4) gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_b c = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Auf Grund dessen ist über dem Variablengrundbereich $\mathbb{R}_+$ die vorgegebene Gleichung

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6 \tag{1}$$

äquivalent zu den Gleichungen

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6 \qquad , \qquad \log_3 x = 3$$

und wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmenfunktionen zu $x = 1$.

Zu 2.9.7.
Nach Logarithmengesetz (4) gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_b c = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Auf Grund dessen ist über dem vorgegebenen Variablengrundbereich die Gleichung

$$\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{27}} 3 = \log_{\frac{x}{81}} 3 \tag{1}$$

äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\log_3 3}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{27}} &= \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{81}} \\
\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - \log_3 27} &= \frac{1}{\log_3 x - \log_3 81} \\
\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - 3} &= \frac{1}{\log_3 x - 4} \\
(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 4 &= 0 \\
(\log_3 x - 2)^2 &= 0 \\
\log_3 x &= 2
\end{aligned}$$

und wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen $x = 9$. Die Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) ist somit $L = \{9\}$.

Zu 2.9.8.
Nach Logarithmengesetz (4) gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_b c = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Auf Grund dessen ist bezüglich $\mathbb{R}_+$ die vorgegebene Gleichung

$$\log_a x \cdot \log_b x = \log_a x + \log_b x \tag{1}$$

äquivalent zu

$$\log_a x \cdot \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a b} \tag{2}$$

Der Term $\log_a b$ nimmt für keine Belegung der Parameter a, b aus $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ den Wert 0 an. Deshalb ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$(\log_a x)^2 = \log_a x \cdot \log_a b + \log_a x$$

Weitere äquivalente Umformungen liefern

$$(\log_a x)^2 - \log_a x(1 + \log_a b) = 0 \qquad \text{und} \qquad \log_a x \cdot (\log_a x - 1 - \log_a b) = 0 \tag{3}$$

Die Lösungsmenge von Gleichung (3) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$\log_a x = 0 \qquad \text{und} \qquad \log_a x - 1 - \log_a b = 0 \tag{4,5}$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen hat Gleichung (4) eine einzige Lösung, nämlich $x = 1$. Gleichung (5) ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\log_a x = 1 + \log_a b \qquad \text{und} \qquad \log_a x = \log_a a + \log_a b$$

und

$$\log_a x = \log_a (a \cdot b) \tag{6}$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen ist Gleichung (6) äquivalent zu $x = ab$. Die Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) ist somit $L = \{1; ab\}$.

Zu 2.10.2.
Nach Definition des Terms V_n^k ist die vorgegebene Gleichung

$$V_{x+9}^{x+3} = V_{x+6}^{x+5} \qquad (x \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

äquivalent zu

$$\frac{(x+9)!}{[x+9-(x+3)]!} = \frac{(x+6)!}{[x+6-(x-5)]!} \tag{2}$$

Äquivalente Umformungen von (2) liefern

$$\frac{(x+9)!}{6!} = \frac{(x+6)!}{1!} \quad , \quad \frac{(x+9)!}{(x+6)!} = 6!$$

$$(x+7)(x+8)(x+9) = 6! \quad \text{und} \quad x^3 + 24x^2 + 191x - 216 = 0 \tag{3}$$

Durch Probieren findet man $x_1 = 1$ als eine Lösung der kubischen Gleichung (3). Man rechnet

$$x^3 + 24x^2 + 191x - 216) : (x-1) = x^2 + 25x + 216$$

Nach diesem Ergebnis ist Gleichung (3) äquivalent zu

$$(x-1)(x^2 + 25x + 216) = 0 \tag{4}$$

und die Lösungsmenge von (4) ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 25 + 216 = 0 \tag{5,6}$$

Die Lösung von Gleichung (5) wurde bereits zu $x = 1$ berechnet. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung (6) ist negativ. Somit hat (6) keine reellen Lösungen.
Als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) erhält man damit $L = \{1\}$.

Zu 2.10.4.
Für alle natürlichen Zahlen k und n mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Auf Grund dessen ist Gleichung

$$\binom{x+1}{x-1} = 2^x - 2 \tag{1}$$

äquivalent zu

$$\binom{x}{x-1} + \binom{x}{x-2} = 2^x - 2 \tag{2}$$

Weiterhin gilt für alle natürlichen Zahlen k und n mit $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Auf Grund dessen ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$\binom{x}{1} + \binom{x}{2} = 2^x - 2 \tag{3}$$

Äquivalente Umformung von (3) ergibt

$$1+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+1=2^x \tag{4}$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n: $\binom{n}{0}=1$ und $\binom{n}{n}=1$ sowie

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$$

(Die letzte Beziehung erhält man, indem man im Binomiallehrsatz die Variablen a und b durch die reelle Zahl 1 ersetzt.)
Auf Grund dessen ist Gleichung (4) äquivalent zu

$$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{x}=\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+...+\binom{x}{x-1}+\binom{x}{x} \tag{5}$$

Man entnimmt (5), dass $x_0=3$ eine Lösung der vorgegebenen Gleichung ist. Es ist dies aber auch die einzige Lösung von Gleichung (1). Man überlegt sich nämlich leicht, dass kein Wert $x_1<3$ die Gleichung (1) erfüllt.
Sie wird aber auch von keinem Wert $x_2>3$ befriedigt. Gäbe es nämlich eine Lösung $x_2>3$ von (1), so müsste sie auch der Gleichung (5) und der zu dieser äquivalenten Gleichung

$$0=\binom{x}{3}+\binom{x}{4}+...+\binom{x}{x-1} \tag{6}$$

genügen. Die Terme auf der rechten Seite von (6) nehmen aber bei jeder Belegung mit einem Wert $x_2>3$ positive Werte an, ihre Summe ist somit für keine dieser Belegungen gleich Null.
Die Lösungsmenge von Gleichung (1) ist also $L=\{3\}$.

Zu 3.1.2.
Bei Anwendung äquivalenter Umformungen erhält man aus $x^3+y^3+z^3=3xyz$ (1)
die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3-3xyz&=0\\
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz&=0\\
(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)&=0\\
(x+y)^3-(x+y)^2z+(x+y)z^2+(x-y)^2z&\\
-(x-y)z^2-(x-y)z^2+z^3-3xy(x+y+z)&=0\\
(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)&=0\\
(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy]&=0\\
(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)&=0\\
(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz)&=0\\
(x+y+z)(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+x^2-2xz+z^2)&=0\\
(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2]&=0
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung ist somit die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen

$$x + y + z = 0 \qquad \text{und} \qquad (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 0 \tag{2,3}$$

Gleichung (2) hat die allgemeine Lösung $(s; t; -s-t)$, in der s und t freie Parameter der Lösung sind.
Die Summe auf der linken Seite von Gleichung (3) nimmt genau dann den Wert Null an, wenn $x = y$ und $y = z$ und $x = z$ gilt. Damit ist die allgemeine Lösung von Gleichung (3) $(r; r; r)$, in der r ein freier Parameter der Lösung ist.
Als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) erhält man somit

$$L = \{(s; t; -s-t)\} \cup \{(r; r; r)\}$$

wobei r, s und t freie, reelle Parameter sind.

Zu 3.1.5.
1. Lösung:
Aus Gleichung $5x - 17y = 1$ (1) erhält man durch äquivalente Umformungen

$$5x = 15y + 2y + 1 \tag{2}$$

Für alle die positiven ganzzahligen y, für die es eine positive ganze Zahl x mit $5x = 15y + 2y + 1$ gibt, gilt nun

$$5|15y + 2y + 1 \qquad \text{und damit} \qquad 5|2y + 1$$

Für diese y nimmt der Term $2y + 1$ nur solche Werte an, die sich in der Form $5k$ mit $k \in \mathbb{N}$ darstellen lassen. Wir setzen deshalb

$$2y + 1 = 5k \qquad \text{bzw.} \qquad 2y = 5k - 1 = 4k + k - 1$$

Für alle diejenigen positiven ganzzahligen k, für die es eine positive ganze Zahl y mit $2y = 4k + k - 1$ gibt, gilt $2|k - 1$.
Für diese k ist $k-1$ eine positive gerade Zahl, lässt sich also in der Form $2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Wir setzen deshalb $k = 2n + 1$ und erhalten bei dieser Substitution

$$y = 5n + 2$$

Ersetzen wir die Variable y in Gleichung (1) an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $5n + 2$, so gelangen wir nach einigen äquivalenten Umformungen schließlich zu dem Ergebnis

$$x = 17n + 7$$

Es lässt sich also jede Lösung der Gleichung (1) in der Form $(17n + 7; 5n + 2)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Andererseits ist aber auch für jedes natürliche n das geordnete Paar $(17n + 7; 5n + 2)$ eine Lösung von (1), denn es gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$5 \cdot (17n + 7) - 17 \cdot (5n + 2) = 85n + 35 - 85n - 34 = 1$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist damit $L = \{(17n + 7; 5n + 2) : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Lösung:
Für alle positiven ganzzahligen x und y gilt

$$5x \equiv 0 \mod 5 \qquad , \qquad 17x \equiv 2y \mod 5$$

Deshalb genügt jedes positive ganzzahlige y, für das es eine positive ganze Zahl x mit $5x - 17y = 1$ (1) gibt, der Bedingung

$$-2y \equiv 1 \mod 5 \tag{2}$$

Die Bedingung (2) ist äquivalent zu

$$2y \equiv -1 \mod 5 \qquad , \qquad 2y \equiv 4 \mod 5$$

und (da 2 zum Modul 5 teilerfremd ist) zu

$$y \equiv 2 \mod 5 \tag{3}$$

(3) besagt nun, dass y bei Division durch 5 den Rest 2 lässt, sich also in der Form $5n + 2$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen lässt. Wir setzen deshalb

$$y = 5n + 2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und erhalten bei dieser Substitution nach äquivalenten Umformungen aus (1) die Gleichung 4

$$x = 17n + 7$$

Wie in der 1. Lösung zeigt die Probe, dass $L = \{(17n + 7; 5n + 2) : n \in \mathbb{N}\}$ die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist.

Zu 3.1.6.
Äquivalente Umformungen der vorgegebenen Gleichung

$$x^2 - 20 = (y + 2)^2 \tag{1}$$

liefern

$$x^2 - (y + 2)^2 = 20 \qquad \text{und} \qquad (x + y + 2)(x - y - 2) = 20 \tag{2}$$

Bei jeder Belegung aus dem vorgegebenen Variablengrundbereich nehmen die Terme $x + y + 2$ und $x - y - 2$ ganzzahlige Werte an. Wir interessieren uns deshalb für alle möglichen Zerlegungen von 20 in ein Produkt von zwei ganzzahligen Faktoren.
Es sind dies die folgenden

$$20 = 1 \cdot 20, 20 = (-1) \cdot (-20), 20 = 2 \cdot 10, 20 = (-2) \cdot (-10), 20 = 4 \cdot 5, 20 = (-4) \cdot (-5)$$

Wegen $x+y+2+x-y-2 = 2x$ sind nur solche Faktoren auszuwählen, deren Summe geradzahlig ist. Danach sind folgende Fälle denkbar:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2 &= 2 \\ x - y - 2 &= 10 \end{aligned}\right\} \qquad , \qquad \left.\begin{aligned} x + y + 2 &= 10 \\ x - y - 2 &= 2 \end{aligned}\right\} \tag{3,4}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2=-2 \\ x-y-2=-10 \end{array}\right\} \quad , \quad \left.\begin{array}{r} x+y+2=-10 \\ x-y-2=-2 \end{array}\right\} \tag{5,6}$$

Die Zusammenfassung der Lösungen der Gleichungssysteme (3)-(6) liefert die Lösungsmenge $L = \{(-6;-6),(-6;2),(6;-6),(6;2)\}$ der vorgegebenen Gleichung (1).

Zu 3.1.8.
In der folgenden Tabelle sind alle Tripel von positiven ganzen Zahlen, die teilerfremd sind, nicht mehr als zwei Ziffern haben und der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, berechnet.
Die ersten zwei Zeilen geben dazu die geordneten Paare $(v;w)$ von zueinander teilerfremden positiven ganzen Zahlen v und w an, die nicht beide ungerade sind und für die $v > w$ gilt.

v	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
w	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	2	4
x	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	77	65
y	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	36	72
z	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	85	97

Zu 3.1.9.
Für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit a, b, c, $d \geq 0$ gilt

$$a+b+c+d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcd} \tag{1}$$

wobei Gleichheit nur dann eintritt, wenn $a = b = c = d$ ist.[10]
Setzt man in (1) $a = x^4$, $b = y^4$, $c = 1$ und $d = 1$, so erhält man

$$x^4 + y^4 + 2 = x^4 + y^4 + 1 + 1 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 y^4 \cdot 1 \cdot 1} = 4xy \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $x^4 = y^4 = 1$ gilt. Man folgert daraus, dass die Gleichung

$$x^4 + y^4 + 2 = 4xy \qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

die Lösungsmenge $L = \{(1;1)\}$ besitzt.

Zu 3.1.10.
Die vorgegebene Gleichung

$$x + y = nxy \tag{1}$$

ist äquivalent zu

$$y(nx-1) = x \tag{2}$$

Offenbar gibt es kein geordnetes Paar positiver ganzer Zahlen x und y, das sowohl der Gleichung (2) als auch der Bedingung $nx - 1 = 0$ genügt. Wir dürfen deshalb $nx - 1 \neq 0$ voraussetzen. Unter dieser Voraussetzung ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$y = \frac{x}{nx-1} \tag{3}$$

[10] Einen Beweis dieses Satzes findet man in G. Kleinfeld, Ungleichungen, Übungen für junge Mathematiker Teil 3, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969, S. 92ff.

1. Fall: $n = 0$.
In diesem Falle hat Gleichung (3) offensichtlich keine Lösung.

2. Fall: $n = 1$.
In diesem Falle ist die rechte Seite der Gleichung (3) für jede Belegung aus dem Variablengrundbereich ein Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen. Damit dieser Quotient ganzzahlig ist, muss die kleinere der beiden aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen Teiler der größeren sein. Dies ist offensichtlich nur bei einer Belegung der Variablen x mit dem Wert 2 der Fall.
Somit ist bei $n = 1$ das geordnete Paar $(2; 2)$ einzige Lösung der Gleichung (3).

3. Fall: $n > 1$.
Für alle positiven ganzzahligen x und $n > 1$ gilt

$$x(n-1) \geq 1 \tag{4}$$

Ungleichung (4) ist äquivalent zu

$$nx - 1 \geq x$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $n = 2$, $x = 1$. Auf Grund dessen hat Gleichung (3) nur für $n = 2$ eine Lösung, und zwar das geordnete Paar $(1; 1)$.
Zusammenfassend erhält man als Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1)

$$L = \begin{cases} \{(2;2)\} & \text{für } n = 1 \\ \{(1;1)\} & \text{für } n = 2 \\ \varnothing & \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1;2\} \end{cases}$$

Zu 3.1.12.

$$x^n + y^n = nxy \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

1. Fall: $n = 0$.
Es ist $z^0 = 1$ für alle $z \in \mathbb{R}_+$, und deshalb ist Gleichung $x^0 + y^0 = 0 \cdot xy$ äquivalent zur Gleichung $2 = 0 \cdot xy$ mit der Lösungsmenge $L_0 = \varnothing$.

2. Fall: $n = 1$.
Die Gleichung $x + y = xy$ ist äquivalent zu

$$y(x-1) = x \tag{2}$$

Offensichtlich gibt es zu $x = 1$ keine positive Zahl y derart, dass Gleichung (2) erfüllt wäre. Deshalb ist Gleichung (2) äquivalent zu

$$y = \frac{x}{x-1} \tag{3}$$

Man entnimmt Gleichung (3) unmittelbar die Lösungsmenge

$$L_1 = \left\{ \left(p; \frac{p}{p-1} \right) : p > 1; p \in \mathbb{R} \right\}$$

(Für Werte von p mit $0 < p < 1$ ist $\frac{p}{p-1} < 0$.)

3. Fall: $n = 2$. Durch äquivalente Umformungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2xy$ erhält man

$$(x-y)^2 = 0$$

und $x = y$. (4) Man entnimmt Gleichung (4) unmittelbar die Lösungsmenge $L_2 = \{(p; p) : p \in \mathbb{R}_+\}$.

4. Fall: $n \geq 3$.
Man ersetzt in der Ausgangsgleichung (1) die Variable y an allen Stellen ihres Auftretens durch den Term $z \cdot x^{n-1}$ mit $z \in \mathbb{R}_+$ und erhält

$$x^n + z^n \cdot x^{n(n-1)} = nzx^n \tag{5}$$

Gleichung (5) ist äquivalent zu

$$z^n x^{n(n-2)} = nz - 1 \tag{6}$$

Gleichung (6) hat im Falle $nz - 1 \leq 0$, also $z \leq \frac{1}{n}$, keine Lösungen. Im Falle $z > \frac{1}{n}$ ist Gleichung (6) äquivalent zu

$$x^{n(n-2)} = \frac{nz-1}{z^n} \qquad , \qquad x^{n-2} = \frac{\sqrt[n]{nz-1}}{z}$$

und zu

$$x = \sqrt[n-2]{\frac{\sqrt[n]{nz-1}}{z}}$$

Nach der Substitution $y = z \cdot x^{n-1}$ ist

$$y = z \cdot x^{n-2} \cdot x = \sqrt[n]{nz-1} \cdot \sqrt[n-2]{\frac{\sqrt[n]{nz-1}}{z}}$$

Man erhält damit im 4. Fall die Lösungsmenge

$$L_3 = \left\{ \left(\sqrt[n-2]{\frac{\sqrt[n]{nz-1}}{z}}; \sqrt[n]{nz-1} \cdot \sqrt[n-2]{\frac{\sqrt[n]{nz-1}}{z}} \right) : z > \frac{1}{n}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Zu 3.2.2.
Setzt man $[x] = u$, $[y] = v$ und $[z] = w$, wobei u, v und w positiv ganzzahlig sind, so erhält man aus dem vorgegebenen Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= 41 \\ 12u + 9v + w &= 120 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aus (1) folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= 41 \\ 11u + 8v + w &= 79 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es wird erhalten, indem man die erste Gleichung des Systems (1) von der zweiten subtrahiert. Das Gleichungssystem (2) ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} u+v+w &= 41 \\ 8v &= 64-8u+4(5-u) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Für diejenigen u, für die es ein positives ganzzahliges v, das (3) genügt, gibt, ist $8|5-u$. Wir setzen deshalb $5-u=8a$, also $u=5-8a$, und gehen über zum System

$$\left.\begin{aligned} -8a+v+w &= 36 \\ 8v &= 88a-24 \end{aligned}\right\}$$

bzw. zum äquivalenten

$$\left.\begin{aligned} -8a+v+w &= 36 \\ v &= 11a-3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (4) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} w &= 33-3a \\ v &= 11a+3 \end{aligned}\right\}$$

Die Lösungen von (1) lassen sich also darstellen in der Form $(5-8a;11a+3;33-3a)$, in der a eine geeignet gewählte ganze Zahl ist. Da nach Voraussetzung u, v und w sämtlich größer als Null sein sollen, kommt für a höchstens $a=0$ in Frage. Tatsächlich ist, wie die Probe zeigt, das Tripel $(5;3;33)$ die einzige Lösung von (1).
Als Lösungsmenge des vorgegebenen Gleichungssystems erhält man somit

$$L=\{(5+b;3+c;33+d) : bflcfld \in [0;1)\}$$

Zu 3.2.3.
Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x-z &= y \\ 5x+2y &= z-2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ist äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z &= x-y \\ 5x+2y &= z-2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens folgt aus (2) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z &= x-y \\ 5x+2y &= x-y-2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

aus welchem man vermittels äquivalenter Umformungen

$$\left.\begin{aligned} z &= x-y \\ 3y &= -3x-3-x+1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

gewinnt. Für alle diejenigen ganzzahligen x, für die es eine ganze Zahl y mit $3y = -3x-3-x+1$ gibt, gilt offensichtlich $3|-3x-3-x+1$ und deshalb $3|-x+1$.

Für diese xu nimmt also der Term $-x+1$ nur solche Werte an, die sich in der Form $3a$ mit $a \in \mathbb{Z}$ darstellen lassen. Wir setzen darum $1-x=3a$, also $x=1-3a$, mit $a \in \mathbb{Z}$ und erhalten bei dieser Substitution aus (4) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} z &= 1-3a-y \\ 3y &= -3(1-3a)-3+3a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und weiter durch äquivalente Umformung

$$\left.\begin{aligned} z &= 1-3a-y \\ y &= 4a-2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

woraus bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens

$$\left.\begin{aligned} z &= 3-7a \\ y &= 4a-2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

folgt. Nach diesem Ergebnis lassen sich alle Lösungen des Gleichungssystems (1) in der Form $(1-3a; 4a-2; 3-7a)$ mit $a \in \mathbb{Z}$ darstellen. Andererseits ist sowohl

$$1-3a-(3-7a) = 4a-2 \qquad \text{als auch} \qquad 5(1-3a)+2(4a-2) = 3-7a-2$$

für jedes $a \in \mathbb{Z}$ eine wahre Aussage, so dass ein jedes Tripel $(1-3a; 4a-2; 3-7a)$ mit $a \in \mathbb{Z}$ Lösung des Gleichungssystems (1) ist. Als Lösungsmenge des Gleichungssystems (1) erhält man somit

$$L = \{(1-3a; 4a-2; 3-7a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

Zu 3.2.5.
Aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} |y-1| &= 1-|x| \\ (y-1)^2 &= \tfrac{10}{16}-x^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

folgt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} (y-1)^2 &= (1-|x|)^2 \\ (y-1)^2 &= \tfrac{10}{16}-x^2 \end{aligned}\right\}$$

und weiter bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens

$$\left.\begin{aligned} (y-1)^2 &= (1-|x|)^2 \\ \tfrac{10}{16}-x^2 &= (1-|x|)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (2) ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} (y-1)^2 &= (1-|x|)^2 \\ 0 &= x^2-|x|+\tfrac{3}{16} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Als Lösungen des Gleichungssystems (3) berechnet man die geordneten Paare

$$\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),\quad \left(-\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right),\quad \left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\quad \left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),\quad \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\quad \left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),\quad \left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),\quad \left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$$

Wie die Probe zeigt, sind sie auch Lösungen des Gleichungssystems (1).
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1) ist somit

$$L=\left\{\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right),\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)\right\}$$

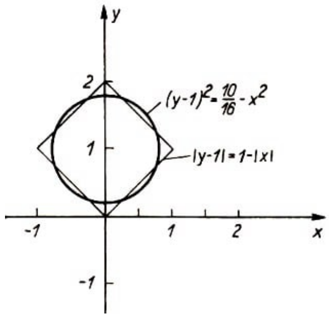

Abb. 6

Geometrische Veranschaulichung: In Abbildung 6 sind die durch die Gleichungen $|y-1|=1-|x|$ bzw. $(y-1)^2=\frac{10}{16}-x^2$ vermittelten Zuordnungen von reellen Zahlen x und y graphisch dargestellt. Den Lösungen des Gleichungssystems (1) entsprechen die Punkte, die beiden Graphen gemeinsam sind.

Zu 3.2.6.
Das vorgegebene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}|x-1|+|y-5|&=1\\ |x-1|+y&=-5\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ist äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned}|x-1|&=1-|y-5|\\ |x-1|&=-y-5\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

1. Fall: $y\geq 5$.
In diesem Falle ist (2) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}|x-1|&=1-y-5\\ |x-1|&=-y-5\end{aligned}\right\}$$

mit der Lösungsmenge $L_1=\varnothing$.

2. Fall: $y<5$. In diesem Falle ist (2) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}|x-1|&=1+y-5\\ |x-1|&=-y-5\end{aligned}\right\}$$

mit der Lösungsmenge $L_2=\varnothing$. Das Gleichungssystem (1) besitzt also keine Lösungen.

Zu 3.2.7.

Das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x &= 4y \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ist wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x - \log_2 y &= 2 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Man setzt $\log_2 x = u$ und $\log_2 y = v$ und löst das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u - v &= 2 \\ u^2 + v^2 &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

wobei $u, v \in \mathbb{R}_+$. Das System (3) hat als einzige Lösung $(4; 2)$. Aus

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x &= 4 \\ \log_2 y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

ermittelt man die Lösungsmenge $L = \{(16; 4)\}$ des Systems (1).

Zu 3.2.9.
Äquivalente Umformungen des vorgegebenen Gleichungssystems liefern

$$\left.\begin{aligned} (x - y)^3 - 5xy(x + y) &= 8 \\ (x - y)^2 - 5xy &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} (x + y)[(x - y)^2 - 5xy] &= 8 \\ (x - y)^2 - 5xy &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (1{,}2)$$

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahrens erhält man aus (2)

$$\left.\begin{aligned} (x + y) \cdot 4 &= 8 \\ (x + y)^2 - 5xy &= 4 \end{aligned}\right\}$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 4 - 5xy &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Das Gleichungssystem (3) hat die Lösungsmenge $L = \{(0; 2), (2; 0)\}$. Die Probe zeigt, dass die Elemente von L auch Lösungen des Gleichungssystems (1) sind.

Zu 3.2.11.
Nach Logarithmengesetz (4) des Abschnittes 2.9. gilt für alle positiven reellen Zahlen $a$fl$b$fl$c$ mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$$

Auf Grund dessen ist das vorgegebene Gleichungssystem äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} 2\log_4 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_9 x + 2\log_9 y + \log_9 z &= 2 \\ \log_{16} x + \log_{16} y + 2\log_{16} z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und weiter äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{r} \log_4(x^2yz)=2 \\ \log_9(xy^2z)=2 \\ \log_{16}(xyz^2)=2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktionen ist das Gleichungssystem (2) äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{r} x^2yz=4^2 \\ xy^2z=9^2 \\ xyz^2=16^2 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Aus dem Gleichungssystem (3) folgt die Gleichung

$$x^4y^4z^4=4^2\cdot 9^2\cdot 16^2 \tag{4}$$

die man erhält, wenn man sowohl die linken Seiten als auch die rechten Seiten des Gleichungssystems (3) miteinander multipliziert (Abschnitt 1.12.). Über dem vorgegebenen Variablengrundbereich ist Gleichung (4) äquivalent zu $xyz=24$.

Für alle positiven reellen Zahlen x,y,z, die das Gleichungssystem (3) erfüllen, gilt deshalb

$$x=\frac{x^2yz}{xyz}=\frac{4^2}{24}=\frac{2}{3}$$
$$y=\frac{xy^2z}{xyz}=\frac{9^2}{24}=\frac{27}{8}$$
$$z=\frac{xyz^2}{xyz}=\frac{16^2}{24}=\frac{32}{3}$$

Wie die Probe zeigt, ist das Tripel $\left(\frac{2}{3};\frac{27}{8};\frac{32}{3}\right)$ Lösung der Gleichung (3) und damit auch der Gleichung (1). Die Lösungsmenge der vorgegebenen Gleichung (1) ist also

$$L=\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{27}{8};\frac{32}{3}\right)\right\}$$

Zu 3.2.12.
Das Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{r} q^2x_1^2+q^2x_2^2+...+q^2x_n^2=p^2q^2 \\ -2a_1x_1-2a_2x_2-...-2a_nx_n=-2p^2q^2 \\ p^2a_1^2+p^2a_2^2+...+p^2a_n^2=p^2q^2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Aus dem Gleichungssystem (2) folgt die Gleichung

$$(qx_1-pa_1)^2+(qx_2-pa_2)^2+...+(qx_n+pa_n)^2=0 \tag{3}$$

die durch Addition der rechten bzw. linken Seiten der Gleichungen des Systems (2) erhalten wird (Abschnitt 1.12.).

Die linke Seite von (3) ergibt als Summe von Quadraten dann und nur dann den Wert Null, wenn jeder der Summanden den Wert Null annimmt. Deshalb ist die Lösungsmenge von Gleichung (3)

$$L = \left\{ \left(\frac{p}{q} \cdot a_1; \frac{p}{q} \cdot a_2; ...; \frac{p}{q} \cdot a_n \right) \right\}$$

Die Probe zeigt, dass L auch Lösungsmenge von (1) ist.