Ernst Hameister

Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene

1966 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 4
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Mit dem vorliegenden Buch wird versucht, eine Einführung in die geometrischen Konstruktionen der euklidischen Ebene zu geben. Zugleich soll es eine Einführung in die Kongruenzgeometrie sein. Zwei weitere sich daran anschließende Bändchen werden sich mit der Geometrie Euklids, Hilberts und Lobatschewskis beschäftigen und einige wichtige Kapitel der neueren Geometrie bringen.

Auf diese Weise soll im Rahmen der Mathematischen Schülerbücherei eine Einführung in die Geometrie gegeben werden, die, auf dem Boden der klassischen Methoden (Euklid, Hilbert, Klein) fußend, über die sich anschließende Entwicklung von Bolyai und Lobatschewski zu den gegenwärtigen Betrachtungen (Riemann, Klein, Alexandroff u. a.) führt.

Entsprechend der Aufgabe der Bände der MSB wurde die Darstellung so gewählt, dass als Vorkenntnisse im wesentlichen der Stoff bis zur 9. Klasse vorausgesetzt wird. Doch wird vom Leser erwartet, dass er mitarbeitet. Nur so wird er Gewinn aus dem Studium der Bändchen ziehen.

Schließlich möchte ich Frau D. Ziegler vom Verlag B. G. Teubner für die äußerst sorgfältige Betreuung des Manuskriptes danken, ferner allen meinen Kollegen, die mich an ihren Erfahrungen aus der Praxis regen Anteil nehmen ließen.
Wenn durch dieses Buch erreicht wird, Freude am geometrischen Denken und an geometrischen Konstruktionsaufgaben zu wecken, so ist mehr erreicht, als der Verfasser zu erreichen hoffte.

Möser, Dezember 1965

Ernst Hameister

Benutzte Abkürzungen

1. Dreiecke
Seiten: a, b, c
Winkel: α, β, γ
Eckpunkte: A, B, C
Höhen auf den Seiten a,b,c: h_a, h_b, h_c
Winkelhalbierende der Winkel α, β, γ: w_α, w_β, w_γ
Seitenhalbierende der Seiten a,b,c: s_a, s_b, s_c
Radius des Inkreises: ρ
Radien der Ankreise: ρ_a, ρ_b, ρ_c
Radius des Umkreises: r

2. Vierecke Seiten: a, b, c, d
Winkel: α, β, γ, δ
Eckpunkte: A, B, C, D
Diagonalen: e, f

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Aufgabe und Inhalt

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe stellt die Forderung, eine bestimmte geometrische Figur herzustellen. Die dann aufgefundene Figur muss aber gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen.
Solche werden durch die Bestimmungsstücke oder Größen gegeben, welche die gesuchte Figur dann enthalten muss.

Die Theorie und Technik der geometrischen Konstruktionen gibt die Methoden an, wie aus der Lage und Größe vorgegebener Stücke die fehlenden gefunden werden können. In den nachfolgenden Kapiteln dieses Buches sollen einige elementare Verfahren, d.h. ohne Anwendung der Analysis, behandelt werden.

1.2 Wo traten erstmals geometrische Konstruktionsaufgaben auf?

Die geometrischen Konstruktionsaufgaben sind so alt wie die Beschäftigung mit der Geometrie überhaupt, ja, es ist sogar denkbar, dass die Geometrie erst aus der Bewältigung solcher Aufgaben entstanden ist.
Denn es ist durchaus einleuchtend, dass die einfachsten Konstruktionsaufgaben, wie z.B. die Halbierung eines Winkels oder einer Strecke, zu geometrischer Tätigkeit und zur Entwicklung geometrischer Begriffe Anlass gegeben haben.

Wenn es sich im Anfang auch nur um die Durchführung praktischer Aufgaben allereinfachster Art gehandelt hat, so tauchten jedoch in jener vor wissenschaftlichen Periode bereits Gedanken auf, die zu abstrakteren Überlegungen hinführten.
Vor allem in den Händen der alten griechischen Geometer hat sich die Beschäftigung mit der Geometrie und deren Konstruktionsaufgaben zu einer systematischen Wissenschaft entwickelt. Das erhellt auch daraus:

Auch heute noch das wissenschaftliche Interesse beanspruchende Aufgaben, wie z.B. die Winkeldreiteilung, gehen wissenschaftsgeschichtlich bis in die Glanzzeit der alten griechischen Mathematik zurück. So wird eine beliebte Näherungsmethode zur Dreiteilung des Winkels schon von Archimedes ausführlich dargestellt. Andere Aufgaben hat besonders Apollonios (etwa 200 v. u. Z.) beschrieben.

1.3 Die Herausbildung der geometrischen Konstruktionsaufgabe in der Akademie Platons

Bereits von den alten Griechen wurden also geometrische Konstruktionen sehr eingehend untersucht und die Verbreitung dieser Kenntnisse gefördert. Eine besondere Ausbildung jedoch erhielt diese Kunst durch die Schule des griechischen Akademikers Platon.

Das entnimmt man seinen Dialogen, vor allem dem "Staat" und dem "Menon". In letztgenanntem wird beschrieben, wie Sokrates auf geschickte Weise einen Sklaven lehrt, die Pythagorasfigur zu zeichnen.

Von der gleichen Schule wurde auch die Forderung aufgestellt, jede Figur nur mit dem Lineal und dem Zirkel allein zu bewältigen. Auch wenn etwa 100 Jahre nach Platon durch Archimedes von dieser strengen Forderung abgegangen wurde, indem auch Einschiebelineal, Winkeldreieck und andere Hilfsmittel - hier erscheint bereits der Gedanke der Annäherung oder Approximation, der dem von Platon streng vertretenen Prinzip der unbedingten Genauigkeit oder Präzision gegenübergestellt wurde - zur Durchführung geometrischer Konstruktionsaufgaben zugelassen wurden, so wurde Platons Bedingung der Ausführung mit Lineal und Zirkel allein doch für die spätere Entwicklung der Geometrie sehr wesentlich.

Der platonischen Geometrie verdankt die Mathematik später sehr viele und schöne Teilgebiete. So sind durchaus in gewissem Sinne die projektive Geometrie und deren Konstruktionsverfahren sowie die daraus entwickelte Abbildungsgeometrie, wozu auch die aus dem Spiegelungsbegriff aufgebaute Geometrie zu zählen ist, aus dem Erbe jener anschaulichen griechischen Geometrie entstanden.

1.4 Art und Methode der griechischen Konstruktionverfahren

Von der platonischen Schule, die an ihrer Eingangspforte die Worte $\mu\eta\delta\epsilon\iota\varsigma\ \alpha\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\eta\tau o\varsigma\ \epsilon\iota\sigma\iota\tau\omega$ (keiner soll ohne Kenntnisse der Geometrie hereinkommen) eingemeißelt hatte, wurde auch die Methodik der Durchführung solcher Aufgaben streng angegeben.
Jede, auch die einfachste, Aufgabe muss mit einer Analysis beginnen. Aus dieser Vorüberlegung ergibt sich dann der Plan der verschiedenen Teilschritte zur endgültigen Konstruktionsausführung.

Der eben erwähnte Abschnitt der Aufgabe wurde von den Griechen die Analysis, d.h. Auflösung, genannt. Sie bedeutet für eine vorgelegte Aufgabe, diese an einer angenommenen Figur unter Berücksichtigung der vorgegebenen Stücke so aufzulösen, dass der einzuschlagende Konstruktionsweg ersichtlich wird.
Ist dann die Konstruktionsaufgabe gelöst, so muss anschließend gezeigt, d.h. bewiesen werden, dass die gefundene Figur tatsächlich die geforderte ist.

2 Vorbetrachtungen über elementare Methoden zur Lösung der geometrischen Konstruktionsaufgaben

2.1 Wege und Schritte zur Lösung der Aufgabe im einzelnen

2.1.1 Die Analysis

Der natürlichste und einfachste Weg zur Lösung der geometrischen Konstruktionsaufgabe besteht somit darin, sie gleichsam auf eine schon gelöste Aufgabe zurückzuführen. Dabei geht man zweckmäßig von der gestellten Aufgabe zu einer ihr gleichwertigen oder zumindest zu einer solchen über, deren Lösungsmöglichkeiten auf die der gestellten Aufgabe hinweist.

Von dieser tastet man sich dann schrittweise zu der Lösung vor, welche der vorliegenden Aufgabe entspricht. So findet man die einzelnen Bedingungen und Hilfsmittel zu ihrer Lösung. Die Analysis umfasst alle Schritte, die eben erwähnt wurden.

Diese Untersuchungsmethode wird durch die Figur unterstützt. Durch sie werden alle wesentlichen Teilaufgaben hervorgehoben. Alle Beziehungen zwischen vorgegebenen Größen oder Daten und den gesuchten müssen herausgestellt werden. Bei diesen Überlegungen setzt man also die gesuchte Figur oder Teile von ihr als bekannt voraus.

Durch Betrachtung der angenommenen Figur und durch Ziehen zweckmäßiger Hilfslinien, welche die gegebenen Stücke mit den unbekannten verbinden, werden die zur Ausführung notwendigen Konstruktionsschritte oder Elemente herausgestellt. Dabei wird es sich oftmals zeigen, dass zur Lösung einer gestellten Aufgabe mehrere, vielleicht sogar gleichwertige Methoden gefunden Werden können.

2.1.2 Die Konstruktion und die Determination

Hat man durch die Analysis einen möglichen Weg zur Lösung der Aufgabe ermittelt, so wird die Konstruktion eingehend beschrieben. Dabei muss im besonderen gezeigt werden, dass die gefundenen Größen ausschließlich oder auch nur teilweise Lösungen der Aufgabe sind.

Ein solcher Beweis jedoch wird überflüssig, wenn bei der Durchführung der einzelnen Konstruktionsschritte entsprechende, einem Beweis völlig gleichwertige Elementarkonstruktionen herangezogen worden sind.
Es wurde schon erwähnt, dass mit vorgegebenen Daten verschiedene Lösungen möglich sind. Dann wird man die einzelnen Fälle unterscheiden und diskutieren müssen. Dieser Teil der Aufgabe gehört in die Determination.

Ihr fällt es also zu, zu entscheiden, ob die gegebenen Größen in jedem, Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit zur Lösung führen oder ob sie gewissen Bedingungen genügen müssen. Diese werden dann in diesem Teilschritt des Lösungsweges der Aufgabe ebenfalls zusammengestellt.

2.2 Die Grundaufgaben

2.2.1 Die Axiome

Im Abschnitt 2.1. wurde gesagt, dass die Lösung einer Konstruktionsaufgabe mit Hilfe elementarer Konstruktionen, den sogenannten Grundkonstruktionen, vorgenommen wird.
Eine Zurückführung auf solche ist aber nur möglich, wenn die Lösbarkeit der Grund- oder Fundamentalaufgaben durch Grundsätze oder Axiome gesichert ist. Dabei versteht man unter einem Axiom einen solchen Satz, dessen Aussage ohne Beweis als allgemeingültig vorausgesetzt ist.

Es ist selbstverständlich, dass die hier angegebenen Axiome sich unmittelbar auf den Gebrauch der für die Grundkonstruktionen benutzten Instrumente, d.h. an das Lineal und den Zirkel, beziehen. Nur solche Konstruktionen sollen als "elementar" bezeichnet werden, die ausschließlich mit Zirkel und Lineal allein lösbar sind.

Dabei soll die Einschränkung gemacht werden: Der Raum, in dem hier Geometrie betrieben wird? ist die euklidische Ebene. Für die nachfolgenden Aufgaben werden nun folgende Axiome gebraucht:

1. Es ist stets möglich, durch 2 gegebene Punkte genau eine Gerade zu ziehen (Linealaxiom).

2. Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets konstruieren (Inzidenz).

3. Es lässt sich stets genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und wenigstens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind (Zirkelaxiom).

4. Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets durch Konstruktion die Schnittpunkte bestimmen.

5. Es ist stets möglich, die Punkte zu konstruieren, die zwei sich schneidenden Kreisen gemeinsam sind.

Lässt sich eine Aufgabe auf einen oder mehrere dieser fünf Grundsätze nicht zurückführen, so soll sie nichtelementar genannt werden. Dabei muss jedoch zwischen der Möglichkeit und der Lösbarkeit einer Aufgabe genau unterschieden werden.
Eine Aufgabe ist möglich, wenn sie Lösungen hat. Dabei kann es sich ergeben, dass die Konstruktion nicht mit den durch die 5 Axiome festgelegten Instrumenten allein ausführbar ist, sondern dass noch weitere Hilfsmittel wie Einschiebelineal, Winkeldreieck, Spiegellineal notwendig sind.

Eine solche Aufgabe soll elementar nicht lösbar genannt werden. Allein, es soll erwähnt werden, dass der Begriff der Lösbarkeit in gewissem Sinne auch als relativ anzusehen ist.
Die hier gebrauchte Bezeichnung schließt sich an die von der Algebra dargestellten Theorie der geometrischen Konstruktionen an, auf die aber hier nicht eingegangen werden kann.

Zum Abschluss sei nochmals erwähnt, dass die soeben angeführten Grundsätze nur für die (affine) Ebene Gültigkeit haben; für die Konstruktionen im Raum sind die Axiome für die Schnittpunkte von Ebenen und Kugeln hinzuzufügen.
Doch da in diesem Buch nur planimetrische Konstruktionen zur Sprache kommen, erübrigt sich ein Eingehen auf den Raum. Betont werden soll aber an dieser Stelle, dass die "nichtelementaren" Konstruktionsverfahren genauso exakt wie die "elementaren" sind.

2.2.2 Beispiele zur Erläuterung der Begriffe Möglichkeit einer Lösung und Lösbarkeit einer Aufgabe

1. Halbierung eines Winkels. Auf die Theorie dieser Aufgabe wird später eingegangen; hier soll nur gezeigt werden, dass die einzelnen zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Schritte die durch die Axiome 1-5 erlaubten Instrumente Lineal und Zirkel benötigen. Die Konstruktion ist damit elementar lösbar.

Ihre Ausführung ist einfach (Bild 1). Im Scheitel S des gegebenen Winkels wird der Zirkel eingesetzt und mit einer beliebigen Öffnung ein Kreisbogen gezeichnet, der beide Schenkel in den Punkten A und B schneidet.

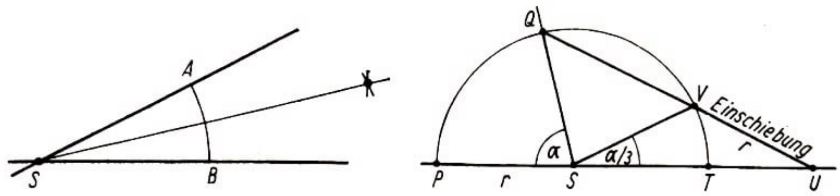


Bild 1, 2

Für die Ausführung dieser Zeichenoperationen wurden Axiom 3 und 4 benutzt Dann schlägt man um beide Punkte A und B mit einem festen, aber durchaus beliebig gewählten Radius je einen Kreis. Beide schneiden sich im Punkte T.
Benutzt wurden Axiom 3 und 5. Verbindet man unter Benutzung von Axiom 1 S und T, so ist die Gerade ST die gesuchte Winkelhalbierende. Die Winkelhalbierung ist also elementar lösbar.

2. Dreiteilung eines Winkels. Es sei an ein beliebiger Winkel mit dem Scheitel S (Bild 2). Um S schlage man mit einem beliebigen Radius einen Kreis, der die Schenkel des gegebenen Winkels in P und Q schneidet. Dann verlängere man den einen Schenkel, z. B. SP, über S hinaus.
Der Schnitt dieser Verlängerung mit dem um S mit dem beliebigen Radius $r = SP$ gezeichneten Kreis sei der Punkt T. Alle bis hierher vorgenommenen Schritte lassen sich aus den Axiomen 1-5 bestätigen. Welche?

Nun beginnt ein neuer Abschnitt der gesamten Konstruktion. Auf einem sog. Einschiebelineal wird der beliebige Radius $r = SP$ markiert. Dieses Lineal wird an dem Schnittpunkt Q des anderen Schenkels mit dem Kreis angelegt. Seine Lage wird dann so lange verändert, bis die Schnittpunkte U und V der Geraden durch Q mit der über T hinaus gezeichneten Verlängerung und dem vom zu teilenden Winkel abgewandten Bogen mit den Endpunkten der auf dem Lineal markierten Strecke r zusammenfallen.

Das Bogenstück TV ist dann genau ein Drittel des Bogens PQ. Dieser zweite Teil der Konstruktion kann nicht durch die Axiome 1-5 erklärt werden.

Da sich aber die Richtigkeit der ausgeführten Konstruktion beweisen lässt, stellt sie eine einwandfreie Lösung der Aufgabe dar. Der Beweis ist sehr einfach:

Es ist (Bild 2) $SP = SQ = ST = UV = r$ (nach der Konstruktion entsprechend dem Axiom 3). Dann ist unter Anwendung der Sätze über die Basiswinkel und deren Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck:

$$\angle QSP = \angle SQV + \angle QUS = \angle QVS + \angle VSU = 2 \cdot \angle VSU + \angle VSU = 3 \cdot \angle VSU$$

Die ausgeführte Konstruktion benutzt also neben den durch die Axiome 1 und 3 zugelassenen Hilfsmitteln noch das Einschiebelineal. Dieses muss hier verwendet Werden, weil es für die gestellte Aufgabe auf Grund tieferer algebraisch-geometrischer Untersuchungen keine den Axiomen 1-5 entsprechende elementare Lösung geben kann.

Dabei versteht man unter "Einschiebelineal" ein solches, auf dem an der Kante durch zwei Punkte A und B eine erforderliche Einschiebung angegeben wird. Das Lineal benutzt man dann in der folgenden Weise:

1. Es dient wie das normale Lineal nach Axiom 1 zum Ziehen von geraden Linien durch 2 vorhandene Punkte.

2. Es dient zum Abtragen der angegebenen festen Strecke AB auf einer vorhandenen Geraden von einem darauf vorgesehenen Punkte aus, gegebenenfalls nach beiden Richtungen.

3. Es dient zur Ermittlung des Schnittpunktes einer vorhandenen Geraden g mit einem Kreis vom Radius AB um einen vorhandenen Punkt P als Mittelpunkt.

4. Es dient zum Einschieben der markierten Strecke AB zwischen zwei vorhandenen Geraden g und h durch einen gegebenen Punkt P; dabei legt man das Einschiebelineal dann durch P und die Marke A auf g, die Marke B auf h oder umgekehrt.

Das Einschiebelineal, das praktisch durch einen festen Papierstreifen hergestellt werden kann, unterscheidet sich also durch eine genaue zusätzliche Benutzungsvorschrift vom normierten Lineal nach Axiom 1. Eine solche Vorschrift soll dann gerade die Möglichkeit geben, die geforderte nach den Axiomen unlösbare Aufgabe durchführen zu können.

2.3 Zusammenfassung

Bei geometrischen Konstruktionsaufgaben handelt es sich in den allermeisten Fällen um die konstruktive Herstellung einer planimetrischen Figur, bei der sich die einzelnen Größen auf elementarem Wege ermitteln lassen. Das sind die Elementarkonstruktionen, die durch Axiome gesichert sind.

Solche Konstruktionen entsprechen aber stets denen, die sich, wie die Algebra zeigen kann, auf jeden Fall mit Lineal und Zirkel ausführen lassen. Alle übrigen Konstruktionen stellen Näherungslösungen dar, die aber durchaus auch als gleichwertige Lösungsmöglichkeiten anzusehen sind. jede Lösung einer Konstruktionsaufgabe besteht aus zwei wesensverschiedenen Schritten, der Analysis und der eigentlichen zeichnerischen Konstruktionsausführung mit einem entsprechenden Beweis.

3 Über einige Grundkonstruktionen des Dreiecks. Anzahl erforderlicher Bestimmungsstücke

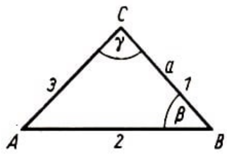
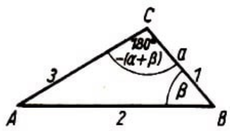
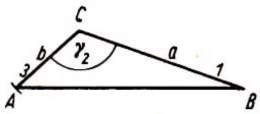
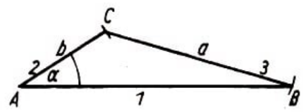
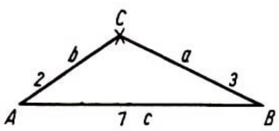
3.1 Elementare Grundkonstruktionen des Dreiecks

Da sich eine große Anzahl von Konstruktionsaufgaben auf elementare Grundaufgaben zurückführen lässt oder diese im Verlauf der Aufgabe als Hilfskonstruktionen benutzt werden, sollen die Grundkonstruktionen tabellarisch zusammengestellt werden.

Sie ergeben sich zumeist aus den Kongruenzsätzen. Einige Besonderheiten sind zu beachten. Im Fall III muss der gegebene Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüberliegen. Sonst kann es vorkommen, dass der Kreisbogen (3) den Schenkel überhaupt nicht oder zweimal schneidet. Das bedeutet: Es gibt keine Lösung, oder es treten zwei verschiedene Lösungen auf.

Im Fall IV muss die Summe irgend zweier Seiten auf jeden Fall größer als die dritte sein. Überlege, was eintritt, wenn die dritte Seite genau gleich der Summe der beiden anderen Seiten ist!

Tabelle 1 . Dreieckskonstruktionen

	Aufgaben	Lösungsweg für	Bild
I a. (WSW)	a, β, γ; b, α, γ; c, α, β	a, β, γ	a) 
I b. (SWW)	a, α, β; a, α, γ; b, α, β b, β, γ; c, α, γ; c, β, γ	a, α, β	b) 
II. (SWS)	a, b, γ; b, c, α; a, c, β	a, b, γ	c) 
III. (SSW)	a, b, α; a, c, α; b, c, β (a, b, β); (a, c, γ); (b, c, γ)	a, b, α	d) 
IV. (SSS)	a, b, c	a, b, c	e) 

Hinweis: Die Zahlen 1, 2, 3 in den Lösungsskizzen gehen die Reihenfolge, in der bei der Durchführung der Konstruktion die Stücke zu verwenden sind. Eine solche Skizze kann somit auch als abgekürzte Konstruktionsbeschreibung angesehen werden.

3.2 Wieviel voneinander unabhängige Bestimmungsstücke benötigt man zur Konstruktion einer ebenen Figur?

Die Zahl der erforderlichen Bestimmungsstücke hängt von der vorgelegten Aufgabe ab. Durch Kongruenzbetrachtungen werden die erforderlichen Bestimmungsgrößen, d. h. Stücke, welche voneinander "unabhängig" sein müssen, festgelegt. So findet man:

1. durch 1 Bestimmungsstück sind das Quadrat, das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, der Kreis,

2. durch 2 Bestimmungsstücke das gleichschenklige Dreieck, das rechtwinklige Dreieck, das Rechteck, der Rhombus (die Raute),

3. durch 3 Bestimmungsstücke das allgemeine Dreieck, das Parallelogramm, das gleichseitige Trapez,

4. durch 4 Bestimmungsstücke das beliebige Trapez,

5. durch 5 Bestimmungsstücke das allgemeine Viereck bestimmt.

Man kann jedoch allgemein zeigen, dass jedes beliebige n-Eck oder Polygon durch $2n-3$ Größen vollständig bestimmt ist.
Ein beliebiges Polygon kann durch Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden. Von diesen ist das erste Dreieck (allgemeine Dreiecke vorausgesetzt) durch 3 Stücke gegeben. Jedes weitere Dreieck benötigt noch höchstens 2 weitere Größen zur Konstruktion.

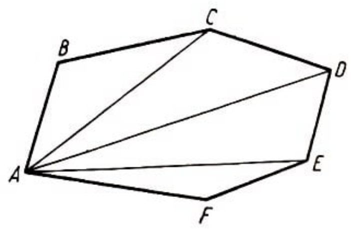


Bild 3

Das ist leicht einzusehen, weil es ja mit dem vorangehenden benachbarten Dreieck eine Diagonale gemein hat (Bild 3). Somit sind also insgesamt für die Konstruktion eines Polygons oder n-Ecks $2\cdot(n-2)+1=2n-3$ Bestimmungsgrößen notwendig.

Die hier genannten Konstruktionsaufgaben tragen im allgemeinen einen elementaren Charakter. Sie ermöglichen die Konstruktion der Figur aus den gegebenen Bestimmungsstücken, durch die jene Figur eindeutig festgelegt ist. Sollen aber noch weitere Bedingungen erfüllt sein, die nicht mit der Konstruktion der eigentlichen Figur zusammenhängen, z.B. die Lage gegenüber anderen Figuren o. a., so sind dafür als Nebenbedingungen weitere Bestimmungsstücke erforderlich.

Beispiel: Ein Kreis ist um den Endpunkt B einer vorgegebenen Strecke AB mit dem Radius r zu konstruieren. Zur Durchführung einer solchen Aufgabe werden also mehr Angaben (in diesem Beispiel sind es 3) als für die einfache Figurenkonstruktion (in diesem Falle wäre es 1) benötigt.

Schließlich soll noch einmal hervorgehoben werden, dass die einzelnen Konstruktionsdaten völlig voneinander unabhängig sein müssen. So ist z. B. die Konstruktion eines beliebigen Dreiecks aus drei gegebenen Winkelgrößen nicht möglich. Die drei Winkel sind nicht voneinander unabhängig, wie die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ für jedes ebene Dreieck in der euklidischen Geometrie zeigt. Werden aber alle drei Winkel beliebig gewählt, so ist die Ausführung der Konstruktion in der genannten ebenen Geometrie überhaupt nicht möglich.

4 Die geometrischen Bestimmungslinien (Punktmengen, geometrische Örter)

4.1 Grundbegriffe und Zusammenstellung der fundamentalen Bestimmungslinien

[1] In jeder geometrischen Konstruktion wird die Forderung gestellt, dass ein Punkt genau eine bestimmte Eigenschaft erfüllen muss.

Beispiel: Die Menge aller Punkte in der Ebene, die von einem Punkt M gleichen Abstand haben. Aus dieser Bedingung ergibt sich als erster Teil der Aufgabe, diese dazugehörige Punktmenge zu ermitteln.

Eine solche Punktmenge ist also die Zusammenfassung aller Punkte der Ebene, denen eine gewisse vorgegebene geometrische Eigenschaft zukommt. Sie besteht häufig aus einer einzigen durch die Bedingung festgelegten Linie, der Bestimmungslinie.
Jedoch kommt es auch oft vor, dass sie aus zwei oder mehreren Linien bestehen kann. Sie sind dann zusammen als eine Punktmenge zu betrachten. Es lässt sich dann immer zeigen, dass alle Punkte dieser Menge die vorgegebenen Bedingungen erfüllen und dass kein Punkt außerhalb der Menge den Anforderungen genügt.

Werden für einen Punkt aber zwei Bedingungen vorgeschrieben, so sind zur Lösung auch zwei Punktmengen erforderlich. Gehört ein Punkt zwei Punktmengen an, so liegt er im Durchschnitt dieser Punktmengen. Nur wenn die betrachteten Punktmengen Geraden oder Kreise sind, können die im Abschnitt 2.2. erwähnten Inzidenzaxiome (2, 4, 5) herangezogen werden.
Um die Methode der Punktmengen zu verwenden, ist es zweckmäßig, eine größere Anzahl solcher zu kennen:

1. Die Menge aller Punkte, die von einem Punkt einen gegebenen Abstand haben, ist der Kreis mit dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt und dem vorgegebenen Abstand als Radius.

2. Die Menge aller Punkte, die von einer Geraden einen gegebenen Abstand haben, wird durch die beiden Parallelen zu der gegebenen Geraden im gegebenen Abstand festgelegt.

3. Die Mengen aller Punkte, die von zwei Punkten gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Punkte.

4. Die Menge aller Punkte, die von zwei Parallelen gleichen Abstand haben, ist die Mittelparallele.

Mit Hilfe dieser Punktmengen lassen sich bereits viele geometrische Konstruktionsaufgaben in der Ebene lösen.

[1] Im heutigen Sprachgebrauch hat sich gegenüber den Ausdrücken "geometrischer Ort" oder "geometrische Bestimmungslinie" mehr das Wort "Punktmenge" eingebürgert, d. h. Menge aller Punkte, die einer bestimmten Bedingung genügen.

Beispiel 1: Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g. Es soll ein Punkt X konstruiert werden, der von P die Entfernung r und von g den Abstand a hat.

Analysis (oder Vorüberlegung):
a) Alle Punkte, die von P den Abstand r haben, liegen in der Punktmenge, die durch die Kreislinie um P mit dem Radius r bestimmt ist (Punktmenge 1).

b) Alle Punkte, die von der Geraden g gleich weit entfernt sind, liegen in der Punktmenge, die durch die mit dem Abstand a zu g parallelen Geraden bestimmt ist (Punktmenge 2).

c) Der Punkt X liegt im Durchschnitt der Punktmengen 1 und 2.

Konstruktion:
a) Es wird der Kreis um P mit dem Radius r geschlagen.
b) Im Abstand a werden nach beiden Seiten zu g die Parallelen gezogen.
c) Die Schnittpunkte mit dem Kreis sind die verlangten Punkte (Bild 4).

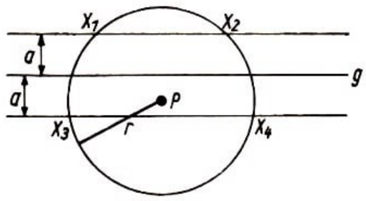


Bild 4

Determination:
a) Der Kreis schneidet keine der Parallelen, wenn der Abstand von P zu jeder der Parallelen größer ist als r. Der Durchschnitt der Punktmenge ist leer. Es gibt keine Lösung der Aufgabe.

b) Der Kreis berührt eine der Parallelen. Der Durchschnitt enthält ein einziges Element. Es liegt nur eine Lösung vor (Tangente an den Kreis).

c) Der Kreis berührt beide Parallelen. Der Durchschnitt enthält 2 Elemente. Es liegen 2 Lösungen vor (Tangenten).

d) Der Kreis schneidet nur eine Parallele in 2 Punkten und berührt die andere nicht, der Durchschnitt enthält 2 Elemente. Es gibt 2 Lösungen für den gesuchten Punkt.

e) Der Kreis schneidet eine Parallele zu g und berührt die andere. Der Durchschnitt enthält 3 Elemente. Es liegen 3 Lösungen vor.

f) Der Kreis schneidet beide Parallelen; es liegen 4 Schnittpunkte vor, d.h., der Durchschnitt enthält 4 Elemente, die 4 Lösungen bestimmen.

Beispiel 2 : Es ist ein Kreis zu ermitteln, der zwei parallele Geraden, die den Abstand a haben, berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht.

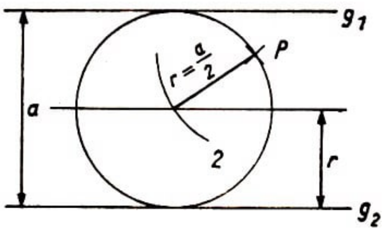


Bild 5

Analysis: Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt erstens auf der Mittelparallelen und zweitens auf dem Kreis um P mit Radius $\frac{a}{2}$. Der Schnittpunkt der Mittelparallelen mit dem Kreis um P ergibt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises (Bild 5).

Konstruktion und Determination möge der Leser entsprechend Bild 5 dem Beispiel 1 selbst angeben.

Weitere wichtige Punktmengen:

5. Die Menge aller Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, liegt auf den beiden Geraden, welche die Winkel der gegebenen Geraden halbieren.

6. Die Menge aller Punkte, deren Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten miteinander einen rechten Winkel bilden, ist der Kreis, der die Verbindungsgerade der beiden Punkte zum Durchmesser hat (Thaleskreis).

Zeichne aus der Hypotenuse c und der Höhe h_c unter Verwendung von 6. ein rechtwinkliges Dreieck und gib Analysis, Konstruktion und Determination an!

7. Die Menge aller Punkte, deren Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten miteinander einen gegebenen Winkel bilden, sind die beiden Kreisbögen, die über der Verbindungsgeraden der beiden Punkte als Sehne den vorgegebenen Winkel als Peripheriewinkel besitzen.

An diese geometrische Bestimmungslinie kann unter Benutzung des Tangenten-Sekantenwinkelsatzes und der Punktmenge 3. die Aufgabe, ein Dreieck aus c, γ, s_c zu zeichnen, angeschlossen werden. Die Analysis hierfür lautet (abgekürzt):
Es sei ABC das gesuchte Dreieck. A und B sind durch c bestimmt. C liegt auf einem der beiden Kreisbögen, die Winkel γ als Umfangswinkel besitzen. Der Mittelpunkt M des Kreises wird durch das Mittellot auf c und dessen Schnitt mit dem freien Schenkel des zum rechten Winkel ergänzten Tangentensekantenwinkels, angetragen in A oder B, bestimmt (Bild 6).

Konstruktion: Zeichne c mit A und B. An A wird an c der Winkel γ angetragen und zu einem rechten Winkel ergänzt (Vgl. Bild 6). Über c wird das Mittellot errichtet; Schnitt mit dem freien Schenkel des rechten Winkels in A ergibt M.

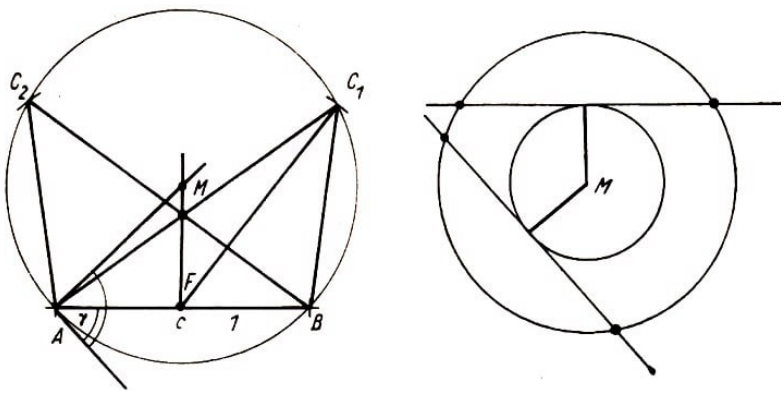


Bild 6,7

Der Kreis um M mit $r = AM$ und der Kreis um F ($AF = \frac{c}{2}$) mit Radius s_c sind die beiden Punktmengen, deren Durchschnitt den 3. Dreieckpunkt liefert. (Es wurde nur ein Kreisbogen mit dem Umfangswinkel γ gezeichnet.) Eine genaue Determination ist hier erforderlich. Warum? Wie lautet sie?

8. Die Halbierungslinien aller Peripheriewinkel über einem Bogen eines Kreises sind die Geraden, die durch die Mitte des entgegengesetzten Bogens gehen und die entsprechende Sehne schneiden.

9. Die Geraden, von denen ein gegebener Kreis gleiche Sehnen abschneidet (oder die von einem gegebenen Kreise unter einem gegebenen Winkel geschnitten werden), sind Tangenten eines zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreises (Bild 7).

10. Die Menge aller Punkte, die Endpunkt einer festen Strecke sind, deren Anfangspunkt auf einer gegebenen Geraden gleitet und die mit dieser Geraden immer den gleichen vorgegebenen Winkel bildet, ist eine Parallele zu jener Geraden.

11. Die Menge aller Punkte, von denen aus man Tangenten bestimmter Länge an einen gegebenen Kreis legen kann, ist ein zu dem gegebenen Kreis konzentrischer Kreis.

4.2 Das Aufsuchen von Punktmengen oder geometrischen Bestimmungslinien

Alle geometrischen Aufgaben und vor allem die elementaren geometrischen Konstruktionen können in zwei Klassen eingeteilt werden. Zur ersten Klasse zählt man solche, bei denen die vorgegebenen Bedingungen nicht auf eine einzige oder eine endliche Anzahl von geometrischen Figuren führt, die den gestellten Bedingungen Genüge leisten. Hier wird jedoch noch die Möglichkeit offengelassen, z.B. irgend ein Element der gesuchten Figur vollkommen willkürlich zu wählen oder es auch noch weiteren Bedingungen zu unterwerfen.
Man spricht in diesem Fall von den unbestimmten geometrischen Aufgaben.

Diesen werden die bestimmten geometrischen Aufgaben gegenübergestellt. Hier legen alle gegebenen Stücke die gesuchte Figur vollkommen fest oder geben die Bedingungen für eine genaue endliche Anzahl von Figuren an.

In der Praxis kommen nun aber auch die unbestimmten Aufgaben sehr häufig vor. Auf solche lassen sich in der ebenen Geometrie die meisten Aufgaben zurückführen. Von ihnen wiederum ist die Konstruktion einer Linie, deren Punkte bestimmte vorgegebene Bedingungen erfüllen müssen, wohl die häufigste Aufgabe, d.h. die Ermittlung der zugehörigen Punktmenge oder Bestimmungslinie.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass die Möglichkeit der Ermittlung solcher durch Punktmengen bestimmter Linien mit nur elementaren Mitteln oft sehr beschränkt ist. Die einzigen mit solchen Mitteln zu konstruierenden Gebilde sind Geraden und Kreise oder Strecken und Kreisbögen.
Es ist daher auch durchaus verständlich, wenn das Auffinden der geometrischen Bestimmungslinie für eine elementar lösbare Aufgabe unter Umständen auch gleichsam "experimentell" vorgenommen werden kann, sobald sich einige besondere Punkte aus

der gesuchten Punktmenge finden lassen.

Sind z.B. zwei Punkte von einer in Frage kommenden Bestimmungslinie bekannt, dann lässt sich im allgemeinen zeigen,

a) dass diese Bestimmungslinie, die die Punkte verbindet, eine Gerade ist, oder
b) dass diese Bestimmungslinie von einem Kreis bzw. Kreisbogen gebildet wird, der dabei in irgendeiner beliebigen Beziehung zu den betreffenden Punkten steht.

Da sei zunächst ein Beispiel zur Erläuterung. Das Wesentlichste bei dem kurz geschilderten Experimentierverfahren besteht darin, zwischen den gegebenen Stücken und den geometrischen Eigenschaften der gesuchten Figur Beziehungen zu entdecken, um die Analysis und damit die Lösung der Aufgabe zu vereinfachen. Aber auch arithmetische Betrachtungen können zur Feststellung weiterer geometrischer Beziehungen mitbenutzt werden.
Auf solche Weise können auch die im Abschnitt 4.1. zusammengestellten geometrischen Bestimmungslinien gefunden werden. Die nachfolgenden Beispiele mögen dies erläutern.

Beispiel 1: Es ist die Menge der Punkte in der Ebene zu finden, für welche die Quadrate der Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B eine konstante Differenz d^2 haben.
Die gesuchte Linie ist eine Gerade, welche auf der Verbindungslinie der beiden Punkte A und B senkrecht steht, d.h. ihre Normale.

Herleitung: P sei ein Punkt der gesuchten Linie, dann muss $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = d^2$ sein. Ist C der Fußpunkt der von P auf AB gezeichneten Normale, dann gilt auch

$$\overline{AC}2^{-}\overline{BC}^2 = (\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2) - (\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2) = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = d^2$$

So ist ersichtlich, dass die ohne Mühe leicht zu bestimmende Normale oder das Lot PC die verlangte Bestimmungslinie ist.
Der Fußpunkt auf AB wird in bekannter Weise ermittelt. Aus dieser Ableitung folgen weitere Punktmengen, so dass wir z.B. die Aufzählung in 4.1. ergänzen können:

Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, liegen auf einer Geraden, die auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Kreismittelpunkte, d. h. auf der Zentrale, senkrecht steht. Diese Linie heißt auch noch Chordale oder Potenzlinie der beiden Kreise.

Dabei ist folgendes zu beachten: Schneiden sich die beiden gegebenen Kreise nicht, so erfüllen alle auf der Potenzlinie liegenden Punkte die Bedingung; schneiden sich aber die gegebenen Kreise, so gehören nur die außerhalb der gegebenen Kreise liegenden Punkte der Potenzlinie zur gesuchten Punktmenge.

Beispiel 2[2]: Etwas schwieriger ist die folgende Aufgabe.
Es soll die Menge der Punkte einer Ebene angegeben werden, für die die Summe des m-fachen Quadrates von AP und des n-fachen Quadrates von BP gleich d^2 ist: $m \cdot \overline{AP}^2 + n \cdot \overline{BP}^2 = d^2$.

[2]Für Leser ab Klasse 10!

Hierin sind P ein beliebiger Punkt der gesuchten Punktmenge und A und zwei gegebene feste Punkte. Alle Punkte, die die Bedingung erfüllen, liegen auf einem Kreis, der seinen Mittelpunkt im Punkt C der Strecke $\overline{AB}$ hat, für den $m \cdot \overline{AB} = n \cdot \overline{BC}$ ist, P sei ein Punkt der Bestimmungslinie.

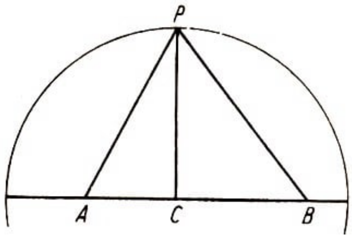


Bild 8

Dann gilt $d^2 = m \cdot \overline{AP}^2 + n \cdot \overline{BP}^2$.
Auf der Strecke $\overline{AB}$ liege der Punkt C. Aus Bild 8 und der angegebenen Beziehung gewinnt man mit Hilfe des Kosinussatzes

$$d^2 = (m+n)\overline{CP}^2 + m\overline{AC}^2 + n\overline{BC}^2 - 2\overline{CP}(n\overline{BC} - m\overline{AC})\cos(BPC)$$

Wählt man noch für C den Punkt, für den auf AB $m \cdot \overline{AC} = n \cdot \overline{BC}$ ist, dann findet man

$$d^2 = (m+n) \cdot \overline{CP}^2 + m \cdot \overline{AC}^2 + n \cdot \overline{BC}^2$$

$\overline{CP}^2$ ist also für jeden Punkt der gesuchten Bestimmungslinie konstant, mithin auch CP. Alle Punkte der gesuchten Menge liegen auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{CP}$.

4.3 Anwendung der Methode der Bestimmungslinien

Zur Durchführung einer geometrischen Aufgabe mittels der Methode der Bestimmungslinien geht man also zweckmäßig von zwei oder mehreren der Lage nach bekannten Elementen (Punkte, Linie) aus.
Für jeden unbekannten Punkt werden zwei Bestimmungslinien ermittelt. Dabei aber muss jede Bedingung, welche der gesuchte Punkt zu erfüllen hat, für sich allein betrachtet werden. Dadurch gewinnt man die notwendigen zwei Bestimmungslinien, deren Schnittpunkt die genaue Lage des zu konstruierenden Punktes ergibt.

Beispiel 1: Eine Gerade g sei gegeben. Der Punkt[3] $X \in g$ soll gesucht werden, von dem aus die an den Kreis mit dem Mittelpunkt O und Radius r gezogene Tangente die gegebene Länge a hat.

Analysis: X sei der geforderte Punkt. Der Tangentenabschnitt $\overline{XE}$ hat dann die gegebene Länge a. Nach der Aufgabenstellung muss der Punkt X zwei Bedingungen erfüllen:

[3] $X \in g$: gesprochen Punkt X auf der Geraden g oder der Punkt, der durch das Element X der Punktmenge g bestimmt ist.

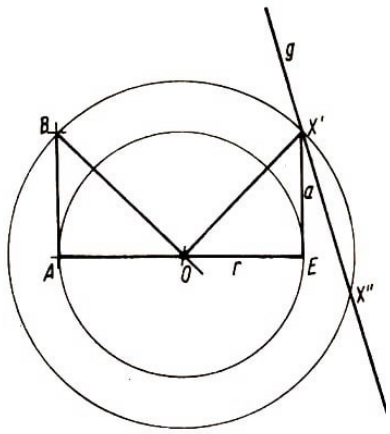


Bild 9

1. $X \in g$;
2. der Tangentenabschnitt von X an den Kreis um O muss die Länge a besitzen.

Daraus ergeben sich die beiden notwendigen Bestimmungslinien:
1. die Gerade g;
2. die Bestimmungslinie für den Punkt X, von dem aus man an den Kreis (gegeben durch den Mittelpunkt O und Radius r) Tangenten vorgegebener Länge legen kann.

Das ist aber ein zum gegebenen Kreis konzentrischer Kreis. Die Schnittpunkte beider Bestimmungslinien erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

Konstruktion (Bild 9): Man zeichne den Radius $\overline{OA}$. In A errichte man das Lot $\overline{AB} = a$. Um O beschreibe man mit $\overline{OB}$ den Kreis, der g in X' und X'' schneidet.

Beweis: Von X' zeichne man an den Kreis die Tangente $a = \overline{X'E}$ und verbinde O mit E und X'. Es sind nun: $\overline{OX'} = \overline{OB}, \overline{OE} = \overline{OA}$ (nach Konstruktion), Winkel bei $E =$ Winkel bei $A = 90°$.
Daher ist Dreieck $X'OE \cong$ Dreieck BOA, d.h. $\overline{EX'} = \overline{AB}$. $\overline{AB} = a$, daher auch $\overline{XE} = a$. Weiterhin gilt $X' \in g$.

Determination: Man zeichne von O das Lot auf g (Fußpunkt F). Der Satz des Pythagoras ergibt:

$$OB^2 = a^2 + r^2$$

Ist nun $\sqrt{a^2 + r^2} \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} OF$, so hat der konzentrische Kreis mit $R = OB$ $\left.\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right\}$ Punkte mit g gemeinsam. Es gibt somit 2, 1 oder 0 Punkte, die der gestellten Aufgabe entsprechen.

Beispiel 2 : Es soll ein Dreieck konstruiert werden, von dem die Seite $\overline{AB} = c$, der gegenüberliegende Winkel γ und die Summe $\overline{AC} + \overline{BC} = b + a = d$ gegeben sind.
Die Durchführung dieser Aufgabe mit Zirkel und Lineal scheint zunächst nicht möglich zu sein. Doch kann der Leser ohne Mühe die Lösung nach der folgenden Analysis vornehmen:

Der unbekannte Eckpunkt C muss sich als Schnitt zweier Bestimmungslinien darstellen lassen.

1. Die Menge der Punkte, von denen aus man $\overline{AB} = c$ unter dem Winkel γ sieht, ist nach dem Peripheriewinkelsatz ein Kreisbogen.
2. Die Punktmenge, für die die Summe der Entfernungen von A und B den festen Wert d haben, ist eine Ellipse, d. h. ein Kegelschnitt, der aber elementar nicht konstruierbar ist. Damit scheint die Aufgabe elementar unlösbar zu sein. Nun lässt sie sich folgendermaßen umformen:

Angenommen ABC sei das verlangte Dreieck. Dann kann man die Strecke $\overline{AC}$ (Bild 10) um die Strecke $\overline{CD} = \overline{CB}$ verlängern.

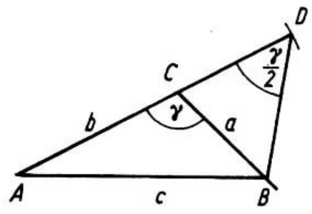


Bild 10

Die Konstruktion des Dreiecks ABC ist nun auf die des Dreiecks ABD zurückgeführt worden, von dem 2 Seiten $\overline{AB} = c$ und $\overline{AD} = d$ und der Winkel $\frac{\gamma}{2}$ bekannt sind. Die Konstruktion von Dreieck ABD wird durch die beiden folgenden Punktmengen ermöglicht:

1. die Menge der Punkte, von denen aus die Strecke AB unter dem Winkel $\frac{\gamma}{2}$ A erscheint und
2. die Menge der Punkte, die von A um d entfernt sind.
Die Zeichnung fertige der Leser als Übung an.

4.4 Anwendung: Zurückführung auf die Grundaufgaben

4.4.1 Zusammenstellung der Aufgabengruppen

1. Zur ersten Gruppe gehören Dreiecksaufgaben, die sich auf die Konstruktion der durch die gegebenen, Stücke bestimmten Hilfsdreiecke zurückführen lassen. Hierher gehören alle elementaren Aufgaben wie z. B. Konstruktion eines Dreiecks aus a, b, h_c; aus a, h_b, w_c; aus h_c, w_c, α usw.

2. Zur zweiten Gruppe gehören Aufgaben, bei denen die Mitteltransversalen oder Seitenhalbierenden gegeben sind. Sie werden meist gelöst, indem die gegebene Transversale verdoppelt wird.
Dadurch erhält man ein für die Lösung erforderliches Hilfsparallelogramm. Oder man zieht durch einen Endpunkt der Seitenhalbierenden eine Parallele zu einer Dreiecksseite und findet so die weiteren Bestimmungsstücke. Anleitung gibt Bild 11.

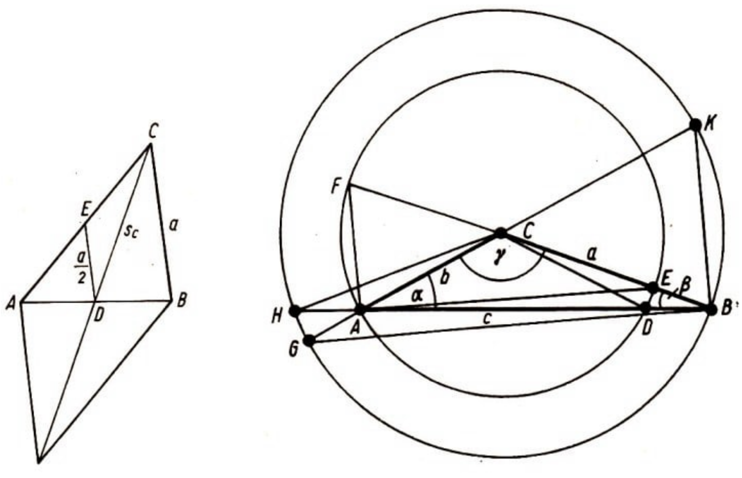


Bild 11,12

Beispiele: Konstruiere ein Dreieck aus a, b, m_c; aus b, s_a, α; aus c, s_b, h_c; aus h_b, s_a, α u.a.

3. Die dritte Gruppe umfasst die Aufgaben, in denen unter den gegebenen Größen die Summe oder Differenz zweier Seiten oder Winkel vorkommen. Hinweise für die Lösung möge Bild 12 geben.
Sind $\overline{CA} = \overline{CD} = \overline{CE} = \overline{CF}$, so folgen $\overline{FB} = a + b$, $\overline{EB} = a - b$, Winkel $DCB = \alpha - \beta$, Winkel $EAB = \frac{\alpha-\beta}{2}$, Winkel $FAB = 90° + \frac{\alpha-\beta}{2}$, Winkel $AFB = \frac{\gamma}{2}$.

Sind $\overline{CB} = \overline{CG} = \overline{CH} = \overline{CK}$, so folgen hieraus $\overline{AK} = a + b$, $\overline{AG} = a - b$, Winkel $HCA = \alpha - \beta$, Winkel $GBH = \frac{\alpha-\beta}{2}$, Winkel $ABK = 90° - \frac{\alpha-\beta}{2}$, Winkel $AKB = \frac{\gamma}{2}$.

Als Beispiele hierfür werden folgende Aufgaben angeführt, bei denen Dreiecke aus den Bestimmungsstücken $a, b, \alpha - \beta$; $c, a \pm b, \alpha$; $c, a \pm b, \beta$ und $c, a \pm b, \alpha \pm \beta$ oder γ zu konstruieren sind.

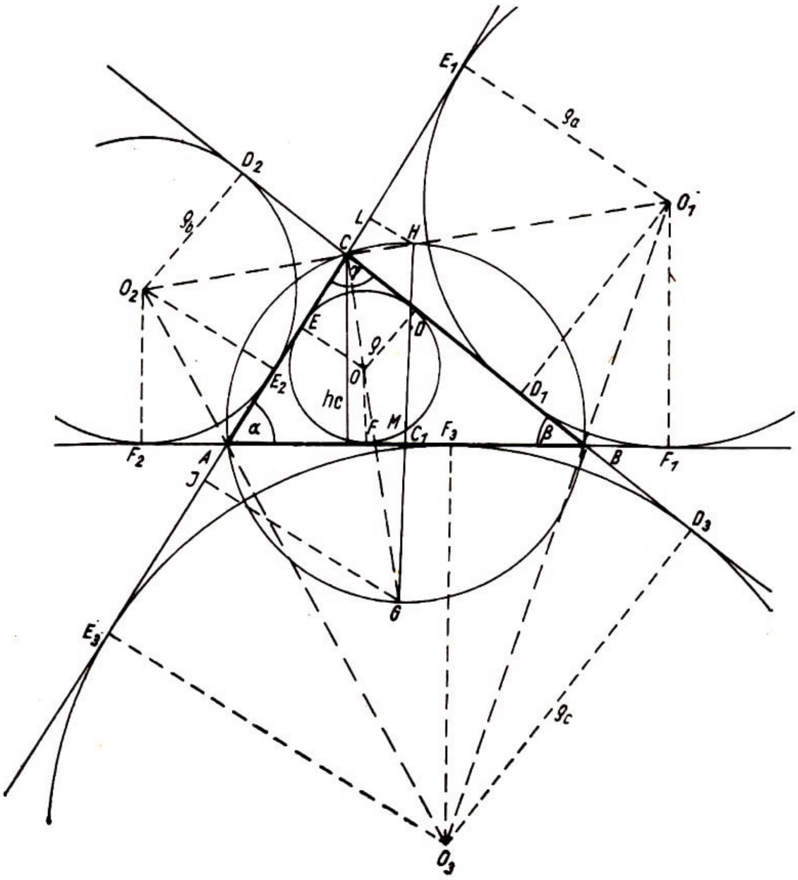


Bild 13

4. Diese Gruppe umfasst Aufgaben, bei deren Lösung die Eigenschaften solcher Punktmengen angewendet werden, die durch die vier Berührungskreise des Dreiecks bestimmt sind. Die Anleitung für diese Konstruktion zeigt Bild 13.
In ihr erkennt man die Eigenschaften des Inkreises, der 3 Ankreise und ihrer Mittelpunkte. Mit

$$\left.\begin{array}{l} OF \\ O_1F_1 \\ O_2F_2 \\ O_3F_3 \end{array}\right\} \perp AB \qquad \left.\begin{array}{l} OE \\ O_1E_1 \\ O_2E_2 \\ O_3E_3 \end{array}\right\} \perp AC \qquad \left.\begin{array}{l} OD \\ O_1D_1 \\ O_2D_2 \\ O_3D_3 \end{array}\right\} \perp BC$$

und der Bedingung $\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB} = a + b + c = 2s$ ergeben sich:

1. $\overline{CE} = \overline{CD} = \overline{AE_2} = \overline{BD_1} = \overline{AF_2} = \overline{BF_1} = s - c$
   $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CE_2} = \overline{BF_3} = \overline{CD_2} = \overline{BD_3} = s - a$
   $\overline{BF} = \overline{BD} = \overline{AF_3} = \overline{AE_3} = \overline{CD_1} = \overline{CE_1} = s - b$
2. $\overline{AE_1} = \overline{AF_1} = \overline{BD_2} = \overline{BF_2} = \overline{CE_3} = \overline{CD_3} = s = \dfrac{a+b+c}{2}$
3. $\overline{FF_3} = a - b, \qquad \overline{F_1F_2} = a + b$
   $\overline{DD_1} = c - b, \qquad \overline{D_2D_3} = b + c$
   $\overline{EE_2} = a - c, \qquad \overline{E_1E_3} = a + c$
4. $\overline{FF_1} = \overline{F_2F_3} = \overline{EE_1} = \overline{E_2E_3} = a$
   $\overline{DD_2} = \overline{D_1D_3} = \overline{F_1F_3} = \overline{FF_2} = b$
   $\overline{DD_3} = \overline{E_1E_2} = \overline{D_1D_2} = \overline{EE_3} = c$

Ferner halbieren die Geraden CO und CO_1 die beiden über $\overline{AB}$ stehenden Kreisbögen des Umkreises. G und H seien ihre Schnittpunkte mit dem Umkreis; dann ist $\overline{GH}$ der Durchmesser dieses Umkreises.
Mit C_1 als Mitte von $\overline{AB}$ folgen

$$\overline{HC_1} = \frac{\rho_a - \rho_b}{2}, \quad \overline{GC_1} = \frac{\rho_c - \rho}{2}, \qquad \text{also} \qquad \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$

Weiterhin sind die Winkel zwischen h_c und w_γ $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und ebenso der zwischen w_γ und MC. Das Lot $\overline{GJ}$ von G auf AC ist gleich $\frac{\rho_2-\rho_b}{2}$, $\overline{CL}$ gleich $\frac{a-b}{2}$.
Ferner gelten die Beziehungen

$$h_c : \rho = \rho_c : \frac{1}{2}(\rho_c - \rho) \qquad , \qquad h_c : \rho_b = \rho_a : \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$$

und entsprechende, da sich die Winkelhalbierenden harmonisch teilen.

Als Beispiele zu dieser Theorie seien folgende Dreiecksaufgaben genannt: 1. $s\alpha - \beta, \rho_c$; 2. $c, h_c, \rho_a + \rho - b$; 3. $c, a \pm b, \rho_c$; 4. ρ, ρ_a, γ; 5. c, h_c, ρ_a; 6. h_c, r, ρ_c.

4.4.2 Beispiele

Es folgen einige Aufgaben, von denen in den meisten Fällen nur die Analysis und die dazugehörige Figur skizziert sind. Der Leser möge die Konstruktionen, die Determinationen und Beweise als Übungen ausführlich darstellen. Mit Benutzung der nachstehenden Hinweise wird dies wohl unschwer auszuführen sein.

1. Zeichne ein Dreieck aus c, h_a, h_b!
Analysis (Bild 14): Bei D und E liegen rechte Winkel. Sind die Punkte gefunden, so ist durch Verlängerung von AD und BE der Punkt C und damit Dreieck ABC bestimmt. Die Punkte D und E erhält man, indem man über AB einen Halbkreis schlägt und von A aus einen Bogen mit h_a, von B aus mit h_b zeichnet.

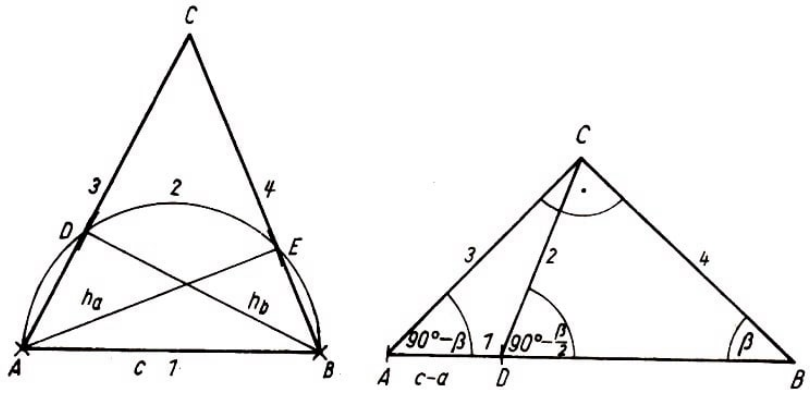


Bild 14,15

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus $c-a, \beta$!
Analysis (Bild 15): Wähle $\overline{BD}=\overline{BC}$, dann folgt $\overline{AD}=c-a$, Winkel $CAD=90°-\beta$, Winkel $ADC=90°+\frac{\beta}{2}$. Damit kann das Dreieck leicht gezeichnet werden.
Man zeichnet dazu AD, trägt in D den Winkel $\frac{180°-\beta}{2}$ an und in A den Winkel $90°-\beta$. Damit erhält man den Schnittpunkt C. Der freie Schenkel des in C angetragenen rechten Winkels trifft die Verlängerung von AD in B.

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus $b-a$, γ!
Analysis (Bild 16): ABC sei das Dreieck. Wird $\overline{AB}$ von B aus auf BC abgetragen, so bekommt man das gleichschenklige Dreieck ABD mit der Basis AD. Nun ist $\overline{CD}=b-a$, Winkel bei $B=90°-\frac{\gamma}{2}$. Im Dreieck ABD ist jeder der Winkel bei A und D gleich

$$\frac{180°-\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)}{2}=45°+\frac{\gamma}{4}$$

d.h. Winkel $CDA=135°-\frac{\gamma}{4}$. Daher kann das Hilfsdreieck CDA und folglich das gesuchte Dreieck gezeichnet werden, da alle Winkel bekannt sind.

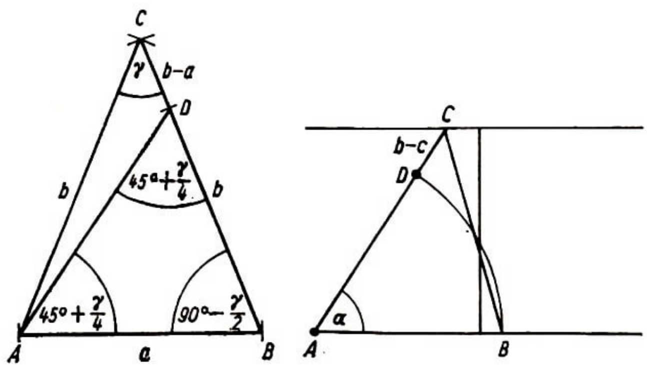


Bild 16,17

4. Zeichne ein Dreieck aus $b-c$, h_c, α.
Hinweis (Bild 17): Zeichne α, ziehe im Abstand h_c eine Parallele zu dem Schenkel von α, auf dem c liegt. Mit dem anderen Schenkel ergibt sich der Schnittpunkt C . Trage von C aus auf $b=\overline{AC}$ die Strecke $b-c$ ab, so erhältst du den Hilfspunkt D. Es ist dann $\overline{AD}=c$. Folglich schneidet der Kreis mit $\overline{AD}$ um A den freien Schenkel von α im Punkt B.

5. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus den beiden Höhen h_a und h_c!

Analysis (Bild 18): Fällt man von D das Lot auf einen Schenkel, so ist $DF = \frac{h_a}{2}$. Warum? ($\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $DF \parallel AE$).
Eine Verlängerung von DF um sich selbst führt auf das gleichschenklige Dreieck CDG mit h_a als Grundseite und h_c als Schenkel. Die Verlängerung der Höhe CF in diesem Hilfsdreieck und das Lot in D auf h_c ergeben den Eckpunkt B des geforderten Dreieckes.

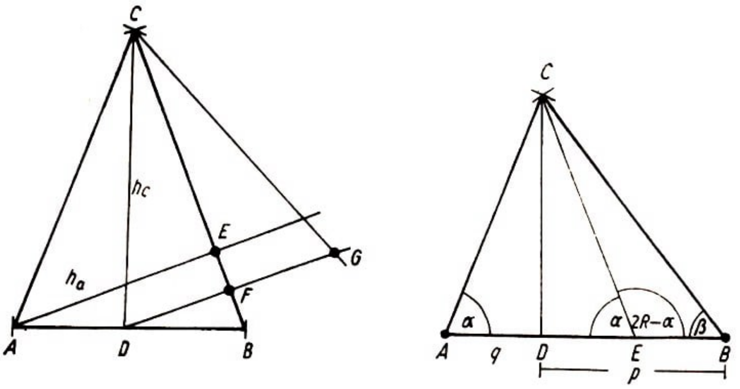


Bild 18,19

6. Zeichne Dreieck aus $p - q, a, \beta$!
Analysis (Bild 19): Es ist $DE = AD = q$, $EB = p - q$. Wird C mit E verbunden, dann ist der Winkel $CEA = \alpha$, der Winkel $CEB = 180° - \alpha$.
Es lässt sich somit ein Hilfsdreieck BEC aus $p - q$ und den Winkeln β und $180° - \alpha$ zeichnen. Verlängert man BE und schlägt mit CE als Halbmesser einen Kreis um C, so ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks ermittelt.

7. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn $a + b + c$ und α gegeben sind!

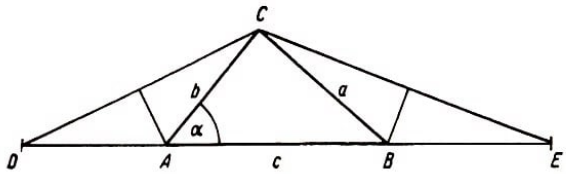


Bild 20

Analysis (Bild 20): ABC sei das geforderte Dreieck. Verlängere AB nach beiden Seiten über A und B hinaus. $\overline{DA} = b$, $\overline{BE} = a$. Im neuen Dreieck DCE ist $DE = a + b + c$, Winkel bei $D = \frac{\alpha}{2}$ und Winkel bei $E = \frac{90° - \alpha}{2}$ bekannt. Begründung!
Dreieck DCE kann gezeichnet werden. Auf DC und EC werden die Mittellote errichtet. Man findet A und B. Warum?

8. Zeichne ein Dreieck aus $c + a - b, \alpha, \beta$!
Analysis (Bild 21): Man trage in Richtung AX der Figur von B aus $\overline{BD} = a$ auf. $\overline{AD}$ ist gleich $c + a$. Um A ist mit AC ein Kreisbogen zuschlagen und dadurch AE festzulegen.

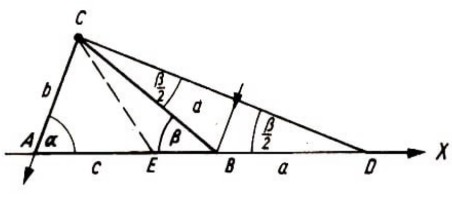


Bild 21

Dann ist $\overline{ED} = c+a-b$. Warum? So handelt es sich schließlich nur um die Konstruktion des Hilfsdreieckes CED.
Mit $\angle CDB = \frac{\beta}{2}$ und der Tatsache, dass $\triangle ACE$ gleichschenklig ist, folgt $\angle AEC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und schließlich $\angle BEC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Wenn das Dreieck CED gezeichnet ist, kann aus der Bedingung $\angle ECA = 90° - \frac{\alpha}{2}$ der Punkt A ohne Schwierigkeit ermittelt werden. Man konstruiert entweder die Mittelsenkrechte von CD, oder man trägt im Punkt C von CA aus den Winkel $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ an. Auf diese Weise wird der 3. Punkt B des gesuchten Dreiecks gefunden.

9. Es ist ein Viereck zu konstruieren, wenn $a + d$, $b + c$, α, γ, δ gegeben sind.

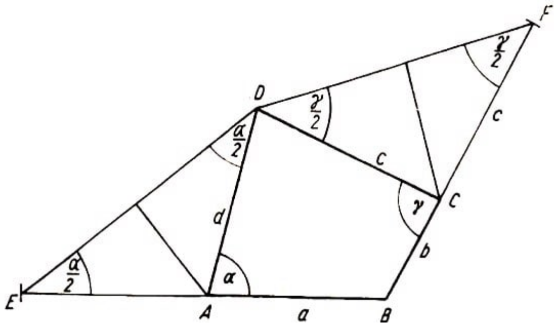


Bild 22

Analysis: $ABCD$ sei (Bild 22) das verlangte Viereck! Man verlängere a von A aus um $\overline{AE} = d$ und b von C aus um $\overline{CF} = c$.
So werden die beiden Hilfsdreiecke BAD und DCF gleichschenklig. Damit sind die Winkel an der Grundseite ED $\frac{\alpha}{2}$ und an der Grundseite DF $\frac{\gamma}{2}$.

Die Konstruktion ist verhältnismäßig einfach. In einem beliebigen Punkt B zeichnet man den Winkel $\beta = 360° - (\alpha + \gamma + \delta)$. Dann trägt man auf den Schenkeln vom Scheitel B aus die Strecken $a + d = \overline{BE}$ und $b + c = \overline{BF}$ ab.
Zeichnet man nun im Punkt E den $\angle\frac{\alpha}{2}$ und im Punkt F den $\angle\frac{\gamma}{2}$, so erhält man durch Schnitt der freien Schenkel den Punkt D. Trägt man von D aus die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ an, so findet man durch Schnitt der freien Schenkel dieser Winkel mit EB bzw. FB die Punkte A und C. Viereck $ABCD$ ist dann das gesuchte.

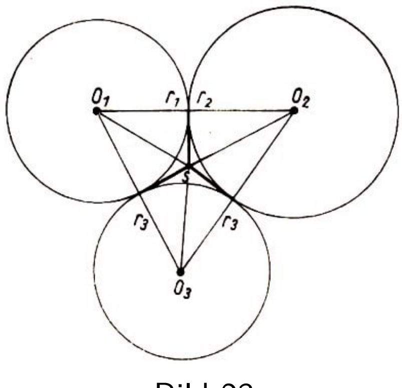


Bild 23

10. Man zeichne drei Kreise, von denen sich je zwei außen berühren, wenn nur ihre drei Mittelpunkte gegeben sind!
Analysis: Innerhalb des durch die drei Mittelpunkte (Bild 23) gegebenen Dreiecks muss es einen Punkt S gehen, von dem aus nach den Berührungspunkten der Kreise gleiche Tangenten gezogen werden können. Dieser Punkt S ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks $O_1O_2O_3$.

Konstruiert man nun von S aus auf die drei Seiten die Normalen oder Lote, so werden die gesuchten Kreisradien von den Seiten abgeschnitten.

Der Beweis hierfür kann durch eine übersichtliche einfache Rechnung gefunden werden: Es seien $\overline{O_1O_2} = c$, $\overline{O_1O_3} = b$; $\overline{O_2O_3} = a$; dann sind $r_1 + r_2 = c$, $r_1 + r_3 = b$ und $r_2 + r_3 = a$. Daraus findet man durch Umstellung

$$r_1 = \frac{b+c-a}{2}, \qquad r_2 = \frac{c+a-b}{2}, \qquad r_3 = \frac{a+b-c}{2}$$

11. Ein Dreieck ist zu konstruieren aus den Größen $\alpha, h_c, a+c-b$.
Analysis: In Bild 24 seien $\overline{AD} = a + c$, $\overline{AF} = b$, demzufolge $\overline{FD} = a + c - b$. Ferner ist $\triangle BDC$ gleichschenklig, und die Mittelsenkrechte auf CD schneidet den Eckpunkt B des gesuchten Dreiecks ABC.

Konstruktion: Man zeichne einen Strahl AX und trage im Punkt A den Winkel α an. Der freie Schenkel schneidet die im Abstand h_c zum Strahl AX gezeichnete Parallele im Punkt C. Auf AX trägt man die Strecke $\overline{AC} = b$ ab und findet den Schnittpunkt F.
Von diesem wird auf dem Strahl AX in Richtung X die Größe $a+c-b$ bis zum Schnittpunkt D abgetragen. Verbindet man D mit C und errichtet auf $\overline{CD}$ das Mittellot, so schneidet dieses den Strahl AX in B.

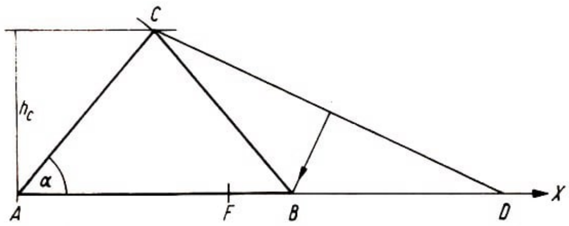


Bild 24

12. Man zeichne ein Dreieck aus h_a, h_b und s_c.
Analysis (Bild 25): Es sei ABC das verlangte Dreieck. Man ziehe $BD \parallel AC$ und $AD \parallel CB$. Im Dreieck ADC ist $h_a = \overline{CE}$ die Höhe zu AD und $h_b = \overline{DF}$ die Höhe zu AC. $\overline{CD}$ ist gleich $2s_c$.

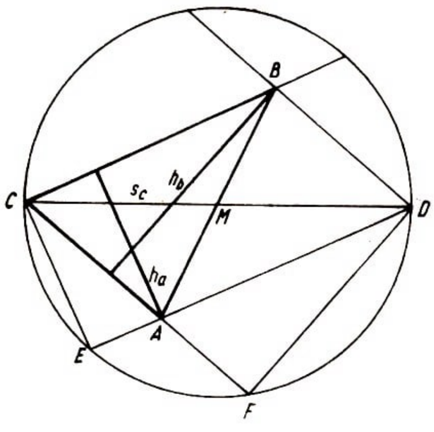


Bild 25

Konstruktion: Mit $s - c = r$ zeichne man einen Kreis, dessen Durchmesser CD sei. Um C schlägt man mit h_a einen Bogen und findet die Ecke E. Von D aus schlägt man einen Bogen mit h_b und findet F.
Nun verbinde man E mit D bzw. F mit C und erhält den Punkt A. Jetzt werden noch durch C und D die Parallelen zu AD bzw. zu AC gezogen; damit ist der dritte Punkt des gesuchten Dreiecks gefunden.

13. Ein Dreieck ist aus $h_a + h_b, a, \gamma$ zu zeichnen!
Analysis: Durch a sind die beiden Ecken B und C gegeben.

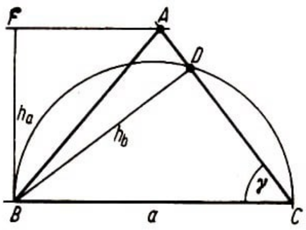


Bild 26

Über BC (Bild 26) zeichne man einen Thaleskreis und trage in C den Winkel γ an. Der Schnittpunkt D des freien Schenkels von γ mit diesem Halbkreis ist der Fußpunkt von h_b. Damit kennt man h_b.

Es ist aber $h_a + h_b$ gegeben; durch Streckendifferenz ergibt sich h_a. Wird von B aus $BF = h_a$ gezeichnet und im Punkt F die Parallele zu a gezeichnet, so ergibt sich der Schnittpunkt A. Die Konstruktion führe man als Übung aus!

14. Man zeichne einen Kreis, der eine gegebene Gerade g in einem Punkt P und einen gegebenen Kreis K berührt.

Die Bestimmungslinie (Bild 27) für die Mittelpunkte aller Kreise, die g in P berühren, ist das in P auf g errichtete Lot. Trägt man nun von P aus in Richtung des Lotes abwärts $r = \overline{PA}$ an und verbindet A mit O, so ist HM das Mittellot und eine zweite Bestimmungslinie für den gesuchten Mittelpunkt.

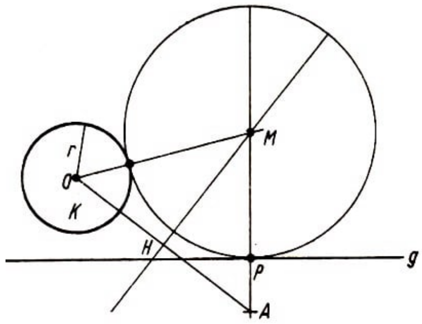


Bild 27

15. Man zeichne ein Dreieck, wenn $b + a$, $c + a$, α gegeben sind. Man trägt (Bild 28) $c + a = \overline{AB_1}$ und $b + a = \overline{AC_1}$ auf. Beide Strecken bilden den Winkel α.
Man trage von C_1 aus eine beliebige Strecke $C_1D = x$ ab und ziehe von D aus zu C_1B_1 eine Parallele. Dann trage man von B_1 aus in Richtung A die gleiche Strecke $x = B_1E$ ab und zeichne von E aus mit x einen Kreisbogen. So findet man F als Schnitt der Parallelen zu C_1B_1.
Das Viereck B_1EFG besitzt drei gleichlange Seiten x. Zieht man durch B_1F eine Gerade, so schneidet diese die Strecke AC_1, im Punkt C. Die durch C zu FE gezogene Parallele gibt auf AB_1 den Schnittpunkt B. Begründung!

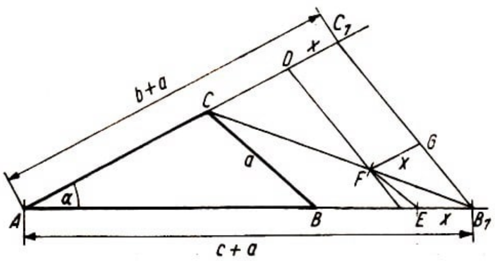


Bild 28

5 Die Transformationsmethoden oder Abbildungsverfahren

5.1 Einführung in die Grundbegriffe

5.1.1 Einleitung

Ein Dreieck ist aus s_a, b und c zu zeichnen.

Analysis: ABC (Bild 29) sei das gesuchte Dreieck: b liegt gegenüber von B und c gegenüber von C, die Seitenhalbierende s_a ist die Verbindungsgerade von A mit der Mitte D von $\overline{BC}$, d. h. $\overline{BD} = \overline{DC}$.

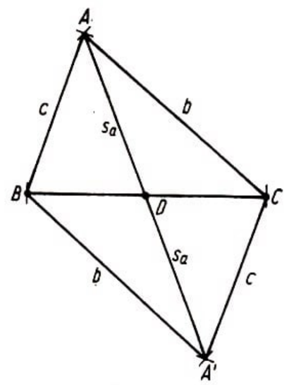


Bild 29

Da sämtliche 3 Stücke von A ausgehen, führen weder Teil- oder Hilfsdreiecke noch die Methode mit Punktmengen zum Ziel. Wie kommt man hier weiter?
Rein experimentell kann man einmal zunächst folgenden Weg versuchen:

Wird die Figur um D um $180°$ gedreht, so fallen B auf C, C auf B und A auf die Verlängerung von AD nach A' (AD ist eine sog. Ruh- oder Fixgerade). Damit werden $\overline{DA'} = s_a$, $\overline{BA'} = b$ und $\overline{CA'} = c$.
Dreieck $AA'B$ wird dann konstruierbar aus b, c und $2s_a$. Der Punkt C ist der Durchschnitt der Punktmengen, die durch die Kreise um A mit dem Radius b und um A' mit dem Radius c gegeben sind.

Die Konstruktion ist elementar; der Leser führe sie durch und beschreibe sie!

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar, wenn $b + c > 2s_a > b - c$ ist.

Das Gedankenexperiment, das zur Umformung der Figur veranlasste, ergab nach Vornahme der Drehung um D und nach Zusammensetzung des ursprünglichen mit dem neuen Dreieck als neue Figur ein Parallelogramm. Nach der Umdrehung sind nämlich die entsprechenden Geraden parallel.
So hätte die neue Figur auch durch eine Parallelverschiebung von AC in Richtung AB um c gewonnen werden können. Darf man nun aber ohne weiteres $DA' = s_a$ schließen?

Bereits einige Beispiele in den vorangehenden Abschnitten hatten wie das vorstehende schon gezeigt, dass trotz der Festlegung der geometrischen Bestimmungslinien beachtliche Schwierigkeiten bei der Ausführung der Konstruktion auftreten können. Diese kann man in vielen Fällen durch Umformung der Figur beseitigen, indem man die Lage der ganzen Figur oder einzelner ihrer Teile verändert. Man erreicht dies stets, wenn man in, der Ebene wie im obigen Experiment eine Bewegung vornimmt.

Im allgemeinen Fall jedoch wird die Figur insgesamt oder auch nur teilweise durch geeignete Transformationen umgeformt. Wir wollen uns hier hauptsächlich mit den Transformationen beschäftigen, die der elementaren Geometrie angehören. Dazu zäh-

len die Parallelverschiebung oder Translation, die Drehung, die Geradenspiegelung und die Punktspiegelung.
Die Ähnlichkeitstransformation und die Transformation mittels reziproker Radien werden in diesem Buch nur gelegentlich benutzt.

5.1.2 Wie ändert sich eine Strecke nach einer Verschiebung?

Es gilt hier der Grundsatz 1: Eine jede Strecke $\overline{XY}$ geht bei einer Verschiebung der Geraden in eine gleich lange, d. h. gleich große oder kongruente Strecke $\overline{X'Y'}$ über. Das sieht man leicht ein:
Die Strecke s mit den beiden Endpunkten X und Y, die auf der Geraden g liegen, sei in die neue Lage mit den Endpunkten X' und Y' verschoben. Man unterscheide zwei Fälle:

a) X' liegt außerhalb von $\overline{XY}$. Wie Bild 30 zeigt, müssen $\overline{XX'}$ und $\overline{YY'}$ gleich groß sein; beide Strecken $\overline{XX'}$ und $\overline{YY'}$ entstehen durch Hinzufügung der gleichen Strecke $\overline{YX'}$ zu s.

Bild 30 

Man findet also als Streckenrechnung ausgedrückt

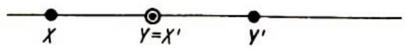
$$\overline{XX'} = \overline{XY} + \overline{YX'} \qquad , \qquad \overline{YY'} = \overline{YX'} + \overline{X'Y'}$$

b) X' liegt innerhalb von $\overline{XY}$. Mit Bild 31 folgt $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$, weil die Streckensubtraktionen

$$\overline{XX'} = \overline{XY} - \overline{X'Y} \qquad \text{und} \qquad \overline{YY'} = \overline{X'Y'} - \overline{X'Y}$$

gelten.

Bild 31,32 



Für den Fall, dass nach einer Verschiebung $\overline{XY}$ und $\overline{X'Y'}$ zusammenfallen (Identität), erübrigt sich eine besondere Betrachtung, ebenso wenn nur ein Endpunkt nach der Verschiebung mit einem neuen zusammenfällt (Bild 32). So kann folgende Erklärung ausgesprochen werden:

Definition. Bei einer Verschiebung der Geraden auf sich selbst werden alle Punkte in gleicher Richtung um das gleich große Stück verschoben.

Die Richtung $\overrightarrow{\tau}$ in der die Gerade s verschoben wird, nennt man die Verschiebungsrichtung. Die Größe dieser Verschiebung wird durch die Länge angegeben, um die eine vorgegebene Strecke verschoben wird, mit anderen Worten, durch die Strecke zwischen entsprechenden Punkten, also z.B. zwischen den Anfangspunkten der ursprünglichen und der verschobenen Strecke.
Durch orientierte Richtung und Länge ist eine Verschiebung eindeutig festgelegt.

Um das bei der Aufzeichnung der Beweise kurz auszudrücken, werden wir einige Abkürzungen einführen.

Für die Verschiebung sei als Symbol das Zeichen $\overrightarrow{\tau}$ (gesprochen "tau", kleines griechisches t) festgelegt. Danach bedeutet $\overrightarrow{\tau}(AB)$ die Verschiebung der Strecke $\overline{AB}$ um die Länge $|\tau|$ von $\overrightarrow{\tau}$ in der durch $\overrightarrow{\tau}$ vorgeschriebenen Richtung.
Durch diese geometrischen Aussagen über die Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ ist aber auch die Konstruktionsvorschrift für eine solche Verschiebung festgelegt:

Es sei $\overrightarrow{\tau}$ gegeben; dann kann zu jedem Punkt X der Punkt X' gezeichnet werden, in den X nach Ausführung der Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ übergeführt wird. Dazu ist erforderlich, vom Punkt X aus in der durch $\overrightarrow{\tau}$ vorgegebenen Richtung auf der Geraden s die Strecke von der Länge $|\tau|$ anzutragen. Der Endpunkt ist dann X'.

Zusammenfassung: Das Wesen dieser Verschiebung oder Translation $\overrightarrow{\tau}$ besteht darin: Man kann einzelne Teile der Figur, wie Strecken, Linien, Winkel usw. um eine bestimmte Strecke $|\tau|$ verschieben.
Der Zweck dabei ist z. B. Auffindung eines wichtigen, für eine Konstruktion erforderlichen Punktes oder das Zusammensetzen gegebener Strecken zu einer neuen Figur, die sich dann leicht konstruieren lässt. Dabei können gegebenenfalls auch Zerlegungen von Teilfiguren benutzt werden. Die Verschiebung kann als ein wichtiges Konstruktions- und Beweiselement der ebenen Geometrie benutzt Werden.

5.1.3 Die Parallelverschiebung

Zunächst wollen wir einige Grundeigenschaften der Parallelverschiebung kennenlernen. Eine Ebene ε_0, die längs der gleichen Geraden aus einer Anfangslage L_0 in die verschiedenen Lagen $L_1, L_2, L_3, ...$ durch die Bewegungen $\overrightarrow{\tau}_1$, $\overrightarrow{\tau}_2$, $\overrightarrow{\tau}_3$, ... übergeführt wird, verschiebt alle in dieser Ebene ε_0 enthaltenen Punkte längs einer bestimmten Gleitlinie für den betreffenden Punkt.
Eine solche Linie heißt auch die Bahnkurve der Verschiebung für den einzelnen Punkt.

Auch umgekehrt gilt die folgende Tatsache: Eine jede beliebige Bahnkurve kann als eine Gleitlinie betrachtet werden. Für diese Eigenschaft gelten folgende Grundsätze oder Axiome (Bild 33):

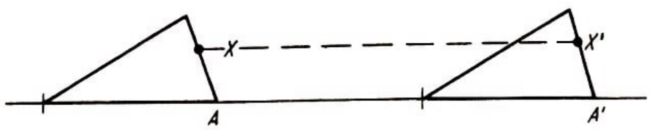


Bild 33

1. Bei jeder Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ der Ebene ε_0 hat jeder in ihr gelegene Punkt eine Gerade g als Gleitlinie.
2. Eine jede solcher Gleitlinien, die in ε_0 enthalten sind, gleitet bei der Verschiebung auf sich selbst.
3. Bei einer Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ der Ebene ε_0 existiert kein Punkt in dieser Ebene, der in Ruhe bleibt. Für eine Translation $\overrightarrow{\tau}$ gibt es also keine Fest- oder Fixpunkte.
4. Zwei verschiedene Punkte X_1, X_2, die auf der Ebene ε_0 liegen, gehen bei einer Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ der Ebene ε_0 in zwei verschiedene Punkte X_1', X_2' über.

Durch diese Axiome 1-4 wird der Begriff Translation erklärt:

Die Translation ist also eine umkehrbar eindeutige oder eineindeutige Abbildung der Punkte einer Ebene auf sich selbst. Dies trifft auch später für die anderen Transformationen (Drehungen, Geraden- und Punktspiegelungen) zu.
Alle diese Eigenschaften sind für die Behandlung der konstruktiven geometrischen Aufgaben äußerst wichtig. Aus ihnen folgen einige wichtige Sätze.

Satz 1: Zwei Gleitlinien derselben Ebene ε_0 schneiden sich nicht.

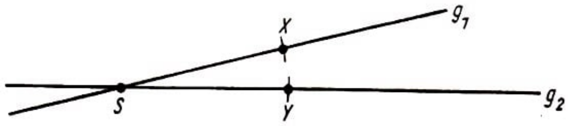


Bild 34

Beweis (Bild 34): Angenommen g_1 und g_2 seien zwei Gleitlinien, deren Schnittpunkt S ist. Bei einer Parallelverschiebung $\overrightarrow{\tau}(g_1)$ (gesprochen: eine Parallelverschiebung angewandt auf die Gerade g_1) müsste g_1 auf sich selbst gleiten.
Dann aber muss ein Punkt $X \in g_1$ (gesprochen: X enthalten in g_1) so existieren, dass dieser Punkt bei der Verschiebung $\overrightarrow{\tau}(g_1)$ in S übergeht, d. h., es gilt $\overrightarrow{\tau}(X \in g_1) \to S \in g_1$.
Entsprechendes gilt für einen Punkt $Y \in g_2$, d. h. $\overrightarrow{\tau}(Y \in g_2) \to S \in g_2$. Zwei verschiedene Punkte X und Y $(X \neq Y)$ würden also bei Ausführung der Verschiebung $\overrightarrow{\tau}$ in denselben Punkt S übergehen. Das ist aber ein Widerspruch mit den Grundsätzen 1 bis 4 für die Parallelverschiebung; damit ist die Annahme, g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt, falsch.

Die hier angewandte Beweismethode nennt man einen "indirekten" Beweis. Man nimmt das Gegenteil als richtig an und zeigt, dass diese Annahme sich nicht mit den gegebenen Voraussetzungen verträgt.

Aus diesem Satz folgt, dass die Gleitlinien die Eigenschaften besitzen, welche man den Parallelen zuschreibt. Jedoch muss betonend hervorgehoben werden, dass damit noch nicht gesagt wurde, was eigentlich Parallelen im mathematischen Sinn darstellen.
Dies soll später erst durch den Streifenbegriff erklärt werden. Nur anschauliche, aus unserer Begriffswelt hergenommene Eigenschaften wurden zum Beschreiben benutzt.
Die Lage ist hier ähnlich wie bei dem Versuch, eine Erklärung oder Definition für einen Punkt überhaupt zu geben. Man schließe sich hier an den Weg an, den in solchen Fällen O. Perron gewählt hat. Er schreibt zur Erklärung eines Punktes:

"Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt."

Und das stimmt genau mit Äußerungen über den Beweis in der Mathematik überein, die Pascal etwa vor 300 Jahren sagte. So soll es auch vorerst mit dem Begriff "parallel" geschehen, und man gelangt zu der Erklärung:
Bahngeraden oder Gleitlinien bei einer Verschiebung nennt man parallel. Daher wird diese Bewegungsoperation auch oftmals als Parallelverschiebung bezeichnet. Auch die Umkehrung der Erklärung gilt: Schneiden sich zwei Geraden nicht, so können sie stets als Gleitlinien einer Verschiebung oder Bewegung angesehen werden.

Jede beliebige Gerade $g \in \varepsilon_0$ darf also als Gleitlinie in ε_0 aufgefasst werden; durch jeden beliebigen Punkt $X \in \varepsilon_0$ gibt es für jede Parallelverschiebung $\overrightarrow{\tau}$, die durch g bestimmt wird, auch nur eine einzige Gleitlinie. Es gilt also der

Satz 2: Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden nur eine Parallele.

Beachte! Dieser Satz 2 ist keineswegs gleichbedeutend mit der geometrischen Bestimmungslinie bezüglich eines konstanten Abstandes! Weshalb?

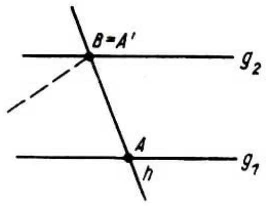
Auf dem Satz 2 beruhen verschiedene praktische Anwendungen. wie z.B. das Parallelenlineal, welches als Fixlineal käuflich ist, die Reißschiene und viele andere Zeichengeräte. Verschiebt man ein solches Parallellineal um $\overrightarrow{\tau}$, so werden dabei die Punkte X und Y auf der Geraden g in X' und Y' auf der Geraden g' übergeführt. Die beiden Geraden g und g' besitzen keinen gemeinsamen Schnittpunkt; gäbe es aber einen solchen, so läge keine Parallelverschiebung oder Translation vor. Veranschauliche dir noch einmal die einzelnen Tatsachen, die durch diese einfache Abbildung dargestellt werden! Es gilt ferner

Satz 3: Gerade, die durch Translation auseinander hervorgehen, sind parallel. Entsprechend gilt auch die Umkehrung:

Satz 4: Zwei Parallelen können stets durch Verschiebung ineinander übergeführt werden.

Der Beweis dieses Satzes wird auch indirekt geführt.
g_1 und g_2 seien zwei parallele Geraden und h eine g_1 und g_2 in A und B schneidende Gerade. (In mathematischer Formelsprache lässt sich dies etwa so ausdrücken: $g_1 \parallel g_2$; $h \cap g_1 = A$ und $h \cap g_2 = B$).

Bild 35



Wird h nun als Gleitlinie gewählt, längs der die Ebene so (Bild 35) so verschoben oder bewegt wird, dass $\overrightarrow{\tau}(A) = B$ ist, so ist auch $\overrightarrow{\tau}(g_1) = g_2$, d. h. g_1 geht in g_2 über.
Würde aber $\overrightarrow{\tau}(g_1) = g_1'$ sein, dann müsste auch $g_1 \parallel g_1'$ sein. Es waren aber nur $g_1 \parallel g_2$ vorausgesetzt, und durch B würden dann zwei Parallelen g_2 und g_1' zu g_1 gehen.
Die Aussage steht aber im Widerspruch mit dem Inhalt von Satz 2, dass es durch einen beliebigen Punkt in der Ebene zu einer Geraden g_0 nur eine Parallele geben kann.

Der zuletzt bewiesene Satz ist für die Durchführung vieler Konstruktionen wichtig. Die Gleitlinie h kann an beliebig vielen Stellen angesetzt werden, d. h., es gibt beliebig viele Translationen. Nun wird aber eine jede Strecke $\overline{XY}$ (Bild 36) bei einer solchen Verschiebung auf eine gleich große Strecke $\overline{X'Y'}$ abgebildet. Das ist die Aussage des Grundsatzes: Bei jeder Translation $\overrightarrow{\tau}$ wird eine gegebene Strecke auf eine gleich große abgebildet. Damit gewinnt man mühelos den

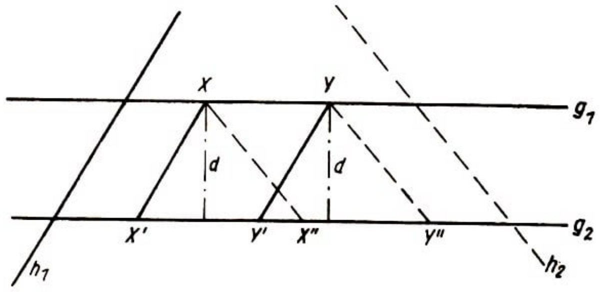


Bild 36

Satz 5: Zwischen Parallelen sind parallele Geradenabschnitte gleich groß.

Der einfache Beweis sei dem Leser als Übung überlassen. Stehen diese Geraden nun senkrecht auf den beiden parallelen Geraden g_1 und g_2, so heißt ein solcher Geradenabschnitt der Abstand der beiden Parallelen und ist die kürzeste Verbindung zwischen den Geraden g_1 und g_2. Den

Satz 6: Bei einer Parallelenverschiebung werden alle Punkte der Ebene ε_0 um die gleiche Strecke $|\tau|$ verschoben,

wird der Leser auch selbst beweisen können.
Aus Bild 37 ist unter Verwendung des Hinweises $\vec{\tau}(X,Y) \to X'Y'$ für $g_1 \parallel g_2$, $\vec{\tau}(XX') \to YY'$ für $h_1 \parallel h_2$ der Beweis mühelos zu finden.

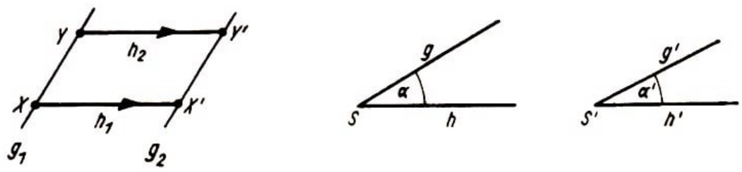


Bild 37,38

Genau wie die Strecke bleiben auch die Winkel bezüglich ihrer Größe bei der Translation unverändert oder invariant.
Man kann also schreiben (Bild 38): $\vec{\tau}(\alpha) \equiv \vec{\tau}(\angle hSg) \to \alpha' \equiv \angle h'S'g'$. Die Schenkel von α, nämlich g und h, werden dabei auf g' und h', d. h. auf die des Winkels α', abgebildet. Ferner sind g und g' sowie h und h' gleichgerichtet und parallel.
Folglich ist $\angle\alpha = \angle\alpha'$.

Sind nun umgekehrt α und α' zwei Winkel, deren Schenkel g und g' sowie h und h' zueinander parallel und gleichgerichtet sind, so können sie durch eine Translation zur Deckung gebracht werden. Nach Ausführung einer solchen Transformation, durch die S von α auf S' von α' abgebildet wird, geht g in die Parallele zu g durch S' über; das ist aber g'. Entsprechend lässt es sich für den anderen, Schenkel h hinschreiben.
Somit folgt

Satz 7 : Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel und gleichgerichtet sind, gehen aus einer Translation hervor und sind gleich groß.

Formelmäßig drückt man dies so aus: $\vec{\tau}(S_\alpha) \to S'_{\alpha'} \Leftrightarrow g \parallel g'$; $h \parallel h'$ und $\alpha' \leftrightarrow \alpha$.
Einige Folgerungen aus den Sätzen seien noch ergänzend angeführt.

1. Es seien $\angle\alpha$ und $\angle\beta$ zwei Winkel, deren Schenkel einander parallel sind, ein Schenkelpaar sei jedoch entgegengesetzt orientiert. Dann besitzt der Nebenwinkel von β (Bild

39), nämlich $\angle\alpha'$, mit dem Winkel α paarweise parallele und gleichgerichtete Schenkel, d. h., es folgt $\alpha = \alpha'$; da $\alpha' + \beta = 180°$, ist auch $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\beta = 180° - \alpha$.

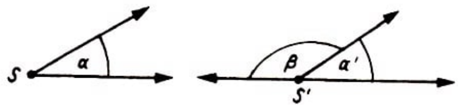


Bild 39

2. Es seien die Schenkel von α und β paarweise parallel, aber entgegengesetzt orientiert. Dann ist α gleich α', dem Scheitelwinkel (Bild 40) von β; denn sie besitzen paarweise gleichgerichtete Schenkel. Demzufolge ist auch $\alpha = \beta$.

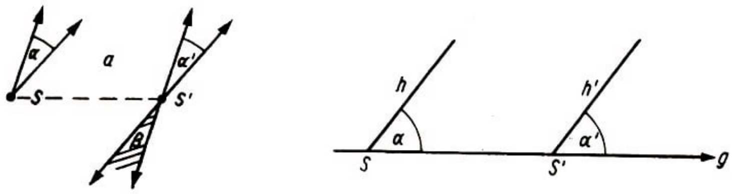


Bild 40,41

3. Ein Sonderfall liegt dann vor, wenn der eine Schenkel eines Winkels zugleich Gleitlinie ist. Dann gilt $h \parallel h'$ (Bild 41). Umgekehrt gilt: Gehen von einer Geraden g zwei parallele Geraden h und h' aus, so kann man durch eine Verschiebung $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ längs dieser Geraden g den Winkel $\angle(h, g)$ und den Winkel $\angle(h', g)$ zur Deckung bringen oder sie aufeinander abbilden. Es gilt dann $\overrightarrow{\mathcal{T}}_1(\angle hg) \to \angle h'g$ und $\overrightarrow{\mathcal{T}}_2(\angle h'g) = \angle hg$.
Dabei stellt man fest, dass $\overrightarrow{\mathcal{T}}_1$ genau gleich, aber entgegengesetzt von $\overrightarrow{\mathcal{T}}_2$ ist, also $\overrightarrow{\mathcal{T}}_1 = -\overrightarrow{\mathcal{T}}_2$. Man nennt einen solchen Abbildungsvorgang seine Umkehrung oder die inverse Bewegung.

5.1.4 Die Grundkonstruktion der Verschiebung oder Translation

5.1.4.1 Grundeigenschaften

1. Es sei (Bild 42) $a = |\tau|$ eine feste gegebene Strecke; c sei die Bahngerade mit vorgegebener Orientierung. Diese beiden Angaben reichen aus, um die Translation festzulegen.

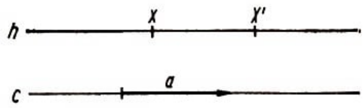


Bild 42

Zu jedem Punkt X der Ebene ε_0, zu der auch die Punktmenge der Geraden c gehört, lässt sich ein Punkt X' konstruieren, für den $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X) \to X'$ gilt.

Konstruktion: Durch den Punkt X wird zu der Geraden c die Parallele, z.B. mit Hilfe eines Parallelenlineals, gezeichnet. So findet man die Bahngerade h für den Punkt X. Dann wird auf h in der durch c vorgegebenen Richtung die Strecke a der Verschiebung $\overrightarrow{\mathcal{T}}(X)$ abgetragen. Der Endpunkt dieser Strecke ist das gesuchte Bild von X. Das bedeutet:
Durch die Strecke a und die orientierte Gleitlinie c wird ein ebener Vektor $\mathfrak{a}$ vom Betrag a und mit der gleichen Richtung und Orientierung wie c festgelegt, der die Verschiebung eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten:

Die Menge aller Parallelverschiebungen in einer Ebene ist gleich der Menge aller Vektoren dieser Ebene, d. h., sie entspricht dem zweidimensionalen Vektorraum.

2. Es ist die Gerade g' zu konstruieren, auf die g bei einer Translation abgebildet wird. Wir wollen zwei Lösungswege betrachten:

Erster Lösungsweg: Auf der Geraden g nehme man zwei beliebige Punkte X_1 und X_2 an. Dazu konstruiere man X_1' und X_2'. Verbindet man X_1' mit X_2', so erhält man g' (Bild 43 a).

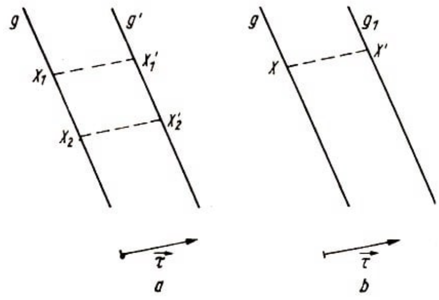


Bild 43

Zweiter Lösungsweg: Auf g werde ein beliebiger Punkt X_1 angenommen. Konstruiere X' und durch X' zu g die Parallele g_1 (Bild 43 b).

3. Verschiebung eines beliebigen Vielecks oder Polygons.
Lösung: Man konstruiere die Bildpunkte A', B', C', ... der Eckpunkte des Polygons A, B, C, ... mittels der Translation $\overrightarrow{\tau}$ und verbinde diese Endpunkte durch Strecken (Bild 44).

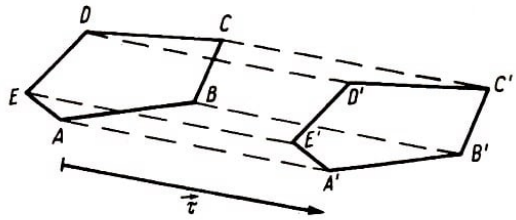


Bild 44

Versuch: Schneide $A'B'C'... = \overrightarrow{\tau}(A, B, C, ...)$ aus und bringe das Bild mit dem Ausgangspolygon zur Deckung! Stelle fest und begründe: Polygone lassen sich durch Translation abbilden.

4. Abbildung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r durch Translation.
Lösung: Man verschiebe mit $\overrightarrow{\tau}(M) \to M'$ und zeichne mit r um M' das Bild des Originalkreises. Begründe die Invarianz von r!

Bemerkung: Setzt sich die geometrische Figur aus Strecken und Kreisbögen zusammen, so gelangt man durch Anwendung der Konstruktionen 2. und 4. stets zum Bild der gegebenen Figur bei einer vorgegebenen Translation.

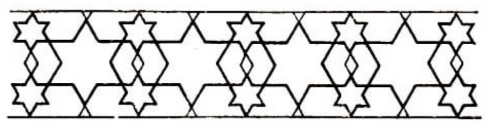
5.1.4.2. Der Streifen

Unter einem Streifen[4] versteht man ein offenes Ebenenstück, das zwischen zwei parallelen Geraden eingeschlossen ist. Den Abstand zwischen den begrenzenden Geraden nennt man die Streifenbreite.

Wird eine Translation in Richtung der Grenzgeraden vorgenommen, so bildet sich der Streifen auf sich selbst ab. Jede zu den Grenzgeraden parallel laufende Gerade des Streifens kann als Gleitlinie angesehen werden.

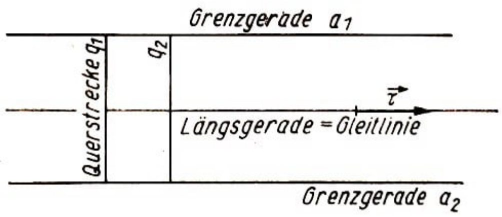
Derartige Streifen begegnen uns in der Umwelt in zahlreicher Form. Bekannt sind die Zierleisten an Häusern oder Bauteilen, die Streifenmuster von Ornamenten, Tapeten, Mosaiken. Auch viele Flechtwerke, die Parkettierungen der Dielen, Türen, Wände entstehen durch Verschiebungen derartiger Streifen. Auch auf den Tonscherben vieler vorgeschichtlicher Funde, in der Kunst vieler Völker findet man solche Streifenornamente, die sich stets in einzelne Elemente (z. B. Bild 45) auflösen lassen.

Bild 45



Mit Hilfe der Streifen lassen sich auch einige für geometrische Konstruktionen wichtige Eigenschaften anschaulich beschreiben. Die in einem Streifen senkrecht zu den Grenzgeraden liegenden Strecken heißen "Querstrecken" oder "Querachsen". Es gelten dann folgende Eigenschaften (Bild 46):

Bild 46



1. Querstrecken am Streifen sind gleich.
2. Ein Streifen schneidet aus parallelen Geraden gleiche Abschnitte heraus.

Es sei ein System von Streifen gleicher Breite a (Bild 47) gegeben. Das kann man stets durch Verschieben des Streifens längs a, d. h. mit $\overrightarrow{\tau}(A_1) = A_2$ usw. erreichen. Dann wird $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = ... = \overline{A_nA_{n+1}}$.
Es ist auch möglich, dies durch Verschieben mit einer anderen Verschiebungsgröße für die Punkte $B_1, B_2, ...$ längs b als Gleitlinie zu erreichen; b kann dabei den Streifen unter einem beliebigen Winkel schneiden.

[4] Für die Betrachtung der geometrischen Eigenschaften an Ornamenten ist sehr zweckmäßig, den Streifen zu benutzen. Aus diesem Grunde werden in diesem Abschnitt die an parallelen Geraden erörterten Eigenschaften im Hinblick auf den Streifen betrachtet.

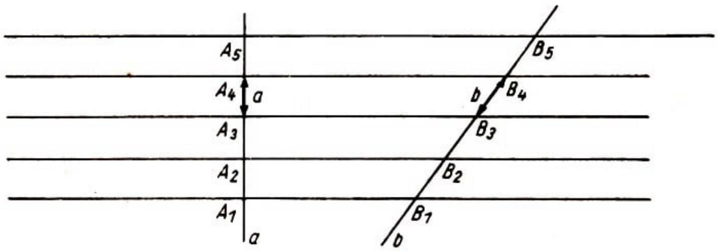


Bild 47

Allgemein folgt daraus, dass gleich breite parallele aneinander grenzende Streifen jede beliebige sie schneidende Gerade in gleiche Teile zerlegen. Besonders wichtig sind jedoch die Winkeleigenschaften am Streifen.

Jede Gerade g, die einen Streifen schneidet, bildet mit seinen Begrenzungsgeraden g_1 und g_2 8 Winkel. Davon sind gewöhnlich 4 spitz und 4 stumpf. Wesentlich ist jedoch die Tatsache, dass jeweils die 4 spitzen und die 4 stumpfen Winkel unter sich gleich sind. Diese Aussage hat den Charakter eines Satzes und muss daher bewiesen werden (vgl. Bild 48).

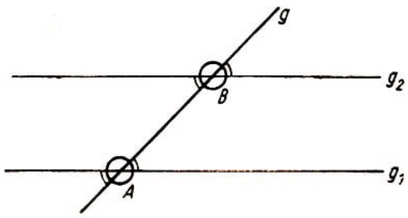


Bild 48

Die spitzen bzw. stumpfen Winkel an demselben Punkt, d. h. mit demselben Scheitel, sind Scheitelwinkel. In Bild 48 liegen im Punkte A und im Punkte B Scheitelwinkel!
Durch Verschiebung $\overrightarrow{T}(\angle(A))$ längs der Gleitlinie g werden die Winkel im Punkte A in die des Punktes B übergeführt. Ferner kann man auch je einen Spitzen und einen stumpfen Winkel als Supplementwinkel auffassen.

Sie sind entweder Nebenwinkel oder werden erst durch Translation längs der schneidenden Geraden zu einem solchen. Es gilt also kurz zusammengefasst:
Winkel an Streifen, die durch Verschiebung aufeinander abgebildet werden, nennt man auch "Stufenwinkel". Winkel, die nach der Translation $\overrightarrow{T}(\angle(A))$ mit den Winkeln bei B Scheitelwinkel bilden, heißen "Wechselwinkel". Winkel, die bei dieser Verschiebung zu Nebenwinkeln werden und auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, bezeichnet man als "entgegengesetzte Winkel".

5.1.5 Konstruktionen mit Hilfe von Translationen (Bewegungskonstruktionen)

Zusammenfassend zu den Abschnitten 5.1.1.-5.1.4. sei noch einmal erwähnt:
Das Wesen der Translation ist darin zu sehen, dass man mit ihr einzelne Teile der Gesamtfigur, wie Strecken, Geraden, Kreise, Streckenzüge, Polygone usw. parallel zu einer Geraden, der Gleitlinie, um eine bestimmte Strecke bewegen kann. Auf diese Weise findet man oft wichtige Punkte.

Weiter kann man vorgegebene Strecken zu einer Figur zusammenrücken, die sich dann leicht konstruieren lässt. Oder man zerlegt eine Figur in einzelne Teile, deren konstruktive Ermittlung keine Schwierigkeiten bedeutet. Auch bei der Übertragung von Lageverhältnissen wird, die Parallelverschiebung angewandt. Die folgenden Beispiele sollen es erläutern.

1. Ein Dreieck soll aus s_b, s_c, h_a konstruiert werden.

Analysis: Es sei (Bild 49) ABC ein Dreieck, in dem $\overline{BD} = s_b$, $\overline{CE} = s_c$ und $\overline{AF} = h_a$ sind. Nun benutzt man BC für $h_a = \overline{AF}$ als Gleitlinie und verschiebt AF längs BC, bis sie durch D geht. Mit anderen Worten, man zieht durch D zu h_a die Parallele.
Das letztere beinhaltet die Konstruktionsvorschrift, während die erste Überlegung auf die Begründung des nachfolgenden Konstruktionsverfahrens hinweist. Dann ist $\overline{DG} = \frac{1}{2}h_a$. Das neuentstandene Dreieck BDG kann nun leicht aus $\overline{BD} = s_b$, $\overline{GD} = \frac{1}{2}h_a$ und dem Winkel $BGD = 90°$ gezeichnet werden.

Nun teilt aber der Punkt $S \in BD$ diese Strecke im Verhältnis 2 : 1. Damit findet man für die Bestimmung des Punktes C folgende Punktmengen:
a) Die Gerade durch B und G.
b) Der Kreis um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_c$,

Dann bestimmen die Punkte C und D die Lage von A, denn es ist $\overline{DA} = \overline{CD}$. Die Konstruktion und Determination führe der Leser als Übung durch!

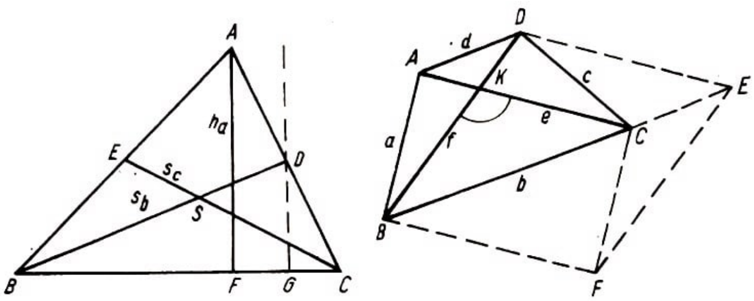


Bild 49,50

2. Ein Viereck ist aus a, c, e, f und $\angle(e, f)$ zu zeichnen (e, f sind die beiden Diagonalen).

Analysis: $ABCD$ (Bild 50) sei das gesuchte Viereck; in diesem sind $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AC} = e$, $\overline{DB} = f$ und $\angle BKC = \angle(e, f)$.
Man verschiebt nun das Teildreieck ADB parallel AC (Gleitlinie) um $\overline{AC}$. Dadurch werden $D \to E, A \to C, B \to F$ und $\angle BDE = \angle BKC$. Ferner wird $CE\#AD$, $CF\#AB$, $EF\#DB$ ($\#$ bedeutet gleich groß in paralleler Lage). Nun kann das Parallelogramm $BDEF$ konstruiert werden. Es lässt sich ohne große Mühe aus $\overline{BD} = f$, $\overline{DE} = e$ und $\angle BDE = \angle(e, f)$ zeichnen. Für den Punkt C gewinnt man folgende Bestimmungslinien:

a) Der Kreis um F mit a,
b) Der Kreis um D mit c.
Es ist aber $CA\#ED$, und somit kann A von C aus gefunden werden.

3. Zwischen zwei gegebenen Kreislinien ist die Strecke $\overline{XY} = a$ parallel zur Zentralen

(Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte) zu legen.

Analysis (Bild 51): A und B seien die beiden Mittelpunkte der gegebenen Kreise, $\overline{XY} = a$ und $\overline{XY} \parallel AB$. Die Linie $\overline{XY}$ lässt sich zeichnen, wenn der Punkt X gefunden ist. Verschiebt man aber den Kreis B längs BA um a bis C, so muss seine Peripherielinie durch X gehen. In dieser Lage kann der Kreis gezeichnet werden, da $\overline{BC} = a$ sein muss.

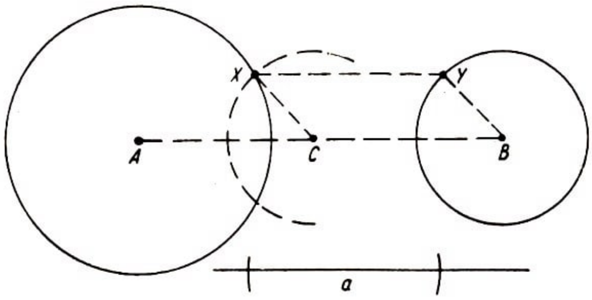


Bild 51

Konstruktion: Man trage auf AB von B aus $\overline{BC} = a$ ab. Um C beschreibe man einen Bogen mit dem Radius des Kreises um B. Dieser schneidet den Kreis um A in X. Nun zeichne man $\overline{XY} \parallel AB$.

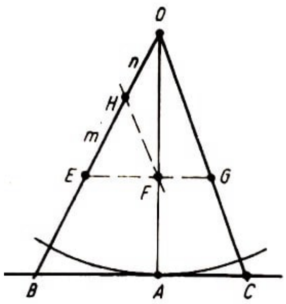


Bild 52

4. An den Bogen des Sektors O ist die Tangente zu legen, so dass ihre von dem Berührungspunkt einerseits und den verlängerten Radien andererseits begrenzten Abschnitte sich wie $m : n$ verhalten.

Analysis: In Bild 52 möge die Strecke $\overline{BC}$ den Forderungen entsprechen. Man ziehe nun OA, eine Gerade, die auf $\overline{BC}$ senkrecht stehen muss. BC wird jetzt durch eine Translation in die Lage von EG gebracht. Dann gilt die Verhältnisgleichung:

$\overline{EF} : \overline{FG} = m : n$. Ist ferner noch $FH \parallel CO$, so findet man $\overline{EH} : \overline{OH} = m : n$.

Die Verschiebung der Linie BC kann immer soweit vorgenommen werden, dass $\overline{HE} = m$ und $\overline{HO} = n$ werden. F ist dann durch zwei geometrische Bestimmungslinien bestimmt:
a) Thaleskreis über $\overline{EO}$ als Durchmesser;
b) Parallele zu $\overline{OC}$ durch H. Die Gerade OF schneidet den Bogen im Punkt A.

Die gesuchte Gerade ist $BC \perp OA$ im Punkte A ($\angle(BC \parallel_A OA) = 90°$).

Konstruktion: Man zeichne $\overline{OH} = n$, desgl. $\overline{HE} = m$. Über $\overline{OE}$ als Durchmesser schlage man den Halbkreis. Dieser schneidet die durch H zu $\overline{OC}$ gezogene Parallele in F. Die Verlängerung von OF trifft den Bogen in A. In A errichte man auf $\overline{OA}$ das Lot $\overline{BC}$, die gesuchte Tangente.

Übungen, die sich mit diesen Hilfsmitteln bewältigen lassen: Konstruiere!

1. $\triangle$ aus a, c, s_b, 2. $\triangle$ aus s_a, h_b, h_c, 3. $\triangle$ aus w_a, h_a, α, 4. $\triangle$ aus s_a, s_b, s_c.

5. Ein gleichschenkliges Dreieck aus $h_b, \angle\alpha$.

6.1. ein Trapez aus b, d, e, f, 6.2. Ein Trapez aus $b, c, d, \angle(e, f)$.

7. Ein Viereck aus $e, f, \beta, \delta, \angle(e, f)$.

8. Ein Rechteck, von dem eine Seite gegeben ist und dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

9. In einem Kreis ist ein Durchmesser gezogen. Auf dem einen Halbkreis liegen die Punkte A und B. Auf dem anderen ist der Punkt X so zu bestimmen, dass AX und BX aus dem Durchmesser eine Strecke a ausschneiden.

10. Gegeben sind die Strahlen AB und CD mit den Endpunkten A und C. Man suche zwei sich berührende Kreisbögen von gleichen Radien, wovon der eine AB in A, der andere CD in D tangiert.

5.2 Die Drehung

5.2.1 Erklärung und Grundbegriffe

Die zweite Art der Bewegung ist die Drehung. Das einfachste Modell einer Drehung bekommt man, wenn man ein Blatt Papier (Ebene E_1) mit einer Nadel auf einen zweiten Bogen (Ebene E_2) feststeckt und dann um diesen Drehpunkt die Ebene E_1 über die andere Ebene hinwegdreht. Die drehbare Sternkarte ist ein schönes Beispiel für die Abbildung einer Ebene auf sich durch Drehung. Bei einer solchen Bewegung bleibt nun ein Punkt fest.
Der Drehpunkt, Mittelpunkt oder Pol ist ein Fest- oder Fixpunkt. Dadurch unterscheidet sich die Drehung ganz wesentlich von der Translation. Bei der Abbildung einer Ebene auf sich durch Translation bleibt kein Punkt in Ruhe. Man unterscheidet also Bewegungen mit und ohne Fixpunkt!

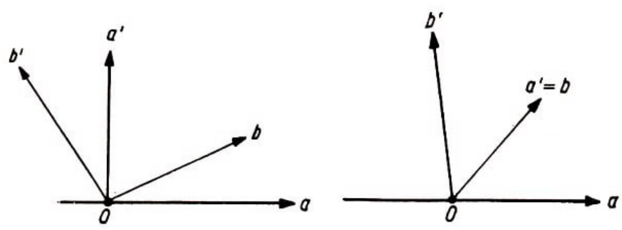
Definition: Eine Bewegung, durch die die Ebene eineindeutig auf sich selbst abgebildet wird, wobei ein Punkt der Ebene unverändert bleibt, heißt Drehung.

Nach dieser Abbildungsvorschrift kann man also mit einer Figur um den Punkt O eine Drehung mit einem beliebig vorgeschriebenen Winkel δ ausführen. Dieser Winkel kann jeden negativen und positiven Wert annehmen.

5.2.2 Grundeigenschaften der Drehung: Abbildungssätze der Ebene

Satz 1: Bei einer Drehung überstreicht jeder Strahl oder jede Halbgerade, die vom Drehpunkt O ausgeht, den gleichen Winkel.

Bild 53,54



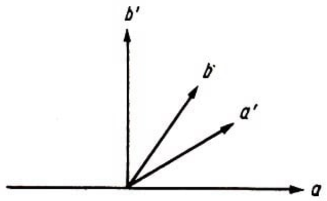
Man betrachtet zwei Strahlen oder Halbgeraden a und b (Bild 53), die vom Drehpunkt O ausgehen. Durch eine Drehung um O mit dem Winkel α gehen sie in die Strahlen a' und b' über. Wir wollen das kurz so ausdrücken, wobei die Drehung durch "D" bezeichnet werde:

$$D_\alpha(a) \to a' \qquad , \qquad D_\alpha(b) \to b'$$

Nun bleibt bei der Drehung wie bei der Verschiebung die Größe eines Winkels fest. Infolgedessen ist $\angle(ab) = \angle(a'b')$.
Es bleibt also zu zeigen, dass a und b um denselben Drehwinkel α gedreht werden. Liegen wie in Bild 53 sowohl der Strahl a' als auch der Strahl b' außerhalb des Winkelbereiches von $\angle(a,b)$, so addiert man zu den beiden Winkeln den Winkel $\angle(ba')$. Dann ist

$$\angle(ab)+\angle(ba') = \angle(aa'), \qquad \angle(a'b')+\angle(ba') = \angle(bb'), \qquad \text{also} \qquad \angle(aa') = \angle(bb')$$

Fällt entweder ein Schenkel des Bildes mit einem Schenkel der Ausgangsfigur zusammen (Bild 54) oder liegt einer etwa nach der Ausführung der Drehung innerhalb des Winkelbereiches von $\angle(ab)$ (Bild 55), so wird “’ der Beweis in gleicher Weise geführt. Dies sei dem Leser als Übung überlassen (auf Drehungssinn oder Drehrichtung achten!).



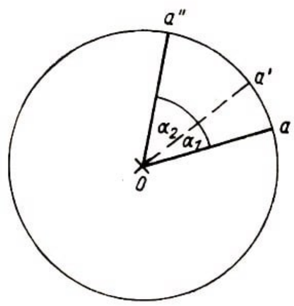
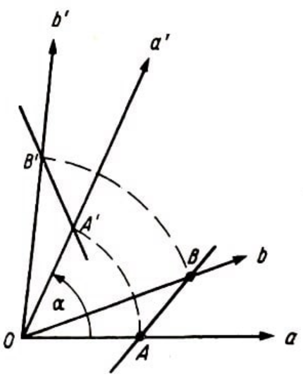


Bild 55,56

Werden mehrere Drehungsabbildungen um den gleichen Fixpunkt hintereinander ausgeführt, so addieren sich dabei (Abb. 56) die Drehwinkel. Damit ist die für die vorliegende Abbildung zulässige Verknüpfungsvorschrift gegeben. Welche Figur beschreibt jeder Punkt des Strahles $(\overrightarrow{Oa})$ in Bild 56, wenn er kontinuierlich um O gedreht wird? Man betrachte Bild 57.



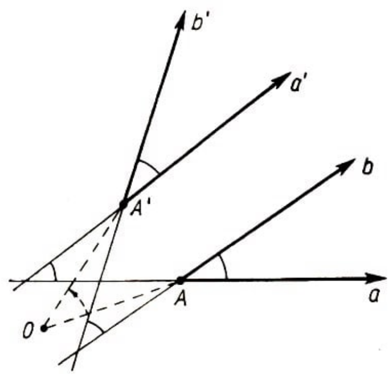


Bild 57,58

Durch die Abbildung $D\alpha(A \in a)$ und $D_\alpha(B \in b)$ erhält man die Punkte $A' \in a'$ und $B' \in b'$. Dabei bleiben die Abstände $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ erhalten, d. h., es ist $\overline{OA} = \overline{OA'}$ und $\overline{OB} = \overline{OB'}$. Beweis? Benutze Bild 56! Daraus folgt der

Satz 2: Bei einer Drehabbildung bleibt der Abstand eines Punktes vom Dreh- oder Fixpunkt erhalten.

Beispiel: Der Winkel $\angle(ab)$ wird durch die Drehabbildung in die Lage $\angle(a'b')$ (Bild 58) gebracht. Dabei bleibt die Winkelgröße (ab) erhalten, d.h. $\angle(ab) = \angle(a'b')$. Durch ähnliche Überlegung wie für Satz 1 findet man die Übereinstimmung der Winkel $\angle(aa')$ und $\angle(bb')$. Bei einer Drehabbildung einer Figur wird jede Gerade der Original- oder Gegenstandsfigur um den gleichen Winkel gedreht. Hierauf beruht eine nützliche Anwendung, die Konstruktion einer Senkrechten zu einer Geraden (Bild 59).

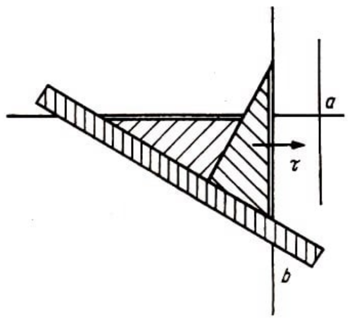


Bild 59

Ein Winkeldreieck wird mit seiner längsten Seite an die Gerade a gelegt. An das Zeichendreieck legt man ein Lineal fest an. Nun dreht man das Winkeldreieck in der Ebene um $90° = \frac{\pi}{2}$, d. h., man legt es mit der anderen Kathete an das Lineal. Eine nachfolgende Verschiebung oder Translation des Dreiecks längs des Lineals bringt das Lot in die gewünschte Lage durch einen gegebenen Punkt auf a.
Diese Eigenschaften lassen sich in den drei nachfolgenden allgemeinen Sätzen (Abbildungssätzen) über die Drehung zusammenfassen:

1. Original- oder Gegenstandspunkt und Bildpunkt liegen auf einem Kreis um den Drehpunkt. Der Drehpunkt ist Fixpunkt und geht daher in sich über.

2. Alle Strahlenpaare vom Drehpunkt zu einem abzubildenden Originalpunkt und seinem Bildpunkt bilden denselben Winkel α, den Dreh- oder Abbildungswinkel.

3. Der Abstand einer Geraden vom Drehpunkt der Bewegung bleibt bei der Drehungsabbildung unverändert.

5.2.3 Drehung und Verschiebung

Auf den bereits erwähnten Unterschied zwischen Drehung und Verschiebung möge noch einmal eingegangen werden. Bei einer Drehung gleitet ein jeder Kreis, dessen Mittelpunkt im Drehzentrum liegt, auf sich selbst. Diese konzentrischen Kreise kann man mit den Bahngeraden einer Verschiebung vergleichen, die auch auf sich selbst gleiten. Doch besteht noch ein wesentlicher Unterschied.

Bei einer Bahngeraden gleitet jeder Punkt A und nimmt stets neue Lagen ein, wenn er sich vom Ausgangs- oder Gegenstandspunkt entfernt. Bei der Drehabbildung kehrt aber der Punkt A nach einer vollen Umdrehung um den Winkel 2π in die Ausgangslage zurück.

Es ist dann $A = A'$ oder auch $A^\alpha \equiv D_\alpha(A) = A$ (mit $\alpha = 2\pi$). Man bezeichnet daher in der Geometrie der Ornamentik die Kreislinie auch als eine "Wiedersehens- oder Rückkehrlinie".

Verschiebt man eine Gerade auf sich selbst, dann wird die Strecke $\overline{AB} \in a$ auf die Strecke $\overline{A'B'}$ abgebildet. $\overline{AB}$ ist dann kongruent zu $\overline{A'B'}$, geschrieben $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Welche Verhältnisse liegen bei der Drehabbildung vor? Dazu zeichnen wir uns auf durchsichtigem Zeichenpapier (Transparentpapier) als bewegliche Ebene ε_1 einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und legen diesen auf einen gleich großen festen Kreis in einer zweiten Ebene ε_2. Ein Bogen $\overset{\frown}{AB}$ geht, wie wir dann sehen, bei einer Drehung in den gleich großen $\overset{\frown}{A'B'}$ über.

Umgekehrt folgt daraus: Sind $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{A'B'}$ zwei gleich große Bögen, dann können sie stets als aus einer Drehabbildung entstanden sein und sind deckungsgleich.

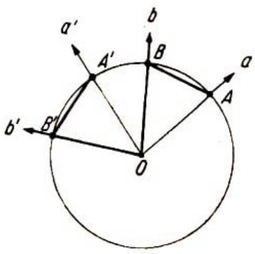


Bild 60

Zeichnet man weiterhin (Bild 60) zwei gleiche Winkel mit dem Scheitel im Mittelpunkt O, so schneiden sie aus dem 4 Kreis die gleichen Bögen heraus. Bei einer Drehungsabbildung, die die Winkel zur Deckung bringt, stellen auch die den Winkeln entsprechenden Bögen homologe Stücke dar.

Demzufolge sind bei gleichen Bögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{A'B'}$ auch die zugehörigen Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ sowie die Sektoren oder Ausschnitte (OAB und $OA'B'$) deckungsgleich. Das führt auf eine bekannte Kreiseigenschaft.

Winkel, deren Scheitel im Mittelpunkt O des Kreises liegen, werden Zentriwinkel genannt: Somit kann man zusammenfassen: Zu gleichen Zentriwinkeln gehören gleiche Bögen, gleiche Sehnen und gleiche Kreisausschnitte.

5.2.4 Drehungsabbildung einer Geraden

Wird auf eine Gerade a eine Drehungsabbildung ausgeübt, so bewegen sich alle Punkte auf der Geraden a auf Kreisen, die konzentrisch zueinander liegen; denn sie besitzen alle den gleichen Drehungsmittelpunkt O. Ferner bleibt (Abbildungssatz 3 aus 5.2.1.) der Abstand vom Drehpunkt erhalten, und demzufolge bewegt sich auf jedem Kreis ein Punktpaar mit gleicher Distanz oder Entfernung vom Drehpunkt.

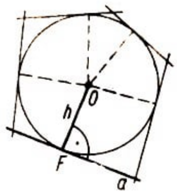


Bild 61

Betrachte Bild 61! Auf dem gezeichneten Kreis bewegt sich der Fußpunkt F des Abstandslotes h von der Geraden a. Diese Gerade hat bei der Drehung in jeder Lage mit diesem Kreis einen Punkt gemeinsam. Die übrigen Punkte der Geraden a bleiben stets außerhalb dieses Kreises. Grund: Größere Entfernung vom Drehpunkt als der Fußpunkt des Lotes! Die Gerade berührt den Kreis nur in einem Punkt, dem Berührungs- oder Stützpunkt.

Die Gerade in diesem Punkt nennt man in bezug auf den Kreis die Berührungsgerade oder Tangente. Das Abstandslot ist der Berührungsradius. Dieser steht auf der Tangente senkrecht. Wird diese Tangente um den Mittelpunkt O ihres Berührungskreises gedreht, so gleitet sie an diesem Kreis als Tangente.

Weiter folgt: Eine jede durch den Drehpunkt O laufende Gerade a, welche eine andere Gerade g in S schneidet, dreht sich mit der Geraden g unter dem festen, unveränderlichen (= invarianten) Schnittwinkel mit (Bild 62).

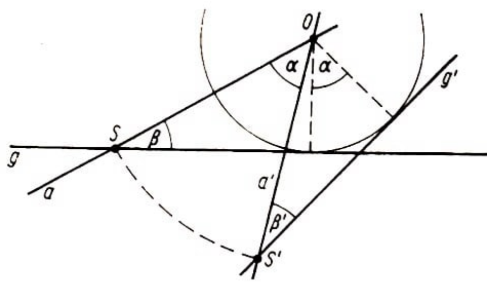


Bild 62

5.2.5 Mehrfache Abbildungen und die inverse Abbildung

Wird das Bild einer Ausgangsfigur als neue Ausgangsfigur betrachtet und darauf nochmals die Abbildungsvorschrift angewendet, so entsteht eine mehrfache Abbildung. Aus der bereits eingeführten Additionsvorschrift für Winkel ergibt sich die Konstruktionsanweisung für die Drehungsabbildung:
Eine mehrfache Drehungsabbildung bei gleichem Drehpunkt O und verschiedenen Drehwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, ...$ lässt sich durch eine Drehungsabbildung mit dem Winkel $\alpha_1 + \alpha_2 + ...$ um den Mittelpunkt O ersetzen.

Nimmt man zuerst eine Drehung um den Winkel α vor, darauf eine um den entgegengesetzten Winkel $-\alpha$, so erhält man als Bild die erste Ausgangsfigur. Fällt nach der Abbildung das Bild mit der Ausgangsfigur zusammen, so heißt eine solche Abbildung eine "Identität".
Beispiele: Drehung um $\alpha = 0°$, $\alpha = 2\pi = 360°$ u. a., aber auch Hintereinanderausführung der Drehungen um α und $-\alpha$.
Zwei Abbildungen, die zusammen die Identität ergeben, heißen auch noch umgekehrte oder inverse Abbildungen, z. B. $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 320°$. Man schreibt auch dafür: $D_{40}(A) \to A' \equiv A^{40°}$; $D_{320}(A^{40°}) \to A'' \equiv A^{40°+320°} = A$.

Dabei ist zu beachten, dass die Drehung um $320°$ gleich der Drehung um $-40°$ ist; denn nicht der Weg der Drehung ist maßgebend, sondern die Endlage nach Ausführung der Drehung. Man schreibt dafür: $\angle 320° \equiv \angle -40°$ (mod $360°$) (lies: $\angle 320°$ ist kongruent

$\angle -40^\circ$ modulo 360°), d.h., zu einer Drehung kann man beliebig oft 360° addieren, ohne dass sich das Bild ändert.

5.2.6 Konstruktionen mit Hilfe von Drehungen

5.2.6.1. Grundkonstruktionen der Drehung

1. Durch Drehungspunkt, Betrag = Größe des Drehungswinkels und durch den Drehsinn ist eine Drehungsabbildung eindeutig festgelegt. Mit diesen Angaben $(O, \alpha, \rightarrow)$ kann zu jedem Punkt A der Punkt A^α, d. h. die Abbildung konstruiert werden. Für die Konstruktion sind folgende Tatsachen bekannt:

a) Der Punkt A bewegt sich auf dem Kreis um O mit dem Radius $\overline{OA}$.
b) Der Strahl OA wird in vorgegebener Richtung um den Winkel gedreht.

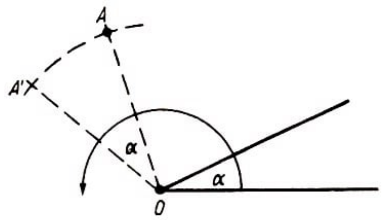


Bild 63

Dazu Zeichnet man den Kreis (Bild 63) um O mit dem Radius $r = \overline{OA}$ und trägt in O den Winkel α an $\overline{OA}$ der vorgegebenen Richtung an. Der zweite Schenkel schneidet dann den Kreis in dem Bildpunkt $A' = A^\alpha$.

2. Zu der Geraden a ist die Bildgerade a' zu konstruieren.
Lösungen:
a) Man bilde 2 beliebige Punkte von a ab (Bild 64).

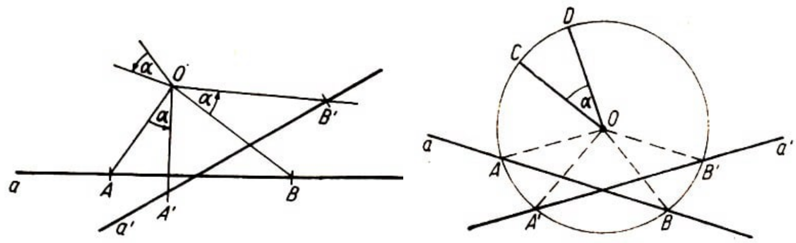


Bild 64,65

b) Man wähle zwei von O gleich weit entfernte Punkte auf a; diese liegen auf demselben Kreis um O (Bild 65). Dieser Weg ist die bequemste Konstruktion. Man kann diesen einen Kreis um O gleichzeitig zur Abtragung des Drehungswinkel α, benutzen. Der Vorteil dieser Lösung liegt im wesentlichen darin, dass man nur einen Kreis benötigt und die Hilfslinien $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$; $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$ ganz fortlassen kann. Es wird nur der Bogen $\overset{\frown}{CD}$, genauer die Sehne $\overline{CD}$ von A bzw. von B auf dem Kreis abgetragen.

c) Man bilde das Abstandslot (Bild 66) ab und errichte im Endpunkt die Senkrechte = Tangente.

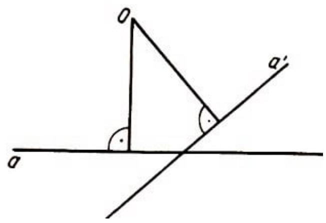


Bild 66

d) Man legt eine Hilfsgerade a durch O, dann wird diese und ihr Schnittpunkt S mit g abgebildet. Dann trägt man in $S' = S^\alpha$ an $a' = a^\alpha$ den Schnittwinkel an und erhält g' (vgl. Bild 62).
Mit Hilfe dieser Konstruktionen kann man nun ohne Mühe ebene geradlinige Figuren (d.h. Polygone) um einen Punkt O drehen. Dazu braucht man nur zu den Ecken des Vielecks $ABCD$ ... die Bildpunkte A^α, B^α, C^α ... zu konstruieren und diese Bildpunkte miteinander zu verbinden.
Die Deckungsgleichheit solcher Polygone geht aus den Sätzen und Eigenschaften in 5.2.1.-5.2.5. hervor.

3. Winkel einer Drehgeraden mit einer festen Geraden.

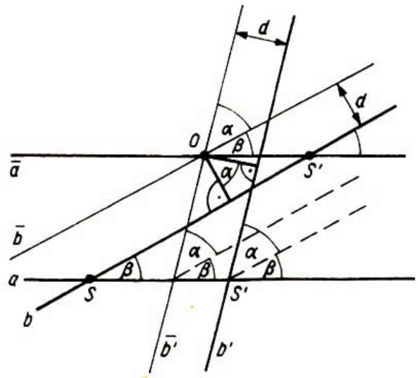


Bild 67

In Bild 67 sei a eine feste Gerade; b sei eine Gerade, die um den Punkt O gedreht wird. Der Schnittpunkt von b mit a ist S. Wird b gedreht, so bewegt sich der Schnittpunkt S auf a. In der physikalischen Bewegungslehre oder Kinematik drückt man diese Zusammenhänge so aus:
Die Drehgerade b erzeugt auf der festen Geraden a den laufenden Schnittpunkt S. Dabei gilt für den Schnittwinkel an S, $\angle(a, b)$, der Satz:

Die Änderung des Winkels einer Drehgeraden a mit einer festen Geraden b ist gleich dem Drehwinkel α.

Zum Beweis lege man durch den Drehpunkt O zu a und b zwei Hilfsparallelen $\bar{a}$ und $\bar{b}$. Aus der Gleichheit der Stufenwinkel in O, S und S' folgt die Behauptung.
Dieser Satz kann dazu verwandt werden, den Drehwinkel zu bestimmen, wenn er durch direkten Schnitt mit den gedrehten Strecken nicht ermittelt werden kann. Man spricht dann auch von einer sog. Hindernisaufgabe. Dabei kann entweder der gesuchte Punkt überhaupt unzugänglich sein oder das Papier, auf dem gezeichnet wird, reicht für die Konstruktion nicht aus. Die beiden Strecken, deren Drehwinkel zu ermitteln ist, durch den sie zur Deckung gelangen, seien in Bild 68 a und a'.

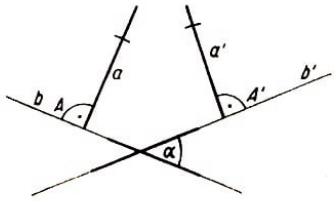


Bild 68

In den zugänglichen Endpunkten der ursprünglichen und gedrehten Strecke A und $A' = A^\alpha$ errichte man die Lote b und b'. Beide schneiden sie sich unter dem gesuchten Drehwinkel α.
Ist die Aufgabe eindeutig? Diskutiere! Müssen die Lote unbedingt in den zugänglichen Endpunkten errichtet werden?

Hier mögen folgende elementare Konstruktionsaufgaben zur Übung angeschlossen werden:

1. Bilde das Dreieck ABC durch Drehung ab.
a) O liege außerhalb $ABC; \alpha = 65°$, positiv.
b) O liege innerhalb ABC; $\alpha = 125°$, negativ.
c) $O = A$ oder B oder C; $\alpha = +240°$.
d) O in einer Seitenmitte, z. B. von $\overline{AB}$ oder $\overline{BC}$; $\alpha = -55°$.
e) Man löse dieselben Aufgaben für ein beliebiges Polygon, z.B. Viereck, Rechteck u. ä.

2. Man konstruiere
a) zu einem gegebenen Quadrat das um den Schnittpunkt der Diagonalen um den Winkel $+45°$ gedrehte.
b) zu einem gleichseitigen Dreieck das um den Schnittpunkt der Symmetrieachsen um $\alpha = +60°$ gedrehte Dreieck.

3. Bilde ein beliebiges Viereck $ABCD$ (sämtliche Seiten beliebig!) durch Drehung um $\alpha = +75°$ ab und wähle a) $C = O$; b) $O \in AB$; c) $O \in$ Verlängerung einer Diagonale.

4. Man bilde die beiden sich schneidenden Geraden a, b durch Drehung um $\alpha = +85°$ ab. Wähle a) $O = S \equiv a \cap b$; b) $O \neq S \equiv a \cap b$ ($S \equiv a \cap b$ bedeutet, dass S Schnittpunkt von a und b ist).

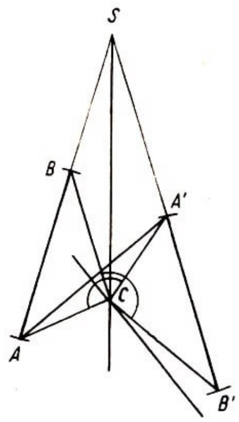


Bild 69

Aus den Eigenschaften des Mittellotes und der Winkelhalbierenden folgt:

a) Ein Punkt A kann mit einem anderen Punkt A' zur Deckung gebracht werden, indem er um irgendeinen beliebigen Punkt des Mittellotes der Strecke AA' gedreht wird.

b) Eine Gerade a kann mit einer sie schneidenden Geraden a' zur Deckung gebracht werden, wenn sie um irgendeinen Punkt der Winkelhalbierenden eines der von a und a' gebildeten Winkels gedreht wird.
Darauf beruhen folgende Übungen:

1. Eine gegebene Strecke $\overline{A'B'}$ ist durch Drehungsabbildung mit der ihr gleichen nichtparallelen Strecke $\overline{AB}$ zur Deckung zu bringen.

Konstruktion (Bild 69) : Man verlängere $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ bis zu ihrem Schnitt in S. Auf $\overline{AA'}$ errichte das Mittellot und halbiere $\angle ASB'$. Die Winkelhalbierende trifft das Lot in C, dem gesuchten Drehpunkt. Vergleiche Vergleiche hier die Hindernisaufgabe auf S. 41.

2. Ein gegebener Winkel BAC (Bild 70) ist durch Drehung mit dem ihm gleichen beliebig liegenden Winkel $B'A'C'$ zur Deckung zu bringen.

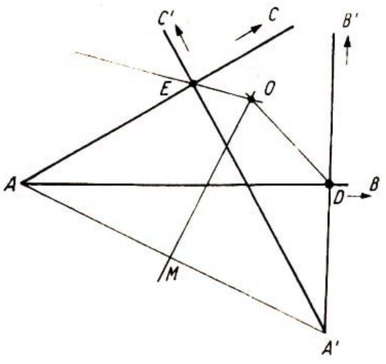


Bild 70

Konstruktion: Halbiere Winkel ADB', errichte auf AA' das Mittellot, Schnitt der Winkelhalbierenden mit dem Mittellot ergibt Drehpunkt.
Beachte: Das Mittellot kann auch durch die Winkelhalbierende des Winkels $A'EC$ ersetzt werden. Benutze die Tatsache zur Kontrolle der Konstruktionsgenauigkeit! Weiter ist gegebenenfalls bei ungünstiger Lage der Schenkel des einen Winkels ein Schenkel vor der Drehungsabbildung umzuklappen (zu Spiegeln). Vgl. weiter unten.

3. Durch welche Abbildung (Bewegung) werden gleiche, parallele Strecken oder Winkel mit parallelen Schenkeln zur Deckung gebracht? (Hinweis: je zwei Fälle!)

5.2.6.2. Anwendung der Drehungsabbildung bei Konstruktionsaufgaben

Eine Drehung um einen bestimmten Winkel, der sich aus der jeweils gegebenen Aufgabe ergibt, kann oft mit großem Vorteil zur Lösung einer Konstruktionsaufgabe benutzt werden. Sind in der gesamten Figur Teile kongruent, so können sie durch Drehung zur Deckung gebracht werden.
Es soll hier noch erwähnt werden, dass Drehungsabbildungen auch angewendet werden können, wenn Teile der Gesamtfigur einander ähnlich sind. Durch die Drehung kann man die entsprechenden Teile in solche Lagen bringen, dass das Drehungszentrum Mittelpunkt eines Strahlenbüschels wird.
Dabei ist aber zu beachten, dass die homologen Stücke (= gleichliegenden Stücke!) der beiden Figuren in gleichem Drehungssinn folgen. Man wird zwei große Aufgabengruppen unterscheiden:

1. Der Drehungsmittelpunkt ist gegeben,
2. der Drehungsmittelpunkt ist nicht bekannt.

Allgemein gilt, das Drehungszentrum zweier deckungsgleicher oder ähnlicher Figuren

ist dasjenige zweier entsprechender oder homologer Strecken. Daher wendet man bei größeren Konstruktionsaufgaben die Drehungsabbildung an zur Bestimmung wichtiger Punkte. Oft bestimmt der abgebildete oder gedrehte Teil einer Figur mit dem in Ruhe gebliebenen diese Punkte.
So liefert die Bestimmung eines Drehungsmittelpunktes oft die Größe von zur Konstruktion erforderlichen Winkeln.

Einfach ist die Bestimmung des Drehungsmittelpunktes von gleichen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$, wie im vorangegangenen Abschnitt als Grundkonstruktion angegeben wurde.
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ seien nun ungleich lang. Der Drehungsmittelpunkt, der zugleich auch der Mittelpunkt des die Strecken tragenden Büschels ist, kann dann auf folgende Weise gefunden werden:

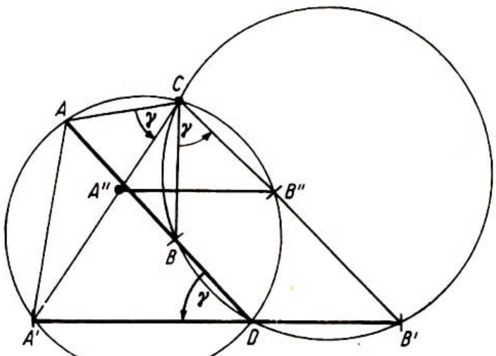


Bild 71

AB schneide $\overline{A'B'}$ im Punkte D. Ist nun C (vgl. Bild 71) das gesuchte Zentrum der Drehabbildung, dann muss die Bedingung $\angle ACA' = \angle BCB' = \angle ADA'$ erfüllt sein. Daraus folgt aber:
C liegt auf den Kreisen $AA'D$ und $BB'D$ und ist daher der zweite Schnittpunkt beider Kreise. Die neue Lage für $\overline{AB}$ ist dann $\overline{A''B''}$.

Es seien zu zwei Kreisen O und O' die beiden Drehungsmittelpunkte gegeben. Gesucht werden die beiden Schnittpunkte S und S' der äußeren bzw. inneren gemeinsamen Tangenten. Über die Strecke $\overline{SS'}$ als Durchmesser sei ein Kreis gezeichnet. Dann erscheinen von jedem Punkt des Umfanges dieses Kreises die beiden gegebenen Kreise unter dem gleichen Winkel.
Der Kreis über $\overline{SS'}$ ist also die geometrische Bestimmungslinie des Drehungsmittelpunktes beider Kreise. Eine wohlbestimmte Stelle oder Lage nimmt dieser Drehungsmittelpunkt jedoch erst ein, wenn dem Punkte A der einen Peripherie genau der Punkt A' der Peripherie des zweiten Kreises entspricht.
Ein solcher kann aber, wie oben genauer erläutert wurde, mit Hilfe der Radien $\overline{OA}$ und $\overline{O'A'}$ gefunden werden. Sind die Kreise um O und O' gleich, dann geht die Bestimmungslinie in das Mittellot auf $\overline{OO'}$ über.

Der Drehungsmittelpunkt für zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks ist auch der für die beiden anderen Seiten! Beweis!
Die folgenden Aufgaben mögen die allgemeinen Zusammenfassungen näher erörtern.

1. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Ecken auf drei Parallelen liegen.

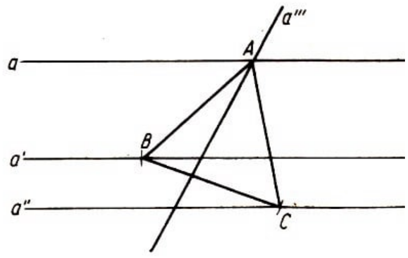


Bild 72

Analysis: In Bild 72 seien $a \parallel a' \parallel a''$ und ABC ein gleichseitiges Dreieck. Mit dem Dreieck ABC lässt sich eine Parallelverschiebung längs der Parallelen vornehmen. Daher kann eine Ecke des gesuchten Dreieckes ABC, beispielsweise B, beliebig gewählt werden.
Wird nun Dreieck ABC um B als Drehungsmittelpunkt um $60°$ gedreht und wird bei dieser Drehung durch die Ecke C die Parallele a'' mitgenommen, so kommt BC in die Lage von BA und a'' nach a'''. Der Punkt A wird durch a und die um $60°$ gedrehte Parallele a'', d. h. a''' bestimmt. C liegt auf a'' und zugleich auf dem Kreis um B mit $r = BA$. Die Konstruktion und Konstruktionsbeschreibung führe der Leser zur Übung durch!

2. Es seien zwei gleiche Kreise mit den Mittelpunkten O und O' gegeben. Auf dem Umfang des einen Kreises liegt der Punkt A, auf dem anderen A'. Auf der Peripherie der beiden Kreise sollen die Punkte X auf dem Kreise um O, und X' auf dem Kreis um O' so ermittelt werden, dass der Bogen $\overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{A'X'}$ und die Strecke $\overline{XX'} = a$ werden.

Analysis: Beide Kreise werden als kongruente Figuren aufgefasst. In ihnen entsprechen A und A' sowie O und O' einander. Daher müssen auch X und X' homolog sein. Wird nun der Drehungsmittelpunkt C der beiden Kreise bestimmt, so wird nach der Drehung um C mit ACA' die Figur O mit der um O' zusammenfallen. Somit sind $CX = CX'$ und ebenfalls $\angle XCX' = \angle ACA'$.

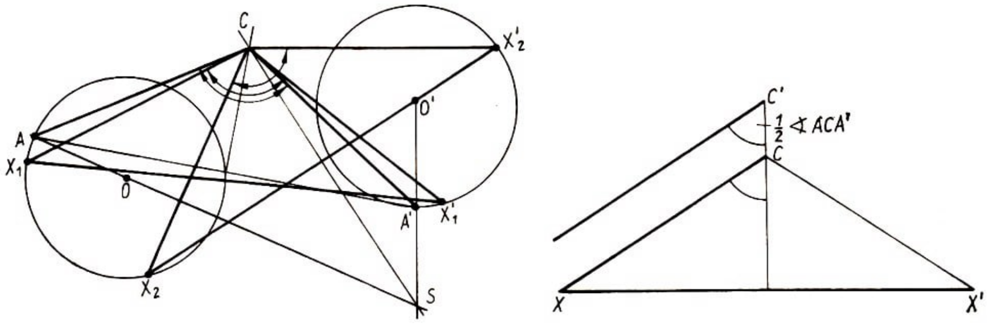


Bild 73a,b

In einer Nebenfigur (Bild 73 b) kann das gleichschenklige Dreieck XCX' aus $XX' = a$ und $\angle XCX' = \angle ACA'$ konstruiert werden.
Diese Teilaufgabe ergibt als Lösung die Länge der Schenkel CX und CX'. Damit wird auch X und X' ermittelt (Bild 73 a).

Konstruktion: Zeichne die gegebenen Kreise um O und O' mit $r = r'$. Gib Punkt A und A' beliebig an! Bestimme den Drehungsmittelpunkt C : Verlängere AO und $A'O'$

bis zum Schnitt S! Ermittle die Winkelhalbierende von $\angle ASA'$. Ermittle das Mittellot auf $\overline{AA'}$!
Der Schnitt der Winkelhalbierenden zu $\angle ASA'$ und des Mittellotes auf $\overline{AA'}$ ergibt C. Trage $\frac{1}{2}\angle ACA'$, d.h. den halben Drehungswinkel am Mittellot auf $\overline{XX'} = a$ an beliebiger Stelle C' an!

Verschiebe den freien Schenkel des Winkels parallel, bis er durch den Punkt X geht; $\overline{XC}$ ist dann die gesuchte Strecke. Kreis um C mit $\overline{XC}$ schneidet die gegebenen Kreise in X_1 und X_1' bzw. X_2 und X_2'; $\overline{X_1X_1'}$ bzw. $\overline{X_2X_2'}$ ist dann $= a$.

Aufgaben, die mit Hilfe der Drehung ausgeführt werden können:

1. Gegeben sind der Kreis um O, eine Gerade l und zwischen beiden ein Punkt A. Durch A soll eine den Kreis in X und die Gerade l in X' schneidende Gerade gezogen werden, so dass $\overline{AX} = \overline{AX'}$ ist.

2. Einem Quadrat ist ein Dreieck einzuschreiben, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, so dass eine Ecke des Dreiecks in eine Ecke des Quadrates fällt.

3. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Eckpunkte auf den Umfängen dreier konzentrischer Kreise liegen.

4. Ein gleichseitiges Dreieck ist zu konstruieren, dessen Ecken auf 2 gegebenen Kreisen liegen, eine davon in einem gegebenen Punkt!
Hinweis zur Lösung: Benutze die Eigenschaften von Abschnitt 5.3.6.2.

5.3 Die Symmetrie

5.3.1 Die Zentralsymmetrie; die Drehung um $180°$

Eine besonders wichtige Art von Drehungen bilden die mit dem Drehungswinkel um $180° = \pi$. Wird ein Strahl um den Winkel π um seinen Anfangspunkt gedreht, so nimmt er die entgegengesetzte Richtung ein.
Eine Drehabbildung um den Winkel $180°$ ist durch ihr Zentrum Z (Bild 74) eindeutig bestimmt. Für sie gelten die folgenden Abbildungssätze:

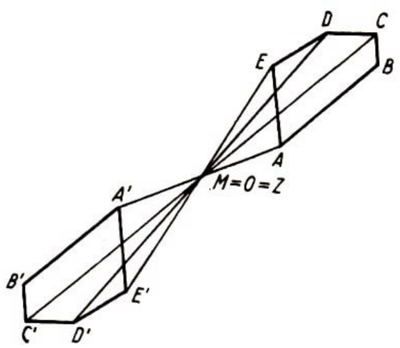


Bild 74

1. Die Verbindungsstrecke vom Original- und Bildpunkt geht durch das Zentrum Z und wird im Zentrum Z halbiert.
2. Originalgerade und Bildgerade sind einander parallel.

3. Jede Strecke wird in eine gegensinnige, d.h. entgegengesetzt orientierte parallele strecke abgebildet.

Es ist also für diese Abbildung charakteristisch, dass Originalpunkt und Bildpunkt auf einer Geraden liegen, die durch das Zentrum Z hindurchgeht. Daher heißt diese Abbildung auch eine punktsymmetrische Abbildung.
Ferner sind vom Zentrum aus nach Abbildungssatz 2 Bild- und Originalpunkte gleich weit entfernt, deshalb ist auch der Name Punktspiegelung üblich.

5.3.2 Die Grundkonstruktionen der Punktspiegelung

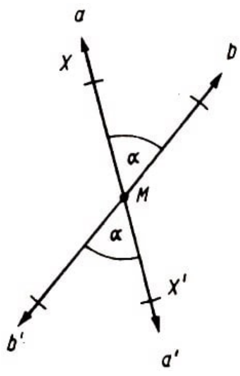


Bild 75

Werden zwei Strahlen a und b (Bild 75), welche von einem Drehungszentrum Z ausgehen, um $180°$ gedreht, so geht der von ihnen aufgespannte oder bestimmte Winkel in den Scheitelwinkel über. Dieser wird von den Bildstrahlen a' und b' aufgespannt. Dabei ist es gleichgültig, ob die Drehung im positiven oder negativen Sinn vorgenommen wird.

X sei nun ein beliebiger Punkt der Ebene. M sei in dieser Ebene der Drehungsmittelpunkt. Wird auf den Punkt X die Punktspiegelung angewendet, so geht die Strecke $\overline{MX}$ in $\overline{MX'}$ über. Die Strecke $\overline{MX'}$ hat dabei zwar die Orientierung geändert, jedoch blieb ihre Richtung und Länge invariant: $\overline{MX} = \overline{MX'}$.

Eine Gerade a geht durch Punktspiegelung in a' über. Eine jede beliebige Gerade (Bild 76) durch M trifft a und a' in entsprechenden Punkten, für die $D^{180°}(X) = X'$ und umgekehrt gilt.
Wird durch M zu a eine Parallele g konstruiert, so geht diese bei einer Punktspiegelung in sich über. Sie ist also eine der Fixgeraden dieser Abbildung. Außer ihr sind auch alle durch M hindurchgehenden Geraden für die Abbildung Fixgeraden.

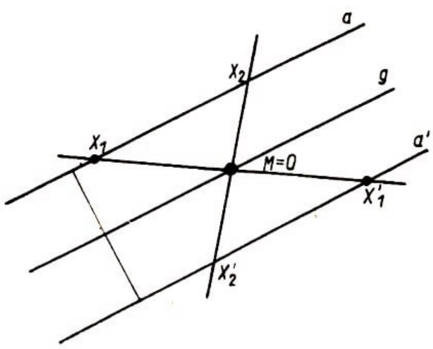


Bild 76

Dass eine Punktspiegelung D^π durch ihr Zentrum M oder Z oder O eindeutig bestimmt ist, wurde schon oben erwähnt. So erhält man also zu jedem beliebigen Punkt $X \in a$ den Bildpunkt $X' \in a'$, indem man die Gerade MX zeichnet und auf dieser von M aus die Strecke $\overline{MX}$ nach der anderen Seite anträgt. Der Endpunkt ist der gesuchte Bildpunkt X'.

Soll zu einer Geraden a ihr Bild a' mit Hilfe der Punktspiegelung gefunden werden, so

muss man auf a zwei Punkte X_1 und X_2 wählen. Zu diesen konstruiert man dann in bekannter Weise X_1' und X_2', deren Verbindungslinie nach dem Verknüpfungsgrundsatz der Geometrie dann die gesuchte Bildgerade darstellt.
Auch so lässt sich diese Konstruktion ausführen: Man nimmt auf a einen Punkt X an, zu diesem sucht man X' und konstruiert zu a durch X' die Parallele. Sie ist die gesuchte Bildgerade a' nach Abbildungssatz 3.

Mit Hilfe dieser Grundkonstruktion kann auch ohne Schwierigkeit die zu einer geradlinigen Figur gehörige punktgespiegelte Bildfigur gefunden werden.

1. Lösung: Man verbindet die Punkte der Figur mit dem Drehungszentrum und verlängert die Verbindungsstrecken um sich selbst (vgl. Bild 74).

2. Lösung: Zu einem Punkt A der gegebenen Figur konstruiert man den entsprechenden Bildpunkt A'. Die übrigen Punkte findet man durch Zeichnen der Parallelen zu den Seiten der gegebenen Figur.

Für die Aufgabe wurde eine geradlinige Figur angenommen. Liegt eine krummlinige Figur vor, so wird in gleicher Weise, gegebenenfalls mit Hilfspolygonen, konstruiert; man denke aber daran, dass hier nur eine genäherte Figur gefunden wird.

5.3.3 Punktspiegelung und Mittelpunkt einer Figur

Die Drehung um π erlaubt es, eine Erklärung für den Begriff des Mittelpunktes einer Figur zu geben. Bei einem Kreis und auch bei einer Strecke ist klar, was unter dem Wort "Mittelpunkt" zu verstehen ist, jedoch die Frage, ob z. B. ein Quadrat, ein Parallelogramm, ein regelmäßiges oder verschobenes Sechseck, eine Ellipse oder ein beliebiges Oval, d. h. eine geschlossene Eilinie, einen Mittelpunkt haben, wird unsicher beantwortet.

Der Grund ist wohl darin zu sehen, dass man von einem Kreis ausgeht und daher erwartet, dass der Mittelpunkt von jedem Punkt der Figur gleich weit entfernt ist. Legt man diese Auffassung für die Erklärung des Mittelpunktes zugrunde, so hätte nur der Kreis einen Mittelpunkt. Wird aber eine Figur und ihr durch Punktspiegelung entstandenes Bild als eine Figur aufgefasst, so erhält man folgende Definition:

Eine Figur heißt zentralsymmetrisch bezüglich eines Punktes, wenn sie bei einer Drehung um $180°$ um diesen Punkt mit sich selbst zu Deckung kommt. Das Zentrum dieser Symmetrie ist der Mittelpunkt, die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte heißen Durchmesser.

Der Mittelpunkt hat also die bezeichnende Eigenschaft, dass jeder Durchmesser in ihm halbiert wird. Die Durchmesser in einer Figur sind aber im allgemeinen verschieden lang. Auch das sei erwähnt: Eine Figur braucht durchaus nicht stets in sich geschlossen zu sein, einzelne geradlinige oder auch krummlinige Zweige können zusammen für sich eine zentralsymmetrische Figur bilden (Bild 77).
Folgende bisher betrachteten Figuren sind zentralsymmetrisch:

1. eine Strecke bezüglich ihres Halbierungspunktes,

2. zwei sich schneidende Geraden bezüglich ihres Schnittpunktes,

3. zwei Parallelen bezüglich des Mittelpunktes einer jeden Querstrecke.
In welchen geometrischen Bestimmungslinien kam dies zum Ausdruck?

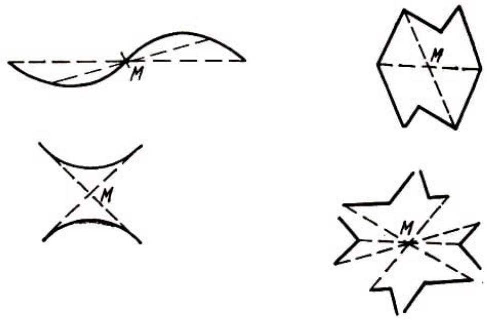


Bild 77

5.3.4 Die Spiegelung

5.3.4.1. Die ebene Spiegelung und die axiale Symmetrie.

Spiegelt sich ein Bauwerk an einem Wasserspiegel oder ein Mensch am Spiegel in seiner Wohnung, so entsteht entweder unter dem Wasserspiegel oder hinter dem Spiegel ein Bild, das mit dem Urbild in Größe und Gestalt übereinstimmt. Allerdings bemerkt man bei gleichzeitiger Betrachtung von Original und Bild einen Unterschied, vielleicht eine Eigentümlichkeit: Oben und unten bzw. links und rechts sind vertauscht.

Diese gegenseitige Zuordnung von Gegenstand und Bild nennt man Symmetrie zur Ebene des Spiegels, die Abbildung selbst wird die Spiegelung genannt. Aber auch in der Ebene allein kann man eine Spiegelung erzeugen. Wird ein ebener Spiegel senkrecht auf die Zeichenebene gestellt und zeichnet man vor dem Spiegel ein Bild, so entsteht in der Zeichenebene hinter dem Spiegel ein Bild in gleicher Größe (Bild 78).

Aber auch hier sind die Seiten vertauscht. Man nennt eine solche Abbildung in der Ebene eine ungleichsinnige Abbildung oder Spiegelung an einer Geraden, d. h. an der Schnittgeraden von Spiegel- und Zeichenebene. Die Abbildung zeigt weiter:

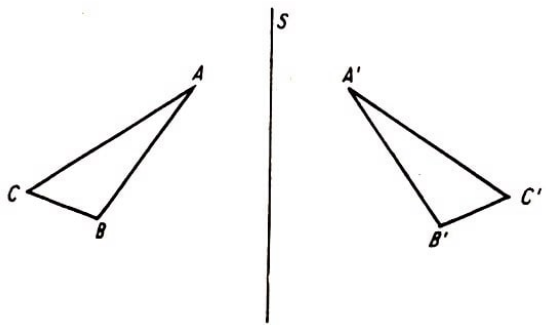


Bild 78

Eine Spiegelung lässt sich auch dadurch erzeugen, dass man Figuren um eine Achse (Symmetrieachse) um 180° herumklappt (vgl. das Umblättern in einem Buch). Dabei bleibt die Achse in Ruhe, sie ist also eine Fixgerade. Jeder andere Punkt dagegen, der nicht auf der Achse liegt, beschreibt einen Kreisbogen von 180° in einer zur Achse senkrechten Ebene.

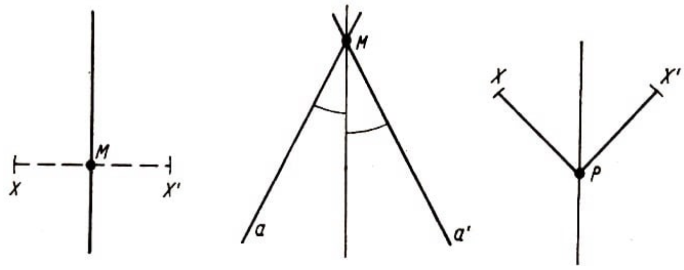


Bild 79

Bei dieser Abbildung, der Spiegelung an einer Geraden, kommt ein Strahl, der auf der Achse senkrecht steht, mit der entgegengesetzten Halbgeraden zur Deckung. Die Drehung geht nämlich in einer zur Achse senkrechten Ebene im Raum vor sich. Dabei stellt man fest (Bild 79):

1. Das Bild eines Punktes hat bei der Spiegelung den gleichen Abstand von der Spiegelgeraden wie der Originalpunkt.
2. Eine Gerade a und ihr Bild a' schneiden sich auf der Achse und bilden mit der Achse gleiche, aber ungleichsinnige Winkel.
3. Ist die Gerade a zur Achse parallel, so ist auch ihr Bild a' zur Symmetrieachse parallel und hat den gleichen Abstand von der Achse wie a. Diese Achse heißt auch die Mittellinie des Streifens.
4. Sie halbiert jede Querstrecke des Streifens.
5. Punkt und Bild haben von jedem Punkt der Achse gleiche Entfernung.

Es sei X ein Punkt, X' sein Bild und P ein beliebiger Punkt der Achse; dann kommt bei der Spiegelung die Strecke $\overline{PX}$ mit der Strecke $\overline{PX'}$ zur Deckung; man schreibt $S(\overline{PX}) = \overline{PX'}$ oder $\overline{PX} \to \overline{PX'}$.

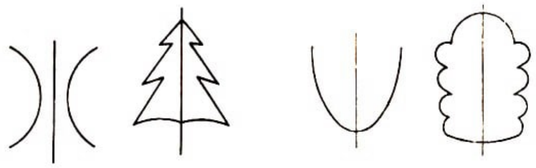


Bild 80

Man kann also zusammenfassen: Lässt sich eine Figur so an einer Geraden spiegeln, dass sie mit sich selbst zur Deckung kommt, so nennt man sie axialsymmetrisch und die Gerade ihre Symmetrieachse. Jede Figur (Bild 80) bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild stets eine axialsymmetrische Figur, auch wenn die Figur aus mehreren nicht geschlossenen Linien- oder Kurvenzügen besteht. Manche Figuren haben mehrere Symmetrieachsen; z. B. hat ein Paar sich senkrecht schneidender Geraden vier Symmetrieachsen.

In den folgenden Beispielen betrachten wir die aus der Originalfigur und ihrem Spiegelbild zusammengesetzte neue Figur:

1. Wird ein rechtwinkliges Dreieck an einer Kathete gespiegelt, so entsteht als zusammengesetzte Figur ein gleichschenkliges Dreieck (Bild 81/1). Die Kathete ist Höhe, das gleichschenklige Dreieck ist also axialsymmetrisch, die Höhe die Symmetrie- oder Spiegelungsachse.

2. Spiegele das rechtwinklige Dreieck an der Hypotenuse, beschreibe die Figur, unterscheide verschiedene mögliche Fälle!

3. Spiegelt man ein beliebiges Dreieck an der längsten Seite, so entsteht als zusammengesetzte Figur ein Drachenviereck; die Diagonale, an der gespiegelt wird, ist Symmetrieachse (Bild 81/2).

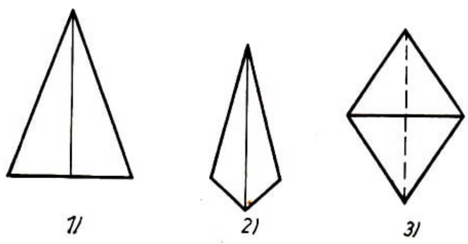


Bild 81

4. Spiegelt man ein gleichschenkliges Dreieck an der Grundlinie, so entsteht ein Rhombus oder eine Raute. Auch der Rhombus (Bild 81/3) ist axialsymmetrisch. Er besitzt zwei Symmetrieachsen, nämlich die beiden aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen.

5. Spiegele ein beliebiges Viereck an den Seiten! Beschreibe die entstehenden Figuren!

Noch einmal sei darauf hingewiesen, dass bei der Spiegelung eines Dreiecks sich die Reihenfolge der Ecken ändert. Geht man nämlich im gegebenen Dreieck von $A \to B \to C$, so dreht man sich bekanntlich im positiven Sinne, d. h. entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.
Geht man nun im gespiegelten Dreieck von $A' \to B' \to C'$, so dreht man sich im Uhrzeigersinn. Der Sinn, in dem man um das Dreieck herumgeht, nennt man seinen Umlaufsinn. So nennt man Dreiecke mit gleichem Umlaufsinn, wie sie bei der Translation, Drehung und Punktspiegelung entstehen, gleichsinnig; Dreiecke mit verschiedenem Umlaufsinn, wie, sie bei der Achsenspiegelung entstehen, ungleichsinnig.

Die Symmetrie findet man häufig in Natur- und Kunstformen. Symmetrie ist ein geometrisches Prinzip, vermöge dessen der Mensch - wie der bekannte Mathematiker Hermann Weyl einmal ausdrückte - durch die Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung und Schönheit zu begreifen und in der bildenden Kunst zu gestalten. Das zeigt sich ganz besonders in den Ornamenten und Zierleisten künstlerischer Gestaltung.

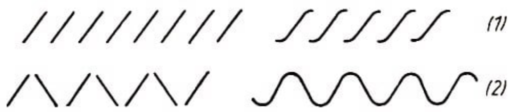


Bild 82

Hierin äußert sich bereits höhere Mathematik seit alters her, ohne dass etwa die Gesetze explizit aufgezeichnet wurden. Hierauf hat mehrfach der feinsinnige Schweizer Mathematiker Andreas Speiser hingewiesen. Dabei ist bereits mit den einfachsten geometrischen Hilfsmitteln zu sehen, dass Zierleisten und Ornamente, die durch wiederholte Spiegelungen entstehen, weit interessanter und weniger eintönig sind als solche, die nur durch Drehungen und Translation allein hergestellt wurden. Bild 82 kann das vielleicht zeigen:
In 82 /1. entsteht das Ornament durch Verschiebung, während in 82/2 wiederholte Spiegelungen erforderlich sind.

5.3.4.2. Das Drachenviereck

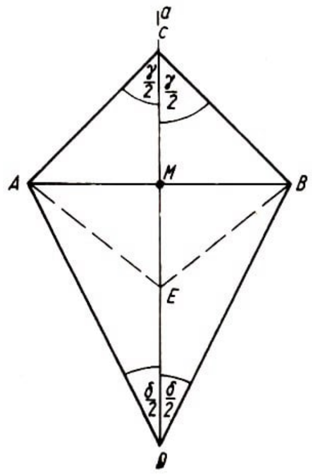


Bild 83

Bildet man ein beliebiges Dreieck bezüglich einer seiner Seiten axialsymmetrisch ab, so entsteht als Gesamtfigur ein achsensymmetrisches Viereck (Bild 81). Man nennt diese Figur auch Drachenviereck. Insbesondere ist das Drachenviereck wichtig, das durch Spiegelung eines Dreiecks an der größten Seite entsteht. Allgemein ergeben sich aus den Abbildungssätzen für die Axialsymmetrie für ein derartiges Drachenviereck die folgenden Eigenschaften (Bild 83):

1. 2 Paar gleiche Nachbarseiten;
2. die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander;
3. die Achsendiagonale halbiert die andere Diagonale und die anliegenden Viereckswinkel;
4. die beiden Viereckswinkel bei A und B sind gleich groß.

Diese Eigenschaften werden häufig in dem sogenannten Drachensatz zusammengefasst. Auf ihm beruhen einige nachstehend angeführte Sätze der Elementargeometrie, die für die Beweistechnik und die Durchführung elementargeometrischer Konstruktionsaufgaben wichtig sind:

1. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

2. Im gleichschenkligen Dreieck fallen die Höhe zur Basis, die Seitenhalbierende zur Basis, die Mittelsenkrechte auf der Basis und die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze mit der Symmetrieachse zusammen.

3. Durch Achsenspiegelung eines gleichschenkligen Dreiecks an seiner Basis entsteht als Gesamtfigur, die aus Original- und Bildfigur zusammengesetzt ist, der Rhombus. Für diese Figur gilt folgender Satz, der sich auch aus dem Drachensatz herleiten lässt: Im Rhombus (siehe Bild 81/3) sind die Seiten gleich; je 2 Nachbarwinkel ergänzen sich zu $180° = 2R$; die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, halbieren sich und die Winkel des Rhombus.

4. Die Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist von den drei Eckpunkten gleich weit entfernt (Bild 84).

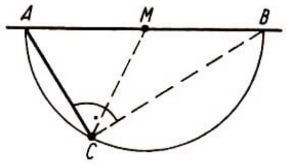


Bild 84

5. Die Umkehrung von Satz 4 ist der bekannte Satz des Thales und kann so ausgesprochen werden:Konstruiert man über einer Strecke den Halbkreis und verbindet man einen beliebigen Punkt des Halbkreises mit den Endpunkten der gegebenen Strecke, so ist das Dreieck rechtwinklig.

6. Bildet man ein rechtwinkliges Dreieck bezüglich der Hypotenuse achsensymmetrisch

ab, so entsteht als zusammengesetzte Figur ein rechtwinkliges Drachenviereck: Es besitzt zwei rechte Winkel als Gegenwinkel, die beiden anderen sind Supplementwinkel, d. h. ergänzen sich zu $180°$. Nach dem Thalessatz hat dieser Drachen einen Umkreis (Bild 85/1).

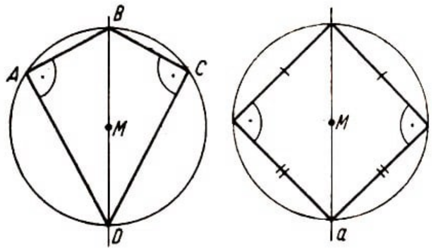


Bild 85/1, 2

7. Ist das erzeugende Dreieck rechtwinklig gleichschenklig, so hat das entstehende Drachenviereck zugleich die Eigenschaften des Rhombus und des rechtwinkligen Drachens: Dieses Viereck ist das Quadrat (Bild 85/2).

5.3.4.3. Die Grundkonstruktionen axialsymmetrischer Figuren

Zunächst seien nochmals die Grundsätze der Geradenspiegelung oder das Abbildungs-ABC wiederholt:

A: Geraden werden auf Geraden, Strecken auf Strecken, Winkel auf Winkel abgebildet.
B: Die Längen von Strecken und die Größen von Winkeln bleiben erhalten; sie sind unveränderlich. Man nennt daher solche Eigenschaften auch die Invarianten der Abbildung.
C: Fixpunkte sind genau die Punkte der Achse, Fixgeraden genau die Achse und ihre Lote.

Es entsteht nunmehr die Aufgabe, zu einer beliebigen Figur das Spiegelbild zu zeichnen. Dazu genügt es, folgende zwei Aufgaben zu lösen:

1. Zu einem Punkt ist der symmetrische Punkt zu konstruieren.
2. Zu einer Geraden ist die symmetrische Gerade zu konstruieren.

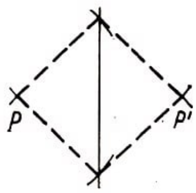


Bild 86

Lösung zu 1): Gegeben sei die Achse und ein Punkt P, gesucht der zu P axialsymmetrische Punkt P'. Angenommen P' sei bereits bekannt.
Verbindet man nun (Bild 86) P und P' mit zwei Punkten auf der Achse, so entsteht ein Drachen oder falls alle Seiten gleich Bild 86 lang sind, ein Rhombus. Dieser Rhombus wird gezeichnet:
Ein beliebiger Kreis um P schneidet die Achse in zwei Punkten. Mit gleichem Radius wird um diese Punkte je ein Kreis geschlagen, ihr Schnitt ist P'.

Lösung zu 2): Gegeben sei die Achse a und eine Gerade g, gesucht ist die symmetrische

Gerade g'. Nach den Abbildungsgrundsätzen bleiben die Winkel bei der Geradenspiegelung erhalten. Daher braucht man nur den Winkel zu verdoppeln (Bild 87).

Ist aber (Bild 88) die Gerade parallel zur Achse, so muss das Bild auch parallel zur Achse sein und gleichen Abstand besitzen. Man zeichne eine beliebige Gerade, die g mit a schneidet, trage die Strecke $\overline{AB}$ von B aus nochmals ab und ziehe durch den Endpunkt C eine Parallele zu a; sie ist das gesuchte Bild g'.

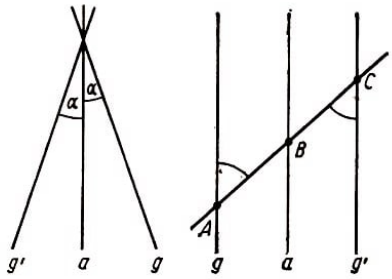


Bild 87, 88

Zu diesen beiden Aufgaben kann man umgekehrt die folgenden stellen: 1. Zu 2 Punkten ist die Symmetrieachse zu konstruieren. Auch hier wird die Rhombusfigur (Bild 89) hergestellt, indem man um A und B mit gleichem Radius Kreise beschreibt.

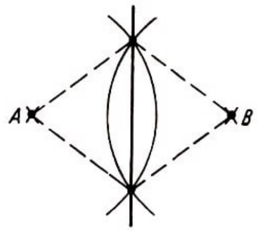


Bild 89

Die Verbindungsgerade ihrer Schnittpunkte ist die gesuchte Spiegelungsachse.

2. Zu 2 Geraden ist die Symmetrieachse zu konstruieren. Den Rhombus konstruiert man, indem man um A einen Kreisbogen schlägt; dadurch entstehen die Punkte B und C (Bild 90). Um diese Punkte schlägt man mit gleichem Radius je einen Kreis, deren Schnitt D ergibt. Die Verbindungsgerade AD ist die gesuchte Symmetrieachse.

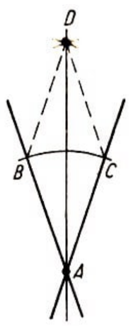


Bild 90

Diese Konstruktionen bilden eigentlich die Grundlage für die bereits in 2.2. angegebenen Grundkonstruktionen,

1. das Lot von P auf eine Gerade zu fällen: Die Verbindungsgerade von P und seinem Bild ist das gesuchte Lot;

2. eine Strecke zu halbieren oder das Mittellot zu zeichnen: Die Symmetrieachse der Strecke ist das gesuchte Mittellot oder die verlangte Halbierungslinie;

3. in einem Punkt auf einer Geraden das Lot zu errichten: Die Symmetrieachse durch P zu zwei beliebig gewählten Punkten A und B der Geraden, die gleichen Abstand von P haben, ist das gesuchte Lot;

4. einen Winkel zu halbieren: Die Symmetrieachse der beiden Schenkel ist die gesuchte Winkelhalbierende.

5.3.5 Die Punktsymmetrie des Vierecks

5.3.5.1. Parallelogramm, Rechteck und Rhombus

Ein beliebiges Dreieck wird bezüglich des Mittelpunktes der längsten Seite zentral- oder punktsymmetrisch (vgl. 5.3.1.) abgebildet.
Nun betrachten wir die aus dem Ausgangsdreieck und seinem Bild entstandene Gesamtfigur (Bild 91).

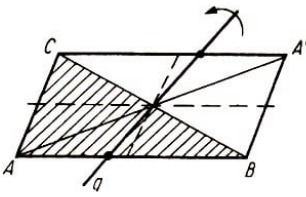


Bild 91

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften für die Punktsymmetrie muss diese ein Viereck, und zwar ein Parallelogramm sein. Denn durch die Punktspiegelung entstehen zwei Paar parallele Gegenseiten. Ein Parallelogramm ist also ein zentralsymmetrisches Viereck und hat folgende Eigenschaften:

1. Die Gegenseiten sind gleich und parallel.
2. Die Gegenwinkel sind gleich, und zwei Nachbarwinkel ergänzen sich zu $180°$.
3. Die Diagonalen halbieren sich.
4. Von einer im Diagonalenschnittpunkt sich drehenden Geraden schneiden die parallelen Seiten gleiche Abschnitte ab.

Das ist vielleicht die wichtigste Parallelogrammeigenschaft überhaupt. Nach ihr nimmt die drehende Gerade zweimal eine zu den Seiten parallele Lage ein. Man nennt sie dann die "Mittelparallele". Damit darf Eigenschaft 4 auch so ausgesprochen werden: Die beiden Mittelparallelen eines Parallelogramms schneiden sich im Diagonalenschnittpunkt.

Das Rechteck stellt einen Sonderfall des Parallelogramms dar. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck (vgl. Abschnitte 5.3.2. und 5.3.3.) bezüglich des Mittelpunktes der Hypotenuse punktsymmetrisch abgebildet wird, so hat das als zusammengesetzte Figur entstehende Viereck einen Umkreis.

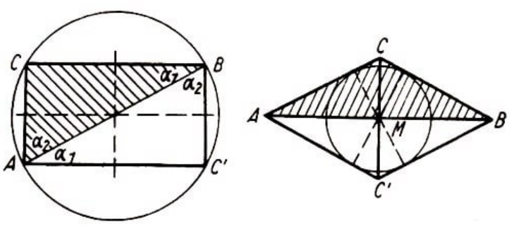


Bild 92,93

Die Diagonalen sind also gleich lang, und die Winkel betragen $90°$. Ein solches zentralsymmetrisches Viereck (Bild 92) heißt Rechteck. Wie unterscheidet sich ein Rechteck vom Parallelogramm (in Bezug auf Diagonalen, Winkel, Umkreis)? Aus der Eigenart der erzeugenden Grundfigur (welche?) geht auch hervor, dass die Mittelparallelen senkrecht auf den von ihnen halbierten Gegenseiten stehen.
Demzufolge weist das Rechteck noch eine weitere Symmetrie, nämlich die Achsenspiegelung bezüglich der Mittelparallelen auf. Das ist eine sehr wichtige Tatsache, die für

die Beweistechnik oft gebraucht wird, wie der im letzten Kapitel durchgeführte Beweis noch näher erläutern wird.

Auch den Rhombus erhält man als zusammengesetzte Figur nach einer Punktspiegelung, wie Bild 93 zeigt. Ein gleichschenkliges Dreieck wird am Mittelpunkt - der Basispunkt - oder zentralsymmetrisch abgebildet.
Natürlich muss diese Figur mit der, welche durch Spiegelung an der Basis erhalten wird, völlig übereinstimmen! So ist der Rhombus nicht nur ein spezielles Drachenviereck, sondern auch ein spezielles Parallelogramm! Ferner besitzt. der Rhombus einen Inkreis (Bild 93).

Auch das Quadrat kann man auf diese Weise erhalten. Dazu bildet man ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck (Bild 94) bezüglich des Hypotenusenmittelpunktes (Hypotenuse ist hier gleich der Basis) zentralsymmetrisch ab.

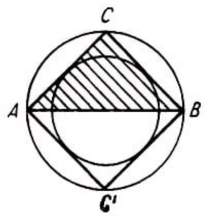


Bild 94

Damit folgen alle Eigenschaften eines regelmäßigen Viereckes. Beachte, ein Quadrat ist auch drehsymmetrisch! Warum besitzt das Quadrat einen Umkreis und einen Inkreis?

5.3.5.2. Streifenviereck und Vierecksgitter

Das Parallelogramm lässt sich auch als Schnittfigur von 2 Streifen erzeugen. Man nennt daher das Parallelogramm auch eine Streifenecke, d. h., es schneiden sich zwei Streifen, so dass eine Figur mit 4 Ecken und paarweise parallelen Seiten entsteht. Die Eigenschaft der Gleichheit der Gegenseiten findet man dann auf folgende Weise:

$\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ seien Abschnitte von parallelen Geraden, die den Streifen schneiden, sie sind also gleich. Ebenso ist $\overline{BC} = \overline{AD}$. Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von je zwei Gegenseiten sind Achsen der Streifen. Jeder Geradenabschnitt wird also durch die Streifenachsen halbiert. Die Diagonale als Abschnitt einer Geraden, die beide Streifen schneidet, wird ebenfalls Von beiden Streifenachsen halbiert, und ihr Mittelpunkt fällt mit dem Schnittpunkt der Streifenachsen zusammen.
Das gleiche trifft aber auch für die andere Diagonale zu. Es gilt also: Die Diagonalen gehen durch den Schnittpunkt der Streifenachsen und werden in ihm halbiert.

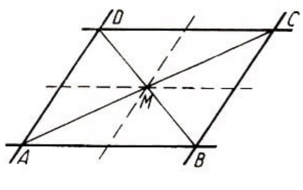


Bild 95

Etwas anderes, sehr Hübsches ergibt sich, wenn man in einem Parallelogramm die Mitten zweier Gegenseiten E und F mit den gegenüberliegenden Ecken verbindet (Bild 96). Es ist $\overline{AB} = \overline{CD}$ und mit $\overline{EB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ sowie $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{DC}$ folgt $\overline{EB} = \overline{DF}$.

Außerdem sind EB und DF parallel. Demzufolge gibt es in dem Viereck $EBFD$ ein Paar paralleler gleicher Gegenseiten; also ist $EBFD$ ein Parallelogramm. ED und BF sind daher parallel.

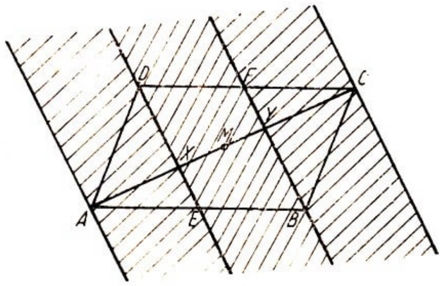


Bild 96

Zieht man nun durch A und C die Parallelen zu ED, so entstehen 3 Streifen! Diese 3 Streifen sind deckungsgleich oder kongruent ($\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DF} = \overline{FC}$. In kongruenten Figuren sind entsprechende oder homologe Stücke gleich, d. h., es ist hier $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YC} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. Die Diagonale $\overline{AC}$ wird also durch die Streifen in 3 gleiche Teile zerlegt. Ferner ist $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Somit folgt $\overline{XM} = \overline{AM} - \overline{AX} = \frac{1}{6}\overline{AC}$. Durch Abtragung von $\overline{XM}$ kann die Diagonale auch leicht in 6 gleiche Teile zerlegt werden. Diese Tatsache kann auch in der konstruktiven Geometrie ausgenutzt werden.

Es seien zwei nichtparallele Streifen vorgegeben. Diese schneiden aus einem Streifen (Bild 97) das Trapez $ABCD$ heraus, dessen Eigenschaften sich auf Grund dieser Erzeugung auch leicht übersichtlich angeben lassen:

1. Aus der Parallelität der Grundseiten folgt, dass die Summe der beiden Winkel an einem Schenkel $180°$ beträgt.
2. Die Mittelparallele (Mittellinie) eines Trapezes halbiert seine Schenkel.

Wird die eine Grundseite des Trapezes immer kleiner, bis sie in einen Punkt übergeht, so entsteht ein Dreieck. Für dieses ergibt sich aus der Trapezeigenschaft 2. dann der bekannte Satz:
Jede Mittelparallele eines Dreiecks ist halb so lang wie die ihr parallele Seite.

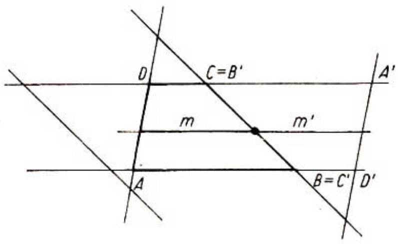


Bild 97

Auf einige Sonderfälle sei nur hingewiesen. Wenn ein Schenkel eines Trapezes mit den Grundseiten rechte Winkel bildet, so ergibt sich das rechtwinklige Trapez. Wird dieses an dem Schenkel mit dem rechten Winkel gespiegelt (Bild 98), so entsteht als zusammengesetzte Figur das achsensymmetrische oder gleichschenklige Trapez.

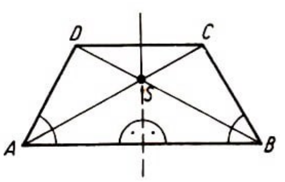


Bild 98

Bei diesem ist die Mittelsenkrechte zu den Grundseiten Symmetrieachse. Die Schenkel sind gleich lang, ebenso die Diagonalen. Diese schneiden sich auf der Achse. Die beiden Winkel an jeder Grundseite sind gleich. Sämtliche Eigenschaften folgen also aus der Art der Erzeugung dieses Viereckes!

Bei der Darstellung der Viereckseigenschaften aus der Symmetrie und dem Streifen wurden mehrere sogenannte Vierecksgitter benutzt, die in allgemeiner Form die Grundelemente der regulären Vierecksgeometrie darstellen:

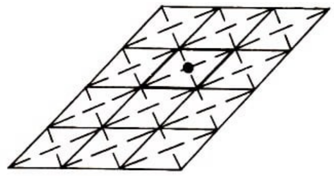


Bild 99

1. Das Parallelogrammgitter (Bild 99): Das Gitter entsteht aus einem Grundparallelogramm durch fortgesetzte hintereinander ausgeführte Abbildung. Dabei wird hier einmal die Verschiebung des Grund- oder Elementarparallelogramms in Richtung der Parallelen als erzeugende Abbildung benutzt. So erhält man zunächst die 4 Nachbarparallelogramme.

Wird aber so weiter fortgefahren, dann kann die gesamte Ebene mit diesen Parallelogrammen überdeckt werden. Es entsteht das Parallelogrammgitter. Die gesamte Ebene wird lückenlos überdeckt, wobei nur solche Figuren entstehen, deren Eigenschaften mit denen der Elementarfigur übereinstimmen.
Nun lässt sich aber das Grund- oder Elementarparallelogramm auch durch punktsymmetrische Abbildung bezüglich des Seitenmittelpunktes oder durch eine Drehung um $180°$ um eine der Ecken des Grundparallelogramms in jedes andere der Ebene abbilden.

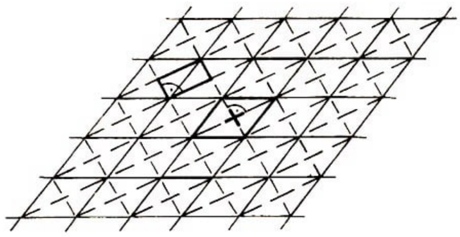


Bild 100

Zu dem Parallelogrammgitter gehören auch die speziellen Gitter: Rhombengitter (Bild 100), Rechteckgitter (Bild 101) und Quadratgitter (Bild 102). Es sei nur kurz erwähnt, dass bei dem Rechteck- und Quadratgitter die lückenlose Überdeckung der Ebene auch durch Spiegelungen an den Seiten der Grundfigur erreicht werden kann.

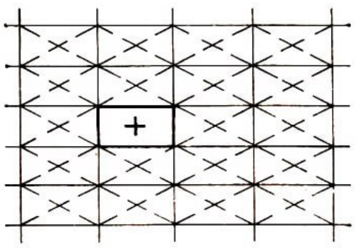


Bild 101

2. Das Diagonalengitter (Bild 99-102). Aus den Sätzen über Verschiebung und punktsymmetrische Abbildung folgt: Zeichnet man in ein beliebiges Parallelogrammgitter die Diagonalen ein, so bilden auch diese wieder ein Parallelogrammgitter. Dabei ist zu bemerken, dass das Diagonalengitter eines Rhombus ein Rechteckgitter ist, während das eines Quadrates als Quadratgitter erhalten bleibt.

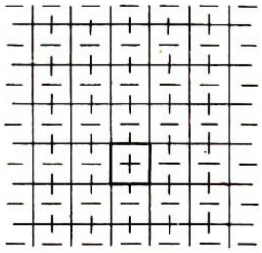
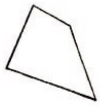
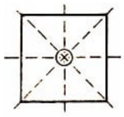
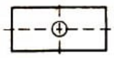
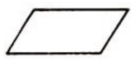


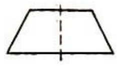
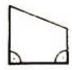
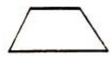
Bild 102

Zum Abschluss sei in der Tabelle 2 eine Übersicht aller Vierecke bezüglich ihrer Lage- und Abbildungseigenschaften gegeben.

Allgemeines Viereck 

				
Eigenschaften		Drachen	rechtwinkliger Drachen	Rhombus
gleichen Seiten	1 Paar	2 Paar	2 Paar	alle 4
gleiche Winkel		1 Paar	1 Paar	2 Paar
parallele Seiten			2 Paar	
Diagonalen		senkrecht	senkrecht	senkrecht, halbieren sich
Symmetrie		1 achsig	1 achsig	Punktsymmetrie
Kreise		Inkreis	Umkreis, Inkreis	Inkreis

			
Eigenschaften	Quadrat	Rechteck	Parallelogramm
gleichen Seiten	alle 4	2 Paar	2 Paar
gleiche Winkel	alle 4	alle 4	2 Paar
parallele Seiten	2 Paar	2 Paar	2 Paar
Diagonalen	senkrecht, halbieren sich	gleich, halbieren sich	halbieren sich
Symmetrie	4achsig, Punktsymmetrie	2achsig, Punktsymmetrie	Punktsymmetrie
Kreise	Umkreis, Inkreis	Umkreis	

			
Eigenschaften	gleichschenkliges Trapez	rechtwinkliges Trapez	Trapez
gleichen Seiten	1 Paar		
gleiche Winkel	2 Paar	1 Paar	
parallele Seiten	1 Paar	1 Paar	1 Paar
Diagonalen	gleich		
Symmetrie	1 achsig		
Kreise	Umkreis		

5.3.6 Geometrische Konstruktionen ebener Figuren mit Hilfe der Symmetrie

Die Methoden, nach denen Konstruktionsaufgaben mit Hilfe der Symmetrie gelöst werden sollen, beruhen in erster Linie auf der axialen Symmetrie. Wird sie zur Lösung alleine verwendet, so klappt man die ganze oder auch nur Teile der Analysisfigur um, soweit dies erforderlich ist.
Die Gerade, d. h. Achse, um die eine Umklappung oder an der eine Umklappung (Spiegelung) vorgenommen werden soll, muss oft erst eingeführt werden. Dazu dienen häufig besondere Geraden im Dreieck, wie Winkelhalbierende, Höhen, Seitenmittellinien u.a. Ihre Eigenschaften sollen kurz dargestellt werden.

Der Sinn geometrischer Konstruktionsmethoden mit Hilfe der Symmetrie besteht darin, gegebene Stücke in für die Konstruktionsausführung bequeme Beziehungen zu setzen, gleiche Elemente zur Deckung zu bringen oder einzelne Summen und Differenzen von Strecken oder Winkeln bequem darzustellen.

5.3.6.1. Dreieckslinien

1. Die Mittelsenkrechten: Die 3 Mittelsenkrechten (m_a, m_b, m_c) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M; dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks (Bild 103).

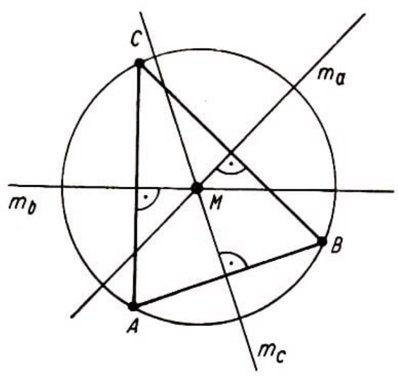


Bild 103

Beweis: Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten b und c. Dieser Punkt liegt entfernungsgleich zu A und C und auch zu A und B, d. h. zu allen Ecken des Dreiecks.

Begründung : Menge aller Punkte, die zu zwei festen Punkten A und B entfernungsgleich sind, ist die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$.

Der Kreis mit $\overline{MA}$ als Radius geht auch durch B und C; es ist der Umkreis. M ist also entfernungsgleich zu B und C, folglich liegt er auch auf der Mittelsenkrechten von a. Also schneiden sich m_a, m_b und m_c in M.

2. Die 3 Winkelhalbierenden $(w_\alpha, w_\beta, w_\gamma)$ Schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises (Bild 104).

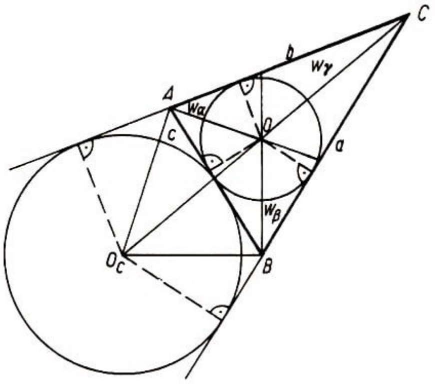


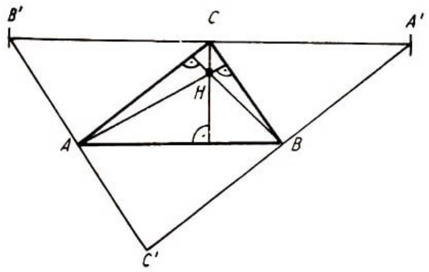
Bild 104

Beweis: Es sei O der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α und w_β. Dieser Punkt hat von b und c sowie von a und c, d.h. von allen Seiten des Dreiecks, gleichen Abstand. Grund: Die Menge aller Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden abstandsgleich ist, besteht aus den beiden Winkelhalbierenden der Geradenkreuzung. Demzufolge lässt sich um O ein Kreis zeichnen, der alle 3 Seiten des Dreiecks berührt, der Inkreis.
O hat auch gleichen Abstand von b und a, folglich liegt er auch auf w_γ; also schneiden sich $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ in einem Punkt.

Die Berührungspunkte des Inkreises mit den 3 Seiten sind zugleich die 3 Lotfußpunkte der von O auf die Seiten gefällten Lote, die im allgemeinen nicht mit den Schnitten der Winkelhalbierenden mit den Seiten zusammenfallen.

Die Winkelhalbierenden zu den Außenwinkeln heißen äußere Winkelhalbierende. Für diese gilt: Zwei äußere Winkelhalbierende und die innere Winkelhalbierende des 3. Innenwinkels schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt eines Ankreises.

Beweis: O_c sei der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden an den Außenwinkeln der Seite c. O_c hat aus dem gleichen Grunde wie oben gleichen Abstand von c und der Verlängerung von a bzw. b. Um O_c kann daher ein Kreis gezeichnet werden, der c und die Verlängerung von a und b berührt. Ankreis!
O_c hat von den Schenkeln des Winkels α gleichen Abstand; folglich liegt er auf w_γ. Ein Dreieck besitzt drei solcher Ankreise (siehe Bild 13).



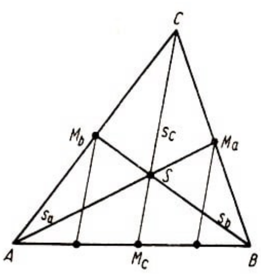


Bild 105,106

3. Die drei Höhen eines Dreiecks sind die drei von den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lote h_a, h_b, h_c. Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt (H) (Bild 105).

Beweis: Zum Beweis wurde das Dreieck ABC bezüglich der 3 Seitenmitten, d. h. punktsymmetrisch, abgebildet. Dann folgt aus der Gleichheit und Parallelität von Gegenstands- und Bildgrößen

$$B'C = AB, C'B = AC, B'A = BC, A'C = AB, A'B = AC, C'A = BC$$

und daraus $A'B'$ parallel zu AB, $B'C'$ parallel zu BC und $A'C'$ parallel zu AC. Also ist C der Mittelpunkt von $A'B'$. In gleicher Weise folgt B als Mittelpunkt von $A'C'$ und A als solcher von $B'C'$.

Die drei Höhen des Dreiecks ABC fallen also mit den drei Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$ zusammen, die sich nach Eigenschaft 1 in einem Punkt schneiden.

Mit diesem Satz hat sich auch C. F. Gauß beschäftigt. Er führte den Beweis folgendermaßen: Durch die Ecken von ABC werden die Parallelen zu den Grundseiten gezeichnet. In dem entstandenen neuen Dreieck $A'B'C'$ entstehen die Parallelogramme $ABCB'$ und $ACBC'$. Daraus schließt Gauß auf die Gleichheit und Parallelität der Seiten und führt den Beweis wie oben durch. Vergleiche beide Beweise! Beachte die Bedeutung des Parallelogramms in beiden Beweisen!

ABC kann auch als das Mittendreieck von $A'B'C'$ aufgefasst werden: Die Seiten des Mittendreiecks sind halb so groß wie die zu ihnen parallelen Dreieckseiten. Für die drei Mittellinien, auch Schwerpunktstransversalen oder Schwerlinien genannt, eines Dreiecks (Bild 106), welche die Ecken des Dreiecks ABC mit den gegenüberliegenden Seitenmitten verbinden, gilt folgender Satz:
Die 3 Mittellinien (Seitenhalbierenden) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S, der jede Mittellinie (Seitenhalbierende) so teilt, dass der Abschnitt an dem Eckpunkt doppelt so groß ist wie derjenige an dem Seitenmittelpunkt.

Beweis: S sei der Schnittpunkt von s_b mit s_c. Durch die Mitten von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$, d.h. durch M_b und M_a, werden Parallelen zu s_c gelegt. Durch sie und so wird die Seite @ in vier gleiche Teile zerlegt (Streifeneigenschaft !). Durch diese so entstandenen gleichbreiten Streifen wird die Strecke s_b in drei gleiche Teile zerlegt.
Die Seitenhalbierende s_c teilt also s_b so, dass der dem Eckpunkt B anliegende Abschnitt von s_b doppelt so groß ist wie der andere.
In entsprechender Weise zeigt man, dass s_a die Seitenhalbierende s_b in der gleichen Weise wie so teilt. Also muss s_a auch s_b im Punkt S schneiden.

Somit gehen s_a, s_b, s_c alle durch einen Punkt. Auch den Nachweis für die Teilung der Strecken s_a und s_c führt man in gleicher Weise. Führe dies als Übung durch!

Dieser Beweis beruhte auf der Streifeneigenschaft. Ein zweiter Beweis benutzt die Abbildung durch Drehung als Beweismittel.

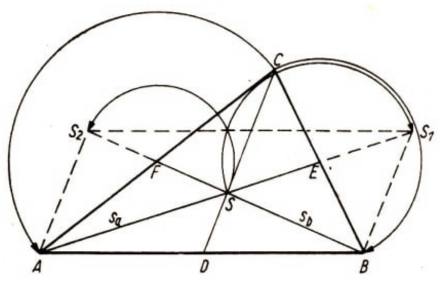


Bild 107

S sei der Schnittpunkt von s_a mit s_b (Bild 107). Nun drehe man SCE um E um $180°$, dann gelangt SCE nach S_1BE. Durch eine Drehung um F um $180°$ kommt SCF in die Lage von S_22AF.
(Statt der Drehungen um $180°$ kann man auch die Abbildung durch Punktspiegelung verwenden. Gib für diese Bewegung den Fixpunkt an !) Dann gilt:

$$\overline{SC} = \overline{S_1B} \quad \text{und} \quad \overline{SC} \parallel \overline{S_1B} \qquad , \qquad \overline{SC} = \overline{S_2A} \quad \text{und} \quad \overline{SC} \parallel \overline{S_2A}$$

Daraus folgt $\overline{S_1B} = \overline{S_2A}$ und $\overline{S_1B} \parallel \overline{S_2A}$. Wird S_1 mit S_2 verbunden, so ist das entstehende Viereck ABS_1S_2 auf Grund einer wichtigen Parallelogrammeigenschaft (welche ?) ein Parallelogramm. S ist dessen Diagonalenschnittpunkt.
Daher folgt: $\overline{AS} = \overline{SS_1}$. Die Parallele CD zu BS_1 teilt demzufolge $\overline{AB}$ in gleiche Teile, d. h. es ist $\overline{AD} = \overline{DB}$, und CD ist die dritte Seitenhalbierende des Dreiecks ABC.

Aus $\overline{SE} = \overline{ES_1} = \frac{1}{2}\overline{SS_1}$ folgt $\overline{SE} = \frac{1}{2}\overline{AS}$ und aus $\overline{FS} = \overline{FS_2} = \frac{1}{2}\overline{SS_2}$ folgt $\overline{FS} = \frac{1}{2}\overline{BS}$. Schließlich kann mühelos nun noch $\overline{SD} = \frac{1}{2}\overline{SC}$ gezeigt werden. Damit ist der Beweis beendet.

5.3.6.2. Konstruktion mit Hilfe der Spiegelung, Drehung und Translation

Im folgenden werden einige Konstruktionen durchgeführt, in denen die Spiegelung, aber auch die Drehung und Translation als Konstruktionshilfsmittel herangezogen Werden. Es ist keineswegs richtig, wenn man nur eine Methode bei einer Konstruktion verwenden will.
Haben wir dies bei einigen früheren Beispielen zur Erklärung des betreffenden Verfahrens getan, so sollen von jetzt ab stets alle Möglichkeiten ausgenutzt werden. Denn geometrische Konstruktionen können oft mit verschiedenen Verfahren gelöst werden. Die Technik der Konstruktionsausführungen mögen die folgenden Beispiele zeigen:

1. Ein Dreieck ist aus c, β, w_β zu konstruieren.

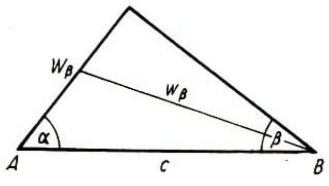


Bild 108

Analysis (Bild 108): $\overline{AB} = c$, w_β ist die Winkelhalbierende des in B an c angetragenen Winkels β, deren Länge durch den Kreis um B mit w_β bestimmt wird. C wird durch

den Schnitt des freien Schenkels von β mit der Verbindungsgeraden AW_β festgelegt. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.
(Hinweis: Die Bestimmung der drei Punkte A, B, W_β kann auch erfolgen durch Konstruktion von $\triangle ABW_\beta$ nach der Grundaufgabe SWS $(c, \frac{\beta}{2}, w_\beta)$!)

Konstruktion: Zeichne die Strecke c mit den Endpunkten A, B; in B an c Winkel β antragen; Winkel β halbieren; um B mit w_β einen Kreis schlagen, der die Winkelhalbierende in W_β schneidet; durch A und W_β die Gerade zeichnen; Schnitt dieser Geraden mit dem freien Schenkel von β ist C. ABC ist das gesuchte Dreieck.

Determination: Im allgemeinen liegt eine Lösung vor. Nur wenn im Dreieck ABW_β der Winkel α größer oder gleich $(180° - \beta)$ wird, existiert kein Schnittpunkt C, also keine Lösung.

2. Ein Dreieck ist aus a, s_c, h_c zu konstruieren.

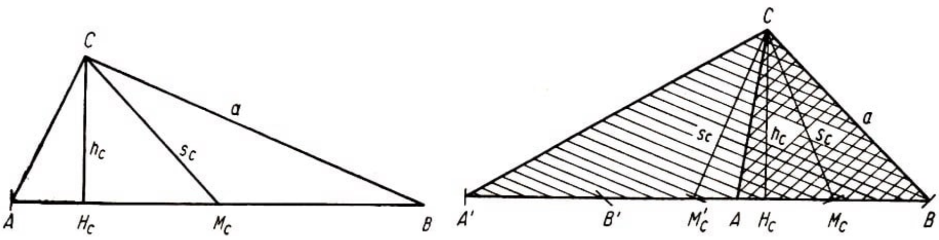


Bild 109a,b

Analysis (Bild 109 a): $\overline{CH_c} = h_c$. Der Eckpunkt B ist der Schnittpunkt der Senkrechten in H_c auf h_c und des Kreises um C mit a.
Man findet ihn aus der Konstruktion des Dreiecks CH_cB nach der Grundaufgabe SSW $(a, h_c, \angle CH_cB = 90°)$. Der Punkt M_c liegt auf H_cB und dem Kreis um C mit s_c, während der Punkt A auf derselben Geraden und dem Kreis um M_c mit $\overline{M_cB}$ liegt. Die Konstruktionsbeschreibung führe der Leser selbst durch.

Determination: Lösungen liegen vor, wenn $h_c \leq s_c$ und $h_c \leq a$. Beide Kreise um C mit a bzw. s_c schneiden c zweimal in B und B' bzw. M_c und M_c'. Wenn wir vereinbaren, dass die Eckpunkte des Dreiecks wie üblich der Reihe nach im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet werden, so muss in unserem Bild M_c stets links von B liegen. Für $a > s_c$ ergeben sich zwei Lösungen mit M_c und M_c' (Bild 109 b), während es für $a < s_c$ nur eine Lösung gibt (Bild 109 c). Untersuche den Fall $s_c = h_c$!

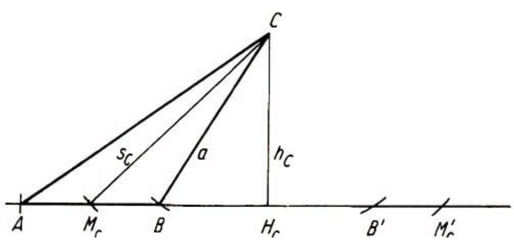


Bild 109c

3. Konstruiere ein Trapez aus a, b, c, d!

Analysis: Im Trapez $ABCD$ wird D auf $\overline{DA}$ als Gleitlinie nach A verschoben. $\overline{DC}$ wird so mitbewegt, dass es mit seiner ursprünglichen Lage parallel bleibt, d. h., wenn $D \to A$, dann $C \to C'$ (Bild 110).

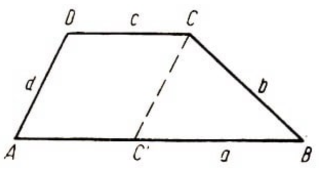


Bild 110

Der Punkt C wird bei dieser Bewegung die zu DA parallele Gerade CC', durchlaufen; es ist also $\overline{CC'} = \overline{DA} = d$. Damit ist ein Parallelogramm $AC'CD$ entstanden. Da $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC'} = c$ bekannt sind, so ist $\overline{C'B} = a - c$ bekannt. Damit ist Dreieck $C'BC$ bestimmt (Grundkonstruktion SSS).
D liegt auf der Parallelen durch C zu BC' und ist um c von C entfernt.

Konstruktion: Zeichne $\overline{AB} = a$. Auf AB wird $\overline{AC'} = c$ abgetragen. Schlage Kreise um C' mit d und um B mit b! Trage durch C Parallele zu BA und darauf Strecke $\overline{CD} = c$ ab! Verbinde D mit A und B mit C'.
In gleicher Weise findet man mit Hilfe der Parallelverschiebung die Lösung der Trapezkonstruktionen 1. a, b, c, α; 2. a, c, α, β; 3. a, c, e, f; 4. a, c, $\angle(b, e)$, $\angle(a, f)$; 5. a, c, e, $\angle(d, f)$.

Auch die Dreiecksaufgabe, ein Dreieck aus b, c, s_a zu konstruieren, lässt sich mit Parallelverschiebung allein sehr leicht lösen.
Hinweis zur Lösung: $\overline{AB}$ parallel verschieben, wobei A längs $\overline{AC}$ bis C rückt. Endlage B' von B fällt auf die Verlängerung von $\overline{AD} = s_a$; es wird $\overline{AB'} = 2 \cdot s_a$! Warum?

4. Konstruiere ein Dreieck aus b, c, $\beta - \gamma$!

Analysis (Bild 111): In $\triangle ABC$ sei $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\angle ABC - \angle BCA = \beta - \gamma$. Zur Einführung der Winkeldifferenz $(\beta - \gamma)$ zieht man $AD \perp BC$ und spiegelt $\triangle ABD$ an AD in die Lage AED. Damit wird $\angle AEB = \beta$.

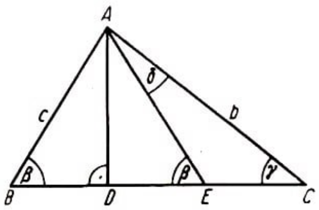


Bild 111

Aus $\angle AEB = \delta + \gamma$ folgt $\delta = \beta - \gamma$. $\triangle AEC$ ist bestimmt aus $\overline{AC} = b$; $\overline{AE} = c$; Punkt D liegt auf CE und auf der Senkrechten von A auf CE, Punkt B liegt auf CE und auf dem Kreis um D mit $\overline{DE}$.

Die Konstruktion und Determination wird der Leser nun ohne Mühe ausführen können.
Hinweis: Zu einer zweiten Lösung gelangt man, wenn $\triangle ABC$ am Mittellot von B gespiegelt wird. Welche?

5. In den folgenden Aufgaben ergeben einfache, anschauliche Bewegungen unmittelbar die gesuchte Figur. Der Lösungsgang Wird jetzt nicht in allen Einzelheiten dargestellt, sondern nur die für diese Methoden wesentlichsten Schritte, die zur Durchführung der Konstruktion selbst ausreichend sind.

a) Zu einem gegebenen Dreieck ABC soll ein kongruentes so, gezeichnet werden, dass die Ecken A und B auf eine gegebene Kreislinie fallen, während C auf eine gegebene Gerade zu liegen kommt.

Hinweise: Wird zunächst die Bedingung für den Punkt C außer acht gelassen, so kann sich Dreieck ABC so bewegen, wie es aus Bild 112 ersichtlich ist. Die Ecke C beschreibt dabei einen zum gegebenen konzentrischen Kreis. Dieser aber lässt sich zeichnen. Das Dreieck ABC ist in einer der möglichen Lagen konstruierbar (gegeben!).

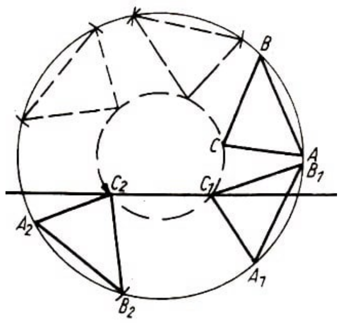


Bild 112

Die Schnittpunkte des gefundenen Kreises mit der gegebenen Geraden (zwei Schnitte!) ergeben die Lagen von C. Nun kann das Dreieck mühelos gezeichnet werden. In Bild 112 sind $\triangle A_1B_1C_1$ und $\triangle A_2B_2C_2$ zu $\triangle ABC$ kongruent und erfüllen die Bedingungen.

b) Zwei Kreise seien gegeben. Es soll ein Punkt gefunden werden, von dem aus die Tangenten an die Kreise vorgeschriebene Längen a und b haben.

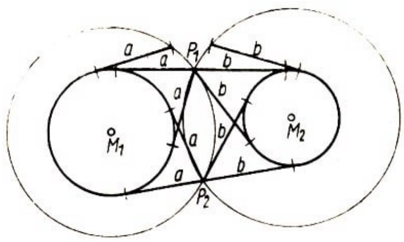


Bild 113

Hinweis (Bild 113): Man lasse die Tangente von der Länge a des ersten Kreises an diesem entlang gleiten. Der Endpunkt von ihr beschreibt dann einen zu diesem konzentrischen Kreis.
Seine Konstruktion kann von einer beliebigen Lage der Tangente a vorgenommen werden und stellt die erste geometrische Bestimmungslinie für den gesuchten Punkt dar. Diese Bewegung wiederholt man mit der Tangente b an dem zweiten Kreis. Es ergibt sich in gleicher Weise eine zweite Bestimmungslinie (Kreis).

6.[5] Oftmals sind die für eine Konstruktionsaufgabe erforderlichen Transformationen oder Bewegungen nicht sofort zu erkennen, die man mit einem Punkt (oder einem Teil der Figur) vornehmen muss, um eine geforderte Bedingung zu erfüllen.
In den bisherigen Beispielen dieses Abschnitts waren solche Schwierigkeiten nicht vorgekommen. Lässt sich aber auf den besprochenen Wegen die Aufgabe nicht sofort lösen, dann kann man auch hier, ähnlich wie bei der Methode der Teildreiecke, versuchen, zunächst bekannte Transformationen zu ermitteln, mit deren Hilfe Teilstücke der gesuchten Figur gefunden werden. Schließlich setzt man diese Teilfiguren zur gesuchten

[5]Dieser Abschnitt kann gegebenenfalls zunächst beim ersten Lesen übersprungen werden!

Figur zusammen.

Solche etwas schwierigeren Aufgaben werden im folgenden genannt. Dabei wird auch vielfach der sog. Kreis des Apollonios erwähnt und benutzt. Die beiden Aufgaben b) und c) in diesem Abschnitt mögen ihn erläutern.

a) Auf einer Geraden liegen vier Punkte. Die drei durch sie begrenzten Strecken sollen von einem gesuchten Punkt aus unter dem gleichen Winkel erscheinen.

Es seien A, B, C, D die gegebenen Punkte; X sei der gesuchte Punkt. Dann stellt man als erste Bedingung $\angle AXB = \angle BXC$ auf. Aber aus dieser Bedingung allein, lässt sich nur mit größter Mühe die Bahnkurve des Punktes X ermitteln. Schon die Konstruktion beliebig einzelner Lagen ist nicht ganz einfach!

Man versuche es und gehe dabei jedes mal von dem dem Dreieck AXC umbeschriebenem Kreis aus. Mit der Bewegung des Punktes X wollen wir uns hier ein wenig beschäftigen, da sie in der Planimetrie recht häufig vorkommt. Man findet sie gewöhnlich aus den Eigenschaften der Winkelhalbierenden im Dreieck:
X beschreibt einen Kreis, der sich konstruieren lässt. Der B bezüglich A und C zugeordnete harmonische Punkt B' begrenzt mit B den Durchmesser. Einen zweiten solchen Kreis für X liefert die Bedingung $\angle BXC = \angle CXD$.

Diese hier zweimal benutzte Bestimmungslinie für den Punkt X wird der Kreis des Apollonios genannt. Er wird sehr häufig für die Durchführung von Konstruktionen gebraucht. Für zwei Fälle ist er fast unentbehrlich:

b) Von einem Dreieck ABC liege die Seite BC und auf ihr ein Punkt D fest. Die Winkelhalbierende bei A soll durch D gehen. A bewegt sich dann auf einem Kreis, dessen Durchmesser durch D selbst und den D harmonisch zugeordneten Punkt D' bestimmt ist. Es gilt also $DA : DB = D'A : D'B$.

c) Ein Dreieck ABC sei gegeben. Die Seite BC liegt fest. Die Seiten AB und AC sollen in einem gegebenen Verhältnis $p : q$ stehen. A kann sich dann nur auf einem Kreise bewegen, dessen Durchmesser durch den inneren und äußeren Teilpunkt der Strecke BC nach dem vorgegebenen Verhältnis $p : q$ bestimmt ist.

d) Ein gegebenes Parallelogramm $ABCD$ (Bild 114) soll in ein anderes "flächengleiches" verwandelt werden, dessen Seiten a' und b' gegeben sind.

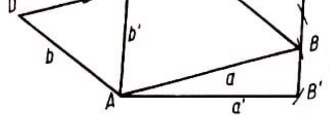


Bild 114

Hinweis zur Analysis: Man beachte, eine Figur konstruktiv zu verwandeln heißt, aus ihr eine andere mit gleichem Flächeninhalt zu finden.
Zunächst gehe man davon aus, eine Seite des gegebenen Parallelogramms $ABCD$, z. B. $\overline{AB}$ festzuhalten. Da die Seite unverändert gelassen wird, muss auch die zugehörige

Höhe invariant bleiben. Daraus folgt, dass eine Verschiebung der gegenüberliegenden Seite $\overline{CD}$ in ihrer eigenen Geraden, d.h. parallel zur vorerst festgehaltenen Seite AB, möglich ist. Wäre also nur eine Seite a' des gesuchten Parallelogramms $AB'C'D'$ gegeben, so wäre die Lösung unendlich vieldeutig (Begründung), doch durch die weiter gegebene Seite b' wird sie eindeutig!

Hinweise zur Auflösung oder Konstruktion: Auf der Geraden, die $\overline{CD}$ enthält, sind C'' und D' so zu zeichnen, dass $AD' = BC'' = b'$ wird. Welche Konstruktionsschritte? (Dabei wurde AB invariant gelassen!)
Man halte nun $\overline{AD}$ fest, d. h. nun können die Punkte B und C'' auf der Geraden durch diese Punkte verschoben werden. Man findet für sie die Lage $B'C'$ mit der Bedingung $AB' = C'D' = a'$.

Weitere Übungen hierzu:
a) Man mache sich noch einmal genau das dieser Konstruktionsaufgabe zugrunde liegende Gedankenexperiment klar und erläutere dabei die Aufgabe, ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, bei dem 1. eine Seite, 2. zwei Seiten oder andere Geraden im Dreieck vorgegeben sind. Formuliere solche Aufgaben!

b) Fertige zu diesen Aufgaben die Determinationen an!

c) Verwandle ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein flächengleiches, das eine kleinere (größere) anliegende Seite hat.

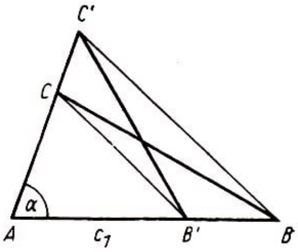


Bild 115

Hinweise zur Analysis (Bild 115):
ABC sei das gegebene und $AB'C'$ das gesuchte Dreieck, $AB' = c_1$ die gegebene Seite, $\angle\alpha$ werde festgehalten; dann muss $\triangle BCC' = \triangle BB'C'$ sein, d.h. $BC' \parallel BC$. Begründe!

Hinweise zur Konstruktion:
Zeichne $AB' = c_1$,und $BC' \parallel B'C$. Ist $c_1 > AB$, dann ist $\triangle AB'C'$ als gegeben und ABC als gesucht zu betrachten!

7. Es folgen Aufgaben, in der die Punktsymmetrie die gesuchte Figur mathematisch bestimmt. Außerdem ist die Nebenbedingung gestellt, dass die Figur oder ein Teil Von ihr eine vorgegebene Lage einnimmt.

a) Gegeben sind zwei Kreise um M_1 und M_2 und ein Punkt P. Durch diesen Punkt ist eine Gerade von der einen Peripherie nach der anderen so zu konstruieren, dass die Strecke $\overline{XY}$ in P halbiert wird, wobei X auf dem Kreis um M_1 und Y auf dem Kreis um M_2 liegt.

Lösungshinweise (Bild 116): Man lasse Y auf der gegebenen Kreislinie wandern und trage für jede seiner Lagen Y' die Strecke PY' auf der betreffenden Geraden von P aus bis zum Punkt X' ab. Man lasse dabei vorerst ruhig einmal die Bedingung, X soll auf der Peripherie des anderen Kreises liegen, außer acht!

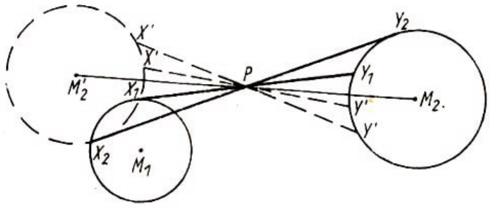


Bild 116

X' beschreibt einen leicht zu bestimmenden Hilfskreis: Der Radius ist gleich dem des Kreises um M_2, sein Mittelpunkt M_2' liegt auf der Geraden durch M_2 und P; von P ist er die Strecke $\overline{PM_2}$ entfernt. Die Schnittpunkte dieses Hilfskreises um M_2' mit dem gegebenen Kreis um M_1 ergeben die Lösungen für die gesuchte Strecke XY, die im Punkte P halbiert wird.

b) Auch wenn statt der Forderung $\overline{PX} = \overline{PY}$ das Verhältnis $\overline{PX} : \overline{PY} = p : q$ verlangt wird, wobei $p : q$ gegeben ist, kann man die Bestimmungslinie für X' angeben.[6]
Diese Punktmenge ist ebenfalls ein Kreis; dessen Radius mit dem gegebenen Radius r nun durch die Beziehung $r' = r_2 \cdot \frac{p}{q}$ verknüpft und dessen Mittelpunkt durch die Gerade M_2P und durch $\overline{M'P} = \overline{M_2P} \cdot \frac{p}{q}$ bestimmt ist. Man sagt dann:

Der Kreis M' liegt affin-perspektiv zu dem Kreis M_2. P wird auch der Ähnlichkeitspunkt genannt. Dieser und das Verhältnis $\frac{p}{q}$ legen den Kreis um M' fest. Soll aber P die Strecke $\overline{XY}$ außen im Verhältnis $\frac{p}{q}$ teilen, so hat das Verhältnis $\frac{p}{q}$ nur das andere Vorzeichen!

Das Wesentliche des Lösungsweges dieser Aufgabe war: Ein gesuchter Punkt wird durch eine sog. Nebenbedingung gezwungen, eine vorgegebene Bestimmungslinie - hier war es der Kreis M' - zu durchlaufen, die zu einer gegebenen Linie - hier Kreis M_2 - affin ist.

8. In den folgenden Dreiecksaufgaben, die z. T. mit ähnlichen Überlegungen bewältigt werden können, seien ABC das Dreieck, a, b, c die Seiten, s_a, s_b, s_c die Seitenhalbierenden und w_α, w_β, w_γ, die Winkelhalbierenden der Winkel α, β, γ.

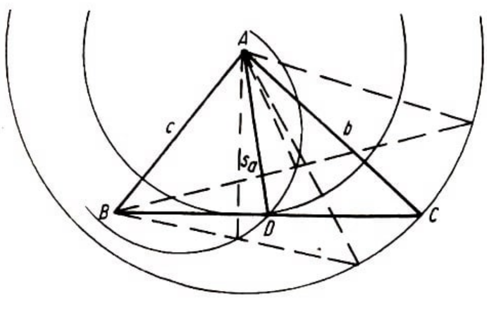


Bild 117

[6] Solche Aufgaben gehören nicht ihr Kongruenzgeometrie, sie dienen hier nur zur Erläuterung des Verfahrens.

a) Ein Dreieck ist aus b, c, s_a zu konstruieren (Bild 117).

Hinweis zur Lösung: Bewegungen können nur bezüglich eines festliegenden Punktes betrachtet werden. Daher wird zuerst die Strecke $\overline{AB} = c$ festgelegt. Wird s_a anfangs unbeachtet gelassen, so kann C nur auf dem Kreis um A mit b liegen. Dann aber bewegt sich der Mittelpunkt D von BC auf einem Kreis, der zu dem ersten perspektiv liegt. B ist der Ähnlichkeitspunkt, und das Verhältnis ist 1 : 2. Durch diesen Kreis und den Kreis um A mit s_a ist die Mitte von BC und damit BC bestimmt.

b) Ein Dreieck ist aus $a, \angle\alpha, s_b$ zu konstruieren.

Hinweise: Es sei $BC = a$. Der Mittelpunkt E von $\overline{AC}$ bewegt sich auf einem Kreis um B mit s_b. Demzufolge bewegt sich A auf dem zu diesem perspektiv liegenden Kreis mit Ähnlichkeitspunkt C und dem Verhältnis 2 : 1.
Berücksichtigt man nur $\angle\alpha$, so ist die für die zweite Bewegung erforderliche Bestimmungslinie für A der Kreis mit $\angle\alpha$ als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{BC}$. Diesen Kreisbogen konnte man auch zuerst verwenden und hat dann für E den zu ihm perspektiv liegenden Kreis mit Ähnlichkeitspunkt C und dem Verhältnis 1 : 2.

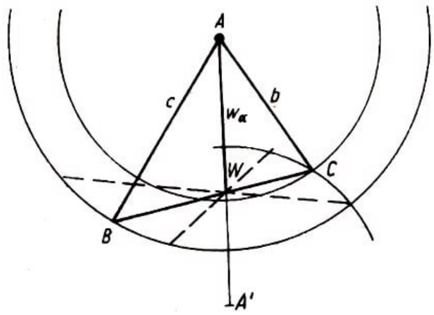


Bild 118

c) Ein Dreieck aus b, c, w_α.

Hinweis: Man lege $\overline{AW} = w_\alpha$ fest (Bild 118) und bewege B auf dem Kreis um A mit c. Da aber die Winkelhalbierende w_α die Strecke $\overline{BC}$ im Verhältnis $c : b$ innerlich teilt, bewegt sich C auf dem zu diesem perspektiven Kreis mit dem Mittelpunkt A'.
W ist der Ähnlichkeitspunkt, $-\frac{b}{c}$ das Teilungsverhältnis. Der Kreis um A mit b gibt die zweite Bestimmungslinie für C.

9. Oft ist es erst dann möglich, eine Konstruktion auszuführen, wenn eine Strecke parallel zu sich verschoben wird, z. B. mit Hilfe eines Parallellineals, wie es bereits bei der Trapezkonstruktion in 5.3.6.1. benutzt wurde.
Dabei wird die folgende Eigenschaft benutzt: Ist die Bahnkurve eines Endpunktes einer Strecke bekannt, so lässt sich auch die des anderen Endpunktes bestimmen. Denn diese ist ja eine bei der Parallelführung zur gegebenen Bahnkurve kongruente Linie. Das erläutert die schon erwähnte Konstruktion des Trapezes. Bei dieser wurde $a = \overline{AB}$ festgelegt.

Lässt man dann d unbeachtet (Bild 119), so kann sich C nur auf dem Kreise um B mit b bewegen. Der Punkt C' führt hierbei die Strecke $'D' = c$ mit, wobei man diese Strecke immer parallel zu AB hält. D' beschreibt dann auch einen Kreis mit dem Radius b, dessen Mittelpunkt auf BA (gerichtet!) von B um c entfernt liegt. Der Schnitt mit dem Kreis d um A ergibt die Ecke D.

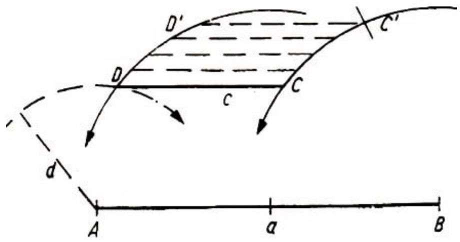


Bild 119

Es folgen weitere Aufgaben, die dieses Konstruktionsprinzip benutzen.

a) Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2 und der Punkt P auf g_1. Auf der Geraden g_1 soll ein Punkt so bestimmt werden, dass er gleiche Abstände von P und g_2 hat.

Lösung: Den gesuchten Punkt lasse man auf g_1 wandern. In jeder möglichen Lage X' trage man die Strecke $X'Y' = X'P$ auf dem von X' auf g_2 gefällten Lote ab. Y' durchläuft dann eine gewisse, einfach zu bestimmende Gerade. Diese schneidet g_2 im Punkt Y, der den gesuchten Punkt X bestimmt. Warum ?

Bemerkung zu dieser Aufgabe: Man hält P sowie g_2 fest, während sich die Gerade g_1 um P dreht. In jeder beliebigen Lage von g_1 möge die soeben ausgeführte Aufgabe erneut gelöst werden.
Der Punkt X, der immer die Eigenschaft beibehält, gleich weit von P und g_2 entfernt zu sein, beschreibt dann eine Parabel, welche g_2 als Leitlinie und P als Brennpunkt hat. Somit führt uns die soeben gestellte Aufgabe zu folgender Erkenntnis:
Eine Parabel ist durch Brennpunkt und Leitlinie gegeben. Ihre Schnittpunkte mit einer durch den Brennpunkt gehenden Geraden sind zu ermitteln.

b) Die folgende Aufgabe gehört ebenfalls in diese Gruppe: Ein Viereck ist aus a, c, $\alpha = \angle(e,a)$, $\gamma = \angle(e,c)$ und $\delta = \angle(f,d)$, zu konstruieren, wobei e und f die Vierecksdiagonalen AC und BD sind.

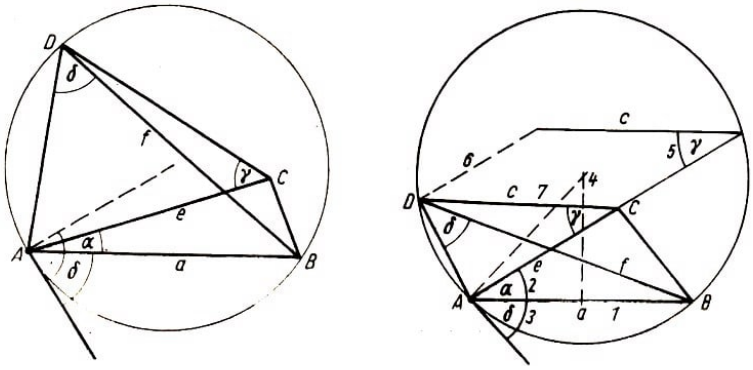


Bild 120 a,b

Bild 120 a zeigt die Analysisfigur, und in Bild 120 b geben die kleinen Zahlen den Weg der Konstruktion an. Ferner können die Lösungen der Viereckskonstruktionen $[a,b,c,\alpha,\delta]$, $[e,f,\angle(e,f),\angle(e,b),\angle(e,d)]$ und die Aufgabe, einem gegebenen Dreieck einen Rhombus einzuschreiben, der mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat, auf die beschriebene Methode zurückgeführt Werden. Führe alle Aufgaben durch!

c) In einen gegebenen Kreis vom Radius r soll eine Sehne a von gegebener Länge und Richtung eingezeichnet werden.
Zur Lösung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einmal lässt man den einen Endpunkt der Strecke a auf dem gegebenen Kreis gleiten, wobei diese stets die vorgegebene Richtung beibehält (Bild 121 a). Der freie Endpunkt der gegebenen Strecke beschreibt dann einen Kreis vom gleichen Radius, dessen Mittelpunkt gegenüber dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises um die Strecke a in der Richtung der Sehne verschoben ist. Die beiden Schnittpunkte der Kreise sind Endpunkte der beiden gesuchten Sehnen.

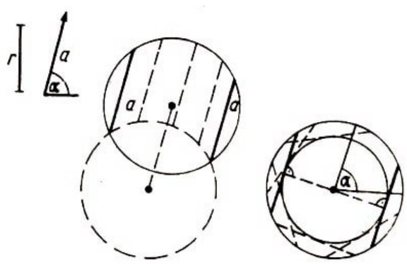


Bild 121 a,b

Bei einem anderen Lösungsweg bleibt zunächst die Richtung unbeachtet. Man lässt die Sehne auf dem gegebenen Kreis gleiten (Bild 121 b). Dabei erkennt man, dass die Mittelpunkte dieser Sehnen auf einem Kreis liegen, der zu dem gegebenen konzentrisch ist. Dieser Kreis wird also von den Sehnen der Länge a "eingehüllt" . Solche Kurven heißen "Hüllkurven".

Nach der Konstruktion der Hüllkurve, d. h. des konzentrischen Kreises, trägt man im Mittelpunkt des Kreises eine Gerade mit der vorgegebenen Richtung ein. zeichnet die dazu parallelen Tangenten an die Hüllkurve und erhält damit die gesuchten Sehnen.

Man kann nun immer bei einer stetigen Bewegung einer Geraden mit Ausnahme der Drehung um einen Punkt und der Parallelverschiebung eine Linie erkennen, die in dieser Weise umhüllt wird.
Ist nun eine solche "Hüllkurve" für eine gesuchte Linie bekannt, so weiß man, dass die gesuchte Gerade Tangente an die Hüllkurve sein muss. Damit aber stellt die Hüllkurve eine Bestimmungslinie für die Gerade dar.
Es kann demzufolge für die vollständige Bestimmung der Geraden nur noch eine zweite Bedingung vorgeschrieben werden, z. B. ein Punkt, durch den sie gehen muss, eine Richtung oder eine zweite Hüllkurve, die ebenfalls berührt werden soll.

Eine solche Hüllkurve hat als Konstruktionshilfe für die Lagebestimmung einer Geraden dieselbe Bedeutung wie die bereits eingeführte Punktmenge für die Festlegung eines Punktes. Wie ein Punkt durch den Schnitt zweier Bestimmungslinien festgelegt ist, so wird also eine Gerade durch zwei derartige Hüllkurven bestimmt, deren gemeinsame Tangente sie sein muss.

Es gibt außer dem Kreis auch noch andere Hüllkurven, z. B. die Ellipse. Jedoch kommt für die hier vorliegenden Konstruktionen nur der Kreis in Frage. Zwei Sonderfälle sind aber zu beachten: Bei der Drehung um einen festen Punkt ist der Hüllkreis zu einem Punkt entartet, während bei der Parallelverschiebung keine Hüllkurve vorliegt.
Das besagt: Folgende Aussagen über die als geometrische Bestimmungslinie ermittelte

Punktmengen sind für eine gesuchte Gerade gleich oder äquivalent:

1. ein vorgegebener Kreis, den sie berühren muss,
2. ein gegebener Punkt, durch den sie gehen muss, und
3. eine gegebene Gerade, der sie parallel bleiben muss.

10. Die folgenden Konstruktionen sind mit Hilfe von geometrischen Bestimmungslinien für eine Gerade vorzunehmen, beruhen also auf der soeben dargestellten Hüllkurveneigenschaft.

a) Von einem gegebenen Dreieck soll durch eine Gerade ein Viereck abgeschnitten werden, das sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist (Eigenschaften eines bizentrischen Vierecks). Der einbeschriebene Kreis des gegebenen Dreiecks ist auch für das gesuchte Viereck ein einbeschriebener Kreis (Inkreis). Dieser stellt eine geometrische Bestimmungslinie für die gesuchte Gerade dar.
Andererseits aber muss die Sehnenvierecksbedingung erfüllt werden. Die gesuchte Gerade bildet danach mit einer Dreiecksseite einen Winkel, der sich mit dem gegenüberliegenden Dreieckswinkel zu $180°$ ergänzt. Damit ist die Richtung der gesuchten Geraden bestimmt.

Anmerkung zum Begriff des "bizentrischen Vierecks".
Ein Viereck, das zugleich Sehnen- und Tangentenviereck ist, heißt bizentrisch. Kann ein Parallelogramm diese Eigenschaft haben? Achte auf In- und Umkreise! Wie viele Stücke eines bizentrischen Vierecks kann man beliebig vorschreiben?

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt P im Innern eines Kreises O zwei zueinander senkrechte Sehnen und lege in ihren Endpunkten die Tangenten an den Kreis. Man beweise: Das entstehende Tangentenviereck ist zugleich ein Sehnenviereck! Man kann dann weiterhin beweisen:

1. Der Mittelpunkt des Umkreises dieses Sehnenvierecks liegt auf der Geraden $\overline{OP}$.
2. Bei Drehung dieses Sehnenpaares um P bewegen sich die Ecken des Vierecks auf diesem Kreis.

b) Ein Viereck ist aus a, b, d, $\angle\gamma$, $\angle\delta$ zu zeichnen!

Hinweis: Man halte die Strecke $\overline{AB} = a$ fest (Bild 122) und lasse die Strecke b um den Punkt B drehen. Der Endpunkt C' beschreibt einen Kreis um B mit b.
Im Punkt C' sei nun eine Gerade unter dem Winkel γ starr verbunden mit $C'B$. Diese Gerade umhüllt dann einen zu dem ersten konzentrischen Kreis. Er kann aus einer beliebigen Lage der Figurenbilder bestimmt werden und stellt also eine Bestimmungslinie für die Vierecksseite CD dar.

Ebenfalls soll die Strecke $AD' = d$ sich um A drehen. Dabei werde die in D' unter dem Winkel δ mit AD' starr verbundene Gerade mitgeführt. So erhält man einen zweiten Kreis um A als zweite geometrische Bestimmungslinie für DC.

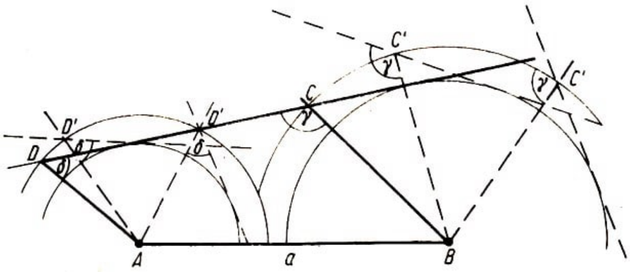


Bild 122

Auf der gemeinsamen Tangente beider Bestimmungslinien liegen dann die Ecken C D. Geeignete Parallelverschiebungen mehrerer gesuchter Linien zugleich können eine gesuchte Figur so verändern, dass nicht ihre Größe, sondern nur die Gestalt oder Form erhalten bleibt. Es entstehen dann "ähnliche" Figuren.

Auch wenn sich das vorliegende Buch im wesentlichen nur mit den kongruenten Abbildungen beschäftigt, mögen auch an dieser Stelle zum Abschluss einige solche mit Ähnlichkeitsbeziehungen betrachtet werden.
Kann man nun in irgendeiner soeben gefundenen Lage diese ähnliche Figur konstruieren, so findet man daraus dann meist in einfacher Weise die gesuchte Figur, denn die von den einzelnen Punkten bei den Transformationen durchlaufenen Linien sind gerade und gehen durch einen Punkt. Man nennt ihn den Ähnlichkeitspunkt für die einzelnen Lagen der in der Gestalt oder Form unveränderten Figur. Manchmal dient dazu die Zerlegung in geeignete Teilfiguren, z. B. Teildreiecke.
Das führt dann auch häufig dazu, die gestellte Aufgabe zunächst in eine andere, leichter lösbare, umzuformen, wobei dann zwischen den gesuchten und gegebenen Stücken neue, in der Aufgabe nicht genannte Stücke eingeführt werden können.

Beispiel 1. Einem gegebenen Dreieck ist ein Quadrat einzubeschreiben, wobei zwei Quadratecken auf einer, die beiden anderen auf den anderen Dreieckslinien liegen sollen.

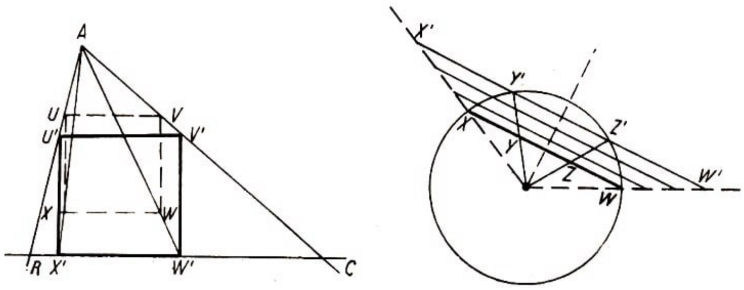


Bild 123,124

Hinweis (Bild 123): Man verschiebe das Quadrat, wobei zugleich seine Größe verändert wird, parallel und lasse dabei seiner Ecken auf den Dreiecksseiten AB und AC laufen. Die beiden anderen Quadratecken bewegen sich dann auf Geraden, die durch A gehen. Irgendeine Lage des Quadrates kann nun konstruiert werden. Dazu wähle man beliebig $UV \parallel BC$. Über UV zeichnet man das Quadrat $UVWX$. Die Geraden AW und AX geben die Ecken W' und X' auf BC. Die Ecken U' und V' ergeben sich einfach.

Beispiel 2. In einem Kreise sind zwei Radien gegeben. Es soll eine Sehne so gezeichnet werden, dass sie durch diese Radien gedrittelt wird.

Analysis (Bild 124): Es ist sofort zu sehen, dass die Sehne senkrecht zur Halbierungslinie

des von den Radien gebildeten Winkels verlaufen wird. Man verschiebe sie nun parallel und sorge dafür, dass sie in jeder Lage ähnlich zur verlangten Anordnung bleibt.
Stets ist $\overline{X'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'W'}$. Dann müssen sich X' und W' auf Radien des Kreises bewegen. Zeichnet man nun $Y'Z'$ in beliebiger Lage, aber senkrecht zur Winkelhalbierenden, verlängert sie nach beiden Seiten um sich selbst, so erhält man die gesuchten Hilfsradien.

Beispiel 3. Ein Dreieck aus einer Seite und dem ihr gegenüberliegenden Winkel ist so zu zeichnen, dass die Halbierungslinie dieses Winkels, die Höhe einer zweiten Dreiecksseite und die Mittellinie der dritten Dreiecksseite durch einen Punkt gehen.

Anleitung: Fertige eine Analysisfigur an!
Gegeben sind z. B. a und $\angle\alpha$. Im gesuchten Dreieck sollen w_α, s_b, h_c durch einen Punkt T gehen. Der Winkel α werde als fest angenommen. Die Seite BC werde parallel verschoben.

Die entstehenden Dreiecke $AB'C'$ haben dann alle die gleiche Eigenschaft: T, der Schnittpunkt von $w\alpha, s_b$ und h_c, bewegt sich auf der Winkelhalbierenden von α. Wird er auf dieser in der beliebigen Lage T' angenommen, so gibt das von T' auf einen Schenkel von α gefällte Lot mit dem anderen Schenkel den Punkt C'. Der Mittelpunkt D' von AC' ist dann mit T' zu verbinden. Man findet B'.
Die Strecke $B'C'$ ist parallel zu verschieben, bis sie die gewünschte Länge von a hat. Parallelverschiebung!

Beispiel 4. Ein Sehnenviereck ist zu konstruieren aus a, α, e, f.

Zeichne die Figur! Prüfe: a, α und f bestimmen das Dreieck ABD! Auf dieses beziehe die Bewegungen des Punktes C. C bewegt sich dabei (Sehnenviereck!) auf dem Umkreis von ABC, aber auch auf dem Kreis um A mit e!

Beispiel 5. Ein Dreieck ist aus a, h_b, $\angle(c, s_a) = \delta$ zu zeichnen!

Hinweis: Mit Bild 125 ist die Konstruktion leicht zu finden.
Durch a und h_b ist das rechtwinklige Dreieck BCE bestimmt. Die Gerade CE ist die geometrische Bestimmungslinie für A. $\angle\delta$ bedingt, dass A auf dem Kreisbogen mit $\angle\delta$ als Peripheriewinkel und der Strecke BD als Sehne liegt.

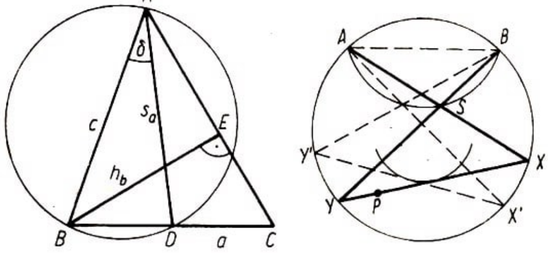


Bild 125,126

Beispiel 6. Die Punkte A und B sowie P sind gegeben, ferner ein Kreis durch die beiden ersten. Die Sehne XY soll so durch P gehen, dass der von AX und BY gebildete Winkel eine vorgeschriebene Größe besitzt.

Hinweis; Man bewege AS (Bild 126) so, dass die Größe des Winkels ASB immer gleich

α bleibt, d. h. auf einem bestimmten Kreisbogen. Dann nimmt der Winkel SAB um die gleiche Größe zu, wie SBA abnimmt oder umgekehrt! Beide zusammen betragen stets $\pi - \alpha$. In dem gegebenen Kreis sind sie Peripheriewinkel.

Bei der angegebenen Bewegung nimmt daher der Bogen $\widehat{BX}$ um die Größe zu, wie der Bogen $\widehat{AY}$ abnimmt, d. h. der Bogen $\widehat{XY}$, damit auch die Sehne $\overline{XY}$ behalten ihre Größen (konstante Längen). Durch eine beliebige Lage des Punktes S ($\angle ASB = \alpha$!) ist diese Länge bestimmt und daraus der Kreis herstellbar, den $\overline{XY}$ umhüllt. An diesen zieht man von P aus die Tangente.

Beispiel 7. Ein Tangentenviereck ist aus a, d, β, δ zu konstruieren.

Hinweis: Lösung mit Hilfe der Spiegelung.
Ist M der Mittelpunkt des Inkreises, so halbiert AM den Winkel bei A. Das Dreieck ACD spiegle man an AM. Dann fällt D in D' auf AB. Der Kreis geht in sich über (Fixpunkte!). DC wird in $D'C'$ übergeführt und wird Tangente an dem Kreis.
Mit $\overline{AD'} = d$ können die Punkte A, D' und B festgelegt werden. Die in ihnen angetragenen Winkel δ und β geben zwei Tangenten des Kreises, die zusammen mit der Tangente AB diesen Kreis bestimmen.
Führe die Konstruktionen zur Übung selbst durch!

6 Die Gruppe der Bewegungen und die Spiegelungen

6.1 Die Bewegungsgruppe

6.1.1 Der Begriff der Gruppe

In den verschiedenen Methoden zur Ausführung der geometrischen Kreiskonstruktionen wurden neben der geometrischen Bestimmungslinie weitgehend Drehungen, Parallelverschiebungen und Spiegelungen herangezogen. Diese geometrischen Elemente dienen nicht nur zur Ausführung der Konstruktionen, sondern sie werden auch für die Beweisführung benutzt.
Ja noch mehr, man kann mit ihnen bei konsequenter Anwendung die wesentlichsten Tatsachen der Planimetrie erarbeiten.
Der Versuch hierzu wurde teilweise in den vorangegangenen Abschnitten unternommen. Zum Abschluss soll noch einmal diese Methodik in ihrer Gesamtheit betrachtet und an einigen Beweisen erläutert werden. Dazu müssen aber noch einmal die benutzten Elemente Verschiebung, Drehung und Spiegelung einzeln betrachtet werden, um sie systematisch zusammenzufassen.

Beginnen wir mit der Drehung: Wird ein Strahl um seinen Anfangspunkt O (Bild 127) um den Winkel φ_1 gedreht, so bildet der ursprüngliche Strahl mit seinem Bild den Winkel AOB_1.

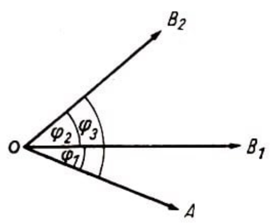


Bild 127

Dreht man den Strahl OB_1 um einen weiteren Winkel φ_2, so entsteht der Winkel AOB_2 mit einer Öffnung φ_3.
Diese Winkelgröße φ_3 setzt sich aber additiv aus φ_1 und φ_2, d. h. $\varphi_1 + \varphi_2$ zusammen.
Diesen einfachen Vorgang kann man weiter für die Ebene verallgemeinern.

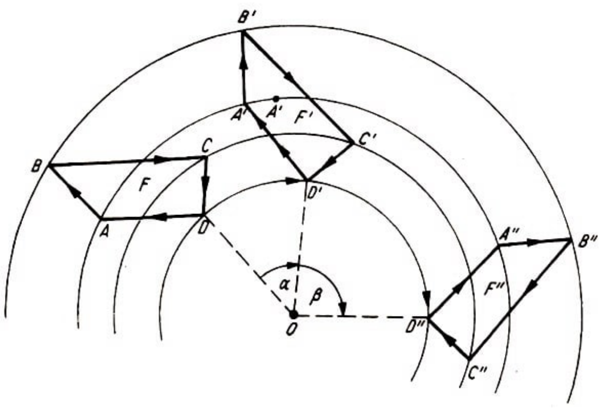


Bild 128

Wenn bei einer Drehung in der Ebene E um den Punkt O (Bild 128) eine Figur F in die Figur F', bei einer zweiten in die Figur F'' übergeführt wird, so kann F auch durch eine einzige Drehung aus F in F'' gebracht werden.

Diese Tatsache lässt sich so aussprechen:

1. Zwei Drehungen um einen Punkt O, die hintereinander ausgeführt werden, können stets durch eine einzige ersetzt werden.

$$D^{\varphi_1}(F) \to F'; \qquad D^{\varphi_2}(F') \to F'' \qquad \text{oder}$$
$$D^{\varphi_1} D^{\varphi_2}(F) = D^{\varphi_1+\varphi_2}(F) = D^{\varphi}(F) \to F''$$

2. Sind mehr als zwei Drehungen um das gleiche Zentrum auszuführen, z. B. D^{φ_1}, D^{φ_2}, D^{φ_3}, so können mehrere zusammengefasst werden, ohne dass sich das Endergebnis der Drehungen ändert:

$$D^{\varphi_1} D^{\varphi_2} D^{\varphi_3} = D^{\varphi_1+\varphi_2} D^{\varphi_3} = D^{\varphi_1} D^{\varphi_2+\varphi_3} = D^{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}$$

Die Drehungen sind also assoziativ.

Weiterhin ist ohne Mühe einzusehen: Wird auf eine Figur die Drehung D mit der Winkelgröße φ_1 ausgeführt, so erhält man die Lage von F'. Wenn man aber nun eine zweite Drehung mit der Winkelgröße $\varphi_2 = -\varphi_1$ auf die Figur F' ausübt, so gelangt F' wieder in die Lage von F , d.h. in die Ausgangslage. Die Figur ist zurückgedreht worden. Man drückt dies allgemein so aus:

3. Zu jeder Drehung existiert auch die umgekehrte Drehung.

$$D^{\varphi_1}(F) \to F'; \qquad D^{-\varphi_1}(F') \to F; \qquad \text{oder} \qquad D^{\varphi} D^{-\varphi}(F) = D^{\circ}(F) \equiv F$$

Wenn man den Winkel $\varphi = 0$ als Drehwinkel wählt, findet man eine Abbildung, bei der alle Punkte der Figur in Ruhe, d. h. in ihrer Lage bleiben. Eine solche nennt man die identische Abbildung oder kurz Identität. Es gilt also:

4. Unter den Drehungen ist auch die identische Abbildung enthalten.

Ähnliche Eigenschaften wie die Drehung besitzt auch die Verschiebung oder Translation (Bild 129).

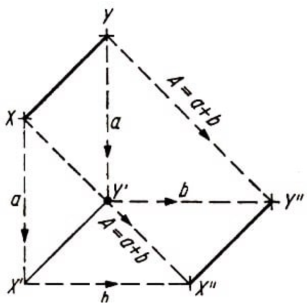


Bild 129

Werden z. B. zwei Verschiebungen in beliebiger Richtung hintereinander ausgeführt, so geht bei der ersten die Strecke XY in die Strecke $X'Y'$ über, bei der zweiten die Strecke $X'Y'$ in $X''Y''$. Alle diese Strecken sind zueinander parallel und gleich lang. Sie sind ja durch Verschiebung oder Translation aus XY abgebildet werden.
Man hätte aber auch XY durch eine einzige Translation in $X''Y''$ abbilden können. Die Eigenschaften der Verschiebung können also ausgesprochen werden:

1. Zwei Verschiebungen, die hintereinander ausgeführt werden, können stets durch eine einzige Verschiebung ersetzt werden. Die Zusammensetzung von zwei Verschiebungen oder Translationen werden mit dem Symbol $+$ bezeichnet.
Es ist also $\overrightarrow{\tau}_1 + \overrightarrow{\tau}_2$ die Translation, die entsteht, wenn man z.B. auf einen Punkt A zuerst $\overrightarrow{\tau}_1$ und dann $\overrightarrow{\tau}_2$ anwendet. Bildet $\overrightarrow{\tau}_1$ den Punkt A auf B ab. $\overrightarrow{\tau}_2$ den Punkt B auf C, dann bildet $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau}_1 + \overrightarrow{\tau}_2$ den Punkt A auf C ab. Diese Abbildung kann durch den Diagonalenvektor $\overrightarrow{\tau}$ in dem Parallelogramm $ABCD$ (Bild 130) dargestellt werden.

Ferner ist nach den Sätzen über das Parallelogramm $\overrightarrow{\tau}_1 + \overrightarrow{\tau}_2 = \overrightarrow{\tau}_2 + \overrightarrow{\tau}_1$, d. h., die Reihenfolge der Translationen ist austauschbar, es gilt das kommutative Gesetz.

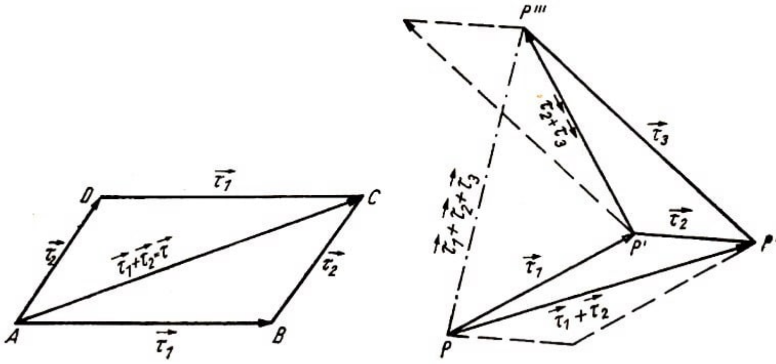


Bild 130,131

2. Wie man aus Bild 131 sieht, kann man bei mehreren Translationen je zwei beliebig zusammenfassen, d. h., auch die Translationen sind assoziativ:

$$\overrightarrow{\tau}_1 + (\overrightarrow{\tau}_2 + \overrightarrow{\tau}_3) = (\overrightarrow{\tau}_1 + \overrightarrow{\tau}_2) + \overrightarrow{\tau}_3 = \overrightarrow{\tau}_1 + \overrightarrow{\tau}_2 + \overrightarrow{\tau}_3$$

3. Zu jeder Verschiebung gibt es auch eine umgekehrte oder inverse Verschiebung, d. h. $T_1\overrightarrow{a}(X) \to X'$; $T_2^{\overleftarrow{a}}(X') \to X$ oder $T_1^{\overrightarrow{a}} T_2^{\overleftarrow{a}}(x) = X$, also $T^{(circ)}(X) = X$, da $\overrightarrow{a} + \overleftarrow{a} = 0$ (Strecke 0).

4. Unter den Verschiebungen ist die Identität enthalten, die durch den 0-Vektor dargestellt wird.

Die beiden Mengen von Abbildungen, Translationen und Drehungen um das gleiche Zentrum haben also folgende Eigenschaften:

1. Gehören zwei Abbildungen zur gleichen Art oder zur gleichen Menge, so gehört auch die aus beiden zusammengesetzte Abbildung dieser Menge an.
2. Dabei gilt das assoziative Gesetz.
3. Zu jeder Abbildung der Menge gehört auch eine inverse Abbildung oder die Umkehrung.
4. Der Menge dieser Abbildung gehört auch die Identität an.

Eine Menge, deren Elemente diesen vier Bedingungen genügen, heißt Gruppe. Die Drehungen um das gleiche Zentrum und die Translationen bilden also je eine Gruppe.
Der Gruppenbegriff ist im Laufe des letzten Jahrhunderts immer mehr zu entscheidender Bedeutung gelangt und wird für die wissenschaftliche Forschung nicht nur in der

Geometrie, sondern auch in fast allen Gebieten der Mathematik verwendet.

Die Elemente von Gruppen können beliebige Größen oder Vorgänge sein, z. B. Zahlen oder - wie in unserem Fall - Translationen oder Drehungen um das gleiche Zentrum, sofern sie sich miteinander verknüpfen lassen und den vier Bedingungen genügen. Die Verknüpfungsvorschrift kann - entsprechend den Elementen - ebenfalls verschieden sein, z. B. bei Zahlen die Addition oder Multiplikation, bei Bewegungen die Hintereinanderausführung der Bewegungen usw.

6.1.2 Die Gruppe der Bewegungen und die gleichsinnige Kongruenz

Drehungen um beliebige Punkte in der Ebene bilden aber keine Gruppe. Das lässt sich folgendermaßen zeigen:
Wenn zwei Drehungen (Bild 132) um verschiedene Drehpunkte O_1 und O_2 hintereinander ausgeführt werden, so geht selbstverständlich eine gegebene Figur F in F' und F' in F'' über. Aus der Figur entnimmt man auch, dass alle entsprechenden Seiten von F und F'' zueinander parallel sind.

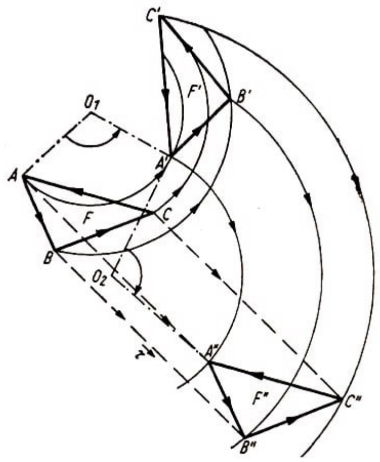


Bild 132

F und F'' kann durch eine Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Die resultierende Abbildung ist in diesem Falle also eine Translation und keine Drehung.
Allgemein kann man jedoch beweisen, dass sich zwei Drehungen um verschiedene Punkte immer durch eine einzige Drehung oder eine Translation ersetzen lassen.

Werden zwei Drehungen um verschiedene O_1 und O_2 hintereinander ausgeführt, dass $F \to F' \to F''$ abgebildet wird, so sind F und F'' gleichsinnig kongruent. Es muss nun gezeigt werden, dass zwei gleichsinnig kongruente Figuren sich stets durch eine einzige Parallelverschiebung oder Drehung zur Deckung bringen lassen.
Gleichsinnig kongruent bedeutet dabei, dass nach Ausführung der Abbildung der Richtungssinn oder die Anordnung der Punkte in der Figur erhalten bleibt.

Bei der Durchführung des Beweises müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. (Bild 132) Die entsprechenden Strecken von F und F'' sind paarweise parallel und gleichgerichtet. Die Figuren lassen sich durch eine einzige Verschiebung um eine bestimmte Strecke zur Deckung bringen.

2. (Bild 133) Sind die entsprechenden Strecken von F und F'' nicht parallel oder sind sie parallel, aber nicht gleichgerichtet, so lassen sich die Figuren durch eine Drehung so abbilden, dass sie zur Deckung kommen.

Der Beweis ist zwingend, wenn es gelingt, den Mittelpunkt O der Deckung zu konstruieren. Dabei wird aber die Methode wieder angewandt, welche bereits für die Ausführung der Grundkonstruktionen der Drehung benutzt wurde.
Den Mittelpunkt O findet man als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei entsprechenden Punktpaaren A, A'' und B, B''. Da aber O auf den Mittelsenkrechten von AA'' und BB'' liegt, ist $\overline{OA} = \overline{OA''}$ und $\overline{OB} = \overline{OB''}$. Aus der Kongruenz von F und F'' folgt ferner $\overline{AB} = \overline{A''B''}$.

Auch die Dreiecke AOB und $A''OB''$ sind daher kongruent, sie stimmen in 3 Seiten überein. Wird nun der Winkel AOA'' um den Punkt O gedreht, so wird AO auf die Strecke $A''O$ abgebildet, das Dreieck AOB auf $A''OB''$. Mit anderen Worten:

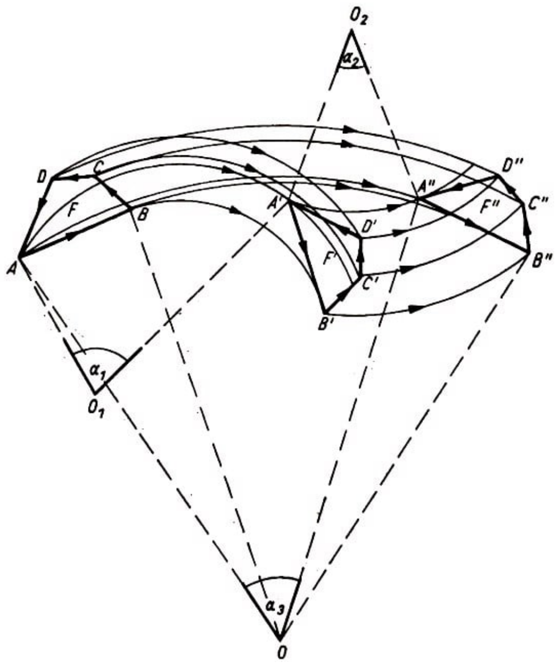


Bild 133

AB wird bei dieser Drehung auf $A''B''$ und folglich auch das Dreieck ABC auf das kongruente Dreieck $A''B''C''$ abgebildet. Dies aber gilt auch für beliebige Polygone, denn ein jedes Polygon kann bekanntlich in Dreiecke zerlegt werden.
Das Ergebnis zweier hintereinander ausgeführter Drehungen um zwei verschiedene Drehpunktmittelpunkte ist entweder eine Translation oder eine Drehung.

Dabei taucht nun von selbst die Frage auf: Bilden die Drehungen und die Translationen zusammen eine Gruppe?

1. a) Es ist bekannt, die Hintereinanderausführung von zwei Parallelverschiebungen ist wieder eine Parallelverschiebung.
b) Die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen ist entweder eine Drehung oder eine Parallelverschiebung.
c) Die Zusammensetzung einer Drehung und einer Parallelverschiebung ist eine Drehung. Entsprechende Seiten von F und F'' können in diesem Fall nicht parallel und

gleichgerichtet sein. Diese kann man aber, wie gerade bewiesen wurde, durch eine Drehung ineinander abbilden.

Die resultierende Abbildung ist also in jedem Fall in der Menge der Drehungen und Verschiebungen enthalten.

2. Die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes lässt sich ebenfalls nachweisen.
3. Zu jeder Drehung und zu jeder Translation gibt es die inverse Abbildung.
4. Die Menge enthält auch die Identität (Drehung um $0°$ oder Verschiebung um den Nullvektor).

Daraus folgt: Die Vereinigungsmenge der Drehungen und Parallelverschiebungen bildet eine Gruppe.
Sie heißt die Bewegungsgruppe.

In dieser stellen die Drehungen um einen Punkt und die Verschiebungen für sich als Teilmengen dieser Gesamtmenge bereits eine Gruppe dar. Diese werden Untergruppen genannt. Die Drehungen um mehrere Drehmittelpunkte, welche ebenfalls in der Gesamtgruppe enthalten sind, stellen dagegen keine Untergruppe für sich dar.

- Bewegungsgruppe
  - Drehungen
    - Drehungen um einen Mittelpunkt (Untergruppe)
    - Drehungen um mehrere Mittelpunkte
  - Translationen (Untergruppe)

Durch die Abbildungen der Bewegungsgruppe kann man also eine Figur auf jede beliebige gleichsinnig kongruente Figur abbilden. Durch die Abbildungen der Untergruppen der Verschiebungen erhält man aus einer Figur nur die gleichsinnig kongruenten Figuren, deren entsprechende Seiten parallel und gleichgerichtet sind.
Dagegen erhält man bei einer Drehungsabbildung um einen Drehungsmittelpunkt nur die gleichsinnig kongruenten Figuren, bei denen entsprechende Punkte auf einem Kreis um den Drehpunkt liegen. Sie werden auch zuweilen radial kongruent genannt.

6.2 Die Spiegelungen

Außer den Bewegungen wurden die Spiegelungen an einer Geraden und an einem Punkt betrachtet. Die Punktspiegelungen wollen wir hier nicht behandeln; denn sie sind keine Spiegelungen im eigentlichen Sinne, sondern Drehungen um $180°$; sie gehören also zu den Bewegungen und sind somit Elemente der Bewegungsgruppe. Die Spiegelungen an beliebigen Achsen bilden keine Gruppe.

Werden z. B. zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden hintereinander ausgeführt, so geht F_1 in F_2 und F_2 in F_3 über. Dabei sind F_1 und F_2 (Bild 134) und F_2 und F_3 Spiegelbilder. F_1 und F_3 sind also gleichsinnig kongruent und können daher nicht durch eine einzige Spiegelung zur Deckung gebracht werden.

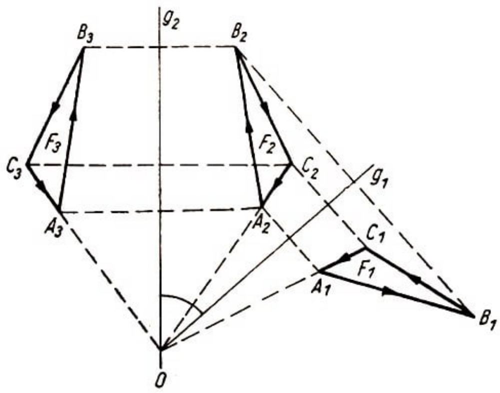


Bild 134

Demzufolge kann das Ergebnis bei einer Hintereinanderausführung zweier Geradenspiegelungen keine Spiegelung, sondern muss eine Bewegung sein. Bei dieser Abbildung der Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden blieb der Schnittpunkt fest und also derselbe. Daher muss eine Drehung vorliegen.

Werden aber zwei Spiegelungen (Bild 135) an parallelen Geraden hintereinander ausgeführt, so ergibt sich aus F_1 für F_3 ebenfalls eine gleichsinnig kongruente Figur. Auch hierbei zeigt es sich, dass die Gleichsinnigkeit nicht durch eine Spiegelung allein erzielt werden kann. Die resultierende Abbildung muss auch hier eine Bewegung sein. Dabei stehen die Geraden, welche in sich übergeführt werden, auf den Spiegelachsen senkrecht. Die resultierende Abbildung ist also eine Translation.

Die Frage, ob die Spiegelungen zusammen mit den Bewegungen eine Gruppe bilden, ist ebenfalls zu verneinen. Den Beweis hierfür führe der Leser durch Prüfung der aufgestellten Bedingungen durch.
Es werde also noch einmal zusammengefasst:

1. Zwei gegebene in der Ebene gleichsinnig kongruente Figuren können entweder durch eine Translation oder eine Drehung in- einander abgebildet werden.

2. Jede ebene Bewegung lässt sich entweder durch eine einzige Translation oder eine einzige Drehung ersetzen.

3. Zwei in der Ebene gegebene ungleichsinnig kongruente Figuren; können entweder durch eine Geradenspiegelung oder aber durch eine Geradenspiegelung und eine anschließende Translation ineinander abgebildet werden.

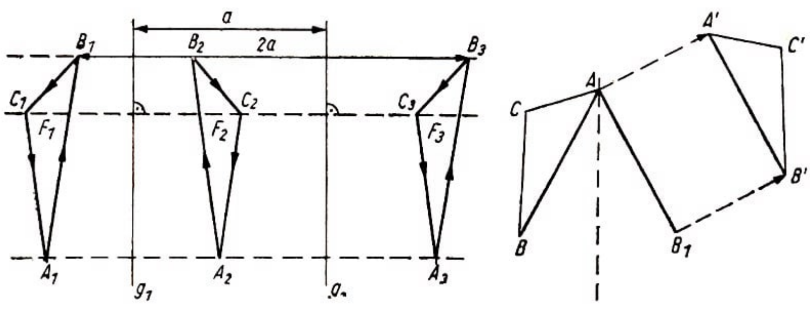


Bild 135,136

Führe den Beweis zu 3! Hinweis:
a) Fall der Achsensymmetrie! Geradenspiegelung.

b) Wähle in F eine Strecke $\overline{AB}$; die entsprechende in F' sei $\overline{A'B'}$. Ist $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, so führt. eine Spiegelung an $\overline{AB}$ mit anschließender Translation um $\overline{AA'}$ zum Ziel.
c) Ist $\overline{AB} \nparallel \overline{A'B'}$ (Bild 136), so wähle man $\overline{AB_1} \parallel \overline{A'B'}$. Nun Spiegele man F an der Winkelhalbierenden des Winkels BAB_1 und führe anschließend die Translation AA' aus.

6.3 Die zusammengesetzten Abbildungen

Aus 6.1. und 6.2. geht aber hervor, dass die Elemente der einzelnen Gruppen bzw. die der Menge der Geradenspiegelungen durch Hintereinanderausführen zusammengesetzt werden können. Die wichtigsten Tatsachen wurden in der Tabelle 3 (nächste Seite) zusammengestellt.

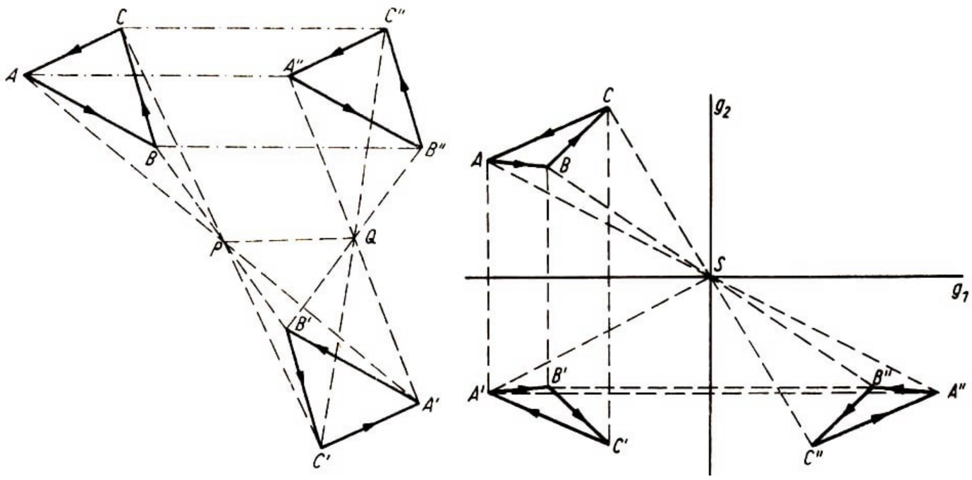


Bild 138 und 139

In den dazugehörigen Abbildungen soll die Gleichsinnigkeit oder ihre Änderung durch Richtungspfeile sichtbar gemacht werden. Weiter unten werden einige Hinweise gegeben, mit deren Hilfe die in der Tabelle ausgesprochenen Eigenschaften nachzuweisen sind.

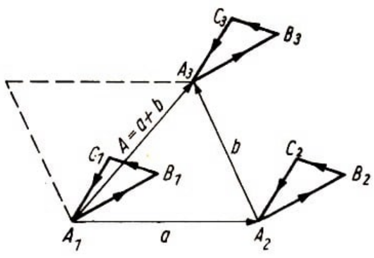


Bild 137

Zur Übung möge der Leser die nachfolgenden Aufgaben lösen:

Durch welche Bewegung kann die nachfolgende zusammengesetzte Abbildung ersetzt werden:

1. Eine Translation und eine Drehung.
2. Eine Translation und eine Punktspiegelung oder Drehung um $180°$, auch Halbdrehung genannt.

Tabelle 3. Hintereinanderausführung gleichartiger Abbildungen

	Zwei	um	kann man ersetzen durch eine	um	siehe Bild
1.	Translationen	die Strecke a und b	Translation	die Strecke $A = a + b$	137
2.	Drehungen	denselben Punkt O mit den Drehwinkeln $A = a + b$	Drehung	O mit Drehwinkel $\alpha + \beta$	128
3.	Drehungen	die Punkt O_1 und und O_2 mit den Drehwinkeln α_1 und α_2	Drehung	den Schnittpunkt O der Mittelsenkrechten auf AA'' und BB'' mit dem Drehwinkel α_3	133
4.	Drehungen	die Punkt O_1 und und O_2 mit entgegengesetzt gleichen Drehwinkeln	Translation	die Strecke $a = \overline{AA''}$	132
5.	Punktspiegelungen	die Punkte P und Q	Translation	die Strecke $2\overline{PQ}$	138
6.	Geradenspiegelungen	zwei parallele Achsen g_1 und g_2	Translation	Strecke, deren Länge gleich dem doppelten Abstand von g_1 und g_2 ist	
7.	Geradenspiegelungen	zwei zueinander senkrechte Achsen g_1, g_2	Punktspiegelung	Schnittpunkt S von g_1 und g_2	139
8.	Geradenspiegelungen	zwei sich unter bel. Winkel schneidende Achsen	Drehung	Schnittpunkt von g_1 und g_2 mit dem Drehwinkel $2 \cdot \angle(g_1 g_2)$	134

3. Eine Translation und eine Geradenspiegelung, deren Achse senkrecht zur Verschiebungsrichtung ist.
4. Eine Drehung und eine Punktspiegelung.
5. Eine Drehung und eine Geradenspiegelung, deren Achse durch den Drehpunkt geht.
6. Eine Punktspiegelung und eine Geradenspiegelung, deren Achse durch den Punkt geht, an dem gespiegelt wird.
7. Sind in den Aufgaben 1 bis 6 die Abbildungen vertauschbar?

Hinweise zum Nachweis für die in Nr. 1-8 der Tabelle ausgesprochenen Sätze:

Zu 1: Man zeige, dass $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{C_1C_3}$ ist!

Zu 3: Man zeige, dass $\triangle OAB \cong \triangle OA''B''$ (gleichsinnige Kongruenz); AB kann also durch Drehung um O in $A''B''$ abgebildet werden.

Zu 4: Man zeige, dass $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{CC''}$ ist!

Zu 5: Man zeige, dass $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC''}$ ist!

Zu 6: Sind A_1, A_2 und A_3 kollinear, d. h., liegen sie auf einer Geraden? Vergleiche die Teilstrecken, aus denen sich $\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{B_1B_3}, \overrightarrow{C_1C_3}$ zusammensetzen!

Zu 7 : Vergleiche $\overline{SA}, \overline{SA'}, \overline{SA''}$ sowie die Winkel, welche diese Strecken mit den Geraden g_1 und g_2 bilden.
Zu 8: Benutze 7!

6.4 Beweistechnik mit Hilfe der Abbildungen. Beispiele

6.4.1 Begriffe: Lehrsatz, Umkehrung, hinreichende und notwendige Bedingung

Mathematische Tatsachen werden in der Form von Sätzen, den Lehrsätzen, ausgesprochen. Wenn ein Dreieck gleich große Seiten hat, so hat es auch gleich große Winkel. Ein solcher Satz besteht aus zwei wesensverschiedenen Teilen.

Im ersten, der durch den "Wennsatz" zum Ausdruck kommt, ist die Bedingung oder Voraussetzung gegeben, die für die Aussage erforderlich ist. Dann folgt im "Sosatz" die Behauptung oder Folgerung, welche mit Hilfe der durch die Voraussetzung gegebenen Tatsachen zu beweisen ist. Der Beweis besteht also darin, aus den gegebenen Bedingungen und den bereits bekannten Sätzen schrittweise die Behauptung aufzubauen. Jeder neue Lehrsatz wird also auf bereits bekannte aufbauen.

Schließlich muss man dann einmal Sätze annehmen, die sich innerhalb dieses Systems von Sätzen nicht mehr auf andere zurückführen lassen. Das sind die Grundsätze oder Axiome.
Solche hat zwar schon vor 2000 Jahren der griechische Geometer Euklid in seinen Elementen aufgestellt. Sie entsprechen aber nicht den Anforderungen an die Strenge, die wir heute stellen. Einwandfreie und zueinander widerspruchsfreie Axiome der Geometrie stellte erst 1900 der deutsche Mathematiker D. Hilbert auf, auf dessen "Grundlagen der Geometrie" heute das gesamte Gebäude der Geometrie beruht.

Wir wollen hier darauf nicht eingehen, da diesem Gebiet ein anderes Bändchen gewidmet ist, und nur einige Beispiele zur Erläuterung nennen:
"Durch zwei Punkte lässt sich eine und nur eine Gerade ziehen", oder "Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es eine und nur eine Parallele". Auf solchen Axiomen fußt auch die Beweistechnik von Euklid.

In der gegenwärtigen mathematischen Forschung wurden andere Systeme von Axiomen z. B. für Gruppen, für den Vektorraum, für den topologischen Raum und andere mathematische Theorien bzw. Strukturen geschaffen. Das von uns herangezogene Axiomensystem der Gruppe gestattet, die für die Konstruktionen und Beweise verwendeten geometrischen Verwandtschaften sinnvoll zu ordnen.

Dazu gehören nun die durchgehend benutzten Abbildungen, in diesem Buch vorwiegend solche, welche auf kongruente Eigenschaften hinweisen. Das waren die Translationen, die Drehungen und Spiegelungen.
Felix Klein, ebenfalls ein deutscher Mathematiker, der mit D. Hilbert zusammen in Göttingen wirkte, baute von diesem Gesichtspunkt aus in seinem berühmten Erlanger Programm (1872) das Gebäude der Geometrie auf.

Dabei geht er aber kaum auf die elementaren planimetrischen Probleme ein; ihn interessieren die allgemeinen Zusammenhänge der sog. höheren und projektiven Geometrie. Wesentlich aber war, dass es ihm gelang, mit Hilfe dieser Abbildungen und vor allem der Gruppeneigenschaften ein ordnendes Prinzip in die Darstellung der geometrischen Sätze zu bringen.

Der erste, der die Abbildungseigenschaften auch für die elementare Geometrie sowohl der Ebene als auch des Raumes benutzte, und zwar vorwiegend, um die weniger anschauliche axiomatische Methode von Euklid durch eine anschauliche zu ersetzen, war der Physiker und Mathematiker H. v. Helmholtz. Auf ihn gehen die Gedanken zurück, die diesem Buch zusammen mit den Erkenntnissen von D. Hilbert und F. Klein die Leitschnur gegeben haben.

Zu einem jeden Lehrsatz gehört auch die Frage, ob der Satz umkehrbar ist. In dem eingangs gewählten Beispiel kann man nun den "Wennsatz" mit dem "Sosatz" vertauschen.
"Wenn in einem Dreieck die Winkel gleich sind, so hat es auch gleiche Seiten". Das ist die Umkehrung zum ersten Satz, die auch wieder zu beweisen ist.

Aber nicht jeder Satz lässt eine Umkehrung zu. Der Lehrsatz: "Im Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht" ist nicht umkehrbar, wie der Leser leichtfinden wird, sobald er den Lehrsatz in einen "Wenn-" und "Sosatz" zerlegt hat.
Das Senkrechtstehen der Diagonalen trifft ja auch für den Rhombus und das Drachenviereck zu. Das Senkrechtstehen der Diagonalen ist eine notwendige Folge der Voraussetzung, dass es sich um ein Quadrat handelt. Andererseits ist die Angabe, dass das Viereck ein Quadrat ist, ausreichend oder hinreichend dafür, dass die Diagonalen senkrecht stehen, während die Bedingung senkrecht stehender Diagonalen nicht ausreichend ist, um daraus auf ein Quadrat zu schließen.
Das bestärkt aber die Forderung, dass auch die Umkehrung eines Satzes als Satz bewiesen werden muss.

Mit Rücksicht auf die Umkehrung von Sätzen ist es zweckmäßig, als "Bedingungen" das zu bezeichnen, was die "Voraussetzung" enthält, als "Aussagen" aber das, was in der "Behauptung" ausgesprochen wird. Aber auch das kann wiederum als Bedingung für den Satz angesehen werden.
Die Voraussetzung ist dabei die hinreichende Bedingung und die anschließende Behauptung die notwendige Bedingung. Gilt nun der Lehrsatz auch in seiner Umkehrung, dann sind die beiden Bedingungen zugleich hinreichend und notwendig.

Mit diesen logischen Überlegungen lassen sich Sätze einschließlich ihrer Umkehrung oft sehr einfach und übersichtlich aussprechen. Der obige Satz z.B. lautet dann: Die Gleichheit der Winkel ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für ein gleichseitiges Dreieck. Aber es lassen sich so noch weitere Eigenschaften, z. B. über die Symmetrie am Dreieck, kurz aussprechen: Die Gleichheit der Basiswinkel ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein gleichschenkliges Dreieck.

6.4.2 Beispiele

Im ersten Beispiel werde der hier aus der Abbildungsgeometrie gewählten Beweismethodik die von Euklid gegenübergestellt.

Satz: Trägt man auf den Seiten eines Quadrates von den 4 Ecken aus im gleichen Umlaufsinn gleiche Strecken ab, so sind deren Endpunkte Eckpunkte eines Quadrates.

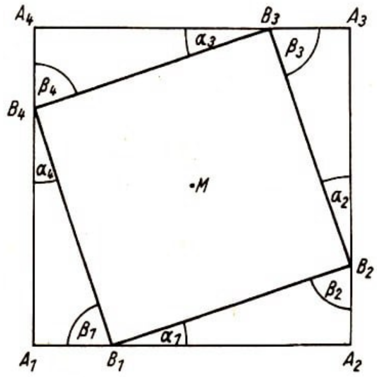


Bild 140

Voraussetzung: 1) $A_1A_2A_3A_4$ ist ein Quadrat (Bild 140),
2) $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \overline{A_4B_4}$.
Behauptung: $B_1B_2B_3B_4$ ist ein Quadrat.

Beweis: 1. Durch Abbildung: Als Abbildungsvorschrift wird die Drehung benutzt. Das Quadrat ist bezüglich seines Mittelpunktes M zentralsymmetrisch und besitzt eine 4-zählige Drehsymmetrie.
Für eine Drehung mit $\varphi = 90°$ um seinen Mittelpunkt M findet man:
Die Punkte $A_1B_1A_2$ werden abgebildet auf $A_2B_2A_3$, die Punkte $A_2B_2A_3$ auf $A_3B_3A_4$ und die Punkte $A_3B_3A_4$ auf $A_4B_4A_1$. Daraus folgt: B_1B_2 wird auf B_2B_3 abgebildet.

Damit ergibt sich $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$ und $B_1B_2 \perp B_2B_3$. Entsprechendes gilt für B_2B_3 und B_3B_4 bzw. B_3B_4 und B_4B_1.

2. Nach der Methode von Euklid: Es wird der Kongruenzsatz SWS benutzt. Es ist

$$\triangle B_1A_2B_2 \cong \triangle B_2A_3B_3 \cong \triangle B_3A_4B_4 \cong \triangle B_4A_1B_1$$

Diese Dreiecke stimmen nach Voraussetzungen überein in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, d. h., die Dreiecke stimmen dann in allen homologen oder gleichliegenden Stücken überein. Die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke sind $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_1$, die Hypotenusenwinkel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ und $\beta_1 = \beta_2 = „beta_3 = \beta_4$. Für diese gilt $\alpha + \beta = 90°$.

Jeder der vier Winkel des Vierecks $B_1B_2B_3B_4$ wird durch einen Winkel α und Winkel β zu $180°$ ergänzt, ist also $180° - (\alpha + \beta) = 90°$. Das Viereck $B_1B_2B_3B_4$ hat also vier gleichlange Seiten und 4 gleiche Winkel.

Aus dem Beweis 1. lassen sich einige Folgerungen für Polygone überhaupt angeben.
1) Es liege im Mittelpunkt des Quadrates (Bild 141) ein sich drehendes rechtwinkliges Geradenkreuz.

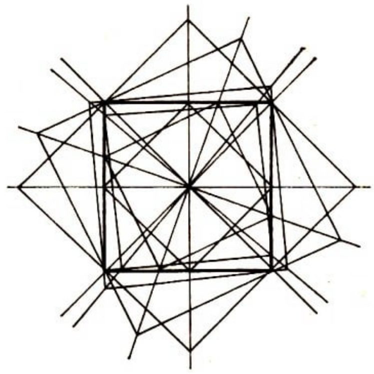


Bild 141

Durch seine Schnittpunkte mit den Quadratseiten erhält man eine innere Quadratschar. Zieht man durch die Eckpunkte des gegebenen Quadrates die Parallelen zu einem inneren Quadrat bis zu den Schnittpunkten mit den Verlängerungen des Geradenkreuzes, so ergibt sich eine äußere Quadratschar. Diese Drehung des Geradenkreuzes besitzt nun eine Grenzlage, bei der die innere Quadratschar in die äußere übergeht.
Die Quadrate fallen dann mit dem gegebenen zusammen.

2) Wird ein beliebiger Punkt einer n-strahlig symmetrischen Figur nacheinander mit den ihm entsprechenden Punkten der Nachbarsektoren verbunden, so entsteht ein regelmäßiges n-Eck um das gleiche Zentrum.

Zweites Beispiel: Die Umkehrung des Thalessatzes: Der Thalessatz hat als Bedingung der Voraussetzung (hinreichend) einen Halbkreis und als Folgebedingung (notwendig) einen rechten Winkel. Vertauscht man hier die Bedingung der Voraussetzung mit der Behauptung, so folgt die Umkehrung, die so ausgesprochen werden kann:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Entfernung von der Ecke des rechten Winkels bis zur Mitte der Hypotenuse gleich der halben Hypotenuse, oder der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt im Mittelpunkt der Hypotenuse. Wenn auch schon früher bei Behandlung der Bestimmungslinien bzw. bei der Drehung dieser Satz Erwähnung fand, soll hier sein Beweis als Beispiel für die Beweistechnik folgen.

Voraussetzung: Im $\triangle ABC$ sei $\angle\gamma = 90°$ (Bild 142)

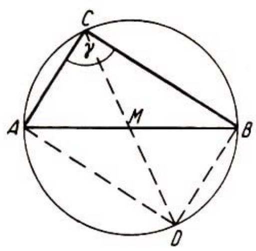


Bild 142

Behauptung: C liegt auf dem Halbkreis $\overline{AB}$.
Beweis: Man ergänze $\triangle ABC$ zu einem Rechteck $ADBC$, wobei man durch A und B die Parallelen zu den Katheten zieht. In diesem Rechteck sind die Diagonalen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang und halbieren sich in M. Das ist der Mittelpunkt des Umkreises.
Die Mittellote der beiden Katheten sind Symmetrieachsen des Rechtecks und gehen ebenfalls durch M.
Zur Übung seien die folgenden Sätze angegeben, die der Leser beweisen möge:

1. Teilt man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Teile und verlängert die Teilungslinien bis zum Schnitt der Basis, so sind die Teilungslinien gleich lang und ebenfalls von den 3 Abschnitten der Basis die beiden äußeren.

2. Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen und stehen sie senkrecht aufeinander, so ist es ein Rhombus.

3. Wie lauten ähnliche Sätze für das Rechteck und für das Parallelogramm?

4. Sind in einem Trapez 3 Seiten gleich, so werden die Winkel an der vierten Seite von der Diagonalen halbiert.

5. Durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Seiten im Dreieck wird a) die Seitenhalbierende, b) die Höhe der dritten Seite halbiert.

7 Worterklärungen

Affin (lat. affinis - verwandt): Bei affinen Abbildungen sind die Parallelität und das Teilverhältnis auf einer Geraden invariant, jedoch nicht Strecken und Winkel.

Algebra: In dem Titel eines im 9.Jh. entstandenen arabischen Lehrbuches tritt der Wortkomplex "al gabr wa-l-muqabala" auf, der soviel wie "das Hinüber- und Herüberschaffen" (von Gleichungsgliedern) bedeutet. Da dieses das erste überlieferte systematische Lehrbuch der Gleichungslehre ist, hat sich der eine Teil dieses Wortkomplexes in der verstümmelten Form 'Algebra' als Bezeichnung für dieses Gebiet der Mathematik eingebürgert.
Während sich ursprünglich die Algebra hauptsächlich mit der Auflösung von Gleichungen befasste, beschäftigt sie sich heute im wesentlichen mit der Untersuchung der sog. algebraischen Strukturen, zu denen z. B. auch die in diesem Buch behandelte Struktur "Gruppe" gehört.

Analysis (griech. $\alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\varepsilon\iota\nu$ - auflösen): In der Elementargeometrie werden durch die "Analysis" alle Schritte und Gegebenheiten einer geometrischen Konstruktionsaufgabe herausgestellt und möglichst durch eine "Überlegungsfigur" (Analysisfigur) festgelegt. Die Analysis enthüllt also gleichsam das Geheimnis der Konstruktionsaufgabe. Aus ihr muss möglichst in "programmatischer Weise" hervorgehen, wie man zur geforderten Lösung kommt.

Approximation (lat. approximare - sich annähern): Unter Approximation versteht man in der Mathematik die Methode, eine Lösung mit bestimmten Hilfsmitteln näherungsweise zu bestimmen. Dabei muss stets überprüft werden, mit welcher Genauigkeit sich diese Näherungslösung der exakten Lösung nähert. Zu einer Approximation wird man stets greifen, wenn die Lösung in geschlossener Form auf Schwierigkeiten stößt.

äquivalent (lat. aequus - gleich, valere - wert sein): gleichwertig.

Axiom (griech. $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ - Grundsatz): Ein Axiom ist eine Grundfeststellung, die dem Beweis anderer Sätze einer wissenschaftlichen Theorie zugrunde liegt und die im Rahmen dieser wissenschaftlichen Theorie nicht bewiesen wird.

Büschel: Eine ebene Schar von Geraden durch einen Punkt P heißt ein Geradenbüschel. P heißt der Träger des Büschels.

Chordale: siehe Potenzlinie.

Determination (lat. determinare – bestimmen): Mit Hilfe der Determination wird in der Elementargeometrie festgestellt, unter welchen Bedingungen eine, mehrere oder keine Lösung der Konstruktionsaufgabe möglich ist. Etwa auftretende Grenzfälle sind dann besonders zu untersuchen.

Definition: Genaue Erklärung der Begriffe, die behandelt werden und mit denen operiert wird.

eineindeutig: umkehrbar eindeutig.

harmonische Punkte: Vier Punkte A, B, C, D, die auf einer Geraden liegen, heißen harmonisch, wenn der Abstand zweier (etwa A und C) durch die beiden anderen (etwa B und D) innerlich und äußerlich im gleichen Verhältnis geteilt wird.

harmonische Geraden: Vier Geraden eines Büschels, die durch vier harmonische Punkte (zu denen der Träger des Büschels nicht gehört) hindurchgehen, heißen harmonische Geraden.

homolog (griech. $o\mu o\varsigma$ - gleichlautend, $\lambda\varepsilon\gamma\varepsilon\iota\nu$ - ausdrücken): In der Elementargeometrie Bezeichnung für gleichliegende oder entsprechende Stücke bei kongruenten oder ähnlichen Figuren.

invariant (lat. variare - verändern): unveränderlich.

Inzidenz (lat. incidere - einschneiden) : $P \in g$, gelesen "der Punkt P inzidiert mit g" bedeutet, der Punkt P liegt auf der Geraden g oder g geht durch P. Die Aussage $P \in g$ ist gleichbedeutend oder äquivalent mit der mengenalgebraischen, d.h. P ist in g enthalten. Die Verneinung von $P \in g$ wird $P \notin g$ geschrieben, gelesen P inzidiert nicht mit g.

Kreis des Apollonios: Die Menge aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten A und B in einem gegebenen Verhältnis stehen, ist der Kreis mit $\overline{ED}$ als Durchmesser, wobei E und D $\overline{AB}$ im gegebenen Verhältnis harmonisch teilen.

offen: Ein offenes Flächenstück enthält nur die Punkte im Inneren der Fläche, nicht aber die Punkte auf dem Rand. Zu einem abgeschlossenen Flächenstück gehören auch die Punkte des Randes. Beispiele: offene Kreisscheibe - Kreisfläche ohne Kreislinie; offener Streifen - Punktmenge zwischen zwei parallelen, Geraden ohne diese beiden Grenzgeraden.

Orientierung: Eine geometrische Linie heißt orientiert, wenn auf ihr der eine Durchlaufsinn als positiv, der andere als negativ festgelegt ist.

Planimetrie (lat. planities - Ebene): Teil der Geometrie, in dem die Eigenschaften der ebenen Figuren untersucht werden. Unter einer planimetrischen Konstruktion wird die Herstellung einer ebenen Figur verstanden (z.B. Dreieck, Parallelogramm, Kreis u. a.).

Polygon (griech. $\pi o\lambda\upsilon\varsigma$ - viel, η $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ - Winkel): Vieleck.

Postulat (lat. postulare - fordern): bedeutet eigentlich Forderung. Bei Euklid sind als Postulate die eigentlich geometrischen Axiome bezeichnet, während die anderen Axiome, wie z.B. "Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich" von Euklid als "allgemeine Begriffe" bezeichnet werden.

Potenz, Potenzlinie: Von einem Punkt P außerhalb eines Kreises ziehe man eine beliebige Gerade, die den Kreis schneidet. Das Produkt aus den beiden Strecken vom Punkt P bis zum ersten Schnittpunkt mit dem Kreis und von P bis zum zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis heißt Potenz des Punktes bezüglich dieses Kreises und ist für alle Geraden durch diesen Punkt gleich; wird die Gerade zur Tangente, so ist die Potenz gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen P und dem Berührungspunkt.

Punkte, die die gleiche Potenz bezüglich zweier gegebener Kreise haben, liegen auf einer Geraden, der Potenzlinie oder Chordale. Die Chordale zweier sich schneidender Kreise ist die Verbindungsgerade der Schnittpunkte: die Chordale zweier berührender Kreise ist die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt ; die Potenzlinie zweier beliebiger Kreise steht auf der Zentralen senkrecht und halbiert die gemeinsamen Tangenten beider Kreise.

rechtwinkliges Schneiden zweier Kreise: Zwei Kreise schneiden sich rechtwinklig, wenn die Tangenten an die beiden Kreise in den Schnittpunkten aufeinander senkrecht stehen.

Streifen, Streifenecke: Ein Streifen ist ein Ebenenstück, das von zwei Parallelen begrenzt wird. Die Schnittfigur zweier solcher Streifen ist ein Parallelogramm oder eine Streifenecke.

Transversale: Eine Gerade, die die Seiten eines Dreiecks, allgemein eines Polygons, schneidet, heißt Transversale (des Dreiecks, Polygons). Geht die Transversale durch eine Ecke des Polygons, so heißt sie "Ecktransversale"; geht sie durch die Seitenmitte des Vielecks, nennt man sie "Mitteltransversale". Sonderfälle der Ecktransversalen im Dreieck: Winkelhalbierende, Höhe, Seitenhalbierende; Sonderfälle der Mitteltransversalen im Dreieck: Mittellinie, Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende.

Zentrale: Verbindungsgerade oder Verbindungsstrecke zweier Kreismittelpunkte, also Symmetrieachse für beide Kreise.

8 Literatur

In der nachfolgenden Aufstellung sind eine große Anzahl Schriften angeführt, die für die Gebiete des vorliegenden Buches zur Vertiefung dienen; die Bücher wurden auch dann genannt, wenn sie nur aus einer wissenschaftlichen Bücherei entliehen werden können.

1. Alexandroff, P.S., Einführung in die Gruppentheorie. 4. Aufl., Berlin 1964.

2. Alexandroff, P. S., Einfachste Grundbegriffe der Topologie. Berlin 1932 (siehe auch in Hilbert-Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin 1931).

3. Archimedes, Opera omnia, Bd. II, Abschn. Lemmata. Leipzig 1891,

4. Beck, H., Elementargeometrie. Leipzig 1929.

5. Becker, H., J. Vonderlinn, Geometrisches Zeichnen. 3. Aufl., Berlin-Leipzig 1923.

6. Bieberbach, L., Theorie der Geometrischen Konstruktionen. Basel 1952.

7. Blaschke, W., Projektive Geometrie. 2. Aufl., Basel 1954.

8. Coxeter, H. S. M., Unvergängliche Geometrie. Basel-Stuttgart 1963.

9. Enriques, Fragen der Elementargeometrie. 2. Aufl., Leipzig-Berlin 1923.

10. Euklid, Elemente, Buch I-IV, herausgegeben von Heiberg. Leipzig 1883 (Übers.: Ostwalds Klassiker Nr. 235, herausgegeben von Czwalina, Leipzig 1933).

11. Grosche, Projektive Geometrie. Leipzig 1957.

12. Henrici, J., P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie, Bd. I. 4. Aufl., Leipzig 1910.

13. Hessenberg, G., Darstellende Geometrie. Leipzig 1929.

14. Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 9. Aufl., Stuttgart 1962.

15. Kerst, B., Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Math.-Phys. Bibl. Nr. 26, Leipzig 1925.

16. Kerst, B.; Ebene Geometrie. Math.-Phys. Bibl. Nr. 10, Leipzig 1923.

17. Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Abh. von F. Klein, Bd. I, Berlin 1925.

18. Klein, F., Elementarmathematik von höherem Standpunkt. Bd. 2, 3. Aufl., Berlin 1925.

19. Kleine Enzyklopädie Mathematik. Leipzig 1965.

20. Lietzmann, W., Altes und Neues vom Kreis. 3. Aufl., Leipzig 1963.

21. Perron, O., Nichteuklidische Elementargeometrie. Stuttgart 1962.

22. Polja, G., Mathematik und plausibles Schließen. Bd. I: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel-Stuttgart 1962.

23. Speiser, A., Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. 4. Aufl., Basel- Stuttgart 1956.

24. Thieme H. Die Elemente der Geometrie. Leipzig 1909.

25. Tropfke, J., Elementarmathematik, Bd. IV: Ebene Geometrie. 2. Aufl., Berlin 1923.

26. Vysin, J., Metodika Reseni Matematickych Uloh, Matematicka Kniznice. Praha 1962 (Deutsche Übersetzung in Vorbereitung).

27. Weyl, H., Symmetrie. Basel-Stuttgart 1955.

28. Zacharias, M., Elementargeometrie. Leipzig-Berlin 1930.