Horst Belkner

Determinanten

1970 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 33
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Der vorliegende Band der MSB gibt eine Einführung in die Determinantentheorie.
In den ersten drei Abschnitten wird von linearen Gleichungssystemen von zwei bzw. drei Gleichungen mit zwei bzw. drei Variablen ausgegangen, und in diesem Zusammenhang werden Determinanten zweiter bzw. dritter Ordnung eingeführt und einige grundlegende Eigenschaften dieser Determinanten bewiesen.

Für Leser, die sich einen ersten Überblick über Determinanten zweiter und dritter Ordnung verschaffen möchten, genügt das Durcharbeiten dieser ersten drei Abschnitte. Leser, die bereits mit Determinanten zweiter und dritter Ordnung vertraut sind, können mit dem Abschnitt 4. beginnen.
Dieser Abschnitt, der die Determinantendefinition nach Leibniz vorbereiten soll, dient der Bereitstellung einiger Begriffe aus der Kombinatorik. Hieran schließt sich die Definition der Determinante n-ter Ordnung nach Leibniz an.

In den nächsten Abschnitten werden dann einige bereits für die Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ bekannten grundlegenden Eigenschaften der Determinanten n-ter Ordnung bewiesen und mit Hilfe dieser Sätze einige Determinanten berechnet.

Die Auflösung linearer Gleichungssysteme mit nicht verschwindender Koeffizientendeterminante, die Behandlung einiger Beispiele aus der Geometrie der Ebene mit Hilfe der Determinantentheorie und eine kurze Einführung in ebene affine Abbildungen bilden den Abschluss des Büchleins.

Definitionen, Sätze, ausführlich durchgerechnete Beispiele und in den Text eingestreute Aufgaben sind jeweils fortlaufend nummeriert.
Die Aufgaben dienen nicht nur der Festigung des vorher behandelten Stoffes, sondern sie ergänzen ihn auch. Das Lösen dieser Aufgaben ist daher vor dem jeweiligen Weiterlesen unbedingt erforderlich. Die Lösungen, die sich nicht von selbst verstehen, sind am Ende des Büchleins zusammengestellt.

Potsdam

Horst Belkner

Inhaltsverzeichnis

1 Determinanten zweiter Ordnung

Wir gehen von dem linearen Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

von zwei Gleichungen mit zwei Variablen x_1, x_2 aus.
Die reellen Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$[1] heißen die Koeffizienten und die reellen Zahlen b_1, b_2 die Absolutglieder des Gleichungssystems.

Setzen wir in der ersten Gleichung von (1) für x_1, x_2 irgendwelche speziellen reellen Zahlen ein, so wird die linke Seite im allgemeinen nicht mit b_1 übereinstimmen.
Ist dies jedoch der Fall, so sagt man, das Zahlenpaar x_1, x_2 genügt der ersten Gleichung.
Ein Zahlenpaar x_1, x_2 heißt eine Lösung des Gleichungssystems (1), wenn es beiden Gleichungen von (1) genügt. Die Koeffizienten des Gleichungssystems (1) fassen wir zu dem quadratischen Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

zusammen, das man als quadratische Matrix oder im Hinblick auf das Gleichungssystem (1) als Koeffizientenmatrix bezeichnet.

Matrizen werden mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet. Die Horizontal- bzw. Vertikalreihen einer Matrix heißen Zeilen bzw. Spalten der Matrix. Zeilen und Spalten einer Matrix werden unter der gemeinsamen Bezeichnung Reihen zusammengefasst.

Die Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ der Matrix heißen die Elemente der Matrix. Der erste bzw. zweite Index der mit Doppelindizes versehenen Elemente der Matrix gibt die Zeile bzw. Spalte an, in der das Element in der Matrix steht.
Die Diagonale der Matrix, in der die Elemente a_{11}, a_{22} bzw. a_{12}, a_{21} stehen, heißt die Haupt- bzw. Nebendiagonale der Matrix. Da die obige Matrix zwei Zeilen und zwei Spalten besitzt, bezeichnet man sie auch als zweireihige Matrix.

Durch die Schreibweise $\mathfrak{A}_2$ wollen wir zum Ausdruck bringen, dass es sich um eine zweireihige Matrix handelt. Es ist also

$$\mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Wir untersuchen, ob das Gleichungssystem (1) unter einer noch weiter unten zu treffenden Voraussetzung eine Lösung besitzt.
Dazu nehmen wir an, dass das Zahlenpaar x_1, x_2 eine Lösung des Gleichungssystems (1) sei. Wir multiplizieren die erste Gleichung von (1) mit a_{22} und die zweite Gleichung mit $-a_{12}$ und addieren die so erhaltenen Gleichungen; anschließend multiplizieren wir die erste Gleichung von (1) mit $-a_{21}$ und die zweite Gleichung mit a_{11} und addieren wiederum sie so erhaltenen Gleichungen. Dadurch erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] Lies: a eine eins, a eins zwei usw.

Existiert ein Zahlenpaar x_1, x_2, das (1) erfüllt, so genügt es auch (3). Gilt nun

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{4}$$

so folgt aus (3)

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad , \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{5}$$

Besitzt also das lineare Gleichungssystem (1), dessen Koeffizienten (4) genügen, überhaupt eine Lösung, so ist die Lösung von der Form (5). Durch Einsetzen von (5) in das lineare Gleichungssystem (I) überzeugen wir uns, ob dieses Zahlenpaar auch dieses System erfüllt. Es gilt

$$a_{11}\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{12}\frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = b_1$$
$$a_{21}\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{22}\frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = b_2$$

Das Zahlenpaar (5) genügt also beiden Gleichungen von (1) und ist somit die Lösung von (1).
Um das Ergebnis (5) in einer leicht einprägsamen Form zu schreiben, führen wir folgenden Begriff ein:

Definition 1. Unter der Determinante einer zweireihigen Matrix $\mathfrak{A}_2$ oder einer Determinante zweiter Ordnung versteht man

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6}$$

In Bezug auf das Gleichungssystem (1) heißt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

auch die Koeffizientendeterminante von (1).

Die Berechnung einer Determinante zweiter Ordnung erfolgt wegen (6) in der Form, dass man von dem Produkt der Elemente, die in der Hauptdiagonale der zweireihigen Matrix stehen, das Produkt der in der Nebendiagonale stehenden Elemente subtrahiert.

Beispiel 1. Wir berechnen

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Auch die Zähler in (5) können wir als Determinanten zweiter Ordnung schreiben. Der Zähler von x_1 bzw. x_2 ist

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

In Bezug auf das Gleichungssystem (1) bezeichnet man diese beiden Determinanten als Zählerdeterminanten von x_1 und x_2. Damit lässt sich (5) in der leicht einprägsamen Form

$$x_1 = \frac{D_1}{|\mathfrak{A}_2|} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{|\mathfrak{A}_2|} \tag{8}$$

schreiben. Das Ergebnis (8) fassen wir in einem Satz zusammen, der als Cramersche Regel bezeichnet wird.

Satz 1. Ist die Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen von null verschieden, so besitzt dieses Gleichungssystem genau eine Lösung.
Die Lösung erhält man, indem man die Quotienten (8), in deren Nenner die Koeffizientendeterminante und in deren Zähler die entsprechende Zählerdeterminante steht, bildet.
Die Zählerdeterminante von x_1 bzw. x_2 erhält man, indem man in der Koeffizientenmatrix die erste bzw. zweite Spalte durch die Absolutglieder des Gleichungssystems ersetzt und dann die Determinante bildet.

Beispiel 2. Wir untersuchen, ob die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\}$$

von null verschieden ist, und bestimmen gegebenenfalls mit Hilfe von Satz 1 die Lösung. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Da die Koeffizientendeterminante von null verschieden ist, besitzt das Gleichungssystem die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -1$$

Beispiel 3. Wir zeigen, dass folgende Umformungsregeln für Determinanten zweiter Ordnung gelten, wobei a_{ij}, b_{ij}, t beliebige reelle Zahlen bedeuten:

a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bzw. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

e) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ta_{11} & a_{22}+ta_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

f) $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Es ist

a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = t(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bzw. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{vmatrix} = t(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(b_{11}a_{22}-b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bzw. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{11}b_{22}-a_{11}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

e) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ta_{11} & a_{22}+ta_{12} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + t(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bzw. $$\begin{vmatrix} a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + t(a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

f) $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Abschließend untersuchen wir die Frage, ob das Gleichungssystem (1), dessen Koeffizienten der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

genügen, lösbar ist. Der Leser, der möglichst schnell zum Abschnitt 3. vordringen möchte, kann bei einer ersten Lektüre diesen Teil überschlagen. Trivialerweise[2] ist (9) erfüllt, wenn alle Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ verschwinden. Zunächst betrachten wir den Fall, dass nicht alle Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ des Systems (1) null sind. Gleichungssysteme, die diese beiden Bedingungen erfüllen, sind beispielsweise die Systeme

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + 0x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \tag{10,11,12}$$

[2]Trivial bedeutet soviel wie einfach, selbstverständlich.

Um uns die folgenden Überlegungen zu vereinfachen, beachten wir, dass wir bei der Herleitung von (3) aus (1) die Bedingung (4) nicht verwendet haben. Unter Berücksichtigung von (6) und (7) kann aus (1) stets

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{A}_2| \cdot x_1 = D_1 \\ |\mathfrak{A}_2| \cdot x_2 = D_2 \end{array}\right\} \tag{13}$$

gefolgert werden. Es gilt damit:

Ist ein Zahlenpaar x_1, x_2 Lösung von (1), so ist das Zahlenpaar x_1, x_2 auch eine Lösung von (13). (14)

Für die weitere Diskussion unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1. Die Determinanten D_1 und D_2 verschwinden nicht gleichzeitig.

Angenommen, das Zahlenpaar x_1, x_2 wäre eine Lösung von (1). Dieses Zahlenpaar genügt aber nicht beiden Gleichungen von (13), denn die linken Seiten beider Gleichungen von (13) verschwinden wegen (9), dagegen verschwinden nicht beide rechten Seiten von (13) wegen der Bedingung "nicht ($D_1 = 0$ und $D_2 = 0$)".
Das Zahlenpaar x_1, x_2 ist also keine Lösung von (13). Das ist aber ein Widerspruch zu (14). Also muss unsere Annahme, es existiere eine Lösung von (1); falsch gewesen sein. Das Gleichungssystem (1) ist nicht lösbar.

Fall 2. Die Determinanten D_1 und D_2 verschwinden gleichzeitig.

Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass $a_{11} \neq 0$ ist. Dann folgt aus (9) bzw. $D_2 = 0$

$$a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \qquad \text{bzw.} \qquad b_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

Ferner gilt trivialerweise

$$a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11}$$

Diese drei Beziehungen besagen, dass die zweite Gleichung von (1) aus der ersten Gleichung durch Multiplikation mit der reellen Zahl $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ hervorgegangen ist. Jedes Zahlenpaar x_1, x_2, das also der ersten Gleichung von (1) genügt, erfüllt auch die zweite Gleichung von (1).
Setzen wir $x_1 = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, so folgt aus der ersten Gleichung $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}t}{a_1 1}$. Für jedes t erhalten wir also eine Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}t}{a_1 1} \qquad , \qquad x_2 = t \tag{15}$$

des Gleichungssystems (1). Da man in (15) für t beliebige reelle Zahlen einsetzen kann, erhält man auf diese Weise alle Lösungen von (1).
Es gibt demnach unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems (I). Die Menge aller Lösungen eines Gleichungssystems nennt man auch die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems.

Da in (15) ein freier Parameter t auftritt, sagt man auch, die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems (1) sei einfach unendlich.
Verschwinden alle Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ des Gleichungssystems (1), so lautet (1)

$$\left.\begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 = b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 = b_2 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Sind in (16) die Absolutglieder b_1 und b_2 nicht gleichzeitig null, so gibt es kein Zahlenpaar x_1, x_2 das (16) genügt. Das Gleichungssystem (16) besitzt also keine Lösung.
Ist dagegen $b_1 = b_2 = 0$, so erhalten wir mit Hilfe von

$$x_1 = t_1 \qquad , \qquad x_2 = t_2 \tag{17}$$

wobei wir für die freien Parameter t_1, t_2 beliebige reelle Zahlen einsetzen können, alle Lösungen von (16). Die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems (16) ist also zweifach unendlich.
Unsere Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Satz 1'.
Ist die Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen gleich null und verschwinden nicht gleichzeitig alle Koeffizienten des Gleichungssystems, so besitzt dieses Gleichungssystem eine einfach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit bzw. keine Lösung, falls die Determinanten D_1 und D_2 gleichzeitig bzw. nicht gleichzeitig verschwinden.
Verschwinden alle Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen, so besitzt dieses Gleichungssystem eine zweifach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit bzw. keine Lösung, falls die Absolutglieder des Systems gleichzeitig bzw. nicht gleichzeitig verschwinden.

Nach Satz 1' besitzt das System (10) bzw. (11) keine Lösung, da nicht alle Koeffizienten des Gleichungssystems verschwinden und

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

bzw.

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ist.
Im System (12) sind ebenfalls nicht alle Koeffizienten null, und es ist

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Nach Satz 1' besitzt also das System (12) eine einfach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit. Die Lösungsmannigfaltigkeit ist

$$x_1 = 2 - t \qquad , \qquad x_2 = t$$

2 Determinanten dritter Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \tag{1}$$

von drei Gleichungen mit drei Variablen x_1, x_2, x_3 analog wie in 1. unter einer noch zu treffenden Voraussetzung lösen. Dazu werden wir Determinanten dritter Ordnung einführen.
Zunächst fassen wir die reellen Koeffizienten des Gleichungssystems (1) zu dem quadratischen Schema

$$\mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

zusammen, das wir als dreireihige Matrix oder in Bezug auf das System (1) auch als Koeffizientenmatrix bezeichnen. Die Diagonale der Matrix, in der die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} bzw. a_{13}, a_{22}, a_{31} stehen, heißt die Haupt- bzw. Nebendiagonale der Matrix.

Definition 2. Unter der Determinante einer dreireihigen Matrix $\mathfrak{A}_3$ oder einer Determinante dritter Ordnung versteht man

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{3}$$

In Bezug auf das Gleichungssystem (1) bezeichnet man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

auch als Koeffizientendeterminante von (1).
Determinanten dritter Ordnung kann man berechnen mit Hilfe der

Regel von Sarrus. Die ersten beiden Spalten der dreireihigen Matrix werden rechts neben der Matrix noch einmal hingeschrieben. Dann bildet man die Summe der drei Hauptdiagonalprodukte des Schemas und subtrahiert von dieser die Summe der drei Nebendiagonalprodukte des Schemas. Das Ergebnis ist die Determinante der dreireihigen Matrix.
Wir überzeugen uns von der Richtigkeit der Sarrusschen Regel:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Die Summe der Hauptdiagonalprodukte (rote Linien) des Schemas ist

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

und die Summe der Nebendiagonalprodukte (blaue Linien) des Schemas ist

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}$$

Subtrahieren wir die zweite Summe von der ersten, so erhalten wir die Summe in (3).

Beispiel 4. Wir berechnen mit Hilfe der Sarrusschen Regel

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Aus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

folgt

$$D = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$$

Wir zeigen, dass man die Berechnung einer Determinante dritter Ordnung auf die Berechnung von drei Determinanten zweiter Ordnung zurückführen kann. Dazu fassen wir in (3) alle Summanden zusammen, die die gleichen Elemente der ersten Spalte von $\mathfrak{A}_3$ als Faktor enthalten:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_3| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ordnen wir nach den Elementen der zweiten bzw. dritten Spalte von $\mathfrak{A}_3$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_3| &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_3| &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Um die in diesen Formeln auftretenden Gesetzmäßigkeiten besser formulieren zu können, führen wir folgenden Begriff ein:

Definition 3. Unter der zum Element a_{ij} gehörigen Unterdeterminante D_{ij} einer dreireihigen Matrix $\mathfrak{A}_3$ versteht man die Determinante der Matrix, die aus $\mathfrak{A}_3$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beispiel 5. Wir bestimmen sämtliche Unterdeterminanten D_{ij} von $\mathfrak{A}_3$. Es ist

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$
$$D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$
$$D_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Damit gilt in Verbindung mit Beispiel 5

$$|\mathfrak{A}_3| = \begin{cases} a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31}, \\ -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32}, \\ a_{13}D_{13} - a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33}. \end{cases}$$

Diese Formeln gestalten sich noch übersichtlicher mit Hilfe des folgenden Begriffs:

Definition 4. Unter der zum Element a_{ij} gehörigen Adjunkte A_{ij} einer dreireihigen Matrix $\mathfrak{A}_3$ versteht man die mit $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante D_{ij}, d.h., es ist

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Somit ist

$$|\mathfrak{A}_3| = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{cases} \tag{4}$$

Die Formeln (4) bezeichnet man als die Entwicklung der Determinante dritter Ordnung nach der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Spalte.

Sie besagen: Werden in einer dreireihigen Matrix die Elemente einer Spalte mit ihren Adjunkten multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man die Determinante der dreireihigen Matrix.

Beispiel 6. Wir berechnen die Determinante in Beispiel 4 durch Entwicklung nach der dritten Spalte.
Es ist $D = 3(32 - 35) - 6(8 - 14) + 9(5 - 8) = 0$.

Anschließend wollen wir untersuchen, zu welchem Ergebnis wir gelangen, falls wir die Elemente einer Spalte von $\mathfrak{A}_3$, etwa die der i-ten Spalte, mit den entsprechenden Adjunkten einer anderen Spalte von $\mathfrak{A}_3$, etwa denen der j-ten Spalte ($i \neq j$), multiplizieren und diese Produkte dann addieren. Wir führen dies zunächst für $i = 3$ und $j = 2$ durch. Es ist

$$a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} =$$
$$a_{13}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} + a_{23}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{33}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = 0$$

Wir werden in Aufgabe 2b zeigen, dass wir für die restlichen Fälle dasselbe Ergebnis erhalten.

Aufgabe 1. Man zeige, dass folgende Umformungsregeln für Determinanten dritter Ordnung gelten, wobei a_{ij}, b_{ij}, t beliebige reelle Zahlen bedeuten:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} & ta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ta_{21} & ta_{22} & ta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ta_{31} & ta_{32} & ta_{33} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

bzw. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

bzw. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ta_{11} & a_{22}+ta_{12} & a_{23}+ta_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22} & a_{13}+ta_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ta_{31} & a_{22}+ta_{32} & a_{23}+ta_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ta_{21} & a_{32}+ta_{22} & a_{33}+ta_{23} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ta_{11} & a_{32}+ta_{12} & a_{33}+ta_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ta_{31} & a_{12}+ta_{32} & a_{13}+ta_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Aufgabe 2. Man zeige, dass gilt:

$$a) \qquad |\mathfrak{A}_3| = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{cases} \tag{5}$$

$$b) \qquad 0 = \begin{cases} a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} \\ a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} \\ a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} \\ a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} \end{cases} \tag{6}$$

$$c) \qquad 0 = \begin{cases} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} \\ a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \\ a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} \\ a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} \end{cases} \tag{7}$$

Aufgabe 3. Unter der Determinante einer einreihigen Matrix (a_{11}) versteht man das Element a_{11} selbst, und unter der zum Element a_{ij} gehörigen Unterdeterminante D_{ij} einer zweireihigen Matrix $\mathfrak{A}_2$ versteht man die Determinante der Matrix, die aus $\mathfrak{A}_2$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Mit $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ bezeichnet man die Adjunkte des Elements a_{ij} von $\mathfrak{A}_2$. Man zeige, dass gilt:

$$a) \qquad |\mathfrak{A}_2| = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} \end{cases}$$

$$a) \qquad 0 = \begin{cases} a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} \end{cases}$$

Abschließend untersuchen wir, ob das Gleichungssystem (1) unter der Voraussetzung, dass die Koeffizientendeterminante von null verschieden ist, eine Lösung besitzt. Dazu nehmen wir an, dass das Zahlentripel x_1, x_2, x_3 eine Lösung des Gleichungssystems (1) sei.
Wir multiplizieren die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung von (1) mit A_{11} bzw. A_{21} bzw. A_{31} und addieren die so erhaltenen Gleichungen.

Anschließend multiplizieren wir die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung mit A_{12} bzw. A_{22} bzw. A_{32} und addieren ebenfalls die so erhaltenen Gleichungen. Schließlich multiplizieren wir die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung von (1) mit A_{13} bzw. A_{23} bzw. A_{33} und addieren wiederum die so erhaltenen Gleichungen. Auf diese Weise erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 +& \\ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}& \\ (a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32})x_1 + (a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32})x_2 +& \\ (a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32})x_3 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}& \\ (a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33})x_1 + (a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33})x_2 +& \\ (a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33})x_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}& \end{aligned}\right\}$$

Berücksichtigen wir (4) und (6), so folgt

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{A}_3| \cdot x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ |\mathfrak{A}_3| \cdot x_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ |\mathfrak{A}_3| \cdot x_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{array}\right\}$$

Da nach Voraussetzung $|\mathfrak{A}_3| \neq 0$ ist, ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|\mathfrak{A}_3|} \\ x_2 = \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|\mathfrak{A}_3|} \\ x_3 = \dfrac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{|\mathfrak{A}_3|} \end{array}\right\} \tag{8}$$

Besitzt das System (1) unter der Voraussetzung $|\mathfrak{A}_3| \neq 0$ überhaupt eine Lösung, so ist die Lösung von der Form (8). Durch Einsetzen von (8) in (1) überzeugen wir uns, ob dieses Zahlentripel das System (1) erfüllt. Es ist für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = \frac{1}{|\mathfrak{A}_3|}&[b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + a_{i3}A_{13}) \\ &+ b_2(a_{i1}A_{21} + a_{i2}A_{22} + a_{i3}A_{23}) + b_3(a_{i1}A_{31} + a_{i2}A_{32} + a_{i3}A_{33})] \end{aligned}$$

Wegen (5) und (7) ist die rechte Seite für $i = 1$ bzw. $i = 2$ bzw. $i = 3$ gleich b_1 bzw. b_2 bzw. b_3. Das Zahlentripel (8) genügt also allen drei Gleichungen von (I) und ist somit die Lösung von (1).

Auch die Zähler in (8) können wir als Determinanten dritter Ordnung schreiben. Ersetzen wie in der Koeffizientenmatrix (2) die Elemente der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Spalte durch die Absolutglieder b_1, b_2, b_3 des Gleichungssystems, so erhalten wir die Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{32} & a_{23} \\ b_3 & a_{42} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

In der ersten Matrix von (9) stimmen die Adjunkten der Elemente der ersten Spalte mit den Adjunkten der Elemente der ersten Spalte der Koeffizientenmatrix (2) überein, da sich jeweils die beiden Matrizen nur in den Elementen der ersten Spalte unterscheiden. Analog stimmen in der zweiten bzw. dritten Matrix von (9) die Adjunkten der zweiten bzw. dritten Spalte mit den Adjunkten der zweiten bzw. dritten Spalte von (2) überein. Bezeichnen wir die Determinante der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Matrix von (9) mit D_1 bzw. D_2 bzw. D_3, so erhalten wir durch Entwicklung der ersten Determinante nach der ersten Spalte bzw. der zweiten Determinante nach der zweiten Spalte bzw. der dritten Determinante nach der dritten Spalte

$$\left.\begin{array}{ll} D_1 & = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ D_2 & = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ D_3 & = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{array}\right\} \tag{10}$$

Da D_1 bzw. D_2 bzw. D_3 der Zähler in (8) von x_1 bzw. x_2 bzw. x_3 ist, bezeichnet man D_1 bzw. D_2 bzw. D_3 als Zählerdeterminante von x_1 bzw. x_2 bzw. x_3. Mit Hilfe von (10) lässt sich daher (8) in der übersichtlichen Form

$$x_1 = \frac{D_1}{|\mathfrak{A}_3|}, \quad x_2 = \frac{D_2}{|\mathfrak{A}_3|}, \quad x_3 = \frac{D_3}{|\mathfrak{A}_3|} \tag{11}$$

schreiben. Dies bedeutet:

Satz 2. Ist die Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen mit drei Variablen von null verschieden, so besitzt dieses Gleichungssystem genau eine Lösung.
Die Lösung erhält man, indem man die Quotienten (11), in deren Nenner die Koeffizientendeterminante und in deren Zähler die entsprechende Zählerdeterminante steht, bildet.
Die Zählerdeterminante von x_1 bzw. x_2 bzw. x_3 erhält man, indem man in der Koeffizientenmatrix die erste bzw. zweite bzw. dritte Spalte durch die Absolutglieder des Gleichungssystems ersetzt und dann die Determinante bildet.

Beispiel 7. Wir untersuchen, ob die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

von null verschieden ist, und bestimmen gegebenenfalls mit Hilfe von Satz 2 die Lösung. Wir berechnen die Koeffizientendeterminante durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$|\mathfrak{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$$

Da die Koeffizientendeterminante von null verschieden ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es ist

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

und folglich ist

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 1$$

die Lösung des Gleichungssystems.

Verschwindet die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (1), so liegen die Verhältnisse ähnlich wie im Fall $|\mathfrak{A}_2| = 0$ bei linearen Gleichungssystemen von zwei Gleichungen mit zwei Variablen.
Das System (1) ist dann entweder nicht lösbar, oder es ist lösbar und besitzt eine einfach bzw. zweifach bzw. dreifach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit. Auf die Diskussion der verschiedenen Fälle soll im Rahmen dieses Büchleins nicht eingegangen werden.

3 Einige grundlegende Eigenschaften der Determinanten zweiter und dritter Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir die bereits in 1. und 2. bewiesenen grundlegenden Eigenschaften der Determinanten zweiter und dritter Ordnung zusammenstellen.
Das Ergebnis von Beispiel 3a und Aufgabe 1a führt zum

Satz 3. Werden in einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so ist die Determinante der entstehenden Matrix gleich der Determinante der Ausgangsmatrix.

Auf Grund dieses Satzes sind in Determinantensätzen Zeilen und Spalten gleichberechtigt. Es genügt daher, dass die folgenden Sätze entweder nur für Zeilen oder nur für Spalten bewiesen wurden.
Aufgabe 3a und (4) in 2. liefern den

Satz 4. Werden in einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix die Elemente einer Reihe mit ihren Adjunkten multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man die Determinante der Matrix.

Die Ergebnisse des Beispiels 3 und der Aufgabe 1 führen in der Reihenfolge b), c), d), e), f) zu den folgenden Sätzen:

Satz 5. Die Determinante einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix multipliziert sich mit einer reellen Zahl, falls man alle Elemente einer Reihe der Matrix mit dieser reellen Zahl multipliziert.

Satz 6. Bestehen alle Elemente der i-ten Reihe einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix aus zwei Summanden, so ist die Determinante der Matrix die Summe der Determinanten zweier Matrizen, wobei in der i-ten Reihe der ersten bzw. zweiten Matrix jeweils die ersten bzw. zweiten Summanden stehen, während die übrigen Elemente der drei Matrizen übereinstimmen.

Satz 7. Die Determinante einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix mit zwei gleichen parallelen Reihen verschwindet.

Satz 8. Die Determinante einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix bleibt unverändert, wenn man zu einer Reihe ein beliebiges Vielfaches einer parallelen Reihe der Matrix addiert.

Satz 9. Die Determinante einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix wechselt ihr Vorzeichen, wenn man zwei parallele Reihen der Matrix vertauscht.

Eine Verallgemeinerung von Satz 7 ist

Satz 10. Sind in einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix zwei parallele Reihen proportional, so verschwindet ihre Determinante.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 5 und Satz 7.

Schließlich besagen Aufgabe 3b und Aufgabe 2b:

Satz 11. Werden in einer zwei- bzw. dreireihigen Matrix die Elemente einer Reihe mit den entsprechenden Adjunkten einer parallelen Reihe multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man null.

Im folgenden Beispiel wollen wir mit Hilfe dieser Sätze einige Determinanten dritter Ordnung berechnen.

Beispiel 8. Wir berechnen

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

b) $B = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$

c) $C = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -7 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

a) Durch mehrmalige Anwendung des Satzes 8 können wir erreichen, dass in einer Reihe nur noch ein von null verschiedenes Element auftritt. Entwickeln wir dann die Determinante nach dieser Reihe, so verbleibt nur ein einziger Summand:
Wir subtrahieren von der ersten Zeile die zweite Zeile, und an- schließend subtrahieren wir von der zweiten Zeile die dritte Zeile. Nach Satz 8 ist dann

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Die Elemente der ersten Zeile enthalten $a-b$ und die Elemente der zweiten Zeile $b-c$ als gemeinsamen Faktor. Damit ist nach Satz 5

$$A = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante entwickeln wir nach der ersten Spalte und erhalten

$$A = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

Diese Determinante zweiter Ordnung ist $c-a$, und somit ist

$$A = (a-b)(b-c)(c-a)$$

b) Zur zweiten bzw. dritten Zeile addieren wir das a-fache bzw. $-b$-fache der ersten Zeile:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & 1+a^2 & c-ab \\ 0 & -ab-c & 1+b^2 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante entwickeln wir nach der ersten Spalte:

$$B = \begin{vmatrix} 1+a^2 & c-ab \\ -ab-c & 1+b^2 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

c) Es ist nach Satz 6

$$C = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante entwickeln wir nach der zweiten Zeile und erhalten $C = 7$.

Aufgabe 4. Man berechne

a) $A = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$, b) $B = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, c) $C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

Aufgabe 5. Man bestimme den Grad des Polynoms

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ 2 & x & x \\ x & x^2 & -1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 6. In der Matrix

$$\tilde{\mathfrak{A}}_3 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

sind die Elemente die Adjunkten der entsprechenden Elemente der Matrix $\mathfrak{A}_3$. Man zeige, dass gilt

$$|\tilde{\mathfrak{A}}_3| = |\mathfrak{A}_3|^2$$

4 Permutationen

Um uns die Überlegungen im folgenden Abschnitt zu erleichtern, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit einer Fragestellung der Kombinatorik.
Die Kombinatorik, die u.a. die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen unter bestimmten Bedingungen untersucht, ist ein Teilgebiet der Mathematik, das bei den verschiedensten mathematischen Überlegungen als Hilfsmittel auftritt. Diese Gegenstände, die Elemente genannt werden, können Dinge der uns umgebenden Umwelt oder mathematische Objekte sein.

Es seien n voneinander verschiedene Elemente gegeben. Jede Zusammenstellung dieser n Elemente in irgendeiner beliebigen Anordnung bezeichnet man als Permutation der gegebenen Elemente.
Zwei verschiedene Permutationen der gegebenen n Elemente unter- scheiden sich durch die Anordnung der Elemente. Da bei unseren künftigen Überlegungen die gegebenen n Elemente natürliche Zahlen sind, so wollen wir im folgenden den allgemeinen Begriff Element durch den speziellen Begriff Zahl ersetzen.

Die Anzahl der möglichen verschiedenen Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., n$ wollen wir mit $P(1, 2, ..., n)$ oder kurz nur mit P_n bezeichnen. Um P_n zu bestimmen, gehen wir schrittweise vor.

Ist $n = 1$, so handelt es sich um die eine Zahl 1. Es gibt also nur die eine Anordnung, die wir durch

$$(1)$$

bezeichnen wollen, und es ist $P_1 = 1$.
Sind zwei Zahlen 1, 2 gegeben, so ist $n = 2$, und es gibt offensichtlich nur die beiden Permutationen

$$(1, 2) \quad \text{und} \quad (2, 1)$$

Damit ist $P_2 = 2$.
Sind drei Zahlen 1,2,3 gegeben, ist also $n = 3$, so wollen wir die Anzahl der Permutationen dadurch bestimmen, dass wir von den Permutationen der beiden Zahlen 1,2 ausgehen. Aus der Permutation $(1, 2)$ entstehen drei neue voneinander verschiedene Permutationen, indem wir die 3 vor die erste, vor die zweite und hinter die zweite Zahl setzen, also die Permutationen

$$(3, 1, 2), \quad (1, 3, 2), \quad (1, 2, 3)$$

Entsprechend entstehen aus der zweiten Permutation (2,1) die drei neuen Permutationen

$$(3, 2, 1), \quad (2, 3, 1), \quad (2, 1, 3)$$

Auf diese Weise haben wir sämtliche Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 erhalten, und es ist $P_3 = 6$. Führen wir für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen $1, 2, ..., n$ mit $n \geq 2$ das Symbol $n!$ [3] ein, und setzen wir $1! = 1$, so ist

$$P_1 = 1!, \quad P_2 = 1 \cdot 2 = 2!, \quad P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

[3] Lies: n Fakultät.

Auf Grund der bisher erhaltenen Ergebnisse vermuten wir den

Satz 12. Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Zahlen ist

$$P_n = n! \tag{1}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n.
Wie wir bereits gesehen haben, ist (1) richtig für $n = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (1) für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 1$ die Gültigkeit von (1) für $n = k + 1$ folgt.

In jeder der P_k Permutationen der k Zahlen $1, 2, ..., k$ setzen wir die Zahl $k + 1$ vor die erste, vor die zweite, ..., vor die k-te und hinter die k-te Zahl.
Dadurch entstehen aus jeder Permutation der k Zahlen $k + 1$ verschiedene Permutationen mit $k + 1$ Zahlen, insgesamt also $P_k \cdot (k + 1)$ verschiedene Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., k + 1$.
Auf diese Weise haben wir sämtliche Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., k+1$ erhalten, und es ist daher $P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1)$.
Berücksichtigen wir die Induktionsvoraussetzung $P_k = k!$, so folgt

$$P_{k+1} = k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 7. Wieviel verschiedene fünfstellige Zahlen kann man mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 bilden, wenn in jeder der fünfstelligen Zahlen jede Ziffer nur einmal auftreten soll?

Aufgabe 8. Wieviel verschiedene vierstellige Zahlen kann man mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 bilden, wenn in jeder der vierstelligen Zahlen jede Ziffer nur einmal auftreten soll?

Es gibt nur eine Permutation der Zahlen $1, 2, ..., n$, in der alle Zahlen in der natürlichen Reihenfolge stehen. Es ist dies die Permutation $(1, 2, ..., n)$. Wir können die verschiedenen Permutationen der gegebenen n Zahlen ähnlich wie in einem Lexikon ordnen. Man sagt, die Permutationen von n verschiedenen Zahlen seien lexikographisch geordnet, wenn von zwei verschiedenen Permutationen stets die Permutation vorangeht, deren erste Zahl die kleinere ist. Stimmen jedoch die ersten Zahlen dieser beiden Permutationen überein, so geht die Permutation voran, deren zweite Zahl die kleinere ist usw.

Beispiel 9. Wir ordnen die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 lexikographisch. Es ist

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

die lexikographische Anordnung sämtlicher Permutationen der Zahlen 1,2,3.

Aufgabe 9. Man ordne die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4 lexikographisch.

Aufgabe 10. Man bestimme die 37. Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, falls die Permutationen lexikographisch geordnet sind.

Aufgabe 11. An wievielter Stelle steht die Permutation $(3, 2, 5, 1, 4, 6)$, falls die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 lexikographisch geordnet sind?

Wollen wir zum Ausdruck bringen, dass es sich um eine beliebige Permutation der n Zahlen $1, 2, ..., n$ handelt, so schreiben wir $(k_1, k_2, ..., k_n)$. Um gewisse Permutationen besser übersehen zu können, setzen wir über die eigentliche Permutation $(k_1, k_2, ..., k_n)$ nochmals die permutierten Zahlen in der natürlichen Reihenfolge, also

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & n \\ k_1, & k_2, & ..., & k_n \end{pmatrix}$$

Soll es sich um eine beliebige Permutation handeln, die der Bedingung genügt, dass die Zahl j an i-ter Stelle steht, so schreiben wir

$$\begin{pmatrix} 1, 2, ..., i, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, j, k_{i+1}, ..., k_n \end{pmatrix}$$

was auch schon in $(k_1, ..., k_{i-1}, j, k_{i+1}, ..., k_n)$ zum Ausdruck kommt. Die Anzahl aller Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., n$ mit dieser Eigenschaft beträgt $(n-1)!$. So besitzen beispielsweise die 3! Permutationen

$$(1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2), (2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 4, 1)$$

der Zahlen 1, 2, 3, 4 die Eigenschaft, dass die Zahl 4 an dritter Stelle steht. Entsprechend verstehen wir unter

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & j-1, & j+1, & ..., & n \\ k_1, & k_2, & ..., & k_{j-1}, & k_{j+1}, & ..., & k_n \end{pmatrix}$$

eine beliebige Permutation der $n-1$ Zahlen $1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n$. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung in der zweiten Zeile, die eine beliebige Permutation der darüberstehenden Zahlen angibt, willkürlich gewählt werden darf.
So können wir beispielsweise eine beliebige Permutation der $n-1$ Zahlen $1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n$ auch in der symbolischen Form

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & j-1, & j+1, & ..., & n \\ k_2, & ... & ... & ... & ... & ..., & k_n \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & j-1, & j+1, & ..., & n \\ k_2, & ..., & ..., & k_{i-1}, & k_{i+1}, & ..., & k_n \end{pmatrix}$$

angeben. Wesentlich ist bei den verwendeten Darstellungsformen lediglich, dass die erste Zeile stets die zu permutierenden Zahlen, die zweite Zeile dagegen eine Permutation der darüberstehenden Zahlen angibt.
Enthält also die erste Zeile $n-1$ Zahlen, so müssen in der zweiten Zeile ebenfalls dieselben $n-1$ Zahlen auftreten.

Definition 5. Stehen zwei Zahlen k_i und k_j einer Permutation $(k_1, k_2, ..., k_i, ..., k_j, ..., k_n)$ der Zahlen $1, 2, ..., n$ in der zur natürlichen Reihenfolge entgegengesetzten Reihenfolge, so bilden die Zahlen k_i und k_j eine Inversion.

Die Anzahl aller Inversionen einer Permutation $(k_1, k_2, ..., k_n)$ der Zahlen $1, 2, ..., n$ bezeichnen wir mit I. So besitzt beispielsweise die Permutation $(4, 1, 3, 2)$ die Inversionen 4,1; 4,3; 4,2; 3,2. Es ist also $I = 4$.

Definition 6. Eine Permutation $(k_1, k_2, ..., k_n)$ der Zahlen $1, 2, ..., n$ heißt gerade oder ungerade, je nachdem, ob die Anzahl I ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist. Die Zahl $(-1)^I$ heißt das Vorzeichen der Permutation, in Zeichen

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n) = (-1)^I$$

Demnach ist also das Vorzeichen einer Permutation + 1 oder - 1, je nachdem, ob die Permutation gerade oder ungerade ist. So ist beispielsweise die Permutation $(4, 1, 3, 2)$ gerade, da die Anzahl ihrer Inversionen gerade ist. Es ist

$$\operatorname{sgn}(4, 1, 3, 2) = (-1)^4 = +1$$

Die Permutation, in der die gegebenen n Zahlen in der natürlichen Reihenfolge stehen, besitzt 0 Inversionen. Demnach ist also

$$\operatorname{sgn}(1, 2, ..., n) = (-1)^0 = +1$$

Beispiel 10. Wir bestimmen das Vorzeichen der Permutationen der Zahlen 1, 2, 3.

Es ist

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{sgn}(1,2,3) = (-1)^0 = +1 & , & \operatorname{sgn}(1,3,2) = (-1)^1 = -1, \\ \operatorname{sgn}(2,1,3) = (-1)^1 = -1 & , & \operatorname{sgn}(2,3,1) = (-1)^2 = +1, \\ \operatorname{sgn}(3,1,2) = (-1)^2 = +1 & , & \operatorname{sgn}(3,2,1) = (-1)^3 = -1. \end{array}$$

Aufgabe 12. Man bestimme das Vorzeichen der Permutationen der Zahlen 1,2,3,4.

Satz 13. Werden zwei benachbarte Zahlen in einer Permutation $(k_1, k_2, ..., k_n)$ der Zahlen $1, 2, ..., n$ vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Permutation um -1.

Beweis. Aus der Permutation

$$(k_1, k_2, ..., k_i, k_{i+1}, ..., k_n)$$

entsteht durch Vertauschung der beiden benachbarten Zahlen k_i und k_{i+1} die Permutation

$$(k_1, k_2, ..., k_{i+1}, k_i, ..., k_n)$$

Die Anzahl der Inversionen der ersten Permutation sei I, die der zweiten $\overline{I}$. Die Inversionen, die die Zahlen $k_1, k_2, ..., k_{i-1}$ miteinander und mit allen folgenden Zahlen bilden und ebenfalls die Inversionen, die die Zahlen $k_{i+2}, k_{i+3}, ..., k_n$ miteinander bilden, sind in beiden Permutationen die gleichen.

Die weitere Untersuchung beschränkt sich daher nur auf die beiden Zahlen k_i und k_{i+1}. Ist $k_i < k_{i+1}$, so hat die zweite Permutation eine Inversion mehr, es ist also $\overline{I} = I + 1$.

Ist dagegen $k_i > k_{i+1}$, so hat die zweite Permutation eine Inversion weniger, es ist also $\overline{I} = I - 1$.
Fassen wir beide Fälle zusammen, so ist $\overline{I} = I \pm 1$, d.h., durch die Vertauschung zweier benachbarter Zahlen in einer Permutation ändert sich die Anzahl der Inversionen um eins. Es ist also

$$(-1)^I = (-1)^{\overline{I}\pm 1} = -(-1)^{\overline{I}}$$

und damit

$$\operatorname{sgn}(k_1, k2, ..., k_i, k_{i+1}, ..., k_n) = -\operatorname{sgn}(k_1, k2, ..., k_{i+1}, k_i, ..., k_n)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 14. Vertauscht man in einer Permutation $(k_1, k2, ..., k_n)$ der Zahlen $1, 2, ..., n$ zwei beliebige Zahlen miteinander, so ändert die Permutation ihr Vorzeichen.

Beweis. In der Permutation

$$(k_1, ..., k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, ..., k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, ..., k_n)$$

sollen etwa die Zahlen k_i und k_j $(i < j)$ miteinander vertauscht werden. Zunächst vertauschen wir die Zahl k_i der Reihe nach mit allen benachbarten, zwischen k_i und k_j stehenden Zahlen und dann mit k_j selbst. Dabei haben wir $j - i$ Vertauschungen vorgenommen, und die Ausgangspermutation ist in die Permutation

$$(k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ..., k_{j-1}, k_j, k_i, k_{j+1}, ..., k_n)$$

übergegangen. Dann vertauschen wir in dieser Permutation die Zahl k_j der Reihe nach mit den Zahlen $k_{j-1}, k_{j-2}, ..., k_{i+1}$. Dann steht k_j an der Stelle, in der k_i in der Ausgangspermutation gestanden hat.
Dazu benötigen wir $j - (i + 1) = j - i - 1$ Vertauschungen benachbarter Zahlen und. erhalten somit die gewünschte Permutation

$$(k_1, ..., k_{i-1}, k_j, k_{i+1}, ..., k_{j-1}, k_i, k_{j+1}, ..., k_n)$$

Die Anzahl der vorgenommenen Vertauschungen benachbarter Zahlen beträgt also insgesamt $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i)1$.
Diese Anzahl ist aber ungerade, und da nach Satz 13 die Permutation bei jeder Vertauschung benachbarter Zahlen ihr Vorzeichen wechselt, gilt

$$\operatorname{sgn}(k_1, ..., k_i, ..., k_j, ..., k_n) = -\operatorname{sgn}(k_1, ..., k_j, ..., k_i, ..., k_n)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 11. Wir beweisen, dass

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, j, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} = -(1)^{i+j} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} \quad (2)$$

ist.

Beweis. In der Permutation auf der linken Seite von (2) steht die Zahl j an i-ter Stelle. Bringen wir j an die erste Stelle, so haben wir $i-1$ Vertauschungen benachbarter Zahlen vorgenommen. Nach Satz 13 ändert sich daher das Vorzeichen der Permutation um $(-1)^{i-1}$, und es ist

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, j, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} = -(1)^{i+j} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, ..., n \\ j, k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} \qquad (3)$$

In der Permutation auf der rechten Seite von (3) steht die Zahl j an erster Stelle. Sie bildet also mit jeder der Zahlen $1, 2, ..., j-1$ eine Inversion, insgesamt also $j-1$ Inversionen. Streichen wir in dieser Permutation die Zahl j, so erhalten wir die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} \qquad (4)$$

die $j-1$ Inversionen weniger als die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1, 2, ..., n \\ j, k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} \qquad (5)$$

besitzt. Bezeichnen wir die Anzahl der Inversionen der Permutation (4) bzw. (5) mit I bzw. $\overline{I}$, so gilt $\overline{I} = I + (j-1)$. Es ist also

$$(-1)^{\overline{I}} = (-1)^{I+j-1} = (-1)^{j-1} \cdot (-1)^I$$

und damit

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, ..., n \\ j, k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{pmatrix} 1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n \\ k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ...k \end{pmatrix}$$

Setzen wir dies in (3) ein, und beachten wir, dass $(-1)^{-2} = 1$ ist, so erhalten wir (2).

Satz 15. Ordnet man die nach der ersten Koordinate geordneten Zahlenpaare $(1, k_1)$, $(2, k_2)$, ..., (n, k_n), wobei $(k_1, k_2, .., k_n)$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, ..., n$ ist, nach der zweiten Koordinate, so erhält man die Paare $(m_1, 1), (m_2, 2)$, ..., (m_n, n). Dann haben die beiden Permutationen $k_1, k_2, ..., k_n)$ und $(m_1, m_2, ..., m_n)$ das gleiche Vorzeichen.

Beweis. Wir schreiben die nach der ersten Koordinate geordneten Zahlenpaare in der Form, dass wir die Koordinaten der einzelnen Zahlenpaare untereinander schreiben:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & ... & n \\ k_1 & k_2 & ... & k_n \end{matrix}$$

Es seien etwa t Vertauschungen von je zwei Zahlen notwendig, damit die Permutation $(k_1, k_2, ..., k_n)$ in die Permutation mit der natürlichen Reihenfolge übergeht. Führen wir diese t Vertauschungen durch, so geht das obige Schema in

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & ... & m_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{matrix}$$

über. Wir bestimmen nun das Vorzeichen der beiden Permutationen $(k_1, k_2, ..., k_n)$ und $(m_1, m_2, ..., m_n)$. Da t Vertauschungen erforderlich sind, um das erste Schema in das zweite Schema zu überführen, so ergibt die t-malige Anwendung des Satzes 14

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n) = (-1)^t \operatorname{sgn}(1, 2, ..., n) \tag{6}$$

Andererseits ist die Permutation $(m_1, m_2, ..., m_n)$ aus der Permutation $(1, 2, ..., n)$ durch t Vertauschungen von je zwei Zahlen hervorgegangen. Die t-malige Anwendung von Satz 14 ergibt in diesem Fall

$$\operatorname{sgn}(1, 2, ..., n) = (-1)^t \operatorname{sgn}(m_1, m_2, ..., m_n)$$

Setzen wir dies in (6) ein, und beachten wir, dass $(-1)^{2t} = 1$ ist, so erhalten wir

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n) = \operatorname{sgn}(m_1, m_2, ..., m_n)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Abschließend wollen wir die Summe in (3) in 2. näher untersuchen.
Jeder der sechs Summanden ist von der Form $\pm a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3}$, wobei in jedem Summanden für die zweiten Indizes k_1, k_2, k_3 die drei Zahlen $1, 2, 3$ so einzusetzen sind, dass jede genau einmal vertreten ist. Die Reihenfolge der zweiten Indizes ist in allen sechs Summanden verschieden. Schreiben wir die zweiten Indizes der einzelnen Summanden auf, so erhalten wir

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Die verschiedenen Zahlentripel sind aber nichts anderes als die sechs Permutationen der drei Zahlen $1, 2, 3$.
Auch das Vorzeichen der einzelnen Summanden steht mit diesen Permutationen im Zusammenhang. In Verbindung mit Beispiel 10 ergibt sich, dass das Vorzeichen jeder Permutation der zweiten Indizes mit dem Vorzeichen des entsprechenden Summanden übereinstimmt.
Damit können wir (3) in 2. unter Verwendung des Summenzeichens auch in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{P_3} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, k_3) a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} \tag{7}$$

schreiben, wobei die Summation über alle Permutationen der Zahlen $1, 2, 3$ erfolgt.
Wir untersuchen, ob diese Gesetzmäßigkeit auch für Determinanten zweiter Ordnung gilt. Dazu berechnen wir zunächst

$$\sum_{P_2} \operatorname{sgn}(k_1, k_2) a_{1k_1} a_{2k_2}$$

wobei die Summation in Analogie zu (7) über die Permutationen der Zahlen 1 und 2 zu erfolgen hat. Die Permutationen dieser beiden Zahlen sind $(1, 2)$, $(2, 1)$. Ferner ist $\operatorname{sgn}(1, 2) = +1$, $sgn(2, 1) = -1$. Somit gilt

$$\sum_{P_2} \operatorname{sgn}(k_1, k_2) a_{1k_1} a_{2k_2} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Folglich kann (6) in 1. auch in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{P_2} \operatorname{sgn}(k_1, k_2) a_{1k_1} a_{2k_2} \tag{8}$$

geschrieben werden, wobei die Summation über alle Permutationen der Zahlen $1, 2$ erfolgt.

5 Determinanten n-ter Ordnung

Unter einer quadratischen Matrix versteht man ein System von n^2 reellen Zahlen a_{ik} $(i, k = 1, 2, .., n)$, die in einem quadratischen Schema angeordnet sind. Man schreibt

$$\mathfrak{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die n^2 reellen Zahlen heißen die Elemente der Matrix, die Horizontal- bzw. Vertikalreihen von $\mathfrak{A}_n$ heißen Zeilen bzw. Spalten der Matrix, die unter der gemeinsamen Bezeichnung Reihen zusammengefasst werden.
Der erste bzw. zweite Index der mit Doppelindizes versehenen Elemente der Matrix gibt die Zeile bzw. Spalte an, in der das Element in der Matrix steht.

Durch die Schreibweise $\mathfrak{A}_n$ wollen wir zum Ausdruck bringen, dass es sich um eine n-reihige Matrix handelt. Die dieser quadratischen Matrix zugeordnete Determinante definieren wir analog zu (8) und (7) in 4. folgendermaßen:

Definition 7. Unter der Determinante einer n-reihigen Matrix $\mathfrak{A}_n$ oder einer Determinante n-ter Ordnung versteht man

$$|\mathfrak{A}_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P_n} (k_1, k_2, ..., k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} \qquad (2)$$

wobei die Summation über alle Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., n$ erfolgt.

Diese Definition der Determinante stammt von dem deutschen Philosophen und Mathematiker G.W. Leibniz. Die Formel (2) bezeichnen wir daher im folgenden als Leibnizsche Determinantenformel.

In jedem Summanden der Summe in (2) ist aus jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix $\mathfrak{A}_n$ genau ein Element als Faktor vertreten, da in jedem einzelnen Summanden jeder Zeilenindex und jeder Spaltenindex genau einmal vertreten ist.

Beispiel 12. Wir berechnen mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel

a) $|\mathfrak{A}_4| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

b) und mit Hilfe des Ergebnisses von a)

a) Unter Berücksichtigung von Aufgabe 9 und Aufgabe 12 gilt

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_4| =& a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ & - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\ & - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

b) $D = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 3\cdot 1 = 1.$

Beispiel 13. Wir berechnen mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

In der Summe in (2) ergibt sich für den Summanden, der der Permutation $(3,2,4,1,5)$ zugeordnet ist, der Wert

$$\operatorname{sgn}(3,2,4,1,5)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 1 = -\operatorname{sgn}(3,2,4,1,5)$$

In allen anderen Summanden tritt wenigstens einmal der Faktor null auf. Demnach ist

$$D = -\operatorname{sgn}(3,2,4,1,5) = -(-1)^4 = -1$$

Aufgabe 13. Man berechne mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aufgabe 14. Man beweise mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel, dass die Determinante einer quadratischen Matrix $\mathfrak{A}_n$ verschwindet, wenn alle Elemente einer Reihe null sind.

6 Einige grundlegende Determinanteneigenschaften

Da die Summe in (2) in 5. aus $n!$ Summanden besteht, nimmt die Anzahl der Summanden mit wachsendem n sehr schnell zu.
Die unmittelbare Anwendung der Leibnizschen Determinantenformel zur Berechnung von Determinanten n-ter Ordnung ist bereits für $n = 4$ mühsam. Für $n = 5$ besteht die Summe bereits aus 120 Summanden. Daher ist diese Formel für die Berechnung von Determinanten n-ter Ordnung für $n \geq 4$ praktisch ungeeignet.

Aus diesem Grunde werden wir in diesem Abschnitt die bereits in 3. für $n = 2$ und $n = 3$ bewiesenen Determinantensätze für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ beweisen. Mit Hilfe dieser Sätze wird es uns dann möglich sein, die Berechnung von Determinanten erheblich zu vereinfachen.

Satz 16. Werden in einer quadratischen Matrix die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so ist die Determinante der entstehenden Matrix gleich der Determinante der Ausgangsmatrix.

Beweis. Es ist

$$|\mathfrak{A}_n| = \sum_{P_n} (k_1, k_2, ..., k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} \tag{1}$$

Aus der Matrix (1) in 5. entsteht durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten die Matrix

$$\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Setzen wir $a_{ki} = b_{ik}$ $(i, k = 1, 2, ..., n)$, so ist

$$\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$$

und damit

$$|\mathfrak{B}_n| = \sum_{P_n} (k_1, k_2, ..., k_n) b_{1k_1} b_{2k_2} ... b_{nk_n}$$

Wegen $a_{ki} = b_{ik}$ gilt somit

$$|\mathfrak{B}_n| = \sum_{P_n} (k_1, k_2, ..., k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} ... a_{k_n n}$$

wobei auch hier die Summation über alle $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., n$ erfolgt. Ersetzen wir die Summationsbuchstaben $k_1, k_2, ..., k_n$ durch die Summationsbuchstaben $m_1, m_2, ..., m_n$, so ist

$$|\mathfrak{B}_n| = \sum_{P_n} (m_1, m_2, ..., m_n) a_{m_1 1} a_{m_2 2} ... a_{m_n n} \tag{2}$$

Wir greifen einen beliebigen Summanden aus (2) heraus. Die Reihenfolge der reellen Faktoren $a_{m_1 1}, a_{m_2 2}, ..., a_{m_n n}$ darf beliebig gewählt werden. Daher ordnen wir diese Faktoren so um, dass die ersten Indizes in der natürlichen Reihenfolge $1, 2, ..., n$ stehen. Die Reihenfolge der zweiten Indizes sei $k_1, k_2, ..., k_n$. Dann ist

$$a_{m_1 1} a_{m_2 2} ... a_{m_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$$

Da außerdem nach Satz 15

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n) = \operatorname{sgn}(m_1, m_2, ..., m_n)$$

gilt, ist

$$\operatorname{sgn}(m_1, m_2, ..., m_n) a_{m_1 1} a_{m_2 2} ... a_{m_n n} = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$$

Der rechts stehende Ausdruck tritt aber auch in der Summe (1) auf. Da beide Summen die gleiche Anzahl von $n!$ Summanden besitzen, sind alle Summanden und damit die Summenwerte gleich, und es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Nach Satz 1 sind also in Determinantensätzen Zeilen und Spalten gleichberechtigt. Wir brauchen daher die folgenden Sätze etwa nur für Zeilen zu beweisen.

Definition 8. Unter der zum Element a_{ij} gehörigen Unterdeterminante D_{ij} einer quadratischen Matrix $\mathfrak{A}_n$ versteht man die Determinante der Matrix, die aus $\mathfrak{A}_n$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Es ist also

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach der Leibnizschen Determinantenformel ist

$$D_{ij} = \sum_{P_{n-1}} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1, & ..., & j-1, & j+1, & ... & n \\ k_1, & ..., & k_{j-1}, & k_{j+1}, & ... & k_n \end{pmatrix} \cdot a_{1k_1} ... a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}} ... a_{n,k_n} \tag{3}$$

wobei die Summation über alle $(n-1)!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n$ erfolgt.

Definition 9. Unter der zum Element a_{ij} gehörigen Adjunkte A_{ij} einer quadratischen Matrix $\mathfrak{A}_n$ versteht man die mit $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante D_{ij}, d.h., es ist

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Satz 17. Werden in einer quadratischen Matrix die Elemente einer Reihe mit ihren Adjunkten multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man die Determinante der Matrix.

Beweis. Wir formen die Summe in (2) in 5. so um, dass wir zunächst die Summanden zusammenfassen, die a_{i1} als Faktor enthalten.
Da u.a. in jedem Summanden der Summe in (2) in 5. aus der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}_n$ genau ein Element als Faktor vertreten ist, sind in den Summanden, die a_{i1} als Faktor enthalten, die Elemente a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in} nicht als Faktoren vertreten. Durch Ausklammerung von a_{i1} aus diesen Summanden erhalten wir eine Darstellung der Form

$$|\mathfrak{A}_n| = a_{i1}b_{i1} + R_1$$

wobei in R_1 alle die Summanden vertreten sind, die a_{i1} nicht als Faktor enthalten. In b_{i1} sind keine Summanden vorhanden, die a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in} als Faktoren enthalten. In R_1 fassen wir nun alle Summanden zusammen, die a_{i2} als Faktor enthalten. Indem wir diesen Faktor ausklammern, erhalten wir

$$|\mathfrak{A}_n| = a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + R_2$$

wobei in R_2 alle Summanden vorkommen, die weder a_{i1} noch a_{i2} als Faktor enthalten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir schließlich

$$|\mathfrak{A}_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + ... + a_{in}b_{in} \tag{4}$$

wobei die b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in} keine Elemente der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}_n$ enthalten. Unterscheiden sich daher zwei n-reihige Matrizen nur in den Elementen der i-ten Zeile, so stimmen die b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in} für beide Matrizen überein.
Ersetzen wir in der Matrix $\mathfrak{A}_n$ die Elemente a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} durch $x_1, x_2, ..., x_n$, und bezeichnen wir die so entstehende Determinante mit $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, so gilt entsprechend

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & ... & a_{i-1,n} \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & ... & a_{i+1,n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1b_{i1} + x_2b_{i2} + ... + x_nb_{in} \tag{5}$$

Setzen wir insbesondere

$$x_1 = ... = x_{j-1} = 0, \qquad x_j = 1, \qquad x_{j+1} = ... = x_n = 0$$

so erhalten wir

$$f(\underbrace{0,...,0}_{j-1},1,0,...,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... & ... & ... & & ... \\ a_{i-1,1} & ... & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & ... & a_{i-1,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{i+1,1} & ... & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & ... & a_{i+1,n} \\ ... & & ... & ... & ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = b_{ij}$$

Andererseits gilt für (5) nach der Leibnizschen Determinantenformel

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{P_n} \operatorname{sgn}(k_1,k_2,...k_n) a_{1k_1}...a_{i-1k_{i-1}} x_{k_i} a_{i+1k_{i+1}}...a_{nk_n}$$

Setzen wir wieder $x_{k_i} = 0$ für $k_i = 1,...,j-1,j+1,...,n$ und $x_j = 1$, so verschwinden in der Summe diejenigen Summanden, für die $k_i \neq j$ ist, da in ihnen null als Faktor auftritt. Wir brauchen daher in der Summe nur diejenigen Summanden zu berücksichtigen, für die $k_i = j$ ist.
Das bedeutet aber, dass wir nur über die Permutationen $(k_1,k_2,...,k_n)$ zu summieren brauchen, bei denen $k_i = j$ ist, d.h., die Zahl j an i-ter Stelle steht. Die Anzahl dieser Permutationen beträgt $(n-1)!$. Da $f(0,...,0,1,0,...,0) = b_{ij}$ ist, gilt

$$b_{ij} = \sum_{P_n,k_i=j} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, & ..., & ..., & ..., & ..., & ..., & n \\ k_1, & ..., & k_{i-1}, & k, & k_{i+1}, & ..., & k_n \end{pmatrix} \cdot a_{1k_1}...a_{i-1,k_{i-1}} \cdot 1 \cdot a_{i+1,k_{i+1}}...a_{nk_n}$$

Berücksichtigen wir (2) in 4., so ist

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{P_{n-1}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, & ..., & j-1, & j+1, & ..., & n \\ k_1, & ..., & k_{i-1}, & k_{i+1}, & ..., & k_n \end{pmatrix} \cdot a_{1k_1}...a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}}...a_{nk_n} \tag{6}$$

wobei die Summation über alle $(n-1)!$ Permutationen der Zahlen $1,2,...,j-1,j+1,...,n$ erfolgt. Vergleichen wir (6) mit (3), so folgt unter Berücksichtigung von Definition 9

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} = A_{ij}$$

Folglich geht (4) über in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \tag{7}$$

Wegen Satz 16 gilt für die Spalten der Matrix $\mathfrak{A}_n$ analog

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni} \tag{7'}$$

Man bezeichnet (7) bzw. (7') als die Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile bzw. i-ten Spalte. Beim Beweis der folgenden Sätze werden wir häufig von (7) bzw. (7') und in diesem Zusammenhang von der Tatsache Gebrauch machen, dass für zwei n-reihige Matrizen, die sich nur in den Elementen einer Reihe unterscheiden, die Adjunkten der Elemente dieser Reihe für beide Matrizen übereinstimmen.

Satz 18. Die Determinante einer quadratischen Matrix multipliziert sich mit einer reellen Zahl, falls man alle Elemente einer Reihe der Matrix mit dieser reellen Zahl multipliziert.

Beweis. Wir multiplizieren alle Elemente der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}_n$, mit einer reellen Zahl t. Durch Entwicklung nach der i-ten Zeile erhalten wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (ta_{i1})A_{i1} + (ta_{i2})A_{i2} + \dots + (ta_{in})A_{in}$$

$$= t(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aufgabe 15. Man beweise Satz 18 mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel.

Satz 19. Bestehen alle Elemente der i-ten Reihe einer quadratischen Matrix aus zwei Summanden, so ist die Determinante der Matrix die Summe der Determinanten zweier Matrizen, wobei in der i-ten Reihe der ersten bzw. zweiten Matrix jeweils die ersten bzw. zweiten Summanden stehen, während die übrigen Elemente der drei Matrizen übereinstimmen.

Beweis. Durch Entwicklung nach der i-ten Zeile erhalten wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{i1}+b_{i1})A_{i1} + (a_{i2}+b_{i2})A_{i2} + \dots + (a_{in}+b_{in})A_{in}$$

$$= (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) + (b_{i1}A_{i1} + b_{i12}A_{i2} + \dots + b_{in}A_{in})$$

Die erste bzw. zweite Summe stellt die Entwicklung der Determinante einer n-reihigen Matrix $\mathfrak{A}_n$ bzw. $\mathfrak{B}_n$ nach der i-ten Zeile dar, wobei die Matrix $\mathfrak{b}_n$ aus der Matrix $\mathfrak{A}_n$ dadurch entsteht, dass die Elemente der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}_n$ durch die Elemente

$b_{i1}, b_{i,2}, ..., b_{in}$ ersetzt werden. Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & ... & a_{in}+b_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 20. Die Determinante einer quadratischen n-reihigen Matrix mit zwei gleichen parallelen Reihen verschwindet.

Beweis für Zeilen durch vollständige Induktion nach n.
Der Satz gilt wegen Satz 7 für $n = 2$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit des Satzes für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 2$ die Gültigkeit des Satzes für $n = k + 1$ folgt.
Es sei $\mathfrak{A}_{k+1}$ eine $(k+1)$-reihige Matrix, in der die i-te und j-te Zeile $(i \neq j)$ elementweise übereinstimmen. Wir entwickeln

$$|\mathfrak{A}_{k+1}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1,k+1} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{i,k+1} \\ ... & ... & & ... \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & ... & a_{j-1,k+1} \\ a_{j1} & a_{j,2} & ... & a_{j,k+1} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & ... & a_{j+1,k+1} \\ ... & ... & & ... \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & ... & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$$

nach der r-ten Zeile mit $r \neq i, r \neq j$ und erhalten

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_{k+1}| &= a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + ... + a_{r,k+1}A_{r,k+1} \\ &= (-1)^{r+1}a_{r1}D_{r1} + (-1)^{r+2}a_{r2}D_{r2} + ... + (-1)^{r+k+1}a_{r,k+1}D_{r,k+1} \end{aligned}$$

Es sind D_{r1}, D_{r2}, ..., $D_{r,k+1}$ Determinanten k-reihiger Matrizen, in denen jeweils zwei Zeilen elementweise übereinstimmen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $D_{r1} = D_{r2} = ... = D_{r,k+1} = 0$ und damit $|\mathfrak{A}_{k+1}| = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Aus Satz 18 und Satz 20 folgt unmittelbar die Verallgemeinerung von Satz 20:

Satz 21. Sind in einer quadratischen Matrix zwei parallele Reihen proportional, so verschwindet ihre Determinante.

Satz 22. Werden in einer quadratischen Matrix die Elemente einer Reihe mit den entsprechenden Adjunkten einer parallelen Reihe multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man null.

Beweis. Wir ersetzen in $\mathfrak{A}_n$ die Elemente der i-ten Zeile a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} durch die Elemente der j-ten Zeile a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn} $(i \neq j)$.

Dabei erfahren die Adjunkten A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in} keine Änderung, da sie nicht von den Elementen der i-ten Zeile abhängig sind. Wegen (7) gilt dann

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & ... & a_{i-1,k+1} \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & ... & a_{i+1,k+1} \\ ... & ... & & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + ... + a_{jn}A_{n1} \tag{8}$$

Die linke Seite von (8) verschwindet aber nach Satz 20, und es ist somit

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + ... + a_{jn}A_{n1} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Satz 23. Die Determinante einer quadratischen Matrix bleibt unverändert, wenn man zu einer Reihe ein beliebiges Vielfaches einer parallelen Reihe der Matrix addiert.

Beweis. Wir addieren in $\mathfrak{A}_n$ zur i-ten Zeile das t-fache der j-ten Zeile ($i \neq j$). Durch Entwicklung nach der i-ten Zeile erhalten wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} + ta_{j1} & a_{i2} + ta_{j2} & ... & a_{in} + ta_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= (a_{i1} + ta_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + ta_{j2})A_{i2} + ... + (a_{in} + ta_{jn})A_{in}$$
$$= (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}) + t(a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + ... + a_{jn}A_{in})$$

Die erste Summe hat wegen (7) den Summenwert $|\mathfrak{A}_n|$, während die zweite Summe wegen (9) verschwindet. Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & & ... \\ a_{i1} + ta_{j1} & a_{i2} + ta_{j2} & ... & a_{in} + ta_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 24. Die Determinante einer quadratischen Matrix wechselt ihr Vorzeichen, wenn man zwei parallele Reihen der Matrix vertauscht.

Beweis. Wir addieren in $\mathfrak{A}_n$ zur i-ten Zeile die j-te Zeile $(i \neq j)$, anschließend subtrahieren wir von der j-ten Zeile die i-te Zeile, und schließlich addieren wir zur i-ten Zeile die j-te Zeile. Nach Satz 23 ist dann der Reihe nach

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Elemente $-a_{i1}, -a_{i2}$, ..., $-a_{in}$ besitzen -1 als gemeinsamen Faktor. Auf Grund von Satz 18 gilt damit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aufgabe 16. Man beweise Satz 24 mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel.

7 Berechnung von Determinanten

Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe der Sätze in Abschnitt 6. Determinanten ohne allzu großen Rechenaufwand zu berechnen.

Die wichtigsten Hilfsmittel werden hierbei die Sätze 23, 17 und 18 sein. Mit Hilfe von Satz 23 können wir erreichen, dass in einer Reihe nur noch ein von null verschiedenes Element auftritt. Entwickeln wir dann nach Satz 17 die Determinante nach dieser Reihe, so verbleibt nur ein einziger Summand.

Damit haben wir die Berechnung der gegebenen Determinante n-ter Ordnung auf die Berechnung einer einzigen Determinante $(n-1)$-ter Ordnung zurückgeführt.
Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt schließlich auf die Berechnung einer einzigen Determinante zweiter Ordnung.

Der Satz 18 ermöglicht insofern Vereinfachungen, als ein gemeinsamer Faktor aller Elemente einer Reihe vor die Determinante gezogen werden kann. Treten in einer Reihe Brüche auf, so kann man die Rechnung mit Hilfe dieses Satzes dadurch vereinfachen, dass man alle Elemente dieser Reihe mit dem Hauptnenner und die Determinante zugleich mit dem Kehrwert dieses Hauptnenners multipliziert.

Beispiel 14. Wir berechnen

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{4}{3} & 2 & -\frac{20}{3} & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Wir multiplizieren alle Elemente der ersten bzw. dritten Zeile mit 4 bzw. 3 und die Determinante mit $\frac{1}{12}$. Wir erhalten

$$D = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & -20 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Durch mehrmalige Anwendung des Satzes 23 können wir erreichen, dass in einer Reihe nur noch ein von null verschiedenes Element auftritt. Um auch hier das Rechnen mit Brüchen zu vermeiden, formen wir zunächst so um, dass ein Element $+1$ oder -1 wird: Wir subtrahieren von der ersten Zeile die vierte Zeile und erhalten

$$D = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & -20 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Zur zweiten bzw. dritten bzw. vierten Zeile addieren wir das Doppelte bzw. Vierfache bzw. Dreifache der ersten Zeile:

$$D = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 14 & -16 & -5 \\ 0 & 8 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Die Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$D = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 14 & -16 & -5 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Zur ersten Spalte addieren wir das Achtfache der dritten Spalte:

$$D = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 15 & 6 & 1 \\ -26 & -16 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Die Entwicklung nach der dritten Zeile liefert

$$D = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 15 & 6 \\ -26 & -16 \end{vmatrix}$$

Die Elemente der ersten bzw. zweiten Zeile besitzen 3 bzw. -2 als gemeinsamen Faktor. Wir erhalten

$$D = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = -7$$

Beispiel 15. Wir berechnen

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

Von der vierten Spalte subtrahieren wir die dritte Spalte, anschließend von der dritten die zweite Spalte und schließlich von der zweiten die erste Spalte:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

Abermals subtrahieren wir von der vierten Spalte die dritte und schließlich von der dritten die zweite Spalte:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Da die dritte und vierte Spalte elementweise übereinstimmen, ist nach Satz 20: $D = 0$.

Beispiel 16. Wir berechnen

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b & c \\ b & a & b & b & c & b \\ b & b & a & c & b & b \\ b & b & c & a & b & b \\ b & c & b & b & a & b \\ c & b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

Zur ersten Zeile addieren wir die restlichen Zeilen. Die Elemente der ersten Zeile erhalten dann $a + 4b + c$ als gemeinsamen Faktor. Es ist

$$D = (a + 4b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b & c & b \\ b & b & a & c & b & b \\ b & b & c & a & b & b \\ b & c & b & b & a & b \\ c & b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir von der zweiten, dritten, vierten, fünften bzw. sechsten Zeile das b- bzw. c-fache der ersten Zeile, so ergibt sich

$$D = (a + 4b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & c-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b & c-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & a-b & 0 & 0 \\ 0 & c-b & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & b-c & b-c & b-c & b-c & a-c \end{vmatrix}$$

Die Entwicklung nach der ersten Spalte und die anschließende Entwicklung nach der letzten Spalte liefert

$$D = (a-c)(a + 4b + c) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & c-b \\ 0 & a-b & c-b & 0 \\ 0 & c-b & a-b & 0 \\ c-b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

Wir subtrahieren von der vierten Zeile die erste, und anschließend addieren wir zur vierten Spalte die erste:

$$D = (a-c)(a + 4b + c) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & a-2b+c \\ 0 & a-b & c-b & 0 \\ 0 & c-b & a-b & 0 \\ c-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Entwicklung nach der vierten Spalte und die anschließende Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$D = (a-c)^2(a + 4b + c)(a - 2b + c) \begin{vmatrix} a-b & c-b \\ c-b & a-b \end{vmatrix}$$

Damit ist

$$D = (a-c)^2(a+4b+c)(a-2b+c)(a^2-c^2-2ab+2bc)$$

Aufgabe 17. Man berechne

a) $A = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, b) $B = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$

8 Cramersche Regel

Um uns die folgenden Überlegungen zu vereinfachen, stellen wir zunächst die Aussagen der Sätze 17 und 22 zusammen:
Für jede quadratische Matrix $\mathfrak{A}_n$ gilt

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + ... + a_{jn}A_{in} = \begin{cases} |\mathfrak{A}_n| & \text{für} \quad j = i \\ 0 & \text{für} \quad j \neq i \end{cases} \tag{1}$$

und

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + ... + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} |\mathfrak{A}_n| & \text{für} \quad j = i \\ 0 & \text{für} \quad j \neq i \end{cases} \tag{2}$$

Wir wollen nun wie in den bereits behandelten Fällen $n = 2$ und $n = 3$ untersuchen, ob das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

von n Gleichungen mit n Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ unter der Voraussetzung, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

von null verschieden ist, eine Lösung besitzt. Dabei heißt ein n-Tupel von reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ eine Lösung von (3), wenn dieses n-Tupel allen n Gleichungen genügt.

Angenommen, es sei $x_1, x_2, ..., x_n$ eine Lösung von (3). Wir multiplizieren die erste bzw. zweite ... bzw. n-te Gleichung von (3) mit der Adjunkte A_{1i} bzw. A_{2i} ... bzw. A_{ni} und erhalten

$$\left.\begin{matrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)A_{1i} = b_1A_{1i} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)A_{2i} = b_2A_{2i} \\ ... \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)A_{ni} = b_nA_{ni} \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Addieren wir die linken und die rechten Seiten von (5) und ordnen dabei die linke Seite nach $x_1, x_2, ..., x_n$, so folgt

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{1i} + a_{21}A_{2i} + ... + a_{n1}A_{ni})x_1 + (a_{12}A_{1i} + a_{22}A_{2i} + ... + a_{n2}A_{ni})x_2 + ...\\ &\qquad + (a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + ... + a_{ni}A_{ni})x_i + ... + (a_{1n}A_{1i} + a_{2n}A_{2i} + ... + a_{nn}A_{ni})x_n\\ &\qquad = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + ... + b_nA_{ni}\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir (2), so erhalten wir

$$|\mathfrak{A}_n| \cdot x_i = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + ... + b_nA_{ni} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Da nach Voraussetzung die Determinante von (4), die wir im Hinblick auf (3) als Koeffizientendeterminante bezeichnen, von null verschieden ist, ergibt sich

$$x_i = \frac{b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + ... + b_nA_{ni}}{|\mathfrak{A}_n|} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6}$$

Falls also das lineare Gleichungssystem (3) unter der Voraussetzung $|\mathfrak{A}_n| \neq 0$ überhaupt eine Lösung besitzt, so ist die Lösung von der Form (6). Wir zeigen, dass (6) die Lösung von (3) ist.

Dazu setzen wir zunächst (6) in die linke Seite der k-ten Gleichung von (3) ein und erhalten, wenn wir nach $b_1, b_2, ..., b_n$ ordnen,

$$\begin{aligned}a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = \frac{1}{|\mathfrak{A}_n|}[&b_1(a_{k1}A_{11} + a_{k2}A_{12} + ... + a_{kn}A_{1n})\\ &+ b_2(a_{k1}A_{21} + a_{k2}A_{22} + ... + a_{kn}A_{2n}) + ...\\ &+ b_k(a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + ... + a_{kn}A_{kn}) + ...\\ &+ b_n(a_{k1}A_{n1} + a_{k2}A_{n2} + ... + a_{kn}A_{nn})]\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir (1), so folgt

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = \frac{1}{|\mathfrak{A}_n|} \cdot b_k \cdot |\mathfrak{A}_n| = b_k$$

d.h., die k-te Gleichung ist erfüllt.
Da wir für k der Reihe nach die Zahlen $1, 2, ..., n$ einsetzen können, haben wir gezeigt, dass (6) die Lösung des Gleichungssystems (3) ist.

Wir zeigen, dass sich auch der Zähler in (6) als Determinante n-ter Ordnung schreiben lässt.
Ersetzen wir in der Koeffizientenmatrix (4) die Elemente der i-ten Spalte durch die Absolutglieder des Gleichungssytems (3), so erhalten wir die Matrix

$$\mathfrak{B}_n^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & ... & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & ... & a_{2n}\\ ... & & ... & ... & ... & & ...\\ a_{n1} & ... & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Da die Matrizen (4) und (7) sich nur in den Elementen der i-ten Spalte unterscheiden, stimmen in beiden Matrizen die Adjunkten der Elemente der i-ten Spalte überein.
Bezeichnen wir die Determinante der Matrix $\mathfrak{B}_n^{(i)}$ mit D_i, so erhalten wir durch Entwicklung nach der i-ten Spalte

$$D_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + ... + b_n A_{ni}$$

Da D_i der Zähler von (6) ist, bezeichnet man D_i als Zählerdeterminante von x_i. Es ist also

$$x_i = \frac{D_i}{|\mathfrak{A}_n|} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{8}$$

Dieses Ergebnis fassen wir in einem Satz zusammen, der als Cramersche Regel bezeichnet wird.

Satz 25. Ist die Koeffizientendeterminante eines linearen Gleichungssystems von n Gleichungen mit n Variablen von null verschieden, so besitzt dieses Gleichungssystem genau eine Lösung.
Die Lösung erhält man, indem man die Quotienten (8), in deren Nenner die Koeffizientendeterminante und in deren Zähler die entsprechende Zählerdeterminante steht, bildet.
Die Zählerdeterminante von x_i erhält man, indem man in der Koeffizientenmatrix die i-te Spalte durch die Absolutglieder des Gleichungssystems ersetzt und dann die Determinante bildet.

Aufgabe 18. Man untersuche, ob die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 &= 11 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

von null verschieden ist, und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung.

Verschwinden alle Absolutglieder in (3), so heißt das Gleichungssystem homogen; ist wenigstens ein Absolutglied von null verschieden, so heißt das Gleichungssystem inhomogen. Alle Gleichungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ &... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

von n Gleichungen mit n Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ sind erfüllt, wenn wir

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0 \tag{10}$$

setzen. Die Lösung (10) bezeichnet man als die triviale Lösung von (9).

Satz 26. Ein homogenes lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen besitzt stets die triviale Lösung.

Besitzt das System (9) neben (10) noch eine weitere Lösung, in der also nicht alle $x_i = 0$ sind, so nennt man diese Lösung eine nichttriviale Lösung von (9). In diesem Fall sagt man, das System (9) ist nichttrivial lösbar.

Besitzt (9) dagegen nur die Lösung (10), so sagt man, das System ist nur trivial lösbar. So besitzt beispielsweise das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 0 \end{array}\right\}$$

neben der trivialen Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ auch nichttriviale Lösungen wie etwa $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ und $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Der folgende Satz beantwortet die Frage, wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem der Form (9) nur trivial lösbar ist.

Satz 27. Ist in einem homogenen linearen Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen die Koeffizientendeterminante von null verschieden, so ist das Gleichungssystem nur trivial lösbar.

Beweis. Da die Koeffizientendeterminante von null verschieden ist, können wir die Cramersche Regel anwenden. Da in jeder Zählerdeterminante alle Elemente einer Spalte null sind, verschwinden alle Zählerdeterminanten, und somit ist

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_3 = 0$$

die einzige Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems, womit der Satz bewiesen ist.
Der Satz 27 ist logisch äquivalent mit

Satz 28. Ist ein homogenes lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen nichttrivial lösbar, so verschwindet die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems.

9 Einige Anwendungen auf die Geometrie der Ebene

In diesem Abschnitt wollen wir einige geometrische Anwendungen der Determinantentheorie behandeln.

Beispiel 17. Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die kartesischen Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3. Wir zeigen, dass

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist.

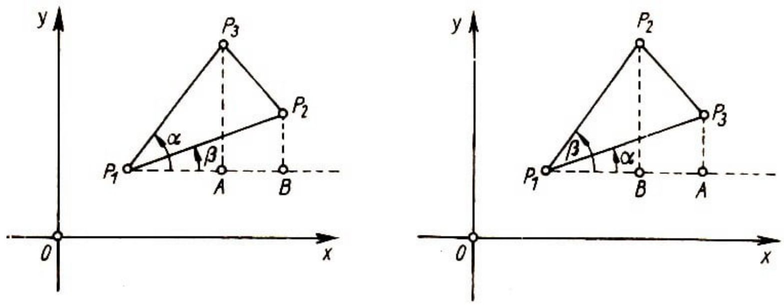

Abb. 1 und 2

Auf die Parallele zur x-Achse durch P_1 fällen wir von P_3 bzw. P_2 das Lot (Abb. 1 bzw. Abb. 2). Den Fußpunkt bezeichnen wir mit A bzw. B. Setzen wir $\angle(AP_1P_3) = \alpha$, $\angle(BP_1P_2) = \beta$, so ist

$$F = \frac{1}{2} P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

Es ist $F > 0$ bzw. $F < 0$, je nachdem, ob das Vorzeichen von $\sin(\alpha - \beta)$ positiv (Abb. 1) bzw. negativ (Abb. 2) ist. Im ersten bzw. zweiten Fall wird die Berandung des Dreiecks in der Reihenfolge $P_1 \to P_2 \to P_3$ im mathematisch positiven bzw. negativen Drehsinn durchlaufen. Wenden wir das Additionstheorem der Sinusfunktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} P_1P_2 \cdot P_1P_3 (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \frac{1}{2}[(P_1P_2\cos\beta)(P_1P_3\sin\alpha) - (P_1P_2\sin\beta)(P_1P_3\cos\alpha)] \end{aligned}$$

Wie wir aus Abb. 1 bzw. Abb. 2 entnehmen, ist $P_1P_2\cos\beta = P_1B$, $P_1P_3\sin\alpha = AP_3$, $P_1P_2\sin\beta BP_2$, $P_1P_3 = \cos\alpha = P_1A$ und damit

$$F = \frac{1}{2}(P_1B \cdot AP_3 - BP_2 \cdot P_1A)$$

Da $P_1B = x_2 - x1$, $AP_3 = y_3 - y_1$, $BP_2 = y_2 - y_1$, $P_1A = x_3 - x_1$ ist, erhalten wir schließlich

$$F = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_)] = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{2}$$

In der eckigen Klammer steht die Entwicklung der in (1) auftretenden Determinante nach der ersten Spalte, womit die Behauptung bewiesen ist.
Die Formel (1) ist leichter zu merken als die Formel (2).

Beispiel 18. Wir zeigen, dass zwischen den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC die Beziehung

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

besteht.

Fällen wir von C auf die Gerade durch die Punkte A, B das Lot (Abb. 3, Abb. 4), so erhalten wir den Fußpunkt C_1. Es ist, wenn wir die Maßzahlen der Längen der Dreiecksseiten AB, BC, CA mit c, a, b bezeichnen,

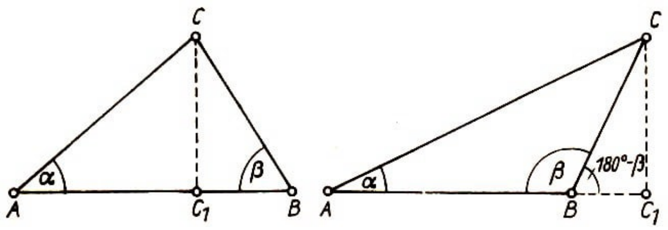

Abb. 3 und 4

$$AC_1 = b\cos\alpha, \qquad BC_1 = a\cos\beta, \qquad c = AC_1 + BC_1 \tag{Abb. 3}$$

bzw.

$$AC_1 = b\cos\alpha, \qquad BC_1 = -a\cos\beta, \qquad c = AC_1 - BC_1 \tag{Abb. 4}$$

und damit

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha \tag{4}$$

Durch zyklische Vertauschung

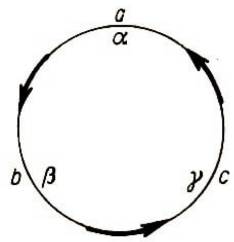

Abb. 5

bei der a in b, b in c, c in a und α in β, β in γ, γ in α übergeben, erhalten wir die beiden anderen Gleichungen

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta \qquad , \qquad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \tag{5,6}$$

Diese drei Gleichungen fassen wir in der Reihenfolge (5), (6), (4) zu

$$\left.\begin{array}{l} (-1)\cdot a + \cos\gamma\cdot b + \cos\beta\cdot c = 0 \\ \cos\gamma\cdot a + (-1)\cdot b + \cos\alpha\cdot c = 0 \\ \cos\gamma\cdot a + \cos\alpha\cdot b + (-1)\cdot c = 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

zusammen. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} -x + \cos\gamma\cdot y + \cos\beta\cdot z = 0 \\ \cos\gamma\cdot x - y + \cos\alpha\cdot z = 0 \\ \cos\gamma\cdot x + \cos\alpha\cdot y - z = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

von drei Gleichungen mit drei Variablen x, y, z besitzt wegen (7) das Tripel $x = a, y = b, z = c$ als Lösung.
Da nach Voraussetzung die Punkte A, B, C ein Dreieck aufspannen, ist somit $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und das System (8) daher nichttrivial lösbar.
Nach Satz 28 muss also die Koeffizientendeterminante von (8) verschwinden, womit (3) bewiesen ist.

Aufgabe 19. Man berechne unter der Voraussetzung, dass $\cos 45°$ und $\cos 60°$ bekannt sind, $\cos 75°$ mit Hilfe von (3).

Beispiel 19. Es seien $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ zwei verschiedene Punkte und $P(x, y)$ ein beliebiger Punkt der Geraden durch die Punkte P_1, P_2.
Wir zeigen, dass zwischen den Koordinaten der drei Punkte P, P_1, P_2 die Beziehung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

besteht.
Da die Punkte $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ in einer Geraden liegen, ist $F = 0$, und es gilt wegen (1)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus folgt (9).

Wir wollen das Ergebnis (9) nochmals auf anderem Wege herleiten. Die Gleichung einer Geraden lautet

$$ax + by + c = 0 \tag{10}$$

[nicht ($a = 0$ und $b = 0$)], wobei x, y die Koordinaten eines in der Geraden gelegenen Punktes darstellen. Die Gleichung (10) muss erfüllt sein, wenn wir die Koordinaten von P bzw. P_1 bzw. P_2 in (10) einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} xa + yb + 1c = 0 \\ x_1a + y_1b + 1c = 0 \\ x_2a + y_2b + 1c = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Das System (11) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Variablen a, b, c, das wegen der Bedingung "nicht ($a = 0$ und $b = 0$)"nichttrivial lösbar ist.
Das bedeutet nach Satz 28, dass (9) gilt.

Im Anschluss an dieses Beispiel betrachten wir den Fall, dass umgekehrt für drei Punkte $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ mit $P_1 = P_2$ die Beziehung (9) gelte. Entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile, so erhalten wir

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0 \tag{12}$$

Wegen $P_1(x_1, y_1) \neq P_2(x_2, y_2)$ ist nicht zugleich $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ und daher verschwinden in (12) nicht gleichzeitig die Koeffizienten $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$. Damit ist (12) und somit auch (9) eine Gleichung einer Geraden. Setzen wir in (9)

$$x = x_1, \quad y = y_1 \qquad \text{bzw.} \qquad x = x_2, \quad y = y_2$$

so verschwindet in beiden Fällen die linke Seite, da jeweils zwei Zeilen elementweise übereinstimmen.

Die Gleichung (9) wird also durch die Koordinaten der Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ erfüllt, d.h., es ist (9) eine Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1, P_2. In Verbindung mit Beispiel 19 haben wir somit folgendes Ergebnis erhalten:

Satz 29. Der Punkt $P(x, y)$ liegt in der Geraden durch die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung heißt Zweipunktegleichung der Geraden in Determinantenform. Sie zeichnet sich durch Symmetrie aus und prägt sich daher besonders gut ein, ein Vorzug der Determinantenschreibweise.
Von der Zweipunktegleichung der Geraden in Determinantenform gelangen wir zu der aus der Schulmathematik bekannten Form, wenn wir in (9) folgende Umformungen vornehmen:

Wir subtrahieren von der ersten bzw. dritten Zeile jeweils die zweite Zeile und erhalten

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Die Entwicklung nach der dritten Spalte liefert

$$(y - y1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

Ist $x_1 \neq x_2$, so können wir dies auch in der nicht ausnahmslos gültigen Form

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

schreiben.

Aufgabe 20. Man untersuche mit Hilfe der Determinantentheorie, ob die Punkte $P_1(1, 2)$, $P_2(2, 3)$, $P_3(3, 5)$ in einer Geraden liegen.

Es seien

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Gleichungen zweier Geraden g_1, g_2. Genügen die Koeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

so besitzt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{matrix}\right\}$$

auf Grund der Cramerschen Regel genau eine Lösung, d.h., die Geraden g_1, g_2 haben genau einen Punkt gemein. Wir fassen zusammen:

(13) Ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

so haben die Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

genau einen Punkt gemein.

Wir nennen zwei Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

parallel genau dann, wenn sie nicht genau einen Punkt gemein haben. Demnach sind also zwei Geraden g_1, g_2 parallel genau dann, wenn sie entweder keinen oder mindestens zwei und damit alle Punkte gemein haben.
Durch Kontraposition erhalten wir aus (13) die zu (13) logisch äquivalente Aussage:

(14) Sind die Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

parallel, so ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Wir zeigen, vgl. Abschnitt 1., dass (14) auch eine hinreichende Bedingung für die Parallelität von g_1, g_2 ist:
Wegen "nicht ($a_1 = 0$ und $b_1 = 0$)" bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass $a_1 \neq 0$ ist. Dann folgt aus (14) sofort $b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1$.
Ferner gilt trivialerweise $a_2 = \frac{a_2}{a_1}a_1$. Es ist $a_2 \neq 0$, da sich anderenfalls $a_2 = b_2 = 0$ im Widerspruch zu "nicht ($a_2 = 0$ und $b_2 = 0$)" ergeben würde. Da also

$$a_2 = \frac{a_2}{a_1}a_1, b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1 \quad \text{bzw.} \quad a_1 = \frac{a_1}{a_2}a_2, b_1 = \frac{a_1}{a_2}b_2$$

ist, gehen die Koeffizienten der Variablen in der zweiten bzw. ersten Geradengleichung aus den entsprechenden Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Geradengleichung durch Multiplikation mit derselben von null verschiedenen reellen Zahl $\frac{a_2}{a_1}$ bzw. $\frac{a_1}{a_2}$ hervor.
Ist auch noch $c_2 = \frac{a_2}{a_1}c_2$ bzw. $c_1 = \frac{a_1}{a_2}c_2$, so genügen die Koordinaten eines jeden Punktes von g_1 bzw. g_2 auch der Gleichung von g_2 bzw. g_1.

Somit liegt jeder Punkt der Geraden g_1 auch in der Geraden g_2 und umgekehrt, die Geraden g_1, g_2 sind also parallel.
Ist dagegen $c_2 \neq \frac{a_2}{a_1}c_1$, so gibt es keinen Punkt von g_1 bzw. g_2, dessen Koordinaten der Gleichung von g_2 bzw. g_1 genügen. Die beiden Geraden g_1, g_2 haben keinen Punkt gemein, d.h., sie sind ebenfalls parallel. Damit haben wir bewiesen:

Satz 30. Die Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

sind parallel genau dann, wenn $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ist.

Der Satz 30 ist logisch äquivalent mit

Satz 31. Die Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

sind nicht parallel genau dann, wenn $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Beispiel 20. Es seien

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad , \qquad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Gleichungen der Seiten eines Dreiecks. Wir zeigen, dass die Maßzahl des Flächeninhalts des von den drei paarweise nicht parallelen Geraden g_1, g_2, g_3 gebildeten Dreiecks

$$F = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \tag{15}$$

ist.

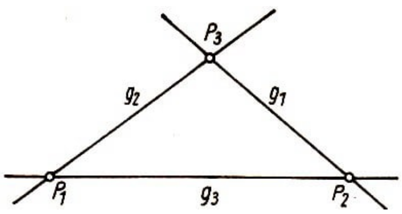

Abb. 6

Mit $P_i(x_i, y_i)$ bezeichnen wir den Eckpunkt des Dreiecks, der g_i gegenüberliegt (Abb. 6). Da keine zwei Geraden parallel sind, ist nach Satz 31

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Die Koordinaten von P_1 sind die Koordinaten des Schnittpunktes des Geradenpaars g_2, g_3. Diese Koordinaten berechnen wir mit Hilfe der Cramerschen Regel, wobei wir die Gleichungen von g_2, g_3 in der Form

$$\left.\begin{aligned} a_2x + b_2y &= -c_2 \\ a_3x + b_3y &= -c_3 \end{aligned}\right\}$$

schreiben. Es ist dann

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -c_2 & b_2 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \qquad , \qquad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -c_2 \\ a_3 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Für die Koordinaten der restlichen Eckpunkte erhalten wir analog

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_3 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Führen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ein, und bezeichnen wir die Adjunkten der Elemente a_i bzw. b_i bzw. c_i mit A_i bzw. B_i bzw. C_i, so ist

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_2 & b_2 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & -c_2 \\ a_3 & -c_3 \end{vmatrix}, \qquad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_3 & -c_3 \end{vmatrix}, \qquad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}, \qquad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

und damit

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1}, \qquad x_2 = \frac{A_2}{C_2}, \qquad x_3 = \frac{A_3}{C_3}, \qquad y_1 = \frac{B_1}{C_1}, \qquad y_2 = \frac{B_2}{C_2}, \qquad y_3 = \frac{B_3}{C_3}$$

Wegen (1) und Satz 18 gilt

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & \frac{B_1}{C_1} & 1 \\ \frac{A_2}{C_2} & \frac{B_2}{C_2} & 1 \\ \frac{A_3}{C_3} & \frac{B_3}{C_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Berücksichtigen wir weiter Aufgabe 6, und beachten wir, dass

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

ist, so erhalten wir schließlich (15).

Aufgabe 21. Man berechne die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Geraden

$$g1 : x + y - 4 = 0, \qquad g_2 : 2x - y + 1 = 0, \qquad g_3 : x - 2y - 1 = 0$$

gebildeten Dreiecks.

Beispiel 21 . Es seien

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Gleichungen dreier Geraden g_1, g_2, g_3, die einen Punkt gemein haben oder paarweise parallel sind. Wir zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Soll $P_0(x_0, y_0)$ in allen drei Geraden liegen, so gilt

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \qquad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0, \qquad a_3x_0 + b_3y_0 + c_3 = 0$$

Diese drei Gleichungen besagen, dass das Zahlentripel

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = 1$$

wegen $z \neq 0$ eine nichttriviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{matrix}\right\}$$

von drei Gleichungen mit drei Variablen x, y, z ist. Nach Satz 28 verschwindet die Koeffizientendeterminante dieses Systems, und es gilt somit (17).

Die Geraden g_1, g_2, g_3 seien paarweise parallel. Dann ist nach Satz 30

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Wegen (18) ist dann

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

d.h., es gilt (17).

Hieran anschließend betrachten wir den Fall, dass umgekehrt für drei Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad g_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

die Beziehung (17) gelte. In Analogie zu Beispiel 20 führen wir die Matrix (16) ein. Für die weitere Diskussion unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1. Die Adjunkten C_1, C_2, C_3 der Elemente c_1, c_2, c_3 in (16) verschwinden nicht gleichzeitig.
Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass $C_1 \neq 0$ ist. Da

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

ist, gilt unter der Voraussetzung (17)

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = 0$$

Multiplizieren wir weiter in der Matrix (16) die Elemente der zweiten bzw. dritten Zeile mit den Adjunkten der ersten Zeile, so erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 22

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \quad , \quad a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$$

Die drei Gleichungen fassen wir zu

$$\left.\begin{array}{l} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = 0 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0 \end{array}\right\} \tag{19}$$

zusammen. Da $c_1 \neq 0$ ist, folgt aus (19)

$$\left.\begin{array}{l} a_1\frac{A_1}{C_1} + b_1\frac{B_1}{C_1} + c_1 = 0 \\ a_2\frac{A_1}{C_1} + b_2\frac{B_1}{C_1} + c_2 = 0 \\ a_3\frac{A_1}{C_1} + b_3\frac{B_1}{C_1} + c_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Dies bedeutet, dass

$$x_0 = \frac{A_1}{C_1} \quad , \quad y_0 = \frac{B_1}{C_1}$$

eine Lösung von

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3y + b_3y + c_3 = 0 \end{array}\right\}$$

ist, d.h., der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ liegt in allen drei Geraden g_1, g_2, g_3.

Fall 2. Es ist $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.
Dann ist auch

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

und nach Satz 30 sind somit die drei Geraden g_1, g_2, g_3 paarweise parallel.
Unsere Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Satz 32. Drei Geraden

$$g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad g_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

haben einen Punkt gemein oder sind paarweise parallel genau dann, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Der Satz 32 ist logisch äquivalent mit

Satz 33. Drei Geraden g_1, g_2, g_3 haben keinen Punkt gemein und sind nicht paarweise parallel genau dann, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist.

Beispiel 22. Wir untersuchen die Lagebeziehung zwischen den Geraden

$$g_1 : x - 2y - 2 = 0, \qquad g_2 : x + 2y - 2 = 0, \qquad g_3 : 2x + y + 1 = 0$$

Da

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

ist, folgt aus Satz 33, dass die drei Geraden keinen Punkt gemein haben und nicht paarweise parallel sind.

Aufgabe 22. Mit Hilfe der Determinantentheorie untersuche man für alle reellen Zahlen λ die Lagebeziehung zwischen den Geraden

$$g_1 : x + y + \lambda = 0, \qquad g_2 : x + \lambda^2 y + \lambda^2 = 0, \qquad g_3 : \lambda^2 x + y + (2\lambda - \lambda^2) = 0$$

10 Ebene affine Abbildungen

In einer Ebene ε sei ein kartesisches $xy-$Koordinatensystem vorgegeben (Abb. 7).

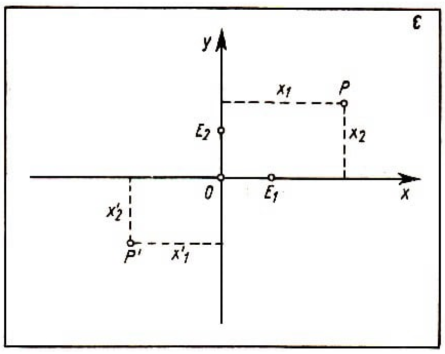

Abb. 7

Der Punkt O heißt Ursprung des Koordinatensystems und die Punkte E_1, E_2 heißen Einheitspunkte der Koordinatenachsen (Abb. 7). In dem linearen System

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \\ x_2' &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

seien die Koeffizienten $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ beliebige reelle Zahlen.
Fassen wir in (1) die x_1, x_2 und x_1', x_2' als kartesische Koordinaten von Punkten P und P' von ε bzgl. desselben kartesischen Koordinatensystems auf, dann wird durch (1)

jedem Punkt $P(x_1, x_2)$ von ε eindeutig ein Punkt $P'(x'_1, x'_2)$ von ε zugeordnet (Abb. 7).

Man sagt auch, (1) vermittelt eine eindeutige Abbildung der Punkte einer Ebene ε in sich. Hierfür sagt man auch kürzer, durch (1) erfolgt eine eindeutige Abbildung einer Ebene in sich. Der Punkt P' heißt Bildpunkt von P, der Punkt P heißt Originalpunkt von P'.
Die durch (1) definierte Abbildung wird auf Grund der besonderen Form der Gleichungen von (1) auch als lineare Abbildung bezeichnet.

Wie das folgende Beispiel zeigt, kann es durchaus vorkommen, dass bei linearen Abbildungen der Form (1) nicht jeder Punkt von ε einen Originalpunkt in ε besitzt.

Beispiel 23. Durch
$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 + 1 \\ x'_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 4 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
erfolgt eine eindeutige Abbildung einer Ebene ε in sich.
Wir bestimmen den Bildpunkt von $A(1, -1)$ und untersuchen, ob der Punkt $B(2, -1)$ einen Originalpunkt in ε besitzt.
Setzen wir in (2) für x_1, x_2 die Koordinaten von A ein, so erhalten wir
$$x'_1 = 1 + (-1) + 1 = 1 \qquad , \qquad x'_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 = -4$$
Damit ist $A'(1, -4)$ der Bildpunkt von $A(1, -1)$.

Setzen wir in (2) für x'_1, x'_2 die Koordinaten von B ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem (10) von 1., von dem wir schon gezeigt haben, dass es nicht lösbar ist.
Damit besitzt der Punkt B keinen Originalpunkt in ε.

Anschließend stellen wir die Frage, ob es bei einer durch (1) definierten linearen Abbildung einer Ebene ε in sich vorkommen kann, dass ein Punkt F von ε mit seinem Bildpunkt F' zusammenfällt.
Ein Punkt mit dieser Eigenschaft heißt Fixpunkt der Abbildung. Die Koordinaten x_1, x_2 von F müssen wegen der Forderung
$$F(x_1, x_2) = F'(x'_1, x'_2)$$
der Bedingung
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \\ x_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{aligned}\right\}$$
genügen. Dieses lineare Gleichungssystem bringen wir auf die Form
$$\left.\begin{aligned} (a_1 - 1)x_1 + b_1x_2 &= -c_1 \\ a_2x_1 + (b_2 - 1)x_2 &= -c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$
Je nachdem, ob das System (3) lösbar ist oder nicht, besitzt die durch (1) definierte Abbildung von ε in sich Fixpunkte oder nicht.

Beispiel 24. Wir untersuchen für alle reellen Zahlen λ, ob die durch

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = (\lambda+1)x_1 + \lambda^2 x_2 - 1 \\ x_2' = \lambda x_1 + (\lambda+1)x_2 - 1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

definierte lineare Abbildung von ε in sich Fixpunkte besitzt, und bestimmen gegebenenfalls alle Fixpunkte dieser Abbildung. Das Gleichungssystem (3) lautet im vorliegenden Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 = 1 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Es ist

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

die Koeffizientendeterminante von (5), und es gilt

$$D = \lambda^2(1-\lambda)$$

Für die weitere Untersuchung unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1. Für alle reellen Zahlen λ, die der Bedingung $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq 1$ genügen, ist $D \neq 0$. Das Gleichungssystem (5) besitzt dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad x_2 = 0$$

Also ist $F\left(\frac{1}{\lambda}, 0\right)$ der Fixpunkt der Abbildung (4).

Fall 2. Ist $\lambda = 1$, so ist neben $D = 0$ auch $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$. Auf Grund von Satz 1 besitzt das Gleichungssystem (5) dann eine einfache unendliche Lösungsmannigfaltigkeit.

Demnach gibt es unendlich viele Fixpunkte $F(x_1, x_2)$. Die x-Koordinate x_1 und die y-Koordinate x_2 dieser Fixpunkte genügen wegen $x_1 + x_2 = 1$ der Gleichung

$$x + y - 1 = 0$$

Das ist die Gleichung einer Geraden g. Alle Punkte dieser Geraden sind Fixpunkte der Abbildung (4). Die Gerade g heißt daher Fixgerade der Abbildung.

Fall 3. Ist $\lambda = 0$, so ist das Gleichungssystem (5) nicht lösbar, da die Absolutglieder in (5) nicht verschwinden. Die Abbildung (4) besitzt dann keinen Fixpunkt.

Im folgenden setzen wir stets voraus, dass die Koeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 in (1) der Bedingung

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

genügen. In (2) ist diese Bedingung nicht erfüllt.

Wir beweisen, das unter der Voraussetzung (6) bei einer durch (1) definierten eindeutigen Abbildung von ε in sich auch jeder Punkt von ε genau einen Originalpunkt in ε besitzt:

Es sei $Q(x'_1, x'_2)$ ein beliebiger Punkt von ε. In (1) dürfen wir dann x'_1, x'_2 als bekannt voraussetzen. Schreiben wir (1) in der Form

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 = x'_1 - c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = x'_2 - c_2 \end{array}\right\} \tag{7}$$

so besitzt das lineare Gleichungssystem (7) wegen (6) auf Grund der Cramerschen Regel genau eine Lösung, d.h., zum Punkt $Q(x'_1, x'_2)$ von ε existiert in ε genau ein Originalpunkt $P(x_1, x_2)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Auf Grund des soeben Bewiesenen sagt man auch, (1) vermittelt im Fall $|\mathfrak{A}_2| \neq 0$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich. Eine durch (1) definierte Abbildung einer Ebene in sich heißt affin oder eine Affinität, wenn $|\mathfrak{A}_2| \neq 0$ ist.
Damit vermittelt also eine durch (1) definierte Affinität eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich.
Wir beweisen den

Satz 34. Bei einer durch (1) definierten Affinität von ε auf sich
a) gehen Geraden in Geraden über,
b) gehen parallele (nicht parallele) Geraden in parallele (nicht parallele) Geraden über,
c) geht der Mittelpunkt einer Strecke in den Mittelpunkt der Bildstrecke über,
d) ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Bilddreiecks gleich dem Produkt aus $|\mathfrak{A}_2|$ und der Maßzahl des Flächeninhalts des Originaldreiecks.

Beweis von Satz 34 a. Es sei (10) in 9. die Gleichung einer Geraden g in ε und $P(x_1, x_2)$ ein beliebiger Punkt von g. Dann erfüllen die Koordinaten von P diese Gleichung, d.h., es gilt

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \tag{8}$$

Wir untersuchen, welcher Relation die Koordinaten des Bildpunktes $P'(x'_1, x'_2)$ genügen. Wegen (6) folgt aus (7)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 - c_1 & b_1 \\ x'_2 - c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{A}_2|} = \frac{b_2x'_1 - b_2c_1 - b_1x'_2 + b_1c_2}{|\mathfrak{A}_2|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & x'_1 - c_1 \\ a_2 & x'_2 - c_2 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{A}_2|} = \frac{a_1x'_2 - a_1c_2 - a_2x'_1 + a_2c_1}{|\mathfrak{A}_2|}$$

Setzen wir dies in (8) ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit $|\mathfrak{A}_2|$

$$a(b_2x'_1 - b_2c_1 - b_1x'_2 + b_1c_2) + b(a1x'_2 - a_1c_2 - a_2x'_1 + a_2c_1) + c|\mathfrak{A}_2| = 0$$

Ordnen wir die linke Seite nach x'_1, x'_2, so folgt

$$(ab_2 + ba_2)x'_1 + (ba_1 + ab_1)x'_2 + a(b_1c_2 - b_2c_1) - b(a_1c_2 - a_2c_1) + c|\mathfrak{A}_2| = 0 \tag{9}$$

Mit Hilfe von Determinanten lässt sich (9) in der übersichtlichen Form

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x'_1 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} x'_2 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben. Dies besagt, dass die Koordinaten x'_1, x'_2 des Bildpunktes von $P(x_1, x_2)$ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

genügen. Wir zeigen, dass (10) Gleichung einer Geraden g' ist:
Angenommen, es gelte

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Wegen "nicht ($a = 0$ und $b = 0$)" bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $a \neq 0$ voraussetzen. Dann folgt aus (11)

$$b_2 = \frac{b}{a} a_2 \qquad , \qquad b_1 = \frac{b}{a} a_1$$

und es ist dann

$$|\mathfrak{A}_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{b}{a} \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (6). Demnach muss unsere Annahme (11) falsch gewesen sein. (10) ist also Gleichung einer Geraden g'.
Durchläuft nun $P(x_1, x_2)$ alle Punkte von g, so liegen die zugehörigen Bildpunkte in der Geraden g'.

Wir zeigen noch, dass jeder Punkt von g' auch einen Originalpunkt in g besitzt. Es sei $P'(x'_1, x'_2)$ ein beliebiger Punkt von g', d.h., es gelte (9). Setzen wir (1) in (9) ein, so erhalten wir durch Zusammenfassen

$$a(a_1 b_2 - b_1 a_2) x_1 + b(a_1 b_2 - b_1 a_2) x_2 + c|\mathfrak{A}_2| = 0$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation beider Seiten mit dem Kehrwert von $|\mathfrak{A}_2|$ unmittelbar (8), d.h., die Koordinaten des Originalpunkts genügen der Gleichung von g. Die Gerade g'' heißt Bildgerade von g.

Beweis von Satz 34b. Es seien

$$p_1 x + q_1 y + r_1 = 0 \qquad , \qquad p_2 x + q_2 y + r_2 = 0$$

Gleichungen zweier Geraden g_1, g_2 und

$$p'_1 x + q'_1 y + r'_1 = 0 \qquad , \qquad p'_2 x + q'_2 y + r'_2 = 0$$

Gleichungen der Bildgeraden g'_1, g'_2. Auf Grund von (10) gilt dann

$$p'_1 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad q'_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}, \qquad p'_2 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad q'_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ q_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

Wir untersuchen, welche Lagebeziehung zwischen den beiden Bildgeraden g'_1, g'_2 besteht. Nach Satz 30 bzw. Satz 31 müssen wir dazu die Determinante

$$\begin{vmatrix} p'_1 & q'_1 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix} \tag{12}$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} p'_1 & q'_1 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix} &= p'_1 q'_2 - q'_1 p'_2 = (p_1 b_2 - q_1 a_2)(a_1 q_2 - b_1 p_2) - (a_1 q_1 - b_1 p_1)(p_2 b_2 - q_2 a_2) \\
&= a_1 b_2 p_1 p_2 - a_1 a_2 q_1 q_2 - b_1 b_2 p_1 p_2 + a_2 b_1 p_2 q_1 \\
&= -a_1 b_2 p_2 q_1 + b_1 b_2 p_1 p_2 + a_1 a_2 q_1 q_2 - a_2 b_1 p_1 q_2 \\
&= p_1 q_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) - p_2 q_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = (p_1 q_2 - p_2 q_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen (6) ist der zweite Faktor der rechten Seite von null verschieden. Daher verschwindet (12) genau dann, wenn

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

verschwindet, d.h., die Geraden g'_1, g'_2 sind parallel genau dann, wenn die Geraden g_1, g_2 parallel sind, womit Satz 34b bewiesen ist.

Beweis von Satz 34c. Es sei $M(z_1, z_2)$ der Mittelpunkt einer Strecke PQ mit $P(x_1, x_2)$ und $Q(y_1, y_2)$. Zwischen den Koordinaten von M und P, Q besteht bekanntlich der Zusammenhang

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{x_2 + y_2}{2} \tag{13}$$

Auf Grund von Satz 34a liegen die Bildpunkte von P, Q, M wieder in einer Geraden, und wegen (1) gilt

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 \\ x'_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_1 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 \\ y'_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} z'_1 &= a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1 \\ z'_2 &= a_2 z_1 + b_2 z_2 + c_1 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Der Mittelpunkt der Bildstrecke $P'Q'$ hat die Koordinaten $\frac{x'_1+y'_1}{2}$ und $\frac{x'_2+y'_2}{2}$. Wegen (14) und (15) ist

$$\begin{aligned}
\frac{x'_1 + y'_1}{2} &= \frac{a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 + a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1}{2} = a_1 \frac{x_1 + y_1}{2} + b_1 \frac{x_2 + y_2}{2} + c_1 \\
\frac{x'_2 + y'_2}{2} &= \frac{a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 + a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2}{2} = a_2 \frac{x_1 + y_1}{2} + b_2 \frac{x_2 + y_2}{2} + c_2
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir (13) und (16), so erhalten wir

$$\frac{x_1' + y_1'}{2} = a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1 = z_1'$$
$$\frac{x_2' + y_2'}{2} = a_2 z_1 + b_2 z_2 + c_2 = z_2'$$

d.h., der Mittelpunkt der Bildstrecke fällt mit dem Bildpunkt des Mittelpunkts der Originalstrecke zusammen, womit Satz 34c bewiesen ist.

Beweis von Satz 34d.
Es seien $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, $R(z_1, z_2)$ die Eckpunkte eines Dreiecks PQR. Dann ist die Bildfigur $P'Q'R'$ mit $P'(x_1', x_2')$, $Q'(y_1', y_2')$, $R'(z_1', z_2')$ auf Grund des bereits Bewiesenen ebenfalls ein Dreieck. Die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks PQR bzw. $P'Q'R'$ ist wegen (1) in 9.

$$F_{PQR} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad F_{P'Q'R'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & 1 \\ y_1' & y_2' & 1 \\ z_1' & z_2' & 1 \end{vmatrix}$$

Berücksichtigen wir (14), (15), (16), so gilt

$$F_{P'Q'R'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 & 1 \\ a_1y_1 + b_1y_2 + c_1 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2 & 1 \\ a_1z_1 + b_1z_2 + c_1 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Mehrmalige Anwendung von Satz 19 liefert

$$\begin{aligned} F_{P'Q'R'} = \frac{1}{2}\Bigg[&\begin{vmatrix} a_1x_1 & a_2x_1 & 1 \\ a_1y_1 & a_2y_1 & 1 \\ a_1z_1 & a_2z_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_2x_2 & 1 \\ a_1y_1 & b_2y_2 & 1 \\ a_1z_1 & b_2z_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1x_1 & c_2 & 1 \\ a_1y_1 & c_2 & 1 \\ a_1z_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} b_1x_2 & a_2x_1 & 1 \\ b_1y_2 & a_2y_1 & 1 \\ b_1z_2 & a_2z_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x_2 & b_2x_2 & 1 \\ b_1y_2 & b_2y_2 & 1 \\ b_1z_2 & b_2z_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x_2 & c_2 & 1 \\ b_1y_2 & c_2 & 1 \\ b_1z_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} c_1 & a_2x_1 & 1 \\ c_1 & a_2y_1 & 1 \\ c_1 & a_2z_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_2x_2 & 1 \\ c_1 & b_2y_2 & 1 \\ c_1 & b_2z_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\Bigg] \end{aligned}$$

Die Anwendung der Sätze 18 und 20 ergibt

$$F_{P'Q'R'} = \frac{1}{2}\left(a_1b_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} + b_1a_2 \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ y_2 & y_1 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Berücksichtigen wir Satz 24, so erhalten wir

$$F_{P'Q'R'} = \frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Damit gilt

$$F_{P'Q'R'} = |\mathfrak{A}_2| \cdot F_{PQR} \tag{17}$$

womit Satz 34d bewiesen ist.

Beispiel 25. Wir untersuchen, in welche Bildfigur die affine Abbildung

$$x_1' = x_1 + x_2 + 1 \qquad , \qquad x_2' = 2x_1 + x_2 - 2 \tag{18}$$

von ε auf sich das Quadrat $ABCD$ mit $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ überführt.

Da auf Grund von Satz 34b parallele Geraden in parallele Geraden übergeben, ist die Bildfigur $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm. Die Eckpunkte der Bildfigur berechnen wir mit Hilfe von (18) und erhalten $A'(1,-2)$, $B'(2,0)$, $C'(3,1)$, $D'(2,-1)$. In Abb.8 sind Original- und Bildfigur eingezeichnet.

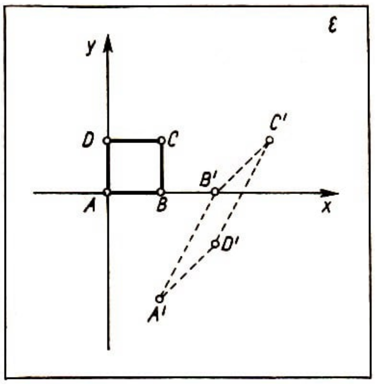

Abb. 8

Wie aus Abb. 8 hervorgeht, wird durch (18) das Quadrat $ABCD$ in das Parallelogramm $A'B'C'D'$ überführt, das weder orthogonale noch gleichlange Seiten hat.
Die durch (18) definierte Affinität lässt also von den Eigenschaften des Quadrats $ABCD$ lediglich die Parallelogrammeigenschaften unverändert.

Aufgabe 23. Gegeben sei die Affinität

$$x_1' = 3x_1 + x_2 + 1 \qquad , \qquad x_2' = x_1 + x_2 + 2$$

von ε auf sich.
a) Zu den Geraden g_1, g_2, g_3 von Aufgabe 21 ermittle man Gleichungen der Bildgeraden g_1', g_2', g_3'.
b) Zu dem in Aufgabe 21 gegebenen Dreieck berechne man die Maßzahl F' des Flächeninhalts des Bilddreiecks.

Aufgabe 24. Man untersuche, in welche Bildfigur die lineare Abbildung

$$x_1' = x_1 + 2x_2 - 2 \qquad , \qquad x_2' = x_1 + x_2 + 4$$

von ε auf sich das Trapez $ABCD$ mit $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$ überführt.

Aufgabe 25. Man untersuche, in welche Bildfigur die affine Abbildung

$$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad , \qquad x_2' = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

von ε auf sich den Kreis k mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ überführt.

Satz 35: Es seien $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, $R(z_1, z_2)$ bzw. $P'(x'_1, x'_2)$, $Q'(y'_1, y'_2)$, $R'(z'_1, z'_2)$ je drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte einer Ebene ε. Dann gibt es genau eine affine Abbildung von ε auf sich, die das eine Punktetripel in das andere Punktetripel überführt.

Beweis. Das System (1) muss erfüllt sein, wenn wir die Koordinaten von P und P' bzw. Q und Q' bzw. R und R' in (I) einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} x_1a_1 + x_2b_1 + 1c_1 &= x'_1 \\ x_1a_2 + x_2b_2 + 1c_2 &= x'_2 \\ y_1a_1 + y_2b_1 + 1c_1 &= y'_1 \\ y_1a_2 + y_2b_2 + 1c_2 &= y'_2 \\ z_1a_1 + z_2b_1 + 1c_1 &= z'_1 \\ z_1a_2 + z_2b_2 + 1c_2 &= z'_2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Das System (19) ist ein lineares Gleichungssystem von sechs Gleichungen mit sechs Variablen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Da die Variablen a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2 jeweils nur in der ersten, dritten, fünften bzw. in der zweiten, vierten, sechsten Gleichung von (19) auftreten, können wir die weitere Untersuchung von (19) auf Lösbarkeit getrennt an den beiden Systemen

$$\left.\begin{aligned} x_1a_1 + x_2b_1 + 1c_1 &= x'_1 \\ y_1a_1 + y_2b_1 + 1c_1 &= y'_1 \\ z_1a_1 + z_2b_1 + 1c_1 &= z'_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} x_1a_2 + x_2b_2 + 1c_2 &= x'_2 \\ y_1a_2 + y_2b_2 + 1c_2 &= y'_2 \\ z_1a_2 + z_2b_2 + 1c_2 &= z'_2 \end{aligned}\right\} \tag{20,21}$$

vornehmen. Da nach Voraussetzung die Punkte P, Q, R nicht in einer Geraden liegen, gilt auf Grund von Satz 29

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{22}$$

d.h., die Koeffizientendeterminante des Systems (20) bzw. (21) ist von null verschieden. Demnach besitzt das System (20) bzw. (21) auf Grund der Cramerschen Regel genau eine Lösung a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2, d.h., in (1) sind die Koeffizienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 eindeutig bestimmt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_2$ von null verschieden ist.
Da nach Voraussetzung die Punkte P, Q, R bzw. P', Q', R' nicht in einer Geraden liegen, gilt $F_{PQR} \neq 0$ und $F_{P'Q'R'} \neq 0$. Aus (17) folgt dann $|\mathfrak{A}_2| \neq 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 26. Bei einer affinen Abbildung von ε auf sich werden die Punkte $P(-1, 0)$, $Q(1, 2)$, $R(2, 1)$ auf die Punkte $P'(-3, -2)$, $Q'(3, 4)$, $R'(4, 3)$ abgebildet. Wir bestimmen den Bildpunkt von $A(1, 1)$.

Zunächst müssen wir in (!) die unbekannten Koeffizienten ermitteln. Die Gleichungssysteme (20) und (21) lauten im vorliegenden Beispiel

$$\left.\begin{aligned} -a_1 + c_1 &= -3 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 &= 3 \\ 2a_1 + b_1 + c_1 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} -a_2 + c_2 &= -2 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 &= 4 \\ 2a_2 + b_2 + c_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Das erste bzw. das zweite Gleichungssystem besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad a_2 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = -1$$

Damit nimmt (1) die Gestalt

$$x_1' = 2x_1 + x_2 - 1 \qquad , \qquad x_2' = x_1 + 2x_2 - 1 \tag{23}$$

an. Setzen wir in (23) die Koordinaten von A ein, so erhalten wir den Bildpunkt $A'(2, 2)$.

Aufgabe 26. Bei einer affinen Abbildung von ε auf sich werden der Ursprung O eines kartesischen Koordinatensystems und die Einheitspunkte $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ der Koordinatenachsen auf die Punkte $O'(1, 0)$, $E_1'(0, 1)$, $E_2'(0, 0)$ abgebildet.
Zu der Geraden g mit der Gleichung $x - y + 1 = 0$ gebe man eine Gleichung der Bildgeraden g' an.

11 Lösungen der Aufgaben

2. b) $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} =$
$$= a_{11}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{21}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{31}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = 0$$

3. a)
$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12}) = |\mathfrak{A}_2|$$
$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}a_{11} = |\mathfrak{A}_2|$$

b)
$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = a_{11}(-a_{21}) + a_{21}a_{11} = 0$$
$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} = a_{12}a_{22} + a_{22}(-a_{12}) = 0$$

4. a) $A = -8$
b) $B = (a + 2b)(a - b)^2$
c) $C = (a + b + c)(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2) = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$

5. Es ist $f(x) = 2$, d.h. der Grad der Polynoms ist null.

6.
$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathfrak{A}}_3| &= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) \\
&= A_{11}[(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}](a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}](a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})] \\
&+ A_{12}[(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}](a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}](a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})] \\
&+ A_{13}[(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}](a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}](a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})] \\
&= A_{11}(a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}^2a_{23}a_{32} + a_{11}a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{12}a_{23}a_{31}) \\
&+ A_{12}(a_{11}a_{12}a_{22}a_{33} - a_{12}^2a_{21}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{12}a_{23}a_{32} + a_{12}^2a_{23}a_{31} - a_{12}a_{13}a_{22}a_{31}) \\
&+ A_{13}(-a_{12}a_{13}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{23}a_{32} + a_{13}^2a_{21}a_{32} + a_{11}a_{13}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{23}a_{31} - a_{13}^2a_{22}a_{31}) \\
&= A_{11}(a_{11}^2A_{11} + a_{11}a_{12}A_{12} + a_{11}a_{13}A_{13}) + A_{12}(a_{12}^2A_{12} + a_{11}a_{12}A_{11} + a_{12}a_{13}A_{13}) \\
&+ A_{13}(a_{13}^2A_{13} + a_{11}a_{13}A_{11} + a_{12}a_{13}A_{12}) \\
&= a_{11}^2A_{11}^2 + a_{12}^2A_{12}^2 + a_{13}^2A_{13}^2 + 2a_{11}a_{13}A_{11}A_{13} + 2a_{12}a_{13}A_{12}A_{13} + 2a_{11}a_{12}A_{11}A_{12} \\
&= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})^2 = |\mathfrak{A}_3|^2
\end{aligned}$$

7. Es lassen sich $P(1, 3, 5, 7, 9) = 5! = 120$ verschiedene fünfstellige Zahlen bilden.

8. Es lassen sich $P(0, 1, 2, 3) - P(1, 2, 3) = 4! - 3! = 18$ verschiedene vierstellige Zahlen bilden.

9. In der Aufstellung sind die Permutationen nach Spalten geordnet:

$$(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 1, 2, 4), (4, 1, 2, 3), (1, 2, 4, 3), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 4, 2), (4, 1, 3, 2),$$
$$(1, 3, 2, 4), (2, 3, 1, 4), (3, 2, 1, 4), (4, 2, 1, 3), (1, 3, 4, 2), (2, 3, 4, 1), (3, 2, 4, 1), (4, 2, 3, 1),$$
$$(1, 4, 2, 3), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2), (4, 3, 1, 2), (1, 4, 3, 2), (2, 4, 3, 1), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 2, 1)$$

10. Bei lexikographischer Anordnung der Permutationen ist die 1. Permutation: $(1, 2, 3, 4, 5)$.
Die 1 steht bei $4! = 24$ Permutationen an erster Stelle. Damit ist die 25. Permutation: $(2, 1, 3, 4, 5)$.
Die Zahlen 2 und 1 stehen bei $3! = 6$ Permutationen an erster bzw. zweiter Stelle. Demnach ist die 31. Permutation : $(2, 3, 1, 4, 5)$.

Bei ebenfalls $3! = 6$ Permutationen stehen die beiden Zahlen 2 und 3 an erster bzw. zweiter Stelle. Damit ist schließlich die 37. Permutation: $(2, 4, 1, 3, 5)$.

11. Bei lexikographischer Anordnung der Permutationen steht an
1. Stelle: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 121. Stelle: $(2, 1, 3, 4, 5, 6)$, 241. Stelle: $(3, 1, 2, 4, 5, 6)$, 265. Stelle: $(3, 2, 1, 4, 5, 6)$, 271. Stelle: $(3, 2, 4, 1, 5, 6)$, 277. Stelle: $(3, 2, 5, 1, 4, 6)$.

12.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(1,2,3,4) = +1, \mathrm{sgn}(2,1,3,4) = -1, \mathrm{sgn}(1,2,4,3) = -1, \mathrm{sgn}(2,1,4,3) = +1,\\
&\mathrm{sgn}(1,3,2,4) = -1, \mathrm{sgn}(2,3,1,4) = +1, \mathrm{sgn}(1,3,4,2) = +1, \mathrm{sgn}(2,3,4,1) = -1,\\
&\mathrm{sgn}(1,4,2,3) = +1, \mathrm{sgn}(2,4,1,3) = -1, \mathrm{sgn}(1,4,3,2) = -1, \mathrm{sgn}(2,4,3,1) = +1,\\
&\mathrm{sgn}(3,1,2,4) = +1, \mathrm{sgn}(4,1,2,3) = -1, \mathrm{sgn}(3,1,4,2) = -1, \mathrm{sgn}(4,1,3,2) = +1,\\
&\mathrm{sgn}(3,2,1,4) = -1, \mathrm{sgn}(4,2,1,3) = +1, \mathrm{sgn}(3,2,4,1) = +1, \mathrm{sgn}(4,2,3,1) = -1,\\
&\mathrm{sgn}(3,4,1,2) = +1, \mathrm{sgn}(4,3,1,2) = -1, \mathrm{sgn}(3,4,2,1) = -1, \mathrm{sgn}(4,3,2,1) = +1.
\end{aligned}$$

13. $A = \mathrm{sgn}(1, 2, ..., n)a_{11}a_{22}...a_{nn} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$

14. Sind alle Elemente einer Reihe von $\mathfrak{A}_n$ null, so verschwindet die Summe in (2) in 5., da in jedem der $n!$ Summanden null als Faktor auftritt. Damit ist $|\mathfrak{A}_| = 0$.

15. Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum P_n \,\mathrm{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n)a_{1k_1}a_{2k_2}...(ta_{ik_i})...a_{nk_n}$$

$$= t \sum P_n \,\mathrm{sgn}(k_1, k_2, ..., k_n)a_{1k_1}a_{2k_2}...ta_{ik_i}...a_{nk_n} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

16. Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum P_n \,\mathrm{sgn}(k_1, k_2, ...k_i, ..., k_j, ..., k_n)a_{1k_1}...a_{ik_i}...a_{jk_j}...a_{nk_n}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum P_n \operatorname{sgn}(k_1, k_2, ...k_j, ..., k_i, ..., k_n) a_{1k_1}...a_{jk_j}...a_{ik_i}...a_{nk_n}$$

Da die Reihenfolge der Faktoren des Produkts $a_{1k_1}...a_{ik_i}...a_{jk_j}...a_{nk_n}$ beliebig gewählt werden kann, ist

$$a_{1k_1}...a_{ik_i}...a_{jk_j}...a_{nk_n} = a_{1k_1}...a_{jk_j}...a_{ik_i}...a_{nk_n}$$

In den beiden Permutationen $(k_1, k_2, ...k_i, ..., k_j, ..., k_n)$ und $(k_1, k_2, ...k_j, ..., k_i, ..., k_n)$ sind zwei Zahlen miteinander vertauscht. Das bedeutet nach Satz 14, dass

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ...k_i, ..., k_j, ..., k_n) = -\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ...k_j, ..., k_i, ..., k_n)$$

ist. Demnach gilt

$$\begin{gathered}\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ...k_i, ..., k_j, ..., k_n) a_{1k_1}...a_{ik_i}...a_{jk_j}...a_{nk_n} = \\ -\operatorname{sgn}(k_1, k_2, ...k_j, ..., k_i, ..., k_n) a_{1k_1}...a_{jk_j}...a_{ik_i}...a_{nk_n}\end{gathered}$$

und somit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

17. a) $A = 50$
b)

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) \\ 1 & a_4 - a_1 & a_4(a_4 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 - a_2 & a_3(a_3 - a_2) \\ 1 & a_4 - a_2 & a_4(a_4 - a_2) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & a_4 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \end{aligned}$$

18. Es ist

$$|\mathfrak{A}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Da die Koeffizientendeterminante von null verschieden ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es ist

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28$$

und folglich ist

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = -3, \qquad x_4 = 4$$

die Lösung des Gleichungssystems.

19. $\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

20. Da

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ist, liegen wegen Satz 29 die drei Punkte nicht in einer Geraden.

21. $F = 6$.

22. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & 1 & 2\lambda - \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & 1 - \lambda^2 & 2 - \lambda - \lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1)^2$$

Für alle reellen Zahlen λ, die der Bedingung $\lambda \neq -1, 0, 1$ genügen, haben die Geraden keinen Punkt gemein und sind nicht paarweise parallel.
Für $\lambda = -1, 0, 1$ haben die Geraden einen Punkt gemein oder sind paarweise parallel.
$\lambda = -1$: Die Geraden sind paarweise parallel, aber nicht identisch.
$\lambda = 0$: Die Geraden haben den Ursprung gemein.
$\lambda = 1$: Die Geraden sind identisch.

23. a)

$$g_1' : y - 6 = 0, \qquad g_2' : 3x - 5y + 9 = 0, \qquad g_3' : 3x - 7y + 9 = 0$$

b) $F' = 12$

24. Die Bildfigur $A'B'C'D'$ ist ein Trapez mit $A'(-2,4)$, $B'(1,7)$, $C'(4,8)$, $D'(2,6)$.

25. Die Bildfigur k' ist eine Ellipse mit der Gleichung $2x^2 + 8y^2 = 1$.

26. Eine Gleichung der Bildgeraden g' ist $x + 2y = 0$.

12 Literaturverzeichnis

1. Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

2. Keller, O.-H., Analytische Geometrie und lineare Algebra, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

3. Kochendörffer, R., Determinanten und Matrizen, 5. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967.

4. Kowalewski, G., Einführung in die Determinantentheorie, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1954.

5. v. Mangoldt, H., und K. Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Band 1, 13. Aufl., Hirzel Verlag, Leipzig 1966.